Chương 1. BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC

1.1. *Các bài toán thực tế*

1.1.1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất

a) ***Ví dụ*** Để sản xuất kẹo và bánh cần 2 thứ nguyên liệu chính là đường và bột mì, với trữ lượng hiện có là 0,9kg đường và 1,1 kg bột mì. 1kg kẹo cần 0,5 kg đường và 0,3 kg bột mì; 1kg bánh cần 0,2kg đường và 0,4 kg bột mì.

Giá 1kg kẹo là 10000đ; 1kg bánh là 20000đ. Hãy lập kế hoạch sản xuất sao cho tổng giá trị sản phẩm lớn nhất.

Gọi x_1 là số kg kẹo được sản xuất; x_2 là số kg bánh được sản xuất.
Có mô hình toán học:

$$f(x) = 10000x_1 + 20000x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 0.5x_1 + 0.2x_2 \le 0.9 \\ 0.3x_1 + 0.4x_2 \le 1.1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

b)***Tổng quát*** *Để sản xuất n loại sản phẩm khác nhau cần m loại yếu tố sản xuất với trữ lượng hiện có là b_1, b_2, ..., b_m. Hệ số hao phí yếu tố i (i=1..m) cho 1 đơn vị sản phẩm j (j=1..n) là a_{ij}. Giá 1 đơn vị sản phẩm j là c_j (j=1..n). Hãy lập kế hoạch sản xuất trên cơ sở các yếu tố sản xuất hiện có sao cho tổng giá trị sản phẩm lớn nhất.*

Gọi x_j là số sản phẩm j được sản xuất,
f(x) là tổng doanh thu ứng với kế hoạch sản xuất $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
Có mô hình toán học:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = 1..m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1..n) \end{cases}$$

1.1.2. Bài toán vận tải

Có m kho hàng chứa cùng 1 loại hàng hóa với số lượng ở kho i là ai *(i=1..m). Đồng thời có n cửa hàng với nhu cầu ở cửa hàng j là* bj *(j=1..n). Chi phí vận chuyển 1 đơn vị hàng từ kho i đến cửa hàng j là* c_{ij}. *Hãy lập kế hoạch vận chuyển sao cho thỏa mãn nhu cầu các cửa hàng và chi phí vận chuyển thấp nhất.*

Gọi x_{ij} là số lượng hàng chuyển từ kho i đến cửa hàng j
f(x) là tổng chi phí theo kế hoạch vận chuyển x.
Mô hình toán học:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \ (i = 1..m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1..n) \\ x_{ij} \ge 0 \ (i = 1..m, j = 1..n) \end{cases}$$

1.1.3. Bài toán xác định khẩu phần

Có n loại thức ăn gia súc, giá 1 đơn vị thức ăn j là c (j=1..n). Gia súc cần m chất dinh dưỡng với nhu cầu tối thiểu chất i là b_i (i=1..m). Biết hàm lượng chất i có trong 1 đơn vị thức ăn j là a_{ij}. Hãy xác định khẩu phần thức ăn cho gia súc sao cho chi phí thấp nhất đồng thời đảm bảo các chất dinh dưỡng cho gia súc.

Gọi x_j là lượng thức ăn j có trong khẩu phần,
f(x) là giá khẩu phần $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
Có mô hình toán học sau:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \ (i = 1..m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1..n) \end{cases}$$

1.2. Bài toán qui hoạch tuyến tính

Xét bài toán

(1) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$

(2) $$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1..p) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \ (i = p+1..k) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = k+1..m) \end{cases}$$

Bài toán (1,2) gọi là bài toán quy hoạch tuyến tính dạng tổng quát, ký hiện là ($\mathcal{D}$,f).
* f(x) gọi là hàm mục tiêu.
* Hệ (2) gọi là hệ ràng buộc.
* Ma trận A = $(a_{ij})_{mxn}$ gọi là ma trận số liệu.
* Vectơ C = $(c_j)_n$ gọi là hệ số hàm mục tiêu.

Mỗi bộ số x=(x_1, x_2, ..., x_n) thỏa mãn hệ ràng buộc (2) gọi là phương án, ký hiệu $x \in \mathcal{D}$. Phương án làm cho hàm mục tiêu f(x) đạt cực trị cần tìm gọi là phương án tối ưu, hay là nghiệm của bài toán ($\mathcal{D}$,f) .

1.3. Phương pháp hình học

Phương pháp hình học dùng để giải bài toán ($\mathcal{D}$,f) 2 ẩn, hoặc nhiều hơn 2 ẩn nhưng có thể đưa về bài toán 2 ẩn tương đương.

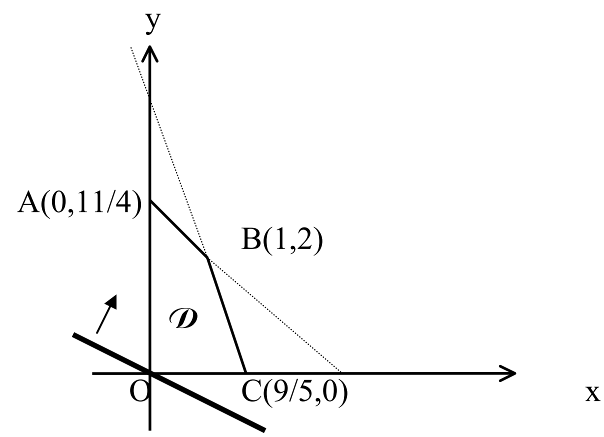
Xét bài toán
f(x) = ax +by → min (max)
($\mathcal{D}$) $\{a_i x + b_i y \leq ci \ \ (i = 1..m)$

Miền $\mathcal{D}$ d là giao các nửa mặt phẳng, hay là một đa giác. Bài toán có thể phát biểu bằng hình học như sau:
Tìm trong họ đường thẳng song song ax+ by = f gọi là họ đường mức ,một đường mức ứng với f nhỏ nhất (lớn nhất) có ít nhất 1 điểm chung với miền $\mathcal{D}$.

Ví dụ 1.1

f(x,y) = x + 2y → max

$$\begin{cases} 5x + 2y \leq 9 \\ 3x + 4y \leq 11 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Qua hình vẽ thấy đường thẳng qua A(0, $\frac{11}{4}$) ứng với f lớn nhất. Vậy nghiệm là x_1=0, x_2=$\frac{11}{4}$ và $f_{max} = \frac{11}{2}$.

