

LÊ ĐÌNH THUY

TOÁN CAO CẤP CHO CÁC NHÀ KINH TẾ

PHẦN I: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC KINH TẾ QUỐC DÂN

Chương 1

TẬP HỢP, QUAN HỆ VÀ LOGIC SUY LUẬN

§1. TẬP HỢP

I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

a. Tập hợp và phần tử

Tập hợp là một khái niệm nguyên thủy của toán học. Ta có thể nói đến các tập hợp khác nhau như tập hợp cây trong một khu vườn, tập hợp học sinh của một lớp học, tập hợp tất cả các số thực, tập hợp tất cả các số hữu tỷ,... Các đối tượng hợp thành một tập hợp được gọi là các *phần tử* của tập hợp đó. Để phân biệt, ta gọi tên tập hợp bằng các chữ in hoa A, B, C,... và ký hiệu các phần tử bằng các chữ in thường a, b, c,... Để nói rằng a là một phần tử của tập hợp A ta dùng ký hiệu:

$$a \in A \text{ (đọc là: "a thuộc A").}$$

Ngược lại, nếu a không phải là phần tử của tập hợp A thì ta viết:

$$a \notin A \text{ (đọc là: "a không thuộc A").}$$

Để xác định một tập hợp nhất định và đặt tên là X, ta sử dụng một trong hai phương pháp cơ bản sau đây:

1. Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp:

$$X = \{a, b, c, \dots\}.$$

2. Mô tả tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp. Theo phương pháp này, muốn xác định tập hợp X ta nói: X là tập hợp các phần tử x có tính chất T, hoặc dùng ký hiệu:

$$X = \{x: T\}.$$

Chẳng hạn, các cách diễn đạt sau đây có nghĩa như nhau:

- $X = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
- X là tập hợp các số nguyên dương lẻ một chữ số.
- $X = \{x: x \text{ là số nguyên dương lẻ một chữ số}\}$.
- $X = \{x: x = 2n - 1, \text{ với } n \text{ là số nguyên dương nhỏ hơn } 6\}$.

Phương pháp thứ hai được sử dụng ngay cả khi ta chưa biết có tồn tại hay không các phần tử có tính chất T . Chẳng hạn, ta có thể nói về tập hợp nghiệm của một phương trình ngay cả khi chưa giải được phương trình đó. Có thể xảy ra trường hợp một tập hợp mà ta nói đến không có phần tử nào. Ta gọi tập hợp không có phần tử là *tập hợp trống* hay *tập hợp rỗng* và dùng ký hiệu $\emptyset$ để chỉ tập hợp đó. Để khẳng định rằng tập hợp X không có phần tử ta viết: $X = \emptyset$. Ngược lại, để khẳng định rằng tập hợp X có ít nhất một phần tử ta viết: $X \neq \emptyset$.

Chú ý: Trong cuốn sách này và trong các tài liệu khác liên quan đến toán học từ "tập hợp" nhiều khi được gọi tắt là *tập*, chẳng hạn, tập A , tập B , tập trống...

b. Khái niệm tập con và đẳng thức tập hợp

Một tập hợp B được gọi là *tập hợp con*, hay *tập con*, của một tập hợp A nếu mọi phần tử của B đều là phần tử của A . Trong trường hợp này ta dùng ký hiệu:

$$B \subset A \text{ (đọc là: "B chứa trong A"),}$$

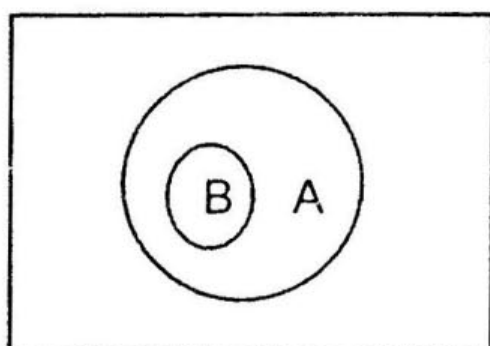
$$\text{hoặc } A \supset B \text{ (đọc là: "A bao hàm B").}$$

Nói một cách đơn giản, tập hợp con của tập hợp A là tập hợp một bộ phận phần tử, hoặc tất cả các phần tử, của tập hợp A . Nếu $B \subset A$ và đồng thời $A \subset B$ thì ta nói *tập hợp B bằng tập hợp A* và viết $B = A$. Như vậy, đẳng thức tập hợp $B = A$ có nghĩa là mọi phần tử của B đều là phần tử của A và ngược lại, mọi phần tử của A đều là phần tử của B . Nếu tập hợp B không bằng tập hợp A thì ta viết $B \neq A$. Tập hợp B được gọi là *tập con thực*

sự của tập hợp A nếu $B \subset A$ nhưng $B \neq A$. Chẳng hạn, tập hợp dân cư của thành phố Hà Nội là tập con thực sự của tập hợp dân cư của nước Việt Nam.

c. Biểu đồ Ven

Để dễ hình dung về tập hợp và mối liên hệ giữa các tập hợp, người ta dùng các tập hợp điểm của mặt phẳng để minh họa. Thông thường ta xét các tập hợp phần tử của một tập hợp bao trùm, gọi là *không gian* hay *vũ trụ*. Tập không gian được mô tả bằng tập hợp các điểm của một hình chữ nhật. Mỗi tập hợp trong không gian được minh họa bằng một tập hợp điểm giới hạn bởi một đường khép kín bên trong hình chữ nhật. Cách minh họa ước lệ như vậy được gọi là *biểu đồ Ven*. Chẳng hạn, biểu đồ Ven ở hình 1 mô tả hai tập hợp A và B, trong đó B là tập con của A.



Hình 1: B là tập con của A

II. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

a. Phép hợp và phép giao

Định nghĩa:

1. *Hợp* của hai tập hợp A và B là một tập hợp mà mỗi phần tử của nó là phần tử của ít nhất một trong hai tập hợp đó.
2. *Giao* của hai tập hợp A và B là một tập hợp mà mỗi phần tử của nó là phần tử của cả hai tập hợp A và B.

Hợp của hai tập hợp A và B được ký hiệu là $A \cup B$:

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

Giao của hai tập hợp A và B được ký hiệu là $A \cap B$:

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

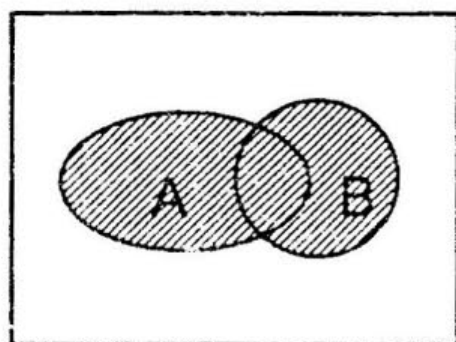
Ví dụ: Cho hai tập hợp số

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{0, 2, 4, 6, 8\}.$$

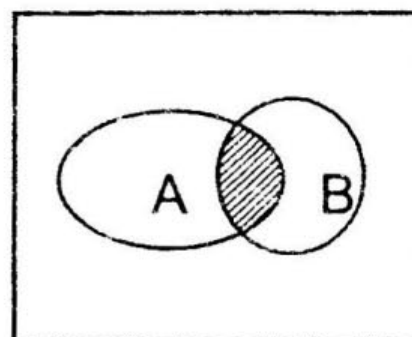
Theo định nghĩa:

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}, A \cap B = \{2, 4\}.$$

Hình 2a và 2b là biểu đồ Ven về phép hợp và phép giao tập hợp.



Hình 2a: $A \cup B$



Hình 2b: $A \cap B$

b. Các tính chất cơ bản

Phép hợp và phép giao tập hợp thoả mãn các tính chất cơ bản sau đây:

1. Tính chất giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A. \quad (1.1)$$

2. Tính chất kết hợp:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C, \quad (1.2)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C. \quad (1.3)$$

3. Tính chất phân phối:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad (1.4)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \quad (1.5)$$

Chứng minh: Để chứng minh một đẳng thức tập hợp, ta cần chỉ ra rằng mỗi phần tử của tập hợp ở vế trái đều là phần tử của tập hợp ở vế phải và ngược lại, mỗi phần tử của tập hợp ở vế phải đều là phần tử của tập hợp ở vế trái. Chẳng hạn, đẳng thức (1.5) được chứng minh như sau:

Gọi x là một phần tử bất kỳ của tập hợp $A \cup (B \cap C)$. Theo định nghĩa phép hợp, điều này có nghĩa là $x \in A$ hoặc $x \in B \cap C$. Nếu $x \in A$ thì $x \in A \cup B$ và $x \in A \cup C$, do đó $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Nếu $x \in B \cap C$ thì $x \in B$ và $x \in C$, suy ra $x \in A \cup B$ và $x \in A \cup C$, do đó ta cũng có $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Ngược lại, gọi x là một phần tử bất kỳ của $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, ta có: $x \in A \cup B$ và $x \in A \cup C$. Nếu $x \in A$ thì $x \in A \cup (B \cap C)$. Nếu $x \notin A$ thì $x \in B$ (do $x \in A \cup B$) và $x \in C$ (do $x \in A \cup C$), do đó $x \in B \cap C$, suy ra $x \in A \cup (B \cap C)$.

Việc chứng minh các đẳng thức còn lại dành cho bạn đọc.

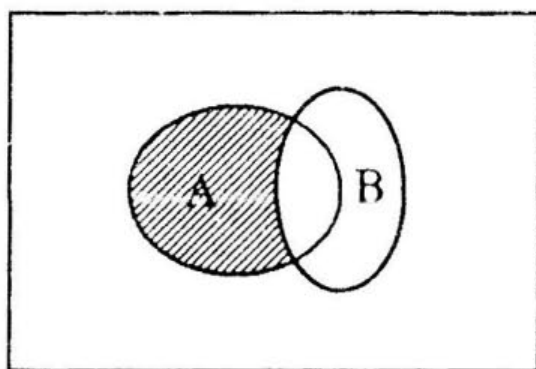
c. Phép trừ tập hợp và phần bù của một tập hợp

Định nghĩa: Hiệu của tập hợp A và tập hợp B là tập hợp tất cả các phần tử của tập hợp A không thuộc tập hợp B .

Hiệu của tập hợp A và tập hợp B được ký hiệu là $A \setminus B$:

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ và } x \notin B\}.$$

Hình 3 là biểu đồ Ven về hiệu $A \setminus B$.



Hình 3: $A \setminus B$

Ví dụ:

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{1, 3, 5\},$$

$$\{0, 2, 4, 6, 8\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{0, 6, 8\}.$$

Khi tất cả các tập hợp được xét đều là tập con của một tập hợp S (gọi là không gian S), người ta thường nói đến phần bù của một tập hợp $X \subset S$.

Định nghĩa:

Phần bù của một tập hợp X trong không gian S là tập hợp tất cả các phần tử của không gian không thuộc tập hợp X .

Phần bù của tập hợp X được ký hiệu là $\bar{X}$. Theo định nghĩa, ta có:

$$\bar{X} = S \setminus X.$$

Ví dụ: Trong tập hợp tất cả các số thực, tập hợp tất cả các số vô tỷ là phần bù của tập hợp tất cả các số hữu tỷ.

Định lý sau đây được gọi là *nguyên lý đối ngẫu*:

Định lý:

1. Phần bù của hợp của các tập hợp là giao của các phần bù của chúng:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad (1.6)$$

2. Phần bù của giao của các tập hợp là hợp của các phần bù của chúng:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \quad (1.7)$$

Chứng minh:

Ta chứng minh đẳng thức (1.6), còn đẳng thức (1.7) được chứng minh tương tự. Chú ý rằng tất cả các phần tử được nhắc đến d rới đây đều là phần tử của một không gian S .

Gọi x là phần tử bất kỳ của $\overline{A \cup B}$, ta có:

$$x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \text{ và } x \notin B \Rightarrow x \in \bar{A} \text{ và } x \in \bar{B} \Rightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Ngược lại, gọi x là phần tử bất kỳ của $\bar{A} \cap \bar{B}$, ta có:

$$x \in \bar{A} \text{ và } x \in \bar{B} \Rightarrow x \notin A \text{ và } x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in \overline{A \cup B}.$$

BÀI TẬP

1. Hãy cho biết tập hợp A có phải là tập con của tập hợp B hay không?

a) $A = \{2, 1, 5, -3, 12, 15\}$, $B = [1; 16]$.

b) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 = 3x - 2\}$, $B = [-3; 3]$.

c) $A = [2; +\infty)$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 2x^2 - 3x + 1 > 0\}$.

d) $A = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \text{ và } (x - 1)^2 + y^2 \leq 4\}$,

$B = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ và } x^2 + y^2 \leq 16\}$.

2. Hãy cho biết khi nào $A \subset B$:

a) $A = [a; b]$, $B = [c; d]$.

b) $A = [a; b]$, $B = (c; d)$.

c) $A = [a; b]$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 > 0\}$

3. Hãy xác định $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$:

a) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

b) $A = (-\infty; 5]$; $B = (3; 8)$.

c) $A = [-2; 5]$; $B = (1; 9)$.

4. Chứng minh rằng, với A và B là hai tập hợp bất kỳ, ta luôn có

a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

b) $(A \cup B) \setminus [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] = A \cap B$.

c) $A \subset B$ khi và chỉ $A \cap B = A$.

§2. HỆ THỐNG SỐ THỰC

I. SỐ THỰC

Hệ thống số thực mà chúng ta sử dụng ngày nay được hình thành trong lịch sử toán học theo trình tự như sau:

a. Số tự nhiên

Các con số xuất hiện sớm nhất trong lịch sử toán học là các số của hệ đếm:

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

Các số đó được gọi là các *số tự nhiên*, hay *số nguyên dương*. Tập hợp tất cả các số tự nhiên được ký hiệu là $\mathbb{N}$.

b. Số nguyên

Trong phạm vi tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ ta có thể thực hiện hai phép toán số học cơ bản là phép cộng và phép nhân. Tuy nhiên, các phép toán ngược của phép cộng và phép nhân (phép trừ và phép chia) bị hạn chế. Chẳng hạn, không tồn tại số tự nhiên n sao cho $9 + n = 1$. Để có thể thực hiện được phép trừ người ta mở rộng hệ thống số tự nhiên bằng cách bổ sung thêm các số:

- Số không: 0;
- Các số đối dấu với các số tự nhiên: $-1, -2, -3, \dots, -n, \dots$. Các số này được gọi là các *số nguyên âm*.

Các số nguyên dương, số 0 và các số nguyên âm được gọi là *số nguyên*. Tập hợp tất cả các số nguyên được ký hiệu là $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}.$$

Tập hợp $\mathbb{N}$ là một tập hợp con của tập hợp $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

c. Số hữu tỷ

Trong tập hợp số nguyên $\mathbb{Z}$ ta có thể thực hiện phép cộng, phép trừ và nhân. Tuy nhiên, phép toán ngược của phép nhân (phép

Chương 1: Tập hợp, Quan hệ và Logic suy luận

chia) vẫn bị hạn chế. Chẳng hạn, không tồn tại số nguyên m sao cho $2m = 3$. Để thực hiện được phép toán ngược của phép nhân, người ta mở rộng hệ thống số nguyên thành hệ thống số hữu tỷ.

Số hữu tỷ là tỷ số của hai số nguyên. Mỗi số hữu tỷ được viết dưới dạng một phân số tối giản:

$$r = \frac{m}{n} \quad (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}).$$

Nếu biểu diễn dưới dạng số thập phân thì số hữu tỷ là số thập phân hữu hạn hoặc số thập phân vô hạn tuần hoàn. Chẳng hạn

$$\frac{5}{4} = 1,25; \quad \frac{11}{6} = 1,8333...; \quad \frac{-32}{13} = -2,461538461538...$$

Tập hợp tất cả các số hữu tỷ được ký hiệu là $\mathbb{Q}$. Số nguyên cũng là số hữu tỷ (với mẫu số bằng 1), do đó $\mathbb{Z}$ là một tập hợp con của $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

d. Số thực

Trong tập hợp số hữu tỷ ta có thể thực hiện cả bốn phép toán cộng, trừ, nhân, chia. Các số hữu tỷ được sử dụng rộng rãi trong việc biểu diễn và phân tích các thông tin định lượng. Tuy nhiên, tập hợp số hữu tỷ vẫn chưa đủ để đáp ứng các nhu cầu tính toán. Chẳng hạn, độ dài của cạnh huyền của một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 1 không thể biểu diễn được bằng một số hữu tỷ. Để hoàn thiện hệ thống số, người ta bổ sung thêm các số vô tỷ. Nếu biểu diễn dưới dạng số thập phân thì *số vô tỷ là số thập phân vô hạn không tuần hoàn*. Chẳng hạn, số đo độ dài cạnh huyền của tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 1 là số vô tỷ:

$$\sqrt{2} = 1,4142135623...$$

Các số hữu tỷ và các số vô tỷ được gọi là *số thực*. Tập hợp tất cả các số thực được ký hiệu là $\mathbb{R}$ và tập hợp tất cả các số vô tỷ được ký hiệu là $\bar{\mathbb{Q}}$. Ta có:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \bar{\mathbb{Q}}, \quad \mathbb{Q} \cap \bar{\mathbb{Q}} = \emptyset.$$

II. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CÁC SỐ THỰC

a. Giá trị tuyệt đối của số thực

Định nghĩa: Giá trị tuyệt đối của một số thực x là số không âm trong hai số x và $-x$.

Giá trị tuyệt đối của số thực x được ký hiệu là $|x|$. Theo định nghĩa, ta có:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{nếu } x > 0; \\ 0 & \text{nếu } x = 0; \\ -x & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Bạn đọc cần ghi nhớ các tính chất cơ bản sau đây:

1. Với a là một số dương cho trước:

- $|x| < a$ khi và chỉ khi $-a < x < a$;
- $|x| > a$ khi và chỉ khi $x < -a$ hoặc $x > a$.

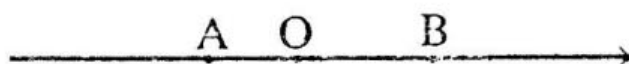
2. Với x và y là hai số thực bất kỳ:

- $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- $|x - y| \geq |x| - |y|$;
- $|xy| = |x||y|$;
- $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

b. Trục số và độ dài đại số của đoạn thẳng

Trục số là một đường thẳng, trên đó có xác định:

- Hướng của đường thẳng (theo chiều mũi tên);
- Một điểm O cố định, gọi là *gốc tọa độ*;
- Đơn vị đo độ dài.



Trên trục số lấy hai điểm A, B bất kỳ. Độ dài hình học của đoạn thẳng AB (khoảng cách giữa A và B) cũng được ký hiệu là AB.

Định nghĩa: *Độ dài đại số* của đoạn thẳng AB trên trục số là một số thực, ký hiệu là $\overline{AB}$ và được xác định như sau:

- $\overline{AB} = AB$ nếu hướng từ A đến B cùng hướng của trục số;
- $\overline{AB} = -AB$ nếu hướng từ A đến B ngược hướng của trục số.

Từ định nghĩa ta suy ra các tính chất cơ bản sau đây:

1. Với A và B là hai điểm bất kỳ trên trục số ta luôn có:

$$|\overline{AB}| = AB, \quad \overline{AB} = -\overline{BA}.$$

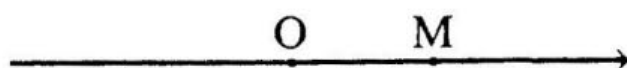
2. Với A, B, C là ba điểm bất kỳ trên trục số ta luôn có:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Việc chứng minh các tính chất trên dành cho bạn đọc.

c. Biểu diễn số thực trên trục số

Trên một trục số cho trước lấy một điểm M bất kỳ.



Định nghĩa: Số thực $x = \overline{OM}$ được gọi là *tọa độ* của điểm M. Để nói rằng điểm M trên trục số có tọa độ là số x ta viết: M(x).

Như vậy, mỗi điểm M trên trục số được đặt tương ứng với một số thực x xác định, gọi là *tọa độ* của nó. Ngược lại, mỗi số thực

x cho tương ứng một điểm M trên trục số có tọa độ bằng x . Đó là điểm mà khoảng cách đến gốc tọa độ O bằng $|x|$, về phía bên phải nếu $x > 0$, về phía bên trái nếu $x < 0$ và trùng với gốc tọa độ nếu $x = 0$.

Phép tương ứng một đối một nói trên giữa tất cả các điểm của trục số và tất cả các số thực cho phép ta đồng nhất số thực x với điểm $M(x)$ trên trục số. Ta có thể dùng từ "điểm x " để gọi một số thực x . Mỗi tập hợp số thực $X \subset \mathbb{R}$ là một tập hợp điểm của trục số. Trục số còn được gọi là *đường thẳng thực*.

d. Khoảng cách giữa hai điểm trên trục số

Với $A(a)$ và $B(b)$ là hai điểm bất kỳ trên trục số, ta có:

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{OA} = b - a.$$

Từ đây ta suy ra công thức xác định khoảng cách giữa hai điểm $A(a)$ và $B(b)$ theo tọa độ của chúng:

$$AB = |\overline{AB}| = |b - a|.$$

III. CÁC KHOẢNG SỐ THỰC

Khi biểu diễn và phân tích các thông tin định lượng, người ta thường sử dụng các số thực trong phạm vi một tập hợp $X \subset \mathbb{R}$. Ta dùng từ *tập số thực*, hay *tập số* để chỉ các tập con của $\mathbb{R}$. Các khoảng số thực là các tập số thực có cấu trúc đơn giản nhất.

a. Khoảng hữu hạn

Với a và b là hai số thực cho trước ($a < b$), ta gọi tập hợp tất cả các số thực x giữa a và b là một *khoảng*. Các số a và b được gọi là các *đầu mút* của *khoảng số đó*. Nếu biểu diễn trên trục số thì một khoảng là một đoạn thẳng nối hai điểm $A(a)$ và $B(b)$. Khi xét một khoảng số ta có thể tính cả các đầu mút hoặc không. Để phân biệt điều đó ta dùng các ký hiệu như sau:

Khoảng đóng:

$$[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Khoảng đóng $[a; b]$ còn được gọi là đoạn $[a; b]$.

Khoảng mở:

$$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Các khoảng nửa mở:

$$[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\};$$

$$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

b. lân cận của một điểm

Với x_0 là một số thực cho trước và r là một số dương cho trước, ta có:

$$x \in (x_0 - r; x_0 + r) \Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r$$

$$\Leftrightarrow -r < x - x_0 < r \Leftrightarrow |x - x_0| < r.$$

Như vậy, khoảng $(x_0 - r; x_0 + r)$ là tập hợp tất cả các điểm x có khoảng cách đến điểm x_0 nhỏ hơn r . Ta gọi khoảng đó là *lân cận bán kính r của điểm x* và ký hiệu là $V_r(x_0)$:

$$V_r(x_0) = (x_0 - r; x_0 + r).$$

c. Khoảng vô hạn

Trong toán học người ta dùng các ký hiệu $-\infty$ và $+\infty$ để chỉ các đầu mút bên trái và bên phải của trục số. Theo quy ước, với mọi số thực x ta có: $-\infty < x < +\infty$. Các tập số thực sau đây được gọi là các khoảng vô hạn:

$$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}; \quad (a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\};$$

$$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}; \quad (-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\};$$

$$(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}.$$

Chú ý rằng $\pm \infty$ chỉ là các ký hiệu ước lệ, không phải là số thực.

IV. TẬP HỢP BỊ CHẶN

a. Định nghĩa tập hợp bị chặn

Một tập số thực $X \subset \mathbb{R}$ được gọi là *bị chặn trên* nếu tồn tại số thực b sao cho với mọi $x \in X$ ta luôn có: $x \leq b$. Số b được gọi là *cận trên* của tập X .

Một tập số thực $X \subset \mathbb{R}$ được gọi là *bị chặn dưới* nếu tồn tại số thực a sao cho với mọi $x \in X$ ta luôn có: $x \geq a$. Số a được gọi là *cận dưới* của tập X .

Một tập số thực $X \subset \mathbb{R}$ được gọi là *bị chặn* nếu nó đồng thời bị chặn trên và bị chặn dưới, tức là tồn tại các số thực a và b sao cho với mọi $x \in X$ ta luôn có: $a \leq x \leq b$. Nói cách khác, tập hợp X được gọi là bị chặn nếu tồn tại đoạn $[a; b]$ sao cho $X \subset [a; b]$.

Ví dụ: Các khoảng hữu hạn là các tập bị chặn. Các khoảng $(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$ là các tập bị chặn dưới, nhưng không bị chặn trên. Các khoảng $(-\infty; b)$, $(-\infty; b]$ là các tập bị chặn trên, nhưng không bị chặn dưới.

b. Cận trên đúng và cận dưới đúng

Định nghĩa: Cận trên nhỏ nhất (cận dưới lớn nhất) của một tập hợp bị chặn trên (tập hợp bị chặn dưới) được gọi là *cận trên đúng* (*cận dưới đúng*) của tập hợp đó.

Cận trên đúng của tập X được ký hiệu là $\sup X$;

Cận dưới đúng của tập X được ký hiệu là $\inf X$.

Từ định nghĩa suy ra:

$\sup X = b$ khi và chỉ khi thoả mãn hai điều kiện:

- $x \leq b$ với mọi $x \in X$ (b là một cận trên của X);
- Với mọi số $b' < b$ luôn tồn tại số $x_0 \in X$ sao cho $x_0 > b'$ (mọi số $b' < b$ không phải là cận trên của X).

Ví dụ: Tập hợp $X = (a, b)$ có cận trên đúng là số b .

Thật vậy, hiển nhiên là $x < b$ với mọi $x \in (a, b)$. Mặt khác, với mọi số $b' < b$ thì $K = (a; b) \cap (b'; b) \neq \emptyset$, do đó tồn tại $x_0 \in K$. Số $x_0 \in K$ là số thoả mãn điều kiện $x_0 \in (a, b)$ và $x_0 > b'$. Vậy cả hai điều kiện nêu trên đều thoả mãn, do đó $\sup(a; b) = b$.

Tương tự, $\inf X = a$ khi và chỉ khi thoả mãn hai điều kiện sau:

- $x \geq a$ với mọi $x \in X$ (a là một cận dưới của X);
- Với mọi số $a' > a$ luôn tồn tại số $x_0 \in X$ sao cho $x_0 < a'$ (mọi số $a' > a$ không phải là cận dưới của X).

Ví dụ: Bạn đọc hãy tự kiểm tra hai điều kiện trên để khẳng định rằng cận dưới đúng của khoảng $(a; b)$ bằng a : $\inf(a; b) = a$.

Trong toán học người ta đã chứng minh định lý sau đây:

Định lý: Mọi tập số thực $X \neq \emptyset$ bị chặn trên (bị chặn dưới) đều có cận trên đúng (cận dưới đúng).

c. Số cực đại và số cực tiểu

Cận trên đúng và cận dưới đúng của một tập số thực X có thể thuộc hoặc không thuộc tập hợp X . Chẳng hạn:

Với $X = [a, b)$: $\sup X = b \notin X$, $\inf X = a \in X$;

Với $Y = (a; b]$: $\sup Y = b \in Y$, $\inf Y = a \notin Y$.

Định nghĩa: Nếu $\sup X = b$ và $b \in X$ thì số b được gọi là *số cực đại*, hay *số lớn nhất*, của tập hợp X . Tương tự, nếu $\inf X = a$ và $a \in X$ thì số a được gọi là *số cực tiểu*, hay *số nhỏ nhất*, của tập hợp X .

Số lớn nhất của tập hợp X được ký hiệu là $\max X$, còn số nhỏ nhất của tập hợp X được ký hiệu là $\min X$. Từ định nghĩa suy ra:

$$\max X = b \Leftrightarrow x \leq b \text{ với mọi } x \in X \text{ và } b \in X;$$

$$\min X = a \Leftrightarrow x \geq a \text{ với mọi } x \in X \text{ và } a \in X.$$

Ví dụ:

- $\max[a; b] = b$, $\min[a; b] = a$.

- Tập $(a; b)$ không có số lớn nhất và số nhỏ nhất.

§3. QUAN HỆ

I. TÍCH DES CARTES

Định nghĩa: *Tích Des Cartes* của hai tập hợp X và Y là tập hợp tất cả các cặp có thứ tự (x, y) , trong đó x là một phần tử của tập X và y là một phần tử của tập Y .

Tích Des Cartes của X và Y được gọi tắt là *tích của X và Y* . Ta ký hiệu tích của hai tập hợp X và Y là $X \times Y$:

$$X \times Y = \{(x, y): x \in X \text{ và } y \in Y\}.$$

Chú ý: Ký hiệu (x, y) chỉ một cặp có thứ tự: x là phần tử đứng trước, y là phần tử đứng sau. Với x và y là hai phần tử khác nhau thì (x, y) và (y, x) là hai cặp có thứ tự khác nhau. Từ hai tập hợp X và Y ta có hai tập tích: $X \times Y$ và $Y \times X$.

Ví dụ: Với $X = \{x, y, z\}$, $Y = \{a, b\}$, ta có:

$$X \times Y = \{(x, a), (x, b), (y, a), (y, b), (z, a), (z, b)\};$$

$$Y \times X = \{(a, x), (b, x), (a, y), (b, y), (a, z), (b, z)\}.$$

Trên đây là định nghĩa tích Des Cartes của hai tập hợp. Tích Des Cartes của n tập hợp được định nghĩa tương tự như sau:

Định nghĩa: *Tích của n tập hợp* $X_1, X_2, \dots, X_n$ là tập hợp tất cả các bộ n phần tử có thứ tự $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, trong đó x_k là phần tử của tập hợp X_k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Tích của các tập hợp $X_1, X_2, \dots, X_n$ được ký hiệu tương tự:

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n\}.$$

Đặc biệt, khi $X_1 = X_2 = \dots = X_n = X$, tích $X \times X \times \dots \times X$ (n lần) được ký hiệu là X^n :

$$X^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_1 \in X, x_2 \in X, \dots, x_n \in X\}.$$

II. QUAN HỆ**a. Khái niệm quan hệ**

Theo nghĩa thông thường, quan hệ trong một tập hợp là một tính chất đặc trưng hay một quy ước liên kết các phần tử của tập hợp đó. Quan hệ hai ngôi liên kết các phần tử theo từng cặp. Chẳng hạn, quan hệ hôn nhân trong cộng đồng người liên kết hai người có đăng ký kết hôn; quan hệ chia hết liên kết các số nguyên theo từng cặp (p, q) , trong đó p là số chia hết cho q . Nói một cách khái quát, một quan hệ hai ngôi φ trong tập hợp X là một quy tắc xác định những cặp phần tử (x, y) có quan hệ với nhau theo quy tắc đó. Nếu xem mỗi cặp phần tử (x, y) của tập hợp X là một phần tử của tập tích X^2 thì một quan hệ φ xác định một tập hợp $\Phi \subset X^2$. Ta có thể đồng nhất quan hệ φ với tập con Φ của tập tích X^2 .

Định nghĩa: Quan hệ hai ngôi trong tập hợp X là một tập con của tập hợp X^2 .

Ví dụ:

- Trong tập hợp người X , quan hệ cha con là tập hợp

$$\{(x, y): x \in X, y \in X, x \text{ là cha của } y\} \subset X^2.$$

- Trong tập hợp số thực $\mathbb{R}$, quan hệ “không nhỏ hơn” là tập hợp:

$$\{(x, y): x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x \geq y\} \subset \mathbb{R}^2.$$

- Trong tập hợp tất cả các tam giác quan hệ “đồng dạng” là tập hợp các cặp tam giác (Δ, Δ') mà Δ đồng dạng với Δ' .

b. Quan hệ tương đương

Cho $\Phi \subset X^2$ là một quan hệ trong tập hợp X . Nếu $(x, y) \in \Phi$ thì ta nói phần tử x có quan hệ Φ với phần tử y và viết: $x\Phi y$.

Định nghĩa: Một quan hệ Φ trong tập hợp X được gọi là *quan hệ tương đương* nếu nó có các tính chất sau:

1. *Tính phản xạ:* $a\Phi a, \forall a \in X$ (Mọi phần tử a của tập hợp X có quan hệ Φ với chính nó);
2. *Tính đối xứng:* Nếu $a\Phi b$ thì $b\Phi a$ (Nếu a có quan hệ Φ với b thì b cũng có quan hệ Φ với a);
3. *Tính bắc cầu:* Nếu $a\Phi b$ và $b\Phi c$ thì $a\Phi c$ (Nếu a có quan hệ Φ với b và b có quan hệ Φ với c thì a có quan hệ Φ với c).

Ví dụ:

- Quan hệ “ x đồng dạng với y ” là một quan hệ tương đương trong tập hợp tất cả các tam giác.
- Quan hệ “ x sinh cùng năm với y ” là một quan hệ tương đương trong tập hợp sinh viên của một trường đại học.
- Quan hệ “ x là bạn của y ” trong tập hợp sinh viên của một trường đại học không phải là quan hệ tương đương bởi vì quan hệ này không có tính bắc cầu.

c. Quan hệ thứ tự

Định nghĩa: Một quan hệ Φ trong tập hợp X được gọi là *quan hệ thứ tự* nếu nó thỏa mãn các tính chất sau:

1. *Tính phản xạ:* $a\Phi a, \forall a \in X$ (Mọi phần tử a của tập hợp X có quan hệ Φ với chính nó);
2. *Tính bắc cầu:* Nếu $a\Phi b$ và $b\Phi c$ thì $a\Phi c$ (Nếu a có quan hệ Φ với b và b có quan hệ Φ với c thì a có quan hệ Φ với c).
3. *Tính phản đối xứng:* Nếu $a\Phi b$ và $b\Phi a$ thì $a = b$ (phần tử a trùng với phần tử b).

Ví dụ:

- Quan hệ “ $x \leq y$ ” là một quan hệ thứ tự trong tập hợp tất cả các số thực.

- Quan hệ “ p chia hết cho q ” là một quan hệ thứ tự trong tập hợp tất cả các số tự nhiên.

III. ÁNH XẠ

a. Khái niệm ánh xạ

Cho X và Y là hai tập hợp không rỗng bất kỳ.

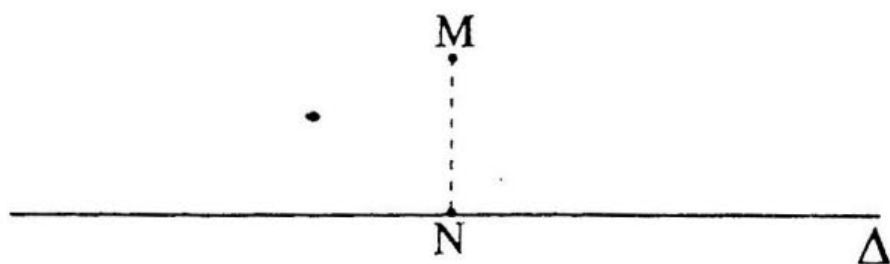
Định nghĩa: Một ánh xạ f từ tập hợp X vào tập hợp Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của tập X với một và chỉ một phần tử y của tập Y .

Để nói rằng f là một ánh xạ từ tập hợp X vào tập hợp Y ta dùng ký hiệu:

$$f: X \mapsto Y.$$

Phần tử $y \in Y$ tương ứng với phần tử $x \in X$ qua ánh xạ f được gọi là **ảnh của phần tử x** . Để nói rằng y là ảnh của phần tử x qua ánh xạ f ta viết: $y = f(x)$.

Ví dụ 1: Phép đặt tương ứng mỗi điểm M của một mặt phẳng P với hình chiếu vuông góc N của nó trên một đường thẳng $\Delta \subset P$ là một ánh xạ từ P vào Δ .



Ánh xạ này được gọi là phép chiếu vuông góc. Điểm N là ảnh của điểm M qua phép chiếu đó.

Ví dụ 2: Phép đặt tương ứng mỗi số thực x với số nguyên m thỏa mãn điều kiện $m \leq x < m + 1$ (gọi là phần nguyên của x) là một ánh xạ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{Z}$.

Nhận xét: Mỗi ánh xạ $f: X \mapsto Y$, trong đó X và Y là hai tập hợp con của tập không gian S , xác định một quan hệ trong S :

$$\Phi = \{(x, y): x \in X \text{ và } y = f(x)\} \subset S^2.$$

b. Ảnh và nghịch ảnh của một tập hợp

Cho một ánh xạ $f: X \mapsto Y$.

Định nghĩa: Ảnh của một tập $A \subset X$ qua ánh xạ f là tập hợp ảnh của tất cả các phần tử $x \in A$.

Ảnh của tập hợp A được ký hiệu là $f(A)$:

$$f(A) = \{y \in Y: \text{Tồn tại } x \in A \text{ sao cho } y = f(x)\}.$$

Ví dụ: Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \mapsto [0, +\infty)$ đặt tương ứng mỗi số $x \in \mathbb{R}$ với số $y = x^2 \in [0, +\infty)$. Ta có:

$$f([-1, 3]) = [0, 9], \quad f([1, 2]) = [1, 4], \quad f([-2, -1]) = [1, 4].$$

Định nghĩa: Nghịch ảnh của một tập hợp $B \subset Y$ qua ánh xạ f là tập hợp tất cả các phần tử của tập X có ảnh thuộc tập B .

Nghịch ảnh của tập B được ký hiệu là $f^{-1}(B)$:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}.$$

Nghịch ảnh của tập hợp một phần tử $b \in Y$ được gọi là nghịch ảnh của phần tử b và được ký hiệu là $f^{-1}(b)$:

$$f^{-1}(b) = \{x \in X: f(x) = b\}.$$

Ví dụ: Với f là ánh xạ cho ở ví dụ trên, ta có:

$$f^{-1}(1) = \{1, -1\}, \quad f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2], \quad f^{-1}([0, +\infty)) = \mathbb{R}.$$

Sau đây là một số tính chất cơ bản của ảnh và nghịch ảnh.

Định lý: Với mọi ánh xạ $f: X \mapsto Y$ ta luôn có:

$$1. \quad f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2), \text{ với mọi } A_1 \subset X, A_2 \subset X.$$

$$2. f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \text{ với mọi } B_1 \subset Y, B_2 \subset Y.$$

$$3. f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2), \text{ với mọi } B_1 \subset Y, B_2 \subset Y.$$

Việc chứng minh định lý này chúng tôi dành cho bạn đọc.

c. Đơn ánh, toàn ánh và song ánh

Định nghĩa:

1. Ánh xạ $f: X \mapsto Y$ được gọi là *đơn ánh* nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của tập X luôn có ảnh khác nhau:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Nói cách khác, f là một đơn ánh khi và chỉ khi nghịch ảnh của mọi phần tử $y \in Y$ hoặc là tập trống, hoặc chỉ có một phần tử duy nhất $x \in X$.

2. Ánh xạ $f: X \mapsto Y$ được gọi là *toàn ánh* nếu ảnh của tập hợp X là toàn bộ tập hợp Y : $f(X) = Y$. Nói cách khác, f là một toàn ánh khi và chỉ khi nghịch ảnh của mọi phần tử $y \in Y$ đều không rỗng.

3. Ánh xạ $f: X \mapsto Y$ được gọi là *song ánh* nếu nó vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh.

Ví dụ:

- Ánh xạ $f: \mathbb{R} \mapsto [-1; 1]$ đặt tương ứng mỗi số $x \in \mathbb{R}$ với số $y = \cos x \in [-1; 1]$ là một toàn ánh, nhưng không phải là đơn ánh.
- Ánh xạ $f: [0; \pi] \mapsto \mathbb{R}$ đặt tương ứng mỗi số $x \in [0; \pi]$ với số $y = \cos x \in \mathbb{R}$ là một đơn ánh, nhưng không phải là toàn ánh.
- Ánh xạ $f: [0; \pi] \mapsto [-1; 1]$ đặt tương ứng mỗi số $x \in [0; \pi]$ với số $y = \cos x \in [-1; 1]$ là một song ánh.

d. Ánh xạ ngược

Giả sử ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ là một song ánh. Khi đó, mỗi phần tử $y \in Y$ đều có nghịch ảnh không rỗng (do f là toàn ánh) và nghịch ảnh của nó là một phần tử duy nhất $x \in X$ (do f là đơn ánh). Trong trường hợp này ta có một ánh xạ $f^{-1}: Y \rightarrow X$ đặt tương ứng mỗi phần tử $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x = f^{-1}(y)$. Ánh xạ f^{-1} được gọi là *ánh xạ ngược* của song ánh f .

Ví dụ: Gọi X là tập hợp sinh viên của một lớp học và Y là danh sách ghi tên gọi đầy đủ (gồm họ, tên đệm và tên) của các sinh viên đó. Giả sử lớp học không có hai sinh viên nào trùng tên. Khi đó, ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ đặt tương ứng mỗi sinh viên với tên gọi của sinh viên đó trong danh sách là một song ánh. Ánh xạ ngược của song ánh f là ánh xạ f^{-1} đặt tương ứng mỗi tên trong danh sách với sinh viên có tên đó.

BÀI TẬP

5. Cho $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{1, 4\}$. Hãy chỉ ra các tập tích $A \times B$ và $B \times A$.
6. Quan hệ nào trong số các quan hệ sau đây có tính chất bắc cầu:
 - a) Quan hệ "đồng dạng" trong tập hợp tất cả các tam giác;
 - b) Quan hệ "đã hoặc đang học cùng một lớp" trong tập hợp học sinh phổ thông;
 - c) $\{(x, y): \text{chiều cao của } x \text{ bằng chiều cao của } y\}$ trong một tập hợp dân cư;
 - d) Quan hệ $\{(x, y): x > y\}$ trong tập hợp $\mathbb{R}$;
 - e) Quan hệ $\{(x, y): xy = 1\}$ trong tập hợp $\mathbb{R}$.

7. Trong các quan hệ dưới đây, quan hệ nào là quan hệ tương đương, quan hệ nào là quan hệ thứ tự?

- a) Quan hệ "không nhỏ hơn về diện tích" trong tập hợp tất cả các tam giác;
- b) $\{(x, y): x \text{ đang học cùng một lớp với } y\}$;
- c) $\{(x, y): \text{điểm của } x \text{ không kém điểm của } y\}$ trong tập hợp các thí sinh dự thi tuyển sinh đại học khối A;
- d) Quan hệ cùng phương trong tập hợp tất cả các đường thẳng;
- e) Quan hệ "cùng tuổi" trong tập hợp sinh viên của một trường đại học;
- f) Quan hệ "không ít tuổi hơn" trong tập hợp sinh viên của một trường đại học.

8. Cho trước một đường thẳng d . Trong không gian hình học, điểm A có quan hệ φ với điểm B khi và chỉ khi đoạn thẳng AB nằm trên d hoặc song song với d . Hãy chứng tỏ φ là một quan hệ tương đương.

9. Trong các ánh xạ dưới đây, ánh xạ nào là toàn ánh, ánh xạ nào đơn ánh, ánh xạ nào song ánh?

- a) Ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ đặt tương ứng mỗi số thực x với phần nguyên của nó;
- b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, với $f(x) = x^3$;
- c) $f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, với $f(x) = \sin x$;
- d) $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$, với $f(x) = \sin x$;
- e) $f: \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$, với $f(x) = \sin x$.

10. Gọi f là ánh xạ đặt tương ứng mỗi điểm của mặt phẳng tọa độ với hình chiếu của nó trên trục hoành, X_1 là đoạn thẳng nối hai điểm $M_1(1, 1)$, $N_1(2, 1)$, X_2 là đoạn thẳng nối hai điểm $M_2(1, 2)$, $N_2(2, 2)$. Hãy chứng minh:

$$f(X_1 \cap X_2) \neq f(X_1) \cap f(X_2).$$

§4. ĐẠI CƯƠNG VỀ LOGIC SUY LUẬN

I. MỆNH ĐỀ VÀ CÁC PHÉP LIÊN KẾT MỆNH ĐỀ

a. Mệnh đề trong logic toán học

Hiểu theo nghĩa rộng, mệnh đề là một câu nói chuyển tải thông tin, mô tả một cái gì đó hoặc phát biểu một ý kiến mang tính khẳng định. Đối với các mệnh đề mang tính khẳng định, chúng ta thường có lời bàn: nói như vậy là đúng, hoặc nói như vậy là sai. Mục đích của hoạt động khoa học là khẳng định chân lý khách quan. Những lời bàn đúng sai mang tính chủ quan không có giá trị khoa học. Môn logic toán học đề cập đến cấu trúc logic để phân định đúng sai. Trong khuôn khổ của cuốn sách này, chúng tôi chỉ đề cập đến một số khái niệm cơ bản của logic toán học với mục đích giúp bạn đọc nắm được cách thức suy luận để chứng minh một mệnh đề là đúng.

Trong logic toán học chúng ta chỉ xét các mệnh đề mà về nguyên tắc có thể quy vào một và chỉ một trong hai phạm trù: mệnh đề đúng hoặc mệnh đề sai. Ta gọi các mệnh đề như vậy là *mệnh đề logic*. *Đúng* và *sai* được gọi là các *giá trị chân lý*, hay *giá trị logic* của các mệnh đề. Trong logic toán học người ta dùng các con số 1 và 0 để chỉ các giá trị logic: 1 là đúng, 0 là sai. *Mệnh đề logic là mệnh đề có giá trị logic*.

Để phân biệt mệnh đề này với mệnh đề khác, ta gọi tên mỗi mệnh đề bằng một chữ viết hoa: $A, B, C, \dots$

b. Phủ định

Phủ định của một mệnh đề A là mệnh đề "không A ". Mệnh đề "không A " được ký hiệu là $\bar{A}$. *Giá trị logic của mệnh đề $\bar{A}$ ngược với giá trị logic của mệnh đề A , tức là: $\bar{A}$ đúng khi A sai và $\bar{A}$ sai khi A đúng. Điều này có nghĩa là phủ định của cái đúng là cái sai và phủ định của cái sai là cái đúng. Liên hệ giữa hai mệnh đề A và $\bar{A}$ thể hiện ở bảng giá trị logic như sau:*

A	$\bar{A}$
0	1
1	0

c. Các phép liên kết mệnh đề

Một mệnh đề có thể được hợp thành từ các mệnh đề bằng các phép liên kết mệnh đề sau đây:

- *Phép hội* là phép liên kết các mệnh đề A, B thành mệnh đề " A và B ". Mệnh đề " A và B " được ký hiệu là $A \wedge B$. Mệnh đề $A \wedge B$ đúng khi và chỉ khi cả hai mệnh đề A, B đều đúng và sai trong tất cả các trường hợp còn lại. Bảng sau đây biểu diễn giá trị logic của mệnh đề $A \wedge B$ tùy theo giá trị logic của các mệnh đề A, B :

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- *Phép tuyển* là phép liên kết các mệnh đề $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ thành mệnh đề " $\mathcal{A}$ hoặc $\mathcal{B}$ ". Mệnh đề " $\mathcal{A}$ hoặc $\mathcal{B}$ " được ký hiệu là $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$. Mệnh đề $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ sai khi và chỉ khi cả hai mệnh đề $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ đều sai và đúng trong tất cả các trường hợp còn lại. Bảng sau đây biểu diễn giá trị logic của mệnh đề $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ tùy theo giá trị logic của các mệnh đề $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- *Phép kéo theo* là phép liên kết các mệnh đề $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ thành mệnh đề " $\mathcal{A}$ kéo theo $\mathcal{B}$ ". Mệnh đề " $\mathcal{A}$ kéo theo $\mathcal{B}$ " được ký hiệu là $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$. Mệnh đề $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ sai khi và chỉ khi $\mathcal{A}$ đúng, nhưng $\mathcal{B}$ sai, và đúng trong tất cả các trường hợp còn lại. Khi $\mathcal{A}$ sai thì $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ luôn đúng, bất kể $\mathcal{B}$ đúng hay sai. Bảng sau đây biểu diễn giá trị logic của mệnh đề $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ tùy theo giá trị logic của các mệnh đề $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

d. Giá trị logic của các mệnh đề phức hợp

Xuất phát từ các mệnh đề đơn giản ta có thể lập các mệnh đề mới bằng phép phủ định và các phép liên kết mệnh đề: phép hội, phép tuyển, phép kéo theo. Từ những mệnh đề mới đó ta lại có thể tiếp tục lập các mệnh đề mới v. v... Căn cứ vào các bảng giá trị logic nêu trên ta có thể lập bảng giá trị logic của các mệnh đề phức tạp hơn. Để làm ví dụ ta xét mệnh đề $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Theo giá trị logic của các mệnh đề A, B ta xác định được giá trị logic của hai mệnh đề $(A \Rightarrow B), (B \Rightarrow A)$, từ đó suy ra giá trị logic của mệnh đề $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$. Bảng giá trị logic của mệnh đề này như sau:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Mệnh đề $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, tức là " A kéo theo B và B kéo theo A ", được ký hiệu là: $A \Leftrightarrow B$. Nhìn vào bảng trên ta thấy $A \Leftrightarrow B$ đúng khi A, B có cùng giá trị logic (cùng đúng hoặc cùng sai), sai khi A, B có giá trị logic ngược nhau.

II. HÀM MỆNH ĐỀ**a. Khái niệm biến**

Khi ta luận giải một vấn đề gì đó thì đối tượng luận giải là các phần tử của một tập hợp nào đó. Chẳng hạn, khi ta nói "hai tam giác vuông bằng nhau nếu chúng có cạnh huyền và một góc

nhon bằng nhau" thì đối tượng được nói đến là các phần tử của tập hợp tất cả các tam giác vuông. Khi nhắc đến một phần tử bất kỳ của một tập hợp (không nói cụ thể phần tử nào), người ta thường dùng một ký hiệu để ám chỉ. Một ký hiệu như vậy được xem như phần tử biến thiên trên tập hợp.

Định nghĩa: Một ký hiệu mà ta có thể gán cho nó phần tử bất kỳ của một tập hợp X được gọi là *biến*. Tập hợp X được gọi là *miền biến thiên* của biến đó.

Các biến thường được ký hiệu bằng chữ $x, y, z, \dots$

Một biến mà miền biến thiên của nó là một tập số được gọi là *biến số*. Một biến mà miền biến thiên của nó là tập hợp tất cả các mệnh đề được gọi là *biến mệnh đề*. Các ký hiệu $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$ mà ta sử dụng trên đây để gọi khái quát các mệnh đề giữ vai trò các biến mệnh đề.

b. Hàm mệnh đề

Chúng ta thường gặp những mệnh đề nói khái quát về các phần tử của một tập hợp X nào đó. Khi phát biểu các mệnh đề như vậy người ta phải sử dụng biến. Chẳng hạn, "số x chia hết cho 3" là một mệnh đề nói về các số nguyên, trong đó x là một biến, với miền biến thiên là tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Giá trị logic của mệnh đề này được xác định khi ta gán cho x một số nguyên xác định. Chẳng hạn, khi gán $x = 6$ ta được một mệnh đề đúng: "số 6 chia hết cho 3", còn khi gán $x = 5$ thì ta được một mệnh đề sai: "số 5 chia hết cho 3".

Định nghĩa: Một mệnh đề có chứa biến x , với miền biến thiên X , mà khi gán cho x mỗi phần tử cá biệt của tập hợp X ta được một mệnh đề có giá trị logic xác định, được gọi là *hàm mệnh đề* xác định trên tập hợp X .

Một hàm mệnh đề có thể chứa nhiều biến, nhưng ta có thể gộp một bộ nhiều biến thành một biến. Chẳng hạn bộ hai biến $x \in X$

và $y \in Y$ có thể gộp thành một biến $u = (x, y)$ với miền biến thiên là tập tích $X \times Y$.

Ví dụ:

- ◊ "Nếu x chia hết cho 6 thì x chia hết cho 3" là một hàm mệnh đề xác định trên tập $\mathbb{Z}$ (tập hợp tất cả các số nguyên);
- ◊ $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ là một hàm mệnh đề xác định trên tập hợp tất cả các cặp mệnh đề $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Ta sẽ dùng ký hiệu " $\mathcal{A}(x), x \in X$ " để nói rằng $\mathcal{A}$ là một hàm mệnh đề xác định trên tập X . Khi đã nói trước về miền biến thiên của biến x thì ta viết đơn giản là $\mathcal{A}(x)$. Bản thân hàm mệnh đề $\mathcal{A}(x)$ không có giá trị logic, nhưng khi gán cho x một phần tử cụ thể của tập X thì nó có giá trị logic. Hàm mệnh đề $\mathcal{A}(x)$ phân rã miền biến thiên X thành hai tập con rời nhau (không có phần tử chung):

- Tập hợp tất cả các phần tử của X mà khi gán cho x mệnh đề $\mathcal{A}(x)$ đúng. Ta gọi tập này là *miền đúng* của hàm mệnh đề $\mathcal{A}(x)$ và ký hiệu là X_d .
- Tập hợp tất cả các phần tử của X mà khi gán cho x mệnh đề $\mathcal{A}(x)$ sai. Ta gọi tập này là *miền sai* của hàm mệnh đề $\mathcal{A}(x)$ và ký hiệu là X_s .

Theo cách ký hiệu trên, ta có:

$$X = X_d \cup X_s; \quad X_d \cap X_s = \emptyset.$$

Một phương trình $f(x) = 0$ có thể xem như một hàm mệnh đề xác định trên một tập $X \subset \mathbb{R}$. Miền đúng của hàm mệnh đề này là tập hợp tất cả các nghiệm của phương trình, còn miền sai là phần bù của miền đúng: $X_s = X \setminus X_d$.

Ví dụ: Miền đúng của hàm mệnh đề " $x^2 - 5x + 6 = 0, x \in \mathbb{R}$ " là $X_d = \{2, 3\}$, còn miền sai là $X_s = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

c. Lượng từ

Như đã nói ở trên, một hàm mệnh đề " $\mathcal{A}(x), x \in X$ " tự nó không có giá trị logic, nhưng khi gán cho x một phần tử xác định của tập X thì nó trở thành một mệnh đề có giá trị logic. Do giá trị logic của mệnh đề $\mathcal{A}(x)$ được xác định cho mỗi phần tử $x \in X$, khi gán thêm một câu nói bổ sung về x vào hàm mệnh đề $\mathcal{A}(x)$ ta cũng có thể nhận được một mệnh đề có giá trị logic. Để làm ví dụ ta hãy xét hàm mệnh đề:

$$"x^2 - 5x + 6 = 0, x \in \mathbb{R}."$$

Những mệnh đề sau đây là các mệnh đề có giá trị logic:

"Với $x = 2$, ta có: $x^2 - 5x + 6 = 0$ ": ĐÚNG.

