Bộ giáo dục và đào tạo
Dự án phát triển giáo viên tiểu học

Trần Diên Hiển (Chủ biên) – Bùi Huy Hiền

Giáo trình
Các tập hợp số

tài liệu đào tạo giáo viên Tiểu học
trình độ cao đẳng và đại học sư phạm

Nhà xuất bản giáo dục
nhà xuất bản đại học sư phạm

Chịu trách nhiệm xuất bản:
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc Ngô trần áI
Giám đốc đinh ngọc bảo
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập nguyễn quý thao
Tổng biên tập Lê a

Biên tập nội dung:
Lê văn tuấn

Thiết kế sách và Biên tập mĩ thuật:
Phạm Việt Quang

Trình bày bìa:
Phạm Việt Quang

371 (v)
——— 167/110-05 Mã số:
GD - 05

Mục lục

Lời nói ••u

Để góp phần đổi mới công tác đào tạo và bồi dưỡng giáo viên tiểu học, Dự án Phát triển giáo viên tiểu học đã tổ chức biên soạn các môđun đào tạo theo chương trình Cao đẳng Sư phạm và chương trình liên thông từ Trung học Sư phạm lên Cao đẳng Sư phạm. Biên soạn các môđun nhằm nâng cao năng lực chuyên môn, nghiệp vụ, cập nhật những đổi mới về nội dung, phương pháp dạy học và kiểm tra, đánh giá kết quả giáo dục tiểu học theo chương trình, sách giáo khoa tiểu học mới.

Điểm mới của tài liệu viết theo môđun là thiết kế các hoạt động, nhằm tích cực hoá hoạt động của người học, kích thích óc sáng tạo và khả năng giải quyết vấn đề, tự giám sát và đánh giá kết quả học tập của người học; chú trọng sử dụng nhiều phương tiện truyền đạt khác nhau (tài liệu in, băng hình,...) giúp cho người học dễ học, dễ hiểu và gây được hứng thú học tập.

Môđun ***Các tập hợp số*** do nhóm tác giả trường Đại học Sư phạm Hà Nội biên soạn.

Môđun ***Các tập hợp số*** có thời lượng bằng bốn đơn vị học trình, bao gồm 3 chủ đề:

Chủ đề 1: Cấu trúc đại số

Chủ đề 2: Số tự nhiên

Chủ đề 3: Tập số hữu tỉ và tập số thực

Lần đầu tiên, tài liệu được biên soạn theo chương trình và phương pháp mới, chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Ban điều phối Dự án rất mong nhận được những ý kiến đóng góp chân thành của bạn đọc, đặc biệt là đội ngũ giảng viên, sinh viên các trường Sư phạm, giáo viên Tiểu học trong cả nước.

Xin trân trọng cảm ơn!

DỰ ÁN PHÁT TRIỂN GIÁO VIÊN TIỂU HỌC

CHỦ ĐỀ 1

Cấu trúc đại số

Mục tiêu

A. Kiến thức

– Giúp cho người học nắm vững được những cấu trúc đại số cơ bản đó là cấu trúc nửa nhóm, nhóm, vành và trường.

– Trên cơ sở nắm vững những cấu trúc trên, tiến tới hình thành những ý tưởng mới để tiếp cận với toán học hiện đại và để biết các cấu trúc của các tập hợp số ở Tiểu học.

– Giúp người học thấy được sự phát triển không ngừng của toán học theo đúng quy luật phát triển là *từ trực quan sinh động đến tư duy trừu tượng* và *từ tư duy trừu tượng vận dụng vào thực tế.*

B. Kĩ năng

– Kiểm tra được một "phép toán" đã cho có là một phép toán hai ngôi không.

– Kiểm tra được một tập hợp với các phép toán có là nửa nhóm, nhóm, vành, trường hay không.

– Kiểm tra được một tập đã cho có là nửa nhóm con, nhóm con, vành con, trường con hay không.

– Kiểm tra được một ánh xạ đã cho có là đồng cấu, đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu hay không.

– Kiểm tra được hai nhóm, vành, trường có đẳng cấu với nhau hay không.

C. Thái độ

– Cần nắm vững được các định nghĩa chính xác của khái niệm.

– Có liên hệ với thực tế chương trình Toán ở Tiểu học.

D. Giới thiệu chủ đề 1

STT	Tên tiểu chủ đề	Trang
1	Phép toán hai ngôi	9
2	Nửa nhóm và nhóm	19
3	Vành và trường	36

Mối quan hệ giữa các tiểu chủ đề trong toàn bộ chủ đề:

+ Tiểu chủ đề 1: Là phần chuẩn bị các kiến thức về các phép toán hai ngôi và những tính chất của chúng, dùng để xây dựng các cấu trúc đại số ở tiểu chủ đề 2 và 3.
+ Tiểu chủ đề 2: Giới thiệu hai cấu trúc đại số cơ bản nhất đó là nửa nhóm và nhóm, trong đó một tập hợp được trang bị một phép toán hai ngôi.
+ Tiểu chủ đề 3: Xây dựng cấu trúc đại số một tập hợp có trang bị hai phép toán hai ngôi. Những cấu trúc đại số này đặc biệt hơn so với cấu trúc đại số ở tiểu chủ đề 2.

Cả hai tiểu chủ đề 2 và 3 có sự gắn kết chặt chẽ với nhau, có dàn bài giống nhau nên người đọc dễ theo dõi.

Tiểu chủ đề 1.1. Phép toán hai ngôi

Thông tin cơ bản

1.1.1. Nhắc lại về khái niệm ánh xạ

1.1.1.1. Định nghĩa

Cho hai tập hợp X và Y. Một ánh xạ từ X đến Y, kí hiệu là f: X → Y hoặc $X \xrightarrow{f} Y$, là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x ∈ X một phần tử duy nhất y ∈ Y. Phần tử y được gọi là *ảnh* của x qua ánh xạ f và kí hiệu là y = f(x). Tập hợp X được gọi là *tập nguồn* hay *tập xác định* của f; tập Y được gọi là *tập đích* của f.

Chú ý. Nhiều khi để chỉ rõ quy tắc của ánh xạ f từ X đến Y ta còn dùng kí hiệu sau đây:

f: X → Y

x a f(x).

x a f(x) chỉ rõ quy tắc cho biết ảnh của mỗi phần tử x qua ánh xạ f là như thế nào.

Cho f và g là hai ánh xạ từ tập X đến tập Y. Ta nói rằng ánh xạ f bằng ánh xạ g, kí hiệu là f = g, nếu và chỉ nếu với mọi x ∈ X thì f(x) = g(x).

Ví dụ 1.1:

Nhiều hàm số mà ta gặp trong chương trình toán phổ thông là những ánh xạ từ tập con của tập các số thực **R** đến **R**. Chẳng hạn:

– Cho a, b là hai số thực bất kì, a ≠ 0. Tương quan hàm số bậc nhất y = ax + b là một ánh xạ từ **R** đến **R**. Nú đặt tương ứng mỗi x ∈ **R** s? y = ax + b ∈ **R**.

f: **R** → **R**

x a f(x) = ax + b.

– Tương tự ta có các ánh xạ sau:

g: **R** → **R**

x a g(x) = x^2 + 2x + 2.

h: **R** → **R**

x a 10^x.

l: $\mathbf{R}^+$ → **R**, $\mathbf{R}^+$ là tập các số thực dương.

x a lgx.

1.1.1.2. ảnh và tạo ảnh

Cho f: X → Y là một ánh xạ từ tập X đến tập Y. A là một tập con của X và B là một tập con của Y.

Tập f(A) = {y ∈ Y | ∃a ∈ A, f (a) = y} được gọi là *ảnh* của tập A qua ánh xạ f.

Tập $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ được gọi là *tạo ảnh* của tập B qua ánh xạ f.

1.1.1.3. ánh xạ mở rộng, ánh xạ thu hẹp

Cho $f: X \to Y$ là một ánh xạ từ X đến Y và A là một tập con của X, khi đó ta có ánh xạ

$g: A \to Y$ được xác định bởi $\forall a \in A,\ g(a) = f(a)$.

g được gọi là *ánh xạ thu hẹp* của f trên tập A, kí hiệu là $g = f|_A$; f cũng được gọi là *ánh xạ mở rộng* của g. Nếu B là một tập con của Y sao cho với mọi $a \in A$, $f(a) \in B$ thì ta có ánh xạ

$\bar{f}: A \to B$ được xác định bởi $\forall a \in A,\ \bar{f}(a) = f(a) \in B$.

$\bar{f}$ được gọi là *ánh xạ cảm sinh* của ánh xạ f bằng cách thu hẹp nguồn trên A và đích trên B.

Ví dụ 1.2:

Cho $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \mapsto x^2 + 2x + 2$$

Z là tập các số nguyên, khi đó ta có ánh xạ thu hẹp của f trên **Z** là:

$$f|_Z : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto x^2 + 2x + 2.$$

và ta cũng có một ánh xạ cảm sinh của f:

$\bar{f}: \mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, **Q** là tập các số hữu tỉ.

$$x \mapsto x^2 + 2x + 2.$$

1.1.1.4. Đơn ánh, toàn ánh và song ánh

Định nghĩa 1.1. Cho f là một ánh xạ từ một tập X đến một tập Y.

– f được gọi là một *đơn ánh* nếu và chỉ nếu với mọi x_1, x_2 thuộc X, $f(x_1) = f(x_2)$ kéo theo $x_1 = x_2$.

– f được gọi là một *toàn ánh* nếu và chỉ nếu $f(X) = Y$, tức là với mọi $y \in Y$ tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

– Nếu f vừa là đơn ánh, vừa là toàn ánh thì f được gọi là một *song ánh.*

Nếu f là một song ánh từ X đến Y thì f có một ánh xạ ngược từ Y đến X được xác định bởi:

$$f^{-1}: Y \to X$$
$$y \mapsto x \quad \text{với } y = f(x).$$

1.1.1.5. Hợp thành của hai ánh xạ

Định nghĩa 1.2. Cho f là một ánh xạ từ X đến Y và g là một ánh xạ từ Y đến Z. Khi đó ta có ánh xạ h từ X đến Z được xác định bởi quy tắc $\forall x \in X$, $h(x) = g(f(x))$. h được gọi là *hợp thành* của f và g; kí hiệu là h = gf hoặc h = g.f (h còn được gọi là *tích* của hai ánh xạ f và g).

Định lí 1.1. *Cho hai ánh xạ $f: X \to Y$; $g: Y \to Z$.*

(i) Nếu f và g là hai đơn ánh thì gf là một đơn ánh;

(ii) Nếu f và g là hai toàn ánh thì gf là một toàn ánh;

(iii) Nếu f và g là hai song ánh thì gf là một song ánh.

Định lí 1.2. *Cho ba ánh xạ $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$ khi đó $(hg)f = h(gf)$.*

1.1.1.6. Tích Descartes của hai tập hợp

Cho X và Y là hai tập hợp. Tập hợp tất cả các cặp (x; y) trong đó $x \in X$, $y \in Y$ được gọi là tích Descartes của X và Y, kí hiệu là $X \times Y$. Chú ý rằng hai cặp (x; y) và (x'; y') bằng nhau khi và chỉ khi x = x' và y = y'.

Ví dụ 1.3:

1) Tập các điểm trong mặt phẳng tọa độ Descartes là tích Descartes của tập các số thực **R** và **R**.

2) Cho **Z** là tập các số nguyên, $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} = \{(a; b) \mid a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$. T?p $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ cú th? coi là tập các điểm có tọa độ nguyên trong mặt phẳng tọa độ Descartes.

1.1.2. Phép toán hai ngôi

1.1.2.1. Định nghĩa

Cho X là một tập khác rỗng. Một phép toán hai ngôi trên tập X là một ánh xạ

$$T: X \times X \to X$$

$$(a; b) \quad a \quad aTb.$$

Phần tử $aTb \in X$ được gọi là *cái hợp thành* hay còn được gọi là *kết quả* của phép toán T thực hiện trên hai phần tử a và b.

Như vậy, một phép toán hai ngôi T trên tập hợp X là một quy tắc đặt tương ứng mỗi cặp phần tử (a; b) thuộc $X \times X$ một phần tử xác định duy nhất aTb thuộc X.

Ví dụ 1.4:

1) Phép cộng thông thường các số là phép toán hai ngôi trên các tập **N** các số tự nhiên, tập **Z** các số nguyên, tập **Q** các số hữu tỉ và tập **R** các số thực.

2) Phép nhân thông thường các số là phép toán hai ngôi trên các tập **N** các số tự nhiên,…

3) Cho tập $\mathbf{N}^*$ các số tự nhiên khác 0. ánh xạ

$$*: \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$$

$$(a; b) \quad a \quad a * b = ab$$

là một phép toán hai ngôi trên tập các số tự nhiên khác 0.

4) Cho tập **Z** các số nguyên, phép trừ là một phép toán hai ngôi trên **Z**, vì ta có ánh xạ

$$T: \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$$

$$(a; b) \quad a \quad a - b.$$

Tuy nhiên, phép trừ không phải là phép toán hai ngôi trên tập các số tự nhiên **N**, vì ta có 3 và 5 thuộc **N** nhưng $3 - 5 \notin \mathbf{N}$.

5) Cho X là một tập và P(X) là tập các tập con của X. Các phép toán hợp, giao và hiệu của hai tập hợp đều là những phép toán hai ngôi trên tập P(X). Cụ thể, A và B là hai tập con của X thì $A \cup B$ cũng là tập con của X, do đó nó thuộc P(X), tức là ta có ánh xạ:

$$\begin{aligned} \cup: P(X) \times P(X) &\rightarrow P(X) \\ (A; B) &\mapsto A \cup B. \end{aligned}$$

Tương tự, ta có các ánh xạ:

$$\begin{aligned} \cap: P(X) \times P(X) &\rightarrow P(X) \\ (A; B) &\mapsto A \cap B \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} \setminus: P(X) \times P(X) &\rightarrow P(X) \\ (A; B) &\mapsto A \setminus B. \end{aligned}$$

6) Cho tập hợp X và Hom(X, X) là tập hợp các ánh xạ từ X đến chính nó. Phép lấy hợp thành hai ánh xạ là một phép toán hai ngôi trên tập Hom(X, X).

Thật vậy, vì với hai ánh xạ f, g bất kì từ X đến X, hợp thành fg cũng là một ánh xạ từ X đến X. Nên ta có ánh xạ:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(X, X) \times \mathrm{Hom}(X, X) &\rightarrow \mathrm{Hom}(X, X) \\ (f; g) &\mapsto fg \end{aligned}$$

7) Cho tập $X = \{0, 1, 2\}$ ta có phép toán hai ngôi xác định trên X như sau:

$$\begin{aligned} T: X \times X &\rightarrow X \\ (a; b) &\mapsto r \end{aligned}$$

trong đó r là dư của phép chia a + b cho 3.