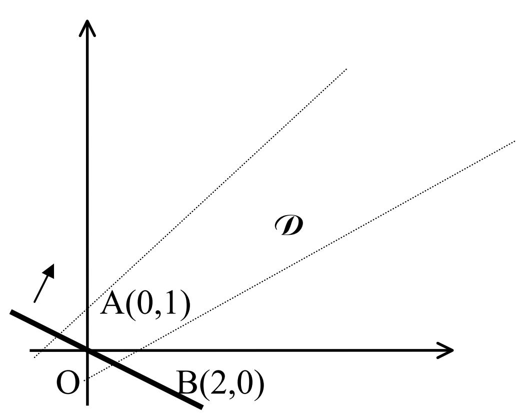
Nhận xét

- Nghiệm là đỉnh của đa giác.
- Nếu hàm mục tiêu là f(x,y) = 3x + 4y thì nghiệm là cả đoạn thẳng AB.
- Giá trị f của họ đường mức tăng theo chiều của pháp vectơ.

Ví dụ 1.2

f(x,y) = x + y → max

$$\begin{cases} x - y \geq -1 \\ x - 2y \leq 2 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$



Theo hình vẽ, hàm mục tiêu không bị chặn trên trong miền 𝒟 nên bài toán vô nghiệm.

---oOo---

1.4. Bài tập

Giải các bài toán sau bằng phương pháp hình học

1. $f(x) = x + 2y \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ 3x + 4y \leq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

2. $f(x) = 5x - 3y \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 4 \\ x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

3. $f(x) = 3x + y \rightarrow \max$

$$\begin{cases} -3x + y \geq 6 \\ 3x + 5y \leq 15 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

4. $f(x) = 2x + 3y + 10 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x + 2y \leq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

5. $f(x) = 2x + 5y \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x + y \leq 8 \\ x + y \geq 3 \\ 2x + y \leq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

6. $f(x) = x + 3y \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x + 3y \leq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

7. $f(x) = x + 2y \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + y \leq 14 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

8. $f(x) = 2x + 3y \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x + 2y \geq 8 \\ 3x + y \geq 6 \\ 3x + 4y \geq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

9. $f(x) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

10. $f(x) = 2x_1 + x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

****

Chương 2. PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH

2.1. Dạng chính tắc và dạng chuẩn tắc

2.1.1. Định nghĩa

Trong thực tế, đa số các bài toán có điều kiện không âm của các ẩn. Từ đó có định nghĩa dạng chính tắc là bài toán ($\mathcal{D}$,f) như sau:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1..m) & (2) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..n) & (3) \end{cases}$$

(2) gọi là ràng buộc cưỡng bức, (3) gọi là ràng buộc tự nhiên.

Với bài toán ($\mathcal{D}$,f) chính tắc, có thể giả sử $m \leq n$.

Một trường hợp đặc biệt của dạng chính tắc là ma trận số liệu $A = (a_{ij})_{mxn}$ có chứa đủ *m* vectơ cột là *m* vectơ đơn vị của không gian R^m và $b_i \geq 0$ ($i=1..m$) gọi là dạng chuẩn tắc. Không mất tính tổng quát, có thể định nghĩa bài toán ($\mathcal{D}$,f) chuẩn tắc như sau:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1..m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..n) \end{cases}$$

trong đó $b_i \geq 0$ ($i=1..m$).

2.1.2. Các phép biến đổi

Các phép biến đổi sau để đưa bài toán ($\mathcal{D}$,f) bất kỳ về dạng chính tắc tương đương để giải, và từ đó suy ra nghiệm của bài toán ban đầu.

a/ $f(x) \rightarrow \max \Leftrightarrow g(x) = -f(x) \rightarrow \min$

b/ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$ với $x_{n+i} \geq 0$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i$ với $x_{n+i} \geq 0$

x_{n+i} gọi là ẩn phụ. Có kết luận sau:

Nếu $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m})$ là nghiệm của bài toán chính tắc biến đổi thì $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm bài toán gốc.

c/ Nếu ẩn x_j không ràng buộc về dấu thì được thay bằng hiệu hai ẩn không âm. Nghĩa là đặt $x_j = x_j' - x_j''$ với $x_j' \geq 0$, $x_j'' \geq 0$.

d/ Trường hợp $b_i < 0$ thì nhân hai vế phương trình cho -1 có được $b_i > 0$.

Vậy: *Mọi bài toán quy hoạch tuyến tính đều có thể đưa về bài toán dạng chính tắc tương đương. Hơn nữa có thể các hệ số tự do b_i trong hệ ràng buộc là không âm.*

2.1.3. Phương án cơ bản

Xét bài toán $(\mathcal{D}, f)$ dạng chính tắc

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1..m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..n) \end{cases}$$

Đặt $A_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ là vectơ cột thứ j trong ma trận A_{mxn}
$b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ là cột hệ số tự do.

Giả sử $x = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)$ là phương án của bài toán thì hệ vectơ $\{ A_j \ / \ \overline{x}_j > 0 \}$ gọi là hệ vectơ liên kết với phương án x.

Định nghĩa

$x \in \mathcal{D}$ là phương án cơ bản nếu hệ véctơ liên kết với x độc lập tuyến tính.
Ẩn x_j gọi là ẩn cơ bản nếu $\overline{x}_j > 0$.

Nhận xét:

- Phương án cơ bản có tối đa *m* thành phần dương.
  Phương án cơ bản có đúng *m* thành phần dương gọi là không suy biến. Ngược lại gọi là suy biến. Bài toán có phương án cơ bản suy biến gọi là bài toán suy biến.
- Số phương án cơ bản của một bài toán $(\mathcal{D}, f)$ là hữu hạn.
- Với bài toán dạng chuẩn tắc thì có phương án cơ bản là $x^o = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$.

2.1.4. Các tính chất

Tính chất 1 Bài toán $(\mathcal{D}, f)$ chỉ xảy ra 1 trong 3 trường hợp sau:
a) Vô nghiệm b) Có 1 nghiệm duy nhất c) Vô số nghiệm.

Tính chất 2 Nếu hàm mục tiêu f(x) là chặn dưới (trên) đối với bài toán dạng *min* (*max*) trên tập phương án $\mathcal{D}$ thì bài toán $(\mathcal{D}, f)$ có nghiệm.