"Có đúng hai số $x \in \mathbb{R}$ sao cho: $x^2 - 5x + 6 = 0$ ": ĐÚNG.

"Tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho: $x^2 - 5x + 6 = 0$ ": ĐÚNG.

"Có đúng ba số $x \in \mathbb{R}$ sao cho: $x^2 - 5x + 6 = 0$ ": SAI.

"Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $x^2 - 5x + 6 = 0$ ": SAI.

Các câu thêm vào như "Với $x = 2$, ta có", "Có đúng hai số $x \in \mathbb{R}$ sao cho", "Tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho", "Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có" được gọi là các *lượng từ*.

Chúng tôi muốn lưu ý bạn đọc về hai lượng từ được sử dụng nhiều trong các mệnh đề toán học:

- *Lượng từ phổ quát* là cụm từ "với mọi $x \in X$ ", hoặc các cụm từ đồng nghĩa: "với bất cứ phần tử nào của tập X ", "với $x \in X$ bất kỳ" v.v.... Các mệnh đề sử dụng lượng từ phổ quát có dạng: "Với mọi $x \in X$ ta có: $\mathcal{A}(x)$ ", hoặc " $\mathcal{A}(x)$ với mọi $x \in X$ ". Trong logic toán học người ta sử dụng ký hiệu $\forall$ thay cho từ "với mọi". Các mệnh đề sử dụng lượng từ $\forall$ nói trên được viết dưới dạng:

$$"\forall x \in X: \mathcal{A}(x)", \text{ hoặc } "\mathcal{A}(x), \forall x \in X".$$

Mệnh đề " $\forall x \in X: A(x)$ " đúng nếu miền đúng của $A(x)$ là toàn bộ tập X , và sai nếu miền sai của $A(x)$ không rỗng.

• Lượng từ tồn tại là cụm từ "tồn tại $x \in X$ ", hoặc các cụm từ đồng nghĩa: "với ít nhất một phần tử $x \in X$ ", "có thể tìm được $x \in X$ ", v.v... Các mệnh đề sử dụng lượng từ tồn tại có dạng: "Tồn tại $x \in X$ sao cho: $A(x)$ ", hoặc "Có ít nhất một $x \in X$ sao cho: $A(x)$ ". Trong logic toán học người ta sử dụng ký hiệu $\exists$ thay cho từ "tồn tại". Các mệnh đề sử dụng lượng từ $\exists$ nói trên được viết dưới dạng:

$$\exists x \in X: A(x).$$

Mệnh đề " $\exists x \in X: A(x)$ " đúng nếu miền đúng của $A(x)$ có ít nhất một phần tử $x \in X$, và sai nếu miền sai của $A(x)$ là toàn bộ tập X .

Từ định nghĩa giá trị logic của các mệnh đề " $\forall x \in X: A(x)$ " và " $\exists x \in X: A(x)$ " suy ra:

- Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X: A(x)$ " là " $\exists x \in X: \overline{A(x)}$ ".
- Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X: A(x)$ " là " $\forall x \in X: \overline{A(x)}$ ".

Ví dụ: Với X là một tập số thực nào đó:

- ◊ Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X: x > 0$ " là " $\exists x \in X: x \leq 0$ ";
- ◊ Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X: x > 1$ " là " $\forall x \in X: x \leq 1$ ".

III. LOGIC SUY LUẬN

ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐIỀU KIỆN ĐỦ

a. Luật

Mỗi lĩnh vực khoa học có những đối tượng riêng. Các kết luận khoa học thường mang tính khái quát, phản ánh những mối liên hệ mang tính quy luật trong phạm vi một tập hợp nhất định. Các

kết luận như vậy thường được phát biểu dưới dạng các hàm mệnh đề có miền đúng là toàn bộ tập hợp đó.

Định nghĩa: Một hàm mệnh đề $\mathcal{A}(x)$, xác định trên tập X , được gọi là một *luật* trên tập hợp đó nếu miền đúng của nó là toàn bộ tập X (miền sai là tập trống). Nói cách khác, $\mathcal{A}(x)$ là luật trên tập hợp X nếu mệnh đề " $\forall x \in X: \mathcal{A}(x)$ " đúng.

Một luật trên tập hợp tất cả các mệnh đề được gọi là *luật logic*.

Ví dụ:

- ◊ Mệnh đề " $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$ " là một luật trên tập hợp tất cả các số thực;
- ◊ Hàm mệnh đề " $\mathcal{A} \vee \overline{\mathcal{A}}$ " là một luật logic (luật trên tập hợp tất cả các mệnh đề). Bảng giá trị logic dưới đây cho thấy mệnh đề đó luôn luôn đúng, bất kể $\mathcal{A}$ là mệnh đề đúng hay mệnh đề sai:

$\mathcal{A}$	$\overline{\mathcal{A}}$	$\mathcal{A} \vee \overline{\mathcal{A}}$
0	1	1
1	0	1

Chú ý: Định nghĩa trên có thể áp dụng cho hàm mệnh đề nhiều biến nếu ta gộp một bộ n biến thành một biến x . Một luật trên tập hợp X (luật chứa n biến, nhưng cả n biến đó có cùng miền biến thiên X) cũng có thể gọi là luật trên tập hợp X .

Ví dụ:

- ◊ Mệnh đề " $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ta luôn có: $x + y = y + x$ " là một luật trên $\mathbb{R}$. Đó là luật giao hoán của phép cộng.
- ◊ Hàm mệnh đề hai biến: " $\overline{\mathcal{A} \vee \mathcal{B}} \Rightarrow (\overline{\mathcal{A}} \wedge \overline{\mathcal{B}})$ " là một luật logic. Bạn hãy tự lập bảng giá trị logic để khẳng định rằng với $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ là một cặp mệnh đề bất kỳ, mệnh đề đó luôn luôn đúng.

b. Điều kiện cần và điều kiện đủ

Khi nghiên cứu các đối tượng trong phạm vi một tập hợp X , các nhận định mang tính khái quát thường được phát biểu dưới dạng các hàm mệnh đề chứa biến $x \in X$. Các mệnh đề mang tính chất diễn giải có dạng:

$$\forall x \in X: \mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x). \quad (4.1)$$

Như ta đã biết, mệnh đề (4.1) đúng khi và chỉ khi miền đúng của hàm mệnh đề " $\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)$ " là toàn bộ tập hợp X . Tuy nhiên, với những phần tử $x \in X$ mà $\mathcal{A}(x)$ sai thì " $\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x)$ " luôn luôn đúng, do đó mệnh đề (4.1) đúng khi và chỉ khi miền đúng của $\mathcal{A}(x)$ là tập con của miền đúng của $\mathcal{B}(x)$, tức là với bất cứ phần tử $x \in X$ nào mà $\mathcal{A}(x)$ đúng thì $\mathcal{B}(x)$ cũng đúng.

Mệnh đề (4.1) thường được phát biểu như sau:

- Nếu $\mathcal{A}(x)$ thì $\mathcal{B}(x)$;
- $\mathcal{B}(x)$ khi $\mathcal{A}(x)$;
- Điều kiện cần để $\mathcal{A}(x)$ là $\mathcal{B}(x)$;
- Điều kiện đủ để $\mathcal{B}(x)$ là $\mathcal{A}(x)$.

Tất cả các phát biểu nêu trên đều mang hàm ý rằng *khi $\mathcal{A}(x)$ đúng thì $\mathcal{B}(x)$ cũng đúng*. Khi chứng minh mệnh đề (4.1), $\mathcal{A}(x)$ là *giả thiết*, còn $\mathcal{B}(x)$ là *kết luận* (điều phải chứng minh).

Ví dụ: Với giả thiết số nguyên x chia hết cho 6, sử dụng định nghĩa chia hết ta chứng minh được rằng x chia hết cho 3. Điều này được phát biểu như sau:

- Nếu x chia hết cho 6 thì x chia hết cho 3;
- x chia hết cho 3 khi x chia hết cho 6;
- Điều kiện cần để x chia hết cho 6 là x chia hết cho 3;

- Điều kiện đủ để x chia hết cho 3 là x chia hết cho 6.

c. Điều kiện cần và đủ

Nếu $\mathcal{A}(x)$ vừa là điều kiện cần, vừa là điều kiện đủ để $\mathcal{B}(x)$ thì ta nói:

- $\mathcal{A}(x)$ là điều kiện cần và đủ để $\mathcal{B}(x)$;
- $\mathcal{A}(x)$ khi và chỉ khi $\mathcal{B}(x)$;
- $\mathcal{A}(x)$ tương đương với $\mathcal{B}(x)$.

Để nói rằng $\mathcal{A}(x)$ tương đương với $\mathcal{B}(x)$ ta dùng ký hiệu:

$$\mathcal{A}(x) \Leftrightarrow \mathcal{B}(x). \quad (4.2)$$

Hệ thức (4.2) có nghĩa là với mọi $x \in X$ hai mệnh đề $\mathcal{A}(x)$ và $\mathcal{B}(x)$ có cùng giá trị logic (cùng đúng hoặc cùng sai). Khi đó, nếu một trong hai mệnh đề $\mathcal{A}(x)$ hoặc $\mathcal{B}(x)$ có mặt trong một mệnh đề phức hợp nào đó thì ta có thể thay thế mệnh đề này bằng mệnh đề kia mà không làm thay đổi giá trị logic của mệnh đề phức hợp ấy.

IV. LOGIC CHỨNG MINH MỆNH ĐỀ

Chân lý là một mệnh đề đúng nói về các hiện tượng và các sự vật của thế giới khách quan xung quanh ta. Về nguyên tắc, mỗi mệnh đề logic nhận một và chỉ một trong hai giá trị logic: đúng hoặc sai. Chứng minh một mệnh đề có nghĩa là xác định được giá trị logic của mệnh đề đó là đúng¹.

Để chứng minh một mệnh đề ta phải có căn cứ và phải sử dụng phép suy luận đúng.

¹Chúng ta chỉ cần nói đến việc chứng minh một mệnh đề là đúng. Việc chứng minh một mệnh đề là sai có thể quy về việc chứng minh mệnh đề phủ định của nó là đúng.

a. Căn cứ để chứng minh một mệnh đề

Căn cứ để chứng minh mệnh đề là các mệnh đề đúng. Có hai loại mệnh đề được sử dụng làm căn cứ để chứng minh:

- Các mệnh đề được thừa nhận là đúng: các mệnh đề định nghĩa và các tiên đề;
- Các mệnh đề đã được chứng minh là đúng.

b. Phép suy luận đúng

Phép suy luận đúng là phép suy luận dựa theo các luật logic hoặc các luật kéo theo trên một tập hợp X . Luật kéo theo trên một tập hợp X có dạng:

$$\mathcal{A}(x) \Rightarrow \mathcal{B}(x), \quad (4.3)$$

trong đó x là một biến hoặc một bộ các biến với miền biến thiên X . Xin nhắc lại rằng, hàm mệnh đề (4.3) là luật trên tập hợp X nếu nó đúng với mọi phần tử $x \in X$, do đó khi $\mathcal{A}(x)$ đúng ta có thể kết luận rằng $\mathcal{B}(x)$ đúng. Chẳng hạn, trong tập hợp các tam giác vuông, người ta đã chứng minh được luật nói rằng "nếu hai tam giác vuông có cạnh huyền và một góc nhọn bằng nhau thì chúng bằng nhau". Sử dụng luật đó, nếu ta chỉ ra được rằng hai tam giác vuông nào đó quả thật có cạnh huyền bằng nhau và một góc nhọn bằng nhau thì ta có thể kết luận được rằng hai tam giác vuông đó bằng nhau (kết luận đó là một mệnh đề đúng).

Chú ý rằng, bản thân các luật logic và các luật trong phạm vi một tập hợp X cũng là các mệnh đề được chứng minh là đúng và thường được phát biểu dưới dạng các định lý. Các định lý đó lần lượt được thiết lập xuất phát từ các định nghĩa và hệ thống tiên đề. Mỗi định lý được chứng minh lại là căn cứ để chứng minh những định lý khác. Đó là logic phát triển của mọi hệ thống lý thuyết trong khoa học nói chung và trong toán học nói riêng.

c. Một số luật logic cần lưu ý

Sau đây chúng tôi liệt kê một số luật logic hay được sử dụng. Bạn có thể chứng minh các luật này bằng cách lập bảng giá trị logic.

1. Luật bài trung:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{A}} &= A; \\ \overline{A \wedge B} &= \overline{A} \vee \overline{B}. \end{aligned}$$

2. Luật phủ định của phủ định:

$$\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A.$$

3. Luật đối ngẫu (luật De Morgan):

$$\begin{aligned} \overline{A \vee B} &\Leftrightarrow (\overline{A} \wedge \overline{B}); \\ \overline{A \wedge B} &\Leftrightarrow (\overline{A} \vee \overline{B}). \end{aligned}$$

4. Luật phản chứng:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}).$$

5. Luật giao hoán:

$$\begin{aligned} A \wedge B &\Leftrightarrow B \wedge A; \\ A \vee B &\Leftrightarrow B \vee A. \end{aligned}$$

6. Luật kết hợp:

$$\begin{aligned} (A \wedge B) \wedge C &\Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C); \\ (A \vee B) \vee C &\Leftrightarrow A \vee (B \vee C). \end{aligned}$$

7. Luật phân phối:

$$\begin{aligned} A \wedge (B \vee C) &\Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C); \\ A \vee (B \wedge C) &\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C). \end{aligned}$$

8. $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B})$;
 9. $\overline{\forall x \in X: A(x)} \Leftrightarrow [\exists x \in X: \overline{A(x)}]$;
 10. $\overline{\exists x \in X: A(x)} \Leftrightarrow [\forall x \in X: \overline{A(x)}]$.

V. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH QUY NẠP***a. Tiên đề quy nạp***

Cho hàm mệnh đề $A(m)$ xác định trên tập hợp

$$\mathbb{Z}_p = \{m: m \in \mathbb{Z} \text{ và } m \geq p\},$$

với p là một số nguyên cố định. Tiên đề quy nạp có nội dung như sau:

Giả sử hàm mệnh đề $A(m)$ thoả mãn hai điều kiện:

1. $A(m)$ đúng khi $m = p$;
2. Nếu $A(m)$ đúng khi $m = k \in \mathbb{Z}_p$ thì $A(m)$ cũng đúng khi $m = k + 1$.

Khi đó $A(m)$ đúng với mọi $m \in \mathbb{Z}_p$.

b. Phương pháp chứng minh quy nạp

Theo tiên đề quy nạp, để chứng minh rằng một hàm mệnh đề $A(m)$ đúng với mọi số nguyên $m \geq p$, ta cần chỉ ra hai điều:

- $A(m)$ đúng khi $m = p$;
- Với giả thiết $A(m)$ đúng với $m = k$ (giả thiết quy nạp) ta chứng minh $A(m)$ cũng đúng với $m = k + 1$ (k là một số nguyên bất kỳ, $k \geq p$).

Đặc biệt, để chứng minh rằng hàm mệnh đề $A(n)$ đúng với mọi số tự nhiên $n = 1, 2, 3, \dots$, ta cần chỉ ra hai điều:

- $\mathcal{A}(n)$ đúng khi $n = 1$;
- Với giả thiết $\mathcal{A}(n)$ đúng khi $n = k$ (giả thiết quy nạp) ta chứng minh $\mathcal{A}(n)$ cũng đúng khi $n = k + 1$ (k là một số tự nhiên bất kỳ).

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.3.5} + \frac{2}{3.5.7} + \cdots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \\ = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Giải: Với $n = 1$, đẳng thức (4.4) đúng (cả hai vế cùng bằng $\frac{1}{15}$).

Giả sử đẳng thức (4.4) đúng khi $n = k$, tức là:

$$\frac{1}{1.3.5} + \frac{2}{3.5.7} + \cdots + \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} = \frac{k(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)}.$$

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1.3.5} + \frac{2}{3.5.7} + \cdots + \frac{k}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} \\ & \quad + \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} \\ &= \frac{k(k+1)}{2(2k+1)(2k+3)} + \frac{k+1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)} \\ &= \frac{(k+1)[k(2k+5)+2]}{2(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = \frac{(k+1)(2k^2+5k+2)}{2(2k+1)(2k+3)(2k+5)} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+1)}{2(2k+1)(2k+3)(2k+5)} = \frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)(2k+5)}. \end{aligned}$$

Như vậy, đẳng thức (4.4) cũng đúng khi $n = k + 1$. Theo tiên đề quy nạp thì (4.4) đúng với mọi số tự nhiên n .

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 6$ ta luôn có:

$$2^n > (n + 1)^2. \quad (4.5)$$

Giải: Bất đẳng thức (4.5) đúng khi $n = 6$ ($64 > 49$).

Giả sử bất đẳng thức (4.5) đúng với $n = k \geq 6$, tức là:

$$2^k > (k + 1)^2.$$

Khi đó (4.5) cũng đúng với $n = k + 1$:

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > 2(k+1)^2 = (k+2)^2 + k^2 - 2 > (k+2)^2.$$

Vậy, bất đẳng thức (2.5) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq 6$.

Ví dụ 3: Đặt $u_m = 3^{2m+1} + 40m - 67$ ($m \in \mathbb{Z}$). Chứng minh rằng với mọi số nguyên $m \geq 0$, u_m là số chia hết cho 64.

Giải: Với $m = 0$, ta có $u_0 = -64$ là số chia hết cho 64.

Ta lại có:

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= 3^{2m+3} + 40(m+1) - 67 \\ &= 9(3^{2m+1} + 40m - 67) - 8(40m) + 40 + 8 \cdot 67 \\ &= 9u_m - 320m + 576 = 9u_m - 64(5m) + 64 \cdot 9. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra rằng, nếu u_m chia hết cho 64 thì u_{m+1} cũng chia hết cho 64. Theo tiên đề quy nạp, điều này chứng tỏ u_m chia hết cho 64 với mọi số nguyên $m \geq 0$.

BÀI TẬP

11. Hãy lập bảng giá trị logic của các mệnh đề sau tùy theo giá trị logic của các mệnh đề $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$:

a) $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{A});$

- b) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \vee (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}));$
- c) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C};$
- d) $[(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}] \vee (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}).$

12. Bằng cách lập bảng giá trị logic, hãy chứng minh luật logic:

$$\overline{\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}} \Leftrightarrow (\mathcal{A} \wedge \overline{\mathcal{B}}).$$

13. Hãy phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và cho biết mệnh đề nào trong hai mệnh đề đó đúng:

- a) Tồn tại số $x \in \mathbb{R}$ sao cho $x^2 < 0$;
- b) Tồn tại tam giác cân có góc ở đáy không phải là góc nhọn;
- c) Với mọi cặp số thực x và y ta luôn có $x + y = xy$;
- d) Với mọi số thực x , tồn tại số thực y sao cho:

$$x + y = 0.$$

14. Bằng phương pháp quy nạp, hãy chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n :

- a) $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3};$
- b) $1.2 + 2.3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$
- c) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2};$
- d) $S_n = 11^{n+1} + 12^{2n-1}$ chia hết cho 133.

Chương 2

KHÔNG GIAN VECTƠ SỐ HỌC n CHIỀU

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH VÀ PHƯƠNG PHÁP KHỬ ẨN LIÊN TIẾP

Lý thuyết về hệ phương trình tuyến tính là đề tài xuất phát của Đại số tuyến tính. Để khảo sát một cách tổng quát hệ phương trình tuyến tính chúng ta cần phải có kiến thức cơ bản về không gian vectơ, ma trận và định thức. Chương này đề cập đến không gian vectơ số học n chiều. Để làm cơ sở giúp bạn đọc tiếp cận dễ dàng hơn với các mối quan hệ trong không gian vectơ, trước hết chúng ta hãy làm quen với các khái niệm cơ bản về hệ phương trình tuyến tính và một phương pháp tương đối đơn giản để giải hệ phương trình tuyến tính: phương pháp khử ẩn liên tiếp. Lý thuyết tổng quát về hệ phương trình tuyến tính sẽ được trình bày ở chương 4.

I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

a. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Hệ phương trình tuyến tính của n ẩn số $x_1, x_2, \dots, x_n$ có dạng tổng quát như sau:

[illegible]

trong đó a_{ij} và b_i là các hằng số cho trước: số a_{ij} được gọi là *hệ số* của ẩn x_j trong phương trình thứ i và b_i được gọi là *số hạng tự do* của phương trình thứ i ($i = 1, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$).

b. Ma trận hệ số và ma trận mở rộng

Hệ phương trình (1.1) cho tương ứng hai bảng số sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa: Bảng số A được gọi là *ma trận hệ số* và bảng số $\bar{A}$ được gọi là *ma trận mở rộng* của hệ phương trình tuyến tính (1.1).

Các khái niệm cơ bản về ma trận sẽ được trình bày ở chương 3. Từ "ma trận" được dùng ở đây để chỉ một bảng số xếp theo dòng và theo cột. Ma trận hệ số A có m dòng và n cột: dòng thứ i là dòng hệ số của phương trình thứ i ; cột thứ j là cột hệ số của ẩn thứ j ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$). Ma trận mở rộng $\bar{A}$ có m dòng và $n + 1$ cột (ma trận $\bar{A}$ có thêm một cột thứ $n + 1$ là cột số hạng tự do, n cột còn lại chính là các cột của ma trận A). Một hệ phương trình tuyến tính được xác định nếu biết ma trận mở rộng của nó.

Ví dụ 1:

Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases} \quad (1.2).$$

Ma trận hệ số và ma trận mở rộng của hệ phương trình tuyến tính đã cho là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2:

Hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

là hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

c. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa: Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính n ẩn số (1.1) là một bộ n số có thứ tự $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ mà khi gán $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ vào tất cả các phương trình của hệ thì ta được các đẳng thức đúng.

Nghiệm của hệ phương trình (1.1) có thể viết dưới một trong ba dạng sau:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n); \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} x_1 = \alpha_1 \\ x_2 = \alpha_2 \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_n \end{cases}.$$

Chẳng hạn, bộ 4 số thực có thứ tự $(1, -2, 2, 1)$ là một nghiệm của hệ phương trình (1.2): khi gán $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 2$, và $x_4 = 1$ thì vế trái của phương trình thứ nhất đúng bằng 7, vế trái của phương trình thứ hai đúng bằng 0 và vế trái của phương trình thứ ba đúng bằng -3 .

Giải một hệ phương trình tuyến tính có nghĩa là tìm tập hợp tất cả các nghiệm của hệ phương trình đó.

d. Hệ tương đương và phép biến đổi tương đương

Định nghĩa: Hai hệ phương trình tuyến tính với các ẩn số như nhau được gọi là *tương đương* nếu chúng có cùng tập hợp nghiệm, tức là mỗi nghiệm của hệ này đồng thời là nghiệm của hệ kia và ngược lại (hoặc cả hai hệ đều vô nghiệm).

Khi giải một hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp sơ cấp, ta thường phải biến đổi hệ phương trình đó về dạng thuận tiện cho việc xác định nghiệm.

Định nghĩa: Một phép biến đổi biến một hệ phương trình tuyến tính thành một hệ mới tương đương được gọi là *phép biến đổi tương đương*.

e. Các phép biến đổi sơ cấp

Định nghĩa. Các phép biến đổi sau đây đối với một hệ phương trình tuyến tính được gọi là các *phép biến đổi sơ cấp*:

1. Đổi chỗ hai phương trình của hệ.
2. Nhân hai vế của một phương trình của hệ với một số $\alpha \neq 0$.
3. Biến đổi một phương trình của hệ bằng cách lấy hai vế của một phương trình khác (trong hệ đó) nhân với một số k bất kỳ rồi cộng vào hai vế tương ứng của phương trình đó.

Định lý: Các phép biến đổi sơ cấp là các phép biến đổi tương đương.

Việc chứng minh định lý này dành cho bạn đọc.

II. HỆ TAM GIÁC VÀ HỆ HÌNH THANG

Ý tưởng chung của phương pháp sơ cấp để tìm nghiệm của một hệ phương trình nhiều ẩn số là khử dần các ẩn để quy về việc giải các phương trình một ẩn số. Việc khử dần các ẩn số của một

hệ phương trình tuyến tính sẽ dẫn đến một trong hai dạng cơ bản dưới đây (nếu hệ có nghiệm). Theo hình dạng của vế trái ta gọi các hệ phương trình đó là hệ tam giác và hệ hình thang.

a. Hệ phương trình tuyến tính dạng tam giác

Hệ phương trình dạng tam giác là hệ có dạng như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \quad (1.3)$$

trong đó tất cả các hệ số $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ đều khác 0. Đây là một hệ phương trình có số phương trình bằng số ẩn và, theo thứ tự từ trên xuống, các ẩn số mất dần ($a_{ij} = 0$ khi $i > j$). Phương trình cuối cùng của hệ chỉ còn lại một ẩn số. Từ phương trình dưới cùng của hệ phương trình (1.3) ta xác định được:

$$x_n = -\frac{b_n}{a_{nn}} = \alpha_n.$$

Tiếp theo, thay $x_n = \alpha_n$ vào phương trình phía trên ta lại có một phương trình một ẩn số x_{n-1} , từ đó xác định được $x_{n-1} = \alpha_{n-1}$. Lập lại quá trình này theo trình tự từ dưới lên ta tìm được:

$$x_{n-2} = \alpha_{n-2}, \dots, x_1 = \alpha_1.$$

Hệ phương trình (1.3) có một nghiệm duy nhất: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Ví dụ: Giải hệ phương trình 3 ẩn số:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ \quad -x_2 - 3x_3 = 1 \\ \quad \quad -7x_3 = 7 \end{cases}$$

Giải: Hệ phương trình đã cho có dạng tam giác. Từ phương trình thứ ba ta tìm được $x_3 = -1$. Thay $x_3 = -1$ vào phương trình thứ hai ta có:

$$-x_7 + 3 = 1 \Rightarrow x_7 = 2.$$

Tiếp theo, thay $x_3 = -1$ và $x_2 = 2$ vào phương trình thứ nhất ta có:

$$2x_1 + 2 + 1 = 5 \Rightarrow x_1 = 1.$$

Hệ đã cho có một nghiệm duy nhất: $(1, 2, -1)$.

b. Hệ phương trình tuyến tính dạng hình thang

Hệ phương trình dạng hình thang cũng có đặc điểm giống như hệ tam giác là các phương trình của hệ khuyết dần các ẩn số theo thứ tự từ trên xuống, nhưng hệ hình thang có số phương trình nhỏ hơn số ẩn, do vậy phương trình dưới cùng là phương trình nhiều ẩn số:

[illegible]

$$(m < n; a_{ii} \neq 0 \forall i = 1, 2, \dots, m).$$

Ở dạng (1.4) ta gọi m ẩn đầu $x_1, x_2, \dots, x_m$ là các *ẩn chính* và các ẩn còn lại gọi là *ẩn tự do*. Gán cho các ẩn tự do giá trị tùy ý

$$X_{m+1} = \alpha_{m+1}, \dots, X_n = \alpha_n$$

và chuyển các số hạng chứa chúng sang về phải ta được một hệ tam giác đối với các ẩn chính:

$$\left\{ \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= b_1 - a_{1,m+1}\alpha_{m+1} \cdots - a_{1n}\alpha_n \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= b_2 - a_{2,m+1}\alpha_{m+1} \cdots - a_{2n}\alpha_n \\ &\vdots \\ a_{mm}x_m &= b_m - a_{m,m+1}\alpha_{m+1} \cdots - \alpha_{mn}x_n \end{aligned} \right.$$

Theo phương pháp giải hệ tam giác ta xác định được giá trị của các ẩn $x_1, \dots, x_m$ theo $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n$. Nghiệm của hệ (1.4) có dạng:

[illegible]

Hệ hình thang (1.4) có vô số nghiệm. Nghiệm viết dưới dạng (1.5), với $(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$ là một bộ $n - m$ hằng số bất kỳ, được gọi là *nghiệm tổng quát*. Mỗi bộ số thực $(\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n)$ gán cho các ẩn tự do cho tương ứng một nghiệm của hệ (1.4), gọi là *nghiệm riêng* của nó.

Ví dụ: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 - x_5 = -3 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

Giải: Đây là hệ hình thang với các ẩn chính là x_1, x_2, x_3 và các ẩn tự do là x_4, x_5 . Chuyển các số hạng chứa các ẩn tự do sang vế phải và gán $x_4 = \alpha, x_5 = \beta$, ta được hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -6\alpha + \beta - 3 \\ x_2 - 2x_3 = -\alpha - 4\beta \\ 2x_3 = -2\alpha + 3\beta + 4 \end{cases}$$

Theo quy tắc giải hệ tam giác ta tìm được:

$$x_3 = -\alpha + \frac{3}{2}\beta + 2, x_2 = -3\alpha - \beta + 4, x_1 = 4\alpha - 3\beta - 19.$$

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình là:

$$(4\alpha - 3\beta - 19, -3\alpha - \beta + 4, -\alpha + \frac{3}{2}\beta + 2, \alpha, \beta).$$

Mỗi bộ hai số (α, β) cho tương ứng một nghiệm riêng. Chẳng hạn, với $\alpha = 0, \beta = 0$ ta có nghiệm riêng: $(-19, 4, 2, 0, 0)$.

III. PHƯƠNG PHÁP KHỬ ẨM LIÊN TIẾP

Phương pháp giải một hệ phương trình tuyến tính bất kỳ bằng cách khử dần các ẩn số để đưa về dạng tam giác hoặc dạng hình thang được gọi là *phương pháp khử ẩn liên tiếp*, hay *phương pháp Gauss*. Dưới đây chúng tôi trình bày tổng quát phương pháp này.

Xét hệ phương trình tuyến tính (1.1). Không làm mất tính tổng quát, ta giả sử $a_{11} \neq 0$ (nếu không ta có thể đổi chỗ các phương trình hoặc sắp lại thứ tự các ẩn số để có được điều đó). Trước hết ta khử ẩn x_1 trong các phương trình từ phương trình thứ hai trở xuống bằng cách cộng vào hai vế của phương trình thứ i ($i = 2, \dots, m$) tích các vế tương ứng của phương trình thứ nhất với số $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$. Chú ý rằng các phép biến đổi sơ cấp là các phép biến

đối tượng dương, do đó sau $m-1$ phép biến đổi như vậy ta được hệ tương đương:

[illegible]

trong đó:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \quad b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1 \quad (i = 2, \dots, m; j = 2, \dots, n).$$

Trong hệ (1.6) có khả năng xuất hiện các phương trình với vế trái đồng nhất bằng 0 (nếu trong hệ (1.1) có phương trình nào đó có vế trái tỷ lệ với vế trái của phương trình thứ nhất):

$$0.x_1 + 0.x_2 + \dots + 0.x_n = b. \quad (1.7)$$

Nếu $b = 0$ thì phương trình (1.7) là một đẳng thức đúng với mọi bộ số gán cho $x_1, x_2, \dots, x_n$, do đó ta có thể loại bỏ phương trình đó khỏi hệ. Nếu $b \neq 0$ thì phương trình (1.7) là một đẳng thức sai với mọi bộ số gán cho $x_1, x_2, \dots, x_n$, do đó hệ vô nghiệm.

Tiếp theo, bằng cách tương tự, ta lại khử ẩn x_2 trong các phương trình từ phương trình thứ ba trở xuống của hệ (1.6) (nếu có), sau đó lại khử ẩn x_3 trong các phương trình từ phương trình thứ tư trở xuống (nếu có) v.v... Phương pháp khử ẩn theo cách nêu trên là thủ tục lặp. Sau một số hữu hạn bước biến đổi, quá trình khử ẩn sẽ kết thúc ở một trong ba trường hợp sau đây:

- Hệ nhận được có chứa phương trình dạng (1.7) với $b \neq 0$.
- Hệ nhận được có dạng tam giác.
- Hệ nhận được có dạng hình thang.

Trong trường hợp thứ nhất hệ phương trình vô nghiệm, còn hai trường hợp sau ta đã biết cách giải để tìm nghiệm. Như vậy, *xét theo số nghiệm thì các hệ phương trình tuyến tính được phân thành 3 loại: hệ vô nghiệm; hệ có một nghiệm duy nhất; hệ có vô số nghiệm.*

Như đã nói ở trên, một hệ phương trình tuyến tính được hoàn toàn xác định khi biết ma trận mở rộng của nó, do đó mỗi phép biến đổi hệ phương trình tuyến tính tương ứng với một phép biến đổi ma trận mở rộng. Các phép biến đổi trên ma trận mà ta nói đến dưới đây được hiểu theo nghĩa như sau:

- Nhân một dòng của ma trận với một số α có nghĩa là nhân mỗi số nằm trên dòng đó với số α ;
- Cộng một dòng nào đó vào dòng i có nghĩa là cộng mỗi số của dòng ấy vào số tương ứng của dòng i .

Các phép biến đổi sơ cấp đối với hệ phương trình tuyến tính được thực hiện tương ứng trên ma trận mở rộng như sau:

Biến đổi hệ phương trình:	Biến đổi ma trận mở rộng:
1. Đổi chỗ hai phương trình của hệ.	1. Đổi chỗ hai dòng tương ứng của ma trận mở rộng.
2. Nhân hai vế của một phương trình với một số $\alpha \neq 0$.	2. Nhân dòng tương ứng của ma trận mở rộng với số α .
3. Cộng vào mỗi vế của phương trình thứ i tích của các vế tương ứng của phương trình thứ k với một số α (để biến đổi phương trình thứ i).	3. Cộng vào dòng thứ i của ma trận mở rộng tích của dòng thứ k với số α (để biến đổi dòng thứ i).

Trong quá trình biến đổi, nếu trên ma trận mở rộng có một dòng nào đó có tất cả các số bằng 0 thì ta bỏ dòng đó đi (tương ứng với việc loại khỏi hệ một phương trình có tất cả các hệ số ở vế trái bằng 0 và số hạng tự do ở vế phải cũng bằng 0).

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -5 \\ 2x + 3y + 5z = 13 \\ 3x - 4y + z = 15 \end{cases}$$

Giải: Ma trận mở rộng của hệ phương trình này là

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & 5 & 13 \\ 3 & -4 & 1 & 15 \end{array} \right].$$

Để dễ hình dung, ta dùng dấu gạch đứng ngăn cách ma trận hệ số và cột số hạng tự do. Để khử x_1 trong hai phương trình phía dưới, ta cộng vào dòng thứ hai và thứ ba, theo thứ tự, tích của

dòng thứ nhất với (-2) và với (-3) . Sau hai phép biến đổi đó ta được ma trận:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 11 & 23 \\ 0 & -10 & 10 & 30 \end{array} \right].$$

Tiếp theo, cộng vào dòng thứ ba tích của dòng thứ hai với (-10) ta được ma trận:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 11 & 23 \\ 0 & 0 & -100 & -200 \end{array} \right].$$

Ma trận cuối cùng này là ma trận mở rộng của hệ phương trình dạng tam giác:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -5 \\ y + 11z = 23 \\ -100z = -200 \end{cases}$$

Giải hệ này ta tìm được một nghiệm duy nhất $(3, -1, 2)$.

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 4 \\ 3x_1 + 8x_2 - 11x_3 - 3x_4 = -2 \\ -x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 10 \end{cases}$$

Giải: Các phép biến đổi khử ẩn được thực hiện trên ma trận mở rộng như sau:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & 7 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & -11 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 4 & 2 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -5 \\ 0 & 7 & -1 & 3 & 11 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} (2) \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & -16 & -17 \\ 0 & 0 & 20 & -32 & -31 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} (3) \\ \rightarrow \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 10 & -16 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right].$$

Các phép biến đổi đã thực hiện là:

(1): Cộng lần lượt vào dòng thứ hai, dòng thứ ba và dòng thứ tư, theo thứ tự, tích của dòng thứ nhất với số 2, số -3 và số 1;

(2): Cộng lần lượt vào dòng thứ ba và dòng thứ tư, theo thứ tự, tích của dòng thứ hai với số -2 và số -7;

(3): Cộng vào dòng thứ tư tích của dòng thứ ba với -2.

Sau các phép biến đổi trên, ta nhận được một hệ có chứa phương trình với tất cả các hệ số ở vế trái bằng 0 và số hạng tự do ở vế phải bằng 3, do đó hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 - 4x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = -2 \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 14x_4 + 6x_5 = -1 \end{cases}$$

Giải: Ma trận mở rộng của hệ phương trình này là:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -2 & 2 & -5 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -7 & 5 & -14 & 6 & -1 \end{array} \right].$$

Để tiện biến đổi, trước hết ta đổi chỗ dòng thứ nhất và dòng thứ 3 để chuyển số 1 ở đầu dòng thứ 3 lên góc trên bên trái:

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -5 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 5 & -14 & 6 & -1 \end{array} \right].$$

Cộng lần lượt vào dòng thứ hai, dòng thứ ba và dòng thứ tư, theo thứ tự, tích của dòng thứ nhất với số -2 , số -3 và số -4 ta được:

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & -12 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -14 & -11 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -26 & -10 & 7 \end{array} \right].$$

Đổi chỗ dòng thứ hai và dòng thứ ba, sau đó cộng lần lượt vào dòng thứ ba và dòng thứ tư, theo thứ tự, tích của dòng thứ hai với số -5 và số 3 ta được:

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -14 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 15 & 68 & 43 & -25 \\ 0 & 0 & -15 & -68 & -43 & 25 \end{array} \right].$$

Cuối cùng, lấy dòng thứ ba cộng vào dòng thứ tư ta được:

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -14 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 15 & 68 & 43 & -25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Xoá đi dòng cuối cùng ta được ma trận mở rộng của hệ hình thang:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = -2 \\ x_2 - 4x_3 - 14x_4 - 11x_5 = 6 \\ 15x_3 + 68x_4 + 43x_5 = -25 \end{cases}$$

Theo cách giải hệ hình thang ta tìm được nghiệm tổng quát:

$$\left(\frac{29}{15}\alpha + \frac{19}{15}\beta + \frac{2}{3}, -\frac{62}{15}\alpha - \frac{7}{15}\beta - \frac{2}{3}, -\frac{68}{15}\alpha - \frac{43}{15}\beta - \frac{5}{3}, \alpha, \beta \right),$$

trong đó α và β là các hằng số bất kỳ.

Chú ý: Trong một số trường hợp, để biến đổi hệ phương trình tuyến tính về đúng dạng tam giác hoặc dạng hình thang, bạn có thể phải sắp xếp lại thứ tự các ẩn số. Việc này tương ứng với việc đổi chỗ các cột của ma trận hệ số. Khi tìm nghiệm ở dạng kết thúc bạn đừng quên sắp xếp lại thứ tự ban đầu.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 8 \\ 3x_1 + 9x_2 - 8x_3 + 8x_4 = -1 \end{cases}$$

Giải: Ma trận mở rộng của hệ phương trình này là:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 9 & -8 & 8 & -1 \end{array} \right].$$

Cộng lần lượt vào dòng thứ hai và dòng thứ ba, theo thứ tự, tích của dòng thứ nhất với (-2) và (-3) ta được:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & -10 \end{array} \right].$$

Đến đây cả hai phương trình phía dưới đều khuyết cả x_1 và x_2 và ta không thể biến đổi theo đúng thủ tục thông thường. Tuy nhiên, ta có thể khắc phục điều này bằng cách đổi vị trí ẩn x_2 với x_4 chẳng hạn. Việc đổi vị trí của x_2 và x_4 tương ứng với việc đổi chỗ các cột hệ số của chúng, tức là đổi chỗ cột thứ hai và cột thứ tư. Sau khi thực hiện điều này ta được ma trận mở rộng của hệ phương trình tuyến tính với các ẩn số x_1, x_4, x_3, x_2 :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & -10 \end{array} \right].$$

Bây giờ ta có thể biến đổi theo thủ tục thông thường. Cộng vào dòng cuối cùng tích của dòng thứ hai với (-2) ta được ma trận:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 0 & -14 \end{array} \right].$$

Quá trình khử ẩn kết thúc ở dạng hình thang:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - x_3 + 3x_2 = 3 \\ \quad x_4 + 4x_3 = 2 \\ \quad \quad -13x_3 = -14 \end{cases}.$$

Theo cách giải hệ hình thang ta tìm được nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho:

$$\left(x_1 = \frac{113}{3} - 3\alpha, x_2 = \alpha, x_3 = \frac{14}{13}, x_4 = -\frac{30}{13} \right).$$

IV. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

Hệ phương trình tuyến tính *thuần nhất* là trường hợp riêng của hệ phương trình tuyến tính khi tất cả các số hạng tự do bằng 0:

[illegible]

Khi giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp bạn cần chú ý mấy đặc điểm sau đây:

1. Hệ phương trình tuyến tính (1.8) có ít nhất một nghiệm ($x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$), gọi là *ng nghiệm không*, hay *ng nghiệm tầm thường*. Do đó, đối với một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất chỉ có hai khả năng xảy ra:

- Hệ có một nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường (quá trình khử ẩn kết thúc ở dạng tam giác);
- Hệ có vô số nghiệm (quá trình khử ẩn kết thúc ở dạng hình thang).

2. Mọi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với số phương trình nhỏ hơn số ẩn đều có vô số nghiệm (quá trình khử ẩn chắc chắn kết thúc ở dạng hình thang).

3. Một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất được xác định khi biết ma trận hệ số của nó và mọi phép biến đổi sơ cấp đều biến một hệ thuần nhất thành hệ thuần nhất tương đương. Do đó, khi giải một hệ thuần nhất bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp ta chỉ cần biểu diễn các phép biến đổi trên ma trận hệ số.

Ví dụ: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 + 16x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải:

Đây là hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với số phương trình nhỏ hơn số ẩn, do đó hệ này có vô số nghiệm. Thuật toán khử ẩn liên tiếp được thực hiện trên ma trận hệ số như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 4 & -4 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 9 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (1) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -6 & -13 \\ 0 & -2 & 5 & 11 \end{bmatrix} \quad (2) \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -6 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Các phép biến đổi đã thực hiện là:

(1): Cộng lần lượt vào dòng thứ hai và dòng thứ ba, theo thứ tự, tích của dòng thứ nhất với số -2 và số -1 ;

(2): Lấy dòng thứ hai cộng vào dòng thứ ba.

Sau các phép biến đổi nói trên ta được hệ phương trình tuyến tính thuần nhất dạng hình thang:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_2 - 6x_3 - 13x_4 = 0 \\ -x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này theo phương pháp đã biết ta được nghiệm tổng quát:

$$\left(\frac{9}{4}\alpha, \frac{1}{2}\alpha, -2\alpha, \alpha \right),$$

trong đó α là số bất kỳ gán cho ẩn tự do x_4 .

BÀI TẬP

1. Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y - z = -6 \\ y + 5z = 2 \\ -4z = -4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 3 \\ x_2 - 3x_3 - 6x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_3 - 4x_4 + x_5 = 6 \end{cases}$$

2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp

$$a) \begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 7y = 6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ -4x + 8y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y - 5z = 1 \\ 2x + 5y - z = 3 \\ 3x + 8y - 2z = -2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - x_4 = -2 \\ 7x_1 + 9x_2 - 9x_3 + 10x_4 = 5 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = -4 \\ 4x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 7 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_4 = 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases}$$

3. Giải hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng như sau:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & -3 & 9 & -4 \end{bmatrix}$$

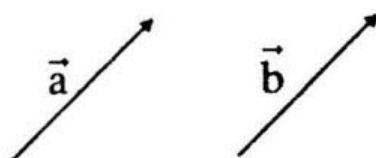
4. Giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có ma trận hệ số như sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

§2. VECTƠ n CHIỀU VÀ KHÔNG GIAN VECTƠ

I. KHÁI NIỆM VECTƠ n CHIỀU

Theo định nghĩa hình học, vectơ là một đoạn thẳng có hướng. Trong hình học người ta xét các vectơ tự do, không phân biệt vị trí đặt vectơ đó: hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đặt trên cùng một đường thẳng hoặc trên hai đường thẳng song song, có cùng độ dài và cùng hướng được xem là bằng nhau ($\vec{a} = \vec{b}$):



Trong môn hình học ở trường phổ thông, bạn đã được làm quen với phương pháp tọa độ. Theo phương pháp này, trong phạm vi một mặt phẳng (không gian 2 chiều) mỗi vectơ được đặt tương ứng với một bộ hai số thực có thứ tự (x, y) , gọi là tọa độ của vectơ đó và ta có thể đồng nhất mỗi vectơ với bộ hai số đó. Tương tự, trong không gian 3 chiều ta có thể đồng nhất mỗi vectơ với tọa độ của nó là một bộ ba số thực có thứ tự (x, y, z) . Theo cách nhìn nhận như trên, ta có thể mở rộng khái niệm vectơ như sau:

Định nghĩa: Mỗi bộ n số thực có thứ tự $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ được gọi là một vectơ n chiều.

Để phân biệt các vectơ ta gán tên cho chúng bằng các chữ cái in hoa. Để gán tên cho vectơ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là X , ta viết:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Số thực x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) đứng ở vị trí thứ i trong bộ n số thực ở vế phải được gọi là *thành phần thứ i* của vectơ X . Bộ n số thực xác định vectơ X có thể xếp thành một dòng như cách viết ở trên, hoặc xếp thành cột như sau:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Một vectơ n chiều là một bộ n số thực có thứ tự, không phân biệt cách viết dưới dạng dòng hoặc dạng cột. Chẳng hạn, khi xét ma trận hệ số của một hệ phương trình tuyến tính có m phương trình và n ẩn số, ta có thể xem mỗi dòng của nó là một vectơ n chiều và mỗi cột là một vectơ m chiều.

Cần chú ý rằng vectơ n chiều không chỉ đơn thuần là một bộ n số thực, mà là một bộ n số thực có thứ tự.

Định nghĩa: Hai vectơ n chiều

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

được coi là *bằng nhau* khi và chỉ khi các thành phần ở vị trí tương ứng của chúng đôi một bằng nhau:

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n.$$

Để nói rằng hai vectơ X và Y bằng nhau, ta viết: $X = Y$. Khái niệm vectơ bằng nhau chỉ áp dụng cho các vectơ có cùng số chiều n . *Mỗi đẳng thức vectơ n chiều tương đương với một hệ n đẳng thức số.*

II. CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Trên tập hợp các vectơ n chiều (với n cố định) ta có thể xác định các phép toán tương tự như trong hình học. Trước hết, ta đề cập

đến hai phép toán đặc trưng của không gian vectơ là phép cộng và phép nhân vectơ với số.

a. Định nghĩa phép cộng và phép nhân vectơ với số

- Tổng của hai vectơ n chiều

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

là một vectơ n chiều, ký hiệu là $X + Y$ và được xác định như sau:

$$X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

- Tích của vectơ n chiều $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ với một số thực α là một vectơ n chiều, ký hiệu là αX và được xác định như sau:

$$\alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Theo định nghĩa trên, phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với số trong tập hợp các vectơ n chiều được thực hiện hoàn toàn tương tự như trong hình học, khi ta cộng vectơ và nhân vectơ với số theo toạ độ.

Ví dụ: Cho 2 vectơ 4 chiều:

$$X = (3, -1, 5, 3), Y = (2, 8, 1, 0).$$

Ta có:

$$X + Y = (3 + 2, -1 + 8, 5 + 1, 3 + 0) = (5, 7, 6, 3);$$

$$2X = (6, -2, 10, 6); \quad 3Y = (6, 24, 3, 0);$$

$$2X + 3Y = (12, 22, 13, 6).$$

b. Vectơ không và vectơ đối của một vectơ

Trước khi đề cập đến các tính chất đặc trưng của phép cộng và phép nhân vectơ với số ta đưa vào các khái niệm sau:

- Vectơ không là vectơ có tất cả các thành phần bằng 0.

Trong tập hợp các vectơ n chiều (với n cố định) có một vectơ không duy nhất được ký hiệu là O_n hoặc đơn giản là O :

$$O_n = O = (0, 0, \dots, 0).$$

• Vectơ đối của một vectơ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ là tích của vectơ đó với số -1 . Ta ký hiệu vectơ đối của vectơ X là $-X$:

$$-X = (-1)X = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n).$$

c. Các tính chất cơ bản của phép cộng và phép nhân vectơ với số

Trong các tính chất nêu dưới đây X, Y, Z là các vectơ n chiều bất kỳ (n cố định), α và β là các số bất kỳ.

1. Phép cộng vectơ có tính chất giao hoán:

$$X + Y = Y + X.$$

2. Phép cộng vectơ có tính chất kết hợp:

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z).$$

3. Trong tập hợp tất cả các vectơ n chiều, vectơ không giữ vai trò phần tử trung hoà của phép cộng:

$$X + O_n = X \text{ (với mọi vectơ } X).$$

4. Vectơ đối của vectơ X thoả mãn điều kiện:

$$X + (-X) = O_n.$$

5. Với mọi vectơ X ta luôn có: $1X = X$.

6. Phép nhân vectơ với số có tính chất phân phối đối với phép cộng vectơ:

$$\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$$

7. Phép nhân vectơ với số có tính chất phân phối đối với phép cộng số:

$$(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$$

8. Với α, β là hai số bất kỳ và X là vectơ bất kỳ ta luôn có:

$$(\alpha\beta)X = \alpha(\beta X).$$

Bạn hãy tự chứng minh các tính chất nói trên trực tiếp theo định nghĩa.

d. Phép trừ vectơ

Phép trừ vectơ được xác định thông qua phép cộng như sau:

Định nghĩa : *Hiệu* của hai vectơ n chiều X và Y là một vectơ n chiều, ký hiệu là $X - Y$ và được xác định như sau:

$$X - Y = X + (-Y).$$

Phép trừ theo định nghĩa trên là phép toán ngược của phép cộng. Thật vậy, $X - Y$ chính là vectơ mà tổng của nó và vectơ Y là vectơ X :

$$\begin{aligned}(X - Y) + Y &= [X + (-Y)] + Y \\ &= X + [(-Y) + Y] = X + O_n = X.\end{aligned}$$

Với $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ta có thể thực hiện phép trừ theo công thức:

$$X - Y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n).$$

Từ các tính chất 6 và 7 của phép cộng và phép nhân vectơ với số ta dễ dàng suy ra các hệ thức sau:

$$\alpha(X - Y) = \alpha X - \alpha Y; (\alpha - \beta)X = \alpha X - \beta X.$$

III. KHÔNG GIAN VECTƠ SỐ HỌC n CHIỀU

KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN CON

a. Không gian vectơ số học n chiều

Định nghĩa: *Không gian vectơ số học n chiều* là tập hợp tất cả các vectơ n chiều, trong đó phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với số được xác định và thoả mãn 8 tính chất đặc trưng như đã trình bày trên đây.

Không gian vectơ số học n chiều được ký hiệu là $\mathbb{R}^n$. Chú ý rằng không gian $\mathbb{R}^n$ không chỉ đơn thuần là tập hợp tất cả các vectơ n chiều, mà bao hàm cả cấu trúc các phép toán (phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với số) theo định nghĩa ở trên.

Trong toán học hiện đại, khái niệm không gian vectơ được hiểu theo nghĩa rộng hơn. Trong phạm vi của cuốn sách này thuật ngữ *không gian vectơ* được sử dụng để chỉ không gian $\mathbb{R}^n$.

b. Khái niệm không gian con

Xét một tập hợp vectơ n chiều $L \neq \emptyset$. Các phép toán đặc trưng của không gian $\mathbb{R}^n$ (phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với số) áp dụng cho các vectơ của tập hợp L sẽ trở thành các phép toán của bản thân nó nếu thoả mãn 2 điều kiện sau:

1. L kín đối với phép cộng vectơ, tức là với X và Y là hai vectơ bất kỳ thuộc tập hợp L ta luôn có: $X + Y \in L$.
2. L kín đối với phép nhân vectơ với số, tức là với mọi vectơ $X \in L$ và mọi số α ta luôn có: $\alpha X \in L$.

Trong trường hợp này, ta có thể xem L như một không gian có **cấu trúc phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với số**.

Định nghĩa: Một tập hợp không rỗng $L \subset \mathbb{R}^n$ được gọi *không gian con* của không gian $\mathbb{R}^n$ nếu nó kín đối với phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với số.

Thuật ngữ *không gian con* bao hàm hai khía cạnh: thứ nhất, L là một tập con (một bộ phận) của $\mathbb{R}^n$; thứ hai, các phép toán trong L chính là các phép toán áp dụng cho mọi vectơ của $\mathbb{R}^n$.

Từ định nghĩa trên suy dễ dàng ra:

1. Mọi không gian con L đều chứa vectơ không O_n .

Thật vậy, lấy một vectơ $X \in L$ ta có: $O_n = 0X \in L$.

2. Với mọi vectơ $X \in L$, vectơ đối của nó cũng thuộc L :

$$-X = (-1)X \in L.$$

Ví dụ 1: Bản thân $\mathbb{R}^n$ là một không gian con của $\mathbb{R}^n$ và tập hợp một vectơ không $L_0 = \{O_n\}$ cũng là một không gian con của $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 2: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ ta xét tập hợp:

$$L = \{X = (x_1, x_2, x_3): ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0\},$$

trong đó a, b, c là các số thực cho trước.

• Với $X = (x_1, x_2, x_3)$ và $Y = (y_1, y_2, y_3)$ là hai vectơ bất kỳ thuộc tập hợp L ta có:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \text{ và } ay_1 + by_2 + cy_3 = 0.$$

Hai đẳng thức trên kéo theo:

$$\begin{aligned} & a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2) + c(x_3 + y_3) \\ &= (ax_1 + bx_2 + cx_3) + (ay_1 + by_2 + cy_3) = 0. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in L$.