Có thể mô tả phép toán T trong bảng sau:

T	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

1.1.2.2. Tính chất thường gặp của phép toán hai ngôi

Định nghĩa 1.3. Cho T là một phép toán hai ngôi trên tập X.

Ta nói rằng phép toán T có *tính chất giao hoán* nếu và chỉ nếu với mọi a, b thuộc X, aTb = bTa.

Các phép toán hai ngôi trong các ví dụ 1), 2), 5), 7) trong ví dụ 1.4 là những phép toán có tính chất giao hoán.

Các phép toán hai ngôi trong các ví dụ 3), 4) không có tính chất giao hoán; ví dụ 6) không có tính chất giao hoán nếu tập X có nhiều hơn 1 phần tử.

Định nghĩa 1.4. Cho T là một phép toán hai ngôi trên tập X.

Ta nói rằng phép toán T có *tính chất kết hợp* nếu và chỉ nếu với mọi a, b, c thuộc X, (aTb)Tc = aT(bTc).

Các phép toán hai ngôi trong các ví dụ 1), 2), 5), 6) và 7) đều có tính chất kết hợp.

Các phép toán trong các ví dụ 3), 4) không có tính chất kết hợp.

1.1.2.3. Những phần tử đặc biệt

Định nghĩa 1.5. Cho T là một phép toán hai ngôi trên tập X. Phần tử $e \in X$ được gọi là *phần tử trung lập* đối với phép toán T nếu và chỉ nếu với mọi a thuộc X, eTa = aTe = a.

Định lí 1.3. *Nếu trong tập X có phần tử trung lập đối với phép toán T thì phần tử trung lập đó là duy nhất.*

Chứng minh:

Giả sử e và e' là hai phần tử trung lập đối với phép toán T.

Ta có

eTe' = e' vì e là phần tử trung lập

và

eTe' = e vì e' là phần tử trung lập.

Từ đó suy ra e = e'.

Ví dụ 1.5:

1) Số 0 là phần tử trung lập đối với phép cộng thông thường các số tự nhiên (cũng như đối với phép cộng thông thường các số nguyên, số hữu tỉ và số thực).

2) Số 1 là phần tử trung lập đối với phép nhân thông thường các số tự nhiên (cũng như đối với phép nhân thông thường các số nguyên, số hữu tỉ và số thực).

3) Tập rỗng ($\varnothing$) là phần tử trung lập đối với phép lấy hợp các tập hợp ($\cup$) trên tập P(X).

4) Tập X là phần tử trung lập đối với phép toán giao ($\cap$) trên tập P(X).

5) ánh xạ đồng nhất

$$idx: X \to X$$
$$x \text{ a } x$$

là phần tử trung lập đối với phép hợp thành các ánh xạ trên tập Hom(X, X).

Định nghĩa 1.6. Cho X là một tập hợp với phép toán hai ngôi T và e là phần tử trung lập của X đối với phép toán T; $a \in X$. Phần tử $b \in X$ được gọi là *phần tử đối xứng* của a đối với phép toán T nếu bTa = aTb = e.

Định lí 1.4. *Cho X là một tập hợp với phép toán hai ngôi T có tính chất kết hợp, có phần tử trung lập là e. Nếu b và b' là hai phần tử đối xứng của a thì b' = b.*

Chứng minh:

Giả sử phần tử $a \in X$ có hai phần tử đối xứng là b và b', khi đó ta có aTb' = e và bTa = e.

Do T có tính chất kết hợp nên ta có (bTa)Tb' = bT(aTb'). Suy ra eTb' = bTe hay b' = b.

Ví dụ 1.6:

1) Đối với phép cộng các số tự nhiên chỉ có số 0 là có phần tử đối xứng và phần tử đối xứng của 0 là 0.

2) Một cách tổng quát: Nếu $e \in X$ là phần tử trung lập đối với phép toán T thì e là phần tử đối xứng của chính nó.

3) Đối với phép cộng các số nguyên, mỗi số nguyên a có phần tử đối xứng là $-a \in \mathbf{Z}$.

4) Đối với phép nhân các số nguyên chỉ có 1 và –1 là hai phần tử có đối xứng trong **Z**. (Đối xứng của 1 là 1, đối xứng của –1 là –1).

5) Đối với phép nhân các số hữu tỉ thì mỗi số hữu tỉ $q \in \mathbf{Q}$ khác 0 đều có phần tử đối xứng là $\frac{1}{q} \in \mathbf{Q}$.

6) Đối với phép nhân ánh xạ trong tập Hom(X, X), mỗi song ánh $f: X \to X$ đều có phần tử đối xứng là $f^{-1}: X \to X$ (ánh xạ ngược của f).

Chú ý. Trong thực tế, hai phép toán hai ngôi thường gặp hơn cả là phép cộng (+) và phép nhân (×).

– Đối với phép cộng (+): Giả sử + là một phép toán hai ngôi trên tập X thì cái hợp thành a + b được gọi là *tổng* của a và b. Phần tử trung lập (nếu có) được gọi là *phần tử không* và kí hiệu là 0. Nếu phép cộng có tính chất kết hợp và phần tử $a \in X$ có phần tử đối xứng là b, khi đó b được xác định duy nhất, được gọi là *phần tử đối* của a và kí hiệu là – a.

– Đối với phép nhân (×): Giả sử × là một phép toán hai ngôi trên tập X, khi đó cái hợp thành a × b (còn được viết là ab hoặc a.b) được gọi là tích của a và b. Phần tử trung lập (nếu có) được gọi là *phần tử đơn vị* và kí hiệu là e (hoặc 1 nếu không có sự nhầm lẫn với các số). Nếu phép nhân có tính chất kết hợp và phần tử $a \in X$ có phần tử đối xứng là b, thì b được xác định duy nhất và được gọi là *phần tử nghịch đảo* của a, kí hiệu là $b = a^{-1}$.

1.1.2.4. Phép toán cảm sinh

Định nghĩa 1.7. Cho T là một phép toán hai ngôi trên tập X và A là một tập con khác rỗng của X. A được gọi là một *tập con ổn định* đối với phép toán T nếu với mọi a, b thuộc A, cái hợp thành aTb thuộc A. Tức là:

$(\forall a)(\forall b)\ [a, b \in A \Rightarrow aTb \in A]$.

Ví dụ 1.7:

1) Tập hợp các số tự nhiên chẵn là tập con ổn định của tập các số tự nhiên đối với phép cộng.

2) Tập các số tự nhiên **N** là tập con ổn định của tập các số nguyên **Z** đối với phép cộng và đối với phép nhân. Nhưng nó không ổn định đối với phép trừ.

3) Tập các số nguyên mà là bội của số nguyên m cho trước là tập con ổn định của tập các số nguyên đối với phép cộng và đối với phép nhân.

4) Tập các số nguyên lẻ là tập con ổn định đối với phép nhân các số nguyên nhưng nó không ổn định đối với phép cộng các số nguyên.

5) Tập S(X) các song ánh từ X đến X là tập con ổn định của Hom(X, X) đối với phép nhân ánh xạ.

Định nghĩa 1.8. Cho X là một tập hợp với phép toán hai ngôi T và A là một tập con ổn định đối với phép toán T của X.

Khi đó ánh xạ

$$T:\ X \times X \to X$$
$$(a; b)\ a\ \ aTb$$

cảm sinh ánh xạ

$$T':\ A \times A \to A$$
$$(a; b)\ a\ \ aTb$$

Đó là một phép toán hai ngôi trên tập A và được gọi là *phép toán cảm sinh* của phép toán T trên tập hợp A.

Ví dụ 1.8:

1) Phép cộng các số tự nhiên chẵn là phép toán cảm sinh của phép cộng các số tự nhiên.

2) Phép cộng các số nguyên cảm sinh ra phép cộng các số nguyên mà là bội của một số nguyên m cho trước.

3) Cho S(X) là tập các song ánh từ X đến X, phép hợp thành các song ánh trên tập S(X) là phép toán cảm sinh của phép hợp thành các ánh xạ trên Hom(X, X).

hoạt động.

Tìm hiểu định nghĩa ánh xạ, toàn ánh, đơn ánh, song ánh; định nghĩa và các tính chất của phép toán hai ngôi.

Nhiệm vụ

Sinh viên đọc thông tin nguồn tài liệu tham khảo để thực hiện các nhiệm vụ dưới đây.

Nhiệm vụ 1:

Định nghĩa ánh xạ, toàn ánh, đơn ánh, song ánh.

Nhiệm vụ 2:

Định nghĩa phép toán hai ngôi bằng ngôn ngữ ánh xạ, thấy được ý nghĩa khái quát của định nghĩa này. Đây là định nghĩa được khái quát hóa từ rất nhiều phép toán hai ngôi cụ thể.

Nhiệm vụ 3:

Nờu những tính chất thường gặp của phép toán hai ngôi. Xây dựng ví dụ minh họa.

Nhiệm vụ 4:

Nêu định nghĩa các phần tử đặc biệt của phép toán hai ngôi. Xây dựng ví dụ minh họa.

Nhiệm vụ 5:

é?nh nghia phép toán cảm sinh của một phép toán hai ngôi. Cho vớ d? minh họa.

Đánh giá

Hãy trả lời các câu hỏi sau đây:

1. Định nghĩa ánh xạ, đơn ánh, toàn ánh, song ánh.
2. Định nghĩa phép toán hai ngôi trên một tập hợp.
3. Định nghĩa phần tử trung lập đối với một phép toán hai ngôi, phần tử đối xứng của một phần tử trong một tập có phép toán hai ngôi.
4. Nêu những tính chất thường gặp của một phép toán hai ngôi.
5. Trong môn Toán giảng dạy ở trường tiểu học ta gặp những phép toán hai ngôi nào? Chúng có những tính chất gì?
6. Những phép toán nào ta dạy cho học sinh tiểu học không phải là phép toán hai ngôi?

Hãy giải các bài tập sau đây:

1. Cho **N** là tập các số tự nhiên, **Z** là tập các số nguyên, **Q** là tập các số hữu tỉ, $\mathbf{Q}^+$ là tập các số hữu tỉ dương.

   a) Phép toán nào trong bốn phép tính cộng, trừ, nhân, chia là phép toán hai ngôi trên mỗi tập số kể trên.

b) Trong trường hợp là phép toán hai ngôi, hãy cho biết tính chất và các phần tử đặc biệt của các phép toán đó.

2. Cho tập hợp X = {0, 1, 2}. Phép toán $\oplus$ được cho bởi bảng sau:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Hãy cho biết các tính chất của phép toán $\oplus$ và chỉ ra các phần tử đặc biệt nếu có.

3. Cho tập hợp Y = {a, b, c}. Phép toán * được cho bởi bảng sau:

*	a	b	c
a	a	a	a
b	b	b	b
c	c	c	c

Hãy cho biết các tính chất của phép toán * và chỉ ra các phần tử đặc biệt nếu có.

4. Cho $\mathbf{N}^*$ là tập các số tự nhiên khác 0, phép toán T được xác định như sau:

$$T:\ \mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$$
$$(a; b) \quad a \quad ab.$$

Phép toán T có tính chất giao hoán, kết hợp hay không? Trong $\mathbf{N}^*$ có phần tử trung lập hay không?

5. Chứng tỏ rằng các quy tắc cho tương ứng sau đây là những phép toán hai ngôi. Hãy chỉ ra các tính chất của mỗi phép toán đó.

a) $x * y = x + y + xy$ với mọi x, y thuộc **R**;

b) $m \otimes n = m + 2n$ với mọi m, n thuộc **N**;

c) $a \oplus b = a + b - ba$ với mọi a, b thuộc $\mathbf{Q} \setminus \{1\}$.

6. Cho A là tập các số nguyên chẵn, B là tập các số nguyên lẻ. Các tập nào trong hai tập trên ổn định đối với các phép toán sau:

a) Phép cộng các số nguyên

b) Phép nhân các số nguyên.

7. Chứng minh rằng tập các số nguyên là bội của số nguyên tố m cho trước ổn định đối với phép cộng và phép nhân các số nguyên.

8. Các tập hợp sau đây, tập hợp nào ổn định đối với phép cộng các phân số.

a) A = {–1, 1}

b) $B = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z}, \text{a lµ sè lÎ}, b \neq 0 \right\}$

c) $C = \left\{ \frac{a}{b} \mid \frac{a}{b} \text{ lµ ph©n sè thËp ph©n} \right\}$

9. Cũng câu hỏi như bài 8, nhưng thay phép cộng bằng phép nhân các phân số.

TIỂU CHỦ ĐỀ 1.2. Nửa nhóm và nhóm

Thông tin Cơ bản

1.2.1. Nửa nhóm

1.2.1.1. Định nghĩa

Ta gọi là *nửa nhóm* một tập khác rỗng X cùng với phép toán hai ngôi T trên X có tính chất kết hợp. Nếu trong nửa nhóm X có phần tử trung lập đối với phép toán T thì X được gọi là một *vị nhóm*. Nếu phép toán T có tính chất giao hoán thì nửa nhóm X được gọi là một *nửa nhóm giao hoán*.

Như vậy, một nửa nhóm là một *cấu trúc đại số* bao gồm một tập hợp trên đó có một phép toán hai ngôi T thoả mãn tiên đề:

$\forall a, b, c \in T, (aTb)Tc = aT(bTc)$.

Để chỉ một nửa nhóm ta viết (X, T) trong đó X là *tập nền* của cấu trúc này, T là kí hiệu của phép toán hai ngôi. Trong nhiều trường hợp, nếu không có sự nhầm lẫn, ta có thể viết X thay cho (X, T).

Ví dụ 2.1:

1) Tập các số tự nhiên **N** với phép cộng thông thường là một vị nhóm giao hoán, phần tử trung lập là 0. Nó được gọi là vị nhóm cộng các số tự nhiên.

2) Vị nhóm cộng các số nguyên (**Z**, +) trong đó **Z** là tập các số nguyên, + là phép cộng thông thường các số. Đó là một vị nhóm giao hoán.

3) Vị nhóm nhân các số tự nhiên (**N**, .).

4) Vị nhóm nhân các số nguyên (**Z**, .).

5) Hom(X, X) tập các ánh xạ từ tập X đến chính nó cùng với phép hợp thành các ánh xạ là một vị nhóm (Nếu X có nhiều hơn một phần tử thì vị nhóm này không giao hoán).