Tính chất 3 Nếu bài toán ($\mathcal{D}$,f) có nghiệm thì có nghệm là phương án cơ bản.

2.2. Phương pháp đơn hình

2.2.1. Nội dung

Xuất phát từ phương án cơ bản nào đó, tìm cách đánh giá nó. Nếu chưa tối ưu thì chuyển sang phương án cơ bản mới tốt hơn. Nếu bài toán có nghiệm thì sau hữu hạn bước sẽ tìm được phương án cơ bản tối ưu. Hơn nữa dấu hiệu vô nghiệm cũng được thể hiện trên thuật toán .

Ví dụ 2.1 Xét bài toán ($\mathcal{D}$,f) dạng chuẩn tắc:

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..4) \end{cases}$$

Có phương án cơ bản $x^o = (0, 0, 4, 5)$ và $f(x^o)=2$ với x_3, x_4 là ẩn cơ bản.
Đánh giá:
$\forall\ x=(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathcal{D}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 4 - 2x_1 + 3x_2 \\ x_4 = 5 - x_1 - x_2 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ &= x_1 - 2x_2 + 3(4 - 2x_1 + 3x_2) - 2(5 - x_1 - x_2) \\ &= 2 - 3x_1 + 9x_2 \\ &= 2 - \Delta_1 x_1 - \Delta_2 x_2 \end{aligned}$$

Vì x_1, $x_2 \geq 0$ nên nếu $\Delta_1, \Delta_2 \leq 0$ thì $f(x) \geq 2$ và x^o là phương án tối ưu. Tuy nhiên, ở đây $\Delta_1=3>0$ nên x^o chưa phải là nghiệm.

Thử chọn x_1, x_4 làm ẩn cơ bản , cho $x_2=0$ và $x_3=0$. Có

$$\begin{cases} 2x_1 = 4 \\ x_1 + x_4 = 5 \end{cases} \Rightarrow x_1=2 \text{ và } x_4=3.$$

Rõ ràng A_1, A_4 độc lập tuyến tính nên có phương án cơ bản là $\overline{x} = (2, 0, 0, 3)$ và $f(\overline{x}) = -4$.
Đánh giá:
$\forall\ x=(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathcal{D}$:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_4 = 3 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 \\ &= (2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3) - 2x_2 + 3x_3 - 2(3 - \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3) \\ &= -4 + \frac{9}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \ (= -4 - \Delta_2 x_2 - \Delta_3 x_3) \\ &\geq -4 \end{aligned}$$

Vì $x_2, x_3 \geq 0$ nên $\bar{x}$ là phương án tối ưu ($\Delta_2, \Delta_3 \leq 0$).

2.2.2. Bảng đơn hình

Cho bài toán ($\mathcal{D}$,f) chuẩn tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1..m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..n) \end{cases}$$

trong đó $b_i \geq 0$ (*i=1..m*).

$\forall$ j=1..n đặt $\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$ và gọi là ước lương của ẩn x_j đối với phương án cơ bản $x^o = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ với $f(x_o) = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$

Lưu ý: $\Delta_i = 0$, $\forall$ i=1..m

Có bảng đơn hình sau:

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	x_1 c_1	x_2 c_2	…	x_m c_m	x_{m+1} c_{m+1}	…	x_s c_s	…	x_n c_n
c_1	x_1	$\mathbf{b_1}$	1	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1s}	…	a_{1n}
c_2	x_2	$\mathbf{b_2}$	0	1	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2s}	…	a_{2n}
…	…	**…**	…	…	…	…	…	…		…	
c_r	x_r	$\mathbf{b_r}$	0	0	…	0	$a_{r,m+1}$	…	a_{rs}	…	a_{rn}
…	…	**…**	…	…	…	…	…	…		…	
c_m	x_m	$\mathbf{b_m}$	0	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{ms}	…	a_{mn}
		f(x)	Δ_1	Δ_2		Δ_m	Δ_{m+1}		Δ_s		Δ_n

2.2.3. Cơ sở lý luận

Cho bài toán ($\mathcal{D}$,f) chuẩn tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1..m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..n) \end{cases}$$

trong đó $b_i \geq 0$ (*i=1..m*).

$\forall$ *j=1..n* đặt $\Delta_j = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j$

Có phương án cơ bản $x^o=(b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ với $f(x_o)= \sum\limits_{i=1}^{m} c_i b_i$

Định lý 1 (Dấu hiệu tối ưu)

Nếu $\Delta_j \leq 0$ với mọi j = 1..n thì x^o là phương án tối ưu.

Chứng minh

Có $f(x^o)= \sum\limits_{i=1}^{m} c_i b_i$

$\forall$ $x=(x_j)_n \in \mathcal{D}$: $x_i + \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ (*i=1..m*) $\Rightarrow$ $x_i = b_i - \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j$ (*i=1..m*)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i (b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{j=m+1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j)\, x_j \\ &= f(x^o) - \sum_{j=m+1}^{n} \Delta_j x_j \\ &\geq f(x^o) : \text{vì } \Delta_j \geq 0 \text{ và } x_j \geq 0 \ (j=m+1..n) \end{aligned}$$

Định lý 2 (Dấu hiệu vô nghiệm)

Nếu $\exists \Delta_k > 0$ và $a_{ik} \leq 0$ $\forall$ i = 1..m thì bài toán vô nghiệm.

Chứng minh

Vì $\Delta_i = 0$, $\forall$ *i=1..m* và $\Delta_k > 0$ nên có k>m.

$\forall$ θ>0, xét bộ số x=$(x_j)_n$ với

$$\begin{cases} x_i = b_i - \vartheta a_{ik} & (i = 1..m) \\ x_k = \vartheta \\ x_j = 0 \; (j = m+1..n, j \neq k) \end{cases}$$

$\forall$ *i=1..m*: $x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j = (b_i - \theta a_{ik}) + a_{ik}\theta = b_i$ (1)

$x_k = \theta > 0$ nên $x_j \geq 0 \quad \forall j = m+1..n$

$\forall$ *i=1..m*: $x_i = b_i - \theta a_{ik} \geq bi \geq 0$. Vì θ>0 và $a_{ik} \leq 0$.