• Với $X = (x_1, x_2, x_3)$ là một vectơ bất kỳ thuộc tập hợp L ta có $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. Hệ thức này kéo theo:

$$a(\alpha x_1) + b(\alpha x_2) + c(\alpha x_3) = \alpha(ax_1 + bx_2 + cx_3) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Điều này chứng tỏ $\alpha X = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in L, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Như vậy, tập $L \subset \mathbb{R}^3$ kín đối với phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với số của không gian $\mathbb{R}^3$, do đó L là một không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$.

IV. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ KHÁI NIỆM KHÔNG GIAN EUCLIDE

a. Tích vô hướng của hai vectơ

Trong không gian $\mathbb{R}^n$ tích vô hướng được xác định tương tự như trong hình học khi thực hiện phép toán này theo toạ độ.

Định nghĩa:

Tích vô hướng của hai vectơ n chiều $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ là một số thực, ký hiệu là XY và được xác định như sau:

$$XY = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Ví dụ: Với $X = (2, -3, 5, 1)$, $Y = (4, 9, 2, -3)$, ta có:

$$XY = 2.4 + (-3)9 + 5.2 + 1.(-3) = -12.$$

Tích vô hướng theo định nghĩa trên đây thoả mãn các tính chất cơ bản sau đây (X, Y, Z là các vectơ n chiều bất kỳ và α là số thực bất kỳ):

1. $XY = YX$.
2. $X(Y + Z) = XY + XZ$.
3. $\alpha(XY) = (\alpha X)Y$.
4. $X^2 = XX \geq 0$.
5. $X^2 = 0$ khi và chỉ khi $X = O_n$.

Dựa theo định nghĩa ta dễ dàng chứng minh các tính chất nêu trên. Chẳng hạn, tính chất thứ ba được chứng minh như sau:

Với $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ta có:

$$\begin{aligned} \alpha(XY) &= \alpha(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) \\ &= (\alpha x_1)y_1 + (\alpha x_2)y_2 + \dots + (\alpha x_n)y_n = (\alpha X)Y. \end{aligned}$$

b. Khái niệm không gian Euclide

Định nghĩa: Không gian Euclide n chiều là không gian vectơ n chiều, trong đó có xác định phép nhân vô hướng theo định nghĩa trên.

Trong không gian Euclide ta có thể xét các đại lượng hình học như độ dài và góc. Độ dài, hay chuẩn của một vectơ $X \in \mathbb{R}^n$ được ký hiệu là $\|X\|$ và xác định như sau:

$$\|X\| = \sqrt{X^2},$$

trong đó X^2 là tích vô hướng của vectơ X với chính nó: $X^2 = XX$.

Định lý: Với X và Y là hai vectơ n chiều bất kỳ ta luôn có:

$$|XY| \leq \|X\| \cdot \|Y\| \quad (2.1)$$

Bất đẳng thức (2.1) được gọi là bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacopski.

Chứng minh: Nếu $X = O_n$ thì $XY = 0$, do đó bất đẳng thức (2.1) hiển nhiên đúng. Với $X \neq O_n$ ta xét tam thức bậc hai:

$$\varphi(t) = t^2 X^2 - 2t(XY) + Y^2.$$

Dễ dàng thấy rằng $\varphi(t) = (tX - Y)^2$. Theo tính chất của tích vô hướng ta có $\varphi(t) \geq 0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Từ đây suy ra:

$$\Delta' = (XY)^2 - X^2 Y^2 = (XY)^2 - \|X\|^2 \|Y\|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (XY)^2 \leq \|X\|^2 \|Y\|^2 \Rightarrow |XY| \leq \|X\| \cdot \|Y\|.$$

Từ bất đẳng thức (2.1) suy ra rằng khi $X \neq O_n$ và $Y \neq O_n$ ta có

$$\left| \frac{XY}{\|X\| \cdot \|Y\|} \right| \leq 1. \quad (2.2)$$

Bất đẳng thức (2.2) cho phép ta định nghĩa góc giữa hai vectơ X và Y như sau:

Định nghĩa: Góc giữa hai vectơ $X, Y \in \mathbb{R}^n$ ($X, Y \neq O_n$) là góc $\alpha \in [0; \pi]$ có

$$\cos \alpha = \frac{XY}{\|X\| \cdot \|Y\|}. \quad (2.3)$$

Từ (2,3) suy ra rằng α là góc vuông khi và chỉ khi $XY = 0$. Khái niệm vectơ vuông góc được định nghĩa như sau:

Định nghĩa: Ta nói hai vectơ n chiều X và Y *trực giao*, hay *vuông góc* khi và chỉ khi $XY = 0$.

Ví dụ: $X = (3, 2, -2, 4)$ và $Y = (4, -1, 1, -2)$ là hai vectơ *trực giao*:

$$XY = 12 - 2 - 2 - 8 = 0.$$

Trên cơ sở các khái niệm nêu trên người ta có thể xem xét các quan hệ hình học trong không gian Euclide. Cuốn sách này không đi sâu vào vấn đề này.

BÀI TẬP

5. Cho các vectơ

$$X_1 = (2, -1, 3), X_2 = (1, 1, -6)$$

a) Hãy xác định các vectơ: $2X_1 + 3X_2, 3X_1 - 2X_2$.

b) Tìm vectơ X thỏa mãn hệ thức:

$$5(X + X_1 + 2X_2) = 2(X - 3X_1 + 4X_2).$$

6. Cho các vectơ

$$X_1 = (3, -4, 0, 1), X_2 = (1, 1, 3, -2), X_3 = (0, 3, -5, -1).$$

a) Hãy xác định vectơ: $X_1 + 3X_2 - 4X_3$.

b) Tìm vectơ X thỏa mãn hệ thức:

$$2(X_1 + 2X_2 - 3X_3 - X) = 3X - X_1 + X_2.$$

7. Hãy xét xem mỗi tập hợp vectơ sau đây có phải là không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$ hay không:

a) Tập hợp $L_1 = \{X = (x_1, x_2, x_3) : x_1 = x_2 = x_3\}$.

b) Tập hợp $L_2 = \{X = (x_1, x_2, x_3) : x_2 = 2x_1\}$.

c) Tập hợp $L_3 = \{X = (x_1, x_2, x_3) : ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0\}$, với a, b, c, d là các số cho trước..

d) Tập hợp $L_4 = \{X = (x_1, x_2, x_3) : x_1x_2x_3 = 0\}$.

8. Tính XY :

a) $X = (12, 10, 5), Y = (1, -2, 4)$

b) $X = (3, 5, 9, -8), Y = (4, -2, 7, 11)$

c) $X = (1, -1, 5, 2, -6), Y = (3, 2, 5, -6, 4)$

d) $X = (3, -2, 1, 1, 5, 4), Y = (2, 9, 7, 0, -5, 8)$

§3. CÁC MỐI LIÊN HỆ TUYẾN TÍNH TRONG KHÔNG GIAN VECTƠ

I. KHÁI NIỆM TỔ HỢP TUYẾN TÍNH VÀ PHÉP BIỂU DIỄN TUYẾN TÍNH

a. Khái niệm tổ hợp tuyến tính

Trong không gian $\mathbb{R}^n$ (n cố định) cho m vectơ:

$$X_1, X_2, \dots, X_m. \quad (3.1)$$

Lấy m số bất kỳ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ và lập tổng:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m \quad (3.2)$$

Định nghĩa: Mỗi tổng (3.2), trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ là các số thực cho trước, được gọi là một *tổ hợp tuyến tính* của các vectơ (3.1). Các số α_i ($i = 1, 2, \dots, m$) được gọi là các *hệ số* của tổ hợp tuyến tính đó.

Từ các vectơ (3.1) ta có thể lập được vô số các tổ hợp tuyến tính (mỗi bộ hệ số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ cho tương ứng một tổ hợp tuyến tính của chúng) và *mỗi tổ hợp tuyến tính của các vectơ (3.1) là một vectơ n chiều*.

Dễ dàng thấy rằng:

- Tổng hai tổ hợp tuyến tính bất kỳ của các vectơ n chiều $X_1, X_2, \dots, X_m$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ đó:

$$(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m) + (\beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_m X_m) \\ = (\alpha_1 + \beta_1) X_1 + (\alpha_2 + \beta_2) X_2 + \dots + (\alpha_m + \beta_m) X_m.$$

- Tích của một tổ hợp tuyến tính bất kỳ của các vector $X_1, X_2, \dots, X_m$ với một số β bất kỳ là một tổ hợp tuyến tính của các vector đó:

$$\beta(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m) \\ = (\beta\alpha_1) X_1 + (\beta\alpha_2) X_2 + \dots + (\beta\alpha_m) X_m.$$

Hai điều nói trên chứng tỏ:

Định lý: Tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các vector n chiều $X_1, X_2, \dots, X_m$ cho trước là một không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$.

b. Phép biểu diễn tuyến tính

Định nghĩa: Ta nói rằng vector $X \in \mathbb{R}^n$ *biểu diễn tuyến tính* qua các vector $X_1, X_2, \dots, X_m$ khi và chỉ khi tồn tại một tổ hợp tuyến tính của các vector $X_1, X_2, \dots, X_m$ bằng vector X , tức là tồn tại các số thực $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ sao cho

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m.$$

Đặc biệt, nếu vector X biểu diễn tuyến tính qua một vector Y ($X = \alpha Y$) thì ta nói *vector X tỷ lệ với vector Y* .

Ví dụ: Với $X_1, X_2, \dots, X_m$ là các vector n chiều bất kỳ ta luôn có:

$$O_n = 0X_1 + 0X_2 + \dots + 0X_m.$$

Tổ hợp tuyến tính ở vế phải (với tất cả các hệ số bằng không) được gọi là *tổ hợp tuyến tính tầm thường* của các vector $X_1, X_2, \dots, X_m$. Như vậy, trong không gian $\mathbb{R}^n$ vector O_n *biểu diễn tuyến tính qua các vector bất kỳ* (ít nhất bằng tổ hợp tuyến tính tầm thường).

Định lý sau đây cho thấy phép biểu diễn tuyến tính có *tính chất bắc cầu*:

Định lý:

Nếu vector X biểu diễn tuyến tính qua các vector $X_1, X_2, \dots, X_m$ và mỗi vector X_i ($i = 1, 2, \dots, m$) biểu diễn tuyến tính qua các vector $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ thì X biểu diễn tuyến tính qua các vector $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$.

Chứng minh: Từ giả thiết suy ra X bằng một tổ hợp tuyến tính nào đó của các vector $X_1, X_2, \dots, X_m$:

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m. \quad (3.3)$$

Do mỗi vector $X_1, X_2, \dots, X_m$ biểu diễn tuyến tính qua các vector $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$ nên mỗi vector X_i ($i = 1, 2, \dots, m$) là một tổ hợp tuyến tính của $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$, do đó vế phải của đẳng thức (3.3) là một tổ hợp tuyến tính của $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$. Điều này có nghĩa là vector X biểu diễn tuyến tính qua các vector $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$.

c. Dạng vectơ của hệ phương trình tuyến tính

Bài toán tìm nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính và bài toán biểu diễn tuyến tính một vectơ qua các vectơ cho trước có liên hệ với nhau. Xét hệ phương trình tuyến tính:

[illegible]

Mã trận mở rộng của hệ phương trình này là:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Ma trận mở rộng có $n + 1$ cột, trong đó cột thứ j ($j = 1, 2, \dots, n$) là cột hệ số của ẩn x_j , còn cột cuối cùng là cột số hạng tự do. Ta gọi A_j^c là cột hệ số của ẩn x_j (cột thứ j của ma trận hệ số) và B là cột số hạng tự do:

$$A_j^c = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n); \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ta xem mỗi cột trên là một vectơ m chiều. Hệ phương trình (3.4) có thể viết dưới dạng tương đương như sau:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 A_1^c + x_2 A_2^c + \dots + x_n A_n^c = B. \quad (3.5)$$

Ở dạng (3.5) vấn đề tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (3.4) tương đương với việc tìm bộ hệ số biểu diễn tuyến tính cột số hạng tự do qua các cột của ma trận hệ số. Mỗi nghiệm của hệ phương trình (3.4) là một bộ số thực $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ mà khi gán $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ thì tổ hợp tuyến tính ở vế trái của phương trình (3.5) đúng bằng vectơ B .

Như vậy:

- Hệ phương trình tuyến tính (3.4) có nghiệm khi và chỉ khi cột số hạng tự do B biểu diễn tuyến tính qua các cột $A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c$ của ma trận hệ số.
- Mỗi bộ hệ số biểu diễn tuyến tính vectơ B qua các vectơ $A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c$ là một nghiệm của hệ phương trình (3.4). Hệ

phương trình tuyến tính (3.4) có bao nhiêu nghiệm thì ta có bấy nhiêu cách biểu diễn tuyến tính cột số hạng tự do qua các cột của ma trận hệ số.

Ví dụ 1: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 + 8x_2 + 24x_3 = 1 \end{cases}$$

Hệ phương trình này có thể viết dưới dạng vectơ như sau:

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bài toán tìm nghiệm của hệ phương trình tuyến tính đã cho tương đương với bài toán tìm các bộ hệ số biểu diễn tuyến tính vectơ $B = (2, 5, 1)$ qua các vectơ

$$A_1^c = (1, 2, 1), \quad A_2^c = (5, 7, 8), \quad A_3^c = (7, -3, 24).$$

Ngược lại, để biểu diễn tuyến tính một vectơ n chiều X qua các vectơ n chiều $X_1, X_2, \dots, X_m$ cho trước ta phải tìm bộ số $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ sao cho $X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m$. Điều này có thể thực hiện thông qua việc giải hệ phương trình tuyến tính có cột số hạng tự do là vectơ X và các cột của ma trận hệ số là các vectơ $X_1, X_2, \dots, X_m$ (viết mỗi vectơ thành một cột). Ma trận mở rộng của hệ phương trình đó là:

$$\bar{A} = [X_1 \ X_2 \ \dots \ X_m \ X].$$

Ví dụ 2: Hãy biểu diễn tuyến tính vectơ $X = (16, 7, -1)$ qua các vectơ $X_1 = (1, -1, 3)$, $X_2 = (2, 1, 1)$, $X_3 = (5, 3, -1)$.

Giải: Bộ hệ số $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ biểu diễn tuyến tính vectơ X qua các vectơ X_1, X_2, X_3 đã cho là nghiệm của hệ phương trình có ma trận mở rộng là:

$$\bar{A} = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 16 \\ -1 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right].$$

Bạn hãy tự giải hệ phương trình này bằng phương pháp khử ẩn liên tiếp. Hệ phương trình này có một nghiệm duy nhất:

$$(\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -3, \alpha_3 = 4).$$

Như vậy, vectơ X biểu diễn tuyến tính qua X_1, X_2, X_3 một cách duy nhất:

$$X = 2X_1 - 3X_2 + 4X_3$$

II. SỰ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

a. Khái niệm phụ thuộc tuyến tính

Cho m vectơ n chiều:

$$X_1, X_2, \dots, X_m. \quad (3.6)$$

Khi xem xét quan hệ giữa các vectơ (3.6) ta gọi các vectơ đó là một *hệ vectơ*. Từ "hệ vectơ" đồng nghĩa với từ "tập hợp vectơ" nếu trong hệ vectơ không có hai vectơ nào bằng nhau.

Định nghĩa: Ta nói hệ vectơ (3.6) *phụ thuộc tuyến tính* khi và chỉ khi tồn tại m số thực $k_1, k_2, \dots, k_m$, trong đó có ít nhất một số khác 0, sao cho:

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_mX_m = O_n. \quad (3.7)$$

Ngược lại, nếu đẳng thức (3.7) chỉ thoả mãn khi tất cả các hệ số ở vế trái bằng 0 ($k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$) thì ta nói hệ vectơ (3.6) *độc lập tuyến tính*.

Khái niệm phụ thuộc tuyến tính của một hệ vectơ có thể nhìn nhận dưới góc độ biểu diễn tuyến tính vectơ không O_n qua các vectơ của hệ đó. Như ta đã biết, vectơ O_n biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của một hệ vectơ n chiều bất kỳ bằng tổ hợp tuyến

tính tầm thường (tổ hợp tuyến tính với tất cả các hệ số bằng 0). Câu hỏi đặt ra là: ngoài tổ hợp tuyến tính tầm thường của các vectơ (3.6) còn tổ hợp tuyến tính nào khác bằng vectơ O_n hay không? Nếu câu trả lời là có thì hệ vectơ (3.6) phụ thuộc tuyến tính. Nếu câu trả lời là không, tức là tổ hợp tuyến tính tầm thường là tổ hợp tuyến tính duy nhất bằng O_n , thì hệ vectơ (3.6) độc lập tuyến tính.

b. Xét sự phụ thuộc tuyến tính của một hệ vectơ

Để xét sự phụ thuộc tuyến tính của hệ vectơ (3.6), ta xem hệ thức (3.7) như một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất viết dưới dạng vectơ, với các ẩn số là $k_1, k_2, \dots, k_m$. Ma trận hệ số của hệ phương trình đó có các cột theo thứ tự là các vectơ n chiều $X_1, X_2, \dots, X_m$ viết dưới dạng cột. Đối với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (3.7) chỉ có hai khả năng xảy ra:

1. Hệ có một nghiệm duy nhất ($k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_m = 0$). Trong trường hợp này hệ vectơ (3.6) độc lập tuyến tính.
2. Hệ có vô số nghiệm, do đó tồn tại nghiệm không tầm thường ($k_1, k_2, \dots, k_m$). Trong trường hợp này hệ vectơ (3.6) phụ thuộc tuyến tính.

Như vậy, muốn biết hệ vectơ (3.6) phụ thuộc tuyến tính hay độc lập tuyến tính ta có thể làm như sau:

- Lập ma trận A với các cột là các vectơ $X_1, X_2, \dots, X_m$ viết dưới dạng cột;
- Giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với ma trận hệ số là ma trận A để xác định xem hệ phương trình đó có một nghiệm duy nhất hay có vô số nghiệm (quá trình khử ẩn kết thúc ở dạng tam giác hay dạng hình thang), từ đó suy ra hệ vectơ (3.6) độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 1 Trong không gian $\mathbb{R}^n$ xét hệ các vectơ có một thành phần bằng 1 và tất cả các thành phần còn lại bằng 0:

$$E_1 = (1, 0, \dots, 0),$$

$$E_2 = (0, 1, \dots, 0),$$

.....

$$E_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Các vectơ $E_1, E_2, \dots, E_n$ được gọi là các *vector đơn vị* của không gian $\mathbb{R}^n$. Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với ma trận hệ số có các cột theo thứ tự là các vectơ $E_1, E_2, \dots, E_n$ (viết các vectơ đó dưới dạng cột):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất này có một nghiệm duy nhất ($k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_m = 0$), do đó *hệ vector đơn vị là hệ độc lập tuyến tính*.

Ví dụ 2: Cho hệ vectơ 4 chiều:

$$X_1 = (1, 3, -2, 5),$$

$$X_2 = (3, -2, 1, 4),$$

$$X_3 = (-1, 8, -5, 6).$$

Muốn biết hệ vectơ này phụ thuộc tuyến tính hay độc lập tuyến tính ta xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với ma trận hệ số

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \\ -2 & 1 & -5 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Phương pháp khử ẩn liên tiếp được thực hiện trên ma trận hệ số như sau:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 11 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -11 & 11 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -11 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quá trình khử ẩn kết thúc ở dạng hình thang:

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 - k_3 = 0 \\ -k_2 + k_3 = 0 \end{cases}.$$

Hệ phương trình này có vô số nghiệm, do đó hệ vectơ đã cho phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 3: Xét sự phụ thuộc tuyến tính của hệ 3 vectơ:

$$X_1 = (-2, 2, 3, 4),$$

$$X_2 = (3, -2, 3, 5),$$

$$X_3 = (4, 1, 6, -3).$$

Giải: Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất 3 ẩn có ma trận hệ số với các cột theo thứ tự là các vectơ X_1, X_2, X_3 :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Biến đổi khử ẩn:

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \\ 6 & 6 & 12 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 15 & 24 \\ 0 & 11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -51 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -51 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quá trình khử dẫn kết thúc ở dạng tam giác, do đó hệ vectơ đã cho độc lập tuyến tính.

III. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ SỰ PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

Định lý 1: Một hệ vectơ n chiều có từ hai vectơ trở lên phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi ít nhất một vectơ của hệ đó biểu diễn tuyến tính qua các vectơ còn lại.

Theo định lý này thì *một hệ gồm hai vectơ X, Y phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi hai vectơ đó tỷ lệ.*

Chứng minh: Xét hệ vectơ (3.6) với $m \geq 2$.

- Giả sử hệ vectơ (3.6) phụ thuộc tuyến tính. Khi đó tồn tại m số thực $k_1, k_2, \dots, k_m$ với ít nhất một số khác 0 sao cho hệ thức (3.7) được thoả mãn. Dễ dàng thấy rằng, trong hệ thức (3.7), vectơ nào có hệ số khác 0 thì vectơ đó biểu diễn tuyến tính qua các vectơ còn lại. Thật vậy, nếu $k_1 \neq 0$ thì X_1 biểu diễn tuyến tính qua các vectơ còn lại của hệ vectơ (3.6) như sau:

$$X_1 = -\frac{k_2}{k_1} X_2 - \dots - \frac{k_m}{k_1} X_m.$$

- Ngược lại, nếu một vectơ nào đó của hệ vectơ (3.6) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ còn lại thì hệ vectơ đó phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy, giả sử X_1 biểu diễn tuyến tính qua các vectơ còn lại:

$$X_1 = \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_m X_m.$$

Khi đó, ta có:

$$(-1)X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_m X_m = O_n.$$

Tổ hợp tuyến tính ở vế trái có hệ số $k_1 = -1 \neq 0$, do đó hệ vectơ (3.6) phụ thuộc tuyến tính.

Vì vectơ O_n biểu diễn tuyến tính qua các vectơ n chiều bất kỳ nên từ định lý 1 ta suy ra hệ quả đơn giản sau đây:

Hệ quả: Mọi hệ vectơ n chiều chứa vectơ O_n đều phụ thuộc tuyến tính. Nói cách khác, mọi hệ vectơ độc lập tuyến tính đều không chứa vectơ không.

Chú ý: Trường hợp đặc biệt, khi $m = 1$, hệ một vectơ X phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $X = O_n$. Bạn đọc có thể tự chứng minh điều này theo định nghĩa.

Định lý 2: Nếu một hệ vectơ có một hệ con (một bộ phận) phụ thuộc tuyến tính thì hệ vectơ đó phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh: Giả sử hệ vectơ (3.6) có một hệ con phụ thuộc tuyến tính, chẳng hạn như hệ s vectơ đầu $X_1, X_2, \dots, X_s$ ($s < m$). Khi đó, tồn tại các số thực $k_1, k_2, \dots, k_s$, trong đó có ít nhất một số khác 0, sao cho:

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_s X_s = O_n.$$

Từ đây suy ra:

$$k_1 X_1 + k_2 X_2 + \cdots + k_s X_s + 0X_{s+1} + \cdots + 0X_m = O_n.$$

Đẳng thức này chứng tỏ hệ vectơ (3.6) phụ thuộc tuyến tính.

Định lý 2 kéo theo các kết luận sau đây:

Hệ quả:

1. Nếu một hệ vectơ độc lập tuyến tính thì mọi hệ con của nó độc lập tuyến tính.
2. Nếu trong một hệ vectơ có hai vectơ nào đó tỷ lệ thì hệ vectơ đó phụ thuộc tuyến tính.

Hệ quả thứ nhất là một cách phát biểu tương đương của định lý 2 (Bạn dễ dàng chứng minh điều này bằng phản chứng). Để

chứng minh hệ quả thứ hai ta chú ý rằng, nếu vectơ X tỷ lệ với vectơ Y ($X = \alpha Y$) thì, theo định lý 1, hệ hai vectơ X, Y phụ thuộc tuyến tính. Như vậy, nếu trong một hệ vectơ có hai vectơ tỷ lệ thì hệ vectơ đó có một hệ con phụ thuộc tuyến tính, do đó nó phụ thuộc tuyến tính.

Định lý 3: Cho 2 hệ vectơ n chiều:

$$X_1, X_2, \dots, X_m, \quad (x)$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_p. \quad (y)$$

Nếu $m > p$ và mọi vectơ của hệ (x) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ (y) thì hệ vectơ (x) phụ thuộc tuyến tính.

Nói cách khác: *một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính nếu mỗi vectơ của hệ đó biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của một hệ khác có số vectơ ít hơn.*

Chứng minh:

Theo giả thiết, mỗi vectơ X_i ($i = 1, 2, \dots, m$) có thể biểu diễn dưới dạng một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$:

$$X_1 = \alpha_{11}Y_1 + \alpha_{21}Y_2 + \dots + \alpha_{p1}Y_p,$$

$$X_2 = \alpha_{12}Y_1 + \alpha_{22}Y_2 + \dots + \alpha_{p2}Y_p,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$X_m = \alpha_{1m}Y_1 + \alpha_{2m}Y_2 + \dots + \alpha_{pm}Y_p$$

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất m ẩn số $k_1, k_2, \dots, k_m$:

$$\begin{cases} \alpha_{11}k_1 + \alpha_{12}k_2 + \dots + \alpha_{1m}k_m = 0 \\ \alpha_{21}k_1 + \alpha_{22}k_2 + \dots + \alpha_{2m}k_m = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{p1}k_1 + \alpha_{p2}k_2 + \dots + \alpha_{pm}k_m = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Do số phương trình nhỏ hơn số ẩn ($p < m$) nên hệ phương trình này có vô số nghiệm. Gọi $(k_1, k_2, \dots, k_m)$ là một nghiệm không

tâm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (3.8), ta có:

$$\begin{aligned}
 & k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_m X_m = \\
 & = k_1 (\alpha_{11} Y_1 + \alpha_{21} Y_2 + \dots + \alpha_{p1} Y_p) + \\
 & + k_2 (\alpha_{12} Y_1 + \alpha_{22} Y_2 + \dots + \alpha_{p2} Y_p) + \dots \\
 & + k_m (\alpha_{1m} Y_1 + \alpha_{2m} Y_2 + \dots + \alpha_{pm} Y_p) \\
 & = (\alpha_{11} k_1 + \alpha_{12} k_2 + \dots + \alpha_{1m} k_m) Y_1 \\
 & + (\alpha_{21} k_1 + \alpha_{22} k_2 + \dots + \alpha_{2m} k_m) Y_2 + \dots \\
 & + (\alpha_{p1} k_1 + \alpha_{p2} k_2 + \dots + \alpha_{pm} k_m) Y_p \\
 & = 0Y_1 + 0Y_2 + \dots + 0Y_p = O_n.
 \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ hệ vectơ (x) phụ thuộc tuyến tính.

Từ định lý 3 suy ra:

Hệ quả:

1. Nếu hệ vectơ (x) độc lập tuyến tính và mọi vectơ của hệ (x) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ (y) thì $m \leq p$.
2. Nếu cả hai hệ vectơ (x) và (y) độc lập tuyến tính, đồng thời mọi vectơ của hệ (x) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ (y) và ngược lại, mọi vectơ của hệ (y) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ (x), thì hai hệ vectơ đó có số vectơ bằng nhau ($m = p$).

Dễ dàng chứng minh hệ quả thứ nhất bằng phản chứng. Với các giả thiết của hệ quả thứ hai ta có đồng thời $m \leq p$ và $p \leq m$, do đó $m = p$.

Định lý 4: Mọi hệ vectơ n chiều với số vectơ lớn hơn n đều phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh: Trước hết ta thấy rằng trong không gian $\mathbb{R}^n$ mọi vectơ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ đều biểu diễn tuyến tính qua các vectơ đơn vị $E_1, E_2, \dots, E_n$:

$$X = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \dots + x_n E_n.$$

Như vậy, mọi vectơ của một hệ vectơ n chiều bất kỳ biểu diễn tuyến tính qua các vectơ đơn vị $E_1, E_2, \dots, E_n$. Do đó, theo định lý 3, nếu $m > n$ thì hệ vectơ $X_1, X_2, \dots, X_m$ phụ thuộc tuyến tính.

Định lý 4 cho thấy, trong không gian $\mathbb{R}^n$, mọi hệ vectơ độc lập tuyến tính đều có số vectơ không vượt quá n .

BÀI TẬP

9. Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 4t = 1 \\ 3x + 2y + 5z + 7t = -2 \\ 4x - y + z + 2t = 0 \\ 5x + 3y - 2z + 4t = 7 \end{cases}$$

a) Hãy viết hệ phương trình đã cho dưới dạng vectơ.

b) Hãy giải hệ phương trình đã cho và biểu diễn tuyến tính cột số hạng tự do qua các cột của ma trận hệ số.

10. Hãy biểu diễn tuyến tính vectơ X qua các vectơ cho kèm theo:

a) $X = (7, 11, -6);$

$$X_1 = (1, 3, -2), X_2 = (3, 4, -1), X_3 = (5, 5, 1).$$

b) $X = (7, 26, -7, -28);$

$$X_1 = (4, 2, 1, -1), X_2 = (1, -4, 2, 5).$$

c) $X = (3, -5, -10, 15);$

$$X_1 = (3, -2, 4, 5), X_2 = (1, 1, 7, -3), X_3 = (0, 2, 3, -4).$$

11. Tìm k để vectơ $X = (3, -1, 11, k)$ biểu diễn tuyến tính qua các vectơ

$$X_1 = (2, 1, 3, 8), X_2 = (1, 3, 0, 5), X_3 = (-1, 2, 2, 2).$$

12. Xét sự phụ thuộc tuyến tính của các hệ vectơ sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} X_1 = (2, 1, -1) \\ X_2 = (1, 5, -2) \\ X_3 = (3, -7, 2) \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} X_1 = (1, 1, -1, -1) \\ X_2 = (2, 6, 3, 2) \\ X_3 = (5, 9, 0, -1) \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} X_1 = (1, -2, 1, -1) \\ X_2 = (3, 3, 5, -2) \\ X_3 = (0, -9, -2, 1) \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} X_1 = (-1, 3, 2) \\ X_2 = (2, 4, -3) \\ X_3 = (5, 5, k) \end{cases} \end{array}$$

13. Chứng minh rằng nếu hệ vectơ n chiều $X_1, X_2, \dots, X_m$ độc lập tuyến tính và khi thêm vào một vectơ $X \in \mathbb{R}^n$ ta được một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính thì vectơ X biểu diễn tuyến tính một cách duy nhất qua $X_1, X_2, \dots, X_m$.

14. Chứng minh rằng nếu hệ vectơ $\{X_1, X_2, \dots, X_m\} \subset \mathbb{R}^n$ độc lập tuyến tính và tồn tại vectơ $X \in \mathbb{R}^n$ không biểu diễn tuyến tính qua $X_1, X_2, \dots, X_m$ thì $m \leq n - 1$.

15. Chứng minh rằng nếu hệ vectơ $X_1, X_2, \dots, X_m$ phụ thuộc tuyến tính và vectơ X_m không biểu diễn tuyến tính qua các vectơ $X_1, X_2, \dots, X_{m-1}$ thì hệ vectơ $X_1, X_2, \dots, X_{m-1}$ phụ thuộc tuyến tính.

§4. CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN VECTOR

I. KHÁI NIỆM CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN VECTOR

Trong hình học người ta lấy 3 vectơ không đồng phẳng làm cơ sở để thiết lập hệ toạ độ trong không gian 3 chiều. Cách tiếp cận này dựa trên mệnh đề sau đây:

Nếu cho trước 3 vectơ không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thì mọi vectơ $\vec{v}$ trong không gian đều biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng:

$$\vec{v} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c},$$

trong đó α, β, γ là các số thực.

Trong không gian $\mathbb{R}^n$ ta cũng có thể chứng minh được kết quả tương tự:

Định lý: Trong không gian $\mathbb{R}^n$ cho trước một hệ vectơ độc lập tuyến tính với số vectơ đúng bằng n :

$$P_1, P_2, \dots, P_n.$$

Khi đó, mọi vectơ $X \in \mathbb{R}^n$ đều biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng:

$$X = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n. \quad (4.1)$$

Chứng minh: Với X là một vectơ n chiều bất kỳ cho trước, hệ $n + 1$ vectơ

$$X, P_1, P_2, \dots, P_n$$

phụ thuộc tuyến tính, do đó tồn tại $n + 1$ số thực $k, k_1, k_2, \dots, k_n$, trong đó có ít nhất một số khác 0, sao cho

$$kX + k_1 P_1 + k_2 P_2 + \dots + k_n P_n = O_n. \quad (4.2)$$

Trong hệ thức (4.2) nhất thiết phải có $k \neq 0$. Thật vậy, nếu $k = 0$ thì hệ thức (4.2) trở thành

$$k_1 P_1 + k_2 P_2 + \dots + k_n P_n = O_n,$$

trong đó ít nhất một trong các hệ số $k_1, k_2, \dots, k_n$ khác 0, điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng hệ vectơ $P_1, P_2, \dots, P_n$ độc lập tuyến tính. Do $k \neq 0$ nên từ hệ thức (4.2) ta có:

$$X = -\frac{k_1}{k} P_1 - \frac{k_2}{k} P_2 - \dots - \frac{k_n}{k} P_n.$$

Như vậy, $(\alpha_1 = -\frac{k_1}{k}, \alpha_2 = -\frac{k_2}{k}, \dots, \alpha_n = -\frac{k_n}{k})$ là một bộ n số thực thoả mãn hệ thức (4.1). Tiếp theo, giả sử có hai tổ hợp tuyến tính của các vectơ $P_1, P_2, \dots, P_n$ cùng bằng X :

$$X = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n, \quad X = \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \dots + \beta_n P_n.$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} & (\beta_1 - \alpha_1)P_1 + (\beta_2 - \alpha_2)P_2 + \dots + (\beta_n - \alpha_n)P_n \\ &= (\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \dots + \beta_n P_n) - (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n) \\ &= X - X = O_n. \end{aligned}$$

Do các vectơ $P_1, P_2, \dots, P_n$ độc lập tuyến tính nên đẳng thức trên chỉ thoả mãn khi $\beta_1 - \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2 = \dots = \beta_n - \alpha_n = 0$. Từ đây suy ra $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2, \dots, \beta_n = \alpha_n$. Điều này chứng tỏ chỉ có duy nhất một bộ số thực $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ thoả mãn hệ thức (4.1). Định lý đã được chứng minh.

Trong hình học, ta đã biết rằng ba vectơ trong không gian đồng phẳng (có thể đặt trên cùng một mặt phẳng) khi và chỉ khi một trong ba vectơ đó biểu diễn tuyến tính qua hai vectơ còn lại, tức là điều kiện đồng phẳng của ba vectơ tương đương với điều kiện phụ thuộc tuyến tính. Như đã nói ở trên, một hệ ba vectơ không đồng phẳng (hệ ba vectơ độc lập tuyến tính) xác lập một hệ toạ độ trong không gian 3 chiều. Định lý trên đây cho thấy một hệ n vectơ n chiều độc lập tuyến tính cũng có vai trò tương tự như vậy trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa: Mỗi hệ vectơ n chiều độc lập tuyến tính và có số vectơ đúng bằng n được gọi là một *cơ sở* của không gian $\mathbb{R}^n$.

Như ta đã biết, trong không gian $\mathbb{R}^n$ mọi hệ vectơ độc lập tuyến tính đều có số vectơ nhỏ hơn hoặc bằng n . Như vậy, *cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$ là một hệ độc lập tuyến tính lớn nhất* (hệ độc lập tuyến tính với số vectơ nhiều nhất).

Một trong các cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$ là hệ vectơ đơn vị n chiều:

$$E_1 = (1, 0, \dots, 0), E_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, E_n = (0, 0, \dots, 1).$$

Ta gọi hệ vectơ này là *cơ sở đơn vị*.

II. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG MỘT CƠ SỞ

Cho một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$:

$$P_1, P_2, \dots, P_n. \quad (4.3)$$

Theo định lý trên, mỗi vectơ $X \in \mathbb{R}^n$ cho tương ứng duy nhất một bộ n số thực có thứ tự $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ thoả mãn hệ thức:

$$X = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n. \quad (4.4)$$

Định nghĩa: Bộ n số thực có thứ tự $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ thoả mãn hệ thức (4.4) được gọi là *tọa độ* của vectơ X trong cơ sở (4.3).

Để tìm tọa độ của vectơ $X \in \mathbb{R}^n$ trong cơ sở (4.3) ta xem hệ thức (4.4) như dạng vectơ của một hệ phương trình tuyến tính n ẩn số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Hệ phương trình đó có ma trận mở rộng

$$\bar{A} = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n \ X],$$

với các cột theo thứ tự là các vectơ $P_1, P_2, \dots, P_n, X$. Nghiệm duy nhất của nó chính là tọa độ của vectơ X .

Ví dụ 1: Để tìm tọa độ của vectơ $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ trong cơ sở đơn vị $E_1, E_2, \dots, E_n$, ta giải hệ phương trình tuyến tính n ẩn số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ với ma trận mở rộng:

$$\bar{A} = [E_1 \ E_2 \ \dots \ E_n \ X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & x_n \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình này có một nghiệm duy nhất:

$$\alpha_1 = x_1, \alpha_2 = x_2, \dots, \alpha_n = x_n.$$

Như vậy, tọa độ của một vectơ n chiều $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ trong cơ sở đơn vị chính là vectơ đó. Việc tìm tọa độ của một vectơ X trong một cơ sở khác cơ sở đơn vị có ý nghĩa tương tự như việc

biến đổi tọa độ trong hình học, khi ta chuyển từ hệ tọa độ này sang một hệ tọa độ khác.

Ví dụ 2: Tìm tọa độ của vector $X = (2, -3, 17)$ trong cơ sở sau của không gian $\mathbb{R}^3$:

$$P_1 = (1, 2, 3), P_2 = (1, 3, -2), P_3 = (2, 3, -1).$$

Giải: Bạn đọc có thể kiểm nghiệm rằng các vector P_1, P_2, P_3 đã cho độc lập tuyến tính, do đó hệ 3 vector đó là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$. Để tìm tọa độ của vector $X = (2, -3, 17)$ trong cơ sở đã cho, ta giải hệ phương trình tuyến tính 3 ẩn số α, β, γ với ma trận mở rộng có các cột là các vector P_1, P_2, P_3, X (mỗi vector được xếp thành một cột):

$$\bar{A} = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ X] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 17 \end{bmatrix}.$$

Giải hệ phương trình này ta được $\alpha = 3, \beta = -5, \gamma = 2$. Tọa độ của vector $X = (2, -3, 17)$ trong cơ sở đã cho là: $(3, -5, 2)$.

III. CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN CON

Cho L là một không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa: Một hệ vector $P_1, P_2, \dots, P_r$ của không gian con L được gọi là một cơ sở của nó nếu thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. $P_1, P_2, \dots, P_r$ độc lập tuyến tính;
2. Mọi vector $X \in L$ đều biểu diễn tuyến tính qua $P_1, P_2, \dots, P_r$.

Ví dụ: Trong không gian $\mathbb{R}^3$ xét tập hợp tất cả các vector có cao độ (thành phần thứ ba) bằng 0:

$$L = \{ X: X = (x_1, x_2, 0) \} \subset \mathbb{R}^3.$$

Tập hợp L là một không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$ (bạn hãy tự chứng minh điều này). Trong số ba vectơ đơn vị của không gian $\mathbb{R}^3$ có hai vectơ $E_1 = (1, 0, 0)$ và $E_2 = (0, 1, 0)$ thuộc không gian con L . Hệ hai vectơ E_1, E_2 là một cơ sở của không gian con L bởi vì:

- E_1, E_2 độc lập tuyến tính ;
- Mọi vectơ $X = (x_1, x_2, 0) \in L$ biểu diễn tuyến tính qua các vectơ E_1 và E_2 :

$$X = x_1 E_1 + x_2 E_2.$$

Dễ dàng thấy rằng *hai cơ sở bất kỳ của cùng một không gian con $L \subset \mathbb{R}^n$ có số vectơ bằng nhau*. Điều này suy ra từ hệ quả của định lý 3 về sự phụ thuộc tuyến tính mà ta đã chứng minh ở §3.

Định nghĩa: Số vectơ của cơ sở của một không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$ được gọi là *số chiều* của không gian con đó. Không gian con có số chiều bằng r được gọi là *không gian con r chiều*.

Ví dụ: Trở lại ví dụ trên ta thấy $L = \{X: X = (x_1, x_2, 0)\}$ là một không gian con 2 chiều của không gian $\mathbb{R}^3$.

Từ định nghĩa cơ sở và số chiều của không gian con ta suy ra các mệnh đề sau đây:

1. Trong một không gian con r chiều của không gian $\mathbb{R}^n$ mọi hệ vectơ có số vectơ lớn hơn r đều phụ thuộc tuyến tính. Nói cách khác, số chiều của một không gian con là số vectơ độc lập tuyến tính cực đại của nó.

Thật vậy, vì cơ sở của không gian con r chiều có r vectơ và mọi vectơ của không gian con biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của cơ sở nên, theo định lý 3 về sự phụ thuộc tuyến tính, mọi hệ vectơ của không gian con có số vectơ lớn hơn r đều phụ thuộc tuyến tính.

2. Nếu cho trước một cơ sở $P_1, P_2, \dots, P_r$ của không gian con L thì mỗi vectơ $X \in L$ cho tương ứng *duy nhất* một bộ số thực có thứ tự $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ sao cho:

$$X = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r.$$

Sự tồn tại bộ số thực $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ là theo định nghĩa cơ sở. Để chứng minh tính duy nhất ta giả sử tồn tại đồng thời hai bộ số thực $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ và $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$ sao cho

$$X = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r = \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \dots + \beta_r P_r.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 - \beta_1)P_1 + (\alpha_2 - \beta_2)P_2 + \dots + (\alpha_r - \beta_r)P_r \\ &= (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r) - (\beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \dots + \beta_r P_r) = O_n. \end{aligned}$$

Do cơ sở $P_1, P_2, \dots, P_r$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính nên điều này chỉ có thể xảy ra khi $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \dots = \alpha_r - \beta_r = 0$, tức là

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_r = \beta_r.$$

BÀI TẬP

16. Chứng minh rằng hệ hai vectơ $P_1 = (1, 1), P_2 = (1, 3)$ là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^2$ và tìm toạ độ của vectơ $X = (3, -2)$ trong cơ sở đó.

17. Chứng minh rằng hệ ba vectơ $P_1 = (1, 2, -1), P_2 = (2, 3, 0), P_3 = (5, 7, 2)$ là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$ và tìm toạ độ của vectơ $X = (2, -3, 6)$ trong cơ sở đó.

18. Chứng minh rằng hệ 4 vectơ

$$P_1 = (1, 2, -1, 1), P_2 = (5, 9, 2, -3),$$

$$P_3 = (3, 5, 5, -1), P_4 = (4, 7, 3, -3).$$

là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$. Hãy tìm tọa độ của vectơ $X = (2, 2, -3, 0)$ trong cơ sở đó.

19. Cho một hệ gồm n vectơ n chiều $P_1, P_2, \dots, P_n$. Chứng minh rằng nếu tồn tại một vectơ $X \in \mathbb{R}^n$ biểu diễn tuyến tính một cách duy nhất qua $P_1, P_2, \dots, P_n$ thì hệ vectơ đã cho là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$.

20. Trở lại các không gian con của không gian $\mathbb{R}^3$ đã xét ở bài tập 7. Hãy chứng minh:

- Hệ một vectơ $P = (1, 1, 1)$ là một cơ sở của không gian con L_1 .
- Hệ hai vectơ $P_1 = (1, 2, 0)$, $P_2 = (1, 2, 1)$ là một cơ sở của không gian con L_2 .
- Nếu $d = 0$, $a \neq 0$ thì $P_1 = (-b/a, 1, 0)$, $P_2 = (-c/a, 0, 1)$ là một cơ sở của không gian con L_3 .

§5. HẠNG CỦA MỘT HỆ VECTƠ

I. KHÁI NIỆM CƠ SỞ VÀ HẠNG CỦA HỆ VECTƠ

Cho một hệ m vectơ n chiều:

$$X_1, X_2, \dots, X_m. \quad (5.1)$$

Một hệ vectơ gồm một số (hoặc tất cả) các vectơ của hệ (5.1) được gọi là *hệ con* của nó.

Định nghĩa: Cơ sở của hệ vectơ (5.1) là một hệ con của nó thỏa mãn hai điều kiện sau:

- Độc lập tuyến tính;
- Mọi vectơ của hệ (5.1) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ con đó.

Nhận xét: Hiển nhiên là mỗi vectơ của hệ con bất kỳ đều biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ con đó bằng cách lấy hệ số của nó bằng 1, và hệ số của các vectơ còn lại bằng 0. Do đó, điều kiện thứ hai trong định nghĩa cơ sở của hệ vectơ có thể thay bằng điều kiện: *mọi vectơ còn lại của hệ (5.1) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ con đó.*

Ví dụ: Cho hệ vectơ 4 chiều:

$$X_1 = (1, 2, 0, 1),$$

$$X_2 = (1, 3, 2, 0),$$

$$X_3 = (2, 3, -2, 3),$$

$$X_4 = (1, 4, 4, -1).$$

Hệ con gồm hai vectơ X_1, X_2 là một cơ sở của hệ vectơ đã cho, bởi vì:

- X_1, X_2 độc lập tuyến tính (2 vectơ không tỷ lệ);
- Mọi vectơ còn lại của hệ đã cho biểu diễn tuyến tính qua 2 vectơ X_1, X_2 :

$$X_3 = 3X_1 - X_2, X_4 = -X_1 + 2X_2.$$

Chú ý rằng, một hệ vectơ có thể có các cơ sở khác nhau. Tuy nhiên, vì mỗi cơ sở là một hệ độc lập tuyến tính và mỗi vectơ của cơ sở này biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của cơ sở kia nên *hai cơ sở của cùng một hệ vectơ luôn có số vectơ bằng nhau* (theo hệ quả của định lý 3 về sự phụ thuộc tuyến tính).

Định nghĩa: *Hạng* của một hệ vectơ là số vectơ của cơ sở của hệ vectơ đó.

Hạng của một hệ vectơ là một số tự nhiên r . Hiển nhiên là r không thể vượt quá số vectơ của hệ. Mặt khác, cơ sở của một hệ vectơ n chiều là một hệ vectơ độc lập tuyến tính, do đó $r \leq n$. Như vậy, *hạng của một hệ vectơ không vượt quá số vectơ của hệ đó và không vượt quá số chiều của không gian.*

II. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN VỀ HẠNG

Định lý 1: *Hạng của một hệ vectơ bằng r khi và chỉ khi trong hệ vectơ đó tồn tại một hệ con gồm r vectơ độc lập tuyến tính và mọi hệ con có số vectơ lớn hơn r (nếu có) đều phụ thuộc tuyến tính. Nói cách khác, hạng của một hệ vectơ chính là số vectơ độc lập tuyến tính cực đại trong hệ vectơ đó.*

Chứng minh: Nếu hạng của hệ vectơ (5.1) bằng r thì cơ sở của nó là một hệ con gồm r vectơ độc lập tuyến tính. Mặt khác, mọi vectơ của hệ (5.1) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của một cơ sở của nó nên, theo định lý 3 về sự phụ thuộc tuyến tính (xem §3), mọi hệ con của hệ (5.1) với số vectơ lớn hơn r (nếu có) đều phụ thuộc tuyến tính.

Bây giờ ta chứng minh điều ngược lại. Giả sử trong hệ vectơ (5.1) tồn tại một hệ con gồm r vectơ $P_1, P_2, \dots, P_r$ độc lập tuyến tính và mọi hệ con với số vectơ lớn hơn r (nếu có) đều phụ thuộc tuyến tính. Chú ý rằng, mỗi vectơ P_i ($i = 1, 2, \dots, r$) là một trong các vectơ của hệ (5.1), nhưng ta đổi tên cho khỏi phức tạp về ký hiệu chỉ số dưới. Ta sẽ chứng minh rằng mọi vectơ của hệ (5.1) biểu diễn tuyến tính qua $P_1, P_2, \dots, P_r$. Hiển nhiên là mỗi vectơ P_i biểu diễn tuyến tính qua $P_1, P_2, \dots, P_r$. Ta sẽ chỉ ra rằng mọi vectơ X_j của hệ (5.1) khác các vectơ $P_1, P_2, \dots, P_r$ cũng biểu diễn tuyến tính qua $P_1, P_2, \dots, P_r$. Thật vậy, theo giả thiết thì hệ vectơ $X_j, P_1, P_2, \dots, P_r$ phụ thuộc tuyến tính, do đó tồn tại các số thực $k, k_1, k_2, \dots, k_r$ trong đó có ít nhất một số khác 0 sao cho:

$$kX_j + k_1P_1 + k_2P_2 + \dots + k_rP_r = O_n. \quad (5.2)$$

Trong hệ thức (5.2) nhất thiết phải có $k \neq 0$, bởi vì nếu $k = 0$ thì từ (5.2) ta suy ra $P_1, P_2, \dots, P_r$ phụ thuộc tuyến tính, điều này trái với giả thiết. Do $k \neq 0$ nên X_j biểu diễn tuyến tính qua $P_1, P_2, \dots, P_r$:

$$X_j = -\frac{k_1}{k} P_1 - \frac{k_2}{k} P_2 - \dots - \frac{k_r}{k} P_r.$$

Như vậy, $P_1, P_2, \dots, P_r$ là một cơ sở của hệ vectơ (5.1), do đó hạng của hệ vectơ (5.1) bằng r . Định lý đã được chứng minh.

Từ định lý này ta dễ dàng suy ra:

Hệ quả 1: Một hệ vectơ n chiều phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi hạng của hệ vectơ đó nhỏ hơn số vectơ của nó. Nói cách khác, một hệ vectơ n chiều độc lập tuyến tính khi và chỉ khi hạng của hệ vectơ đó đúng bằng số vectơ của nó.

Hệ quả 2: Nếu hạng của hệ vectơ bằng r thì mọi hệ con gồm r vectơ độc lập tuyến tính của hệ vectơ đó đều là cơ sở của nó.

Định lý 2: Cho hai hệ vectơ n chiều:

$$X_1, X_2, \dots, X_m, \quad (5.3)$$

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_p. \quad (5.4)$$

Nếu mọi vectơ của hệ (5.3) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ (5.4) thì hạng của hệ (5.3) không lớn hơn hạng của hệ (5.4).

Chứng minh:

Gọi (P) là một cơ sở của hệ vectơ (5.3) và (Q) là một cơ sở của hệ vectơ (5.4). Vì (P) là một hệ con của hệ (5.3) nên mỗi vectơ của (P) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ (5.4). Mặt khác, mỗi vectơ của hệ (5.4) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của cơ sở (Q) của nó. Do phép biểu diễn tuyến tính có tính chất bắc cầu nên ta đây suy ra mọi vectơ của (P) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của (Q) . Vì (P) là một hệ vectơ độc lập tuyến tính và mỗi vectơ của nó biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ vectơ (Q) nên số vectơ của (P) không lớn hơn số vectơ của (Q) . Điều này chứng tỏ hạng của hệ vectơ (5.3) không lớn hơn hạng của hệ vectơ (5.4). Định lý đã được chứng minh.

IV. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI KHÔNG LÀM THAY ĐỔI HẠNG

a. Phép biến đổi thêm bớt vector

Cho hệ vector n chiều:

$$X_1, X_2, \dots, X_m. \quad (5.5)$$

Nếu thêm vào hệ vector (5.5) một vector $X \in \mathbb{R}^n$ ta được hệ vector:

$$X_1, X_2, \dots, X_m, X. \quad (5.6)$$

Nói ngược lại: nếu bớt đi vector X của hệ vector (5.6) thì ta được hệ vector (5.5).

Định lý: Nếu vector X biểu diễn tuyến tính qua các vector của hệ (5.5) thì hai hệ vector (5.5) và (5.6) có hạng bằng nhau. Nói cách khác, *hạng của một hệ vector không thay đổi nếu ta thêm vào một vector biểu diễn tuyến tính qua các vector của hệ đó, hoặc bớt đi một vector biểu diễn tuyến tính qua các vector còn lại của nó.*

Chứng minh: Gọi (P) là một cơ sở của hệ (5.5). Hệ vector (P) đồng thời là một hệ con độc lập tuyến tính của hệ vector (5.6). Vì X biểu diễn tuyến tính qua các vector của hệ (5.5) và mỗi vector của hệ (5.5) biểu diễn tuyến tính qua các vector của cơ sở (P) của nó nên X biểu diễn tuyến tính qua các vector của hệ vector (P) . Như vậy, mọi vector của hệ (5.6) biểu diễn tuyến tính qua các vector của hệ con (P) của nó, do đó (P) là một cơ sở của hệ vector (5.6). Điều này chứng tỏ mọi cơ sở của hệ vector (5.5) đều là cơ sở của hệ vector (5.6), do đó hai hệ vector đó có hạng bằng nhau.

Định lý đã được chứng minh.

b. Các phép biến đổi sơ cấp

Định nghĩa: Các phép biến đổi sau đây đối với một hệ vector được gọi là *các phép biến đổi sơ cấp*:

1. Đổi chỗ hai vectơ của hệ.
2. Nhân một vectơ của hệ với một số $k \neq 0$.
3. Cộng vào một vectơ của hệ tích của một vectơ khác trong cùng hệ đó với một số bất kỳ.

Định lý: Các phép biến đổi sơ cấp đối với một hệ vectơ không làm thay đổi hạng của nó.