Nhận xét. Nếu (X, T) là một nửa nhóm thì với mọi a, b, c thuộc X ta có (aTb)Tc = aT(bTc). Khi đó ta viết phần tử này là aTbTc và gọi nó là "*cái hợp thành*" của ba phần tử a, b, c trong nửa nhóm (X, T). Bằng quy nạp ta định nghĩa tổng (tích) của n phần tử ($n \geq 3$) của nửa nhóm cộng (X, +) (nửa nhóm nhân (X, .)) như sau:

Định nghĩa 2.1. Cho (X, +) là một nửa nhóm, $a_1, a_2, ..., an$ là n phần tử của X ($n \geq 3$). Tổng của các phần tử $a_1, a_2, ... an$ kí hiệu là $a_1 + a_2 + ... + an$ hoặc $\sum_{i=1}^{n} a_i$ được định nghĩa quy nạp theo n như sau:

$$a_1 + a_2 + ... + an = (a_1 + a_2 + ... + an_{-1}) + an$$

hay

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + an.$$

Nếu $a_1 = a_2 = \ldots = an = a$ thì $\sum_{i=1}^{n} a_i$ viết là na và được gọi là bội n của phần tử a.

Định nghĩa 2.2. Cho (X, .) là một nửa nhóm nhân, $a_1, a_2, \ldots, an$ là n phần tử của X ($n \geq 3$). Tích của các phần tử $a_1, a_2, \ldots, an$ kí hiệu là $a_1a_2\ldots an$ hay $\prod_{i=1}^{n} a_i$ được định nghĩa quy nạp theo n như sau:

$$a_1a_2\ldots an = (a_1a_2\ldots an_{-1})an$$

hay

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right) an.$$

Nếu $a_1 = a_2 = \ldots = an = a$ thì $\prod_{i=1}^{n} a_i$ viết là an và được gọi là luỹ thừa bậc n của phần tử a.

1.2.1.2. Tính chất

Định lí 2.1. *Cho (X, .) là một nửa nhóm nhân. $a_1, a_2, \ldots an$ ($n \geq 3$) là n phần tử của X. Khi đó với mọi số tự nhiên m, $1 \leq m < n$ ta có:*

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_i \cdot \prod_{j=m+1}^{n} a_j$$

Chứng minh:

Với n = 3 ta có $a_1a_2a_3 = (a_1a_2)a_3 = a_1(a_2a_3)$ vậy công thức này đúng với n = 3.

Giả sử công thức này đúng với n = k ($k \geq 3$) tức là với k phần tử $a_1, a_2, \ldots, ak$ thuộc X ta có $\prod_{i=1}^{k} a_i = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\prod_{j=m+1}^{k} a_j\right)$ với mọi m, $1 \leq m < k$.

Ta cần chứng minh công thức này đúng với n = k + 1.

Thật vậy với k + 1 phần tử $a_1, a_2, \ldots, ak_{+1}$ thuộc X và $1 \leq m < k + 1$ ta có:

– Khi m = k thì theo định nghĩa $\prod_{i=1}^{k+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^{k} a_i\right).a_{k+1} = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right).a_{m+1}$.

– Khi m < k thì $\prod_{i=1}^{k+1} a_i = \prod_{i=1}^{k} a_i.a_{k+1} = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i.\prod_{i=m+1}^{k} a_i\right)a_{k+1}$

$$= \prod_{i=1}^{m} a_i \left(\left(\prod_{j=m+1}^{k} a_j\right).a_{k+1}\right) = \prod_{i=1}^{m} a_i.\prod_{j=m+1}^{k+1} a_j.$$

Chú ý. Nếu (X, +) là một nửa nhóm cộng thì ta có công thức sau:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_j \text{ với mọi m, } 1 \le m < n.$$

Nhận xét. Trong nửa nhóm nhân (hoặc cộng) khi thực hiện phép nhân (phép cộng) đối với nhiều phần tử thì ta có thể nhóm các nhân tử (hạng tử) theo mọi cách mà chỉ cần giữ nguyên thứ tự.

Hệ quả. Cho $a_1, a_2, \dots,$ an là những phần tử của nửa nhóm nhân X. Khi đó ta có:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \left[\prod_{i=1}^{k} a_i \,.\prod_{j=k+1}^{m} a_i\right]\prod_{e=m+1}^{n} a_e$$

$$= \prod_{i=1}^{k} a_i \left[\prod_{j=k+1}^{m} a_j .\prod_{e=m+1}^{n} a_e\right]$$

với mọi k, m, $1 \le k < m < n$.

Chứng minh:

Đẳng thức thứ hai suy ra từ tính chất kết hợp của phép nhân trong nửa nhóm X.

Theo định lí 2.1 ta có

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_i .\prod_{e=m+1}^{n} a_e \quad 1 \le m < n. \tag{1}$$

Ta lại có

$$\prod_{i=1}^{m} a_i = \prod_{i=1}^{k} a_i .\prod_{j=k+1}^{m} a_j \quad 1 \le k < m. \tag{2}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \left[\prod_{i=1}^{k} a_i .\prod_{j=k+1}^{m} a_j\right].\prod_{e=m+1}^{n} a_e \,.$$

Định lí 2.2. *Cho $a_1, a_2, \dots,$ an ($n \ge 2$) là những phần tử của nửa nhóm giao hoán X. Khi đó, với mọi hoán vị ($j_1, j_2, \dots,$ jn) của {1, 2, . . . , n} ta có:*

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_{j_1}.a_{j_2}...a_{j_n}.$$

Chứng minh:

Với n = 2, tính chất này đúng vì $a_1a_2 = a_2a_1$.

Giả sử tính chất này đúng với n = k ($k \ge 2$), tức là ta có $\prod_{i=1}^{k} a_i = a_{j_1}.a_{j_2}...a_{j_k}$ với ($j_1, j_2, \dots,$ jk) là một hoán vị bất kì của {1, 2, . . . , k}.

Với n = k + 1, gọi ($j_1, j_2, \dots, jk_{+1}$) là một hoán vị bất kì của {1, 2, . . . , k, k + 1}.

Nếu $j_{k+1} = k + 1$ thì:

$$a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_k}a_{j_{k+1}} = (a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_k})a_{k+1}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} a_i . a_{k+1} \qquad \text{(Theo gi¶ thiÕt quy n¹p)}$$

$$= \prod_{i=1}^{k+1} a_i .$$

Nếu $j_{k+1} < k + 1$, giả sử $j_{r+1} = k + 1$ ta có:

$$a_{j_1}\ldots a_{j_r}\, a_{j_{r+1}}\ldots a_{j_{k+1}} = (a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_r})\ [a_{k+1}(a_{j_{r+2}}\ldots a_{j_{k+1}})].$$

$$= (a_{j_1}a_{j_k}\ldots a_{j_r})\left[(a_{j_{r+2}}\ldots a_{j_{k+1}})a_{k+1}\right]$$

$$= (a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_r}a_{j_{r+2}}\ldots a_{j_{k+1}})a_{k+1}.$$

Theo giả thiết quy nạp: $a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_k}a_{j_{r+2}}\ldots a_{j_{k+1}} = \prod_{i=1}^{k} a_i$

Vậy $a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_{k+1}} = \prod_{i=1}^{k} a_i . a_{k+1} = \prod_{i=1}^{k+1} a_i .$

áp dụng. Ta xét bài toán sau:

Tìm kết quả sau bằng cách tính nhanh nhất

A = 21 + 79 + 35 + 65 + 47 + 53;

B = 4 × 25 × 7 × 8 × 125 × 20 × 5;

C = 21 + 53 + 35 + 79 + 47 + 65;

D = 125 × 5 × 25 × 20 × 8 × 4 × 7.

Giải:

A $= \underbrace{(21 + 79)}_{100} + \underbrace{(35 + 65)}_{100} + \underbrace{(47 + 53)}_{100} = 300.$

B = (4 × 25) × [7 × (4 × 125)] × 20 × 5.

= 100 × (7 × 1000) × 100

= 70 000 000.

C = 21 + 53 + 35 + 79 + 47 + 65

= (21 + 79) + (53 + 47) + (35 + 65) = 300.

D = 125 × 5 × 25 × 20 × 8 × 4 × 7

= (125 × 8) × (5 × 20) × (25 × 4) × 7

= 70 000 000.

1.2.1.3. Nửa nhóm con

Định nghĩa 2.3. Cho (X, T) là một nửa nhóm. A là một tập con khác rỗng của X và ổn định đối với phép toán T. Khi đó A cũng là một nửa nhóm và được gọi là *nửa nhóm con* của nửa nhóm X.

Nếu X là một vị nhóm và A là một nửa nhóm con của X mà A chứa phần tử trung lập của X thì A cựng v?i phộp toỏn c?m sinh b?i T được gọi là vị nhóm con của vị nhóm X.

Ví dụ 2.2:

1) Cho X là một nửa nhóm (vị nhóm) bất kì. Khi đó X là một nửa nhóm con (vị nhóm con) của chính nó.

2) Cho X là một vị nhóm với phần tử trung lập e, khi đó {e} là một vị nhóm con của X.

3) Tập A các số tự nhiên chẵn là một vị nhóm con của vị nhóm cộng các số tự nhiên **N**.

4) Tập B các số tự nhiên lẻ là một vị nhóm con của vị nhóm nhân các số tự nhiên **N**.

5) Cho m là một số tự nhiên. Tập mZ tất cả các số nguyên là bội số của m là một vị nhóm con của vị nhóm cộng các số nguyên.

1.2.2. Nhóm

1.2.2.1. Định nghĩa

Ta gọi là *nhóm* một tập X cùng với phép toán hai ngôi T thoả mãn các tiên đề sau đây:

(i) (X, T) là một nửa nhóm, tức là $\forall$ a, b, c $\in$ X, (aTb)Tc = aT(bTc).

(ii) Trong X tồn tại phần tử trung lập e đối với phép toán T. Nghĩa là $\exists$e $\in$ X sao cho eTa = aTe = a với mọi a $\in$ X.

(iii) Mọi phần tử x thuộc X đều có phần tử đối xứng, nghĩa là tồn tại x' $\in$ X sao cho x'Tx = xTx' = e.

Nếu phép toán T có tính chất giao hoán thì nhóm X được gọi là một *nhóm giao hoán* hay *nhóm Aben*.

Nếu X là tập hữu hạn, có n phần tử thì X được gọi là một nhóm có *cấp là n*. Nếu X là một tập vô hạn thì X được gọi là một nhóm có *cấp vô hạn*.

Nhận xét. Một nhóm X là một vị nhóm mà mọi phần tử thuộc X đều có đối xứng trong X.

Ví dụ 2.3:

1) Tập các số nguyên **Z** với phép cộng là một nhóm Aben.

2) Tập các số hữu tỉ **Q** với phép cộng là một nhóm Aben.

3) Tập $\mathbf{Q}^*$ các số hữu tỉ khác 0, với phép nhân là một nhóm Aben.

4) Tập S(X) tất cả các song ánh từ X đến X là một nhóm với phép nhân ánh xạ.

1.2.2.2. Tính chất

Cho X là một nhóm với phép toán là phép nhân, khi đó ta có:

1) Vì một nhóm là một vị nhóm nên nó có đầy đủ các tính chất của một vị nhóm mà chúng ta không cần phải nhắc lại.

2) $\forall a, b, c \in X$, $ab = ac \Rightarrow b = c$ (luật giản ước bên trái)

và

$ba = ca \Rightarrow b = c$ (luật giản ước bên phải).

Thật vậy, giả sử

$ab = ac \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac)$

$\Rightarrow (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c$

$\Rightarrow eb = ec$

$\Rightarrow b = c.$

Tương tự ta có:

$ba = ca \Rightarrow b = c.$

3) Với mọi a, b thuộc X, các phương trình $ax = b$ và $ya = b$ có nghiệm duy nhất trong X.

Thật vậy, xét phương trình $ax = b$ (1)

Đặt $x_0 = a^{-1}b \in X$, khi đó $ax_0 = a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb = b$. Vậy x_0 là nghiệm của (1).

Giả sử x_1 và x_2 là hai nghiệm của (1), khi đó ta có các đẳng thức:

$ax_1 = b;\ \ ax_2 = b.$

Từ đó suy ra (theo tính chất 2) $x_1 = x_2$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x_0 = a^{-1}b$.

Tương tự phương trình $ya = b$ có nghiệm duy nhất là $ba^{-1} \in X$.

Tính chất 3) trên đây không chỉ là điều kiện cần mà còn là điều kiện đủ để một nửa nhóm là một nhóm. Ta có định lí sau:

Đinh lí 2.3. *Cho X là một nửa nhóm nhân. X là một nhóm khi và chỉ khi với mọi a, b thuộc X các phương trình $ax = b$ và $ya = b$ có nghiệm trong X.*

Chứng minh:

Điều kiện cần: Đã chứng minh trong tính chất 3).

Điều kiện đủ: Vì X là nửa nhóm nên $X \neq \emptyset$, do đó tồn tại $a_0 \in X$. Ta xét phương trình $xa_0 = a_0$. Theo giả thiết phương trình này có nghiệm là $e \in X$.

Với phần tử a bất kì thuộc X, xét phương trình $a_0y = a$. Phương trình này có nghiệm là $y_0 \in X$. Tức là $a_0y_0 = a$. Từ đó suy ra $ea = e(a_0y_0) = (ea_0)y_0 = a_0y_0 = a$.

Tương tự ta có $ae = a$ với mọi $a \in X$.

Vậy trong X có phần tử trung lập là e.

Bây giờ với mỗi $a \in X$, xét phương trình $xa = e$.

Phương trình này có nghiệm trong X. Nghĩa là trong X tồn tại phần tử a' sao cho a'a = e. Vì phương trình ay = e có nghiệm trong X nên tồn tại a" ∈ X sao cho aa" = e, ta suy ra a' = a" là phần tử đối xứng của a. Vậy X là một nhóm.

1.2.3. Nhóm con

1.2.3.1. Định nghĩa

Định nghĩa 2.4. Cho X là một nhóm. A là một tập con của X ổn định đối với phép toán trong X. Nếu A cùng với phép toán cảm sinh là một nhóm thì A được gọi là *nhóm con* của X.

Chú ý. Nếu e là phần tử trung lập của nhóm X và A là một nhóm con của X thì $e \in A$ và cũng là phần tử trung lập của A.

Định lí sau đây cho ta một tiêu chuẩn để nhận biết một tập con của một nhóm có là nhóm con của nó hay không.

Định lí 2.4. *Cho A là một tập con của nhóm nhân X. Khi đó ba tính chất sau tương đương với nhau:*

(i) A là nhóm con của X.

(ii) Phần tử trung lập $e \in A$, và với mọi a, b thuộc A, ta có $ab \in A$ và $a^{-1} \in A$.

(iii) Phần tử trung lập $e \in A$, và với mọi a, b thuộc A ta có $ab^{-1} \in A$.

Chứng minh:

(i) ⇒ (ii). Hiển nhiên.