Vậy $x_j \geq 0 \quad \forall$ j=m+1..n (2)

(1) và (2) có $x \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i(b_i - \theta a_{ik}) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \theta \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} + c_k\theta \\ &= f(x^o) - \theta\left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ik} - c_k\right) \\ &= f(x^o) - \theta\Delta_k \end{aligned}$$

Cho x→ +∞ thì f(x) → -∞ trên $\mathcal{D}$**.** Hay f(x) không bị chặn dưới trên $\mathcal{D}$**.**

Vậy bài toán vô nghiệm.

Định lý 3 (Điều chỉnh phương án)

Nếu $\forall \Delta_k > 0$, $\exists$ $a_{ik} > 0$ thì có thể tìm được phương án cơ bản mới tốt hơn x^o, trong trường hợp bài toán không suy biến.

Chứng minh:

Giả sử $\Delta_s = \max\{\Delta_j\}$ với $\Delta_j > 0$ (j=1..n).

Theo giả thiết $\exists$ $a_{is} > 0$

Đặt θ =min $\{\frac{b_i}{a_{is}}\}$ với $a_{is} > 0$. Có θ>0 do bài toán không suy biến.

Giả sử θ=$\frac{b_r}{a_{rs}}$, có $\frac{b_r}{a_{rs}} \leq \frac{b_i}{a_{is}}$

Xét bộ số $\bar{x}$ =$(x_j)_n$ với

$$\begin{cases} x_i = b_i - \vartheta a_{is} \quad (i = 1..m) \\ x_s = \vartheta \\ x_j = 0 \ (j = m+1..n, j \neq s) \end{cases}$$

$\forall$ *i=1..m*: $x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j = (b_i-\theta a_{is}) + a_{is}\theta = b_i$ (1)

$x_s = \theta > 0$ nên $x_j \geq 0 \quad \forall j=m+1..n$

$\forall$ *i=1..m*: $x_i = b_i-\theta a_{is} = b_i - \frac{b_r}{a_{rs}} a_{is} \geq 0$. Vì $\frac{b_i}{a_{is}} \geq \frac{b_r}{a_{rs}}$ (*i=1..m*) và $a_{is} > 0$.

Vậy $x_j \geq 0 \quad \forall j=m+1..n$ (2)

(1) và (2) có $x \in \mathcal{D}$

Có $x_r = b_r-\theta a_{rs} = b_r - \frac{b_r}{a_{rs}} a_{rs} = 0$. Vậy x_r là ẩn không cơ bản.

Hệ vectơ liên kết x^o là m vectơ đơn vị $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$.

Vậy hệ vectơ liên kết $\bar{x}$ là hệ con của $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \cup \{A_s\} \setminus \{A_r\}$.

Giả sử hệ vectơ liên kết $\bar{x}$ phụ thuộc tuyến tính thì hệ $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\} \cup \{A_s\} \setminus \{A_r\}$ phụ thuộc tuyến tính.

Nên $\exists$ $k_i \neq 0$ sao cho: $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} k_i A_i + k_s A_s = \theta$ (vectơ không)

Nếu $k_s=0$ thì $\exists$ $k_i \neq 0$ (*i=1..m*) sao cho: $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} k_i A_i = \theta$. Mâu thuẩn vì $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ là hệ vectơ đơn vị. Vậy $k_s \neq 0$ và $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} k_i A_i + k_s A_s = \theta$

hay $A_s = -\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} \frac{k_i}{k_s} A_i$ (3)

Ngoài ra, $A_s = (a_{1s}, a_{2s}, \ldots, a_{ms}) = \sum_{i=1}^{m} a_{is}A_i$ (4)

Trừ (4) cho (3) có

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} (a_{is} + \frac{k_i}{k_s}) A_i + a_{rs}A_r = \theta.$$

Do $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ là hệ độc lập tuyến tính nên có $a_{rs}=0$ (mâu thuẩn).

Vậy hệ vectơ liên kết $\bar{x}$ là hệ độc lập tuyến tính. Hay $\bar{x}$ là phương án cơ bản.

$$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$

$= \sum_{i=1}^{m} c_i(b_i - \theta a_{is}) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$

$= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \theta \sum_{i=1}^{m} c_i a_{is} + c_s \theta$

$= f(x^o) - \theta(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{is} - c_s)$

$= f(x^o) - \theta\Delta_s$

$< f(x^o)$, vì $\theta>0$ và $\Delta_s>0$.

Hay phương án cơ bản tốt hơn phương án cơ bản x^o một lượng $\theta\Delta_s$.

2.2.4. Các bước của thuật toán đơn hình

Bước 1 *Kiểm tra tính tối ưu của phương án $x^o=(b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$*

* Nếu $\Delta_j \le 0\ \forall j = 1..n$ thì x^o là phương án tối ưu và $f_{min}=f(x^o)= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$.

* Nếu $\exists \Delta_k>0$ thì chuyển sang bước 2.

Bước 2 *Kiểm tra điều kiện vô nghiệm*

* Nếu $\exists \Delta_k >0$ và $a_{ik} \le 0$ với mọi i = 1..m thì bài toán vô nghiệm.
* *Nếu* $\forall \Delta_k >0, \exists a_{ik}>0$ thì chuyển sang bước 3.

Bước 3 *Tìm ẩn thay thế và ẩn loại ra*

* Nếu $\Delta_s = \max \{\Delta_j\}$ với $\Delta_j>0$ (j=1..n) thì đưa x_s đưa vào tập ẩn cơ bản .
* Nếu $\frac{b_r}{a_{rs}} = \min \{\frac{b_i}{a_{is}}\}$ với $a_{is}> 0$ thì loại x_r ra khỏi tập ẩn cơ bản .
* Chuyển sang bước 4.

Bước 4 *Biến đổi bảng đơn hình*

* Biến đổi bảng đơn hình theo công thức sau:

$$\begin{cases} a'_{rj} = \dfrac{a_{rj}}{a_{rs}} \\ a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{rj}}{a_{rs}} a_{is}\ (i \ne r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b'_r = \theta \\ b'_i = b_i - \dfrac{b_r}{a_{rs}} a_{is}\ (i \ne r) \end{cases}$$

* Tính lại các giá trị Δ_j, quay lại *bước 1*.

Quá trình này có thể mô tả như việc biến đổi sơ cấp về hàng trên ma trận bổ sung của hệ ràng buộc sao cho vectơ A_s trở thành vectơ đơn vị thứ r, và các vectơ đơn vị khác vẫn giữ nguyên.