Chứng minh:

1. Định lý hiển nhiên đúng đối với phép biến đổi sơ cấp thứ nhất.
2. Xét một hệ vectơ n chiều bất kỳ:

$$X_1, X_2, \dots, X_m. \quad (5.7).$$

Nhân vectơ X_1 của hệ (5.7) với một số $k \neq 0$ ta được hệ vectơ:

$$kX_1, X_2, \dots, X_m. \quad (5.8)$$

Áp dụng định lý vừa chứng minh trên đây ta dễ dàng thấy rằng cả hai hệ vectơ (5.7) và (5.8) đều có hạng bằng hạng của hệ vectơ sau:

$$kX_1, X_1, X_2, \dots, X_m. \quad (5.9).$$

Thật vậy:

- Hạng của hệ vectơ (5.9) bằng hạng của hệ vectơ (5.7) bởi vì vectơ kX_1 biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ (5.7):

$$kX_1 = kX_1 + 0X_2 + \dots + 0X_m.$$

- Hạng của hệ vectơ (5.9) bằng hạng của hệ vectơ (5.8) bởi vì vectơ X_1 biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ (5.8):

$$X_1 = \frac{1}{k}(kX_1) + 0X_2 + \dots + 0X_m.$$

Vậy hai hệ vectơ (5.7) và (5.8) có hạng bằng nhau. Điều này chứng tỏ phép biến đổi sơ cấp thứ hai không làm thay đổi hạng của hệ vectơ.

3. Từ hệ vectơ (5.7), cộng vào vectơ X_1 tích của vectơ X_2 với số α , ta được hệ vectơ:

$$X_1 + \alpha X_2, X_2, \dots, X_m. \quad (5.10)$$

Tương tự như trên, ta có thể chứng minh rằng cả hai hệ vectơ (5.7) và (5.10) đều có hạng bằng hạng của hệ vectơ sau:

$$X_1 + \alpha X_2, X_1, X_2, \dots, X_m. \quad (5.11)$$

Thật vậy:

- Hạng của hệ vectơ (5.11) bằng hạng của hệ vectơ (5.7) bởi vì vectơ $X_1 + \alpha X_2$ biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ (5.7):

$$X_1 + \alpha X_2 = X_1 + \alpha X_2 + \dots + 0X_m.$$

- Hạng của hệ vectơ (5.11) bằng hạng của hệ vectơ (5.10) bởi vì vectơ X_1 biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ (5.10):

$$X_1 = (X_1 + \alpha X_2) - \alpha X_2 + 0X_3 + \dots + 0X_m.$$

Vậy hai hệ vectơ (5.7) và (5.10) có hạng bằng nhau. Điều này chứng tỏ phép biến đổi sơ cấp thứ ba không làm thay đổi hạng của hệ vectơ.

BÀI TẬP

21. Cho hệ vectơ:

$$\{X_1 = (1, 1, 0), X_2 = (1, 2, 1), X_3 = (5, 7, 2), X_4 = (-2, -1, 1)\}.$$

Hãy biểu diễn tuyến tính các vectơ X_3, X_4 qua hai vectơ X_1, X_2 , từ đó suy ra rằng hệ con gồm hai vectơ X_1, X_2 là một cơ sở của hệ vectơ đã cho.

22. Cho 4 vectơ

$$X_1 = (1, 1, 1, 1),$$

$$X_2 = (2, 0, -1, 3),$$

$$X_3 = (3, -1, -2, 0),$$

$$X_4 = (5, -1, -2, -2).$$

- a) Chứng minh rằng hệ con gồm ba vector X_1, X_2, X_3 độc lập tuyến tính;
 b) Chứng minh rằng vector X_4 biểu diễn tuyến tính qua 3 vector X_1, X_2, X_3 ;
 c) Cho biết hạng của hệ vector X_1, X_2, X_3, X_4 .

23. Cho hai vector n chiều X, Y , không tỷ lệ. Hãy tìm hạng của hệ 5 vector sau:

$$\begin{cases} X_1 = 2X - Y \\ X_2 = X + Y \\ X_3 = 3X + 2Y \\ X_4 = 5X + 4Y \\ X_5 = -4X + 7Y \end{cases}$$

24. Cho X, Y là hai vector n chiều bất kỳ. Gọi $X_1, X_2, \dots, X_m$ là các tổ hợp tuyến tính của hai vector X, Y . Hãy chứng minh rằng hạng của hệ vector

$$\{X + Y, X - Y, X_1, X_2, \dots, X_m\}$$

bằng hạng của hệ vector $\{X, Y\}$.

25. Chứng minh rằng hạng của hệ con bất kỳ của một hệ vector không lớn hơn hạng của chính hệ vector đó.

26. Chứng minh rằng hạng của hệ vector

$$\{X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \dots, X_m + Y_m\}$$

không lớn hơn tổng hạng của hai hệ vector

$$\{X_1, X_2, \dots, X_m\}, \{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}.$$

27. Chứng minh rằng hạng của hệ vectơ

$$\{X_1, X_2, \dots, X_m, Y_1, Y_2, \dots, Y_p\}$$

không lớn hơn tổng hạng của hai hệ vectơ

$$\{X_1, X_2, \dots, X_m\}, \{Y_1, Y_2, \dots, Y_p\}.$$

28. Hạng của một hệ vectơ thay đổi thế nào nếu ta thêm vào một vectơ không biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ đó? Tại sao?

29. Hạng của một hệ vectơ thay đổi thế nào nếu ta bớt đi một vectơ không biểu diễn tuyến tính qua các vectơ còn lại của hệ đó? Tại sao?

30. Chứng minh rằng mỗi vectơ của một hệ vectơ n chiều biểu diễn tuyến tính một cách duy nhất qua các vectơ của một cơ sở của nó.

31. Chứng minh rằng nếu hệ vectơ n chiều $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ có hạng bằng r thì tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của các vectơ $X_1, X_2, \dots, X_m$ là một không gian con r chiều của không gian $\mathbb{R}^n$.

Chương 3

MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

§1. MA TRẬN VÀ CÁC PHÉP TOÁN TUYẾN TÍNH ĐỐI VỚI MA TRẬN

I. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ MA TRẬN

a. Khái niệm ma trận

Trong chương 2 chúng ta đã nói đến khái niệm ma trận hệ số và ma trận mở rộng của một hệ phương trình tuyến tính. Các bảng số đó cho biết toàn bộ thông tin giúp ta tìm ra các ẩn số. Trong nhiều lĩnh vực khác, chẳng hạn như trong công tác thống kê và công tác kế toán, người ta thường trình bày dữ liệu dưới dạng các bảng số, trong đó số liệu được xếp theo dòng và theo cột. Trong toán học ta gọi các bảng số như vậy là ma trận.

Định nghĩa: *Ma trận* là một bảng số xếp theo dòng và theo cột. Một ma trận có m dòng và n cột được gọi là *ma trận cấp $m \times n$* .

Khi cho một ma trận ta viết bảng số bên trong dấu ngoặc tròn hoặc dấu ngoặc vuông. Ma trận cấp $m \times n$ có dạng tổng quát như sau:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{hoặc} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ta sẽ dùng các chữ cái in hoa: A, B, C, ... để đặt tên các ma trận. Để gán tên cho một ma trận là A ta viết:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

Các số trong ma trận được gọi là các *phần tử* của nó. Ở dạng tổng quát (1.1) phần tử nằm trên dòng i và cột j được ký hiệu là a_{ij} . Để mô tả vắn tắt, ta có thể dùng ký hiệu

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad (1.2)$$

để nói rằng A là một ma trận cấp $m \times n$ mà phần tử nằm trên dòng i và cột j được ký hiệu là a_{ij} . Cách viết (1.2) tương đương với cách viết (1.1) và được dùng khi nói đến một ma trận tổng quát nào đó. Khi cấp của ma trận và các phần tử đã được xác định bằng số, ta thường sử dụng cách viết dạng (1.1).

Ví dụ:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -4 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

là một ma trận cấp 2×3 . Đối chiếu với ký hiệu tổng quát thì các phần tử của A là: $a_{11} = 5$, $a_{12} = 3$, $a_{13} = -1$, $a_{21} = -4$, $a_{22} = 11$, $a_{23} = 0$.

b. Định thức ma trận

Định nghĩa: Hai ma trận được coi là *bằng nhau* khi và chỉ khi chúng cùng cấp và các phần tử ở vị trí tương ứng của chúng đôi một bằng nhau.

Để nói rằng hai ma trận A và B bằng nhau ta viết $A = B$. Chú ý rằng khái niệm ma trận bằng nhau chỉ áp dụng cho các ma trận cùng cấp. Trong tập hợp các ma trận cấp $m \times n$, một đẳng thức ma trận tương đương với một hệ $m \cdot n$ đẳng thức số:

$$\left[a_{ij} \right]_{m \times n} = \left[b_{ij} \right]_{m \times n} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{ij} = b_{ij} \\ i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

c. Ma trận không và ma trận đối

Ma trận không là ma trận có tất cả các phần tử bằng 0. Trong tập hợp tất cả các ma trận cấp $m \times n$ (m, n cố định) có một ma trận không duy nhất được ký hiệu là $O_{m \times n}$, hoặc O (nếu cấp của ma trận đã được xác định trước):

$$O = O_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Ma trận đối của một ma trận A là ma trận cùng cấp mà mỗi phần tử của nó là số đối của phần tử tương ứng của ma trận A . Ma trận đối của ma trận A được ký hiệu là $-A$.

Ví dụ: Ma trận đối của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -4 & 11 & 0 \end{bmatrix}$$

là ma trận:

$$-A = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 1 \\ 4 & -11 & 0 \end{bmatrix}.$$

d. Hệ vectơ dòng và hệ vectơ cột của ma trận

Lý thuyết ma trận và lý thuyết về không gian vectơ có liên hệ chặt chẽ với nhau. Để làm rõ mối quan hệ này, ta xét một ma trận cấp $m \times n$ bất kỳ:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ta có thể xem mỗi dòng của ma trận A như một vectơ n chiều và mỗi cột của nó như một vectơ m chiều. Như vậy, mỗi ma trận cấp $m \times n$ cho tương ứng một *hệ vectơ dòng* gồm m vectơ n chiều và một *hệ vectơ cột* gồm n vectơ m chiều.

Khi sử dụng các thuật ngữ như hai dòng (cột) bằng nhau, tổng của các dòng (cột), tích của một dòng (cột) với một số, các dòng (cột) phụ thuộc tuyến tính v.v... ta hiểu các thuật ngữ đó như nói về vectơ.

Ngược lại, ta có thể xem xét các tính chất của một hệ vectơ thông qua ma trận có hệ vectơ dòng (cột) là hệ vectơ đó.

Trong cuốn sách này ta dùng ký hiệu A_i^d để chỉ dòng thứ i của ma trận A và ký hiệu A_j^c để chỉ cột thứ j của nó.

II. CÁC DẠNG MA TRẬN

a. Ma trận vuông

Ma trận vuông là ma trận có số dòng và số cột bằng nhau. Một ma trận có số dòng và số cột cùng bằng n được gọi là *ma trận vuông cấp n* . Ma trận vuông cấp n có dạng tổng quát như sau:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Trong ma trận vuông A đường chéo thứ nhất nối góc trên bên trái với góc dưới bên phải được gọi là *đường chéo chính*, đường chéo thứ hai được gọi là *đường chéo phụ*. Vị trí của các phần tử a_{ij} so với đường chéo chính được xác định theo các chỉ số i, j như sau:

- a_{ij} thuộc đường chéo chính khi và chỉ khi $i = j$;
- a_{ij} nằm phía trên đường chéo chính khi và chỉ khi $i < j$;
- a_{ij} nằm phía dưới đường chéo chính khi và chỉ khi $i > j$.

b. Ma trận tam giác

Ma trận tam giác là ma trận vuông có các phần tử nằm về một phía của đường chéo chính bằng 0. Có hai loại ma trận tam giác:

Ma trận tam giác trên:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (a_{ij} = 0 \text{ khi } i > j);$$

Ma trận tam giác dưới:
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (a_{ij} = 0 \text{ khi } i < j).$$

c. Ma trận đường chéo và ma trận đơn vị

Ma trận đường chéo là ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng 0. Ma trận đường chéo cấp n có dạng:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (a_{ij} = 0 \text{ khi } i \neq j).$$

Trường hợp đặc biệt, khi $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$, ma trận đường chéo được gọi là *ma trận vô hướng*.

Ma trận đường chéo có tất cả các phần tử thuộc đường chéo chính bằng 1 được gọi là *ma trận đơn vị*. Mỗi cấp ma trận vuông có một ma trận đơn vị được ký hiệu bằng chữ E:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Gọi e_{ij} là phần tử thuộc dòng i và cột j của ma trận đơn vị E, ta có:

$$e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{khi } i \neq j \\ 1 & \text{khi } i = j \end{cases}$$

d. Ma trận dòng và ma trận cột

Ma trận chỉ có một dòng duy nhất (ma trận cấp $1 \times n$) được gọi là *ma trận dòng*. Tương tự, ma trận chỉ có một cột duy nhất (ma trận cấp $m \times 1$) được gọi là *ma trận cột*.

Ta có thể xem các ma trận dòng và ma trận cột như các vector. Tuy nhiên bạn cần lưu ý rằng nếu xét dưới góc độ ma trận thì

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] \quad , \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

là hai ma trận khác nhau (do chúng không cùng cấp), trong khi dưới danh nghĩa vectơ thì đó là hai dạng viết (dạng dòng và dạng cột) của cùng một vectơ.

III. CÁC PHÉP TOÁN TUYẾN TÍNH

Thuật ngữ "phép toán tuyến tính" ở đây được dùng để chỉ phép cộng ma trận và phép nhân ma trận với số. Ở §4 chúng ta sẽ nói đến một phép toán khác là phép nhân ma trận với ma trận.

a. Phép cộng ma trận và phép nhân ma trận với số

Cho hai ma trận cùng cấp $m \times n$:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}, \quad B = [b_{ij}]_{m \times n}.$$

Định nghĩa:

1. Tổng của hai ma trận A và B là một ma trận cấp $m \times n$, ký hiệu là $A + B$ và được xác định như sau:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

2. Tích của ma trận A với một số α là một ma trận cấp $m \times n$, ký hiệu là αA và được xác định như sau:

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m \times n}.$$

Chú ý rằng *phép cộng ma trận chỉ áp dụng cho các ma trận cùng cấp* (có số dòng và số cột như nhau). Trong tập hợp các ma

trận cùng cấp, phép cộng ma trận và phép nhân ma trận với số được định nghĩa hoàn toàn tương tự như phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với số:

- Cộng hai ma trận cùng cấp có nghĩa là cộng các phần tử ở vị trí tương ứng với nhau;
- Nhân một ma trận với một số α có nghĩa là nhân mọi phần tử của ma trận đó với α .

Ví dụ 1: Cho

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & -6 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 & -8 & 0 \\ 12 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Theo định nghĩa ta có:

$$A + B = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -2 \\ 17 & -5 & -3 \end{bmatrix}, 5A = \begin{bmatrix} 15 & 20 & -10 \\ 25 & -30 & 5 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2: Theo định nghĩa ma trận không và ma trận đối, với A là một ma trận bất kỳ, ta luôn có:

$$0A = O, -A = (-1)A.$$

b. Các tính chất cơ bản của các phép toán tuyến tính

Do phép cộng ma trận và phép nhân ma trận với số được định nghĩa hoàn toàn tương tự như phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với số nên các tính chất cơ bản cũng lặp lại hoàn toàn tương tự.

Gọi A, B, C là các ma trận bất kỳ cấp $m \times n$ (m, n cố định), α và β là các số bất kỳ, ta luôn có:

1. $A + B = B + A$.
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. $A + O = A$.

4. $A + (-A) = O$
5. $1A = A$.
6. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
7. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
8. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

c. Phép trừ ma trận

Trong tập hợp các ma trận cùng cấp phép trừ cũng được định nghĩa tương tự như phép trừ vector. *Hiệu* của ma trận A và ma trận B được xác định thông qua phép cộng như sau:

$$A - B = A + (-B).$$

Với $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ta có

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n},$$

tức là mỗi phần tử của $A - B$ là hiệu các phần tử tương ứng của A và B .

Tương tự như đối với vector, ta có thể chứng minh được các hệ thức sau:

$$(A - B) + B = A;$$

$$\alpha(A - B) = \alpha A - \alpha B;$$

$$(\alpha - \beta)A = \alpha A - \beta A.$$

IV. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI MA TRẬN

a. Các phép biến đổi sơ cấp

Định nghĩa: Các phép biến đổi sau đây đối với ma trận được gọi là các *phép biến đổi sơ cấp*:

1. Đổi chỗ hai dòng (cột);

2. Nhân một dòng (cột) với một số khác 0;
3. Cộng vào một dòng (cột) tích của một dòng (cột) khác với một số k tùy chọn.

Nói cách khác: *Các phép biến đổi sơ cấp đối với ma trận là các phép biến đổi sơ cấp đối với hệ vectơ dòng hoặc hệ vectơ cột của nó.*

b. Phép chuyển vị ma trận

Cho ma trận cấp $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nếu xoay các dòng của A thành các cột (các cột thành các dòng) với thứ tự tương ứng ta được một ma trận cấp $n \times m$:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa: Ma trận A' được gọi là *ma trận chuyển vị của ma trận A*. Phép biến đổi ma trận A thành ma trận A' được gọi là *phép chuyển vị ma trận*.

Nếu gọi a'_{ij} là phần tử thuộc dòng i và cột j của ma trận chuyển vị A' thì ta có:

$$a'_{ij} = a_{ji} \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m).$$

Ví dụ: Ma trận chuyển vị của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 12 & -9 \\ -5 & 2 & 6 & -3 \\ 9 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

là ma trận

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 9 \\ 7 & 2 & -1 \\ 12 & 6 & 0 \\ -9 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

BÀI TẬP

1. Hãy chỉ ra mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

- a) Phép cộng và phép trừ ma trận chỉ áp dụng cho các ma trận cùng cấp;
- b) Phép cộng ma trận và phép nhân ma trận với số được thực hiện hoàn toàn tương tự như phép cộng vectơ và phép nhân vectơ với số;
- c) Chuyển vị ma trận có nghĩa là đổi chỗ hai dòng của nó;
- d) Hiệu của ma trận A và ma trận B là tổng của ma trận A và ma trận đối của B;
- e) Do phép cộng ma trận có tính chất kết hợp, khi viết tổng của ba ma trận trở lên ta không nhất thiết phải dùng dấu ngoặc.

2. Cho hai ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 8 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

- a) Lập các ma trận $A + B$, $A - B$, $2A + 5B$, $3A - B$.
- b) Tìm ma trận X sao cho $3(X + 2A + B) = X + 7A - 2B$.
3. Lập ma trận $4A + 3A'$ (A' là ma trận chuyển vị của A), cho biết:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

4. Lập các ma trận $2A' - 3B$ và $5A + 3B'$, cho biết

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -2 & 0 \\ 1 & 21 \end{bmatrix}.$$

§2. ĐỊNH THỨC

I. HOÁN VỊ CỦA n SỐ TỰ NHIÊN ĐẦU

Để định nghĩa định thức cấp n , ta cần đến một số khái niệm có liên quan đến hoán vị của tập hợp n số tự nhiên đầu.

Ở trường phổ thông trung học bạn đã được làm quen với khái niệm hoán vị của một tập hợp hữu hạn. Xin nhắc lại hai điểm cơ bản:

- Theo định nghĩa, một hoán vị của một tập hợp n phần tử là một cách sắp xếp n phần tử của tập hợp đó theo một thứ tự nhất định.
- Một tập hợp n phần tử có $n!$ (n giai thừa) hoán vị khác nhau ($n! = 1.2 \dots n$).

Bây giờ ta xét các hoán vị của n số tự nhiên đầu, tức là các hoán vị của tập hợp $\{1, 2, \dots, n\}$. Mỗi hoán vị của n số tự nhiên đầu được biểu diễn dưới dạng:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n,$$

trong đó α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là số tự nhiên đứng ở vị trí thứ i trong hoán vị ($1 \leq \alpha_i \leq n$; $\alpha_i \neq \alpha_j$ khi $i \neq j$). Khi $i < j$ thì ta nói: số α_i *đứng trước* số α_j , hoặc số α_j *đứng sau* số α_i trong hoán vị.

Theo thứ tự của hệ đếm thì các số tự nhiên được sắp theo thứ tự tăng dần: số lớn hơn đứng sau số nhỏ hơn nó. Trong một hoán vị, trật tự tự nhiên đó có thể bị xáo trộn và xảy ra trường hợp số lớn hơn lại đứng trước số nhỏ hơn nó, tức là $i < j$, nhưng $\alpha_i > \alpha_j$.

Định nghĩa: Trong hoán vị $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nếu $i < j$, nhưng $\alpha_i > \alpha_j$ thì ta nói hai số α_i và α_j tạo thành một *nghịch thế*. Một hoán vị được gọi là *hoán vị chẵn* nếu số nghịch thế của nó là số chẵn, và được gọi là *hoán vị lẻ* nếu số nghịch thế của nó là số lẻ.

Để xác định số nghịch thế của một hoán vị ta tính từ trái sang phải xem mỗi số có bao nhiêu số nhỏ hơn đứng sau nó, từ đó suy ra tổng số nghịch thế của hoán vị đó.

Ví dụ: Xét một hoán vị của 5 số tự nhiên đầu:

$$4, 3, 5, 1, 2.$$

Trong hoán vị này:

Số 4 có ba số nhỏ hơn đứng sau nó (số 3, số 1 và số 2);

Số 3 có hai số nhỏ hơn đứng sau nó (số 1 và số 2);

Số 5 có hai số nhỏ hơn đứng sau nó (số 1 và số 2);

Số 1 không có số nào nhỏ hơn đứng sau nó.

Vậy số nghịch thế của hoán vị trên là: $3 + 2 + 2 + 0 = 7$. Hoán vị đó là một hoán vị lẻ.

Định lý: Nếu trong một hoán vị ta đổi chỗ hai số và giữ nguyên vị trí của các số còn lại thì hoán vị thay đổi tính chẵn lẻ, tức là hoán vị chẵn biến thành hoán vị lẻ hoặc ngược lại.

Chứng minh: Trước hết ta thấy rằng nếu trong hoán vị ta đổi chỗ hai số α, β đứng cạnh nhau và giữ nguyên vị trí của các số còn lại thì vị trí tương đối (vị trí đứng trước hoặc đứng sau) của α và β so với các số còn lại không thay đổi, do đó khi chuyển từ hoán vị $(\dots, \alpha, \beta, \dots)$ sang hoán vị $(\dots, \beta, \alpha, \dots)$ số nghịch thế trong hoán vị tăng thêm 1 (nếu $\alpha < \beta$) hoặc giảm đi 1 (nếu $\alpha > \beta$). Điều này dẫn đến sự thay đổi tính chẵn lẻ của hoán vị.

Để chứng minh định lý trong trường hợp hai số α và β không đứng cạnh nhau, ta xét hoán vị:

$$\dots, \alpha, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \beta, \dots$$

trong đó $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ là m số đứng xen giữa α và β (các dấu ba chấm chỉ những số không viết ra). Việc đổi chỗ hai số α và β tương đương với một dãy kế tiếp $2m + 1$ phép đổi chỗ hai số đứng cạnh nhau theo trình tự như sau:

- Đổi chỗ α lần lượt với $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$. Sau m lần đổi chỗ hai số đứng cạnh nhau như vậy ta được hoán vị

$$\dots, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \alpha, \beta, \dots$$

- Đổi chỗ β lần lượt với $\alpha, \gamma_m, \dots, \gamma_2, \gamma_1$. Sau $m + 1$ lần đổi chỗ hai số đứng cạnh nhau như vậy ta được hoán vị

$$\dots, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m, \alpha, \dots$$

Sau mỗi lần biến đổi hoán vị thay đổi tính chẵn lẻ, do đó sau $2m+1$ lần hoán vị chẵn sẽ trở thành hoán vị lẻ và hoán vị lẻ trở thành hoán vị chẵn. Định lý đã được chứng minh.

Hệ quả 1: Nếu $n \geq 2$ thì trong số $n!$ hoán vị của n số tự nhiên đầu có một nửa là hoán vị chẵn và một nửa là hoán vị lẻ.

Chứng minh: Gọi p là số hoán vị chẵn và q là số hoán vị lẻ. Đối với mỗi hoán vị chẵn ta đổi chỗ số đứng đầu và số đứng ở vị trí cuối cùng. Bằng cách đó, từ p hoán vị chẵn khác nhau ta nhận được p hoán vị lẻ khác nhau, do đó $p \leq q$. Biến đổi tương tự như vậy thì từ q hoán vị lẻ khác nhau ta nhận được q hoán vị chẵn khác nhau, do đó $q \leq p$. Kết hợp hai bất đẳng thức trên ta có $p = q$.

Hệ quả 2: Nếu bằng cách đổi chỗ các cột của ma trận (với dòng thứ hai là một hoán vị của n số tự nhiên đầu)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

ta đưa ma trận đó về dạng

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

thì hai hoán vị $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ và $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ có cùng tính chẵn lẻ.

Chứng minh: Thật vậy, mỗi phép đổi chỗ các cột của ma trận tương ứng với một phép đổi chỗ hai số của cả hai hoán vị ở dòng trên và dòng dưới. Sau cùng một số các phép đổi chỗ, hoán vị chẵn $1, 2, \dots, n$ trở thành hoán vị $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, còn hoán vị $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ được biến đổi thành hoán vị chẵn $1, 2, \dots, n$, do đó hai hoán vị $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ và $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ cùng là hoán vị chẵn hoặc cùng là hoán vị lẻ, tùy theo số lần đổi chỗ là chẵn hay lẻ.

II. ĐỊNH NGHĨA ĐỊNH THỨC CẤP n

Cho một ma trận vuông cấp n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Trước hết ta trả lời câu hỏi: Có bao nhiêu cách chọn các bộ n phần tử của ma trận A mà các phần tử đó thuộc các dòng khác nhau và các cột khác nhau, tức là không có hai phần tử nào thuộc cùng một dòng hoặc cùng một cột?

Để chọn một bộ n phần tử như vậy ta lấy một hoán vị bất kỳ của n số tự nhiên đầu, gọi là *hoán vị chỉ số cột*:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n.$$

Theo hoán vị đó ta chọn n phần tử của ma trận A như sau:

Trên dòng 1 lấy phần tử ở cột α_1 (phần tử $a_{1\alpha_1}$);

Trên dòng 2 lấy phần tử ở cột α_2 (phần tử $a_{2\alpha_2}$);

.....

Trên dòng n lấy phần tử ở cột α_n (phần tử $a_{n\alpha_n}$).

Mỗi hoán vị chỉ số cột cho tương ứng một cách chọn như trên. Vậy câu trả lời là: có $n!$ cách chọn các bộ n phần tử của ma trận A , trong đó không có hai phần tử nào thuộc cùng một dòng hoặc cùng một cột.

Theo mỗi hoán vị chỉ số cột $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ta chọn n phần tử của ma trận A theo cách thức nêu trên và tính tích số sau:

$$(-1)^h a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n}, \quad (2.1)$$

trong đó h là số nghịch thế của hoán vị $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Chú ý rằng mỗi tích số (2.1) là tích của một bộ n phần tử của ma trận A lấy trên các dòng khác nhau và các cột khác nhau (tương ứng

với một hoán vị chỉ số cột $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, nhưng được gán thêm dấu theo quy tắc sau:

- Gán dấu $+$ nếu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là hoán vị chẵn;
- Gán dấu $-$ nếu $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ là hoán vị lẻ.

Theo $n!$ hoán vị của n số tự nhiên đầu tiên ta có $n!$ tích số (2.1).

Định nghĩa: Tổng của tất cả $n!$ tích số (2.1) được gọi là *định thức của ma trận A*. Định thức của một ma trận vuông cấp n được gọi là *định thức cấp n*.

Mỗi tích (2.1) được gọi là một *thành phần* của định thức.

Như vậy, định thức cấp n là tổng của $n!$ thành phần của nó. Mỗi thành phần được xác định theo một hoán vị $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \Rightarrow (-1)^h a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n},$$

với h là số nghịch thế của hoán vị $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Định thức của ma trận A được ký hiệu là $|A|$, hoặc $\det(A)$. Nếu không gọi tên ma trận thì ta viết định thức cấp n dưới dạng một bảng số có n dòng và n cột đặt giữa hai dấu gạch đứng:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Chú ý rằng *mỗi định thức là một số xác định*, còn ma trận chỉ là một bảng số. Dấu gạch đứng được sử dụng thay cho dấu ngoặc để phân biệt định thức với ma trận vuông.

Từ định nghĩa ta dễ dàng suy ra rằng *nếu tất cả các phần tử của định thức là số nguyên thì tất cả các thành phần của nó là số nguyên, do đó định thức là một số nguyên*.

III. MINH HOẠ ĐỊNH NGHĨA:

TÍNH CÁC ĐỊNH THỨC CẤP 1, 2, 3

a. Định thức cấp 1

Ma trận vuông cấp 1 chỉ có một phần tử duy nhất là một số a . Tập hợp $\{1\}$ chỉ có một hoán vị duy nhất là hoán vị chẵn (số nghịch thế bằng 0). Như vậy, định thức của ma trận vuông cấp 1 có một thành phần bằng phần tử duy nhất của nó, do đó *định thức cấp 1 bằng phần tử duy nhất của nó*:

$$\det([a]_{1 \times 1}) = a.$$

b. Định thức cấp 2

Định thức của ma trận vuông cấp 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

có 2 thành phần tương ứng với 2 hoán vị của tập hợp $\{1, 2, \}$:

Thành phần tương ứng với hoán vị chẵn 1, 2: $+ a_{11}a_{22}$;

Thành phần tương ứng với hoán vị lẻ 2, 1: $- a_{12}a_{21}$.

Theo định nghĩa định thức là tổng hai thành phần này:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Như vậy: *Định thức cấp 2 bằng tích hai phần tử thuộc đường chéo chính trừ đi tích hai phần tử thuộc đường chéo phụ.*

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = bx - ay; \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - (-2).5 = 13.$$

c. Định thức cấp ba

Định thức của ma trận vuông cấp 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

có 6 thành phần tương ứng với 6 hoán vị của tập hợp $\{1, 2, 3\}$:

Hoán vị $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	Số nghịch thế	Thành phần tương ứng $\pm a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3}$
1, 2, 3	0	$+ a_{11}a_{22}a_{33} = + T_1$
2, 3, 1	2	$+ a_{12}a_{23}a_{31} = + T_2$
3, 1, 2	2	$+ a_{13}a_{21}a_{32} = + T_3$
3, 2, 1	3	$- a_{13}a_{22}a_{31} = - T_4$
2, 1, 3	1	$- a_{12}a_{21}a_{33} = - T_5$
1, 3, 2	1	$- a_{11}a_{23}a_{32} = - T_6$

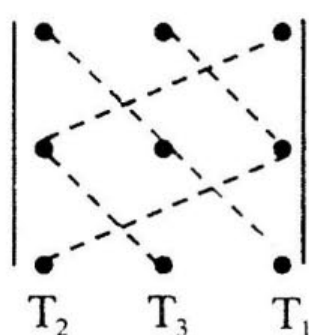
Theo định nghĩa, ta có:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = T_1 + T_2 + T_3 - (T_4 + T_5 + T_6),$$

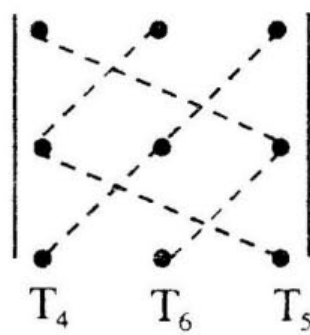
trong đó mỗi tích T_k ($k = 1, 2, \dots, 6$) là tích của ba phần tử mà ta có thể xác định theo quy tắc đường chéo như sau:

- T_1 là tích 3 phần tử trên đường chéo chính; mỗi tích T_2 và T_3 là tích của hai phần tử trên đường song song với đường chéo chính (có hai đường như vậy) và phần tử ở góc đối diện.
- Các tích T_4, T_5, T_6 (đặt sau dấu $-$) được xác định hoàn toàn giống như T_1, T_2, T_3 , nhưng theo đường chéo phụ.

Quy tắc đường chéo được biểu diễn trên sơ đồ sau (các dấu chấm đen nối với nhau là các thừa số của một tích T_k):



(Gán dấu +)



(Gán dấu -)

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 1.5.2 + 2.(-2).4 + 3.(-1).(-3) \\ - [3.5.4 + 2.(-1).2 + 1.(-2).(-3)] \\ = 10 - 16 + 9 - (60 - 4 + 6) = -59.$$

IV. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐỊNH THỨC

Đối với các định thức cấp cao việc tính định thức trực tiếp theo định nghĩa trở nên cồng kềnh, bởi định thức cấp càng cao thì số lượng các thành phần càng lớn và số lượng phép toán phải thực hiện càng nhiều. Do đó, chúng ta cần đến các phương pháp khác để tính định thức. Trước khi đề cập đến các phương pháp tính

định thức, chúng ta hãy xem xét các tính chất cơ bản của định thức để sử dụng khi tính toán.

Định lý 1: Định thức của một ma trận vuông bằng định thức của ma trận chuyển vị của nó:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chứng minh: Gọi $A' = [a'_{ij}]_{m \times n}$ là ma trận chuyển vị của ma trận $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, ta có $a'_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Xét một thành phần bất kỳ của định thức của ma trận A:

$$T = (-1)^h a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \cdots a_{n\alpha_n},$$

trong đó h là số nghịch thế của hoán vị $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Ta có:

$$T = (-1)^h a'_{\alpha_1 1} a'_{\alpha_2 2} \cdots a'_{\alpha_n n}.$$

Sắp xếp lại các phần a'_{ij} trong tích T theo thứ tự chỉ số dòng tăng dần ta có

$$T = (-1)^h a'_{1\beta_1} a'_{2\beta_2} \cdots a'_{n\beta_n}.$$

Theo hệ quả 2 của định lý về việc đổi chỗ các số trong hoán vị thì hai hoán vị $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ và $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ có cùng tính chẵn lẻ, do đó:

$$T = (-1)^k a'_{1\beta_1} a'_{2\beta_2} \cdots a'_{n\beta_n},$$

trong đó k là số nghịch thế của hoán vị $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Như vậy, mỗi thành phần T của định thức của ma trận A đồng thời là một thành phần của định thức của ma trận chuyển vị A' , do đó hai ma trận A và A' có định thức bằng nhau.

Định lý 1 cho thấy các dòng và các cột trong định thức có vai trò như nhau, do đó *tất cả các tính chất đúng với các dòng đều đúng với các cột*. Trong các định lý dưới đây về tính chất của định thức ta chỉ nói đến các dòng. Các định lý đó vẫn đúng khi ta thay chữ "dòng" bằng chữ "cột".

Định lý 2: *Nếu tất cả các phần tử của một dòng nào đó của định thức bằng 0 thì định thức bằng 0.*

Chứng minh: Xét một thành phần bất kỳ của định thức cấp n :

$$\pm a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}.$$

Nếu tất cả các phần tử của dòng thứ i bằng 0 thì trong mỗi thành phần của định thức có thừa số $a_{i\alpha_i} = 0$. Từ đây suy ra tất cả các thành phần của định thức bằng 0, do đó định thức bằng 0.

Định lý 3: *Nếu trong định thức ta đổi chỗ hai dòng và giữ nguyên vị trí của các dòng còn lại thì định thức đổi dấu.*

Chứng minh: Nếu đổi chỗ dòng thứ i và dòng thứ k ($i < k$) của định thức d thì thành phần tương ứng với hoán vị

$$\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n$$

của định thức d sẽ chuyển thành thành phần tương ứng với hoán vị

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$$

của định thức sau khi đổi chỗ. Do việc đổi chỗ hai số trong hoán vị làm thay đổi tính chẵn lẻ của hoán vị nên hai hoán vị nói trên có tính chẵn lẻ ngược nhau. Như vậy, nếu đổi chỗ hai dòng của định thức d thì ta được một định thức d' mà mỗi thành phần của nó đổi dấu với một thành phần của định thức d , do đó $d' = -d$.

Hệ quả: Định thức bằng 0 nếu nó có hai dòng bằng nhau.

Thật vậy, nếu định thức d có dòng thứ i và dòng thứ k ($k \neq i$) bằng nhau, tức là hai dòng đó là hai vectơ bằng nhau, thì khi đổi chỗ hai dòng đó định thức không thay đổi. Mặt khác, theo định lý 3 thì việc đổi chỗ như vậy làm định thức đổi dấu, do đó $d = -d$, từ đây suy ra $d = 0$.

Định lý 4: Nếu nhân một dòng nào đó của định thức d với một số α (tức là nhân mỗi phần tử của dòng đó với số α) thì định thức mới nhận được bằng định thức cũ nhân với α .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nói cách khác: Thừa số chung của các phần tử của một dòng của định thức có thể đưa ra ngoài dấu định thức.

Chứng minh:

Gọi d' là định thức nhận được sau khi nhân dòng thứ i của định thức d với số α . Tương ứng với cùng một hoán vị $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ ta có thành phần của định thức d là

$$(-1)^h a_{1\alpha_1} \cdots a_{i\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n},$$

và thành phần của định thức d' là

$$(-1)^h a_{1\alpha_1} \cdots (\alpha a_{i\alpha_i}) \cdots a_{n\alpha_n} = \alpha (-1)^h a_{1\alpha_1} \cdots a_{i\alpha_i} \cdots a_{n\alpha_n}.$$

Như vậy, mỗi thành phần của định thức d' bằng thành phần tương ứng của định thức d nhân với α , do đó $d' = \alpha d$.

Hệ quả: Định thức bằng 0 nếu nó có hai dòng tỷ lệ.

Thật vậy, nếu định thức có hai dòng tỷ lệ, tức là dòng này bằng dòng kia nhân với một số α , thì ta có thể đưa α ra ngoài dấu định thức. Bằng cách đó ta biểu diễn một định thức có hai dòng tỷ lệ thành tích của một số α với một định thức có hai dòng bằng nhau, do đó định thức đó bằng 0.

Định lý 5: *Nếu trong định thức:*

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dòng thứ i được viết dưới dạng tổng của hai dòng:

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) = (b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}) + (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$$

thì ta có thể tách định thức d thành tổng của hai định thức:

$$d = d_1 + d_2,$$

trong đó

$$d_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chứng minh:

Tương ứng với cùng một hoán vị $\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ ta có:

- Thành phần của định thức d_1 là: $(-1)^h a_{1\alpha_1} \dots b_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n}$;

- Thành phần của định thức d_2 là: $(-1)^h a_{1\alpha_1} \dots c_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n}$;
- Thành phần của định thức d là: $(-1)^h a_{1\alpha_1} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n}$.

Do $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ với mọi $j = 1, 2, \dots, n$ nên

$$\begin{aligned} (-1)^h a_{1\alpha_1} \dots a_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} &= (-1)^h a_{1\alpha_1} \dots (b_{i\alpha_i} + c_{i\alpha_i}) \dots a_{n\alpha_n} \\ &= (-1)^h a_{1\alpha_1} \dots b_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n} + (-1)^h a_{1\alpha_1} \dots c_{i\alpha_i} \dots a_{n\alpha_n}. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng mỗi thành phần của d bằng tổng các thành phần tương ứng của d_1 và d_2 , do đó $d = d_1 + d_2$.

Định lý 6: Nếu ta cộng vào một dòng của định thức tích của một dòng khác với một số k tùy chọn thì định thức không thay đổi.

Chứng minh: Cho định thức:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Nếu cộng vào dòng thứ hai tích của dòng thứ nhất với số k thì ta được định thức:

$$d' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & \dots & a_{2n} + ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Theo định lý 5, ta có

$$d' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Định thức thứ hai ở vế phải có hai dòng tỷ lệ, do đó từ đây suy ra $d' = d + 0 = d$.

Định lý 7: Định thức bằng 0 nếu hệ vectơ dòng của nó phụ thuộc tuyến tính.

Chứng minh: Gọi X_i là dòng thứ i ($i = 1, 2, \dots, n$) của định thức cấp n . Nếu hệ vectơ dòng của định thức phụ thuộc tuyến tính thì một dòng nào đó của định thức đó biểu diễn tuyến tính qua các dòng còn lại. Giả sử

$$X_n = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_{n-1} X_{n-1}.$$

Khi đó, bằng cách cộng lần lượt vào dòng thứ n tích của dòng thứ nhất với $(-k_1)$, tích của dòng thứ hai với $(-k_2)$, ..., tích của dòng thứ $n-1$ với $(-k_{n-1})$, ta được một định thức mà dòng thứ n có tất cả các phần tử bằng 0. Theo định lý 6 thì việc biến đổi như vậy không làm thay đổi định thức, do đó ta có điều phải chứng minh.

Trên đây chúng tôi đã trình bày các định lý cơ bản về tính chất của định thức. Sau đây là một số ví dụ áp dụng.

Ví dụ 1: Xét định thức cấp n có tất cả các phần tử có giá trị tuyệt đối bằng 1:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad a_{ij} \in \{1, -1\}.$$

Dựa vào các tính chất của định thức hãy chứng minh rằng d chia hết cho 2^{n-1} (chú ý rằng định thức d là một số nguyên vì tất cả các phần tử là số nguyên).

Giải: Ta biến đổi các dòng từ thứ hai trở xuống bằng cách cộng vào mỗi dòng đó dòng thứ nhất hoặc tích của dòng thứ nhất với (-1) , tùy theo số dấu dòng ngược dấu hay cùng dấu với a_{11} . Theo định lý 6 thì các phép biến đổi như vậy không làm thay đổi định thức, do đó ta có:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}, \text{ với } b_{ij} \in \{0, 2, -2\}.$$

Đặt $b_{ij} = 2c_{ij}$ ta có $c_{ij} \in \{0, 1, -1\}$. Đưa thừa số 2 của $n-1$ dòng, từ dòng thứ hai trở xuống ra ngoài dấu định thức (áp dụng định lý 4), ta được:

$$d = 2^{n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} \text{ với } c_{ij} \in \{0, 1, -1\}.$$

Định thức ở vế phải là một số nguyên, do đó d chia hết cho 2^{n-1} .

Ví dụ 2: Cho A là một ma trận vuông cấp n , với n là số lẻ. Chứng minh rằng nếu ma trận chuyển vị và ma trận đối của ma trận A bằng nhau thì định thức của A bằng 0.

Giải: Thật vậy, gọi A' là ma trận chuyển vị của A , theo định lý 1 ta có:

$$|A'| = |A|.$$

Mặt khác, việc nhân một ma trận với số k tương đương với việc nhân tất cả các dòng của nó với số k . Theo định lý 4 ta có:

$$|kA| = k^n |A|.$$

Vì n lẻ nên

$$|-A| = |(-1)A| = (-1)^n |A| = -|A|.$$

Với giả thiết $A' = -A$, ta có

$$|A'| = |-A| \Rightarrow |A| = -|A| \Rightarrow |A| = 0.$$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng:

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 + b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 + b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Giải: Xin nhắc lại rằng tất cả các định lý nói về các dòng của định thức đều đúng đối với các cột. Gọi d là định thức ở vế trái, theo định lý 5 ta có:

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 + c_1 & c_1 + a_1 \\ b_2 & b_2 + c_2 & c_2 + a_2 \\ b_3 & b_3 + c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix}.$$

Đối với định thức thứ nhất ở vế phải ta cộng vào cột thứ ba tích của cột thứ nhất với (-1) , còn đối với định thức thứ hai ta cộng vào cột thứ hai tích của cột thứ nhất với (-1) . Theo định lý 6 ta có:

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & c_1 + a_1 \\ b_2 & c_2 & c_2 + a_2 \\ b_3 & c_3 & c_3 + a_3 \end{vmatrix}.$$

Chương 3: Ma trận và định thức

Tương tự như trên, đối với định thức thứ nhất ở vế phải ta cộng vào cột thứ hai tích của cột thứ ba với (-1) , còn đối với định thức thứ hai ta cộng vào cột thứ ba tích của cột thứ hai với (-1) . Cũng theo định lý 6 ta có:

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & a_1 \\ b_2 & c_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Đối với định thức thứ hai ở vế phải ta đổi chỗ cột thứ ba và cột thứ hai, sau đó đổi chỗ cột thứ hai với cột thứ nhất. Theo định lý 2, sau mỗi lần đổi chỗ như vậy định thức đổi dấu, do đó sau hai lần đổi chỗ các cột, định thức thứ hai đúng bằng định thức thứ nhất. Ta có điều phải chứng minh.

BÀI TẬP

5. Tính các định thức:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-2 & a+2 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} \sin a & \sin b \\ \cos a & \cos b \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \sin b & \cos b \end{vmatrix}$$

6. Tính các định thức:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix}$$

7. Hãy đọc lần lượt các mệnh đề dưới đây và cho biết mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai.

- Mỗi định thức với các phần tử là các số thực là một số thực xác định.
- Định thức cấp n là tổng của $n!$ thành phần của nó.
- Mỗi thành phần của định thức là tích của n phần tử bất kỳ của nó, được gán dấu (+) hoặc dấu (-).
- Định thức có số dòng và số cột bằng nhau.
- Tồn tại các định thức mà khi đổi chỗ hai dòng hoặc nhân một dòng với một số bất kỳ đều không thay đổi.
- Định thức là số dương nếu tất cả các phần tử của nó là số dương.

8. Gọi a_{ij} là phần tử ở dòng i , cột j của định thức cấp 5.

- Trong các tích có gán dấu sau đây, tích nào là thành phần của định thức:

$$A_1 = +a_{23}a_{14}a_{52}a_{41}a_{35}$$

$$A_2 = -a_{23}a_{14}a_{52}a_{41}a_{35}$$

$$A_3 = +a_{53}a_{34}a_{12}a_{41}a_{35}$$

- Hãy xác định j, k để $(+a_{3j}a_{53}a_{24}a_{1k}a_{42})$ là một thành phần của định thức

- Viết tất cả các thành phần chứa 3 phần tử a_{21}, a_{43}, a_{15}

9. Hãy liệt kê tất cả các thành phần của định thức cấp 6 là các tích được gán dấu (-) và chứa 3 phần tử a_{21}, a_{43}, a_{15} (a_{ij} là phần tử ở dòng i , cột j).

10. Chứng minh rằng nếu định thức có tất cả các phần tử thuộc đường chéo chính là các số nguyên lẻ và tất cả các phần tử còn lại là các số nguyên chẵn thì định thức đó là một số nguyên lẻ.

11. Chỉ sử dụng định nghĩa hãy tính các thành phần chứa x^4 và x^3 của định thức

$$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

12. Chứng minh rằng định thức

$$D(x) = \begin{vmatrix} -2x & 1 & 2 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5x & 2 \\ -3 & 4x & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & x & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

là một đa thức biến số x . Hãy xác định bậc của đa thức đó và tính hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của x .

13. Sử dụng các tính chất của định thức hãy tính

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & 1 \\ c & a & b & 1 \\ \frac{b+c}{2} & \frac{c+a}{2} & \frac{a+b}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

14. Với a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) là các số tự nhiên ≤ 9 ta dùng ký hiệu $\overline{abc}$ chỉ số nguyên có ba chữ số. Hãy chứng minh:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \overline{a_1 b_1 c_1} \\ a_2 & b_2 & \overline{a_2 b_2 c_2} \\ a_3 & b_3 & \overline{a_3 b_3 c_3} \end{vmatrix} \cdot \dots$$

15. Cho D là định thức cấp $n \geq 2$, có các phân tử là các số nguyên không âm có một chữ số. Gọi D_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là số có n chữ số theo đúng trình tự của dòng thứ i như sau: số cuối dòng là số hàng đơn vị, số kế cuối là số hàng chục, ... Hãy chứng minh rằng D chia hết cho ước số chung lớn nhất của các số $D_1, D_2, \dots, D_n$.

16. Hãy chứng minh các hằng đẳng thức sau

$$a) \begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & a_1 - b_1 x & c_1 \\ a_2 + b_2 x & a_2 - b_2 x & c_2 \\ a_3 + b_3 x & a_3 - b_3 x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$b) \begin{vmatrix} a_1 + b_1 x & a_1 x + b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 x & a_2 x + b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 x & a_3 x + b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1 - x^2) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

17. Định thức cấp n thay đổi thế nào nếu sắp xếp các cột của nó theo thứ tự ngược lại?

18. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các định thức cấp 3 với các phân tử là một trong hai số 0 hoặc 1.

19. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các định thức cấp 3 với các phân tử là một trong hai số 1 hoặc -1 .

20. Cho d là định thức cấp n bất kỳ. Gọi X_1, X_2 là dòng thứ nhất và dòng thứ hai của d và xem mỗi dòng như một vectơ n chiều.

Định thức thay đổi thế nào nếu thay dòng thứ hai của nó bằng vectơ $2X_1 - 3X_2$ (các dòng còn lại giữ nguyên)?

§3. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH ĐỊNH THỨC

I. PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN

a. Khái niệm phần bù đại số

Xét định thức cấp n :

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Xoá đi dòng thứ i và cột thứ j (dòng và cột chứa phần tử a_{ij}) của định thức d ta được một định thức cấp $n - 1$, ký hiệu là M_{ij} .

Định nghĩa:

Định thức M_{ij} được gọi là *phần bù* và $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ được gọi là *phần bù đại số* của phần tử a_{ij} của định thức d .

Chú ý rằng phần bù đại số của một phần tử a_{ij} là phần bù M_{ij} được gán dấu (+) nếu $(i + j)$ là số chẵn, và được gán dấu (-) nếu $(i + j)$ là số lẻ.

Ví dụ 1: Cho định thức:

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Phần bù đại số của các phần tử thuộc dòng thứ nhất của định thức đã cho là:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{11} = + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -13.$$

b. Quy tắc khai triển định thức

Trong ví dụ trên đây ta có:

$$d = -16 + 18 - 5 - (60 + 6 + 4) = -77;$$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = (-2).10 + 3.4 + 5.(-13) = -73 = d.$$

Ta thấy tổng của các tích số của mỗi phần tử thuộc dòng thứ nhất của định thức d với phần bù đại số của nó đúng bằng định thức d . Đây không phải là một hiện tượng ngẫu nhiên, mà là một tính chất chung của tất cả các định thức. Tính chất đó có nội dung như sau:

Định lý: Định thức cấp n bằng tổng các tích số của mỗi phần tử của một dòng (hoặc cột) bất kỳ với phần bù đại số của phần tử đó, tức là, với i là một dòng bất kỳ và j là một cột bất kỳ của định thức d , ta luôn có:

$$d = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad (2.2)$$

$$d = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (2.3)$$

Ta công nhận định lý này. Công thức (2.2) được gọi là *công thức khai triển định thức theo dòng i* và công thức (2.3) được gọi là *công thức khai triển định thức theo cột j* .

Các công thức khai triển (2.3) và (2.4) cho phép ta tính một định thức cấp n thông qua các định thức cấp $n - 1$.

Ví dụ 2: Tính định thức

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Giải: Khai triển định thức d theo dòng thứ ba ta được:

$$\begin{aligned} d &= (-2)A_{31} + 5.A_{32} + 0.A_{33} + 0.A_{34} = (-2)M_{31} + 5.(-M_{32}) \\ &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -2.8 - 5.(-48) = 224. \end{aligned}$$

Nhận xét: Trên đây ta chọn dòng thứ ba để khai triển định thức d bởi vì sự có mặt các phần tử bằng 0 trên dòng này làm giảm hẳn khối lượng tính toán. Để tính một định thức cấp n , nói chung ta phải tính n định thức cấp $n - 1$. Để việc tính toán khỏi công kênh, bạn nên biến đổi sao cho một dòng (hoặc một cột) nào đó chỉ còn lại một phần tử khác 0, sau đó khai triển theo dòng (hoặc cột) đó. Bằng cách như vậy ta có thể tính một định thức cấp n thông qua một định thức cấp $n - 1$.

Ví dụ 3: Tính định thức:

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Giải: Trước hết ta biến đổi sao cho cột thứ ba chỉ còn lại một phần tử duy nhất khác 0 là $a_{53} = -1$. Để thực hiện điều đó ta cộng lần lượt vào dòng thứ hai và dòng thứ tư tích của dòng thứ năm, theo thứ tự, với 3 và với (-4) . Theo tính chất của định thức (định lý 6) thì các phép biến đổi đó không thay đổi định thức, do đó

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Khai triển định thức theo cột thứ ba ta được:

$$d = (-1)A_{53} = - \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$$

Tiếp theo ta lại biến đổi định thức cấp 4 sao cho cột thứ nhất chỉ còn lại một phần tử khác 0 là $a_{21} = 1$. Cộng lần lượt vào dòng thứ nhất, dòng thứ ba và dòng thứ tư tích của dòng thứ hai, theo thứ tự, với 2, với (-3) và với (-2) , ta được:

$$d = - \begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Khai triển định thức này theo cột thứ nhất ta được:

$$d = -1 \cdot A_{21} = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Đến đây bạn có thể tính định thức cấp 3 để được kết quả. Tuy nhiên, nếu ngại tính số lớn ta có thể tiếp tục biến đổi. Lấy cột thứ ba cộng vào cột thứ nhất, sau đó cộng vào dòng thứ ba tích của dòng thứ nhất với (-3) , ta được

$$d = \begin{vmatrix} 4 & 25 & 17 \\ 0 & -34 & -26 \\ 12 & -33 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 25 & 17 \\ 0 & -34 & -26 \\ 0 & -108 & -75 \end{vmatrix}.$$

Khai triển định thức cuối cùng theo cột thứ nhất ta được

$$d = 4 \begin{vmatrix} -34 & -26 \\ -108 & -75 \end{vmatrix} = 4(2550 - 2808) = -1032.$$

II. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI VỀ DẠNG TAM GIÁC

Xét định thức của ma trận dạng tam giác:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (a_{ij} = 0 \text{ khi } i < j).$$

Sử dụng liên tiếp công thức khai triển định thức theo cột thứ nhất ta dễ dàng có được công thức sau:

$$d = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Như vậy, định thức dạng tam giác bằng tích các phần tử thuộc đường chéo chính. Điều này gợi ý cho ta một phương pháp khác để tính định thức là biến đổi định thức về dạng tam giác. Việc biến đổi được thực hiện tương tự như phương pháp khử ẩn liên tiếp trên ma trận hệ số để giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, song bạn cần lưu ý sử dụng chính xác các tính chất của định thức mỗi lần biến đổi.