(ii) ⇒ (i). Theo giả thiết A là tập con của X và $a, b \in A$ kéo theo $ab \in A$. Vậy A là tập con của X ổn định đối với phép nhân. Vì phép nhân trong X có tính chất kết hợp nên phép toán cảm sinh trên A cũng có tính chất kết hợp. $e \in A$ nên A là một vị nhóm. Mặt khác với mọi $a \in A$, $\exists a^{-1} \in A$ thoả mãn $a^{-1}a = e$, $aa^{-1} = e$. Vậy A là một nhóm với phép toán cảm sinh, nên nó là nhóm con của X.

(ii) ⇒ (iii) Giả sử a, b thuộc A, theo (ii) a và $b^{-1} \in A$, lại theo (ii) $ab^{-1} \in A$.

(iii) ⇒ (ii) Giả sử a, b là hai phần tử thuộc A. Vì $e \in A$ nên $a^{-1} = ea^{-1} \in A$, tương tự, $b^{-1} \in A$. Mặt khác $a, b^{-1} \in A$ suy ra $ab = a(b^{-1})^{-1} \in A$.

Ví dụ 2.4:

1) Nhóm cộng các số nguyên **Z** là một nhóm con của nhóm cộng các số hữu tỉ **Q**.

2) Tập các số nguyên chẵn 2**Z** là một nhóm con của nhóm cộng các số nguyên.

Thật vậy, ta có $0 = 2.0 \in 2\mathbf{Z}$. Giả sử $a = 2k$, $b = 2l$ là hai số chẵn khi đó $a - b = 2k - 2l = 2(k - l) \in 2\mathbf{Z}$. Vậy theo định lí 2.4, 2**Z** là một nhóm con của **Z**.

3) Tập các số nguyên là bội của một số nguyên m cho trước là một nhóm con của nhóm cộng các số nguyên.

Thật vậy, đặt $mZ = \{mk \mid k \in \mathbf{Z}\}$ ta có $0 = m0 \in mZ$. $a = mk$, $b = ml$ là hai phần tử thuộc mZ.

Khi đó a – b = m(k – l) ∈ mZ.

4) Tập A = {1, –1} là một nhóm con của nhóm nhân các số hữu tỉ khác không.

5) Với mỗi nhóm X bất kì đều có hai nhóm con đó là X và {e}, trong đó e là phần tử trung lập của nhóm X.

1.2.4. Đồng cấu

1.2.4.1. Định nghĩa

Cho X là một nhóm với phép toán T và Y là một nhóm với phép toán ⊥. f: X → Y là một ánh xạ từ tập X đến tập Y. f được gọi là một *đồng cấu nhóm*, nếu và chỉ nếu với mọi a, b thuộc X ta có:

f(aTb) = f(a)⊥f(b).

– Nếu X = Y thì đồng cấu f: X → X được gọi là một *tự đồng cấu* của nhóm X.

– Nếu f là một đơn ánh thì đồng cấu f được gọi là một *đơn cấu*.

– Nếu f là một toàn ánh thì đồng cấu f được gọi là một *toàn cấu*.

– Nếu f là một song ánh thì đồng cấu f được gọi là một *đẳng cấu*.

– Nếu có một ánh xạ đẳng cấu f từ nhóm X đến nhóm Y thì ta nói rằng hai nhóm X và Y *đẳng cấu với nhau* và kí hiệu là X ≅ Y.

Đối với nửa nhóm ta có định nghĩa tương tự.

Ví dụ 2.5:

1) Cho X là một nhóm khi đó ánh xạ đồng nhất idX: X → X là một tự đẳng cấu của nhóm X.

2) Cho X và Y là hai nhóm bất kì, eY là phần tử trung lập của nhóm Y. Khi đó ánh xạ

ε: X → Y

x a eY

là một đồng cấu từ nhóm X đến nhóm Y. Nói chung ε không là đơn cấu cũng không là toàn cấu.

3) Cho (**R**, +) là nhóm cộng các số thực. ($\mathbf{R}^+$, .) là nhóm nhân các số thực dương. ánh xạ

m: **R** → $\mathbf{R}^+$

x a 10^x

là một ánh xạ đẳng cấu từ nhóm cộng các số thực đến nhóm nhân các số thực dương.

4) Cho A là một nhóm con của nhóm X. ánh xạ

j: A → X

a a a

là một đơn cấu. j được gọi là phép nhúng tự nhiên hay đơn cấu chính tắc từ nhóm con A vào nhóm X.

4) Cho (**N**, +) là vị nhóm cộng các số tự nhiên. ánh xạ

g: **N** → **N**

n a 2n

là một đơn cấu.

1.2.4.2. Tính chất

Định lí 2.5. *Cho f: X → Y là một đồng cấu từ nhóm nhân X vào nhóm nhân Y. ex, ey theo thứ tự là đơn vị của nhóm X và nhóm Y. Khi đó ta có:*

1) f(ex) = ey.

2) Với mọi a ∈ X, $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

3) $f\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} f(a_i)$ *với* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$, $n \geq 2$.

Chứng minh:

1) Với mọi x ∈ X ta có x = exx.

Suy ra f(x) = f(exx) = f(ex)f(x) hay eyf(x) = f(ex)f(x).

Vì trong nhóm có luật giản ước nên ey = f(ex).

2) Ta có $f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = ey$; tương tự $f(a^{-1})f(a) = f(a^{-1}a) = f(ex) = ey$.

Vậy $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

3) Chứng minh quy nạp theo n.

Với n = 2. Theo định nghĩa của đồng cấu ta có: $f(a_1a_2) = f(a_1)f(a_2)$.

Vậy tính chất này đúng với n = 2.

Giả sử tính chất này đúng với n (n ≥ 2) tức là ta có:

$$f\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) = \prod_{i=1}^{n} f(a_i).$$

Với n + 1 phần tử $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$ của X ta có: $\prod_{i=1}^{n+1} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i . a_{n+1}$ nên

$$f\left(\prod_{i=1}^{n+1} a_i\right) = f\left(\prod_{i=1}^{n} a_i . a_{n+1}\right) = f\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right).f(a_{n+1})$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(a_i).f(a_{n+1}) \quad \text{(theo giả thiết quy nạp)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} f(a_i).$$

Vậy tính chất này đúng với n + 1.

Định lí 2.6. *Cho f: X → Y là một đồng cấu từ nhóm X đến nhóm Y. A là một nhóm con của X. B là một nhóm con của Y. Khi đó f(A) là một nhóm con của Y và* $f^{-1}(B)$ *là một nhóm con của X.*

Chứng minh:

Giả sử A là một nhóm con của nhóm X. Khi đó đơn vị ex thuộc A nên ey = f(ex) $\in$ f(A).

Giả sử y_1, y_2 là hai phần tử thuộc f(A). Khi đó tồn tại a_1, a_2 thuộc A sao cho $y_1 = f(a_1)$, $y_2 = f(a_2)$.

Suy ra $y_1y_2^{-1} = f(a_1)[f(a_2)]^{-1} = f(a_1)f(a_2^{-1}) = f(a_1a_2^{-1}) \in f(A)$. Vậy f(A) là một nhóm con của Y.

Giả sử B là một nhóm con của Y. Vì f(ex) = ey $\in$ B nên ex $\in f^{-1}(B)$. Nếu x_1, x_2 là hai phần tử thuộc $f^{-1}(B)$ thì $f(x_1) \in B$ và $f(x_2) \in B$.

Suy ra $f(x_1 x_2^{-1}) = f(x_1)[f(x_2)]^{-1} \in B$. Do đó $x_1 x_2^{-1} \in f^{-1}(B)$. Vậy $f^{-1}(B)$ là một nhóm con của X.

Định nghĩa 2.5. Cho f: X $\to$ Y là một đồng cấu từ nhóm X đến nhóm Y. Theo định lí 2.6, f(X) là một nhóm con của Y. f(X) được gọi là *ảnh* của đồng cấu f và kí hiệu là Imf. $f^{-1}(ey)$ là một nhóm con của X và $f^{-1}(ey)$ được gọi là *hạt nhân* của đồng cấu f và kí hiệu là Kerf.

Định lí 2.7. *Cho f là một đồng cấu từ nhóm X đến nhóm Y.*

f là một toàn cấu khi và chỉ khi Imf = Y.

f là một đơn cấu khi và chỉ khi Kerf = {ex}.

Chứng minh:

Theo định nghĩa của toàn ánh ta có ngay f là toàn cấu khi và chỉ khi Imf = f(X) = Y.

Giả sử f là đơn cấu. Vì f(ex) = ey nên ex $\in$ Kerf. Nếu x $\in$ Kerf tức là f(x) = ey. Mặt khác f(ex) = ey. Do f là đơn ánh nên x = ex. Vậy Kerf = {ex}.

Đảo lại, giả sử Kerf = {ex}. Nếu x_1, x_2 là hai phần tử thuộc X sao cho $f(x_1) = f(x_2)$. Suy ra

$$ey = f(x_1)[f(x_2)]^{-1} = f(x_1x_2^{-1})$$

hay

$$x_1x_2^{-1} \in \text{Kerf, tức là } x_1x_2^{-1} = ex \text{ hay } x_1 = x_2.$$

Vậy f là một đơn ánh do đó nó là một đơn cấu.

Định lí 2.8. *Nếu f là một đồng cấu từ nhóm X đến nhóm Y và g là một đồng cấu từ nhóm Y đến nhóm Z thì gf là một đồng cấu từ nhóm X đến nhóm Z.*

Chứng minh:

Giả sử f: X $\to$ Y và g: Y $\to$ Z là hai đồng cấu nhóm. Với mọi a, b thuộc X ta có:

$$gf(ab)= g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) = g(f(a))g(f(b))= gf(a)gf(b).$$

Vậy gf là một đồng cấu.

Chú ý. Vì hợp thành của hai song ánh là một song ánh nên trong định lí 2.8, nếu f và g là hai ánh xạ đẳng cấu thì gf cũng là một ánh xạ đẳng cấu. Từ đó suy ra rằng quan hệ đẳng cấu giữa các nhóm có tính chất bắc cầu. Nghĩa là cho X, Y, Z là ba nhóm.

Nếu X ≅ Y và Y ≅ Z thì X ≅ Z.

1.2.5. Đối xứng hóa

1.2.5.1. Định nghĩa

Cho X là một nửa nhóm giao hoán. Phần tử $a \in X$ được gọi là *phần tử chính quy* nếu với mọi $b, c \in X$, ab = ac kéo theo b = c.

Nửa nhóm X được gọi là chính quy nếu mọi phần tử của nó đều là chính quy.

Ví dụ 2.6:

1) Trong nửa nhóm cộng các số tự nhiên **N**, mọi phần tử đều là chính quy.

2) Trong nửa nhóm nhân các số tự nhiên **N**, mọi phần tử khác 0 đều là chính quy.

1.2.5.2. Định lí

Cho X là một vị nhóm nhân giao hoán, chính quy. Khi đó tồn tại một nhóm $\overline{X}$ và đơn cấu $\varphi : X \to \overline{X}$ từ nửa nhóm X vào $\overline{X}$ sao cho với mọi α thuộc $\overline{X}$, α có thể viết được dưới dạng $\alpha = \varphi(a)[\varphi(b)]^{-1}$ với a, b thuộc X.

Chứng minh:

Đặt $Y = X \times X = \{(a; b) \mid a, b \in X\}$

Trong tập Y ta có quan hệ hai ngôi R được xác định như sau:

Với mọi (a; b), (c; d) thuộc Y, (a; b)R(c; d) ⇔ ad = bc.

R là một quan hệ tương đương vì:

– Với mọi (a; b) thuộc Y, ab = ba nên (a; b)R(a; b) (R có tính chất phản xạ).

– Với mọi (a; b), (c; d) thuộc Y, nếu (a; b)R(c; d) thì ad = bc hay cb = da, suy ra (c; d)R(a; b) (R có tính chất đối xứng).

– Với mọi (a; b), (c; d), (e; g) thuộc Y, nếu (a; b)R(c; d) và (c; d)R(e; g) thì ad = bc và cg = de. Từ đó suy ra adg = bcg và bcg = bde. Suy ra (ag)d = (be)d.

Do X là nửa nhóm chính quy nên ta có ag = be, vậy (a; b)R(e; g). (R có tính chất bắc cầu).

Đặt $\overline{X} = Y/R$ là tập thương của Y theo quan hệ tương tương R.

Ta có $\overline{X} = \{(\overline{a; b}) \mid a, b \in X\}$.

Với $(\overline{a; b}) = \{(x; y) \in Y \mid (x; y)R(a; b)\}$, $(\overline{a; b}) = (\overline{c; d}) \Leftrightarrow ad = bc$.

Trên tập $\overline{X}$ ta định nghĩa phép toán sau:

Với mọi $(\overline{a; b})$, $(\overline{c; d})$ thuộc $\overline{X}$, $(\overline{a; b})(\overline{c; d}) = (\overline{ac; bd})$.

Phép toán này không phụ thuộc vào việc lựa chọn đại diện của mỗi lớp. Vì nếu:

$(\overline{a; b}) = (\overline{a'; b'})$, $(\overline{c; d}) = (\overline{c'; d'})$

thì có ab' = ba' và cd' = dc'. Suy ra acb'd' = bda'c'.

Vậy

$$\overline{(ac;\, bd)} = \overline{(a'c';\, b'd')} \text{ hay } \overline{(a;\, b)}\,\overline{(c;\, d)} = \overline{(a';\, b')}\,\overline{(c';\, d')}.$$

Cùng với phép toán này $\overline{X}$ là một nhóm giao hoán vì:

– Tính chất giao hoán và kết hợp của phép toán trong $\overline{X}$ được suy ra từ tính chất giao hoán và kết hợp của phép nhân trong X.

Phần tử trung lập của $\overline{X}$ đối với phép toán này là $\overline{(e;\, e)}$ trong đó e là phần tử trung lập của vị nhóm X.

Dễ thấy $\overline{(e;\, e)} = \overline{(x;\, x)}$ với mọi x thuộc X.

– Với mỗi lớp $\overline{(a;\, b)}$ thuộc $\overline{X}$, ta có $\overline{(b;\, a)}$ cũng thuộc $\overline{X}$ và

$$\overline{(a;\, b)}\,\overline{(b;\, a)} = \overline{(ab;\, ba)} = \overline{(ab;\, ab)} = \overline{(e;\, e)}.$$

Vậy $\overline{(a;\, b)}$ có phần tử đối xứng là $\overline{(b;\, a)}$.

Bây giờ xét ánh xạ φ: $X \to \overline{X}$ xác định bởi với mọi $a \in X$

$\varphi(a) = \overline{(a, e)}$.