Nhận xét Các công thức biến đổi cho a_{ij} cũng đúng cho cả b_i và Δ_j nếu xem b là cột thứ *0* và Δ là hàng thứ *m+1* của ma trận số liệu A_{mxn}.

Ví dụ 2.2

$$f(x) = 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 & = 52 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad + x_5 & = 60 \\ 3x_1 \quad + x_3 \quad + x_6 & = 36 \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1..6) \end{cases}$$

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	x_1 5	x_2 4	x_3 5	x_4 2	x_5 1	x_6 3
2	x_4	52	2	4	3	1	0	0
1	x_5	60	4	2	3	0	1	0
3	x_6	36	3	0	1	0	0	1
		272	12	6	7	0	0	0
2	x_4	28	0	4	7/3	1	0	-2/3
1	x_5	12	0	2	5/3	0	1	-4/3
5	x_1	12	1	0	1/3	0	0	1/3
		128	0	6	3	0	0	-4
2	x_4	4	0	0	-1	1	-2	2
4	x_2	6	0	1	5/6	0	1/2	-2/3
5	x_1	12	1	0	1/3	0	0	1/3
		92	0	0	-2	0	-3	0

$\Delta_j \leq 0 \quad \forall j = 1..6$, $x_{opt} = (12, 6, 0, 4, 0, 0)$ và $f_{min} = 92$

Ví dụ 2.3

$$f(x) = 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \quad - 2x_4 & = 1 \\ \quad - 2x_2 + x_3 + 3x_4 & = 1 \\ x_j \geq 0 \ \ (j = 1..4) \end{cases}$$

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	x_1 3	x_2 -1	x_3 2	x_4 -1
3	x_1	1	1	1	0	-2
2	x_3	1	0	-2	1	3
		5	0	0	0	1
3	x_1	5/3	1	-1/3	2/3	0
-1	x_4	1/3	0	-2/3	1/3	1
		14/3	0	2/3	-1/3	0

Có Δ_2=2/3>0 và trên cột này không có số dương nên bài toán vô nghiệm.

2.2.5. Bài toán ẩn phụ

Các phép biến đổi để đưa bài toán ($\mathcal{D}$,f) về dạng chính tắc

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i \text{ với } x_{n+i} \ge 0$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+i} = b_i \text{ với } x_{n+i} \ge 0$$

x_{n+i} gọi là ẩn phụ. Có kết luận sau:

Nếu $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m})$ là nghiệm của bài toán chính tắc biến đổi thì $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm bài toán gốc.

Ví dụ 2.4

$$f(x) = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \ge -12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10 \\ x_j \ge 0 \ \ (j = 1..4) \end{cases}$$

Bài toán chính tắc tương đương

$$g(x) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_6 = 10 \\ x_j \ge 0 \ \ (j = 1..6) \end{cases}$$

Trong đó x_5, x_6 là ẩn phụ.

Đây là bài toán ($\mathcal{D}$,f) chuẩn tắc nên được đưa vào bảng đơn hình để giải.

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	x_1 1	x_2 -3	x_3 2	x_4 0	x_5 0	x_6 0
0	x_4	7	3	-1	2	1	0	0
0	x_5	12	-2	4	1	0	1	0
0	x_6	10	-4	3	8	0	0	1
		0	-1	3	-2	0	0	0
0	x_4	10	5/2	0	9/4	1	1/4	0
-3	x_2	3	-1/2	1	¼	0	1/4	0
0	x_6	1	-5/2	0	29/4	0	-3/4	1
		-9	1/2	0	-11/4	0	-3/4	0
1	x_1	4	1	0	9/10	2/5	1/10	0
-3	x_2	5	0	1	7/10	1/5	3/10	0
0	x_6	11	0	0	19/2	1	-1/2	1
		-11	0	0	-16/5	-1/5	-4/5	0

$\Delta_j \leq 0 \quad \forall j = 1..6$, x_{opt}= (4, 5, 0, 0, 0, 11) và f_{min}=-11. Vậy nghiêm bài toán gốc là x_{opt}= (4, 5, 0, 0) và f_{max}=11.

Nếu các giá trị min/max đạt tại nhiều vị trí thì chọn tùy ý một vị trí bất kỳ trong số đó. Thông thường chọn chỉ số nhỏ nhất.

2.2.6. Bài toán ẩn giả

Cho bài toán ($\mathcal{D}$,f) dạng chính tắc:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1..m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..n) \end{cases}$$

trong đó $b_i \geq 0$ ($i=1..m$).

Xét bài toán:

$$\bar{f}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \ (i = 1..m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..n+m) \end{cases}$$

với M là số dương khá lớn ($M \to \infty$)..
Bài toán này gọi là bài toán mở rộng của bài toán trên, hay *bài toán M*.

Với *bài toán M* có ngay phương án cơ bản ban đầu với x_{n+i}($i=1..m$) là các ẩn cơ bản .
Dùng thuật toán đơn hình để giải.
x_{n+i} gọi là các ẩn giả.

Sau khi giải bài toán M, có được quan hệ giữa bài toán M và bài toán ($\mathcal{D}$,f) như sau:

- Nếu bài toán M vô nghiệm thì bài toán ($\mathcal{D}$,f) vô nghiệm.
- Nếu bài toán M có nghiệm $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n, 0,...,0)$ thì $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ là nghiệm của bài toán ($\mathcal{D}$,f).
- Nếu bài toán M có nghiệm $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_{n+m})$ và $\exists\ x_{n+m})>0$ thì bài toán ($\mathcal{D}$,f) vô nghiệm.

Tiến trình giải bài toán M là loại dần các ẩn giả ra khỏi tập ẩn cơ bản cho đến khi loại tất cả là bắt đầu giải bài toán gốc. Nên từ đó có thể không cần tính cho các cột ẩn giả. Nếu cuối cùng không loại được các ẩn giả mà nhận giá trị 0 thì bài toán gốc cũng có nghiệm.

Ở đây giả sử bài toán ($\mathcal{D}$,f) trong ma trận số liệu A không có vectơ đơn vị nào. Tuy nhiên, chỉ cần thêm một số (<*m*) ẩn giả cho đủ *m* vectơ đơn vị.