Ví dụ 4: Tính định thức

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Giải: Để biến đổi về dạng tam giác, trước hết ta cộng vào dòng thứ hai, dòng thứ ba, dòng thứ tư và dòng thứ năm tích của dòng thứ nhất, theo thứ tự, với (-2) , (-1) , (-3) và (-1) . Sau các phép biến đổi đó ta được:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -4 & -5 & 13 \\ 0 & 6 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 11 & -7 & -3 & 18 \\ 0 & 6 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Tiếp theo, để tránh phải tính phân số ta cộng vào dòng thứ hai, dòng thứ tư và dòng thứ năm, theo thứ tự, tích của dòng thứ ba với (-1) , (-2) và (-1) . Kết quả là:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 7 \\ 0 & 6 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Bây giờ cộng vào dòng thứ ba và dòng thứ tư, theo thứ tự, tích của dòng thứ hai với 6 và (-1) , ta được

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -19 & -20 & 48 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Tiếp theo, cộng vào dòng thứ ba và dòng thứ tư tích của dòng thứ năm, theo thứ tự, với 19 và với 2, sau đó đổi chỗ dòng thứ ba và dòng thứ năm, ta được:

$$d = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & -28 \end{vmatrix}.$$

Cuối cùng, cộng vào dòng thứ năm tích của dòng thứ tư với 5, ta được định thức dạng tam giác:

$$d = - \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -73 \end{vmatrix}.$$

Theo quy tắc tính định thức dạng tam giác ta được:

$$d = - 1.(-1).1.4.(-73) = - 292.$$

Ví dụ 5: Tính định thức cấp n có tất cả các phần tử thuộc đường chéo chính bằng x , còn tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính bằng a :

$$d = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

Giải: Chú ý rằng mỗi dòng của định thức đã cho đều có một phần tử bằng x , còn $n - 1$ phần tử còn lại bằng a . Cộng vào cột thứ nhất tất cả các cột còn lại ta được:

$$d = \begin{vmatrix} x + (n-1)a & a & a & \cdots & a \\ x + (n-1)a & x & a & \cdots & a \\ x + (n-1)a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x + (n-1)a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

Tiếp theo, lấy tích của dòng thứ nhất với (-1) cộng vào tất cả các dòng còn lại, ta được:

$$\begin{aligned}
 d &= \begin{vmatrix} x + (n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} \\
 &= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

BÀI TẬP

21. Tính định thức sau bằng cách khai triển theo dòng thứ ba

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

22. Tính định thức sau bằng cách khai triển theo cột thứ tư

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 1 & b \\ 1 & 1 & 2 & c \\ -1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}$$

23. Tính các định thức sau

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & 4 \\ -5 & 7 & -9 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

$$c) \begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$e) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$f) \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}$$

24. Tính các định thức sau

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & x & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x-1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

25. Tính các định thức cấp n sau đây bằng cách biến đổi về dạng tam giác

$$\begin{array}{l} \text{a)} \left| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right| \quad \text{b)} \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n+1 & 0 \end{array} \right| \end{array}$$

26. Tính định thức cấp $n+1$:

$$\left| \begin{array}{cccccc} 2 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 2 & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 2 & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 2 \end{array} \right|$$

27. Tính định thức cấp n có các phần tử như sau:

$$(\text{Phần tử ở dòng } i, \text{ cột } j) = \begin{cases} i & \text{nếu } j \geq i \\ j & \text{nếu } j < i \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

28. Tính định thức cấp n có các phần tử như sau:

$$(\text{Phần tử ở dòng } i, \text{ cột } j) = \begin{cases} i & \text{nếu } j \leq i \\ j & \text{nếu } j > i \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

29. Cho d là một định thức cấp n có tất cả các phần tử của một dòng thứ i bằng 1. Hãy chứng minh:

- Tổng các phần bù đại số của các phần tử thuộc mỗi dòng khác dòng thứ i đều bằng 0;
- Định thức d bằng tổng phần bù đại số của tất cả các phần tử của nó.

§4. PHÉP NHÂN MA TRẬN VÀ MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

I. PHÉP NHÂN MA TRẬN VỚI MA TRẬN

a. Định nghĩa phép nhân ma trận với ma trận

Cho hai ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix},$$

trong đó ma trận A có số cột bằng số dòng của ma trận B.

Định nghĩa: Tích của ma trận A và ma trận B là một ma trận cấp $m \times p$, ký hiệu là AB và được xác định như sau:

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix},$$

trong đó

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p).$$

Để thực hiện phép nhân ma trận với ma trận theo định nghĩa trên bạn cần lưu ý mấy điểm sau đây:

- Tích AB có nghĩa khi và chỉ khi số cột của ma trận đứng trước (ma trận A) bằng số dòng của ma trận đứng sau (ma trận B).

- Cấp của ma trận AB (khi có nghĩa): Ma trận AB có số dòng bằng số dòng của ma trận đứng trước và số cột bằng số cột của ma trận đứng sau;
- Các phần tử của AB được tính theo quy tắc: Phần tử c_{ij} thuộc dòng i và cột j của ma trận AB là tích vô hướng của dòng thứ i của ma trận đứng trước và cột thứ j của ma trận đứng sau (khi AB có nghĩa, các dòng của A và các cột của B đều có n phần tử và ta xem chúng như các vectơ n chiều).

Ví dụ 1: Cho 2 ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -5 & -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trong trường hợp này tích AB có nghĩa vì số cột của A và số dòng của B cùng bằng 3, nhưng tích BA không có nghĩa vì số cột của B (ma trận đứng trước) bằng 4, trong khi số dòng của A (ma trận đứng sau) bằng 3.

Ma trận AB là một ma trận cấp 3×4 :

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix}.$$

Để tính các phần tử thuộc dòng thứ nhất của AB ta lấy dòng thứ nhất của A nhân lần lượt với các cột của B theo quy tắc nhân vô hướng hai vectơ 3 chiều:

$$c_{11} = 3.0 + 1.1 + (-2).(-5) = 11,$$

$$c_{12} = 3.2 + 1.3 + (-2).(-1) = 11,$$

$$c_{13} = 3.(-5) + 1.0 + (-2).4 = -23,$$

$$c_{14} = 3.1 + 1.(-1) + (-2).1 = 0,$$

Để tính các phần tử thuộc dòng thứ hai của AB ta lấy dòng thứ hai của A nhân lần lượt với các cột của B:

$$c_{21} = 2.0 + 5.1 + 4.(-5) = -15,$$

$$c_{22} = 2.2 + 5.3 + 4.(-1) = 15,$$

$$c_{23} = 2.(-5) + 5.0 + 4.4 = 6,$$

$$c_{24} = 2.1 + 5.(-1) + 4.1 = 1.$$

Để tính các phần tử thuộc dòng thứ ba của AB ta lấy dòng thứ ba của A nhân lần lượt với các cột của B:

$$c_{31} = (-1).0 + 0.1 + (-3).(-5) = 15,$$

$$c_{32} = (-1).2 + 0.3 + (-3).(-1) = 1,$$

$$c_{33} = (-1).(-5) + 0.0 + (-3).4 = -7,$$

$$c_{34} = (-1).1 + 0.(-1) + (-3).1 = -4.$$

Kết quả là:

$$AB = \begin{bmatrix} 11 & 11 & -23 & 0 \\ -15 & 15 & 6 & 1 \\ 15 & 1 & -7 & -4 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2: Cho 2 ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -5 \\ 5 & 6 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -7 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hai ma trận đã cho là hai ma trận vuông cấp 3. Theo quy tắc nhân ma trận thì AB và BA cùng có nghĩa và cả hai tích đó đều là ma trận vuông cấp 3. Bạn đọc hãy tự tính toán các phần tử của các ma trận tích và đối chiếu với kết quả sau đây:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 13 & 0 \\ 7 & -66 & -3 \\ 19 & -36 & -4 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 15 & -9 \\ 2 & -66 & 41 \\ 5 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Chú ý: Trong phạm vi các ma trận vuông cùng cấp ta có thể nhân hai ma trận bất kỳ và tích của hai ma trận vuông cấp n là một ma trận vuông cấp n . Tuy nhiên, ngay cả trong phạm vi các ma trận vuông cùng cấp, *phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán* (ví dụ trên là một trường hợp $AB \neq BA$).

b. Các tính chất cơ bản của phép nhân

Phép nhân ma trận với ma trận có các tính chất cơ bản dưới đây. Chúng tôi bỏ qua phần chứng minh. Bạn cần đọc kỹ để hiểu chính xác nội dung của các tính chất đó.

1. Tính chất kết hợp:

$$(AB)C = A(BC),$$

trong đó A, B, C là ba ma trận bất kỳ thoả mãn điều kiện: số cột của A bằng số dòng của B và số cột của B bằng số dòng của C . Do phép nhân có tính chất kết hợp, khi viết tích của ba hoặc nhiều ma trận ta có thể bỏ các dấu ngoặc.

2. Tính chất phân phối đối với phép cộng:

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (B + C)D = BD + CD,$$

trong đó B và C là hai ma trận cùng cấp, có số dòng bằng số cột của ma trận A và số cột bằng số dòng của ma trận D .

3. Với A, B là hai ma trận sao cho tích AB có nghĩa và α là một số bất kỳ ta luôn có:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Tính chất này cho ta một quy tắc: *Khi nhân một số với tích của hai ma trận ta có thể thực hiện trước việc nhân số đó với một trong hai ma trận nhân tử.*

4. Mọi ma trận đều không thay đổi khi nhân với ma trận đơn vị E (nếu phép nhân có nghĩa):

$$AE = A, EB = B.$$

Đặc biệt, trong tập hợp các ma trận vuông cùng cấp ta luôn có:

$$AE = EA = A.$$

5. Ma trận chuyển vị của ma trận AB (khi tích AB có nghĩa) bằng tích của ma trận chuyển vị của B với ma trận chuyển vị của A :

$$(AB)' = B'A'.$$

6. Định thức của tích các ma trận vuông cùng cấp bằng tích các định thức của chúng:

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Chú ý:

- Tính chất thứ sáu có thể mở rộng cho tích của một số hữu hạn các ma trận vuông cùng cấp:

$$|A_1 A_2 \dots A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \dots |A_m|$$

- Đối với ma trận vuông, ta có thể sử dụng ký hiệu lũy thừa nguyên dương như sau:

$$A^2 = AA, A^3 = AAA, A^n = AA \dots A \text{ (n lần)}.$$

Từ tính chất thứ sáu suy ra: $|A^n| = |A|^n$.

II. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

a. Khái niệm ma trận nghịch đảo

Trong tập hợp tất cả các số thực số 1 giữ vai trò phần tử trung hoà của phép nhân ($a \cdot 1 = a, \forall a \in \mathbb{R}$) và được gọi là số đơn vị. Trong tập hợp tất cả các ma trận vuông cùng cấp, ma trận đơn vị E cũng có vai trò tương tự:

$$AE = EA = A.$$

Trong số học, số nghịch đảo của một số thực $a \neq 0$ là số thực a^{-1} thoả mãn điều kiện $a.a^{-1} = 1$. Khái niệm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cũng được định nghĩa tương tự.

Định nghĩa: *Ma trận nghịch đảo* của một ma trận vuông A là một ma trận vuông X (cùng cấp với A) thoả mãn điều kiện:

$$AX = XA = E.$$

Chú ý rằng *khái niệm ma trận nghịch đảo chỉ áp dụng cho ma trận vuông*.

Từ định nghĩa ta suy ra rằng *nếu ma trận vuông A có ma trận nghịch đảo thì nó chỉ có một ma trận nghịch đảo duy nhất*.

Thật vậy, giả sử X và Y cùng là ma trận nghịch đảo của ma trận A , tức là:

$$AX = XA = E \text{ và } AY = YA = E.$$

Khi đó ta có:

$$X(A Y) = X E = X \text{ và } (X A) Y = E Y = Y.$$

Do phép nhân ma trận có tính chất kết hợp nên từ hai đẳng thức này suy ra $X = Y$.

Như vậy, nếu ma trận vuông A có ma trận nghịch đảo thì ma trận nghịch đảo của nó được xác định. Ta sẽ dùng ký hiệu A^{-1} để chỉ ma trận nghịch đảo của ma trận A . Theo định nghĩa ta có:

$$A A^{-1} = A^{-1} A = E.$$

b. Ma trận phụ hợp của ma trận vuông

Trước khi đề cập đến điều kiện tồn tại ma trận nghịch đảo, ta cần phải xem xét mối liên hệ giữa một ma trận vuông và ma trận được lập kèm theo gọi là *ma trận phụ hợp* của nó.

Cho ma trận vuông cấp n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Trong §3 bạn đọc đã được làm quen với khái niệm phần bù đại số của các phần tử của định thức. Phần bù đại số của phần tử thuộc dòng i và cột j của định thức $d = |A|$ được ký hiệu là A_{ij} .

Định nghĩa: Ma trận phụ hợp của ma trận vuông A là ma trận:

$$A^* = [a_{ij}^*]_{n \times n} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Chú ý rằng phần tử thuộc dòng i và cột j của ma trận phụ hợp A^* là phần bù đại số của phần tử thuộc dòng j và cột i của định thức $d = |A|$:

$$a_{ij}^* = A_{ji} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Giữa ma trận vuông A và ma trận phụ hợp của nó có mối liên hệ với nhau. Để khẳng định mối liên hệ đó, trước hết ta chứng minh một mệnh đề bổ trợ:

Bổ đề: Với mọi $i, j = 1, 2, \dots, n$ ta luôn có:

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} d = |A| & \text{khi } i = j, \\ 0 & \text{khi } i \neq j. \end{cases} \quad (4.1)$$

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \begin{cases} d = |A| & \text{khi } i = j, \\ 0 & \text{khi } i \neq j. \end{cases} \quad (4.2)$$

Chứng minh: Ta chứng minh hệ thức (4.1), còn hệ thức (4.2) được chứng minh hoàn toàn tương tự.

Với $i = j$ thì hệ thức (4.1) chính là công thức khai triển định thức $d = |A|$ theo dòng thứ i . Với $i \neq j$, ta xét định thức:

$$\bar{d} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{dòng } i \\ \\ \leftarrow \text{dòng } j \\ \\ \end{matrix}$$

Chú ý rằng $\bar{d}$ là định thức nhận được từ định thức d khi ta thay các phần tử của dòng thứ j bằng các phần tử tương ứng của dòng thứ i (các dòng còn lại giữ nguyên như của d):

Do định thức $\bar{d}$ có hai dòng bằng nhau (dòng i và dòng j) nên $\bar{d} = 0$. Mặt khác, khai triển định thức $\bar{d}$ theo dòng thứ j ta có:

$$\bar{d} = \bar{a}_{j1} \bar{A}_{j1} + \bar{a}_{j2} \bar{A}_{j2} + \cdots + \bar{a}_{jn} \bar{A}_{jn},$$

trong đó $\bar{a}_{jk}$ là phần tử thuộc dòng j và cột k của định thức $\bar{d}$, còn $\bar{A}_{jk}$ là phần bù đại số của nó. Theo cách lập định thức $\bar{d}$ ta có $\bar{a}_{jk} = a_{ik}$. Chú ý rằng hai định thức d và $\bar{d}$ chỉ khác nhau ở dòng thứ j nên phần bù đại số của mỗi phần tử của dòng j của $\bar{d}$ đúng bằng phần bù đại số của phần tử tương ứng của d (vì khi lấy phần bù ta đã xoá đi dòng khác nhau duy nhất), tức là $\bar{A}_{jk} = A_{jk}$. Vậy ta có:

$$0 = \bar{d} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} \quad (\text{khi } i \neq j).$$

Hệ thức (4.1) đã được chứng minh.

Định lý sau đây cho biết mối liên hệ của ma trận vuông với ma trận phụ hợp của nó:

Định lý: Tích của một ma trận vuông A bất kỳ với ma trận phụ hợp A^* của nó bằng tích của ma trận đơn vị E với định thức của ma trận A :

$$AA^* = A^*A = dE = \begin{bmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{bmatrix} \quad (d = |A|).$$

Chứng minh: Dòng thứ i của ma trận vuông A là vector

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}),$$

còn cột thứ j của ma trận phụ hợp A^* là vector:

$$\begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{pmatrix} \quad (\text{do } a_{ij}^* = A_{ji} \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n).$$

Lấy tích vô hướng của hai vector trên ta được phần tử thuộc dòng i và cột j của ma trận AA^* :

$$c_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}.$$

Áp dụng bổ đề trên đây ta có:

$$c_{ij} = \begin{cases} d = |A| & \text{khi } i = j, \\ 0 & \text{khi } i \neq j. \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ

$$AA^* = \begin{bmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{bmatrix} = dE.$$

Tương tự như vậy ta chứng minh được $A^*A = dE$.

c. Điều kiện tồn tại và công thức tìm ma trận nghịch đảo

Trong hệ thống số thực, một số a có số nghịch đảo khi và chỉ khi $a \neq 0$. Đối với các ma trận vuông ta cũng có kết quả tương tự:

Định lý: Điều kiện cần và đủ để một ma trận vuông A có ma trận nghịch đảo là: $d = |A| \neq 0$. Khi đó ma trận nghịch đảo của ma trận A được xác định theo công thức:

$$A^{-1} = \frac{1}{d} A^* = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

Một ma trận vuông có định thức khác 0 được gọi là *ma trận không suy biến*. Định lý này khẳng định rằng điều kiện không suy biến là điều kiện cần và đủ để một ma trận vuông có ma trận nghịch đảo.

Chứng minh: Giả sử ma trận vuông A có ma trận nghịch đảo A^{-1} . Khi đó ta có $A^{-1}A = A^{-1}A = E$, từ đây suy ra:

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = |E| = 1.$$

Điều này chứng tỏ $d = |A| \neq 0$.

Ngược lại, giả sử $d = |A| \neq 0$. Với điều kiện này ta sẽ chứng minh rằng ma trận A có ma trận nghịch đảo.

Thật vậy, theo định lý về mối liên hệ giữa ma trận vuông A và ma trận phụ hợp A^* của nó ta có:

$$AA^* = A^*A = dE.$$

Do $d \neq 0$ ta có thể nhân các vế của đẳng thức trên với $\frac{1}{d}$:

$$\frac{1}{d}(AA^*) = \frac{1}{d}(A^*A) = \frac{1}{d}(dE).$$

Theo tính chất của phép nhân ma trận, từ đây suy ra:

$$A\left(\frac{1}{d}A^*\right) = \left(\frac{1}{d}A^*\right)A = \left(\frac{1}{d}d\right)E = E.$$

Điều này chứng tỏ ma trận $X = \frac{1}{d}A^*$ là ma trận nghịch đảo của ma trận A (theo định nghĩa) và ta có công thức (4.3).

Định lý đã được chứng minh.

Định lý vừa chứng minh không những cho ta tiêu chuẩn để nhận biết một ma trận vuông có ma trận nghịch đảo hay không, mà còn cho ta công thức để tìm ma trận nghịch đảo khi nó tồn tại: công thức (4.3).

Ví dụ 1: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Giải: Muốn biết ma trận nghịch đảo có tồn tại hay không ta phải tính định thức của A :

$$|A| = ad - bc.$$

Nếu $ad - bc = 0$ thì ma trận A không có ma trận nghịch đảo.

Khi $ad - bc \neq 0$ ta có:

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Giải: Trước hết ta tính định thức của ma trận A :

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 9 + 8 - (-36 - 1 - 12) = 60.$$

Ma trận A có ma trận nghịch đảo:

$$A^{-1} = \frac{1}{60} A^* = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Việc còn lại là tính các phần bù đại số:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 11,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 9, A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 10, A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -15, A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 10, A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Ma trận nghịch đảo của ma trận A đã cho là:

$$A^{-1} = \frac{1}{60} \begin{bmatrix} 3 & 9 & -15 \\ 10 & 10 & 10 \\ 11 & -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{11}{60} & -\frac{7}{60} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 3: Cho ma trận

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & m \end{bmatrix}.$$

Hãy tìm điều kiện đối với m để ma trận đã cho có ma trận nghịch đảo. Với điều kiện đó, hãy tính phần tử thuộc dòng thứ hai và cột thứ ba của ma trận B^{-1} .

Giải: Trước hết ta tính định thức của ma trận B:

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -7 & 7 \\ 0 & 2 & 11 & -10 \\ 0 & -1 & -7 & m+9 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & m+2 \end{vmatrix} = 3(m+2). \end{aligned}$$

Ma trận đã cho có ma trận nghịch đảo khi và chỉ khi

$$|B| = 3(m+2) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2.$$

Khi $m \neq -2$ ta có

$$B^{-1} = \frac{1}{3(m+2)} B^*.$$

Phần tử thuộc dòng thứ hai và cột thứ ba của ma trận phụ hợp B^* là phần bù đại số của phần tử thuộc dòng thứ ba và cột thứ hai của ma trận B :

$$B_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & m \end{vmatrix} = 7m + 14.$$

Gọi x_{23} là phần tử thuộc dòng thứ hai và cột thứ ba của ma trận nghịch đảo B^{-1} , ta có:

$$x_{23} = \frac{B_{32}}{3(m+2)} = \frac{7m+14}{3(m+2)} = \frac{7}{3}.$$

Chú ý: Nói chung, phần tử x_{ij} ở dòng i và cột j của ma trận nghịch đảo của một ma trận vuông A bất kỳ được tính theo công thức:

$$x_{ij} = \frac{A_{ji}}{d},$$

trong đó $d = |A|$, và A_{ji} là phần bù đại số của phần tử ở dòng j , cột i của A .

d. Các tính chất của ma trận nghịch đảo

Bạn cần ghi nhớ các tính chất cơ bản sau đây:

1. Nếu ma trận A có ma trận nghịch đảo thì

$$(A^{-1})^{-1} = A \text{ và } |A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

Hệ thức thứ nhất suy ra trực tiếp từ định nghĩa ma trận nghịch đảo, còn hệ thức thứ hai suy ra từ mệnh đề nói về định thức của tích hai ma trận vuông cùng cấp:

$$|AA^{-1}| = |E| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1.$$

2. Nếu hai ma trận vuông cùng cấp A và B có ma trận nghịch đảo thì ma trận AB cũng có ma trận nghịch đảo và

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Thật vậy, theo tính chất của phép nhân ma trận, ta có:

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E;$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Theo định nghĩa thì điều này chứng tỏ $B^{-1}A^{-1}$ là ma trận nghịch đảo của ma trận AB .

III. ỨNG DỤNG MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Trong đại số sơ cấp ta đã biết rằng phương trình bậc nhất $ax = b$ ($a \neq 0$) có một nghiệm duy nhất

$$x = \frac{b}{a} = b \cdot a^{-1}.$$

Tương tự, trong tập hợp các ma trận vuông cấp n (n cố định) ta xét các phương trình:

$$AX = B, \quad (4.4)$$

$$YA = B, \quad (4.5)$$

trong đó A và B là các ma trận vuông cấp n cho trước.

Xét trường hợp ma trận A có ma trận nghịch đảo. Trong trường hợp này, nhân hai vế của phương trình (4.4) với A^{-1} về bên trái ta được:

$$X = A^{-1}B. \quad (4.6)$$

Tương tự, nhân hai vế của phương trình (4.5) với A^{-1} về bên phải ta được

$$Y = BA^{-1}. \quad (4.7)$$

Như vậy, khi ma trận A có ma trận nghịch đảo thì mỗi phương trình (4.4) và (4.5) có một nghiệm duy nhất được xác định theo các công thức (4.6) và (4.7).

Ví dụ: Cho hai ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Giải: Dễ dàng xác định được:

$$d = |A| = 5, \quad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & -2 \\ 10 & -5 & -5 \end{bmatrix}.$$

Phương trình $AX = B$ có một nghiệm duy nhất là ma trận:

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & -2 \\ 10 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & 2 & -11 \\ -9 & -9 & 47 \\ -20 & -15 & 65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{11}{5} \\ -\frac{9}{5} & -\frac{9}{5} & \frac{47}{5} \\ -4 & -3 & 13 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Phương trình $YA = B$ có một nghiệm duy nhất là ma trận:

$$\begin{aligned}
 Y = BA^{-1} &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 7 & -4 & -2 \\ 10 & -5 & -5 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 42 & -19 & -22 \\ -32 & 19 & 17 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{42}{5} & -\frac{19}{5} & -\frac{22}{5} \\ -\frac{32}{5} & \frac{19}{5} & \frac{17}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Nhận xét: Khi A là ma trận vuông không suy biến cấp n, công thức (4.6) có thể áp dụng để giải phương trình (4.4) với B là ma trận cấp $n \times p$ bất kỳ. Tương tự, công thức (4.7) có thể áp dụng để giải phương trình (4.5) với B là ma trận cấp $q \times n$ bất kỳ.

Ví dụ: Giải phương trình $AX = B$, với

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Giải: Ma trận A có ma trận nghịch đảo:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nghiệm của phương trình là:

$$\begin{aligned}
 X = A^{-1}B &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 11 & -3 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{11}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{19}{5} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Chú ý: Trong trường hợp ma trận A không có ma trận nghịch đảo (A có định thức bằng 0 hoặc không vuông) ta có thể giải các phương trình (4.4) và (4.5) thông qua việc giải hệ phương trình tuyến tính với các ẩn số là các phần tử của ma trận phải tìm.

IV. TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO BẰNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI MA TRẬN

Theo công thức (4.3), muốn tìm ma trận nghịch đảo của một ma trận vuông cấp n ta phải tính n^2 định thức cấp $n - 1$ để lập ma trận phụ hợp. Khi n lớn, công việc này khá cồng kềnh. Sau đây chúng tôi trình bày một phương pháp khác cho phép ta tìm ma trận nghịch đảo bằng các phép biến đổi sơ cấp.

Để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông A (cấp n) ta viết ghép ma trận đơn vị cấp n vào ma trận A về phía bên phải (thêm vào A các cột của ma trận E). Làm như vậy ta được một ma trận cấp $n \times (2n)$:

$$C = [A|E].$$

Nếu ma trận A có ma trận nghịch đảo thì *bằng các phép biến đổi sơ cấp đối với hệ vectơ dòng* ta có thể biến đổi ma trận C về dạng:

$$[E|B].$$

Khi đó ma trận B chính là ma trận nghịch đảo của ma trận A .

Ví dụ: Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải: Ta lập ma trận

$$C = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Ta biến đổi như sau:

Lấy dòng thứ nhất cộng vào dòng thứ hai, sau đó cộng vào dòng thứ ba tích của dòng thứ nhất với (-2) , ta được:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Cộng dòng thứ hai vào dòng thứ ba, sau đó cộng vào dòng thứ tư tích của dòng thứ hai với (-1) , ta được:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Nhân dòng thứ ba với $\frac{1}{4}$, dòng thứ tư với $(-\frac{1}{2})$, sau đó đổi chỗ hai dòng đó, ta được:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array} \right].$$

Lấy dòng thứ tư cộng vào dòng thứ ba và dòng thứ hai, sau đó lại cộng vào dòng thứ nhất tích của dòng thứ tư với 2, ta được:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array} \right].$$

Cộng vào các dòng thứ nhất và dòng thứ hai tích của dòng thứ ba với (-1) , ta được:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array} \right].$$

Ma trận nghịch đảo của ma trận A đã cho là:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}.$$

BÀI TẬP

30. Cho 2 ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Hãy thực hiện các phép nhân:

- a) AB b) AA' c) $A'A$ d) BA'

31. Lập các ma trận AB , BA :

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \end{bmatrix}$.

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

32. Lập ma trận ABC , cho biết:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 10 \\ 2 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

33. Thực hiện các phép toán lũy thừa:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^3$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}^5$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}^2$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^3$

$$e) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \quad f) \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}^n$$

34. Cho ma trận vuông cấp 2: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Hãy chứng minh:

- a) $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$ (E là ma trận đơn vị và O là ma trận không cấp 2).
- b) Nếu $A^3 = O$ thì $A^2 = O$.

35. Chứng minh rằng hai tích AB và BA cùng tồn tại và cùng cấp khi và chỉ khi A và B là các ma trận vuông cùng cấp.

36. Tổng của n phần tử thuộc đường chéo chính của một ma trận vuông cấp n được gọi là vết của ma trận đó. Hãy chứng minh rằng, với A và B là hai ma trận vuông cùng cấp bất kỳ, hai ma trận AB và BA có vết bằng nhau.

37. Chứng minh rằng nếu $AB = BA$ (A, B là các ma trận vuông cùng cấp) thì

- a) $A^m B^n = B^n A^m$ (m và n là các số nguyên dương bất kỳ).
- b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
- c) $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$.
- d) $(A + B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1}B + C_n^2 A^{n-2}B^2 + \dots + B^n$.
- e) $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.
- f) $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$.

38. Ta dùng các ký hiệu X_i^d để chỉ dòng thứ i và X_j^c để chỉ cột thứ j của ma trận X . Xem mỗi dòng của ma trận như một ma trận dòng và mỗi cột của ma trận như một ma trận cột, hãy chứng minh:

a) $(AB)_i^d = A_i^d B$ và $(AB)_j^c = AB_j^c$.

b) Mỗi phép biến đổi sơ cấp đối với hệ vectơ dòng của A (đổi chỗ hai dòng; nhân một dòng với một số $\alpha \neq 0$; cộng vào một dòng tích của một dòng khác với một số k) kéo theo chính phép biến đổi đó đối với hệ vectơ dòng của AB.

c) Mỗi phép biến đổi sơ cấp đối với hệ vectơ cột của B (đổi chỗ hai cột; nhân một cột với một số $\alpha \neq 0$; cộng vào một cột tích của một cột khác với một số k) kéo theo chính phép biến đổi đó đối với hệ vectơ cột của AB.

39. Cho A là một ma trận cấp $m \times n$ bất kỳ. Gọi B là ma trận nhận được từ ma trận A sau một phép biến đổi sơ cấp đối với hệ vectơ dòng, U là ma trận nhận được từ ma trận đơn vị cấp m bằng chính phép biến đổi A thành B. Hãy chứng minh $B = UA$.

40. Cho A là một ma trận cấp $m \times n$ bất kỳ. Gọi B là ma trận nhận được từ ma trận A sau một phép biến đổi sơ cấp đối với hệ vectơ cột, V là ma trận nhận được từ ma trận đơn vị cấp n bằng chính phép biến đổi A thành B. Hãy chứng minh $B = AV$.

41. Cho biết ma trận vuông A có định thức bằng $d \neq 0$. Hãy tính định thức của ma trận phụ hợp A^* .

42. Chứng minh rằng nếu ma trận vuông A có định thức bằng 0 thì mỗi cột của ma trận phụ hợp A^* của nó là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với ma trận hệ số là ma trận A.

43. Cho A là một ma trận vuông có tất cả các phần tử là các số nguyên. Chứng minh rằng ma trận nghịch đảo A^{-1} có tất cả các phần tử là số nguyên khi và chỉ khi $|A| = \pm 1$.

44. Một ma trận vuông được gọi là *ma trận trực giao* nếu nó có ma trận nghịch đảo bằng ma trận chuyển vị của nó. Chứng minh

rằng định thức của mọi ma trận trực giao có giá trị tuyệt đối bằng 1.

45. Ma trận nghịch đảo A^{-1} thay đổi thế nào nếu ta biến đổi ma trận A như sau:

- a) Đổi chỗ dòng i và dòng k ;
- b) Nhân dòng i với một số $\alpha \neq 0$;
- c) Cộng vào dòng i tích của dòng k ($k \neq i$) với một số β .

46. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

a) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

47. Sử dụng mệnh đề ở bài tập 39, hãy chứng minh quy tắc tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp biến đổi.

48. Dùng phương pháp biến đổi, hãy tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

49. Giải các phương trình $AX = B$, $YA = B$, cho biết:

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

50. Giải phương trình $AX = B$ với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

51. Giải phương trình $AXB = C$, cho biết:

$$a) A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 12 & -2 \\ 18 & 30 & 9 \\ 23 & 41 & 11 \end{bmatrix}.$$

52. Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông cấp n có định thức bằng 0 và B là ma trận vuông cùng cấp có định thức khác 0 thì các phương trình $AX = B$ và $YA = B$ vô nghiệm.

53. Giải các phương trình

$$a) AX = B, \text{ với } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -12 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$b) XA = B, \text{ với } A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

§5. HẠNG CỦA MA TRẬN

I. KHÁI NIỆM HẠNG CỦA MA TRẬN

Cho một ma trận cấp $m \times n$ bất kỳ:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ta sẽ dùng các ký hiệu A_i^d và A_j^c để chỉ dòng thứ i và cột thứ j của ma trận A :

$$A_i^d = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$A_j^c = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Ma trận A cho tương ứng một hệ vectơ dòng gồm m vectơ n chiều

$$A_1^d, A_2^d, \dots, A_m^d$$

và một hệ vectơ cột gồm n vectơ m chiều

$$A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c$$

Định nghĩa: *Hạng* của một ma trận là hạng của hệ vectơ cột của nó.

Hạng của ma trận A được ký hiệu là $r(A)$. Theo định nghĩa trên thì $r(A) = r$ khi và chỉ khi mỗi cơ sở của hệ vectơ cột của ma trận A có r vectơ. Nói cách khác, $r(A) = r$ khi và chỉ khi thoả mãn hai điều kiện sau:

- Trong ma trận A tồn tại r cột độc lập tuyến tính;
- Tất cả các cột của ma trận A biểu diễn tuyến tính qua r cột độc lập tuyến tính đó.

Ta đã biết rằng hạng của một hệ vectơ không vượt quá số vectơ của hệ đó và không vượt quá số chiều của không gian, do đó *hạng của một ma trận không vượt quá số dòng cũng như số cột của nó.*

II. LIÊN HỆ GIỮA HẠNG CỦA MA TRẬN VÀ CÁC ĐỊNH THỨC CON

a. Khái niệm định thức con của ma trận

Trong một ma trận A cấp $m \times n$, ta chọn s dòng bất kỳ và s cột bất kỳ ($s \leq m$ và $s \leq n$). Giữ lại s dòng và s cột đã chọn và xoá đi tất cả các dòng và các cột còn lại (nếu có) ta được một ma trận vuông cấp s . Định thức của ma trận vuông đó được gọi là *định thức con cấp s* của ma trận A . Định thức con cấp s tạo thành từ các dòng có chỉ số $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ và các cột có chỉ số $j_1 < j_2 < \dots < j_s$ của một ma trận (khi xoá đi các dòng và các cột còn lại) được ký hiệu là $D_{i_1 i_2 \dots i_s}^{j_1 j_2 \dots j_s}$. Để lập một định thức con cấp s của một ma trận cấp $m \times n$ ta có C_m^s cách chọn s dòng và C_n^s cách chọn s cột, do đó với mỗi $s = 1, 2, \dots, \min\{m, n\}$, một ma trận cấp $m \times n$ có $C_m^s \cdot C_n^s$ định thức con cấp s .

Ví dụ 1: Cho ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 6 \\ -3 & 0 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Theo định nghĩa thì mỗi định thức con cấp 1 của ma trận A là một phần tử của nó:

$$D_1^1 = a_{11} = 1, D_1^2 = a_{12} = 2, D_1^3 = a_{13} = -5, \dots$$

Ma trận A đã cho có $C_3^2 \cdot C_4^2 = 18$ định thức con cấp 2 và $C_3^3 \cdot C_4^3 = 4$ định thức con cấp 3. Theo cách ký hiệu nói trên ta có:

$$D_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, D_{12}^{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \dots, D_{23}^{34} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 7 \end{vmatrix};$$

$$D_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 5 \\ -3 & 0 & 9 \end{vmatrix}, \dots, D_{123}^{234} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 5 & 6 \\ 0 & 9 & 7 \end{vmatrix}.$$

b. Liên hệ giữa hạng của ma trận và các định thức con

Khái niệm hạng của ma trận có thể định nghĩa bằng ngôn ngữ định thức nhờ có định lý sau đây:

Định lý: Cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của một ma trận bằng hạng của ma trận đó.

Chứng minh: Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Giả sử cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của ma trận A bằng r, tức là ma trận A có ít nhất một định thức con khác 0 cấp r và tất cả các định thức con cấp cao hơn (nếu có) bằng 0. Không

làm mất tính tổng $a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1r}$ giả sử rằng định thức con tạo thành từ r dòng đầu và r cột đầu của A khác 0:

$$D = D_{10,1}^{12,r} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Xét hệ vectơ cột của ma trận A :

$$A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c.$$

Do $D \neq 0$ nên r cột đầu $A_1^c, A_2^c, \dots, A_r^c$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, nếu các cột đó phụ thuộc tuyến tính thì các cột của định thức D cũng phụ thuộc tuyến tính, tức theo là $D = 0$.

Ta sẽ chứng minh rằng mọi cột khác của ma trận A biểu diễn tuyến tính qua các cột $A_1^c, A_2^c, \dots, A_r^c$. Để chứng minh cột A_h^c ($r < h \leq n$) biểu diễn tuyến tính qua $A_1^c, A_2^c, \dots, A_r^c$, với mỗi $i = 1, 2, \dots, n$ ta lập định thức cấp $r+1$:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rh} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ih} \end{vmatrix}.$$

Định thức Δ_i nhận được từ định thức D bằng cách bao quanh nó các phần tử tương ứng thuộc dòng thứ i và cột thứ h của ma trận A . Ta thấy $\Delta_i = 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Thật vậy, với $i \leq r$ thì $\Delta_i = 0$ do có hai dòng giống nhau, còn $i > r$ thì Δ_i là một định thức con cấp $r+1$ của ma trận A , do đó $\Delta_i = 0$ theo giả thiết.

Khai triển định thức Δ_i theo dòng cuối cùng ta được:

$$a_{i1}F_1 + a_{i2}F_2 + \dots + a_{ir}F_r + a_{ih}D = 0.$$

trong đó F_j ($j = 1, 2, \dots, r$) là phần bù đại số của phần tử a_{ij} (ta ký hiệu là F_j do nó không phụ thuộc i), còn phần bù đại số của phần tử a_{ih} chính là định thức D . Do $D \neq 0$ nên từ đây suy ra:

$$a_{ih} = \left(-\frac{F_1}{D}\right)a_{i1} + \left(-\frac{F_2}{D}\right)a_{i2} + \dots + \left(-\frac{F_r}{D}\right)a_{ir}.$$

Đẳng thức này đúng với mọi $i = 1, 2, \dots, m$ nên ta có:

$$A_h^c = \alpha_1 A_1^c + \alpha_2 A_2^c + \dots + \alpha_r A_r^c,$$

trong đó:

$$\alpha_j = \left(-\frac{F_j}{D}\right) \quad (j = 1, 2, \dots, r).$$

Như vậy ta đã chứng minh được rằng r cột đầu của ma trận A độc lập tuyến tính và các cột còn lại của A biểu diễn tuyến tính qua chúng. Điều này chứng tỏ $A_1^c, A_2^c, \dots, A_r^c$ là một cơ sở của hệ vectơ cột của ma trận A , do đó hạng của A bằng r . Định lý đã được chứng minh.

Chú ý: Trên đây ta đã chứng minh rằng nếu $D = D_{12\dots r}^{12\dots r}$ là định thức con khác 0 cấp cao nhất của ma trận A thì $A_1^c, A_2^c, \dots, A_r^c$ là một cơ sở của hệ vectơ cột của A . Bằng cách tương tự ta có thể chứng minh được rằng nếu $D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}$ là định thức con khác 0 cấp cao nhất của ma trận A thì $A_{j_1}^c, A_{j_2}^c, \dots, A_{j_r}^c$ là một cơ sở của hệ vectơ cột của A .

Từ định lý trên ta suy ra một số hệ quả sau đây:

Hệ quả 1: Phép chuyển vị không làm thay đổi hạng của ma trận. Thật vậy, theo tính chất của định thức thì việc chuyển vị ma trận không làm thay đổi các định thức con của nó, do đó cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của ma trận A bằng cấp cao nhất của các định thức con khác 0 của ma trận chuyển vị A' , tức là $r(A') = r(A)$.

Hệ quả 2: Hạng của một ma trận bằng hạng của hệ vectơ dòng của nó.

Thật vậy, hạng của một ma trận A bằng hạng của ma trận chuyển vị A' của nó, mà hạng của A' chính là hạng của hệ vectơ dòng của A (theo định nghĩa).

Hệ quả 3: Điều kiện cần và đủ để một định thức bằng 0 là: hệ vectơ dòng (hệ vectơ cột) của nó phụ thuộc tuyến tính.

Thật vậy, theo tính chất của định thức thì định thức bằng 0 nếu hệ vectơ dòng (hệ vectơ cột) của nó phụ thuộc tuyến tính. Ngược lại, nếu định thức cấp n bằng 0 thì ma trận vuông cấp n tương ứng có hạng nhỏ hơn n . Như vậy, nếu định thức bằng 0 thì hệ vectơ dòng (hệ vectơ cột) của nó phụ thuộc tuyến tính (vì hạng nhỏ hơn số vectơ).

c. Định thức con cơ sở của ma trận

Định nghĩa: Định thức con khác 0 cấp cao nhất của một ma trận A được gọi là *định thức con cơ sở* của ma trận đó.

Trên đây ta đã chứng minh được rằng nếu $D = D_{i_1 i_2 \dots i_r}^{j_1 j_2 \dots j_r}$ là một định thức con cơ sở của ma trận A thì:

- Hệ r dòng của ma trận A có chỉ số $i_1, i_2, \dots, i_r$ là một cơ sở của hệ vectơ dòng của A .

- Hệ r cột của ma trận A có chỉ số $j_1, j_2, \dots, j_r$ là một cơ sở của hệ vectơ cột của A .

III. HẠNG CỦA TỔNG VÀ TÍCH CÁC MA TRẬN

Định lý 1: Với A và B là hai ma trận cùng cấp $m \times n$ bất kỳ ta luôn có:

$$r(A + B) \leq r(A) + r(B). \quad (5.1)$$

Chứng minh:

Ta gọi $X_1, X_2, \dots, X_n$ là hệ vectơ cột của A và $P_1, P_2, \dots, P_r$ là một cơ sở của nó; $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ là hệ vectơ cột của B và $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ là một cơ sở của nó. Xét các hệ vectơ sau:

$$X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \dots, X_n + Y_n, \quad (5.1)$$

$$P_1, P_2, \dots, P_r, Q_1, Q_2, \dots, Q_s. \quad (5.2)$$

Theo ký hiệu trên thì hệ (5.1) chính là hệ vectơ cột của ma trận $A + B$, đồng thời ta có:

$$r(A) = r, \quad r(B) = s.$$

Do mỗi vectơ X_j là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ cơ sở $P_1, P_2, \dots, P_r$ và mỗi vectơ Y_j là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ cơ sở $Q_1, Q_2, \dots, Q_s$ nên mỗi vectơ $X_j + Y_j$ của hệ (5.1) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ của hệ (5.2). Theo tính chất hạng của hệ vectơ, từ đây suy ra hạng của hệ vectơ (5.1) không vượt quá hạng của hệ vectơ (5.2). Nhưng hạng của hệ vectơ (5.1) chính là hạng của ma trận $A + B$, đồng thời hạng của hệ vectơ (5.2) không vượt quá số vectơ của nó, do đó:

$$r(A + B) \leq r + s = r(A) + r(B).$$

Định lý 2: Với A và B là hai ma trận bất kỳ sao cho AB có nghĩa, ta luôn có:

$$r(AB) \leq r(A) \text{ và } r(AB) \leq r(B).$$

Chứng minh: Xét hai ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}.$$

Theo định nghĩa phép nhân, ta có

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix},$$

trong đó:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \quad (5.3)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p).$$

Cố định j bất kỳ ($j = 1, 2, \dots, p$) và viết hệ thức (5.3) lần lượt với $i = 1, 2, \dots, m$, ta có:

$$\begin{aligned} c_{1j} &= a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \cdots + a_{1n}b_{nj}, \\ c_{2j} &= a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \cdots + a_{2n}b_{nj}, \\ &\dots \dots \dots \\ c_{mj} &= a_{m1}b_{1j} + a_{m2}b_{2j} + \cdots + a_{mn}b_{nj}. \end{aligned}$$

Từ đây suy ra:

$$\begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix} = b_{1j} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + b_{2j} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + b_{nj} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Điều này chứng tỏ cột j bất kỳ của ma trận AB biểu diễn tuyến tính qua các cột của A . Từ đây suy ra hệ vector cột của AB có hạng không vượt quá hạng của hệ vector cột của A , do đó $r(AB) \leq r(A)$.

Tương tự, cố định i bất kỳ ($i = 1, 2, \dots, m$) và viết hệ thức (5.3) lần lượt với $j = 1, 2, \dots, p$, ta thấy mọi dòng của AB biểu diễn tuyến tính qua các dòng của B , từ đó suy ra $r(AB) \leq r(B)$.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng nếu hai ma trận A và B có số dòng như nhau, nhưng $r(A) < r(B)$ thì phương trình ma trận $AX = B$ không có nghiệm.

Giải: Theo định lý 2 trên đây, với mọi ma trận X mà phép nhân AX có nghĩa ta luôn có

$$r(AX) \leq r(A) < r(B).$$

Điều này chứng tỏ không tồn tại ma trận X sao cho $AX = B$.

IV. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÌM HẠNG CỦA MA TRẬN

a. Phương pháp định thức bao quanh

Khi chứng minh định lý về hạng của ma trận, xuất phát từ định thức $D = D_{12\dots r}^{12\dots r}$ ta lập định thức Δ_i bằng cách viển thêm một dòng và một cột. Ta gọi Δ_i là định thức con cấp $r + 1$ bao quanh định thức D . Một cách tổng quát, ta nói định thức con $\bar{D}$ (cấp $r + 1$) của ma trận A là *định thức bao quanh* định thức con D (cấp r) khi và chỉ khi $\bar{D}$ được thành lập bằng cách bổ sung thêm một dòng và một cột của A ngoài r dòng và r cột đã chọn để lập định thức D . Chẳng hạn, nếu A là ma trận cấp 3×4 thì định thức D_{13}^{23} có hai định thức con cấp 3 bao quanh nó là D_{123}^{123} và D_{123}^{234} (ta có một phương án chọn thêm một dòng và hai phương án chọn thêm một cột của ma trận A). Nói chung, nếu D là một định thức con cấp r của ma trận cấp $m \times n$ ($r < m$ và $r < n$) thì để

lập một định thức con cấp $r + 1$ bao quanh D ta có $m - r$ cách chọn thêm một dòng và $n - r$ cách chọn thêm một cột (ngoài các dòng và các cột đã chọn để lập định thức D), do đó số định thức con cấp $r + 1$ bao quanh định thức D bằng $(m - r)(n - r)$.

Theo cách lập luận chứng minh định lý về hạng của ma trận ta có mệnh đề sau đây:

Nếu ma trận A có một định thức con $D \neq 0$ cấp r mà mọi định thức con cấp $r + 1$ bao quanh nó (nếu có) đều bằng 0 thì hạng của ma trận A bằng r .

Từ mệnh đề nêu trên ta có thể tính hạng của một ma trận theo phương pháp lập như sau:

Xuất phát từ một định thức con $D \neq 0$, cấp s , của ma trận ta chỉ cần tính các định thức con cấp $s + 1$ bao quanh nó (nếu có). Nếu tất cả các định thức con cấp $s + 1$ bao quanh D đều bằng 0, hoặc ma trận không có định thức con cấp $s + 1$ (khi s đã bằng số dòng hoặc số cột của ma trận), thì hạng của ma trận bằng s . Nếu trong số các định thức con cấp $s + 1$ bao quanh D có một định thức $\bar{D}$ nào đó khác 0 thì ta lại chuyển sang xét các định thức con cấp $s + 2$ bao quanh $\bar{D}$ (nếu có). Lặp lại quá trình này, sau một số hữu hạn bước ta sẽ xác định được hạng của ma trận.

Ví dụ 3: Tìm hạng của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Giải: Dễ dàng nhận thấy

$$D_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Trong số các định thức con cấp 3 bao quanh định thức này ta gặp một định thức khác 0:

$$D_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Chuyển sang xét các định thức con cấp 4 bao quanh định thức này ta có:

$$D_{1234}^{1234} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad D_{1235}^{1235} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Chú ý rằng ma trận A đã cho có tất cả năm định thức con cấp 4 nhưng trong số đó chỉ có hai định thức bao quanh D_{123}^{123} . Do tất cả các định thức con cấp 4 bao quanh D_{123}^{123} đều bằng 0 nên hạng của ma trận A bằng 3.

Ví dụ 4: Tùy theo các giá trị của tham số k hãy tìm hạng của ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -5 \\ 4 & -7 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & k \end{bmatrix}$$

Giải: Trước hết ta thấy ngay định thức con cấp 2 ở góc trên bên trái của ma trận khác 0:

$$D_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17.$$

Khi tính các định thức con cấp 3 bao quanh D_{12}^{12} ta gặp một định thức khác 0:

$$D_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & -7 & 1 \end{vmatrix} = -17.$$

Ma trận đã cho chỉ có một định thức con cấp 4 duy nhất:

$$D_{1234}^{1234} = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & -5 \\ 4 & -7 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 7 & k \end{vmatrix} = -17(k+3).$$

Từ đây suy ra: khi $k \neq -3$ thì $r(A) = 4$; khi $k = -3$ thì $r(A) = 3$.

b. Phương pháp biến đổi

Xét ma trận dạng

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2s} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{ss} & \cdots & b_{sn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

trong đó $s \leq n$ và $b_{ii} \neq 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, s$.

Nếu xoá đi các dòng gồm tất cả các phần tử bằng 0 phía dưới dòng thứ s (nếu có) thì hạng của ma trận (5.4) không thay đổi (do mỗi dòng đó biểu diễn tuyến tính qua các dòng còn lại). Mặt khác ta thấy ma trận (5.4) có một định thức con cấp s khác 0:

$$D_{12\dots s}^{12\dots s} = b_{11}b_{22}\dots b_{ss} \neq 0.$$

Điều này chứng tỏ hạng của ma trận (5.4) bằng s .

Như ta đã biết, các phép biến đổi sơ cấp trên hệ vectơ dòng hoặc hệ vectơ cột của một ma trận không làm thay đổi hạng của hệ vectơ đó, do đó chúng không làm thay đổi hạng của ma trận. Sử dụng các phép biến đổi sơ cấp ta có thể biến đổi một ma trận bất kỳ về dạng (5.4).

Như vậy, bằng cách biến đổi ma trận về dạng (5.4) ta có thể xác định được hạng của nó.

Ví dụ 5: Tìm hạng của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -9 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & -9 & 8 & 1 \\ 2 & 11 & 4 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 13 & 1 & -13 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Giải: Ta biến đổi ma trận đã cho lần lượt như sau:

- (1) Cộng vào dòng thứ nhất, dòng thứ ba và dòng thứ tư, theo thứ tự, tích của dòng thứ hai với -3 , -1 và -2 , sau đó đổi chỗ dòng thứ nhất và dòng thứ hai;
- (2) Lấy dòng thứ hai cộng vào dòng thứ năm, sau đó đổi chỗ cột thứ hai và cột thứ ba;
- (3) Cộng vào dòng thứ năm tích của dòng thứ tư với -1 , , sau đó đổi chỗ dòng thứ ba và dòng thứ tư;

- (4) Cộng vào dòng thứ năm tích của dòng thứ tư với -1 , sau đó đổi chỗ cột thứ tư và cột thứ năm.

Kết quả biến đổi:

$$(1) \quad A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -1 & 34 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 21 & 1 & 2 \\ 0 & 13 & 1 & -13 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & 34 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 21 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 21 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & 34 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 21 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & 6 & 34 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 21 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mã trận cuối cùng có hạng bằng 4, do đó hạng của mã trận A đã cho bằng 4.

V. KHẢO SÁT MỘT HỆ VECTO

Để tìm **hạng** của một hệ vectơ n chiều, ta lập ma trận nhận hệ vectơ đó làm hệ **vector** dòng (hoặc hệ **vector** cột). Theo các phương pháp nêu trên, ta xác định được **hạng** của hệ **vector** đó thông qua việc tìm **hạng** của ma trận. Khi đã tìm được **hạng** của hệ **vector** ta dễ dàng xác định được hệ **vector** đó phụ thuộc tuyến tính hay **độc lập** tuyến tính (thông qua việc so sánh **hạng** của hệ **vector** với số **vector** của hệ đó). Ta cũng có thể tìm **cơ sở** của hệ **vector** thông qua các định thức **con** **cơ sở** của ma trận.

Ví dụ 6: Tìm **hạng** và chỉ ra một **cơ sở** của hệ **vector**:

$$X_1 = (2, 1, 0, 4),$$

$$X_2 = (-4, -2, 1, -7),$$

$$X_3 = (3, 1, -1, 4),$$

$$X_4 = (1, -4, 3, -4),$$

$$X_5 = (0, 2, 1, 5).$$

Giải: Ta lập ma trận nhận hệ **vector** đã cho làm hệ **vector** cột:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Theo phương pháp tìm **hạng** của ma trận (bạn hãy tự thực hiện) ta xác định được $r(A) = 3$, suy ra **hạng** của hệ **vector** đã cho bằng 3. Để tìm một **cơ sở** của hệ **vector** ta chỉ cần lấy một định thức **con** **cơ sở** của ma trận A , tức là một định thức **con** cấp 3 khác 0 nào đó. Chẳng hạn, ta có:

$$D_{123}^{145} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0.$$

Từ đây suy ra các cột thứ nhất, thứ tư và thứ năm tạo thành một cơ sở của hệ vectơ cột của ma trận A, tức là X_1, X_4, X_5 là một cơ sở của hệ vectơ đã cho.

Ta thấy X_1, X_2, X_5 cũng là một cơ sở của hệ vectơ đã cho, bởi vì

$$D_{123}^{125} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

cũng là một định thức con cơ sở của ma trận A.