φ là một đồng cấu vì với mọi a, b thuộc X

$\varphi(ab) = \overline{(ab;\, e)} = \overline{(a;\, e)}\,\overline{(b;\, e)} = \varphi(a)\varphi(b).$

φ là đơn ánh vì nếu φ(a) = φ(b) thì $\overline{(a;\, e)} = \overline{(b;\, e)}$ suy ra ae = eb hay a = b.

Vậy φ là một đơn cấu từ X vào $\overline{X}$.

Giả sử $\alpha = \overline{(a;\, b)}$ là một phần tử bất kì thuộc $\overline{X}$.

Ta có $\alpha = \overline{(a;\, e)}\,\overline{(e;\, b)} = \overline{(a;\, e)}[\overline{(b;\, e)}]^{-1} = \varphi(a)[\varphi(b)]^{-1}$.

Định lí được chứng minh.

Chú ý. Do có đơn cấu φ từ X vào $\overline{X}$ nên có thể coi X như một vị nhóm con của $\overline{X}$ bằng cách đồng nhất mỗi phần tử $a \in X$ với $\varphi(a) = \overline{(a;\, e)} \in \overline{X}$. Như vậy mỗi $\alpha = \overline{(a;\, b)} \in \overline{X}$, α có thể viết dưới dạng $\alpha = ab^{-1}$ với a, b thuộc X.

Đặt $\frac{a}{b} = ab^{-1}$. Ta có $\overline{X} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in X\right\}$.

Khi đó $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ và $\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

– Nếu X là một vị nhóm cộng giao hoán, chính quy thì ta có:

$$\overline{X} = \{a - b \mid a, b \in X\}$$

Trong đó:

$a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = b + c.$

$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d).$

1.2.6. Nửa nhóm sắp thứ tự

1.2.6.1. Nhắc lại về quan hệ thứ tự

Định nghĩa 2.6. Cho tập hợp X và R là một quan hệ hai ngôi trên X. R được gọi là một *quan hệ thứ tự* nếu R có các tính chất sau:

– Tính chất *phản xạ*: Với mọi $a \in X$, aRa.

– Tính chất *phản đối xứng*: Với mọi $a, b \in X$ nếu aRb và bRa thì $a = b$.

– Tính chất *bắc cầu*: Với mọi a, b, c thuộc X, nếu aRb và bRc thì aRc.

R được gọi là một *quan hệ thứ tự toàn phần* nếu nó là một quan hệ thứ tự trên X và với mọi a, b thuộc X: hoặc aRb hoặc bRa. (Khi đó ta nói rằng a và b so sánh được với nhau).

Thường một quan hệ thứ tự được kí hiệu bởi $\leq$ hoặc $\geq$.

Nếu $a \leq b$ và $a \neq b$ ta kí hiệu là $a < b$.

Định nghĩa 2.7. Cho X là một nửa nhóm giao hoán với phép toán T. Nếu trên X có một quan hệ thứ tự toàn phần $\leq$ tương thích với phép toán T, nghĩa là với mọi a, b, c thuộc X, quan hệ $a \leq b$ kéo theo $aTc \leq bTc$, thì X được gọi là một *nửa nhóm sắp thứ tự.*

Bằng cách tương tự, ta định nghĩa vị nhóm sắp thứ tự, nhóm sắp thứ tự.

Dưới đây, ta sẽ kí hiệu phép toán trong nửa nhóm sắp thứ tự bởi phép cộng (+).

1.2.6.2. Tính chất

Định lí 2.9. *Cho $(X, \leq)$ là một nửa nhóm cộng sắp thứ tự. Khi đó với mọi a, b, c, d thuộc X ta có: $a \leq b$ và $c \leq d$ kéo theo $a + c \leq b + d$.*

Chứng minh:

Vì $a \leq b$ nên suy ra $a + c \leq b + c$

và $c \leq d$ nên suy ra $b + c \leq b + d$

Do tính chất bắc cầu của quan hệ $\leq$ nên $a + c \leq b + d$.

1.2.6.3. Định nghĩa

Cho X là một vị nhóm sắp thứ tự với phần tử không là 0. X được gọi là một vị nhóm sắp thứ tự Acsimet nếu với mọi a, b thuộc X, $a > 0$, tồn tại $n \in \mathbf{N}$ sao cho $na > b$.

Bằng cách tương tự ta định nghĩa nhóm sắp thứ tự Acsimet.

Ví dụ 2.7:

– Vị nhóm cộng các số tự nhiên **N** là một vị nhóm sắp thứ tự Acsimet.

– Nhóm cộng các số nguyên **Z** là một nhóm sắp thứ tự Acsimet.

Hoạt động. tìm hiểu nửa nhóm và nhóm

Nhiệm vụ

Sinh viên tự đọc thông tin cơ bản sau đó thảo luận theo nhóm từ 3 đến 4 người để thực hiện các nhiệm vụ sau.

Nhiệm vụ 1:

Định nghĩa nửa nhóm, vị nhóm và nhóm. Xõy d?ng cỏc vớ d? minh h?a.

Nhiệm vụ 2:

Nêu và chứng minh các tính chất cơ bản của nửa nhóm và nhóm.

Nhiệm vụ 3:

Định nghĩa nửa nhóm con, nhóm con. Xây dựng các ví dụ minh họa. Nêu và chứng minh các tính chất của nhóm con.

Nhiệm vụ 4:

Định nghĩa đồng cấu nửa nhóm, đồng cấu nhúm. Xây dựng các ví dụ minh họa. Nêu và chứng minh các tính chất của đồng cấu nửa nhóm và đồng cấu nhóm.

Nhiệm vụ 5:

Định nghĩa nửa nhóm và nhóm sắp thứ tự; nửa nhóm và nhóm sắp thứ tự Acsimet. Xây dựng các ví dụ minh họa

Nhiệm vụ 6:

Thực hành chứng minh một tập hợp với phép toán đã cho là một nửa nhóm, một nhóm; nửa nhóm con, nhóm con của một vị nhóm hay một nhóm.

Nhiệm vụ 7:

Th?c hành chứng minh một ánh xạ đã cho là một đồng cấu, đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu của các nửa nhóm hay các nhóm.

Nhiệm vụ 8:

Th?c hành chứng minh hai nửa nhóm, nhóm đẳng cấu với nhau.

Đánh giá

Hãy trả lời các câu hỏi sau đây:

1. Định nghĩa nửa nhóm, vị nhóm. Cho ví dụ về nửa nhóm và vị nhóm.

2. Chứng minh rằng trong một nửa nhóm, tích (hoặc tổng) của nhiều phần tử không phụ thuộc vào việc sắp xếp các dấu ngoặc.

3. Định nghĩa nửa nhóm con. Cho ví dụ về nửa nhóm con.

4. Định nghĩa nhóm, nhóm Aben. Cho ví dụ về nhóm và nhóm Aben.

5. Phát biểu và chứng minh các tính chất của nhóm.

6. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một nửa nhóm nhân X trở thành một nhóm là: với mọi a, b thuộc X, các phương trình $ax = b$ và $ya = b$ có nghiệm trong X.

7. Định nghĩa nhóm con. Cho ví dụ về nhóm con.

8. Phát biểu và chứng minh các điều kiện tương đương với định nghĩa của một nhóm con.

9. Định nghĩa đồng cấu, đơn cấu, toàn cấu, đẳng cấu nửa nhóm và nhóm. Cho ví dụ về các loại ánh xạ kể trên.

10. Phát biểu và chứng minh các tính chất của đồng cấu nhóm.

11. Định nghĩa nửa nhóm, nhóm sắp thứ tự. Cho ví dụ về nửa nhóm, nhóm sắp thứ tự.

12. Định nghĩa nửa nhóm, nhóm sắp thứ tự Acsimet. Cho ví dụ về nửa nhóm, nhóm sắp thứ tự Acsimet.

Hãy làm các bài tập sau đây:

1. Cho X là tập các số nguyên chia hết cho 5.

a) Chứng minh rằng X là một vị nhóm với phép cộng thông thường các số.

b) Chứng minh rằng X là một nửa nhóm nhưng không phải là một vị nhóm với phép nhân thông thường các số.

2. Cho N^* là tập các số tự nhiên khác 0. Ta định nghĩa

$$m \otimes n = m + n - 1 \text{ với mọi } m, n \in \mathbf{N}^*$$

a) Tìm $2 \otimes 1$; $4 \otimes 5$; $5 \otimes 5$

b) Chứng minh rằng $\mathbf{N}^*$ là một vị nhóm giao hoán với phép toán $\otimes$.

3. Cho tập hợp X là tập hợp các số nguyên lẻ. Chứng minh rằng X là một vị nhóm con của vị nhóm nhân các số nguyên **Z** nhưng không là nửa nhóm con của nửa nhóm cộng **Z**.

4. Giả sử X là một tập hợp tùy ý. Xét phép toán hai ngôi:

$$*:\ X^2 \ \to\ X$$

$$(x; y)\ \text{a}\ \ x * y = x$$

Chứng minh X là một nửa nhóm với phép toán hai ngôi trên. Nửa nhóm đó có giao hoán không? Có đơn vị không?

5. Lập các bảng toán cho các tập hợp gồm hai phần tử, ba phần tử để được nhóm hai phần tử, ba phần tử.

6. Chứng minh các tập hợp sau đây với phép toán thông thường lập thành một nhóm:

i) Tập hợp các số nguyên với phép cộng.

ii) Tập hợp các số hữu tỉ với phép cộng.

iii) Tập hợp các số thực với phép cộng.

iv) Tập hợp các số phức với phép cộng.

v) Tập hợp các số nguyên là bội của một số nguyên m cho trước với phép cộng.

vi) Tập hợp các số thực dương với phép nhân.

vii) Tập hợp các số thực khác 0 với phép nhân.

viii) Tập hợp các số thực có dạng $a + b\sqrt{3}$, a, b $\in$ **Z** với phép cộng.

ix) Tập hợp các số thực có dạng $a + b\sqrt{3}$, a, b $\in$ **Q**, $a^2 + b^2 \neq 0$ với phép nhân.

7. Cho tập hợp A = {0, 1, 2}. Chứng minh rằng A là một nhóm Aben với phép toán $\oplus$ cho trong bảng sau:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

8. Chứng minh rằng tập hợp các số nguyên **Z** là một nhóm Aben với phép toán sau:

$a \otimes b = a + b - 1$ với mọi a, b thuộc **Z**.

9. Chứng minh rằng tập hợp A = {–1, 1} là một nhóm con của nhóm nhân các số hữu tỉ khác 0, nhưng không là nhóm con của nhóm cộng các số nguyên.

10. Cho X là một nhóm với đơn vị là e. Chứng minh rằng nếu $x^2 = e$ với mọi $x \in X$ thì X là một nhóm Aben.

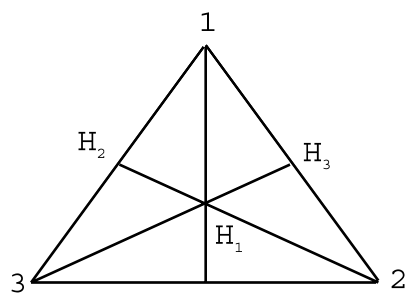
11. Giả sử a và b là hai phần tử của một nhóm X sao cho ab = ba.

Chứng minh $(ab)^n$ = anbn với mọi số tự nhiên n >1.

Nếu a và b là hai phần tử sao cho $(ab)^2 = a^2b^2$ thì có suy ra ab = ba hay không?

12. Chứng minh rằng trong nhóm cộng các số nguyên **Z**, một bộ phận A của **Z** là một nhóm con của **Z** nếu và chỉ nếu A có dạng A = mZ, m $\in$ **Z**.

13. Kí hiệu Δ_3 là nhóm đối xứng của một tam giác đều. $\Delta_3 = \{1_\Delta, R, R^2, D_1, D_2, D_3\}$. Trong đó R là phép quay tâm O, góc quay 120^o, Di là phép đối xứng qua đường cao đi qua đỉnh i (i = 1, 2, 3). Hãy lập bảng toán cho Δ_3 và suy ra rằng $\Delta_3 \cong S_3$. (S_3 là nhóm các phép thế của $\{1, 2, 3\}$).



14. Cho ánh xạ

f: **N** $\to$ **N**,

n a 5n.

a) Chứng minh rằng f là một tự đồng cấu của nửa nhóm cộng các số tự nhiên **N**.

b) Hãy tìm f(**N**) và $f^{-1}(0)$.

15. Cho X là một nhóm giao hoán, chứng minh rằng ánh xạ

$\varphi: X \to X$

a a ak

với k là một số nguyên cho trước, là một đồng cấu. Xác định Kerφ.

16. Cho X là một nhóm, chứng minh rằng ánh xạ

$\varphi: X \to X$

a a a^{-1}

là một tự đẳng cấu của nhóm X khi và chỉ khi X là một nhóm Aben.

Tiểu chủ đề 1.3. Vành và trường

Thông tin cơ bản

1.3.1. Định nghĩa vành và trường

1.3.1.1. Định nghĩa

Ta gọi là *vành* một tập hợp X cùng với hai phép toán cộng và nhân thoả mãn các tiên đề sau:

1) (X, +) là một nhóm Aben.

2) (X, .) là một nửa nhóm.

3) Có luật phân phối hai bên của phép nhân đối với phép cộng, nghĩa là với mọi a, b, c $\in$ X ta có:

$$a(b + c) = ab + ac; (b + c)a = ba + ca.$$

– Nếu phép nhân có tính chất giao hoán thì X được gọi là *vành giao hoán.*

– Nếu trong X có phần tử trung lập đối với phép nhân thì X được gọi là *vành có đơn vị.*

Ví dụ 3.1:

1) Tập các số nguyên **Z** cùng với phép cộng và nhân thông thường là một vành giao hoán, có đơn vị.

2) Tập các số hữu tỉ **Q** cùng với phép cộng và nhân thông thường là một vành giao hoán, có đơn vị.

3) Tập các số thực **R** với phép cộng và nhân thông thường là một vành giao hoán, có đơn vị.

4) Tập X = $\left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\right\}$ cùng hai phép toán cộng và nhân cho trong các bảng sau là một vành giao hoán, có đơn vị.

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

×	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

1.3.1.2. Tính chất

Cho X là một vành. Theo định nghĩa (X, +) là một nhóm Aben nên nó có đầy đủ các tính chất của một nhóm cộng giao hoán. Cụ thể là:

1) Phần tử không của nhóm X là duy nhất. Ta kí hiệu nó là 0 và cũng gọi là phần tử không của vành X.

2) Mỗi phần tử a thuộc X có một phần tử đối duy nhất là –a.

3) Với mọi a, b thuộc X, phương trình x + a = b (và a + y = b) có nghiệm duy nhất là b – a.