Ví dụ 2.5

$$f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_j \ge 0 \ \ (j = 1..3) \end{cases}$$

Dạng chính tắc tương đương:

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_j \ge 0 \ \ (j = 1..5) \end{cases}$$

trong đó x_4, x_5 là hai ẩn phụ.
Bài toán chính tắc cần thêm hai ẩn giả để đưa về bài toán chuẩn tắc là x_6, x_7.
Bài toán M tương ứng:

$$\overline{f}(\overline{x}) = -x_1 - 2x_2 + x_3 + M x_6 + M x_7 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_7 = 4 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..7) \end{cases}$$

Đây là bài toán dạng chuẩn tắc nên được đưa vào bảng đơn hình để giải.

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	x_1 -1	x_2 -2	x_3 1	x_4 0	x_5 0	x_6 M	x_6 M
0	x_4	6	-1	4	-2	1	0	0	0
M	x_6	6	1	1	2	0	-1	1	0
M	x_7	4	2	-1	2	0	0	0	1
			3M+1	2	4M-1	0	-M	0	0
0	x_4	10	1	3	0	1	0	0	1
M	x_6	2	-1	2	0	0	-1	1	-1
1	x_3	2	1	-1/2	1	0	0	0	1/2
			-M+2	2M+3/2	0	0	-M	0	-2M+1/2
0	x_4	7	5/2	0	0	1	3/2	-3/2	5/2
-2	x_2	1	-1/2	1	0	0	-1/2	1/2	-1/2
1	x_3	5/2	3/4	0	1	0	-1/4	1/4	1/4
		-9/2	11/4	0	0	0	3/4	-M-3/4	-M+5/4
-1	x_1	14/5	1	0	0	2/5	3/5	-3/5	1
-2	x_2	12/5	0	1	0	1/5	-1/5	1/5	0
1	x_3	2/5	0	0	1	-3/10	-7/10	7/10	-1/2
		-36/5	0	0	0	-11/10	-9/10	-M+9/10	-M-3/2

Nghiệm bài toán M là $\overline{x}$ = (14/5, 12/5, 2/5, 0, 0,0,0), ẩn giả đã bị loại từ bảng thứ 3.
Nghiệm bài toán gốc chính tắc là x = (14/5, 12/5, 2/5,0,0), với x4, x5 là ẩn phụ, nên có nghiện bài toán gốc là x_{opt}= (14/5, 12/5, 2/5,0,0) và f_{max} = 36/5

Ví dụ 2.6

$$f(x) = 8x_1 - 6x_2 - 2x_3 \longrightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..3) \end{cases}$$

Bài toán M tương ứng:

$$\overline{f}(\overline{x}) = -8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + Mx_4 + Mx_5 \longrightarrow \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 4 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..5) \end{cases}$$

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	x_1 -8	x_2 6	x_3 2	x_4 M	x_5 M
M	x_4	4	4	3	4	1	0
M	x_5	4	4	1	-3	0	1
			8M+8	4M-6	M-2	0	0
-8	x_1	1	1	3/4	1	1/4	0
M	x_5	0	0	-2	-7	-1	1
			0	-2M-12	-7M-10	-2M-2	0

Nghiệm bài toán M là X= (1,0,0,0,0)
Ẩn giả x_5 còn là ẩn cơ bản nhưng nhận giá trị 0 nên nghiệm bài toán gốc là x = (1,0,0) và $f_{max} = 8$

Ví dụ 2.7

$$f(x) = -8x_1 + 6x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..3) \end{cases}$$

Bài toán M tương ứng:

$$\bar{f}(\bar{x}) = -8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + Mx_4 + Mx_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \quad = 4 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 \quad + x_5 = 5 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..5) \end{cases}$$

Hệ số	Ẩn CB	P/Án	x_1 -8	x_2 6	x_3 2	x_4 M	x_5 M
M	x_4	4	4	3	4	1	0
M	x_5	5	4	1	-3	0	1
			8M+8	4M-6	M-2	0	0
-8	x_1	1	1	3/4	1	1/4	0
M	x_5	1	0	-2	-7	-1	1
			0	-2M-12	-7M-10	-2M-2	0

Ẩn giả x_5 còn là ẩn cơ bản nhưng nhận giá trị x_5 =1>0 nên nên bài toán gốc vô nghiệm.

2.3. Cài đặt thuật toán đơn hình

2.3.1. Khai báo dữ liệu

a) Xem b là cột 0, c là hàng 0 và Δ là hàng *m+1* của ma trận số liệu a và $f(x^o)$=a[m+1][0] với a[0][0]=0. Các giá trị b_i, c_j, Δ_j và f(x) biến đổi thao cùng công thức với a_{ij}. Nghĩa là: b_i=a[i][0], c_j=a[0][j], Δ_j=a[m+1][j].
Chỉ cần khai báo một ma trận A như sau:
float a[m+2][n+1];
b) Các mảng đánh dấu tập ẩn cơ bản:
int cb[n+1], acb[m];
với ý nghĩa:

x_j là ẩn cơ bản ⇔ cb[j]=1

và

x_j ẩn cơ bản thứ i ⇔ acb[i]=j

Tập ẩn cơ bản ban đầu gồm *m* ẩn được nhập từ bàn phím

2.3.2. Tính các ước lượng Δ_j

```
  for (j=1; j<=n; j++){
      a[m+1][j]=0;
      for (i=1; j<=m; i++) a[m+1][j]+= a[0][ACB[i]]*a[i][j];
      a[m+1][j]-= a[0][j];
   }
```

2.3.3. Kiểm tra tối ưu và tìm ẩn thay thế

```
int Toiuu( )
{
   int s=1, j=1;
   for (j=1; j<=n; j++)
      if (a[m+1][j]> a[m+1][s])s=j;
   return a[m+1][s]>0;
}
```

2.3.4. Kiểm tra vô nghiệm

```
int Vonghiem( )
{
   int i,j;

   for (j=1; j<=n; j++)
      if (a[m+1][j]> 0){
         i=1; while (i<=m && a[i][j]<=0)i++;
         if (i>m)retrun 1;
      }
   return 0;
}
```

2.3.5. Tìm ẩn loại ra

```
r=1; while (a[i][j]<=0)r++;
for (i=r+1; i<=m; i++)
   if (a[i][j]>0)
         if (a[i][0]/a[i][j]< a[r][0]/a[r][j])r=i;
```