Chú ý: Một trong các hệ quả của định lý về mối liên hệ giữa hạng của ma trận và các định thức con nói rằng hệ vectơ dòng (cột) của định thức phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi định thức đó bằng 0. Để xét sự phụ thuộc tuyến tính của một hệ vectơ n chiều có số vectơ đúng bằng n , bạn có thể tính định thức d với hệ vectơ dòng (hoặc hệ vectơ cột) là hệ n vectơ đó. Hệ n vectơ n chiều phụ thuộc tuyến tính nếu $d = 0$, độc lập tuyến tính nếu $d \neq 0$.

Ví dụ 7: Xét sự phụ thuộc tuyến tính của hệ 3 vectơ 3 chiều:

$$P_1 = (3, 2, 5), P_2 = (4, 1, 9), P_3 = (5, 2, 13).$$

Giải: Hệ vectơ đã cho là hệ vectơ dòng của định thức

$$d = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 9 \\ 5 & 2 & 13 \end{vmatrix} = -14.$$

Định thức này khác 0, do đó hệ vectơ đã cho độc lập tuyến tính.

BÀI TẬP

54. Chứng minh rằng nếu ma trận có tất cả các định thức con cấp s đều bằng 0 thì mọi định thức con cấp cao hơn s (nếu có) bằng 0.

55. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai:

- a) Hạng của ma trận là hạng của hệ vectơ cột của nó.
- b) Hạng của ma trận bằng số vectơ của cơ sở của hệ vectơ dòng của nó.
- c) Hạng của ma trận bằng r nếu ma trận đó không có định thức con cấp cao hơn r hoặc mọi định thức con cấp $r+1$ của nó đều bằng 0.
- d) Hạng của ma trận bằng r nếu nó có một định thức con khác 0 cấp r và mọi định thức con cấp $r+1$ của nó bằng 0.
- e) Hạng của ma trận bằng r nếu nó có một định thức con $D \neq 0$ cấp r và trong số các định thức con cấp $r+1$ bao quanh D có ít nhất một định thức bằng 0.
- f) Hạng của một ma trận cấp $m \times n$ bằng r nếu nó có một định thức con khác 0 cấp r và $\min\{m, n\} = r$.
- g) Các phép biến đổi sơ cấp có thể làm thay đổi hạng của ma trận.

56. Tìm hạng của các ma trận sau:

a)
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & -2 & -8 \\ 4 & 6 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{bmatrix}$$

$$f) \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

57. Tùy theo m hãy tìm hạng của các ma trận sau:

$$a) \begin{bmatrix} 7-m & -12 & 6 \\ 10 & -19-m & 10 \\ 12 & -24 & 13-m \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & m & -1 & 2 \\ 2 & -1 & m & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} m & 2 & 2 & 2 \\ 2 & m & 2 & 2 \\ 2 & 2 & m & 2 \\ 2 & 2 & 2 & m \end{bmatrix}$$

58. Chứng minh rằng nếu ma trận A có hạng bằng r thì bằng các phép biến đổi sơ cấp ta có thể đưa ma trận đó về dạng có các phần tử b_{ij} như sau: $b_{11} = b_{22} = \dots = b_{rr} = 1$ và tất cả các phần tử còn lại bằng 0.

59. Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông cấp n có hạng nhỏ hơn $n - 1$ thì ma trận phụ hợp A^* là ma trận không (ma trận có tất cả các phần tử bằng 0).

60. Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông cấp n có hạng bằng n thì ma trận phụ hợp A^* của nó cũng có hạng bằng n .

61. Chứng minh rằng nếu A là ma trận vuông cấp $n > 1$ có hạng bằng $n - 1$ thì ma trận phụ hợp A^* có hạng bằng 1.

62. Chứng minh rằng nếu A là ma trận cấp $m \times n$ có hạng bằng 1 thì tồn tại ma trận cột B (chỉ có một cột) và ma trận dòng C (chỉ có một dòng) sao cho $A = BC$.

63. Hạng của ma trận thay đổi thế nào nếu:

a) Thêm một dòng (cột) là tổ hợp tuyến tính của các dòng (cột) của nó.

b) Xoá bớt một dòng (cột) là tổ hợp tuyến tính của các dòng (cột) còn lại của nó.

c) Thêm một dòng (cột) không biểu diễn tuyến tính qua các dòng (cột) của nó.

d) Xoá bớt một dòng (cột) không biểu diễn tuyến tính qua các dòng (cột) còn lại của nó.

64. Với A là ma trận vuông cấp n , hãy cho biết các mệnh đề sau đúng hay sai:

a) Hạng của A nhỏ hơn n khi và chỉ khi $\det(A) = 0$.

b) Hệ vectơ dòng (cột) của A độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\det(A) \neq 0$.

c) Hệ vectơ dòng (cột) của A phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $\det(A) = 0$.

d) Hạng của A bằng $n - 1$ khi và chỉ khi $\det(A) = 0$.

e) Nếu hạng của A bằng n thì mọi hệ phương trình tuyến tính với ma trận hệ số A có thể biến đổi về dạng tam giác.

f) Nếu $\det(A) = 0$ thì mọi hệ phương trình tuyến tính với ma trận hệ số A có thể biến đổi về dạng hình thang.

65. Sử dụng phương pháp tìm hạng của ma trận hãy tìm hạng của các hệ vectơ sau và cho biết hệ vectơ đó phụ thuộc hay độc lập tuyến tính

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} X_1 = (3, -1, 2, 4, 4) \\ X_2 = (1, -1, 3, 5, 1) \\ X_3 = (3, 1, -5, -7, 5) \\ X_4 = (6, -4, 11, 19, 7) \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} X_1 = (1, -1, -5, 5, 3) \\ X_2 = (1, 2, 4, 1, 6) \\ X_3 = (2, 1, -3, -1, 2) \\ X_4 = (3, 3, -1, -6, 9) \end{cases} \end{array}$$

66. Xét sự phụ thuộc tuyến tính của các hệ vectơ sau thông qua việc tính định thức

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} X_1 = (3, 2, 4) \\ X_2 = (-2, 5, 1) \\ X_3 = (1, 7, 3) \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} X_1 = (1, 6, -3, 0) \\ X_2 = (2, 5, 4, 3) \\ X_3 = (3, -5, 1, 2) \\ X_4 = (5, 9, 15, 9) \end{cases} \end{array}$$

67. Tìm hạng và một cơ sở của các hệ vectơ sau

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} X_1 = (2, 1, 3, 1) \\ X_2 = (1, 2, 0, 1) \\ X_3 = (-1, 1, -3, 0) \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} X_1 = (1, 2, 3, 4) \\ X_2 = (2, 3, 4, 5) \\ X_3 = (3, 4, 5, 6) \\ X_4 = (4, 5, 6, 7) \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} X_1 = (5, 2, -3, 1) \\ X_2 = (4, 1, -2, 3) \\ X_3 = (1, 1, -1, -2) \\ X_4 = (3, 4, -1, 2) \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} X_1 = (2, -1, 3, 5) \\ X_2 = (4, -3, 1, 3) \\ X_3 = (3, -2, 3, 4) \\ X_4 = (4, -1, 15, 17) \\ X_5 = (7, -6, 7, 0) \end{cases} \end{array}$$

68. Với những giá trị nào của k thì hệ vectơ sau là một cơ sở của không gian $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{cases} X_1 = (3, 2, -3, 4) \\ X_2 = (k, 5, -1, 3) \\ X_3 = (2, 1, 3, 1) \\ X_4 = (4, 2, -1, 3) \end{cases}$$

69. Chứng minh rằng nếu một hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng là một ma trận vuông không suy biến thì hạng của ma trận hệ số của hệ phương trình đó nhỏ hơn hạng của ma trận mở rộng của nó.

70. Chứng minh rằng nếu một hệ phương trình tuyến tính n ẩn số có ma trận mở rộng là một ma trận vuông không suy biến thì hạng của ma trận hệ số của hệ phương trình đó bằng n .

71. Chứng minh rằng nếu cả hệ vectơ dòng và hệ vectơ cột của ma trận A độc lập tuyến tính thì A là một ma trận vuông có ma trận nghịch đảo.

72. Sử dụng định lý "Hạng của ma trận tích không vượt quá hạng của mỗi ma trận nhân tử", hãy chứng minh hai ma trận A và B có hạng bằng nhau trong các trường hợp sau đây:

a) Cả hai phương trình ma trận $AX = B$ và $BX = A$ có nghiệm.

b) $B = QA$, với Q là ma trận vuông không suy biến.

73. Với A là ma trận cấp $m \times n$ bất kỳ và B là ma trận cấp $n \times p$ bất kỳ, hãy chứng minh:

a) Nếu hệ vectơ dòng của AB độc lập tuyến tính thì hệ vectơ dòng của A cũng độc lập tuyến tính;

b) Nếu hệ vectơ cột của AB độc lập tuyến tính thì hệ vectơ cột của B cũng độc lập tuyến tính.

74. Cho hai hệ vectơ

$$\begin{cases} X_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}) \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (x)$$

$$\begin{cases} Y_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}, x_{k,n+1}, \dots, x_{k,n+p}) \\ k = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (y)$$

Chú ý rằng mỗi vectơ Y_k là một vectơ $(n + p)$ chiều có n thành phần đầu như của vectơ X_k . Hãy chứng minh:

- Nếu hệ vectơ (x) độc lập tuyến tính thì hệ vectơ (y) cũng độc lập tuyến tính;
- Nếu hệ vectơ (y) phụ thuộc tuyến tính thì hệ vectơ (x) cũng phụ thuộc tuyến tính.

75. Chứng minh rằng nếu ma trận A không vuông thì ít nhất một trong hai ma trận AA' , $A'A$ không có ma trận nghịch đảo.

Chương 4

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

(LÝ THUYẾT TỔNG QUÁT)

Trong chương 2 ta đã đề cập đến các khái niệm cơ bản về hệ phương trình tuyến tính và một phương pháp tương đối thông dụng để giải hệ phương trình tuyến tính: phương pháp khử ẩn liên tiếp. Trong chương này chúng ta sẽ sử dụng kiến thức về vectơ, ma trận và định thức để xem xét một cách tổng quát hệ phương trình tuyến tính

§1. PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC

I. HÊ PHƯƠNG TRÌNH CRAMER

Hệ phương trình Cramer là một trường hợp riêng của hệ phương trình tuyến tính khi số phương trình bằng số ẩn và định thức của ma trận hệ số khác 0. Hệ phương trình Cramer n ẩn số có dạng:

[illegible]

Ma trận hệ số của hệ phương trình (1.1) là một ma trận vuông cấp n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Theo giả thiết về hệ phương trình Cramer thì ma trận A không suy biến, tức là:

$$d = |A| \neq 0.$$

II. PHƯƠNG PHÁP MA TRẬN

Hệ phương trình (1.1) có thể viết dưới dạng phương trình ma trận:

$$AX = B, \quad (1.2)$$

trong đó A là ma trận hệ số đã nói ở trên, còn X và B là các ma trận:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Ở dạng (1.2) các ma trận A và B là các ma trận cho trước, còn X là ma trận phải tìm. Ma trận B được gọi là *cột số hạng tự do*, còn X được gọi là *cột ẩn số*.

Do $d = |A| \neq 0$ nên ma trận A có ma trận nghịch đảo A^{-1} . Nhân hai vế của phương trình (1.2) với A^{-1} về phía bên trái ta được hệ thức tương đương:

$$X = A^{-1}B. \quad (1.3)$$

Như vậy, hệ phương trình Cramer có một nghiệm duy nhất được xác định theo công thức (1.3).

Ví dụ: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases} \quad (1.4)$$

Giải: Ma trận hệ số A và cột số hạng tự do B của hệ phương trình này là:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Do $|A| = 20 \neq 0$ nên hệ phương trình (1.4) là hệ Cramer. Ma trận nghịch đảo của ma trận A là:

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 7 & -10 & 11 \\ 1 & 10 & -7 \\ -5 & 10 & -5 \end{bmatrix}.$$

Áp dụng công thức (1.3) ta có:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 7 & -10 & 11 \\ 1 & 10 & -7 \\ -5 & 10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 40 \\ -20 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nghiệm duy nhất của hệ phương trình (1.4) là:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

III. QUY TẮC CRAMER

Định lý sau đây được gọi là *quy tắc Cramer*:

Định lý: Nghiệm duy nhất của một hệ phương trình Cramer n ẩn số $x_1, x_2, \dots, x_n$ được xác định theo công thức:

$$\left(x_1 = \frac{d_1}{d}, x_2 = \frac{d_2}{d}, \dots, x_n = \frac{d_n}{d} \right), \quad (1.5)$$

trong đó d là định thức của ma trận hệ số, d_j ($j = 1, 2, \dots, n$) là định thức có cột thứ j là cột số hạng tự do và tất cả các cột còn lại như của định thức d .

Chứng minh: Xét hệ phương trình (1.1) ta có:

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$d_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Chú ý rằng, với mỗi j cố định, phần bù đại số của phần tử b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) của định thức d_j đúng bằng phần bù đại số của phần tử a_{ij} của định thức d , bởi vì hai định thức d và d_j chỉ khác nhau ở cột thứ j (cột bị xoá đi). Khai triển định thức d_j theo cột thứ j , ta có:

$$d_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}, \quad (1.6)$$

trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij} của định thức d .

Nghiệm duy nhất của hệ phương trình (1.1) được xác định theo công thức (1.3). Áp dụng công thức (1.3) và (1.6), ta có:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{d} \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \dots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1/d \\ d_2/d \\ \dots \\ d_n/d \end{bmatrix}.$$

Từ đây ta có công thức (1.5).

Ví dụ: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} -2x + y - 3z = 1 \\ 3x - 4y + 2z = 3 \\ 5x + 2y + z = -2 \end{cases}$$

Giải: Đối với hệ phương trình này ta có:

$$d = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -55,$$

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9,$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 56,$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 43.$$

Theo quy tắc Cramer ta tìm được nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho:

$$(x = \frac{d_1}{d} = \frac{9}{55}, y = \frac{d_2}{d} = -\frac{56}{55}, z = \frac{d_3}{d} = -\frac{43}{55}).$$

BÀI TẬP

1. Viết các hệ phương trình sau dưới dạng phương trình ma trận và giải phương trình đó

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 3x + 2y - 5z = -3 \\ 2x + y + 3z = 11 \\ 4x + 3y - 12z = -15 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + 2z = 5 \end{cases} \end{array}$$

2. Sử dụng quy tắc Cramer, hãy giải các hệ phương trình sau đây:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 3x + 2y = -6 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 5x + 2y - 3z = 9 \\ 2x + y - 4z = 6 \\ 8x + 3y - 5z = 15 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 3x + y - 2z = 6 \\ 6x + 3y - 7z = 16 \\ 15x + 2y + z = 16 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{e)} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6 \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$$

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH TỔNG QUÁT

I.. CÁC DẠNG BIỂU DIỄN

a. Dạng khai triển

Một hệ phương trình tuyến tính n ẩn số $x_1, x_2, \dots, x_n$ thường được viết dưới dạng như đã trình bày ở chương 2:

[illegible]

Ta gọi dạng biểu diễn (2.1) là dạng khai triển để phân biệt với các dạng dưới đây.

b. Dạng ma trận

Toàn bộ dữ liệu cho trước của hệ phương trình (2.1) được tóm tắt trong ma trận mở rộng:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

Ma trận mở rộng chứa trong nó ma trận hệ số A và cột số hạng tự do B:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Nếu viết các ẩn số dưới dạng ma trận cột

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

thì hệ phương trình (2.1) có thể viết dưới dạng phương trình ma trận

$$AX = B. \quad (2.2)$$

Ngược lại, phương trình ma trận (2.2), với A là một ma trận cấp $m \times n$ cho trước và B là một ma trận cấp $m \times 1$ cho trước, là một hệ phương trình tuyến tính n ẩn số. Thật vậy, AX là một ma trận cấp $m \times 1$ khi và chỉ khi X là một ma trận cấp $n \times 1$. Gọi $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các phần tử của X và thực hiện phép nhân AX , sau đó cân bằng các phần tử của hai ma trận AX và B ta được hệ phương trình dạng (2.1).

c. Dạng vector

Hệ phương trình (2.1) còn viết được dưới dạng tương đương:

$$x_1 A_1^c + x_2 A_2^c + \dots + x_n A_n^c = B, \quad (2.3)$$

trong đó A_j^c ($j = 1, 2, \dots, n$) là cột thứ j của ma trận hệ số và B là cột số hạng tự do:

$$A_j^c = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ngược lại, phương trình dạng (2.3), với $A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c, B$ là các vectơ m chiều cho trước, là một hệ phương trình tuyến tính n ẩn

số $x_1, x_2, \dots, x_n$. Từ dạng (2.3) ta thấy rằng hệ phương trình tuyến tính có nghiệm khi và chỉ khi cột số hạng tự do biểu diễn tuyến tính qua các cột của ma trận hệ số, tức là tồn tại các số thực $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sao cho

$$\alpha_1 A_1^c + \alpha_2 A_2^c + \dots + \alpha_n A_n^c = B$$

Bộ hệ số biểu diễn tuyến tính $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ chính là nghiệm của hệ phương trình đó.

II. ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM

Định lý sau đây cho phép ta căn cứ vào hạng của ma trận hệ số và hạng của ma trận mở rộng để nhận biết một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm hay không.

Định lý Cronecker-Capelli: Điều kiện cần và đủ để một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm là: hạng của ma trận mở rộng bằng hạng của ma trận hệ số.

Chứng minh:

Xét hệ phương trình tuyến tính (2.1). Theo định nghĩa hạng của ma trận thì hạng của ma trận hệ số A là hạng của hệ vector

$$A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c, \quad (2.4)$$

còn hạng của ma trận mở rộng $\bar{A}$ là hạng của hệ vector

$$A_1^c, A_2^c, \dots, A_n^c, B. \quad (2.5)$$

Như đã nói ở trên, một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm khi và chỉ khi cột số hạng tự do biểu diễn tuyến tính qua các cột của ma trận hệ số.

Nếu hệ phương trình (2.1) có nghiệm thì vector B biểu diễn tuyến tính qua các vector của hệ (2.4), do đó hạng của hệ vector (2.5) bằng hạng của hệ vector (2.4), tức là $r(\bar{A}) = r(A)$.

Ngược lại, giả sử $r(\bar{A}) = r(A) = r$, tức là cả hai hệ vector (2.4) và (2.5) cùng có hạng bằng r . Lấy một cơ sở bất kỳ của hệ (2.4):

$$A_{j_1}^c, A_{j_2}^c, \dots, A_{j_r}^c \quad (2.6)$$

Hệ vector (2.6) đồng thời là một hệ con độc lập tuyến tính của hệ vector (2.5). Do hạng của hệ vector (2.5) cũng bằng r nên hệ (2.6) là một cơ sở của nó. Từ đây suy ra vector B biểu diễn tuyến tính qua các vector (2.6):

$$B = \beta_{j_1} A_{j_1}^c + \beta_{j_2} A_{j_2}^c + \dots + \beta_{j_r} A_{j_r}^c. \quad (2.7)$$

Tổ hợp tuyến tính ở vế phải của đẳng thức (2.7) có thể thác triển thành một tổ hợp tuyến tính của các vector của hệ (2.4) bằng cách gán cho mỗi vector còn lại hệ số bằng 0. Như vậy, ta đã chứng minh được rằng khi $r(\bar{A}) = r(A)$ thì cột số hạng tự do của hệ phương trình tuyến tính (2.1) biểu diễn tuyến tính qua các cột của ma trận hệ số của nó, do đó hệ phương trình (2.1) có nghiệm.

Định lý đã được chứng minh.

III. KHẢO SÁT TỔNG QUÁT HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Sử dụng định lý về điều kiện có nghiệm và quy tắc Cramer, sau đây ta sẽ xem xét một cách tổng quát hệ phương trình tuyến tính dạng (2.1) xuất phát từ việc tìm hạng của ma trận hệ số A và ma trận mở rộng $\bar{A}$.

Theo định lý Cronecker- Capelli, nếu $r(\bar{A}) \neq r(A)$ thì hệ phương trình (2.1) vô nghiệm.

Xét trường hợp $r(\bar{A}) = r(A) = r$.

Trong trường hợp này hệ phương trình (2.1) có ít nhất một nghiệm. Để giải hệ phương trình đó ta chọn một định thức con cơ sở bất kỳ của ma trận A . Không làm mất tính tổng quát ta giả sử rằng định thức con cấp r ở góc trên bên trái của ma trận A là một định thức con cơ sở của nó:

$$D = D_{12 \dots r}^{12 \dots r} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Do $r(\bar{A}) = r$ nên định thức D đồng thời là định thức con cơ sở của ma trận mở rộng $\bar{A}$. Từ đây suy ra rằng r dòng đầu của ma trận $\bar{A}$ là một cơ sở của hệ vectơ dòng của nó. Gọi X_i là dòng thứ i của ma trận $\bar{A}$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Các vectơ $X_1, X_2, \dots, X_r$ độc lập tuyến tính và tất cả các vectơ $X_{r+1}, \dots, X_n$ (nếu $r < m$) biểu diễn tuyến tính qua $X_1, X_2, \dots, X_r$. Với mỗi $k = r + 1, \dots, m$ ta có:

$$X_k = \alpha_{k1}X_1 + \alpha_{k2}X_2 + \cdots + \alpha_{kr}X_r. \quad (2.8)$$

Theo hệ thức (2.8) ta có thể biến đổi sao cho mỗi dòng của ma trận mở rộng, từ dòng thứ $r + 1$ trở xuống (nếu có), thành vector không $n + 1$ chiều bằng cách cộng lần lượt vào dòng thứ k ($k = r + 1, \dots, n$) tích của mỗi dòng X_i ($i = 1, 2, \dots, r$) với $(-\alpha_{ki})$. Điều này chứng tỏ hệ phương trình (2.1) tương đương với hệ r phương trình đầu của nó:

[illegible]

Hệ (2.9) được gọi là *hệ phương trình cơ sở* của hệ phương trình tuyến tính (2.1). Chú ý rằng hệ phương trình cơ sở của một hệ phương trình tuyến tính được lựa chọn dựa theo các dòng của định thức con cơ sở của ma trận hệ số của nó.

Như vậy, việc giải hệ phương trình (2.1) quy về việc giải hệ phương trình cơ sở (2.9).

Nếu $r = n$ thì hệ phương trình (2.9) là một hệ Cramer, do đó nó có một nghiệm duy nhất và ta có thể tìm nghiệm đó theo quy tắc Cramer.

Nếu $r < n$ thì theo định thức con cơ sở $D = D_{1,2,\dots,r}^{1,2,\dots,r} \neq 0$ ta gọi $x_1, x_2, \dots, x_r$ là các *ẩn chính* và các ẩn còn lại là *ẩn tự do*. Chuyển các số hạng chứa các ẩn tự do của các phương trình của hệ (2.9) sang vế phải và gán cho chúng giá trị tùy ý:

$$x_{r+1} = \alpha_{r+1}, \dots, x_n = \alpha_n,$$

ta được một hệ phương trình Cramer r ẩn số $x_1, x_2, \dots, x_r$ (với định thức của ma trận hệ số là định thức D). Theo quy tắc Cramer ta xác định được $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_r = \alpha_r$ và bộ n số thực $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$ là nghiệm của hệ (2.9). Như vậy, *mỗi bộ giá trị gán cho các ẩn tự do cho tương ứng một nghiệm của hệ phương trình (2.9)*. Do bộ giá trị gán cho các ẩn tự do có thể lấy tùy ý nên hệ phương trình (2.9) có vô số nghiệm.

Sau đây là một số kết luận tóm tắt rút ra từ quá trình khảo sát tổng quát hệ phương trình tuyến tính:

1. Số nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính có thể xác định được thông qua hạng của ma trận hệ số A , hạng của ma trận mở rộng $\bar{A}$ và số ẩn số của hệ:

- Nếu $r(A) \neq r(\bar{A})$ thì hệ phương trình tuyến tính *vô nghiệm*;
- Nếu $r(A) = r(\bar{A}) = n$ (n là số ẩn số) thì hệ phương trình tuyến tính có *một nghiệm duy nhất*;
- Nếu $r(A) = r(\bar{A}) = r < n$ thì hệ phương trình tuyến tính có *vô số nghiệm*. Trong trường hợp này hệ phương trình tuyến tính có $n - r$ ẩn tự do và mỗi bộ $n - r$ số thực *bất kỳ* gán cho các ẩn tự do cho tương ứng một nghiệm.

2. Khi $r(A) = r(\bar{A}) = r$ thì hệ phương trình tuyến tính tương đương với hệ phương trình cơ sở của nó. Hệ phương trình cơ sở

gồm r phương trình độc lập tuyến tính. Các phương trình còn lại của hệ là phương trình hệ quả của các phương trình cơ sở.

3. Để xác định hệ phương trình cơ sở khi $r(A) = r(\bar{A}) = r$ và để chỉ định các ẩn chính và ẩn tự do ta phải chọn một định thức con cơ sở của ma trận hệ số. Nếu định thức con cơ sở được tạo thành từ các dòng $i_1, i_2, \dots, i_r$ và các cột $j_1, j_2, \dots, j_r$ của ma trận A thì hệ phương trình cơ sở gồm r phương trình $i_1, i_2, \dots, i_r$ và ẩn chính là các ẩn có chỉ số $j_1, j_2, \dots, j_r$, các ẩn còn lại (khi $r < n$) là các ẩn tự do.

Sau đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 + 3x_4 = 3 \end{cases}$$

Ma trận hệ số và ma trận mở rộng của hệ phương trình này là:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -8 & 3 \end{bmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -8 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ma trận A có hạng bằng 2 bởi vì định thức con cấp hai ở góc trên bên trái khác 0 và cả hai định thức con cấp ba bao quanh nó đều bằng 0:

$$D_{12}^{12} = -4, \quad D_{123}^{123} = D_{123}^{124} = 0.$$

Ma trận $\bar{A}$ có hạng bằng 3, bởi vì nó có một định thức con cấp ba (cấp cao nhất) khác 0: $D_{123}^{125} = -8$.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Ví dụ 2: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 7x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

Đây là một hệ phương trình tuyến tính 3 ẩn số. Ma trận hệ số của hệ phương trình đã cho có hạng bằng 3, bởi vì nó chỉ có ba cột và có một định thức con cấp ba khác 0:

$$D_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

Ma trận mở rộng của hệ là một ma trận vuông cấp bốn có định thức bằng 0 (bạn hãy tự kiểm tra) và có định thức con $D_{123}^{123} = 12$, do đó hạng của nó cũng bằng 3. Vậy hệ đã cho có một nghiệm duy nhất. Định thức D_{123}^{123} là một định thức con cơ sở của ma trận hệ số, do đó hệ phương trình cơ sở của hệ đã cho gồm ba phương trình đầu:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Đây là một hệ Cramer 3 ẩn số. Theo quy tắc Cramer ta dễ dàng tìm được nghiệm duy nhất của nó là:

$$\left(x_1 = \frac{1}{12}, x_2 = -\frac{5}{12}, x_3 = \frac{13}{12} \right).$$

Ví dụ 3: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 3 \\ 3x_1 - 9x_2 + 19x_3 - 13x_4 + 17x_5 = -6 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Qua việc tính hạng ta thấy ma trận hệ số và ma trận mở rộng của hệ phương trình này cùng có hạng bằng 2. Để giải hệ đã cho ta chọn một định thức con cơ sở của ma trận hệ số, chẳng hạn:

$$D_{13}^{12} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Hệ phương trình cơ sở gồm phương trình thứ nhất và phương trình thứ ba:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Các ẩn chính là x_1, x_2 và các ẩn tự do là x_3, x_4, x_5 . Chuyển các số hạng chứa các ẩn tự do sang vế phải và gán cho chúng giá trị tùy ý: $x_3 = \alpha, x_4 = \beta, x_5 = \gamma$, ta được một hệ phương trình Cramer hai ẩn số x_1, x_2 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3\alpha - 4\beta + \gamma + 3 \\ x_1 - x_2 = -5\alpha + \beta - 3\gamma \end{cases}$$

Theo quy tắc Cramer ta tìm được:

$$x_1 = 1 - \frac{13}{3}\alpha - \frac{2}{3}\beta - \frac{5}{3}\gamma, \quad x_2 = 1 + \frac{2}{3}\alpha - \frac{5}{3}\beta + \frac{4}{3}\gamma.$$

Nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho là:

$$\left(1 - \frac{13}{3}\alpha - \frac{2}{3}\beta - \frac{5}{3}\gamma, 1 + \frac{2}{3}\alpha - \frac{5}{3}\beta + \frac{4}{3}\gamma, \alpha, \beta, \gamma \right),$$

trong đó α, β, γ là ba số bất kỳ.

Ví dụ 4: Giải và biện luận hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 3x - 4y + z = -1 \text{ (m là tham số).} \\ 2x - 6y + mz = 2 \end{cases}$$

Giải: Gọi A là ma trận hệ số, ta có:

$$d = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & m \end{vmatrix} = -10(m + 2).$$

Khi $m \neq -2$ thì $d \neq 0$, do đó hệ phương trình đã cho là hệ Cramer. Để tìm nghiệm duy nhất theo quy tắc Cramer ta tính các định thức:

$$d_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & m \end{vmatrix} = -2(9m - 38),$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & m \end{vmatrix} = -16(m - 2).$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \\ 2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = -80.$$

Như vậy, khi $m \neq -2$ hệ phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất:

$$\left(x = \frac{9m - 38}{5(m + 2)}, y = \frac{8(m - 2)}{5(m + 2)}, z = \frac{8}{m + 2} \right).$$

Khi $m = -2$ ta có $d = 0$, do đó $r(A) < 3$. Mặt khác, do $d_3 \neq 0$ nên hạng của ma trận mở rộng bằng 3. Vậy trường hợp $m = -2$ hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

BÀI TẬP

3. Giải các hệ phương trình sau bằng cách chỉ ra một hệ phương trình cơ sở và giải hệ phương trình cơ sở đó:

$$\text{a) } \begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 16x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 9x_4 = 13 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \end{cases}$$

4. Sử dụng định lý Cronecker-Capelli, hãy tìm k để các hệ phương trình sau có nghiệm

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = k \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5 \\ 12x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ kx_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

5. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - y + mz = 1 \\ 5x - 4y + 3z = 0 \\ -3x + 3y - z = 4 \end{cases}$$

- a) Tìm hạng của ma trận mở rộng của hệ phương trình đã cho.
 - b) Với những giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho có nghiệm?
 - c) Trong trường hợp hệ có nghiệm hãy xác định nghiệm của hệ theo quy tắc Cramer.
6. Chứng minh rằng một hệ phương trình tuyến tính với số phương trình bằng số ẩn có một nghiệm duy nhất khi và chỉ khi nó là hệ phương trình Cramer.
7. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:
- a) Nếu một hệ phương trình tuyến tính với số phương trình nhỏ hơn số ẩn có nghiệm thì nó có vô số nghiệm.
 - b) Mọi hệ phương trình tuyến tính với số phương trình nhỏ hơn số ẩn đều có vô số nghiệm.
 - c) Mọi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với số phương trình nhỏ hơn số ẩn đều có vô số nghiệm
 - d) Mọi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với ma trận hệ số là ma trận vuông suy biến (có định thức bằng 0) đều có vô số nghiệm
 - e) Nếu hệ phương trình tuyến tính có vô số nghiệm thì khi bỏ bớt một phương trình nó vẫn có vô số nghiệm
8. Chứng minh rằng nếu hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng là ma trận vuông không suy biến thì nó vô nghiệm.
9. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$$

Hãy tìm điều kiện để hệ phương trình đó có một nghiệm duy nhất và tìm nghiệm duy nhất đó.

10. Tùy theo giá trị của tham số (k, m, a, b), hãy giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} mx + my + (m+1)z = m \\ mx + my + (m-1)z = m \\ (m+1)x + my + (2m+3)z = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3ax + (2a+1)y + (a+1)z = a \\ (2a-1)x + (2a-1)y + (a-2)z = a+1 \\ (4a-1)x + 3ay + 2az = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (5b+1)x + 2by + (4b+1)z = 1+b \\ (4b-1)x + (b-1)y + (4b-1)z = -1 \\ 2(3b+1)x + 2by + (5b+2)z = 2-b \end{cases}$$

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

I. ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM KHÔNG TẦM THƯỜNG

Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là hệ phương trình tuyến tính với tất cả các số hạng tự do bằng 0. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn số $x_1, x_2, \dots, x_n$ có dạng tổng quát như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Hệ thuần nhất (3.1) có ít nhất một nghiệm, gọi là *nghiệm không*, hay *nghiệm tầm thường*: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Dữ liệu về hệ thuần nhất (3.1) được tóm tắt trong ma trận hệ số:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Số nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn số được xác định thông qua hạng của ma trận hệ số của nó và số ẩn:

- Nếu $r(A) = n$ thì hệ thuần nhất có một nghiệm duy nhất là nghiệm tầm thường;
- Nếu $r(A) < n$ thì hệ thuần nhất có vô số nghiệm

Như vậy, điều kiện có nghiệm không tầm thường đồng nhất với điều kiện để hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có vô số nghiệm, do đó ta có:

Định lý: Điều kiện cần và đủ để một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có nghiệm không tầm thường là: hạng của ma trận hệ số của nó nhỏ hơn số ẩn.

Từ định lý này suy ra các hệ quả sau đây:

Hệ quả 1: Một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với số phương trình bằng số ẩn có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi định thức của ma trận hệ số bằng 0.

Thật vậy, khi $m = n$ thì ma trận của hệ (3.1) là một ma trận vuông cấp n . Hàng của một ma trận vuông cấp n nhỏ hơn n khi và chỉ khi định thức của nó bằng 0.

Hệ quả 2: Mọi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với số phương trình nhỏ hơn số ẩn đều có nghiệm không tầm thường.

Thật vậy, hạng của ma trận hệ số của hệ phương trình (3.1) không thể vượt quá số phương trình của hệ: $r(A) \leq m$. Do đó, nếu $m < n$ thì điều kiện $r(A) < n$ được thoả mãn.

II. CẤU TRÚC CỦA TẬP HỢP NGHIỆM

Để tiện cho việc phân tích ta viết hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (3.1) dưới dạng phương trình ma trận:

$$AX = O, \quad (3.2)$$

trong đó A là ma trận hệ số, X là cột ẩn số và O là ma trận không cấp $m \times 1$ (cột số hạng tự do của hệ thuần nhất). Nghiệm của hệ phương trình (3.1) là một vectơ n chiều viết dưới dạng ma trận cấp $n \times 1$

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix}$$

mà khi thay $X = G$ vào (3.2) ta được đẳng thức đúng: $GX = O$. Ta cũng có thể xem mỗi nghiệm của hệ phương trình (3.1) như một vectơ n chiều.

Định lý: Tập hợp tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn số là một không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh: Gọi G và H là hai nghiệm bất kỳ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (3.1), ta có:

$$AG = O, AH = O.$$

Theo các tính chất đã biết của phép nhân ma trận, từ đây suy ra:

$$A(G + H) = AG + AH = O + O = O,$$

$$A(\alpha G) = \alpha(AG) = \alpha O = O \quad (\alpha \text{ là một số thực bất kỳ}).$$

Điều này chứng tỏ $G + H$ và αG là các nghiệm của hệ (3.1).

Như vậy, ta đã chứng minh được rằng:

- Tổng hai nghiệm bất kỳ của hệ (3.1) là một nghiệm của nó.
- Tích của một nghiệm bất kỳ của hệ (3.1) với một số α bất kỳ là nghiệm của nó.

Nếu xét tập hợp tất cả các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (3.1) như một tập hợp vectơ n chiều thì điều chứng minh trên đây chứng tỏ tập hợp đó là một không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa: Ta gọi tập hợp tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là *không gian nghiệm* của nó.

III. HỆ NGHIỆM CƠ BẢN

Xét không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất khi nó có vô số nghiệm, tức là khi hạng của ma trận hệ số của nó nhỏ hơn số ẩn.

Định nghĩa: Mỗi cơ sở của không gian nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất được gọi là một *hệ nghiệm cơ bản* của nó.

Như vậy, hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (3.1) là tập hợp các nghiệm $P_1, P_2, \dots, P_s$ (xem như các vectơ n chiều) thoả mãn hai điều kiện:

- $P_1, P_2, \dots, P_s$ độc lập tuyến tính;
- Mọi nghiệm của hệ phương trình (3.1) biểu diễn tuyến tính qua $P_1, P_2, \dots, P_s$.

Như ta đã biết, hai cơ sở bất kỳ của một không gian con của không gian $\mathbb{R}^n$ có số vectơ bằng nhau. Như vậy, các hệ nghiệm cơ bản của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có số nghiệm như nhau. Định lý sau đây cho phép ta xác định số nghiệm của mỗi hệ nghiệm cơ bản thông qua hạng của ma trận hệ số và số ẩn số.

Định lý: Khi $r(A) = r < n$ thì không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (3.1) là một không gian con $n - r$ chiều của không gian $\mathbb{R}^n$, tức là mỗi hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình (3.1) có $n - r$ nghiệm.

Chứng minh: Định lý sẽ được chứng minh nếu ta chỉ ra một hệ nghiệm cơ bản gồm $n - r$ nghiệm.

Khi $r < n$ hệ phương trình (3.1) có $n - r$ ẩn tự do. Để cho xác định ta giả sử $x_{r+1}, \dots, x_n$ là các ẩn tự do ($x_1, x_2, \dots, x_r$ là các ẩn chính). Khi đó, mỗi bộ $n - r$ số $(\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_n)$ bất kỳ gán cho các ẩn tự do $x_{r+1}, \dots, x_n$ cho tương ứng một nghiệm của hệ phương trình (3.1). Mỗi bộ số đó có thể xem như một vectơ $n - r$ chiều. Nếu dùng các vectơ đơn vị $n - r$ chiều $E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$ làm các bộ số gán cho các ẩn tự do thì ta có $n - r$ nghiệm sau:

$$P_{r+1} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, P_{r+2} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, P_n = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ta sẽ chứng minh rằng $P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_n$ là một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình (3.1).

Trước hết ta thấy rằng các nghiệm $P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_n$ là các vectơ độc lập tuyến tính. Thật vậy, tổ hợp tuyến tính

$$k_{r+1}P_{r+1} + k_{r+2}P_{r+2} + \dots + k_n P_n = \begin{bmatrix} \vdots \\ k_{r+1} \\ k_{r+2} \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

bằng vectơ không n chiều khi và chỉ khi $k_{r+1} = k_{r+2} = \dots = k_n = 0$. Xét một nghiệm bất kỳ của hệ phương trình (3.1) tương ứng với bộ số $(\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n)$ gán cho các ẩn tự do $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$:

$$G = \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_{r+1} \\ \alpha_{r+2} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Gọi Q là tổ hợp tuyến tính của các nghiệm $P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_n$ với các hệ số tương ứng $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n$, ta có:

$$\begin{aligned} Q &= \alpha_{r+1} P_{r+1} + \alpha_{r+2} P_{r+2} + \dots + \alpha_n P_n \\ &= \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_{r+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ \alpha_{r+2} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha_{r+1} \\ \alpha_{r+2} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vì Q là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ thuộc không gian nghiệm của hệ phương trình (3.1) nên Q là một nghiệm của hệ phương trình đó. Hệ thức trên cho thấy Q là nghiệm tương ứng với chính bộ số thực $(\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \dots, \alpha_n)$ gán cho các ẩn tự do

$x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ để được nghiệm G . Mỗi bộ $n - r$ số gán cho các ẩn tự do cho tương ứng đúng một nghiệm của hệ phương trình, do đó Q chính là nghiệm G nói trên. Điều này chứng tỏ nghiệm G của hệ phương trình (3.1) biểu diễn tuyến tính qua các nghiệm $P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_n$.

Ta đã chứng minh được rằng hệ $n - r$ nghiệm $P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_n$ của hệ phương trình (3.1) độc lập tuyến tính và mọi nghiệm của hệ phương trình đó biểu diễn tuyến tính qua chúng, do đó $P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_n$ là một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình (3.1). Định lý đã được chứng minh.

Chú ý: Quá trình chứng minh định lý trên đây đã chỉ ra cách tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất. Khi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có vô số nghiệm, nó có vô số hệ nghiệm cơ bản. Việc tìm ra một hệ nghiệm cơ bản nào đó phụ thuộc vào việc chỉ định các ẩn chính và việc lựa chọn $n - r$ vectơ $n - r$ chiều làm các bộ số thực gán cho các ẩn tự do. Bạn đọc cần chú ý:

- Việc chỉ định các ẩn chính và các ẩn tự do phải xuất phát từ một định thức con cơ sở của ma trận hệ số: các ẩn chính là các ẩn tương ứng với các cột của ma trận hệ số tạo thành định thức con cơ sở, các ẩn còn lại là các ẩn tự do.
- Để cho đơn giản, trong phần chứng minh định lý trên đây ta lấy các vectơ đơn vị $E_1, E_2, \dots, E_{n-r}$ của không gian $\mathbb{R}^{n-r}$ làm các bộ số gán cho các ẩn tự do để được $n - r$ nghiệm của hệ nghiệm cơ bản. Thay cho các vectơ đơn vị ta có thể chọn $n - r$ vectơ độc lập tuyến tính bất kỳ của không gian $\mathbb{R}^{n-r}$. Một cách chọn đơn giản là lấy các dòng (hoặc các cột) của một định thức khác 0 cấp $n - r$.

Ví dụ: Tìm hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 14x_3 - 7x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Giải: Theo phương pháp tìm hạng ta dễ dàng xác định được hạng của ma trận hệ số của hệ phương trình này bằng 2. Chọn một định thức con cơ sở của ma trận hệ số, chẳng hạn:

$$D_{14}^{25} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Theo định thức con cơ sở đã chọn, hệ phương trình cơ sở của hệ đã cho gồm phương trình thứ nhất và phương trình thứ tư:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Cũng theo định thức con cơ sở nói trên, ẩn **chính** của hệ phương trình là x_2, x_5 , các ẩn còn lại là ẩn tự do. Xem các ẩn tự do x_1, x_3, x_4 như các số bất kỳ và chuyển các số hạng chứa chúng sang vế phải ta được:

$$\begin{cases} -x_2 + x_5 = -2x_1 - 3x_3 + 2x_4 \\ 2x_2 - 3x_5 = -x_1 + 8x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

Giải hệ Cramer hai ẩn số x_2, x_5 ta được:

$$\begin{cases} x_2 = 7x_1 + x_3 - 3x_4 \\ x_5 = 5x_1 - 2x_3 - x_4 \end{cases} \quad (3.4)$$

Nếu chọn các vectơ đơn vị 3 chiều $E_1 = (1, 0, 0)$, $E_2 = (0, 1, 0)$, $E_3 = (0, 0, 1)$ làm các bộ giá trị gán cho các ẩn tự do x_1, x_3, x_4 ta được một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình (3.3):

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Các nghiệm P_1, P_2, P_3 được xác định như sau:

$$x_1 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 7, x_5 = 5 \Rightarrow P_1;$$

$$x_1 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 1, x_5 = -2 \Rightarrow P_2;$$

$$x_1 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_2 = -3, x_5 = -1 \Rightarrow P_3.$$

Nếu chọn các dòng của định thức cấp 3:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

lập các bộ số gán cho các ẩn tự do ta được một hệ nghiệm cơ bản khác của hệ phương trình (3.3):

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -1 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}, Q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, Q_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

IV. MỐI LIÊN HỆ VỚI HỆ KHÔNG THUẬN NHẤT

Xét một hệ phương trình tuyến tính không thuận nhất bất kỳ:

[illegible]

Cùng với hệ (3.5) ta xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có cùng ma trận hệ số:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Định nghĩa: Hệ (3.6) được gọi là *hệ thuần nhất liên kết* của hệ phương trình tuyến tính (3.5).

Để dễ xem xét mối liên hệ ta viết các hệ phương trình (3.5) và (3.6) dưới dạng ma trận:

$$AX = B, \quad (3.5')$$

$$AX = 0. \quad (3.6')$$

Định lý:

1. Hiệu hai nghiệm bất kỳ của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất (3.5) là một nghiệm của hệ thuần nhất liên kết của nó.
2. Tổng của một nghiệm bất kỳ của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất (3.5) và một nghiệm bất kỳ của hệ thuần nhất liên kết là nghiệm của hệ (3.5).

Chứng minh:

1. Gọi C_1, C_2 là hai nghiệm bất kỳ của hệ không thuần nhất (3.5), ta có:

$$AC_1 = B, \quad AC_5 = B.$$

Từ đây suy ra

$$A(C_1 - C_2) = AC_1 - AC_2 = B - B = O.$$

Điều này chứng tỏ $C_1 - C_2$ là một nghiệm của hệ thuần nhất liên kết (3.6).

2. Với C là một nghiệm bất kỳ của hệ không thuần nhất (3.5) và G là một nghiệm bất kỳ của hệ thuần nhất liên kết (3.6), ta có:

$$AC = B, \quad AG = O.$$

Từ đây suy ra:

$$A(C + G) = AC + AG = B + O = B.$$

Điều này chứng tỏ $C + G$ là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất (3.5).

Từ các kết quả trên đây suy ra được rằng nếu $\bar{X}$ là một nghiệm riêng của hệ phương trình (3.5) và $P_1, P_2, \dots, P_{n-r}$ là một hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất liên kết (3.6) thì nghiệm tổng quát của hệ phương trình (3.5) có thể viết dưới dạng:

$$X = \bar{X} + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_{n-r} P_{n-r}$$

($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$ là các số thực bất kỳ).

BÀI TẬP

11. Nếu hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có hệ vectơ cột của ma trận hệ số độc lập tuyến tính thì nó có nghiệm không tầm thường hay không? Tại sao?

12. Chứng minh rằng nếu ma trận hệ số của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có hai cột tỷ lệ thì hệ phương trình đó có nghiệm không tầm thường.

13. Ma trận hệ số của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất 9 ẩn số có ma trận chuyển vị bằng ma trận đối của nó. Hệ

phương trình đó có nghiệm không tầm thường hay không? Tại sao?

14. Tìm nghiệm tổng quát và một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \\
 \text{b)} \quad & \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \\
 \text{c)} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \\
 \text{d)} \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

15. Tìm nghiệm tổng quát của hệ phương trình sau chỉ ra một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình thuần nhất liên kết

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 9x_4 - 8x_5 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 - 5x_5 = 5 \end{cases}$$

§4. MỘT SỐ MÔ HÌNH TUYẾN TÍNH TRONG PHÂN TÍCH KINH TẾ

I. MÔ HÌNH CÂN BẰNG THỊ TRƯỜNG

a. Thị trường một loại hàng hoá

Khi phân tích hoạt động của thị trường hàng hoá, các nhà kinh tế học sử dụng hàm cung và hàm cầu để biểu diễn sự phụ thuộc của lượng cung và lượng cầu vào giá hàng hoá (với giả thiết các yếu tố khác không thay đổi). Dạng tuyến tính của hàm cung và hàm cầu như sau:

$$\text{Hàm cung: } Q_s = -a_0 + a_1 p,$$

$$\text{Hàm cầu: } Q_d = b_0 - b_1 p,$$

trong đó Q_s là lượng cung, tức là lượng hàng hoá mà người bán bằng lòng bán; Q_d là lượng cầu, tức là lượng hàng hoá mà người mua bằng lòng mua; p là giá hàng hoá; a_0, a_1, b_0, b_1 là các hằng số dương.

Mô hình cân bằng thị trường có dạng:

$$\begin{cases} Q_s = -a_0 + a_1 p \\ Q_d = b_0 - b_1 p \\ Q_s = Q_d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_s = -a_0 + a_1 p \\ Q_d = b_0 - b_1 p \\ -a_0 + a_1 p = b_0 - b_1 p \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được:

$$\text{Giá cân bằng: } \bar{p} = \frac{a_0 + b_0}{a_1 + b_1};$$

$$\text{Lượng cân bằng: } \bar{Q} = \bar{Q}_s = \bar{Q}_d = \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{a_1 + b_1}.$$

b. Thị trường nhiều hàng hoá

Trong thị trường nhiều hàng hoá liên quan giá của hàng hoá này có thể ảnh hưởng đến lượng cung và lượng cầu của các hàng hoá khác. Để xét mô hình cân bằng thị trường n hàng hoá liên quan ta ký hiệu biến số như sau:

Q_{si} là lượng cung hàng hoá i ,

Q_{di} là lượng cầu đối với hàng hoá i ,

p_i là giá hàng hoá i .

Với giả thiết các yếu tố khác không thay đổi, hàm cung và hàm cầu tuyến tính có dạng:

Hàm cung hàng hoá i:

$$Q_{si} = a_{i0} + a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{in}p_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Hàm cầu đối với hàng hoá i:

$$Q_{di} = b_{i0} + b_{i1}p_1 + b_{i2}p_2 + \dots + b_{in}p_n \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Mô hình cân bằng thi trường n hàng hoá có dạng như sau:

$$\begin{cases} Q_{si} = a_{i0} + a_{i1}p_1 + a_{i2}p_2 + \dots + a_{in}p_n \\ Q_{di} = b_{i0} + b_{i1}p_1 + b_{i2}p_2 + \dots + b_{in}p_n \\ Q_{si} = Q_{di} \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Từ hệ phương trình này ta suy ra hệ phương trình xác định giá cân bằng:

[illegible]

Đặt $c_{ik} = a_{ik} - b_{ik}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ và $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + \dots + c_{1n}p_n = -c_{10} \\ c_{21}p_1 + c_{22}p_2 + \dots + c_{2n}p_n = -c_{20} \\ \dots \\ c_{n1}p_1 + c_{n2}p_2 + \dots + c_{nn}p_n = -c_{n0} \end{cases} \quad (4.1)$$

Giải hệ phương trình tuyến tính (4.1) ta xác định được giá cân bằng của tất cả n hàng hoá, sau đó thay vào hàm cung (hoặc hàm cầu) ta xác định được lượng cân bằng.

Ví dụ 1: Giả sử thị trường gồm 2 mặt hàng: hàng hoá 1 và hàng hoá 2, với hàm cung và hàm cầu như sau:

Hàng hoá 1: $Q_{s1} = -2 + 3p_1$; $Q_{d1} = 10 - 2p_1 + p_2$.

Hàng hoá 2: $Q_{s2} = -1 + 2p_2$; $Q_{d2} = 15 + p_1 - p_2$.

Hệ phương trình xác định giá cân bằng:

$$\begin{cases} -2 + 3p_1 = 10 - 2p_1 + p_2 \\ -1 + 2p_2 = 15 + p_1 - p_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5p_1 - p_2 = 12 \\ -p_1 + 3p_2 = 16 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được giá cân bằng của mỗi mặt hàng:

Hàng hoá 1: $\bar{p}_1 = \frac{26}{7}$; Hàng hoá 2: $\bar{p}_2 = \frac{46}{7}$

Thay giá cân bằng vào các biểu thức hàm cung ta xác định được lượng cân bằng:

Hàng hoá 1: $\bar{Q}_1 = -2 + 3\bar{p}_1 = \frac{64}{7}$;

Hàng hoá 2: $\bar{Q}_2 = -1 + 2\bar{p}_2 = \frac{85}{7}$.

Ví dụ 2: Giả sử thị trường gồm 3 mặt hàng: hàng hoá 1, hàng hoá 2 và hàng hoá 3, với hàm cung và hàm cầu như sau:

Hàng hoá 1: $Q_{s1} = -10 + 2p_1$, $Q_{d1} = 100 - 5p_1 + 3p_2 - p_3$;

Hàng hoá 2: $Q_{s2} = -20 + 5p_2$, $Q_{d2} = 120 + 2p_1 - 8p_2 - 2p_3$;

Hàng hoá 3: $Q_{s3} = 13p_3$, $Q_{d3} = 300 - 10p_1 - 5p_2 - p_3$.

Hãy xác định giá cân bằng và lượng cân bằng của mỗi mặt hàng.

Giải: Giá cân bằng được xác định từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} -10 + 2p_1 = 100 - 5p_1 + 3p_2 - p_3 \\ -20 + 5p_2 = 120 + 2p_1 - 8p_2 - 2p_3 \\ 13p_3 = 300 - 10p_1 - 5p_2 - p_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7p_1 - 3p_2 + p_3 = 110 \\ 2p_1 - 13p_2 - 2p_3 = -140 \\ 10p_1 + 5p_2 + 14p_3 = 300 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được giá cân bằng của mỗi mặt hàng như sau:

Hàng hoá 1: $\bar{p}_1 = \frac{495}{23}$;

Hàng hoá 2: $\bar{p}_2 = \frac{320}{23}$;

Hàng hoá 3: $\bar{p}_3 = \frac{25}{23}$.

Thay vào các biểu thức hàm cung ta tính được lượng cân bằng của mỗi mặt hàng:

Hàng hoá 1: $\bar{Q}_1 = -10 + 2\bar{p}_1 = -10 + 2 \cdot \frac{495}{23} = \frac{760}{23}$;

Hàng hoá 2: $\bar{Q}_2 = -20 + 5\bar{p}_2 = -20 + 5 \cdot \frac{320}{23} = \frac{1140}{23}$;

Hàng hoá 3: $\bar{Q}_3 = 13\bar{p}_3 = 13 \cdot \frac{25}{23} = \frac{325}{23}$.

II. MÔ HÌNH CÂN BẰNG KINH TẾ VĨ MÔ

Ở dạng đơn giản, ta xét mô hình cân bằng đối với một nền kinh tế đóng (không có quan hệ kinh tế với nước ngoài).

Gọi Y là tổng thu nhập quốc dân (Income) và E là tổng chi tiêu kế hoạch (Planned Expenditure) của nền kinh tế, trạng thái cân bằng được biểu diễn dưới dạng phương trình:

$$Y = E.$$

Trong một nền kinh tế đóng, tổng chi tiêu kế hoạch của toàn bộ nền kinh tế gồm các thành phần sau:

C : Tiêu dùng (Consumption) của các hộ gia đình;

G : Chi tiêu của chính phủ (Government);

I : Chi tiêu cho đầu tư của các nhà sản xuất (Investment).