Ngoài ra, trong vành X còn có các tính chất sau:

4) Với mọi a thuộc X, a0 = 0a = a.

Thật vậy, với $x \in X$ ta có $x + 0 = x$ nên $a(x + 0) = ax$

Suy ra: $ax + a0 = ax$, vậy $a0 = 0$. Tương tự ta có $0a = 0$.

5) Với mọi a, b, c thuộc X ta có $a(b - c) = ab - ac$.

Thật vậy, vì $(b - c) + c = b$ nên $a[(b - c) + c] = ab$

$\Rightarrow a(b - c) + ac = ab$

$\Rightarrow a(b - c) = ab - ac$.

Tương tự ta cũng có: $(b - c)a = ba - ca$.

6) Với mọi a, b thuộc X ta có

$(-a)b = a(-b) = -ab$; $(-a)(-b) = ab$.

Thật vậy, $-a = 0 - a \Rightarrow (-a)b = (0 - a)b = 0b - ab = -ab$.

Tương tự:

$a(-b) = -ab$; $(-a)(-b) = -[a(-b)] = -(-ab) = ab$.

Định nghĩa 3.1. Cho X là một vành giao hoán, phần tử $a \in X$ được gọi là ước của 0 nếu $a \neq 0$ và tồn tại $b \in X$, $b \neq 0$ sao cho $ab = 0$.

Định lí 3.1. *Cho X là một vành giao hoán. Các khẳng định sau đây tương đương với nhau:*

(i) $\forall a, b \in X, ab = 0 \Rightarrow a = 0$ *hoặc* $b = 0$.

(ii) *X không có ước của 0.*

(iii) $\forall a, b, c \in X$ *(*$a \neq 0$ *và* $ab = ac$*)* $\Rightarrow b = c$.

Chứng minh:

(i) $\Rightarrow$ (ii). Giả sử $a \neq 0$ và $b \neq 0$ mà $ab = 0$, theo (i) suy ra $a = 0$ hoặc $b = 0$, mâu thuẫn vậy $ab \neq 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Giả sử $ab = 0$, nếu cả $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì theo (ii) $ab \neq 0$ trái với giả thiết. Vậy suy ra $a = 0$ hoặc $b = 0$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Giả sử $a \neq 0$ và $ab = ac \Rightarrow ab - ac = 0 \Rightarrow a(b - c) = 0$, vì $a \neq 0$ nên $b - c = 0$ hay $b = c$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Giả sử $ab = 0$ và $a \neq 0 \Rightarrow ab = a0$ mà $a \neq 0$ theo (iii) suy ra $b = 0$.

1.3.1.3. Miền nguyên

Định nghĩa 3.2. Một vành giao hoán, có đơn vị khác 0 và thoả mãn một trong ba điều kiện tương đương trong định lí 3.1 được gọi là một *miền nguyên*.

Ví dụ 3.2:

1) Vành số nguyên **Z** là một miền nguyên.

2) Vành X trong ví dụ 3.1 không phải là miền nguyên.

1.3.1.4. Trường

Định nghĩa 3.3. Một vành giao hoán, có đơn vị khác 0 và trong đó mọi phần tử khác không đều có nghịch đảo được gọi là một *trường*.

Nhận xét. Cho X là một vành giao hoán, có đơn vị khác 0, X là một trường khi và chỉ khi tập X^*, các phần tử khác 0 của X, lập thành một nhóm Aben với phép nhân. Nhóm này được gọi là nhóm nhân các phần tử khác không của trường X.

Ví dụ 3.3:

1) Vành số hữu tỉ **Q**, vành số thực **R** là những trường.

2) Tập X = $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ với hai phép toán sau là một trường.

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\times$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

3) Vành số nguyên **Z** không phải là một trường.

Định lí 3.2. *Mọi trường đều là miền nguyên.*

Chứng minh:

Giả sử X là một trường. Khi đó nó là một vành giao hoán, có đơn vị khác 0. Giả sử a, b, c thuộc X mà $a \neq 0$ và $ab = ac \Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \Rightarrow (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c \Rightarrow b = c$.

Vậy X là một miền nguyên.

1.3.2. Vành con và trường con

1.3.2.1. Định nghĩa

Cho vành X (trường X) và A là một tập con ổn định đối với phép cộng và nhân trong X. Nếu A cùng với các phép toán cảm sinh là một vành (trường) thì A được gọi là một vành con (trường con) của X.

Định lí 3.3. *Cho A là một tập con khác rỗng của vành X.*

A là vành con của X khi và chỉ khi với mọi a, b thuộc A ta có a – b thuộc A và ab $\in$ A.

Định lí 3.4. *Cho A là một tập con của trường X, A chứa nhiều hơn một phần tử. A là một trường con của X khi và chỉ khi nó thoả mãn các điều kiện sau:*

(i) Với mọi a, b thuộc A ta có a – b $\in$ A;

(ii) Với mọi a, b thuộc A, $b \neq 0$ ta có $ab^{-1} \in A$.

Việc chứng minh định lí 3.3 và 3.4 xin giành cho độc giả.

Ví dụ 3.4:

1) Vành số nguyên **Z** là một vành con của vành số hữu tỉ **Q**.

2) Tập mZ = $\{mk \mid k \in \mathbf{Z}\}$, m là một số nguyên cho trước, là một vành con của vành số nguyên **Z**.

3) Trường số hữu tỉ **Q** là một trường con của trường số thực **R**.

4) Tập $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ là một trường con của trường số thực **R**.

5) Cho X là một vành tùy ý. X bao giờ cũng có hai vành con là X và {0}.

1.3.3. Đồng cấu

1.3.3.1. Định nghĩa

Cho X và Y là hai vành. ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là một đồng cấu từ vành X đến vành Y nếu và chỉ nếu với mọi a, b thuộc X, ta có $f(a + b) = f(a) + f(b)$ và $f(ab) = f(a)f(b)$.

Cũng giống như đối với đồng cấu nhóm, nếu X = Y thì đồng cấu f được gọi là tự đồng cấu của vành X.

Nếu f là song ánh (đơn ánh, toàn ánh) thì đồng cấu được gọi là một ánh xạ đẳng cấu (đơn cấu, toàn cấu). Nếu có một ánh xạ đẳng cấu từ vành X đến vành Y thì ta nói rằng hai vành X và Y đẳng cấu với nhau và kí hiệu là $X \cong Y$.

Đối với trường ta có định nghĩa tương tự.

Ví dụ 3.5:

1) Cho X là một vành tùy ý. ánh xạ đồng nhất idx: $X \to X$ là một tự đẳng cấu của vành X.

2) Cho X và Y là hai vành tùy ý. OY là phần tử không của vành Y. ánh xạ

$$\theta: X \to Y$$
$$x \mapsto OY$$

là một đồng cấu.

3) ánh xạ

$$f: \mathbf{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbf{Q}(\sqrt{2})$$
$$a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$$

là một tự đẳng cấu của trường $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

1.3.3.2. Tính chất

Cho $f: X \to Y$ là một đồng cấu từ vành X đến vành Y. Khi đó:

1) f(OX) = OY, OX và OY theo thứ tự là phần tử không của vành X và vành Y.

2) $f(-a) = -f(a)$ với mọi a thuộc X.

3) $f(a - b) = f(a) - f(b)$ với mọi a, b thuộc X.

4) Nếu A là một vành con của X thì f(A) là một vành con của Y.

5) Nếu B là một vành con của Y thì $f^{-1}(B)$ là một vành con của X.

Chứng minh:

Các tính chất 1), 2) và 3) có được do f là một đồng cấu từ nhóm cộng X đến nhóm cộng Y.

Bây giờ ta chứng minh tính chất 4) và 5).

4) Giả sử A là một vành con của vành X. Khi đó $O_X \in A$ và $O_Y = f(O_X) \in f(A)$. Nếu y_1 và y_2 là hai phần tử thuộc f(A) thì tồn tại a_1, a_2 thuộc A sao cho $y_1 = f(a_1)$, $y_2 = f(a_2)$. Suy ra

$$y_1 - y_2 = f(a_1) - f(a_2) = f(a_1 - a_2) \in f(A).$$

và

$$y_1y_2 = f(a_1)f(a_2) = f(a_1a_2) \in A.$$

Vậy f(A) là một vành con của Y.

5) Giả sử B là một vành con của vành Y. Khi đó $f(O_X) = O_Y \in B$ nên $O_X \in f^{-1}(B)$. Giả sử x_1, x_2 là hai phần tử thuộc $f^{-1}(B)$ khi đó $f(x_1) \in B$ và $f(x_2) \in B$. Từ đó suy ra $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) \in B$ và $f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2) \in B$. Nghĩa là $x_1 - x_2 \in f^{-1}(B)$ và $x_1x_2 \in f^{-1}(B)$.

Vậy $f^{-1}(B)$ là một vành con của vành X.

Định lí 3.5. *Cho f: X → Y và g: Y → Z là hai đồng cấu vành. Khi đó gf là một đồng cấu từ vành X đến vành **Z**.*

Chứng minh:

Giả sử f: X → Y và g: Y → Z là hai đồng cấu, với mọi a, b thuộc X ta có:

$$\begin{aligned} gf(a+b) &= g(f(a+b)) = g(f(a) + f(b)) = g(f(a)) + g(f(b)) \\ &= gf(a) + gf(b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} gf(ab) &= g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) = g(f(a))g(f(b)) \\ &= gf(a)gf(b). \end{aligned}$$

Nhận xét. Cũng như đối với đồng cấu nhóm. Nếu f, g là hai đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu) thì gf cũng là một đơn cấu (toàn cấu, đẳng cấu).

1.3.4. Vành, trường sắp thứ tự

1.3.4.1. Định nghĩa

Cho X là một vành giao hoán, có đơn vị. Nếu trên X có một quan hệ thứ tự toàn phần ≤ sao cho:

(i) Với mọi a, b, c thuộc X, $a \le b$ kéo theo $a + c \le b + c$;

(ii) Với mọi a, b, c thuộc X, nếu $a \le b$ và $0 \le c$ thì $ac \le bc$

thì ta gọi X là vành sắp thứ tự.

Cho $(X, +, ., \leq)$ là một vành sắp thứ tự. Nếu $x \geq 0$ và $x \neq 0$ thì ta nói $x > 0$.

Đặt $P = \{x \in X \mid x > 0\}$. P được gọi là tập các phần tử dương của X.

$-P = \{x \in X \mid -x \in P\}$. $-P$ được gọi là tập các phần tử âm của X.

Khi đó ta có các tính chất sau:

1) Nếu a, b thuộc P thì $a + b \in P$.

2) $\forall x \in X, x \in P \Leftrightarrow -x \in P$.

3) $P \cup \{0\} \cup (-P) = X$; $P \cap (-P) = \varnothing$.

Định nghĩa 3.4. Vành X được gọi là một vành sắp thứ tự Acsimet nếu với mọi a, b thuộc X, $a > 0$, tồn tại số tự nhiên n sao cho $na > b$.

Đối với trường ta có định nghĩa tương tự.

Ví dụ 3.6:

1^0) Vành số nguyên **Z** là một vành sắp thứ tự Acsimet.

Thật vậy. Trên **Z** ta định nghĩa quan hệ $\leq$ như sau: Với mọi a, b thuộc **Z**, $a \leq b$ khi và chỉ khi tồn tại số nguyên không âm c sao cho $a + c = b$. Rõ ràng $\leq$ là một quan hệ thứ tự toàn phần trên **Z**. Mặt khác, với mọi $a, b, c \in$ **Z** ta có:

i) $a \leq b$ suy ra tồn tại d không âm sao cho $a + d = b$, cộng cả hai vế với c ta được

$a + d + c = b + c$ hay $(a + c) + d = b + c$. Vậy $a + c \leq b + c$.

ii) Giả sử $0 \leq c$ và $a \leq b$, suy ra $a + d = b$ với d là số không âm. Nhân cả hai vế với c ta được $ac + dc = bc$. Vì c và d đều là hai số không âm nên dc cũng không âm. Vậy $ac \leq bc$.

Vậy **Z**, với quan hệ $\leq$ là một vành sắp thứ tự.

Bây giờ ta chứng minh vành số nguyên **Z** là một vành sắp thứ tự Acsimet.

Thật vậy, giả sử a, b thuộc **Z**, $0 < a$.

+) Nếu $b \leq 0$ thì ta có $b < a = 1.a$. Trong trường hợp này $n = 1$.

+) Nếu $0 < b$ thì ta có $|b| + 1 > b$ và do đó $b < (|b| + 1)a$. Trong trường hợp này $n = |b| + 1$.

2^0) Trường số hữu tỉ **Q** là một trường sắp thứ tự Acsimet.

Hoạt động. Tìm hiểu vành, miền nguyên và trường

Nhiệm vụ

Giáo viên tổ chức cho sinh viên đọc phần thông tin cơ bản và thực hiện các nhiệm vụ sau.

Nhiệm vụ 1:

Định nghĩa vành, miền nguyên và trường. Xõy d?ng cỏc vớ d? minh h?a.

Nhiệm vụ 2:

Phát biểu và chứng minh các tính chất của vành, miền nguyên và trường.

Nhiệm vụ 3:

Định nghĩa vành con, trường con. Các điều kiện tương đương với vành con, trường con.

Nhiệm vụ 4:

Định nghĩa đồng cấu, đơn cấu, toàn cấu và đẳng cấu. Các tính chất của đồng cấu, đẳng cấu.

Nhiệm vụ 5:

Th?c hành ch?ng minh một tập hợp với phép toán đã cho là một vành, một miền nguyên, một trường, một vành con, trường con.

Nhiệm vụ 6:

Cách chứng minh một ánh xạ đã cho là một đồng cấu, đơn cấu, đẳng cấu.

Nhiệm vụ 7:

Định nghĩa vành, trường sắp thứ tự Acsimet. Xõy d?ng cỏc vớ d? minh h?a.

Đánh giá

Hãy trả lời các câu hỏi sau đây:

1. Định nghĩa vành, miền nguyên. Cho ví dụ về vành và miền nguyên.

2. Phát biểu và chứng minh các tính chất của vành và miền nguyên.

3. Định nghĩa và cho ví dụ về trường.

4. Phát biểu và chứng minh các tính chất của trường.

5. Định nghĩa vành con, trường con. Cho ví dụ về vành con.

6. Phát biểu và chứng minh các tính chất đặc trưng của vành con và trường con.

7. Định nghĩa đồng cấu vành, cho ví dụ về đồng cấu vành.

8. Phát biểu và chứng minh các tính chất của đồng cấu vành.

9. Định nghĩa vành, trường sắp thứ tự. Cho ví dụ về vành, trường sắp thứ tự.