2.3.6. Biến đổi bảng

```
abc[r]:=s; cb[s]=1;
ars = a[r][s]; // Biến trung gian

// Biến đổi riêng hàng r
for (j=0; j<=n; j++) a[r][j]/=ars;

for (i=1; i<=m+1; i++)
   if (i!=r){
         ais=a[i][s]; // Biến trung gian
         a[i][j]-= a[r,j]* ais/ars;
   }
```

---oOo---

2.4. Bài tập

Giải các bài toán sau bằng phương pháp đơn hình

1. $f(x) = 7x_1 - 5x_2 - 3x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 15 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ \quad x_j \ge 0 \ (j = 1..3) \end{cases}$$

2. $f(x) = -5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 42 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 24 \\ 3x_1 + x_3 \le 15 \\ \quad x_j \ge 0 \ (j = 1..4) \end{cases}$$

3. $f(x) = 7x_1 + 15x_2 + 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \ge 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge -3 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 \ge 2 \\ \quad x_j \ge 0 \ (j = 1..3) \end{cases}$$

4. $f(x) = 2x_1 + 17x_2 + 18x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \le 50 \\ 8x_1 + 4x_3 \le 30 \\ \quad x_j \ge 0 \ (j = 1..3) \end{cases}$$

5. $f(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 x_4 + 5x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 \le 17 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 20 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 \ge -18 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 100 \\ \quad x_j \ge 0 \ (j = 1..5) \end{cases}$$

6. $f(x) = -5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 42 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 24 \\ 3x_1 + x_3 \leq 15 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..4) \end{cases}$$

7. $f(x) = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3$ ----> min

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 9 \\ x_j \geq 0, \forall j = 1..3 \end{cases}$$

8. $f(x) = 2x_1 - x_2 + 3x_3$ ----> min

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 9x_3 \leq 5 \\ 2x_1 - x_2 - 8x_3 = -18 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ x_j \geq 0, \ \forall j = 1..3 \end{cases}$$

9. $f(x) = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$ ----> min

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - 7x_2 - 2x_3 \leq 3 \\ x_j \geq 0, \forall j = 1..3 \end{cases}$$

10. $f(x) = 3x_1 - x_2 + 5x_3$ ----> min

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 5 \\ 5x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -12 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_j \geq 0, \ \forall j = 1..3 \end{cases}$$

11. $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 \geq -6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_j \geq 0 \ (j = 1..3) \end{cases}$$

****

Chương 3. BÀI TOÁN ĐỐI NGẪU

3.1. Các bài toán thực tế

3.1.1. Bài toán lập kế hoạch sản xuất

Một nhà máy sản xuất hai loại sản phẩm A, B gồm hai phân xưởng với năng suất như sau:

Phân xưởng I : 1 nghìn sản phẩm A + 4 nghìn sản phẩm B trong 1 năm. và Chi phí 16 triệu đồng.

Phân xưởng II : 3 nghìn sản phẩm A + 1 nghìn sản phẩm B trong 1 năm. và Chi phí 15 triệu đồng.

Kế hoạch Nhà nước giao cho nhà máy là:1 nghìn sản phẩm A + 2 nghìn sản phẩm B. Hãy lập kế hoạch sản xuất sao cho tổng chi phí thấp nhất đồng thời đảm bảo kế hoạch nhà nước giao cho nhà máy.

Gọi x_1 là thời gian phân xưởng I sản xuất (đơn vị *năm*),

x_2 là thời gian phân xưởng II sản xuất (đơn vị *năm*)

Tổng chi phí của kế hoach sản xuất $x=(x_1, x_2)$ là

$f(x) = 16x_1 + 15x_2$ (*triệu đồng*)

Mô hình toán học:

$$f(x) = 16x_1 + 15x_2 \to \min$$

$$(\mathcal{D})\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 1 \\ 4x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_{1,} x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.1.2. Bài toán đánh giá sản phẩm

Với năng suất hai phân xưởng của nhà máy như bài toán trên . Nhà máy sản xuất được 1 nghìn sản phẩm A và 2 nghìn sản phẩm B. Hãy định giá trị cho 1 sản phẩm A và 1 sản phẩm B sao cho tổng giá trị của sản phẩm: phân xưởng I không vượt quá chi phí là 16 triệu đồng/năm và phân xưởng II không vượt quá chi phí là 15 triệu đồng/năm, và tổng giá trị sản phẩm của nhà máy lớn nhất.

Gọi y_1(nghìn đồng) là giá trị đơn vị sản phẩm A,

y_2(nghìn đồng) là giá trị đơn vị sản phẩm B

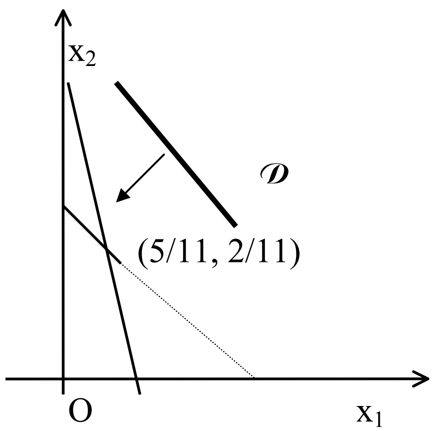
Tổng giá trị sản phẩm theo kế hoạch đánh giá $y=(y_1, y_2)$ là

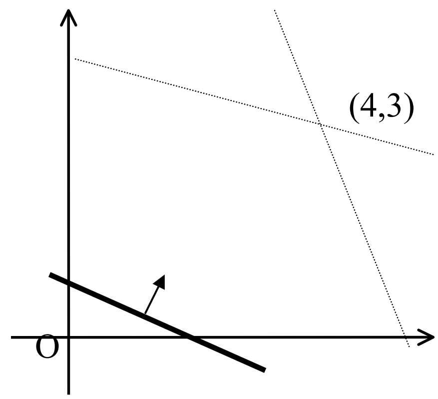
$g(y) = y_1+2y_2$(*nghìn đồng*)

Mô hình toán học:

$$g(y) = y_1+2y_2 \to \max$$

$$(\widetilde{\mathcal{D}})\begin{cases} y_1 + 4y_2 \le 16 \\ 3y_1 + y_2 \le 15 \\ y_{1,}y_2 \ge 0 \end{cases}$$





f_{min}=f(5/11, 2/11)= 10 (*triệu đồng*)

g_{max}=g(4, 3)= 10 (*triệu đồng*)

Nhận xét: f_{min}= g_{max}

3.2. Bài toán đối ngẫu

3.2.1. Đối ngẫu không đối xứng

Cho bài toán ($\mathcal{D}$,f) dạng chính tắc

(1) $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$

$$(\mathcal{D})\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (i = 1..m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1..n) \end{cases}$$

Cùng với bài toán (I), xét bài toán ($\widetilde{\mathcal{D}}$, g) như sau:

$(\tilde{1})$ $g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$

$$(\widetilde{\mathcal{D}})\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ji}y_i \le c_j \ (j = 1..n) \\ y_i \text{ tu do } (i = 1..m) \end{cases}$$

$(\tilde{1})$ gọi là bài toán đối ngẫu của bài toán (1).