Phương trình cân bằng trong trường hợp nền kinh tế đóng là:

$$Y = C + G + I.$$

Ta giả sử rằng đầu tư theo kế hoạch là cố định: $I = I_0$ và chính sách tài khoá của chính phủ cố định: $G = G_0$, còn tiêu dùng của các hộ gia đình phụ thuộc vào thu nhập dưới dạng hàm bậc nhất (gọi là hàm tiêu dùng):

$$C = aY + b \quad (0 < a < 1, b > 0).$$

Hệ số a biểu diễn lượng tiêu dùng gia tăng khi người ta có thêm \$1 thu nhập, được gọi là *xu hướng tiêu dùng cận biên* (marginal propensity to consume), còn b là mức tiêu dùng tối thiểu, tức là mức tiêu dùng khi không có thu nhập.

Mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô trong trường hợp này quy về hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = aY + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y - C = I_0 + G_0 \\ -aY + C = b \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta xác định được mức thu nhập cân bằng và mức tiêu dùng cân bằng của nền kinh tế:

$$\bar{Y} = \frac{b + I_0 + G_0}{1 - a}; \quad \bar{C} = \frac{b + a(I_0 + G_0)}{1 - a}.$$

Trên đây là mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô dạng đơn giản. Độ phức tạp của mô hình sẽ tăng lên nếu ta tính đến các yếu tố khác, chẳng hạn như thuế, xuất nhập khẩu v.v... Nếu tính thuế thu nhập thì hàm tiêu dùng sẽ thay đổi như sau:

$$C = aY_d + b,$$

trong đó Y_d là thu nhập sau thuế, hay còn gọi là thu nhập khả dụng (disposable income):

$$Y_d = Y - T \text{ (T là thuế thu nhập).}$$

Gọi tỷ lệ thuế thu nhập là t (biểu diễn ở dạng thập phân), ta có:

$$Y_d = Y - tY = (1-t)Y, \quad C = a(1-t)Y + b.$$

Mức thu nhập quốc dân và tiêu dùng cân bằng là:

$$\bar{Y} = \frac{b + I_0 + G_0}{1 - a(1-t)}; \quad \bar{C} = \frac{b + a(1-t)(I_0 + G_0)}{1 - a(1-t)}.$$

Ví dụ: Nếu $C = 200 + 0,75Y$; $I_0 = 300$; $G_0 = 400$ (tính bằng triệu USD) thì ta tính được mức thu nhập cân bằng và mức tiêu dùng cân bằng là:

$$\bar{Y} = \frac{200 + 300 + 400}{1 - 0,75} = 3600 \text{ (triệu USD);}$$

$$\bar{C} = \frac{200 + 0,75(300 + 400)}{1 - 0,75} = 2900 \text{ (triệu USD).}$$

Nếu nhà nước thu thuế thu nhập ở mức 20% thì $t = 0,2$. Khi đó mức cân bằng như sau:

$$\bar{Y} = \frac{200 + 300 + 400}{1 - 0,75(1 - 0,2)} = 2250 \text{ (triệu USD);}$$

$$\bar{C} = \frac{200 + 0,75(1 - 0,2)(300 + 400)}{1 - 0,75(1 - 0,2)} = 1550 \text{ (triệu USD).}$$

III. MÔ HÌNH IS-LM

Trong kinh tế học vĩ mô, người ta sử dụng mô hình IS-LM để phân tích trạng thái cân bằng của nền kinh tế trong cả hai thị trường: thị trường hàng hoá và thị trường tiền tệ.

Trên đây ta đã xét mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô (nền kinh tế đóng):

$$Y = C + I + G,$$

$$C = aY + b, I = I_0, G = G_0.$$

Với sự có mặt của thị trường tiền tệ, một biến số có ý nghĩa quan trọng được xem xét là lãi suất, ký hiệu là r . Trong mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô trên đây ta giả thiết rằng tổng đầu tư không đổi: $I = I_0$. Để xét ảnh hưởng qua lại giữa thị trường hàng hoá và thị trường tiền tệ ta giả sử rằng tổng đầu tư I phụ thuộc vào lãi suất r theo quy luật: lãi suất càng cao thì đầu tư càng giảm. Hàm số biểu diễn quan hệ đó được gọi là *hàm đầu tư*. Hàm đầu tư tuyến tính có dạng:

$$I = c - dr \quad (c, d \text{ là các hằng số dương}).$$

Phương trình biểu diễn điều kiện cân bằng của thị trường hàng hoá là:

$$\begin{aligned} Y &= (aY + b) + (c - dr) + G_0. \\ \Leftrightarrow dr &= b + c + G_0 - (1 - a)Y \end{aligned} \quad (4.2)$$

Phương trình (4.2) biểu diễn quan hệ giữa lãi suất và thu nhập khi thị trường hàng hoá cân bằng (tổng cung bằng tổng cầu) được gọi là *phương trình IS*. Từ (4.2) ta thấy rằng thu nhập Y càng tăng thì lãi suất r càng giảm. Nếu biểu diễn quan hệ (4.2) trên mặt phẳng với trục hoành là thu nhập và trục tung là lãi suất thì ta được một đường thẳng dốc xuống. Đường thẳng đó được gọi là *đường IS*.

Trong thị trường tiền tệ người ta cho rằng lượng cầu tiền, ký hiệu là L , có quan hệ cùng chiều với thu nhập và quan hệ ngược

chiều với lãi suất, tức là khi thu nhập tăng người ta dùng nhiều tiền mặt hơn và khi lãi suất tăng người ta dùng tiền mặt ít đi. Nếu biểu diễn bằng hàm tuyến tính thì hàm cầu tiền có dạng:

$$L = \alpha Y - \beta r,$$

trong đó L là lượng cầu tiền mặt, α và β là các hằng số dương.

Giả sử lượng cung tiền, ký hiệu là M , được cố định ở mức M_0 . Điều kiện cân bằng của thị trường tiền tệ ($M = L$) được biểu diễn dưới dạng phương trình:

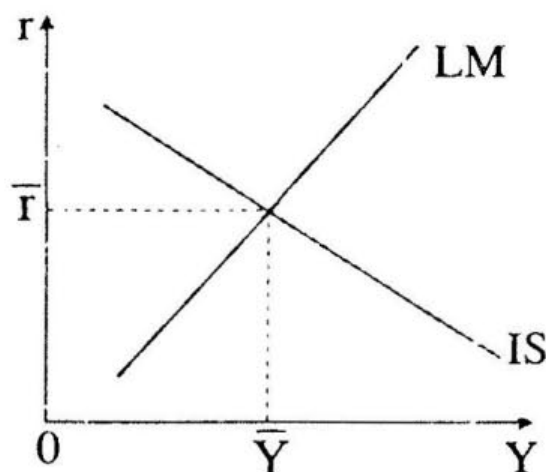
$$M_0 = \alpha Y - \beta r \Leftrightarrow \beta r = \alpha Y - M_0. \quad (4.3)$$

Phương trình (4.3) biểu diễn điều kiện cân bằng của thị trường tiền tệ được gọi là *phương trình LM* và đường biểu diễn quan hệ đó trên mặt phẳng tọa độ được gọi là *đường LM*. Từ phương trình (4.3) suy ra rằng khi thu nhập Y tăng thì lãi suất tăng, do đó đường LM là đường dốc lên.

Mô hình IS-LM quy về hệ hai phương trình (4.2) và (4.3) (phương trình IS và phương trình LM). Từ hệ phương trình đó ta xác định được mức thu nhập và lãi suất đảm bảo cân bằng trong cả thị trường hàng hoá và thị trường tiền tệ:

$$\bar{Y} = \frac{\beta(b + c + G_0) + dM_0}{\alpha d + \beta(1 - a)}, \quad \bar{r} = \frac{\alpha(b + c + G_0) - (1 - a)M_0}{\alpha d + \beta(1 - a)}.$$

Điểm cân bằng $(\bar{Y}, \bar{r})$ là giao điểm của đường IS và đường LM.



Chương 4: Hệ phương trình tuyến tính

Trên đây chúng tôi đề cập đến mô hình IS-LM dạng đơn giản để bạn đọc bước đầu làm quen với việc sử dụng toán học trong phân tích kinh tế. Trong kinh tế học vĩ mô, mô hình IS-LM được đề cập ở các cấp độ khác nhau, tùy theo các yếu tố và các quan hệ được tính đến trong mô hình. Chẳng hạn, đối với nền kinh tế mở, phương trình cân bằng của thị trường hàng hoá (cân bằng thu nhập quốc dân) được xét dưới dạng:

$$Y = C + I + G + X,$$

trong đó X là xuất khẩu ròng (xuất khẩu – nhập khẩu). Nếu tính đến thuế thu nhập thì hàm tiêu dùng được thay bằng:

$$C = aY_d + b, Y_d = Y - T \text{ (} T \text{ là tổng thuế thu nhập).}$$

Ngoài ra, các thành tố G, X có thể được xét có tính đến quan hệ với thu nhập và một số yếu tố khác.

Ví dụ : Cho biết các thông tin sau đây về một nền kinh tế đóng, với lãi suất r tính bằng %, tỷ lệ thuế thu nhập t viết dưới dạng thập phân, các biến còn lại tính bằng triệu USD:

$$C = 0,8Y_d + 50, Y_d = (1 - t)Y;$$

$$I = 20 - 5r;$$

$$t = 0,15 \text{ (tỷ lệ thuế thu nhập), } G = 200;$$

$$L = 0,5Y - 2r, M = 400.$$

a) Hãy lập phương trình IS và phương trình LM.

b) Xác định mức thu nhập cân bằng và lãi suất cân bằng.

Giải: Đây là một ví dụ về nền kinh tế đóng, có tính đến thuế thu nhập $T = tY$.

a) Phương trình IS:

$$Y = C + I + G$$

$$\Leftrightarrow Y = 0,8(1 - 0,15)Y + 50 + 20 - 5r + 200$$

$$\Leftrightarrow 0,32Y + 5r = 270.$$

Phương trình LM: $M = L \Leftrightarrow 0,5Y - 2r = 400$

b) Thu nhập cân bằng và lãi suất cân bằng được xác định từ hệ phương trình (kết hợp phương trình IS và phương trình LM):

$$\begin{cases} 0,32Y + 5r = 270 \\ 0,5Y - 2r = 400 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta tìm được:

Thu nhập cân bằng: $\bar{Y} = 808,92$ (triệu USD),

Lãi suất cân bằng: $\bar{r} = 2,23 \%$.

IV. MÔ HÌNH INPUT-OUTPUT CỦA LEONTIEF

Mô hình Input-Output của giáo sư Leontief (còn được gọi là *mô hình I/O*, hay *mô hình cân đối liên ngành*) đề cập đến việc xác định tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành sản xuất trong tổng thể nền kinh tế. Trong khuôn khổ của mô hình, khái niệm ngành được xem xét theo nghĩa thuần túy sản xuất. Các giả thiết được đặt ra như sau:

1. Mỗi ngành sản xuất một loại sản phẩm hàng hoá thuần nhất hoặc sản xuất một bộ hàng hoá theo một tỷ lệ nhất định. Trong trường hợp thứ hai ta coi mỗi tổ hợp hàng hoá theo tỷ lệ cố định đó là *một mặt hàng*.

2. Các sản phẩm đầu vào của sản xuất trong phạm vi một ngành được sử dụng theo một tỷ lệ cố định.

Trong một nền kinh tế hiện đại, việc sản xuất một loại sản phẩm hàng hoá đòi hỏi phải sử dụng các loại sản phẩm khác nhau trong cơ cấu các yếu tố đầu vào của sản xuất. Chẳng hạn, việc sản xuất thép đòi hỏi phải sử dụng quặng sắt, điện, than, ... Do đó, tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành bao gồm:

- *Cầu trung gian* từ phía các nhà sản xuất sử dụng loại sản phẩm đó cho quá trình sản xuất;

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - a_{11})x_1 - & a_{12}x_2 - \cdots - & a_{1n}x_n = b_1 \\ & -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - & a_{2n}x_n = b_2 \\ & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ & -a_{n1}x_1 - & a_{n2}x_2 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n = b_n \end{cases} \quad (4.5)$$

Hệ phương trình (4.5) có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$(E - A)X = B, \quad (4.6)$$

trong đó E là ma trận đơn vị cấp n và

[illegible]

Ma trận A được gọi là *ma trận hệ số kỹ thuật*, hay *ma trận hệ số chi phí đầu vào*; ma trận X là *ma trận tổng cầu*, còn B là *ma trận cầu cuối*. Chúng ta hãy chú ý đến ý nghĩa của các phần tử của ma trận A. Trong công thức (4.4), x_{ik} là cầu trung gian từ phía ngành k đối với hàng hoá của ngành i, còn x_k là tổng cầu đối với hàng hoá của ngành k. Với giả thiết mỗi ngành sản xuất một lượng sản phẩm đúng bằng tổng cầu thì x_k là tổng giá trị sản phẩm của ngành k. Như vậy, phần tử a_{ik} thuộc dòng i và cột k của ma trận hệ số kỹ thuật A là tỷ phần chi phí mà ngành k trả cho việc mua sản phẩm của ngành i, tính bình quân cho 1 đơn vị giá trị hàng hoá của ngành k (chi phí cho một yếu tố đầu vào của sản xuất). Chẳng hạn, $a_{ik} = 0,2$ có nghĩa là để sản xuất ra \$1 giá trị hàng hoá của mình (tính bình quân), ngành k phải sử dụng \$ 0,2 hàng hoá của ngành i. Theo giả thiết 2 nói ở trên thì các phần tử a_{ik} là không đổi. Ta gọi a_{ik} là *hệ số chi phí trực tiếp* hay *hệ số kỹ thuật*. Theo ý nghĩa nêu trên thì $0 \leq a_{ik} < 1$. Chú ý rằng trong ma trận A, các phần tử của dòng i là hệ số giá trị hàng hoá của ngành i bán cho mỗi ngành của nền kinh tế để làm

hàng hoá trung gian (kể cả chính ngành i), còn cột k là cột hệ số giá trị hàng hoá mà ngành k mua của mỗi ngành để sử dụng cho việc sản xuất hàng hoá của mình (kể cả của chính ngành k). Tổng tất cả các phần tử của cột k là tỷ phần chi phí mà ngành k phải trả cho việc mua các hàng hoá trung gian tính trên \$1 giá trị hàng hoá của mình, do đó:

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} = a_{1k} + a_{2k} + \dots + a_{nk} < 1,$$

$$\forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Phương trình (4.6) cho phép ta xác định tổng cầu đối với sản phẩm của tất cả các ngành sản xuất, điều này có ý nghĩa quan trọng đối với việc lập kế hoạch sản xuất, đảm bảo cho nền kinh tế vận hành trôi chảy, tránh tình trạng dư thừa hoặc thiếu hụt hàng hoá. Ma trận tổng cầu được xác định theo công thức:

$$X = (E - A)^{-1} B.$$

Ma trận $E - A$ được gọi là *ma trận Leontief*. Ma trận nghịch đảo của ma trận $E - A$ có thể tính xấp xỉ theo công thức:

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots + A^n.$$

Ví dụ 1: Quan hệ trao đổi sản phẩm giữa 3 ngành sản xuất và cầu hàng hoá được cho ở bảng sau (đơn vị tính: triệu USD):

Ngành cung ứng sản phẩm (Output)	Ngành sử dụng sản phẩm (Inputs)			Cầu cuối
	1	2	3	
1	20	60	10	50
2	50	10	80	10
3	40	30	20	40

Trong bảng số liệu trên, mỗi dòng đứng tên một ngành sản xuất (Output); mỗi cột ở giữa đứng tên một ngành sử dụng sản phẩm (Inputs). Hãy tính tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành và lập ma trận hệ số kỹ thuật.

Giải: Theo bảng số liệu trên ta có:

$$x_{11} = 20, x_{12} = 60, x_{13} = 10; b_1 = 50.$$

$$x_{21} = 50, x_{22} = 10, x_{23} = 80; b_2 = 10.$$

$$x_{31} = 40, x_{32} = 30, x_{33} = 20; b_3 = 40.$$

Tổng cầu:

Đối với sản phẩm của ngành 1: $x_1 = 20 + 60 + 10 + 50 = 140$;

Đối với sản phẩm của ngành 2: $x_2 = 50 + 10 + 80 + 10 = 150$;

Đối với sản phẩm của ngành 3: $x_3 = 40 + 30 + 20 + 40 = 130$.

Ma trận hệ số kỹ thuật:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{20}{140} & \frac{60}{150} & \frac{10}{130} \\ \frac{50}{140} & \frac{10}{150} & \frac{80}{130} \\ \frac{40}{140} & \frac{30}{150} & \frac{20}{130} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,143 & 0,400 & 0,077 \\ 0,375 & 0,067 & 0,615 \\ 0,286 & 0,200 & 0,154 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2:

Giả sử trong một nền kinh tế có 3 ngành sản xuất: ngành 1, ngành 2 và ngành 3. Cho biết ma trận hệ số kỹ thuật:

$$A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

- a) Giải thích ý nghĩa của con số 0,4 trong ma trận A.
- b) Cho biết tỷ phần giá trị gia tăng (giá trị của hoạt động sản xuất) của ngành 3 trong tổng giá trị sản phẩm của ngành đó.
- c) Cho biết lượng cầu cuối đối với hàng hoá của các ngành 1, 2, 3 lần lượt là: 10; 5; 6 triệu USD. Hãy xác định mức tổng cầu đối với mỗi ngành.

Giải:

a) Số 0,4 ở dòng thứ 2 và cột thứ nhất của ma trận hệ số kỹ thuật có nghĩa là: để sản xuất \$1 hàng hoá của mình, ngành 1 cần sử dụng \$ 0,4 hàng hoá của ngành 2.

b) Tỷ phần chi phí cho các sản phẩm đầu vào tính trên \$1 giá trị sản phẩm của ngành 3 bằng tổng các phần tử ở cột thứ 3 của ma trận hệ số chi phí:

$$0,2 + 0,2 + 0,2 = 0,6.$$

Vậy tỷ phần giá trị gia tăng trong tổng giá trị hàng hoá của ngành 3 là: $1 - 0,6 = 0,4$, hay 40%.

c) Ta có

$$\begin{aligned} E - A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,8 & -0,3 & -0,2 \\ -0,4 & 0,9 & -0,2 \\ -0,1 & -0,3 & 0,8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Theo phương pháp tìm ma trận nghịch đảo đã biết ta tìm được:

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,384} \begin{bmatrix} 0,66 & 0,30 & 0,24 \\ 0,34 & 0,62 & 0,24 \\ 0,21 & 0,27 & 0,60 \end{bmatrix}.$$

Ma trận tổng cầu là:

$$X = (E - A)^{-1}B = \frac{1}{0,384} \begin{bmatrix} 0,66 & 0,30 & 0,24 \\ 0,34 & 0,62 & 0,24 \\ 0,21 & 0,27 & 0,60 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24,84 \\ 20,68 \\ 18,36 \end{bmatrix}.$$

Như vậy, tổng cầu đối với hàng hoá của ngành 1 là 24,84; đối với hàng hoá của ngành 2 là 20,68; đối với hàng hoá của ngành 3 là 18,36 (triệu USD).

BÀI TẬP

16. Hãy xác định giá và lượng cân bằng của thị trường hai hàng hoá, cho biết hàm cung và hàm cầu của mỗi mặt hàng như sau:

a) Hàng hoá 1: $Q_{s1} = -2 + 4p_1$, $Q_{d1} = 18 - 3p_1 + p_2$;

Hàng hoá 2: $Q_{s2} = -2 + 3p_2$, $Q_{d2} = 12 + p_1 - 2p_2$.

b) Hàng hoá 1: $Q_{s1} = -1 + 2p_1$, $Q_{d1} = 20 - p_1 + p_2$;

Hàng hoá 2: $Q_{s2} = -10 + 2p_2$, $Q_{d2} = 40 + p_1 - 2p_2$.

17. Hãy xác định giá và lượng cân bằng của thị trường ba hàng hoá, cho biết hàm cung và hàm cầu của mỗi mặt hàng như sau:

Hàng hoá 1: $Q_{s1} = 3p_1$, $Q_{d1} = 120 - p_1 + p_2 + 2p_3$;

Hàng hoá 2: $Q_{s2} = -10 + 2p_2$, $Q_{d2} = 150 + p_1 - 2p_2 + p_3$;

Hàng hoá 3: $Q_{s3} = -20 + 5p_3$, $Q_{d3} = 250 + 2p_1 + 2p_2 - 3p_3$.

18. Xét mô hình kinh tế vĩ mô trong trường hợp nền kinh tế đóng. Cho biết:

$$C = 60 + 0,7Y_d; \quad Y_d = (1 - t)Y;$$

$$I = 90, \quad G = 140 \text{ (triệu USD)}.$$

Hãy xác định mức thu nhập quốc dân và mức tiêu dùng cân bằng khi nhà nước không thu thuế thu nhập ($t = 0$) và khi nhà nước thu thuế thu nhập theo tỷ lệ 40% ($t = 0,4$).

19. Cho biết các thông tin sau đây về một nền kinh tế đóng, với lãi suất r tính bằng % và các biến còn lại tính bằng triệu USD:

$$C = 0,8Y_d + 15,$$

$$Y_d = Y - T \text{ (T là thuế), } T = 0,25Y - 25;$$

$$I = 65 - r, G = 94;$$

$$L = 5Y - 50r, M_0 = 1500.$$

Hãy xác định mức thu nhập cân bằng và lãi suất cân bằng.

20. Giả sử một nền kinh tế có 4 ngành. Quan hệ sản phẩm giữa các ngành và cầu cuối đối với sản phẩm của mỗi ngành như sau:

Ngành cung cấp sản phẩm (Output)	Ngành sử dụng sản phẩm (Input)				Cầu cuối
	1	2	3	4	
1	80	20	110	230	160
2	200	50	90	120	140
3	220	110	30	40	0
4	60	140	160	240	400

Hãy tính tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành và lập ma trận hệ số kỹ thuật (tính xấp xỉ đến 3 chữ số thập phân).

21. Mỗi ngành trong nền kinh tế xác định tổng sản phẩm của mình căn cứ vào mức tổng cầu. Cho biết ma trận hệ số kỹ thuật A và ma trận cầu cuối B:

$$A = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,25 & 0,34 \\ 0,33 & 0,10 & 0,12 \\ 0,19 & 0,38 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1800 \\ 200 \\ 900 \end{bmatrix}.$$

- Giải thích ý nghĩa kinh tế của phần tử 0, phần tử 0,25 của ma trận A và phần tử 900 của ma trận B.
- Tính tổng các phần tử của cột thứ hai của A và giải thích ý nghĩa kinh tế.
- Tính tổng các phần tử của dòng thứ nhất của A và giải thích ý nghĩa kinh tế.
- Xác định tổng cầu đối với sản phẩm của mỗi ngành.
- Tính giá trị gia tăng của mỗi ngành.

22. Cho biết ma trận hệ số kỹ thuật A và ma trận cầu cuối B. Hãy xác định tổng cầu đối với sản phẩm và tổng chi phí trực tiếp (chi phí mua các sản phẩm đầu vào) của mỗi ngành, khi tổng sản phẩm của mỗi ngành đúng bằng tổng cầu:

$$a) A = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 210 \end{bmatrix}.$$

$$b) A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,2 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 140 \\ 220 \\ 180 \end{bmatrix}.$$

Chương 5

DẠNG TOÀN PHƯƠNG

§1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

I. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

Định nghĩa: Dạng toàn phương của n biến số $x_1, x_2, \dots, x_n$ là biểu thức dạng:

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (1.1)$$

trong đó các hệ số a_{ij} là các hằng số cho trước.

Nếu viết chi tiết (không dùng ký hiệu tổng) thì dạng toàn phương (1.1) có dạng:

$$\begin{aligned} f = & a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{1n} x_1 x_n + a_{21} x_2 x_1 + a_{22} x_2^2 + \dots \\ & + a_{2n} x_2 x_n + \dots + a_{n1} x_n x_1 + a_{n2} x_n x_2 + \dots + a_{nn} x_n^2. \end{aligned}$$

Khi cho một dạng toàn phương cụ thể ta thường gộp cặp số hạng đồng dạng $a_{ij} x_i x_j$ và $a_{ji} x_j x_i$ thành một số hạng $(a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j$. Chẳng hạn, dạng toàn phương của hai biến số x, y được viết gọn như sau:

$$f = ax^2 + bxy + cy^2. \quad (1.2)$$

Tuy nhiên, để có thể sử dụng phương pháp ma trận và định thức ta phải tách riêng các hệ số để viết dạng toàn phương dưới dạng (1.1). Việc tách riêng hệ số được thực hiện theo *quy tắc san bằng*, tức là ta luôn luôn xem $a_{ij} = a_{ji}$. Chẳng hạn, dạng toàn phương (1.2) viết theo cách viết tổng quát là:

$$f = ax^2 + \frac{b}{2} xy + \frac{b}{2} yx + cy^2.$$

II. LIÊN HỆ VỚI MA TRẬN

a. Ma trận của dạng toàn phương

Dạng toàn phương (1.1) cho tương ứng một ma trận vuông:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

với các phần tử a_{ij} là các hệ số của $x_i x_j$. Ta gọi ma trận A là *ma trận của dạng toàn phương (1.1)*. Chú ý rằng ma trận A của dạng toàn phương (1.1) có tính chất sau:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (\forall i, j = 1, 2, \dots, n) \Leftrightarrow A = A'. \quad (1.3)$$

(A' là ma trận chuyển vị của A)

Ma trận vuông A thoả mãn tính chất (1.3) được gọi là *ma trận đối xứng*.

Như vậy, mỗi dạng toàn phương n biến số cho tương ứng một ma trận vuông đối xứng cấp n và ngược lại, mỗi ma trận vuông đối xứng cấp n cho tương ứng một dạng toàn phương n biến số.

b. Biểu diễn dạng toàn phương qua ma trận

Dạng toàn phương (1.1) có thể viết dưới dạng ma trận như sau:

$$f = X'AX, \quad (1.4)$$

trong đó X là cột biến số và X' là ma trận chuyển vị của X :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad X' = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n].$$

Chú ý rằng vế phải của (1.4) là một ma trận vuông cấp 1. Ở đây ta đồng nhất ma trận vuông cấp 1 với phần tử duy nhất của nó.

Ví dụ 1: Ma trận của dạng toàn phương (1.2) là:

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Dạng toàn phương (1.2) có thể viết như sau:

$$f = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2: Ma trận của dạng toàn phương

$$f = x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3 \quad (1.6)$$

là ma trận vuông:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -3 \\ \frac{5}{2} & -2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Dạng toàn phương (1.6) có thể viết như sau:

$$f = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & -3 \\ \frac{5}{2} & -2 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

c. Hạng của dạng toàn phương

Định nghĩa: Hạng của một dạng toàn phương là hạng của ma trận của dạng toàn phương đó.

Ví dụ 1: Hạng của dạng toàn phương (1.2) là hạng của ma trận (1.5). Với giả thiết ít nhất một trong ba hệ số a, b, c khác 0 thì hạng của dạng toàn phương đó bằng 2 khi $b^2 - 4ac \neq 0$, bằng 1 khi $b^2 - 4ac = 0$.

Ví dụ 2: Hạng của dạng toàn phương (1.6) là hạng của ma trận (1.7). Hạng của ma trận này bằng 3 (bạn hãy tự thực hiện việc tìm hạng để kiểm tra), do đó hạng của dạng toàn phương (1.6) bằng 3.

III. DẠNG TOÀN PHƯƠNG CHÍNH TẮC

Định nghĩa: *Dạng toàn phương chính tắc* là dạng toàn phương khuyết tất cả các tích chéo:

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_n y_n^2.$$

Ma trận của dạng toàn phương chính tắc là một ma trận đường chéo:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{bmatrix}.$$

Dễ dàng thấy rằng hạng của ma trận đường chéo bằng số phần tử khác 0 trên đường chéo chính, do đó *số các hệ số khác 0 của dạng toàn phương chính tắc bằng hạng của dạng toàn phương đó.*

BÀI TẬP

1. Hãy viết ma trận của các dạng toàn phương sau:

a) $f = 3x^2 - 6xy + 2y^2$

b) $f = x_1^2 + 5x_2^2 - x_3^2 + x_1x_2 - 7x_1x_3 + 8x_2x_3$

c) $f = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_3x_4$

2. Viết dạng toàn phương có ma trận như sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} & \text{b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\ \text{c)} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} & \text{d)} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

3. Tìm hạng của các dạng toàn phương sau:

a) $f = 4x^2 - 4xy + y^2$.

b) $f = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3$.

c) $f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3$
 $+ 4x_1x_4 - 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3x_4$.

§2. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH TRONG KHÔNG GIAN $\mathbb{R}^n$

I. KHÁI NIỆM BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

Định nghĩa 1: Một *phép biến đổi* của không gian $\mathbb{R}^n$ là một ánh xạ F đặt tương ứng mỗi vectơ X của không gian $\mathbb{R}^n$ với một và chỉ một vectơ Y của chính không gian đó:

$$X \xrightarrow{F} Y \quad (X \text{ và } Y \in \mathbb{R}^n)$$

Vectơ Y được gọi là *ảnh của vectơ X* qua phép biến đổi F và được ký hiệu là FX .

Sau đây ta xét một loại phép biến đổi trong không gian $\mathbb{R}^n$, gọi là phép biến đổi tuyến tính.

Định nghĩa 2: Phép biến đổi F được gọi là *phép biến đổi tuyến tính* nếu thoả mãn hai điều kiện:

- Ảnh của tổng hai vectơ bằng tổng các ảnh của chúng:

$$F(X_1 + X_2) = FX_1 + FX_2, \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}^n.$$

- Ảnh của tích của một vectơ với một số α bằng tích của ảnh của vectơ đó với số α :

$$F(\alpha X) = \alpha(FX), \text{ với mọi } X \in \mathbb{R}^n \text{ và với mọi số } \alpha.$$

Ví dụ: Với T là một ma trận vuông cấp n cho trước, nếu viết mỗi vectơ n chiều dưới dạng ma trận cột (ma trận cấp $n \times 1$) thì ánh xạ đặt tương ứng mỗi vectơ $X \in \mathbb{R}^n$ với vectơ $Y = TX$ là một phép biến đổi tuyến tính của không gian $\mathbb{R}^n$. Sự thoả mãn hai điều kiện nêu trong định nghĩa 2 là hiển nhiên theo tính chất của phép nhân ma trận.

Từ định nghĩa phép biến đổi tuyến tính suy ra một số tính chất cơ bản sau đây:

1. Mọi phép biến đổi tuyến tính F đều biến vectơ không thành vectơ không:

$$FO_n = O_n.$$

Thật vậy, lấy bất kỳ $X \in \mathbb{R}^n$, ta có:

$$FO_n = F(0X) = 0(FX) = O_n.$$

2. Mọi phép biến đổi tuyến tính F biến đổi mỗi tổ hợp tuyến tính bất kỳ của các vectơ $X_1, X_2, \dots, X_m$ thành một tổ hợp tuyến tính (với cùng các hệ số) của các vectơ ảnh $FX_1, FX_2, \dots, FX_m$:

$$F(k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_mX_m) = k_1(FX_1) + k_2(FX_2) + \dots + k_m(FX_m).$$

3. Mọi phép biến đổi tuyến tính F biến một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính của không gian $\mathbb{R}^n$ thành một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính.

Thật vậy, nếu $k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_mX_m = O_n$ với ít nhất một hệ số $k_j \neq 0$ thì

$$\begin{aligned} F(k_1X_1 + k_2X_2 + \dots + k_mX_m) &= FO_n \\ \Rightarrow k_1(FX_1) + k_2(FX_2) + \dots + k_m(FX_m) &= O_n. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ nếu hệ vectơ $X_1, X_2, \dots, X_m$ phụ thuộc tuyến tính thì hệ vectơ $FX_1, FX_2, \dots, FX_m$ cũng phụ thuộc tuyến tính.

4. Mọi phép biến đổi tuyến tính F biến vectơ đối của vectơ X bất kỳ thành vectơ đối của vectơ ảnh FX :

$$F(-X) = F[(-1)X] = (-1)(FX) = -FX.$$

II. LIÊN HỆ VỚI MA TRẬN

a. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính

Để biểu diễn mối liên hệ giữa phép biến đổi tuyến tính với ma trận, ta viết mỗi vectơ n chiều dưới dạng một ma trận cột (ma trận cấp $n \times 1$):

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Trong không gian $\mathbb{R}^n$ ta xét cơ sở đơn vị:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Với F là một phép biến đổi tuyến tính cho trước thì ảnh của mỗi vectơ đơn vị là một vectơ nhất định:

$$FE_1 = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ \vdots \\ t_{n1} \end{bmatrix}, FE_2 = \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{n2} \end{bmatrix}, \dots, FE_n = \begin{bmatrix} t_{1n} \\ t_{2n} \\ \vdots \\ t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Mỗi phép biến đổi tuyến tính F của không gian $\mathbb{R}^n$ cho tương ứng một ma trận vuông T với cột thứ k là vectơ FE_k :

$$T = [FE_1 \quad FE_2 \quad \dots \quad FE_n] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa: Ma trận vuông T , với các cột theo thứ tự là các vectơ ảnh của các vectơ đơn vị $E_1, E_2, \dots, E_n$ qua phép biến đổi tuyến tính F , được gọi là *ma trận của phép biến đổi tuyến tính F* . Hàng của ma trận của một phép biến đổi tuyến tính được gọi là *hàng của phép biến đổi tuyến tính đó*.

b. Liên hệ giữa phép biến đổi tuyến tính và ma trận

Mỗi vectơ $X \in \mathbb{R}^n$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

hay

$$X = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \dots + x_n E_n.$$

Cho F là một phép biến đổi tuyến tính bất kỳ của không gian $\mathbb{R}^n$. Phép biến đổi tuyến tính F biến vectơ X thành vectơ:

$$FX = x_1(FE_1) + x_2(FE_2) + \dots + x_n(FE_n)$$

$$\Leftrightarrow FX = [FE_1 \quad FE_2 \quad \dots \quad FE_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Hệ thức (2.1) cho thấy mọi phép biến đổi tuyến tính F của không gian $\mathbb{R}^n$ đều biểu diễn được dưới dạng:

$$FX = TX, \quad (2.2)$$

trong đó T là ma trận của phép biến đổi tuyến tính đó. Điều này có nghĩa là ảnh của mỗi vectơ X qua một phép biến đổi tuyến tính bằng tích của ma trận của phép biến đổi đó với ma trận cột biểu diễn vectơ X . Ngược lại, với T là một ma trận vuông cấp n bất kỳ, công thức (2.2) cho tương ứng một phép biến đổi tuyến tính F của không gian $\mathbb{R}^n$.

Như vậy, giữa tất cả các phép biến đổi tuyến tính của không gian $\mathbb{R}^n$ và tất cả các ma trận vuông cấp n có sự tương ứng 1-1. Điều này cho phép ta biểu diễn mỗi phép biến đổi tuyến tính của không gian $\mathbb{R}^n$ dưới dạng:

$$Y = TX,$$

trong đó T là ma trận của phép biến đổi tuyến tính đó và Y là ảnh của vectơ X .

c. Phép biến đổi tuyến tính không suy biến và phép biến đổi ngược

Định nghĩa: Một phép biến đổi tuyến tính F được gọi là *phép biến đổi tuyến tính không suy biến* nếu ma trận của nó không suy biến (có định thức khác 0). Nói cách khác, phép biến đổi tuyến tính không suy biến của không gian $\mathbb{R}^n$ là phép biến đổi tuyến tính có hạng bằng n .

Như đã nói ở trên, mỗi phép biến đổi tuyến tính của không gian $\mathbb{R}^n$ có thể biểu diễn dưới dạng:

$$Y = TX \quad (2.3)$$

với T là một ma trận vuông cấp n . *Phép biến đổi (2.3) biến mỗi vectơ X thành một vectơ Y (ảnh của nó) thông qua phép nhân ma trận.* Nếu T là ma trận không suy biến thì quan hệ của mỗi vectơ X với ảnh Y của nó qua phép biến đổi (2.3) có thể biểu diễn tương đương dưới dạng:

$$X = T^{-1}Y. \quad (2.4)$$

Hệ thức (2.4) là một phép biến đổi tuyến tính của không gian $\mathbb{R}^n$. Phép biến đổi này biến vectơ ảnh của mỗi vectơ X qua phép biến đổi (2.3) thành chính vectơ X .

Định nghĩa: Phép biến đổi tuyến tính (2.4) được gọi là *phép biến đổi ngược* của phép biến đổi tuyến tính (2.3).

Như vậy, mọi phép biến đổi tuyến tính không suy biến đều có phép biến đổi ngược. *Ma trận của phép biến đổi ngược của một phép biến đổi tuyến tính không suy biến F là ma trận nghịch đảo của ma trận của F .*

d. Tích của các phép biến đổi tuyến tính

Cho F và G là hai phép biến đổi bất kỳ. Gọi FG là phép biến đổi sau:

$$X \xrightarrow{FG} F(GX),$$

tức là

$$(FG)X = F(GX), \quad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

Phép biến đổi FG được gọi là *tích của hai phép biến đổi F và G .* Dễ dàng thấy rằng *tích của các phép biến đổi tuyến tính là một phép biến đổi tuyến tính.* Thật vậy, nếu F và G là các phép biến đổi tuyến tính thì với X, Y là hai vectơ n chiều bất kỳ và α là một số bất kỳ ta luôn có:

$$\begin{aligned} \bullet \quad (FG)(X + Y) &= F[G(X + Y)] = F(GX + GY) \\ &= F(GX) + F(GY) = (FG)X + (FG)Y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (FG)(\alpha X) &= F[G(\alpha X)] = F[\alpha(GX)] \\ &= \alpha[F(GX)] = \alpha[(FG)X]. \end{aligned}$$

Gọi T_1 và T_2 lần lượt là ma trận của các phép biến đổi tuyến tính F và G . Với mọi vectơ X ta có:

$$\begin{aligned} FX &= T_1 X, \quad GX = T_2 X; \\ (FG)X &= F(GX) = F(T_2 X) = T_1(T_2 X) = (T_1 T_2)X \quad (\forall X \in \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Như vậy, ma trận của tích hai phép biến đổi tuyến tính f và g bằng tích của các ma trận của chúng. Từ đây suy ra rằng tích của các phép biến đổi tuyến tính không suy biến là một phép biến đổi tuyến tính không suy biến.

III. BIẾN ĐỔI CƠ SỞ CỦA KHÔNG GIAN $\mathbb{R}^n$

Trong chương 2 chúng ta đã chỉ ra rằng nếu cho trước một cơ sở $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ của không gian $\mathbb{R}^n$ thì mỗi vectơ n chiều $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ có toạ độ của nó là một bộ n số thực có thứ tự duy nhất $X_p = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Bản thân vectơ X là toạ độ của nó trong cơ sở đơn vị $E_1, E_2, \dots, E_n$. Như vậy, việc biến đổi toạ độ của vectơ khi chuyển từ cơ sở đơn vị sang một cơ sở khác có thể xem như một phép biến đổi của không gian $\mathbb{R}^n$. Sau đây chúng ta sẽ xem xét việc biến đổi cơ sở và chỉ ra rằng phép biến đổi toạ độ khi đổi cơ sở là một phép biến đổi tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^n$.

a. Ma trận đổi cơ sở

Cho 2 cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$:

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \quad (2.5)$$

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_n. \quad (2.6)$$

Gọi $(u_{1k}, u_{2k}, \dots, u_{nk})$ là toạ độ của vectơ Q_k trong cơ sở (2.5) tức là:

$$Q_k = u_{1k}P_1 + u_{2k}P_2 + \dots + u_{nk}P_n \quad (2.7)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Lập ma trận vuông cấp n với cột thứ k là toạ độ của vector Q_k trong cơ sở (2.5):

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Định nghĩa: Ma trận U được gọi là *ma trận đổi cơ sở* từ cơ sở (2.5) sang cơ sở (2.6).

Mỗi cơ sở (2.5), (2.6) có thể viết dưới dạng một ma trận vuông cấp n , trong đó vector thứ k của cơ sở ($k = 1, 2, \dots, n$) được xếp thành cột thứ k :

$$\text{Cơ sở (2.5): } P = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n];$$

$$\text{Cơ sở (2.6): } Q = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_n].$$

Chú ý rằng cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$ là một hệ gồm n vector độc lập tuyến tính, do đó P và Q là các ma trận vuông không suy biến.

Từ các hệ thức (2.7) suy ra

$$[Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_n] = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n] \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & u_{n2} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Như vậy, ta có:

$$Q = PU \Leftrightarrow U = P^{-1}Q. \quad (2.8)$$

Tương tự, nếu gọi V là ma trận đổi cơ sở từ cơ sở (2.6) sang cơ sở (2.5) thì:

$$P = QV \Leftrightarrow V = Q^{-1}P. \quad (2.9)$$

Từ (2.8) và (2.9) suy ra:

$$U^{-1} = (P^{-1}Q)^{-1} = Q^{-1}(P^{-1})^{-1} = Q^{-1}P = V.$$

Điều này chứng tỏ các ma trận đổi cơ sở là các ma trận vuông không suy biến và ma trận đổi cơ sở từ (2.6) sang (2.5) là ma trận nghịch đảo của ma trận đổi cơ sở từ (2.5) sang (2.6):

$$V = U^{-1}.$$

Ví dụ: Cho hai cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$:

$$P_1 = (1, 2, 0), \quad P_2 = (1, -1, 2), \quad P_3 = (0, 1, 1); \quad (2.10)$$

$$Q_1 = (0, -1, 1), \quad Q_2 = (2, 1, 0), \quad Q_3 = (-1, 1, -2). \quad (2.11)$$

Ta có:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ma trận đổi cơ sở từ (2.10) sang (2.11) là ma trận:

$$\begin{aligned} U = P^{-1}Q &= -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 \\ -2 & -3 & 5 \\ -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{7}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{1}{5} & -\frac{6}{5} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ma trận đổi cơ sở từ (2.11) sang (2.10) là ma trận:

$$V = Q^{-1}P = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -7 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix} = U^{-1}.$$

b. Biến đổi tọa độ của vector

Cho X là một vector n chiều bất kỳ. Gọi $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ là tọa độ của X trong cơ sở (2.5) và $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ là tọa độ của nó trong cơ sở (2.6), ta có:

$$X = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n = \beta_1 Q_1 + \beta_2 Q_2 + \dots + \beta_n Q_n.$$

Hệ thức này có thể viết dưới dạng:

$$X = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_n] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}.$$

Nhân hai vế với Q^{-1} về bên trái và chú ý rằng $Q^{-1}P = U^{-1}$, ta được công thức biến đổi tọa độ của vector khi đổi từ cơ sở (2.5) sang cơ sở (2.6):

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Công thức (2.12) cho thấy *phép biến đổi tọa độ khi đổi từ cơ sở này sang cơ sở khác là một phép biến đổi tuyến tính.*

Ví dụ: Gọi X là vectơ 3 chiều có tọa độ trong cơ sở (2.10) là $(3, 4, -5)$. Viết tọa độ của vectơ X dưới dạng cột và áp dụng công thức (2.12) ta tìm được tọa độ của X trong cơ sở (2.11):

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = U^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 & -7 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Bạn đọc hãy tự xác định vectơ $X = 3P_1 + 4P_2 - 5P_3$ và tìm tọa độ của X trong cơ sở (2.7) bằng phương pháp trực tiếp để đối chiếu kết quả.

BÀI TẬP

4. Cho biết phép biến đổi tuyến tính F của không gian $\mathbb{R}^3$ biến các vectơ đơn vị thành các vectơ:

$$FE_1 = (1, 2, 3), FE_2 = (-2, 2, -1), FE_3 = (0, 1, -1).$$

- Hãy lập ma trận của phép biến đổi F .
- Tìm hạng của phép biến đổi F .
- Xác định vectơ ảnh của vectơ $X = (x_1, x_2, x_3)$.

5. Cho 2 cơ sở của không gian $\mathbb{R}^3$:

$$P_1 = (2, 1, -1), P_2 = (3, 5, 2), P_3 = (1, 2, 2) \quad (P)$$

$$Q_1 = (3, -2, 1), Q_2 = (1, 1, 2), Q_3 = (2, 1, 4) \quad (Q)$$

- Hãy lập ma trận đổi cơ sở từ (P) sang (Q)
- Lập công thức biến đổi tọa độ khi đổi cơ sở.
- Tìm tọa độ của vectơ X trong cơ sở (Q) , cho biết

$$X = 2P_1 + 5P_2 - P_3.$$

§3. BIẾN ĐỔI DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC

I. BIẾN ĐỔI DẠNG TOÀN PHƯƠNG BẰNG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

Cho dạng toàn phương:

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = X' A X. \quad (3.1)$$

Ta sẽ biến đổi dạng toàn phương (3.1) bằng phép biến đổi tuyến tính:

$$X = OY, \quad (3.2)$$

trong đó:

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Phép biến đổi tuyến tính (3.2) tương đương với phép đổi biến:

[illegible]

Thay (3.2) vào (3.1) ta được:

$$f = X'AX = (QY)'A(QY) = (Y'Q')A(QY) = Y'(Q'AC)Y.$$

Điều này có nghĩa là mọi phép biến đổi tuyến tính (3.2) biến một dạng toàn phương của các biến số $x_1, x_2, \dots, x_n$ thành một dạng toàn phương của các biến số $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$f = Y'BY. \quad (3.3)$$

Ma trận của dạng toàn phương (3.3) liên hệ với ma trận của dạng toàn phương (3.1) theo công thức:

$$B = Q'AQ. \quad (3.4)$$

Sử dụng định lý về hạng của tích các ma trận ta dễ dàng chứng minh định lý sau đây:

Định lý: Mọi phép biến đổi tuyến tính không suy biến đều không làm thay đổi hạng của dạng toàn phương.

Chứng minh:

Từ đẳng thức (3.4) suy ra $r(B) \leq r(A)$. Mặt khác, do Q là ma trận không suy biến nên ma trận chuyển vị Q' của nó cũng không suy biến. Cũng từ đẳng thức (3.4), ta có:

$$A = (Q')^{-1}BQ^{-1}.$$

Từ đây suy ra $r(A) \leq r(B)$. Hai bất đẳng thức nói trên chứng tỏ $r(A) = r(B)$, tức là hai dạng toàn phương (3.1) và (3.3) có hạng bằng nhau.

II. PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI DẠNG TOÀN PHƯƠNG VỀ DẠNG CHÍNH TẮC

Trước hết ta chứng minh định lý sau đây:

Định lý: Mọi dạng toàn phương đều có thể biến đổi được về dạng chính tắc bằng một phép biến đổi tuyến tính không suy biến.

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh định lý này bằng phương pháp quy nạp theo số biến số của dạng toàn phương.

Dạng toàn phương của một biến số x là dạng toàn phương chính tắc: $f = ax^2$. Giả sử mọi dạng toàn phương của $n - 1$ biến số đều đưa được về dạng chính tắc bằng một phép biến đổi tuyến tính không suy biến, ta sẽ chỉ ra rằng điều đó cũng sẽ đúng đối với mọi dạng toàn phương của n biến số.

Cho một dạng toàn phương bất kỳ của n biến số:

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (3.5)$$

Trước hết ta xét trường hợp dạng toàn phương (3.5) không khuyết tất cả các bình phương, tức là có ít nhất một hệ số a_{ii} khác 0. Để cho xác định ta giả sử $a_{11} \neq 0$. Đặt:

$$g = f - \frac{1}{a_{11}} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2.$$

Dễ dàng thấy rằng tất cả các số hạng chứa x_1 của dạng toàn phương (3.5) đều có mặt trong biểu thức sau dấu trừ, do đó g là một dạng toàn phương của $n - 1$ biến số $x_2, \dots, x_n$.

Ta có:

$$f = \frac{1}{a_{11}} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 + g(x_2, \dots, x_n).$$

Trước hết ta sử dụng phép biến đổi tuyến tính:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ y_2 = x_2, \dots, y_n = x_n. \end{cases} \quad (3.6)$$

Phép biến đổi ngược của phép biến đổi tuyến tính (3.6) là

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}} y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} y_2 - \dots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} y_n \\ x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n. \end{cases} \Leftrightarrow X = Q_1 Y, \quad (3.7)$$

với

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Dễ dàng thấy rằng

$$\det(Q_2) = \begin{vmatrix} q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

Vế phải của (3.11) chính là định thức của ma trận của phép biến đổi tuyến tính không suy biến (3.10), do đó $\det(Q_2) \neq 0$.

Như vậy, dạng toàn phương (3.5) được đưa về dạng chính tắc bằng phép biến đổi tuyến tính không suy biến sau:

$$X = (Q_1 Q_2) Z.$$

Bây giờ ta xét trường hợp dạng toàn phương (3.5) khuyết tất cả các bình phương, tức là:

$$a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0.$$

Trong trường hợp này ta có thể biến đổi làm xuất hiện bình phương của ít nhất một trong các biến số. Thật vậy, giả sử $a_{12} \neq 0$, ta biến đổi dạng toàn phương (3.5) như sau:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3, \\ \cdots \cdots \cdots \\ x_n = y_n. \end{cases} \Leftrightarrow X = Q_0 Y \quad (3.12)$$

Ma trận của phép biến đổi tuyến tính (3.12) là ma trận không suy biến:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (|Q_0| = 2).$$

Sau phép biến đổi (3.12) dạng toàn phương (3.5) trở thành:

$$f = 2a_{12}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + \dots = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + \dots \quad (3.13)$$

Dạng toàn phương (3.13) có hệ số của y_1^2 là một số khác 0, do đó ta có thể biến đổi về dạng chính tắc bằng phép biến đổi tuyến tính không suy biến $Y = PZ$. Như vậy, trong trường hợp này dạng toàn phương (3.5) có thể đưa được về dạng chính tắc bằng phép biến đổi tuyến tính không suy biến $X = (Q_0P)Z$.

Phép chứng minh bằng quy nạp trên đây đồng thời chỉ ra thủ tục lặp để biến đổi dạng toàn phương về dạng chính tắc. Chú ý rằng để biến đổi một dạng toàn phương về dạng chính tắc ta phải thực hiện một dãy kế tiếp các phép biến đổi tuyến tính không suy biến. Phép biến đổi tuyến tính đưa về dạng chính tắc là tích của các phép biến đổi tuyến tính đó. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính đưa về dạng chính tắc là ma trận tích $Q = Q_1 \dots Q_m$, trong đó $Q_1, \dots, Q_m$ là ma trận của các phép biến đổi tuyến tính được thực hiện kế tiếp trong cả quá trình biến đổi.

Khi thực hành bạn cần chú ý đến việc lựa chọn phép biến đổi (3.6). Với giả thiết $a_{11} \neq 0$, ta đặt y_1 bằng biểu thức bậc nhất của các biến số $x_1, x_2, \dots, x_n$, với các hệ số là các phân tử thuộc dòng thứ nhất của ma trận của dạng toàn phương, $y_k = x_k$ với $k \neq 1$. Nói chung, nếu $a_{ii} \neq 0$ thì ta đặt y_i bằng biểu thức bậc nhất của các biến số $x_1, x_2, \dots, x_n$, với các hệ số là các phân tử thuộc dòng thứ i của ma trận của dạng toàn phương, $y_k = x_k$ với $k \neq i$:

$$y_1 = x_1, \dots, y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n, \dots, y_n = x_n.$$

Sau phép biến đổi ngược của phép biến đổi này, trên dòng thứ i và cột thứ i của ma trận của dạng toàn phương theo các biến mới chỉ còn lại một phần tử duy nhất khác 0 là $b_{ii} = 1/a_{ii}$. Điều này có nghĩa là nếu xoá đi dòng i và cột i ta được ma trận của dạng toàn phương của các biến còn lại. Hãy chọn một dòng k với $b_{kk} \neq 0$ ($k \neq i$) và tiếp tục quá trình biến đổi theo cách thức tương tự.