10. Định nghĩa vành, trường sắp thứ tự Acsimet. Cho ví dụ về vành, trường sắp thứ tự Acsimet.

Giải các bài tập sau đây:

1. Gọi X và Y là tập các số nguyên chia hết cho 3 và 5. Chứng minh rằng X và Y cùng với phép cộng và phép nhân thông thường đều là những vành giao hoán. Các vành này có đơn vị không?

2. Đặt $C_{100} = \{a \in \mathbf{Z}$: a chẵn, $|a| \le 100\}$ và $B_{100} = \{a \in \mathbf{Z}$: $|a| \le 100\}$. Các tập C_{100} và B_{100} cùng với phép cộng và phép nhân thông thường có lập thành một vành không? Giải thích tại sao?

3. Cho (R, +, .) là một vành, với a, b $\in$ R ta định nghĩa

$a \times a = ab - ba$.

Chứng minh rằng phép toán $\times$ thoả mãn tính chất sau:

i) $a \times a = 0$

ii) $a \times b = (-b) \times a$

iii) $[(a \times b) \times c] + [(b \times c) \times a] + [(c \times a) \times b] = 0$

4. Chứng minh rằng nếu vành R thoả mãn $a^2 = 0$ với mọi a $\in$ R thì ab = – ba với mọi a, b $\in$ R.

5. Cho k là một số nguyên lớn hơn 1. Chứng minh rằng $(\mathbf{Zk}, \oplus, \otimes)$ là một vành giao hoán có đơn vị, trong đó **Zk** và các phép toán $\oplus$, $\otimes$ được cho bởi các quy tắc sau:

Zk = $\{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{k-1}\}$ và $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{c}$ với c là dư của phép chia a + b cho k; $\overline{a} \otimes \overline{b} = \overline{d}$ với d là dư của phép chia ab cho k.

6. a) Cho (R, +, .) là một vành giao hoán. Chứng minh rằng phần tử a $\in$ R khác 0 là ước của 0 khi và chỉ khi a không phải là phần tử chính quy đối với phép nhân.

b) Tìm các ước của 0 trong vành $(\mathbf{Z}_6, \oplus, \otimes)$ và trong vành $(\mathbf{Z}_{15}, \oplus, \otimes)$.

7. Chứng minh rằng ánh xạ f: $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ là tự đồng cấu vành $\Leftrightarrow$ f(a) = 0 hoặc f(a) = a với mọi $a \in \mathbf{Z}$.

8. Chứng minh rằng 0 và 1 là phần tử trung lập và đơn vị của vành sắp thứ tự thì 0 < 1.

9. Chứng tỏ rằng vành $(\mathbf{Zk}, \oplus, \otimes)$ với $k \ge 2$ không thể sắp thứ tự.

10. Chứng minh rằng $(\mathbf{Zk}, \oplus, \otimes)$ là một trường khi và chỉ khi k là một số nguyên tố.

11. Cho: X = $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$. Chứng minh rằng X cùng với phép cộng và phép nhân thông thường là một trường.

12. Hãy tìm các tự đồng cấu của trường số hữu tỉ **Q**.

13. Cho (R, +, .) là một vành. Tìm giá trị chân lí của các mệnh đề sau (có giải thích):

i) Phép cộng có tính chất giao hoán.

ii) Phép nhân có tính chất giao hoán.

iii) Phép cộng có phần tử trung hòa và phép nhân có phần tử đơn vị.

iv) Tập R có nhiều hơn một phần tử.

v) Tập R có vô số phần tử.

14. Cho T = {a, b, c}. Hãy xây dựng hai phép toán để với hai phép toán đó T là một trường. Trường T có thể sắp thứ tự được không? Tại sao?

Thông tin phản hồi cho chủ đề 1

Tiểu chủ đề 1.1

1. a) – Phép cộng và phép nhân là phép toán hai ngôi trên cả 4 tập **N**, **Z**, **Q**, $\mathbf{Q}^+$.

– Phép trừ là phép toán hai ngôi trên tập **Z** và **Q**.

– Phép chia là phép toán hai ngôi trên $\mathbf{Q}^+$.

b) – Đối với phép cộng: các tập **N**, **Z**, **Q** có phần tử trung lập là số không (0). Phép cộng có tính chất giao hoán.

– Đối với phép nhân: các tập **N**, **Z**, **Q**, $\mathbf{Q}^+$ có phần tử trung lập là 1, phép nhân có tính chất giao hoán.

– Đối với phép trừ: các tập **Z**, **Q** không có phần tử trung lập và phép trừ không có tính chất giao hoán.

– Phép chia các số hữu tỉ dương không có tính chất giao hoán và không có phần tử trung lập.

2. Phép $\oplus$ có tính chất giao hoán và kết hợp, có phần tử trung lập là 0; phần tử đối xứng của 0 là 0; phần tử đối xứng của 1 là 2; phần tử đối xứng của 2 là 1.

3. Phép toán $*$ chỉ có tính chất kết hợp. Y không có phần tử trung lập.

4. Phép toán T: aTb = ab trên tập các số tự nhiên $\mathbf{N}^*$ không có tính chất kết hợp, cũng không có tính chất giao hoán.

$\mathbf{N}^*$ không có phần tử trung lập.

5. a) Phép toán $*$ có tính chất giao hoán và kết hợp.

b) Phép toán $\otimes$ không có tính chất giao hoán, không có tính chất kết hợp.

c) Phép $\oplus$ có các tính chất giao hoán và kết hợp.

6. a) Tập các số chẵn A ổn định đối với phép cộng các số nguyên.

b) Tập các số nguyên chẵn A và tập các số nguyên lẻ đều ổn định đối với phép nhân các số nguyên.

7. Đặt $m\mathrm{Z} = \{ mk \mid k \in \mathbf{Z}\}$ là tập các số nguyên là bội của m. Khi đó với mọi a = mk, b = ml thuộc mZ, ta có: $a + b = mk + ml = m(k + l) \in m\mathrm{Z}$.

8. a) Tập A = {–1, 1} không ổn định đối với phép cộng vì $-1 + 1 = 0 \notin A$.

b) Tập $B = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z}, a \text{ lẻ}, b \neq 0\}$ không ổn định đối với phép cộng vì $\frac{1}{5} \in B$ nhưng $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \notin B$.

c) Tập $C = \{\frac{a}{b} \mid \frac{a}{b}$ là phân số thập phân$\}$ ổn định đối với phép cộng vì:

Nếu $u = \frac{a}{10^m}$, $v = \frac{b}{10^n}$ là hai phân số thập phân ($m \leq n$) thì $u + v = \frac{\left(10^{n-m}\right)a + b}{10^n} \in C$.

9. a) Tập $A = \{-1, 1\}$ ổn định đối với phép nhân thể hiện trong bảng sau:

$\cdot$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

b) Tập B ổn định đối với phép nhân vì: $\frac{a}{b} \in B$, $\frac{c}{d} \in B$, a và c là số lẻ nên ac là số lẻ do đó $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \in B$.

c) Tập C các phân số thập phân ổn định đối với phép nhân vì

$$\frac{a}{10^m}, \frac{b}{10^n} \in C \text{ ta có: } \frac{a}{10^m}\frac{b}{10^n} = \frac{ab}{10^{m+n}} \in C.$$

Tiểu chủ đề 1.2

1. a) Đặt $5\mathbf{Z} = \{5k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ là tập các số nguyên chia hết cho 5. Khi đó: $a = 5k$, $b = 5l \in 5\mathbf{Z}$ ta có $a + b = 5k + 5l = 5(k + l) \in 5\mathbf{Z}$.

Vậy phép cộng là một phép toán hai ngôi trên $5\mathbf{Z}$.

Vì phép cộng các số nguyên có tính chất kết hợp nên phép cộng trong $5\mathbf{Z}$ cũng có tính chất kết hợp.

Ta có: $0 = 5.0 \in 5\mathbf{Z}$.

Vậy $5\mathbf{Z}$ là một vị nhóm đối với phép cộng.

b) $5\mathbf{Z}$ là một nửa nhóm với phép nhân vì: với mọi $a = 5k$, $b = 5l \in 5\mathbf{Z}$ ta có: $ab = (5k)(5l) = 5(5kl) \in 5\mathbf{Z}$. Hơn nữa phép nhân các số nguyên có tính chất kết hợp. Nhưng $5\mathbf{Z}$ không là một vị nhóm vì $1 \notin 5\mathbf{Z}$.

2. a) $2 \otimes 1 = 2 + 1 - 1 = 2$; $4 \otimes 5 = 4 + 5 - 1 = 8$; $5 \otimes 5 = 5 + 5 - 1 = 9$.

b) Rõ ràng nếu $a, b \in \mathbf{N}^*$ thì $a \otimes b = a + b - 1 \in \mathbf{N}^*$ vậy $\otimes$ là một phép toán hai ngôi trên $\mathbf{N}^*$.

Phép $\otimes$ có tính chất kết hợp vì với mọi $a, b, c \in \mathbf{N}^*$

$$\begin{aligned}(a \otimes b) \otimes c &= (a + b - 1) \otimes c = [\, a + (b - 1 + c)] - 1 \\ &= a + [(b + c) - 1] - 1 = a \otimes (b + c - 1) \\ &= a \otimes (b \otimes c).\end{aligned}$$

Trong $\mathbf{N}^*$ có phần tử trung lập là 1 vì $a \otimes 1 = a + 1 - 1 = a$ với mọi $a \in \mathbf{N}^*$. Hơn nữa phép toán $\otimes$ còn có tính chất giao hoán vì với mọi $a, b \in \mathbf{N}^*$

$a \otimes b = a + b - 1 = b + a - 1 = b \otimes a.$

Vậy ($\mathbf{N}^*$, $\otimes$) là một vị nhóm giao hoán.

3. Đặt X là tập các số lẻ. Khi đó: $X = \{2k + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\}$

Rõ ràng $1 \in X$. Hơn nữa nếu $a = 2k + 1$, $b = 2l + 1 \in X$ thì

$ab = (2k + 1)(2l + 1) = 2(2kl + k + l) + 1 \in X.$

Vậy X là vị nhóm con của vị nhóm nhân các số nguyên.

X không là nửa nhóm con của nửa nhóm cộng các số nguyên vì X không ổn định đối với phép cộng. Ta có 3 và 5 là hai số thuộc X nhưng $3 + 5 = 8 \notin X$

4. Rõ ràng phép toán $*$: $a * b = a$ có tính chất kết hợp vì với mọi a, b, c thuộc X ta có:

$(a * b) * c = a * c = a$; $a * (b * c) = a * b = a$

Vậy $a * (b * c) = (a * b) * c$.

Nếu X có nhiều hơn một phần tử thì phép toán $*$ không giao hoán vì giả sử a, b là hai phần tử khác nhau thuộc X, ta có $a * b = a$; $b * a = b$.

Như vậy $a * b \neq b * a$.

X cũng không có đơn vị vì giả sử $e \in X$ là đơn vị của X, và $a \in X$, $a \neq e$ ta có

$a * e = a$; $e * a = e$.

Như vậy $a * e \neq e * a$. Mâu thuẫn.

5. Cho X = {a, b} để X là một nhóm, trước hết ta chọn một phần tử làm phần tử trung lập. Vì trong một nhóm có luật giản ước cho nên các kết quả tính trong mỗi dòng và mỗi cột phải khác nhau. Cuối cùng ta có:

*	a	b
a	a	b
b	b	a

Tương tự, Y = {a, b, c} ta có

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Chú ý: Các kết quả tính, trong mỗi dòng, mỗi cột phải khác nhau chỉ là điều kiện cần để ta có một nhóm. Vì vậy sau khi lập xong bảng toán cần chỉ rõ phần tử đối xứng của mỗi phần tử của tập đang xét là gì. Cần chứng minh tính chất kết hợp của phép toán vừa nêu.

6. i) – iv) Các kết quả này được suy ra từ các tính chất của phép cộng thông thường các số.

v) Đặt mZ = $\{mk \mid k \in \mathbf{Z}\}$ là tập các số nguyên là bội của m. Ta có thể chỉ cần chứng minh mZ là nhóm con của nhóm cộng các số nguyên **Z**. Rõ ràng $0 = m0 \in \mathbf{Z}$.

Giả sử $a = mk$, $b = ml \in mZ$. Khi đó:

$$a - b = mk - ml = m(k - l) \in mZ.$$

Vậy mZ là một nhóm con của **Z**.

viii) Đặt $X = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. Khi đó X là tập con của tập các số thực **R**. Để chứng minh X là một nhóm với phép cộng, ta chỉ cần chứng minh X là nhóm con của nhóm cộng các số thực.

Rõ ràng với mọi $a \in \mathbf{Z}$, $a = a + 0\sqrt{3} \in X$.

Giả sử $\alpha = a + b\sqrt{3}$ và $\beta = c + d\sqrt{3}$ là hai phần tử bất kì thuộc X. Khi đó a, b, c, d là những số nguyên, do đó a – c và b – d cũng là những số nguyên. Vậy

$$\alpha - \beta = (a + b\sqrt{3}) - (c + d\sqrt{3}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{3} \in X$$

ix) Đặt $Y = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Q}, a^2 + b^2 \neq 0\}$.

Khi đó Y là tập con của tập các số thực khác 0. Ta sẽ chứng minh Y là nhóm con của nhóm nhân các số thực khác 0.

Ta có $1 = 1 + 0\sqrt{3} \in Y$.

Giả sử $\alpha = a + b\sqrt{3} \in Y$, $\beta = c + d\sqrt{3} \in Y$ như vậy α và β là hai số thực khác 0 và ta có:

$$\alpha \,.\, \beta^{-1} = \frac{a + b\sqrt{3}}{c + d\sqrt{3}} = \frac{\left(a + b\sqrt{3}\right)\left(c - d\sqrt{3}\right)}{c^2 - 3d^2}$$

$$= \frac{ac - 3bd}{c^2 - 3d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 3d^2}\sqrt{3} \in Y.$$

Vậy Y là nhóm nhân các số thực khác 0. Do đó nó là một nhóm với phép nhân.

7. Nhìn vào bảng toán ta thấy:

– Phép $\oplus$ có tính chất giao hoán (nó đối xứng qua đường chéo chính).

– Phần tử trung lập là 0.

– Phần tử đối xứng của 0 là 0.

– Phần tử đối xứng của 1 là 2.

– Phần tử đối xứng của 2 là 1.

Theo quy tắc phép toán $\oplus$ ta thấy $\forall a, b \in A$, $a \oplus b = c$ với c là dư của phép chia a + b cho 3. Vì phép cộng các số nguyên có tính chất kết hợp nên suy ra phép $\oplus$ ở đây cũng có tính chất kết hợp.

Vậy (A, ⊕) là một nhóm Aben.

8. Rõ ràng nếu a, b $\in$ **Z** thì $a \otimes b = a + b - 1 \in \mathbf{Z}$

Vậy ⊗ là một phép toán hai ngôi trên **Z**.

Phép toán ⊗ có tính chất kết hợp vì:

$\forall a, b, c \in \mathbf{Z}$,

$(a \otimes b) \otimes c = (a + b - 1) \otimes c = a + b - 1 + c - 1 = a + b + c - 2;$

$a \otimes (b \otimes c) = a \otimes (b + c - 1) = a + b + c - 1 - 1 = a + b + c - 2$

hay $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$.

Phép toán ⊗ có tính chất giao hoán vì: $a \otimes b = a + b - 1 = b + a - 1 = b \otimes a$.

Phần tử trung lập đối với phép ⊗ là 1 vì $a \otimes 1 = a + 1 - 1 = a$ $\forall a \in \mathbf{Z}$.

Với mỗi $a \in \mathbf{Z}$ ta có $-a + 2 \in \mathbf{Z}$ và $a \otimes (-a + 2) = a + (-a + 2) - 1 = 1$.

Vậy (**Z**, ⊗) là một nhóm Aben.

9. Hiển nhiên.

10. Với mọi x, y thuộc X ta có:

$(xy)^2 = x^2y^2$ suy ra $(xy)(xy) = x^2y^2$

hay

$x(yx)y = x(xy)y$

Giản ước bên phải cho y và bên trái cho x từ đẳng thức trên suy ra yx = xy. Vậy X là một nhóm Aben.

11. Giả sử ab = ba khi đó ta chứng minh quy nạp theo n rằng

$(ab)^n = an\,bn$ với $n \geq 2$.

Với n = 2 ta có $(ab)^2 = (ab)(ab) = a(ba)b = a(ab)b = (aa)(bb) = a^2b^2$. Vậy tính chất này đúng với n = 2.

Giả sử tính chất này đúng với $n = k \geq 2$, tức là $(ab)^k = akbk$. Ta cần chứng minh tính chất này đúng với n = k + 1. Thật vậy

$(ab)^{k+1} = (ab)^k(ab) = (akbk)(ab)$ (theo giả thiết quy nạp)

$= ak(bka)b$

$= ak(abk)b$

$= (aka)(bk\,b)$

$= ak^{+1}bk^{+1}$.

12. Giả sử A = mZ. Khi đó theo bài 6.v), A là một nhóm con của nhóm cộng các số nguyên **Z**.

Bây giờ giả sử A là một nhóm con của **Z**.

– Nếu A = {0} thì A = 0**Z**.

– Nếu A ≠ 0 thì tồn tại a ∈ A, a ≠ 0.

Trong các số khác 0 thuộc A, gọi m là số có giá trị tuyệt đối bé nhất. Ta sẽ chứng minh A = mZ.

Thật vậy, vì m ∈ A và A là nhóm con của **Z** nên với mọi k ∈ **Z**, mk ∈ A hay mZ ⊂ A.

Đảo lại, giả sử a ∈ A. Chia a cho m ta được:

$$a = mq + r,\ q, r \in \mathbf{Z},\ 0 \le r < |m|$$

Từ đó suy ra r = a – mq ∈ mZ. Điều này chứng tỏ r = 0.

Do đó a = mq ∈ mZ. Vậy A = mZ.

13. Ta có bảng toán cho Δ_3 như sau:

	1_Δ	R	R^2	D_1	D_2	D_3
1_Δ	1_Δ	R	R^2	D_1	D_2	D_3
R	R	R^2	1_Δ	D_3	D_1	D_2
R^2	R^2	1_Δ	R	D_2	D_3	D_1
D_1	D_1	D_2	D_3	1_Δ	R	R^2
D_2	D_2	D_3	D_1	R^2	1_Δ	R
D_3	D_3	D_1	D_2	R	R^2	1_Δ

Nếu đặt tương ứng

$$\begin{aligned}
\varphi:\quad & \Delta_3 \to S_3 \\
& 1_\Delta \text{ a } (1); \\
& R \text{ a } (1\ 2\ 3); \\
& R^2 \text{ a } (1\ 3\ 2); \\
& D_1 \text{ a } (2\ 3); \\
& D_2 \text{ a } (1\ 3); \\
& D_3 \text{ a } (1\ 2)
\end{aligned}$$

thì φ là một ánh xạ đẳng cấu.

14. a) ánh xạ f: **N** → **N**, n a 5n

là một tự đồng cấu của nửa nhóm cộng (**N**, +) vì với mọi m, n ∈ **N** ta có

$$f(m + n) = 5(m + n) = 5m + 5n = f(m) + f(n).$$

b) f(**N**) = 5**N** = { 5n | n ∈ **N**}, $f^{-1}(0) = \{0\}$.

15. ánh xạ φ: X → X, a a ak là một đồng cấu vì với mọi a, b thuộc X ta có

$$\varphi(ab) = (ab)^k = akbk \text{ (vì X là nhóm Aben)}$$

$= \varphi(a)\varphi(b)$.

– Nếu k = 0 thì $\mathrm{Ker}\varphi = X$ vì $\forall a \in X$

$\varphi(a) = a^0 = e$.

– Nếu $k \neq 0$ thì $\mathrm{Ker}\varphi = \{a \in X \mid ak = e\}$

16. Nếu X là một nhóm Aben thì theo bài 15, φ là một đồng cấu.

Hơn nữa φ còn là một song ánh vì:

Giả sử $a, b \in X$ sao cho $\varphi(a) = \varphi(b)$ suy ra $a^{-1} = b^{-1}$ hay a = b.

Mặt khác với mỗi $a \in X$, ta có $a^{-1} \in X$ và $\varphi(a^{-1}) = (a^{-1})^{-1} = a$.

Vậy φ là một ánh xạ đẳng cấu.

Đảo lại, nếu φ là một ánh xạ đẳng cấu thì với mọi $a, b \in X$ ta có

$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ hay $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ kéo theo $b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

Suy ra ab = ba.

Tức là X là một nhóm Aben.

Tiểu chủ đề 1.3

1. Ta có $X = \{3n \mid n \in \mathbf{Z}\}$. Khi đó X là một tập con của tập các số nguyên **Z**. Để chứng minh X là một vành ta chỉ cần chứng minh X là vành con của vành số nguyên **Z**.

Thật vậy, ta có $0 = 3.0 \in 3\mathbf{Z}$. Giả sử a = 3m, b = 3n, khi đó $a - b = 3(m - n) \in 3\mathbf{Z}$, $ab = 3(3mn) \in 3\mathbf{Z}$. Đối với tập $Y = \{5n \mid n \in \mathbf{Z}\}$ làm tương tự.

Ta có thể thay các số 3 hoặc 5 bởi một số nguyên m bất kì cũng được kết quả là $mZ = \{mk \mid k \in \mathbf{Z}\}$ là một vành với phép cộng và nhân thông thường các số.

2. Các tập B_{100} và C_{100} đều không là những vành với phép cộng và nhân thông thường vì chẳng hạn ta có:

$a = 98,\ b = 4,\ a + b = 102 > 100,\ ab = 392 > 100$

các tập này không ổn định đối với phép cộng và nhân.

3. Chỉ cần thử trực tiếp.

(i) $a \times a = aa - aa = 0$

(ii) $a \times b = ab - ba$

$(-b) \times a = (-b)a - a(-b) = -ba + ab = ab - ba$.

(iii) $(a \times b) \times c \quad = (ab - ba) \times c = (ab - ba)c - c(ab - ba)$

$= abc - bca - cab + cba.$

$(b \times c) \times a = (bc - cb) \times a = (bc - cb)a - a(bc - cb)$

$= bca - cba - abc + acb.$

$(c \times a) \times b = (ca - ac) \times b$

$= (ca - ac)b - b(ca - ac)$

$= cab - acb - bca + bac$

Cộng vế với vế ta được:

$VT = [(a \times b) \times c] + [(b \times c) \times a] + [(c \times a) \times b]$; $VP = 0$.

4. Vì $a^2 = 0$ nên ta có:

$0 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = 0 + ab + ba + 0.$

Suy ra $ab + ba = 0$ hay $ab = -ba$.

5. Chứng minh dựa vào các tính chất của các phép toán cộng và nhân trong vành số nguyên **Z**.

6. a) Giả sử a là một ước của 0 trong vành R. Khi đó ta có $a \neq 0$ và $\exists b \in R$, $b \neq 0$ sao cho $ab = 0$.

Mặt khác, $a0 = 0$ suy ra $ab = a0$ nhưng không suy ra $b = 0$. Vậy a không là phần tử chính quy.

Đảo lại, nếu a không là phần tử chính quy thì ta cần chứng minh a là ước của 0.

Giả sử tồn tại b, c thuộc R mà $b \neq c$ nhưng $ab = ac$, từ đó suy ra $ab - ac = 0$ hay $a(b - c) = 0$. Chứng tỏ a là ước của 0.

b) Trong vành $\mathbf{Z}_6$ có các ước của không là $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$ vì $\overline{2} \otimes \overline{3} = \overline{0}$; $\overline{3} \otimes \overline{4} = \overline{0}$.

Trong vành $\mathbf{Z}_{15}$ có các ước của không là $\overline{3}$, $\overline{5}$, $\overline{6}$, $\overline{9}$, $\overline{10}$, $\overline{12}$ vì:

$\overline{3} \otimes \overline{5} = \overline{0}$; $\overline{5} \otimes \overline{6} = \overline{0}$; $\overline{5} \otimes \overline{9} = \overline{0}$; $\overline{3} \otimes \overline{10} = \overline{0}$; $\overline{5} \otimes \overline{12} = \overline{0}$.

7. Rõ ràng nếu f là một ánh xạ từ **Z** đến **Z**, sao cho $f(a) = 0$ $\forall a \in \mathbf{Z}$ hoặc $f(a) = a$ $\forall a \in \mathbf{Z}$ thì f là một đồng cấu vành.

Đảo lại, giả sử $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ là một đồng cấu vành và f khác ánh xạ không, tức là tồn tại $a \in \mathbf{Z}$ sao cho $f(a) \neq 0$. Ta sẽ chứng minh f là ánh xạ đồng nhất của **Z**. Thật vậy, $a = a.1$ nên $f(a) = f(a)f(1)$, vì $f(a) \neq 0$ nên suy ra $f(1) = 1$; với mọi $n \in \mathbf{Z}$, $f(n) = f(n.1) = nf(1) = n.1 = n$.

Tức là $f(n) = n$ $\forall n \in \mathbf{Z}$.

8. Trước hết ta thấy rằng nếu R là một vành sắp thứ tự thì với mọi

$a \in R$, $0 \leq a^2$.

Thật vậy, nếu $0 < a$ thì $0 \leq a.a = a^2$. Nếu $a < 0$ thì $0 < -a$ suy ra $0 \leq (-a)^2 = a^2$.

Ta có $1 = 1^2$ nên $0 \leq 1$, nhưng vì $1 \neq 0$ nên $0 < 1$.

9. Khi $k \geq 2$ thì vành **Zk** chỉ có k phần tử, do đó nó không thể là một vành sắp thứ tự. (Một vành sắp thứ tự có vô số phần tử).

10. Giả sử k là một số nguyên tố. Khi đó $k \geq 2$, do đó vành **Zk** có $k \geq 2$ phần tử. Nó là vành giao hoán, có đơn vị $\overline{1} \neq \overline{0}$. Giả sử $\overline{a} \in$ **Zk**, $\overline{a} \neq \overline{0}$. Khi đó a không chia hết cho k. Vì k là số nguyên tố nên a và k nguyên tố cùng nhau.

Từ đó suy ra tồn tại u, v $\in$ **Z** sao cho $au + kv = 1$. Điều này kéo theo $\overline{a}.\overline{u} = \overline{1}$. Vậy $\overline{a}$ có nghịch đảo là $\overline{u}$. Vậy **Zk** là một trường.

Đảo lại, giả sử **Zk** là một trường. Khi đó $k \geq 2$, nếu k không là số nguyên tố thì $k = pq$ với $1 < p, q < k$; suy ra $\overline{0} = \overline{k} = \overline{p}.\overline{q}$ mà $\overline{p} \neq \overline{0}$, $\overline{q} \neq \overline{0}$ chứng tỏ $\overline{p}$, $\overline{q}$ là những ước của $\overline{0}$. Do vậy **Zk** không là một trường, trái với giả thiết. Vậy k phải là một số nguyên tố.

11. $X = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$ là một tập con của tập các số thực **R**, nên để chứng minh X là một trường ta chỉ cần chứng minh nó là trường con của trường số thực.

Ta có $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in X$ và $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in X$.

Giả sử $u = a + b\sqrt{2} \in X$ và $v = c + d\sqrt{2} \in X$; a, b, c, d là những số hữu tỉ và vì vậy $a - c$, $b - d$ cũng là những số hữu tỉ nên $u - v = (a - c) + (b - d)\sqrt{2} \in X$.

Giả sử $v \neq 0$ khi đó:

$$uv^{-1} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{\left(a + b\sqrt{2}\right)\left(c - d\sqrt{2}\right)}{c^2 - 2d^2} = \frac{ac - 2bd}{c - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2} \in X.$$

12. Trước hết ta có các ánh xạ

$0: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$, a a 0 và $1_{\mathbf{Q}}: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$, a a a

là hai tự đồng cấu của trường số hữu tỉ **Q**.

Giả sử $f: \mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ là một tự đồng cấu của **Q** và $f \neq 0$. Khi đó $\exists a_0 \in \mathbf{Q}$, $f(a_0) \neq 0$. Suy ra $f(a_0) = f(a_0.1) = f(a_0)f(1)$ kéo theo $f(1) = 1$.

$\forall n \in \mathbf{Z}$, $f(n) = f(n.1) = nf(1) = n.1 = n$.

Nếu $n \neq 0$, $1 = f(1) = f(n.\frac{1}{n}) = nf(\frac{1}{n})$ suy ra $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$

Với mọi $\frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$, $f(\frac{m}{n}) = mf(\frac{1}{n}) = m . \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$.

Tức là $f = 1_{\mathbf{Q}}$.

Vậy chỉ có hai tự đồng cấu của trường số hữu tỉ **Q** là ánh xạ đồng nhất và ánh xạ không.

13. Mệnh đề (i) có giá trị chân lí là 1.

Các mệnh đề còn lại đều có giá trị chân lí là 0.

14. Ta có bảng cộng và bảng nhân sau đây để T là một trường:

Bảng cộng:

+	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Bảng nhân:

·	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

Có phần tử không là a, đơn vị là b, nghịch đảo của c là c.

Không có quan hệ thứ tự nào để cho T trở thành một trường sắp thứ tự vì một trường sắp thứ tự phải có vô số phần tử.