Ví dụ 1: Biến đổi dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

$$f = 2x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3. \quad (3.14)$$

Giải: Dạng toàn phương (3.14) có thể viết dưới dạng $f = X'AX$, với:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Do $a_{11} = 2 \neq 0$, theo dòng thứ nhất của A ta đặt:

$$y_1 = 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3.$$

Đảo ngược lại ta được phép biến đổi:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{4}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow X = Q_1 Y, \quad (3.15)$$

với:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Sau phép biến đổi (3.15) ta được $f = Y'BY$, với:

$$B = Q_1' A Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} & \frac{13}{4} \\ 0 & \frac{13}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

tức là:

$$f = \frac{1}{2}y_1^2 - \frac{1}{8}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2 + \frac{13}{2}y_2y_3. \quad (3.16)$$

Tiếp theo, do $b_{22} = -1/8 \neq 0$, theo dòng thứ hai của B ta đặt:

$$z_1 = y_1, \quad z_2 = -\frac{1}{8}y_2 + \frac{13}{4}y_3, \quad z_3 = y_3.$$

Đảo ngược lại ta được phép biến đổi:

$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = -8z_2 + 26z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases} \Leftrightarrow Y = Q_2 Z, \quad (3.17)$$

với:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 26 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

Sau phép biến đổi (3.17) ta được $f = Z' CZ$, với:

$$C = Q_2' B Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 84 \end{bmatrix}.$$

tức là:

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 8z_2^2 + 84z_3^2 \quad (3.18)$$

Dạng toàn phương (3.14) đã được đưa về dạng chính tắc (3.18) bằng phép biến đổi tuyến tính không suy biến $X = QZ$, với:

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 & -6 \\ 0 & -8 & 26 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 2: Biến đổi dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

$$f = 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3. \quad (3.19)$$

Dạng toàn phương (3.19) có thể viết dưới dạng $f = X'AX$, với:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Do $a_{22} = 3 \neq 0$, theo dòng thứ hai của A ta đặt:

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1 + 3x_2 + 3x_3, \quad y_3 = x_3.$$

Đảo ngược lại ta được phép biến đổi:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = -\frac{1}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 - y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow X = Q_1 Y \quad (3.20)$$

với:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Sau phép biến đổi (3.20) ta được $f = Y'BY$, với:

$$B = Q_1' A Q_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

tức là:

$$f = -\frac{1}{3}y_1^2 + \frac{1}{3}y_2^2 - 2y_3^2 - 6y_1y_3.$$

Tiếp theo, do $b_{11} = -\frac{1}{3} \neq 0$, theo dòng thứ nhất của B , ta đặt:

$$z_1 = -\frac{1}{3}y_1 - 3y_3, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3.$$

Đảo ngược lại ta được phép biến đổi:

$$\begin{cases} y_1 = -3z_1 & -9z_3 \\ y_2 = & z_2 \\ y_3 = & z_3 \end{cases} \Leftrightarrow Y = Q_2 Z, \quad (3.21)$$

với:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

Sau phép biến đổi (3.21) ta được $f = Z'CZ$, với:

$$C = Q_2' B Q_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{bmatrix},$$

tức là:

$$f = -3z_1^2 + \frac{1}{3}z_2^2 + 25z_3^2. \quad (3.22)$$

Dạng toàn phương (3.19) đã được đưa về dạng chính tắc (3.22) bằng phép biến đổi tuyến tính không suy biến $X = QZ$, với:

$$Q = Q_1 Q_2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -9 \\ 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 3: Biến đổi dạng toàn phương sau về dạng chính tắc:

$$f = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3. \quad (3.23)$$

Trước hết ta áp dụng phép biến đổi làm xuất hiện bình phương:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow X = Q_1 Y \quad (3.24)$$

với:

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Sau phép biến đổi (3.24) ta được dạng toàn phương $f = Y'AY$, với:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

tức là:

$$f = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 - 8y_2y_3. \quad (3.25)$$

Do $a_{11} = 2 \neq 0$, theo dòng thứ nhất của ma trận này ta đặt:

$$z_1 = 2y_1 - 2y_3, z_2 = y_2, z_3 = y_3.$$

Đảo ngược lại ta được phép biến đổi:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}z_1 & + z_3 \\ y_2 = & z_2 \\ y_3 = & z_3 \end{cases} \Leftrightarrow Y = Q_2 Z, \quad (3.26).$$

với:

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

Sau phép biến đổi (3.26) ta được dạng toàn phương $f = Z' B Z$, với

$$B = Q_1' A Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix},$$

tức là:

$$f = \frac{1}{2}z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 - 8z_2z_3. \quad (3.27)$$

Theo dòng thứ hai của B, với $b_{22} = -2 \neq 0$, ta biến đổi dạng toàn phương (3.27) bằng cách đặt:

$$t_1 = z_1, t_2 = -2z_2 - 4z_3, t_3 = z_3.$$

Đảo ngược lại ta được phép biến đổi:

$$\begin{cases} z_1 = t_1 \\ z_2 = -\frac{1}{2}t_2 - 2t_3 \\ z_3 = & t_3 \end{cases} \Leftrightarrow Z = Q_3 T, \quad (3.28)$$

với:

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}.$$

Sau phép biến đổi (3.28) ta được dạng toàn phương $f = T'CT$, với:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

tức là:

$$f = \frac{1}{2}t_1^2 - \frac{1}{2}t_2^2 + 6t_3^2. \quad (3.29)$$

Dạng toàn phương (3.23) được đưa về dạng chính tắc (3.29) bằng phép biến đổi tuyến tính $X = QT$ (Tích của 3 phép biến đổi $X = Q_1Y$, $Y = Q_2Z$, $Z = Q_3T$), với:

$$\begin{aligned} Q = Q_1Q_2Q_3 &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

III. LUẬT QUÁN TÍNH

Một dạng toàn phương có thể đưa về dạng chính tắc bằng các phép biến đổi tuyến tính không suy biến khác nhau và bản thân dạng chính tắc thu được cũng có thể khác nhau. Để làm ví dụ ta xét dạng toàn phương:

$$f = 2x^2 - 6xy - y^2.$$

Ta có:

$$f = 2(x - \frac{3}{2}y)^2 - \frac{11}{2}y^2 = 2u^2 - \frac{11}{2}v^2,$$

nếu đặt: $u = x - \frac{3}{2}y, v = y \Leftrightarrow x = u + \frac{3}{2}v, y = v.$

Mặt khác,

$$f = 11x^2 - (y + 3x)^2 = 11u^2 - v^2,$$

nếu đặt: $u = x, v = 3x + y \Leftrightarrow x = u, y = -3u + v.$

Định lý sau đây được gọi là *luật quán tính*.

Định lý: Số hệ số dương và số hệ số âm trong dạng chính tắc của một dạng toàn phương không phụ thuộc vào phép biến đổi tuyến tính không suy biến đưa dạng toàn phương đó về dạng chính tắc.

BÀI TẬP

6. Biến đổi về dạng chính tắc các dạng toàn phương sau:

a) $f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

b) $f = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

c) $f = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

d) $f = 4x_1x_2 - 3x_1x_3 + 2x_2x_3$

e) $x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - x_3x_4$

7. Một dạng toàn phương của 10 biến số khi đưa về dạng chính tắc bằng phép biến đổi tuyến tính không suy biến chỉ còn 7 biến số. Hãy giải thích tại sao?

8. Cho biết ma trận của dạng toàn phương f :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{bmatrix}.$$

Hãy viết dạng toàn phương đó và cho biết ở dạng chính tắc dạng toàn phương f khuyết mấy biến số?

§4. DẠNG TOÀN PHƯƠNG XÁC ĐỊNH

I. KHÁI NIỆM DẠNG TOÀN PHƯƠNG XÁC ĐỊNH VÀ LIÊN HỆ VỚI DẠNG CHÍNH TẮC

a. Khái niệm dạng toàn phương xác định

Cho dạng toàn phương:

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = X'AX. \quad (4.1)$$

Định nghĩa:

- Dạng toàn phương (4.1) được gọi là *dạng toàn phương xác định dương* nếu nó luôn luôn nhận giá trị dương với mọi bộ số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ không đồng thời bằng 0.
- Dạng toàn phương (4.1) được gọi là *dạng toàn phương xác định âm* nếu nó luôn luôn nhận giá trị âm với mọi bộ số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ không đồng thời bằng 0.
- Một dạng toàn phương nhận cả giá trị dương và giá trị âm được gọi là *dạng toàn phương không xác định*.

Ví dụ 1: Dạng toàn phương $f = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3$ là một dạng toàn phương xác định dương. Thật vậy, với mọi bộ số thực (x_1, x_2, x_3) ta luôn có:

$$f = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}x_3^2 + (x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2}(x_1 - x_3)^2 \geq 0.$$

Hơn nữa, $f = 0$ khi và chỉ khi

$$x_1 = x_3 = x_1 + x_2 = x_1 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Ví dụ 2: Dạng toàn phương $f = x^2 + 2xy - 3y^2$ là một dạng toàn phương không xác định vì f có thể nhận cả giá trị dương và giá trị âm, chẳng hạn $f = 1$ khi $x = 1, y = 0$ và $f = -3$ khi $x = 0, y = 1$.

Nhận xét: Dễ dàng thấy rằng $f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ là một dạng toàn

phương xác định âm khi và chỉ khi $-f = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j$ là dạng

toàn phương xác định dương, do đó từ các định lý nói về dạng toàn phương xác định dương ta có thể suy ra các định lý tương ứng về dạng toàn phương xác định âm.

b. Liên hệ với dạng chính tắc

Định lý: Một dạng toàn phương n biến số là dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi tất cả n hệ số trong dạng chính tắc của nó là các số dương.

Chứng minh:

Như ta đã biết, dạng toàn phương (4.1) có thể đưa được về dạng chính tắc bằng một phép biến đổi tuyến tính không suy biến:

[illegible]

$$\Leftrightarrow X = QY. \quad (4.2)$$

Dạng chính tắc thu được sau phép biến đổi (4.2) là

$$f = Y^T B Y = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_n y_n^2. \quad (4.3)$$

Chú ý rằng trong phép biến đổi (4.2), X và Y là các vectơ n chiều viết dưới dạng ma trận cột (ma trận cấp $n \times 1$). Do Q là ma trận không suy biến nên $X \neq 0$ khi và chỉ khi $Y \neq 0$ (hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $QY = 0$ chỉ có một nghiệm duy nhất là nghiệm $Y = 0$). Điều này có nghĩa là qua phép biến đổi (4.2) mỗi bộ số thực $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ với ít nhất một số khác 0 được đặt tương ứng với một bộ số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cũng với ít nhất một số khác 0 và ngược lại:

$$X = QY \neq 0 \Leftrightarrow Y = Q^{-1}X \neq 0.$$

Nếu (4.1) là dạng toàn phương xác định dương thì ở dạng chính tắc (4.3) tất cả các hệ số b_i phải dương ($i = 1, 2, \dots, n$). Thật vậy, giả sử tồn tại một số không dương, chẳng hạn $b_n \leq 0$. Khi đó với bộ số thực $(y_1 = y_2 = \dots = y_{n-1} = 0, y_n = 1)$ ta có $f = b_n \leq 0$. Như đã nói ở trên, qua phép biến đổi tuyến tính (4.2) ta có tương ứng bộ số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ với ít nhất một số khác 0. Với bộ số đó $f \leq 0$, điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng (4.1) là dạng toàn phương xác định dương.

Ngược lại, nếu $b_i > 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ thì với mọi bộ số thực $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ không đồng thời bằng 0 ta có tương ứng bộ số thực $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ không đồng thời bằng 0, do đó:

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_n y_n^2 > 0.$$

Điều này chứng tỏ (4.1) là dạng toàn phương xác định dương. Định lý đã được chứng minh.

Sử dụng mối quan hệ về dấu giữa hai dạng toàn phương f và $-f$, từ định lý vừa chứng minh suy ra:

Định lý: Một dạng toàn phương n biến số là dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi tất cả n hệ số trong dạng chính tắc của nó là các số âm.

Ngoài ra, theo cách tương tự như trên, ta dễ dàng chứng minh được rằng *một dạng toàn phương không xác định khi và chỉ khi trong số các hệ số ở dạng chính tắc có cả hệ số dương và hệ số âm.*

II. GIÁ TRỊ RIÊNG CỦA MA TRẬN

a. Đa thức đặc trưng

Cho một ma trận vuông cấp n :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ma trận $\lambda E - A$, trong đó λ là một biến số được gọi là *ma trận đặc trưng* của ma trận A . Ma trận λE có các phần tử trên đường chéo **chính bằng** λ và tất cả các phần tử còn lại bằng 0, do đó **ma trận đặc trưng** của ma trận A có dạng:

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Định thức của ma trận đặc trưng của ma trận A được gọi là *đa thức đặc trưng* của ma trận đó. Dễ dàng thấy rằng đa thức đặc trưng $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ là một đa thức bậc n . Thật vậy, định thức

$|\lambda E - A|$ có một thành phần bậc cao nhất là tích của các phần tử thuộc đường chéo chính:

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn}).$$

Mỗi thành phần còn lại của định thức có bậc nhỏ hơn $n - 1$ (mỗi thành phần đó chứa ít nhất một phần tử ở dòng i và cột j với $i \neq j$, do đó nó không chứa ít nhất 2 phần tử phụ thuộc λ là $\lambda - a_{ii}$ và $\lambda - a_{jj}$). Điều này chứng tỏ đa thức đặc trưng của ma trận A là một đa thức bậc n với:

- Hệ số của λ^n bằng 1;
- Hệ số của λ^{n-1} bằng $-(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$;
- Số hạng tự do của $f(\lambda)$ là $f(0) = |-A| = (-1)^n |A|$.

b. Giá trị riêng của ma trận

Định nghĩa: Giá trị riêng của một ma trận vuông A là nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận đó.

Theo định nghĩa, số λ_0 là giá trị riêng của ma trận A khi và chỉ khi

$$f(\lambda_0) = |\lambda_0 E - A| = 0.$$

Ví dụ 1: Cho ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của ma trận A đã cho là đa thức:

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda + 3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3) + 3(\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda).$$

Ma trận A có 3 giá trị riêng là: $\lambda = -2, \lambda = 0, \lambda = 2$.

Ví dụ 2: Hai ma trận vuông cùng cấp A và B được gọi là *đồng dạng* khi và chỉ khi tồn tại ma trận Q không suy biến sao cho:

$$B = QAQ^{-1}.$$

Hãy chứng minh rằng hai ma trận đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng, và do đó chúng có cùng tập hợp giá trị riêng.

Giải: Đa thức đặc trưng của ma trận A và ma trận B là các định thức $|\lambda E - A|, |\lambda E - B|$. Nếu $B = QAQ^{-1}$, trong đó Q là một ma trận vuông không suy biến thì:

$$\begin{aligned} |\lambda E - B| &= |\lambda QQ^{-1} - QAQ^{-1}| = |(\lambda Q - QA)Q^{-1}| \\ &= |Q(\lambda E - A)Q^{-1}| = |Q| \cdot |\lambda E - A| \cdot |Q^{-1}| = |\lambda E - A|. \end{aligned}$$

Khái niệm giá trị riêng của ma trận vuông còn có thể nhìn nhận dưới góc độ khác, nhờ có định lý sau đây:

Định lý: Số λ_0 là giá trị riêng của ma trận vuông A (cấp n) khi và chỉ khi tồn tại vectơ n chiều $X \neq O$ viết dưới dạng ma trận cột sao cho:

$$AX = \lambda_0 X. \quad (4.4)$$

Chứng minh: Số λ_0 là giá trị riêng của ma trận A khi và chỉ khi $|\lambda_0 E - A| = 0$. Điều này tương đương với điều kiện để hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với ma trận hệ số $(\lambda_0 E - A)$ có nghiệm không tầm thường, tức là tồn tại vectơ $X \neq O$ sao cho

$$(\lambda_0 E - A)X = O \Leftrightarrow AX = \lambda_0 X.$$

Ứng với mỗi giá trị riêng λ_0 , vectơ $X \neq O$ thoả mãn hệ thức (4.4) được gọi là *vectơ riêng của ma trận A*.

Từ định lý vừa chứng minh dễ dàng suy ra rằng nếu bổ sung thêm vectơ O_n thì tập hợp tất cả các vectơ riêng của ma trận A ứng với mỗi giá trị riêng λ_0 là một không gian con $n - r_0$ chiều của không gian vectơ n chiều, với $r_0 = r(\lambda_0 E - A)$.

III. NHẬN DIỆN DẠNG TOÀN PHƯƠNG XÁC ĐỊNH

Sau đây ta đề cập đến một số dấu hiệu cho phép nhận biết dạng toàn phương xác định thông qua ma trận của dạng toàn phương đó.

a. Sử dụng các định thức con chính

Xét một ma trận vuông cấp n bất kỳ:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ta gọi mỗi định thức con được thành lập từ các phần tử thuộc k dòng đầu và k cột đầu của ma trận A là các *định thức con chính* của ma trận đó ($k = 1, 2, \dots, n$). Ma trận A có n định thức con chính được ký hiệu lần lượt là:

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \quad D_n = |A|.$$

Định lý 1: Một dạng toàn phương là xác định dương khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các định thức con chính là các số dương: $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$.

Chứng minh: Trước hết ta thấy rằng mọi phép biến đổi tuyến tính không suy biến đều không làm thay đổi dấu của định thức

của ma trận của một dạng toàn phương. Thật vậy, nếu biến đổi dạng toàn phương $f = X'AX$ bằng phép biến đổi tuyến tính không suy biến $X = QY$ thì ta được $f = Y'BY$, với $B = Q'AQ$. Do $|Q'| = |Q| \neq 0$, ta có:

$$|B| = |Q'| \cdot |A| \cdot |Q| = |Q|^2 |A|.$$

Từ đây suy hai ma trận A và B có định thức cùng dấu.

Ta sẽ chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp theo số biến của dạng toàn phương.

Hiển nhiên là định lý đúng đối với dạng toàn phương của một biến x : $f = ax^2$ xác định dương khi và chỉ khi $a > 0$. Ta sẽ chứng minh rằng nếu định lý đúng đối với mọi dạng toàn phương của $n-1$ biến số thì nó cũng đúng đối với mọi dạng toàn phương của n biến số. Để thực hiện việc chứng minh ta viết dạng toàn phương của n biến số dưới dạng:

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \varphi + 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i x_n + a_{nn} x_n^2, \quad (4.5)$$

trong đó $\varphi = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} x_i x_j$ là dạng toàn phương của $n-1$ biến

số $x_1, \dots, x_{n-1}$. Các định thức con chính của ma trận A của dạng toàn phương f là các định thức con chính của ma trận của dạng toàn phương φ và định thức của A .

Giả sử f là dạng toàn phương xác định dương. Khi đó φ cũng là dạng toàn phương xác định dương, bởi vì nếu $\varphi \leq 0$ với một bộ số $(x_1, \dots, x_{n-1})$ không đồng thời bằng không thì $f \leq 0$ với bộ số $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = 0)$ không đồng thời bằng 0. Theo giả thiết quy nạp thì tất cả các định thức con chính của ma trận của dạng toàn phương φ đều dương. Mặt khác, dấu của định thức của A như dấu của định thức của ma trận của dạng toàn phương chính tắc

(dạng toàn phương f biến đổi được về dạng chính tắc bằng một phép biến đổi tuyến tính không suy biến $X = QY$):

$$f = b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + \dots + b_n y_n^2. \quad (4.6)$$

Do f là dạng toàn phương xác định dương nên $b_i > 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Định thức của ma trận của dạng toàn phương (4.6) là số $b_1 b_2 \dots b_n > 0$, do đó định thức của A cũng dương. Như vậy, nếu f là dạng toàn phương xác định dương thì tất cả các định thức con chính của ma trận của nó là các số dương.

Ngược lại, nếu tất cả các định thức con chính của ma trận A của dạng toàn phương f đều dương thì tất cả các định thức con chính của ma trận của dạng toàn phương φ là các số dương, do đó φ là một dạng toàn phương xác định dương (theo giả thiết quy nạp). Dạng toàn phương φ có thể biến đổi về dạng chính tắc

$\sum_{i=1}^{n-1} b_i y_i^2$ với $b_1 > 0, \dots, b_{n-1} > 0$ bằng một phép biến đổi tuyến

tính không suy biến. Phép biến đổi đó có thể thác triển thành phép biến đổi tuyến tính không suy biến đối với f bằng cách thêm $x_n = y_n$. Sau khi biến đổi ta được:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{n-1} b_i y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} b_{in} y_i y_n + b_{nn} y_n^2 \quad (b_1 > 0, \dots, b_{n-1} > 0) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} b_i (y_i^2 + 2c_{in} y_i y_n) + b_{nn} y_n^2 \quad \left(c_{in} = \frac{b_{in}}{b_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} b_i (y_i + c_{in} y_n)^2 - \sum_{i=1}^{n-1} b_i c_{in}^2 y_n^2 + b_{nn} y_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} b_i (y_i + c_{in} y_n)^2 + \alpha y_n^2. \end{aligned}$$

Thực hiện tiếp phép biến đổi ngược của phép biến đổi tuyến tính không suy biến:

$$z_i = y_i + c_{in}y_n \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad z_n = y_n,$$

ta đưa được f về dạng chính tắc:

$$f = \sum_{i=1}^{n-1} b_i z_i^2 + \alpha z_n^2. \quad (4.7)$$

Do định thức của A dương nên định thức của ma trận của dạng toàn phương chính tắc (4.7) cũng dương:

$$b_1 b_2 \dots b_{n-1} \alpha > 0,$$

từ đây suy ra $\alpha > 0$ (do $b_1 > 0, \dots, b_{n-1} > 0$). Như vậy, tất cả n hệ số của dạng toàn phương chính tắc (4.6) của f đều dương, do đó f là dạng toàn phương xác định dương.

Định lý đã được chứng minh.

Ví dụ 1: Xét dạng toàn phương:

$$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Ma trận của dạng toàn phương này là:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ma trận này có tất cả các định thức con chính dương:

$$D_1 = 2 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad D_3 = |A| = 5 > 0,$$

do đó f là dạng toàn phương xác định dương, tức là khi ít nhất một trong 3 biến số nhận giá trị khác 0 ta luôn có:

$$f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 > 0.$$

Như đã nói ở trên, dạng toàn phương $f = X'AX$ xác định âm khi và chỉ khi dạng toàn phương $-f = X'(-A)X$ xác định dương. Chú ý rằng nếu D_k là định thức con chính cấp k của A thì định thức con chính cấp k của $-A$ bằng $(-1)^k D_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Áp dụng định lý trên cho dạng toàn phương $-f$, ta dễ dàng suy ra:

Định lý 2: Dạng toàn phương f là một dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các định thức con chính cấp chẵn dương và tất cả các định thức con chính cấp lẻ âm:

$$D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0.$$

Ví dụ 2: Xét dạng toàn phương:

$$f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Ma trận của dạng toàn phương này là:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -6 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ma trận này có:

$$D_1 = -2 < 0, D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 11 > 0, D_3 = |A| = -45 < 0.$$

Vậy dạng toàn phương đã cho là dạng toàn phương xác định âm, tức là **khi** ít nhất một trong 3 biến số nhận giá trị khác 0 ta luôn có:

$$f = -2x_1^2 - 6x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 < 0.$$

Chú ý: Nếu các định thức con chính của một dạng toàn phương $f = X'AX$ không tuân theo quy luật nêu trong các định lý 1 và 2 thì ta vẫn chưa thể kết luận rằng f là dạng toàn phương không

xác định, bởi vì còn tồn tại khả năng $f \geq 0$ ($f \leq 0$) với mọi $X \neq O_n$.

b. Sử dụng các giá trị riêng

Định lý sau đây cho phép ta nhận diện dạng toàn phương xác định hoặc không xác định thông qua các giá trị riêng của ma trận của nó.

Định lý 3:

- Một dạng toàn phương f là dạng toàn phương xác định dương khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các giá trị riêng dương.
- Một dạng toàn phương f là dạng toàn phương xác định âm khi và chỉ khi ma trận của nó có tất cả các giá trị riêng âm.
- Một dạng toàn phương f là dạng toàn phương không xác định khi và chỉ khi ma trận của nó có các giá trị riêng trái dấu.

Chú ý: Người ta chứng minh được rằng, nếu ma trận A là ma trận đối xứng với tất cả các phần tử là số thực thì tất cả các giá trị riêng của nó là số thực.

Ví dụ 3: Xét dạng toàn phương: $f = -2x_2^2 - 6x_3^2 + 6x_1x_3$.

Ma trận của dạng toàn phương này là:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng:

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -3 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ -3 & 0 & \lambda + 6 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda + 2)(\lambda + 6) - 9(\lambda + 2) = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 6\lambda - 9).$$

có các nghiệm là:

$$\lambda_1 = -2 < 0, \lambda_2 = -3 - \sqrt{18} < 0, \lambda_3 = -3 + \sqrt{18} > 0.$$

Theo định lý 2 ta kết luận được rằng dạng toàn phương đã cho là dạng toàn phương không xác định.

Ví dụ 4: Xét dạng toàn phương của 2 biến số x_1, x_2 :

$$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2. \quad (4.8)$$

Chúng minh rằng, nếu $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ thì dạng toàn phương (4.8) là một dạng toàn phương không xác định.

Giải: Ma trận của dạng toàn phương (4.8) là:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của A là

$$f(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + |A| = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + D.$$

Nếu $D < 0$ thì tam thức bậc hai $f(\lambda)$ có 2 nghiệm trái dấu, tức là ma trận A có hai giá trị riêng trái dấu, do đó (4.8) là dạng toàn phương không xác định.

BÀI TẬP

9. Tìm các giá trị riêng của ma trận:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix};$

b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix};$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$

d) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix};$

$$e) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{bmatrix}; \quad f) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Cho A và B là hai ma trận vuông cùng cấp. Chứng minh rằng nếu A là ma trận không suy biến thì hai ma trận AB và BA có cùng đa thức đặc trưng.

11. Cho A là ma trận vuông không suy biến. Cho biết λ_0 là một giá trị riêng của A, hãy chứng minh:

a) $\lambda_0 \neq 0$

b) $1/\lambda_0$ là giá trị riêng của ma trận A^{-1} .

12. Chứng minh rằng nếu λ_0 là giá trị riêng của ma trận vuông A thì λ_0^2 là giá trị riêng của ma trận A^2 .

13. Hãy thử tổng quát hoá mệnh đề ở bài tập 12 và chứng minh bằng quy nạp.

14. Chứng minh rằng một dạng toàn phương là không xác định khi và chỉ khi dạng chính tắc của nó có cả hệ số dương và hệ số âm.

15. Các dạng toàn phương sau đây là dạng toàn phương xác định dương, xác định âm hay không xác định?

a) $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

b) $f = -5x_1^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$

c) $f = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

d) $f = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

$$\begin{aligned} \text{e) } f = & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 \\ & + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } f = & 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 \\ & + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 \end{aligned}$$

TRẢ LỜI BÀI TẬP

Chương I

1. a) Không phải b) Phải c) Phải d) Phải
2. a) $a \geq c$ và $b \leq d$ b) $a > c$ và $b < d$ c) $b < 1$ hoặc $a > 3$
3. a) $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \{2, 4, 6, 8\}$
 b) $A \cup B = (-\infty; 8)$, $A \cap B = (3; 5]$,
 $A \setminus B = (-\infty; 3]$, $B \setminus A = (5; 8)$
 c) $A \cup B = [-2; 9)$, $A \cap B = (1; 5]$,
 $A \setminus B = [-2; 1]$, $B \setminus A = (5; 9)$
5. $A \times B = \{(2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (5, 1), (5, 4), (6, 1), (6, 4)\}$
 $B \times A = \{(1, 2), (4, 2), (1, 3), (4, 3), (1, 5), (4, 5), (1, 6), (4, 6)\}$
6. Các quan hệ a, c, d có tính chất bắc cầu
7. Quan hệ tương đương: b, d, e
 Quan hệ thứ tự: a, c, f
9. a) Toàn ánh b) Song ánh c) Đơn ánh d) Toàn ánh
 e) Song ánh
11. a)

A	B	$A \wedge B$	$A \Rightarrow (A \wedge B)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	1

b)

A	B	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$(A \wedge B) \vee (A \Rightarrow B)$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	1	1

c)

A	B	φ	$A \vee B$	$(A \vee B) \Rightarrow \varphi$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

d)

A	B	φ	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \Rightarrow \varphi$	$A \Rightarrow \varphi$	$[(A \wedge B) \Rightarrow \varphi] \vee (A \Rightarrow \varphi)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

13. a) " $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ "; Mệnh đề phủ định đúng.
 b) "Mọi tam giác cân đều có góc ở đáy là góc nhọn"; Mệnh đề phủ định đúng.
 c) "Tồn tại cặp số thực x, y sao cho $x + y \neq xy$ "; Mệnh đề phủ định đúng.
 c) "Tồn tại số thực x sao cho $x + y \neq 0$ với mọi số thực y "; Mệnh đề đã cho đúng.

Chương 2

1. a) $(2, -3, 1)$
 b) $(-10 - 27\alpha + \frac{3}{2}\beta, 8 + 12\alpha - \frac{5}{2}\beta, 3 + 2\alpha - \frac{1}{2}\beta, \alpha, \beta)$
2. a) $(5, -2)$ b) $(\frac{21}{4}, \frac{11}{4})$
 c) $(\frac{156}{5}, \frac{-58}{5}, \frac{7}{5})$ d) $(2 + \frac{27\alpha}{8} - \frac{23\beta}{8}, -1 - \frac{13\alpha}{8} + \frac{9\beta}{8}, \alpha, \beta)$
 e) $(\frac{11}{9} - 2\alpha + \frac{7\beta}{9}, \alpha, -\frac{5}{9} + \frac{5\beta}{9}, \beta)$ f) vô nghiệm
 g) $(2, 1, -3, 1)$
3. $(139, -78, -11)$ 4. $(-7\alpha + 10\beta, -5\alpha + 7\beta, \alpha, \beta)$
5. a) $2X_1 + 3X_2 = (7, 1, -12), 3X_1 - 2X_2 = (4, -5, 21)$
 b) $(-\frac{8}{5}, 3, -7)$
6. a) $(6, -13, 29, -1)$ b) $(\frac{12}{5}, \frac{-27}{5}, \frac{39}{5}, \frac{3}{5})$
7. a) là kg con b) là kg con c) là kg con khi và chỉ khi $d = 0$
 d) không phải
8. a) $XY = 12$ b) $XY = -23$ c) $XY = -10$ d) $XY = 2$
9. $B = \frac{136}{229}A_1^c + \frac{243}{229}A_2^c - \frac{199}{229}A_3^c - \frac{51}{229}A_4^c$
10. a) $X = -X_1 + 6X_2 - 2X_3$ b) $X = 3X_1 - 5X_2$
 c) $X = 2X_1 - 3X_2 + X_3$

11. $k = 16$ 12. a) ĐLTT b) PTTT c) ĐLTT

d) PTTT nếu $k = -8$, ĐLTT nếu $k \neq -8$

16. $(\frac{11}{2}, -\frac{5}{2})$ 17. $(-18, 25, -6)$ 18. $(36, -57, -15, 74)$

21. $X_3 = 3X_1 + 2X_2$; $X_4 = -3X_1 + X_2$ 22. c) $r = 3$ 23. $r = 2$

28. Tăng 1 đơn vị 29. Giảm 1 đơn vị

Chương 3

1. Mệnh đề c sai

$$2. a) A + B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 & 4 \\ 7 & 5 & 4 & -4 \\ 3 & 11 & 3 & -2 \end{bmatrix}, A - B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & -4 \\ -5 & 3 & 0 & -2 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2A + 5B = \begin{bmatrix} 19 & 3 & 11 & 20 \\ 32 & 13 & 14 & -11 \\ 0 & 46 & 9 & -13 \end{bmatrix}, 3A - B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 8 & -4 \\ -3 & 11 & 4 & -8 \\ 17 & 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$b) X = \begin{bmatrix} \frac{-13}{2} & -3 & -1 & -10 \\ \frac{-29}{2} & \frac{-1}{2} & -4 & 1 \\ \frac{15}{2} & \frac{-37}{2} & \frac{-3}{2} & 8 \end{bmatrix}$$

$$3. 4A + 3A' = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 33 \\ 2 & 28 & 17 \\ 30 & 25 & 56 \end{bmatrix}$$

$$4. 2A' - 3B = \begin{bmatrix} 9 & -28 \\ 20 & 2 \\ 7 & -55 \end{bmatrix}, 5A + 3B' = \begin{bmatrix} 54 & 29 & 28 \\ 14 & 5 & 83 \end{bmatrix}$$

5. a) 22 b) 6a c) 1 d) $\cos 2x$ e) $\sin(a - b)$ f) $\cos(a + b)$

6. a) 1 b) -30 c) -29 d) $2a^2(a+x)$
 e) $2x^3 - (a+b+c)x^2 + abc$ f) $\sin(a-b) + \sin(b-c) + \sin(c-a)$
7. a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng e) Đúng f) Sai
8. a) A_2 b) $j=5, k=1$ c) $+a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}a_{54}, -a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}a_{52}$
9. $-a_{15}a_{21}a_{32}a_{43}a_{56}a_{64}, -a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}a_{52}a_{66}, -a_{15}a_{21}a_{36}a_{43}a_{54}a_{62}$
11. $2x^4, -x^3$ 12. Đa thức bậc 4 có hệ số của x^4 bằng 40 13. 0
15. Gợi ý: Cộng lần lượt và cột thứ n tích của cột thứ $n-1$ với 10, tích của cột thứ $n-2$ với 100,..., tích của cột thứ nhất với 10^{n-1} ta được một định thức có phần tử thuộc dòng thứ i của cột thứ n (cột cuối) là số D_i .
17. Sai khác thừa số $(-1)^{n(n-1)/2}$
18. GTLN = 2, GTNN = -2
19. GTLN = 4, GTNN = -4
20. Sai khác thừa số $-1/3$
21. $2a+c+d$ 22. $5a-3b-3c+4d$
23. a) 12 b) -9 c) 18 d) 17 e) 90 f) -18016
24. a) 394 b) 665 c) $(x+1)(x^2-x+1)^2$ d) 5
25. a) $(-1)^{n-1}(n-1)$ b) $n!$
26. $(n+1)(1+\frac{1}{n})^n$ 27. 1 28. $(-1)^{n-1}n$
30. a) $AB = \begin{bmatrix} 28 & 3 & 9 \\ -12 & 2 & 36 \end{bmatrix},$ b) $AA' = \begin{bmatrix} 43 & -13 \\ -13 & 21 \end{bmatrix},$
 c) $A'A = \begin{bmatrix} 13 & 13 & -17 \\ 13 & 26 & -11 \\ -17 & -11 & 25 \end{bmatrix},$ d) $BA' = \begin{bmatrix} 27 & -3 \\ -12 & 20 \\ -17 & 36 \end{bmatrix}$

$$31. a) AB = \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 10 & 26 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 26 & -6 \\ 15 & -2 \end{bmatrix}$$

$$b) AB = \begin{bmatrix} -5 & -19 & 12 \\ -10 & 2 & -3 \\ -7 & 5 & 9 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 8 & 31 & -7 \\ 0 & -6 & 9 \\ -10 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$c) AB = \begin{bmatrix} 31 & 22 & 9 & 17 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 44 & 24 & 9 & 19 \\ 27 & 14 & 1 & 9 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 15 & 6 & 11 & 12 \\ -13 & -1 & -1 & 5 \\ 17 & 14 & 21 & 24 \\ 26 & 11 & 20 & 14 \end{bmatrix}$$

$$32. ABC = \begin{bmatrix} 125 & -23 & 147 \\ 0 & -6 & -16 \\ 18 & 42 & 142 \end{bmatrix}$$

$$33. a) \begin{bmatrix} 1 & -18 \\ 18 & 19 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 2 & -3 & -7 \\ -7 & -4 & -7 \\ 37 & 13 & -4 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e) \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f) \begin{bmatrix} \cos nx & -\sin nx \\ \sin nx & \cos nx \end{bmatrix}$$

$$41. d^{n-1}$$

45. a) Đổi chỗ cột i và cột k

b) Cột i được nhân với $1/\alpha$, các cột còn lại không đổi

c) Cộng vào cột thứ k tích của cột thứ i với $(-\beta)$

46. a) $\begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{-5}{11} & \frac{3}{11} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-11}{2} \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{-1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{-11}{16} & \frac{-5}{16} & \frac{7}{16} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$

48. a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-9}{4} & 4 & \frac{5}{4} \\ \frac{-5}{8} & \frac{29}{8} & -5 & \frac{-13}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{-1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$

49. a) $X = \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \frac{21}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{63}{2} & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 20 & -15 & 13 \\ -105 & 77 & -58 \\ -152 & 112 & -87 \end{bmatrix}$

50. $X = \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ -17 & -5 \\ -15 & -1 \end{bmatrix}$

51. a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

53. a) $X = \begin{bmatrix} 4-2p & 2-2q \\ p & q \end{bmatrix}$ b) $X = \begin{bmatrix} \frac{5-4\alpha}{3} & \alpha \\ \frac{1-4\beta}{3} & \beta \end{bmatrix}$

55. a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng e) Sai f) Đúng g) Sai

56. a) $r=2$ b) $r=3$ c) $r=3$

d) $r=3$ e) $r=3$ f) $r=2$

57. a) $r=3$ khi $m \neq \pm 1$; $r=1$ khi $m=1$; $r=2$ khi $m=-1$

b) $r=3$ khi $m \neq 3$; $m=2$ khi $m=3$

c) $r=4$ khi $m \notin \{2, -6\}$; $r=3$ khi $m=-6$; $r=1$ khi $m=2$

61. *Gợi ý:* Dựa vào bổ đề trước định lý về liên hệ giữa ma trận A và ma trận phụ hợp A^* hãy chứng minh rằng nếu $\det(A) = 0$ thì mỗi cột của A^* là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với ma trận hệ số là ma trận A . Sau đó hãy chứng minh rằng, khi $r(A) = n-1$ các nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất đó tỷ lệ với nhau (đưa về dạng hình thang có một ẩn tự do).

62. *Gợi ý:* Khi $r(A) = 1$ ma trận A có một dòng (cột) khác không và các dòng còn lại tỷ lệ với dòng (cột) đó.

63. a) Không đổi b) Không đổi c) Tăng thêm 1 d) Giảm đi 1

64. a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai e) Đúng f) Sai

65. a) $r=2$, PTTT b) $r=4$, ĐLTT

66. a) $d=-38$, ĐLTT b) $d=0$, PTTT

67. a) $r=2$; X_1, X_2 là một cơ sở b) $r=2$; X_1, X_2 là một cơ sở

c) $r=3$; X_2, X_3, X_4 là một cơ sở

d) $r=3$; X_1, X_2, X_3 là một cơ sở

68. $k \neq 16$

Chương 4

1. a) $(3, -1, 2)$ b) $(-17, -7, 12)$
 2. a) $(-20, 27)$ b) $(2, -2, -1)$ c) $(1, 2, -2)$
 d) $(1, 1, -1)$ e) $(1, 1, -1, -1)$ f) $(-2, 0, 1, -1)$
 3. a) $(\alpha, \beta, 1 - 4\alpha - 3\beta, 1)$ b) $\left(\frac{1+\gamma}{3}, \frac{1+3\alpha+3\beta-5\gamma}{3}, \alpha, \beta, \gamma\right)$

4. a) $k = 5$ b) Không tồn tại (hệ vô nghiệm với mọi k)

5. a) 3 b) $m = 2$ c) $\left(\frac{16m-17}{3(m-2)}, \frac{4(5m-7)}{3(m-2)}, \frac{-3}{m-2}\right)$

7. Mệnh đề b sai

9. $abc \neq 0$; nghiệm duy nhất:

$$\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

10. a) Hệ có một nghiệm duy nhất: $\left(-\frac{k+1}{k+2}, \frac{1}{k+2}, \frac{(k+1)^2}{k+2}\right)$ khi

$k \neq \{1, -2\}$; vô nghiệm khi $k = -2$; vô số nghiệm khi $k = 1$:

$$(1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta)$$

b) Hệ có một nghiệm duy nhất $(1 - m, m, 0)$ khi $m \neq 0$; có vô số nghiệm khi $m = 0$: $(1, \alpha, 0)$.

c) Hệ có một nghiệm duy nhất $\left(\frac{4a+1}{(a-1)(a+1)}, \frac{a(2a-7)}{(a-1)(a+1)}, \frac{-3a}{a+1}\right)$ khi

$a \neq \pm 1$; vô số nghiệm khi $a = 1$: $\left(\alpha, \frac{3}{5} - \alpha, -\frac{2}{5}\right)$;

vô nghiệm khi $a = -1$.

d) Hệ có một nghiệm duy nhất

$$\left(-\frac{b(7b-5)}{(b-1)(b+1)}, \frac{b(8a-7)}{(b-1)(b+1)}, \frac{5b^2-2b-1}{(b-1)(b+1)}\right)$$

khi $b \neq \pm 1$; vô nghiệm khi $b = \pm 1$.

14. a) Nghiệm tổng quát: $(\alpha + 2\beta, -2\alpha - 3\beta, \alpha, \beta)$

Một hệ nghiệm cơ bản: $\{P_1 = (1, -2, 1, 0), P_2 = (2, -3, 0, 1)\}$

b) Nghiệm tổng quát: $\left(\frac{3\alpha - 13\beta}{17}, \frac{19\alpha - 20\beta}{17}, \alpha, \beta \right)$

Một hệ nghiệm cơ bản: $\{P_1 = (3, 19, 17, 0), P_2 = (-13, -20, 0, 17)\}$

c) Nghiệm tổng quát: $(\alpha + \beta, -2\alpha - 2\beta, \alpha, \beta, 0)$

Một hệ nghiệm cơ bản:

$$\{P_1 = (1, -2, 1, 0, 0), P_2 = (1, -2, 0, 1, 0)\}$$

d) Nghiệm tổng quát: $\left(\frac{\alpha}{4}, 0, 0, \frac{5\alpha}{4}, \alpha \right)$

Một hệ nghiệm cơ bản: $\{P = (1, 0, 0, 5, 4)\}$

15. Nghiệm tổng quát: $\left(\frac{3 + \beta + 4\gamma}{3}, \frac{-3 + 3\alpha - 8\beta + \gamma}{3}, \alpha, \beta, \gamma \right);$

Một hệ nghiệm cơ bản của hệ thuần nhất liên kết:

$$P_1 = (0, 3, 3, 0, 0), P_2 = (1, -8, 0, 3, 0), P_3 = (4, 1, 0, 0, 3).$$

$$16. a) \bar{p}_1 = \frac{57}{17}, \bar{Q}_1 = \frac{194}{17}; \bar{p}_2 = \frac{59}{17}, \bar{Q}_2 = \frac{143}{17}$$

$$b) \bar{p}_1 = \frac{134}{11}, \bar{Q}_1 = \frac{257}{11}; \bar{p}_2 = \frac{171}{11}, \bar{Q}_2 = \frac{232}{11}$$

$$17. \bar{p}_1 = \frac{265}{3}, \bar{Q}_1 = 265; \bar{p}_2 = \frac{730}{9}, \bar{Q}_2 = \frac{1370}{9}; \bar{p}_3 = \frac{685}{9}, \bar{Q}_3 = \frac{3245}{9};$$

$$18. \text{ Khi } t = 0: \bar{Y} \approx 966,7; \bar{C} \approx 736,7.$$

$$\text{ Khi } t = 0,4: \bar{Y} = 500; \bar{C} = 270.$$

$$19. \bar{Y} = 194 \text{ triệu USD}; \bar{r} = 14,8 \%$$

$$20. x_1 = 600, x_2 = 600, x_3 = 400, x_4 = 1000;$$

$$A = \begin{bmatrix} 0,133 & 0,033 & 0,275 & 0,230 \\ 0,333 & 0,083 & 0,225 & 0,120 \\ 0,367 & 0,183 & 0,075 & 0,040 \\ 0,100 & 0,233 & 0,400 & 0,240 \end{bmatrix}$$

21. a) Phần tử 0 có nghĩa là ngành 3 không dùng sản phẩm của nó làm đầu vào của sản xuất; Phần tử 0,25 có nghĩa là mỗi đôla giá trị sản phẩm của ngành 2 có chứa đựng 0,25 đôla giá trị sản phẩm của ngành 1 đã được sử dụng để sản xuất; Phần tử 900 là cầu cuối đối với sản phẩm của ngành 3.

b) $0,25 + 0,10 + 0,38 = 0,73$ có nghĩa là mỗi đôla giá trị sản phẩm của ngành 2 có chứa đựng 0,73 đôla chi phí cho các sản phẩm đầu vào.

c) $0,05 + 0,25 + 0,34 = 0,64$ có nghĩa là cầu trung gian đối với sản phẩm của ngành 1 chiếm 64% tổng cầu.

d) Tổng cầu: $x_1 = 3007,16$; $x_2 = 1631,11$; $x_3 = 2104,48$

e) Tỷ phần chi phí cho các sản phẩm đầu vào của ngành 1 là

$$0,05 + 0,33 + 0,19 = 0,57,$$

do đó tỷ phần giá trị gia tăng của nó là 0,43. Tổng giá trị gia tăng của ngành 1 là: $0,43 \cdot (3007,16) = 1293,08$.

Giá trị gia tăng của ngành 2 là 440,40 và giá trị gia tăng của ngành 3 là 1136,42.

22. a) Tổng cầu: $x_1 = 879,50$; $x_2 = 1023,85$; $x_3 = 1232,22$.

Chi phí đầu vào: $c_1 = 791,55$; $c_2 = 921,465$; $c_3 = 862,554$.

b) Tổng cầu: $x_1 = 743,24$; $x_2 = 756,76$; $x_3 = 789,19$.

Chi phí đầu vào: $c_1 = 594,592$; $c_2 = 681,084$; $c_3 = 473,514$.

Chương 5

1. a) $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0,5 & -3,5 \\ 0,5 & 5 & 4 \\ -3,5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

2. a) $f = 2x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2$

b) $f = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 + 2x_2x_3$

c) $f = 4x_1^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$

d) $f = x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_4^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4$
 $+ 6x_2x_3 - 6x_2x_4 + 2x_3x_4$

3. a) $r=1$ b) $r=3$ c) $r=3$

4. a) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ b) 3

c) $FX = (x_1 - 2x_2, 2x_1 + 2x_2 + x_3, 3x_1 - x_2 - x_3).$

5. a) $U = \begin{bmatrix} \frac{27}{7} & \frac{4}{7} & \frac{12}{7} \\ -\frac{25}{7} & -\frac{5}{7} & -\frac{15}{7} \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

b) Gọi $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ là toạ độ của vectơ X bất kỳ của không gian $\mathbf{R}^3$ trong cơ sở (P) . Toạ độ $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ của X trong cơ sở (Q) được xác định theo công thức:

$$\beta_1 = \alpha_1 + \frac{4}{5} \alpha_2,$$

$$\beta_2 = 7\alpha_1 + \frac{63}{5} \alpha_2 + 3\alpha_3,$$

$$\beta_3 = -4\alpha_1 - 6\alpha_2 - \alpha_3$$

c) $(6, 74, -37)$

6. Đáp số không duy nhất

7. Do hạng của nó bằng 7

$$\begin{aligned} 8. f = 2x_1^2 + 56x_3^2 - 6x_4^2 + 2x_1x_2 + 22x_1x_3 \\ + 4x_1x_4 + 8x_2x_3 - 2x_2x_4 + 10x_3x_4. \end{aligned}$$

Dạng chính tắc khuyết 2 biến số, do $r(A) = 2$.

9. a) $f(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3; \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3.$

b) $f(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 14; \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 7;$

c) $f(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1; \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1;$

d) $f(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1; \lambda = -1;$

e) $f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda - 2; \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1;$

f) $f(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 16\lambda - 16; \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2;$

13. Mệnh đề tổng quát: Nếu λ_0 là giá trị riêng của ma trận vuông A thì λ_0^n là giá trị riêng của ma trận A^n

15. a) Xác định dương b) Xác định âm c) Xác định dương;
d) Không xác định e) Không xác định g) Xác định dương.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Alpha C. Chiang: *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, Third Edition, McGraw-Hill, Inc.
- [2] Michael Hoy, John Chris McKenna, Ray Rees, Thanasis Stengos: *Mathematics for Economics*, Addison-Wesley Publishers Limited, 1996.
- [3] Eugene Silberberg: *The Structure of Economics*, Part A: Mathematical Analysis. McGraw-Hill, Inc. 1978
- [4] Allen, R. G. D: *Mathematical Analysis for Economists*. MacMillan & Co, Ltd, London, 1938.
- [5] Edward T. Dowling: Introduction to *Mathematical Economics*, 2/ed. Schaum's Outline Series McGraw-Hill, Inc.
- [6] Mike Rosser: *Basic Mathematics for Economists*, London and New York, 1995.
- [7] James M. Henderson and Richard E. Quandt: *Microeconomic Theory, A Mathematical Approach*. McGraw-Hill Company 3/ed, 1986.
- [8] Robert H. Frank: *Microeconomics and Behavior*, McGraw-Hill, Inc, 1991.
- [9] N. Gregory Mankin and William Scarth: *Macroeconomics*, Canadian Edition, Worth Publishers, 1995.
- [10] А. А. Глаголев, Т. В. Солнцева: Курс Высшей Математики, Издательство "Высшая школа", Москва - 1971.

- [11] А.Г. Курош: Курс Высшей Алгебры, Издательство "Наука", Москва - 1975.
- [12] А. И. Мальцев: Основы Линейной Алгебры, Издательство "Наука", Москва - 1970.
- [13] Д. К. Фаддаев и И. С. Соминский: Сборник Задач по Высшей Алгебре, Издательство "Наука", Москва - 1970.
- [14] И. В. Проскуряков: Сборник Задач по Линейной Алгебре, Издательство "Наука", Москва - 1978.
- [15] Carl P. Simon and Lawrence Blume: Mathematics for Economists, w. w. Norton & Company, Inc. 1994.



MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU	3
Chương 1. TẬP HỢP, QUAN HỆ VÀ LOGIC SUY LUẬN	7
§1. Tập hợp	7
I. Các khái niệm cơ bản	7
II. Các phép toán tập hợp	9
Bài tập	13
§2. Hệ thống số thực	14
I. Số thực	14
II. Biểu diễn hình học các số thực	16
III. Các khoảng số thực	18
IV. Tập hợp bị chặn	20
§3. Quan hệ	22
I. Tích Des Cartes	22
II. Quan hệ	23
III. Ánh xạ	25
Bài tập	28
§4. Đại cương về logic suy luận	30
I. Mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề	30
II. Hàm mệnh đề	33
III. Logic suy luận. Điều kiện cần và điều kiện đủ	37
IV. Logic chứng minh mệnh đề	40
V. Phương pháp chứng minh quy nạp	43
Bài tập	45

Chương 2. KHÔNG GIAN VECTƠ SỐ HỌC n CHIỀU	47
§1. Các khái niệm cơ bản về hệ phương trình tuyến tính và phương pháp khử ẩn liên tiếp	47
I. Các khái niệm cơ bản về hệ phương trình tuyến tính	47
II. Hệ tam giác và hệ hình thang	50
III. Phương pháp khử ẩn liên tiếp	54
IV. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất	61
<i>Bài tập</i>	63
§2. Vectơ n chiều và không gian vectơ	65
I. Khái niệm vectơ n chiều	65
II. Các phép toán vectơ	66
III. Không gian vectơ số học n chiều. Khái niệm không gian con	69
IV. Tích vô hướng của hai vectơ. Khái niệm không gian Euclide	71
<i>Bài tập</i>	74
§3. Các mối liên hệ tuyến tính trong không gian vectơ	75
I. Khái niệm tổ hợp tuyến tính và phép biểu diễn tuyến tính	75
II. Sự phụ thuộc tuyến tính	80
III. Các định lý cơ bản về sự phụ thuộc tuyến tính	84
<i>Bài tập</i>	88
§4. Cơ sở của không gian vectơ	89
I. Khái niệm cơ sở của không gian vectơ	89
II. Toạ độ của vectơ trong một cơ sở	92
III. Cơ sở của không gian con	93
<i>Bài tập</i>	95
§5. Hạng của một hệ vectơ	96
I. Khái niệm cơ sở và hạng của hệ vectơ	96

II. Các định lý cơ bản về hạng	98
III. Các phép biến đổi không làm thay đổi hạng	100
Bài tập	102
Chương 3. MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC	105
§1. Ma trận và các phép toán tuyến tính đối với ma trận	105
I. Các khái niệm cơ bản về ma trận	105
II. Các dạng ma trận	108
III. Các phép toán tuyến tính	111
IV. Các phép biến đổi ma trận	113
Bài tập	115
§2. Định thức	116
I. Hoán vị của n số tự nhiên đầu	116
II. Định nghĩa định thức cấp n	119
III. Minh họa định nghĩa: Tính các định thức cấp 1, 2, 3	122
IV. Các tính chất cơ bản của định thức	124
Bài tập	133
§3. Các phương pháp tính định thức	137
I. Phương pháp khai triển	137
II. Phương pháp biến đổi về dạng tam giác	141
Bài tập	145
§4. Phép nhân ma trận và ma trận nghịch đảo	148
I. Phép nhân ma trận với ma trận	148
II. Ma trận nghịch đảo	152
III. Ứng dụng ma trận nghịch đảo	162
IV. Tìm ma trận nghịch đảo bằng phương pháp biến đổi ma trận	165
Bài tập	167
§5. Hạng của ma trận	173
I. Khái niệm hạng của ma trận	173

II. Liên hệ giữa hạng của ma trận và các định thức con	174
III. Hạng của tổng và tích các ma trận	179
IV. Các phương pháp tìm hạng của ma trận	181
V. Khảo sát một hệ vectơ	187
<i>Bài tập</i>	189
 Chương 4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH	195
 §1. Phương pháp ma trận và định thức	195
I. Hệ phương trình Cramer	195
II. Phương pháp ma trận	196
III. Quy tắc Cramer	197
<i>Bài tập</i>	200
 §2. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát	201
I. Các dạng biểu diễn	201
II. Điều kiện có nghiệm	203
III. Khảo sát tổng quát hệ phương trình tuyến tính	204
<i>Bài tập</i>	211
 §3. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất	213
I. Điều kiện có nghiệm không tầm thường	213
II. Cấu trúc của tập hợp nghiệm	215
III. Hệ nghiệm cơ bản	216
IV. Mối liên hệ với hệ thống thuần nhất	221
<i>Bài tập</i>	223
 §4. Một số mô hình tuyến tính trong phân tích kinh tế	225
I. Mô hình cân bằng thị trường	225
II. Mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô	229
III. Mô hình IS-LM	231
IV. Mô hình Input-Output của Leontief	234
<i>Bài tập</i>	240

Chương 5. DẠNG TOÀN PHƯƠNG	243
§1. Các khái niệm cơ bản	243
I. Dạng toàn phương	243
II. Liên hệ với ma trận	244
III. Dạng toàn phương chính tắc	246
Bài tập	246
§2. Các phép biến đổi tuyến tính trong không gian $\mathbb{R}^n$	247
I. Khái niệm biến đổi tuyến tính	247
II. Liên hệ với ma trận	249
III. Biến đổi cơ sở của không gian $\mathbb{R}^n$	253
Bài tập	257
§3. Biến đổi dạng toàn phương về dạng chính tắc	258
I. Biến đổi dạng toàn phương bằng các phép biến đổi tuyến tính	258
II. Phương pháp biến đổi dạng toàn phương về dạng chính tắc	259
III. Luật quán tính	270
Bài tập	271
§4. Dạng toàn phương xác định	272
I. Khái niệm dạng toàn phương xác định và liên hệ với dạng chính tắc	272
II. Giá trị riêng của ma trận	275
III. Nhận diện dạng toàn phương xác định	278
Bài tập	284
TRẢ LỜI BÀI TẬP	287
TÀI LIỆU THAM KHẢO	301