Bài toán đối ngẫu của bài toán (D, f) bất kỳ là bài toán đối ngẫu của bài toán dạng chính tắc tương đương với nó.

Nếu xem ($\tilde{1}$) là bài toán gốc thì (1) là bài toán đối ngẫu của nó.

Về mặt hình thức, cặp (1, $\tilde{1}$) gọi là cặp bài toán đối ngẫu không đối xứng.

Cách thành lập

- Bài toán gốc ở dạng chính tắc.
- Hệ số hàm mục tiêu của bài toán này là hệ số tự do trong hệ ràng buộc của bài toán kia.
- Ma trận số liệu chuyển vị cho nhau.
- Bài toán đối ngẫu là bài toán *max* và ràng buộc là ≤.

Ví dụ

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$$

$$(\mathcal{D})\begin{cases} x_1 \quad + x_2 \quad + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5 \\ x_j \ge 0 \ \ (j = 1..3) \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu ($\tilde{\mathcal{D}}$, g)

$$g(y) = y_1 - 5y_2 \rightarrow \max$$

$$(\tilde{\mathcal{D}})\begin{cases} y_1 + 2y_2 \le 1 \\ y_1 - 3y_2 \le 2 \\ y_1 + 4y_2 \le 3 \\ y_{1,} y_2 \ tu\ do \end{cases}$$

3.2.2. Đối ngẫu đối xứng

Cho bài toán ($\mathcal{D}$,f) dạng sau

$$(2) \qquad f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$$

$$(\mathcal{D})\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \ \ (i = 1..m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1..n) \end{cases}$$

Bài toán dạng chính tắc tương đương

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i \ \ (i = 1..m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1..m+n) \end{cases}$$

x_{n+i} là ẩn phụ.

Bài toán đối ngẫu

$$(\tilde{2})\quad g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$$

$$(\tilde{\mathcal{D}})\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_i \le c_j \ (j = 1..n) \\ -y_i \le 0 \ (i = 1..m) \end{cases}$$

hay

$$(\tilde{2})\quad g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$$

$$(\tilde{\mathcal{D}})\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_i \le c_j \ (j = 1..n) \\ y_i \ge 0 \ (i = 1..m) \end{cases}$$

Ngược lại nếu xem Nếu xem ($\tilde{2}$) là bài toán gốc thì (2) là bài toán đối ngẫu của nó.
Về mặt hình thức, cặp ($2, \tilde{2}$) gọi là cặp bài toán đối ngẫu đối xứng.

Cách thành lập

- Hệ số hàm mục tiêu của bài toán này là hệ số tự do trong hệ ràng buộc của bài toán kia.
- Ma trận số liệu chuyển vị cho nhau.
- Bài toán *min* ràng buộc là ≥ và bài toán *max* ràng buộc là ≤.
- Cả hai bài toán đều có rạng buộc các ẩn không âm.

Ví dụ 3.1

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min$$

$$(\mathcal{D})\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 4 \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 \ge -6 \\ 7x_1 - 2x_2 + 4x_3 \ge 1 \\ x_j \ge 0 \,(j = 1..3) \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu

$$g(y) = 4y_1 - 6y_2 + y_3 \to \max$$

$$(\tilde{\mathcal{D}})\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 7y_3 \le 3 \\ -y_1 + 4y_2 - 2y_3 \le 2 \\ 3y_1 - 5y_2 + 4y_3 \le 1 \\ y_i \ge 0 \,(i = 1..3) \end{cases}$$

Nhận xét

Với bài toán ($\tilde{\mathcal{D}}$,g) chỉ cần đưa về dạng chính tắc thì trở thành dạng chuẩn tắc.

3.2.3. Sơ đồ tucker

Từ hai cặp bài toán đối ngẫu (1, $\tilde{1}$) và (2, $\tilde{2}$) có sơ đồ Tucker để viết bài toán đối ngẫu của bài toán bất kỳ như sau

Bài toán gốc $f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$	*Bài toán đối ngẫu* $g(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ (i=1..p)	y_i tự do (i=1..p)
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ (i=p+1..m)	$y_i \geq 0$ (i=p+1..m)
$x_j \geq 0$ (j=1..q)	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$ (j=1..q)
x_j tự do (j=q+1..n)	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j$ (j=q+1..n)

Lưu ý Bài toán *min* không có ràng buộc ≤ và Bài toán *max* không có ràng buộc ≥.
Ví dụ

$$f(x) = 2x_1 + x_2 + 4x_3 \to \min$$

$$(\mathcal{D}) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu

$$g(y) = 4y_1 - 5y_2 + 2y_3 \to \max$$

$$(\tilde{\mathcal{D}}) \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 2 \\ -y_1 + 3y_2 - 2y_3 = 1 \\ 3y_1 - 5y_2 + 2y_3 \leq 4 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

3.3. *Các nguyên lý đối ngẫu*

Xét cặp bài toán đối ngẫu ($\mathcal{D}$,f) và ($\tilde{\mathcal{D}}$,g) với f(x)→min và g(y)→max.
Có các nguyên lý sau

3.3.1. Nguyên lý 1

a) $\forall x \in \mathcal{D}$, $\forall y \in \widetilde{\mathcal{D}}$: $f(x) \geq g(y)$.
b) $\exists x^o \in \mathcal{D}$, $\exists y^o \in \widetilde{\mathcal{D}}$: $f(x^o) = g(y^o) \Rightarrow f(x^o) = f_{min}$ và $g(y^o) = g_{max}$.

Chứng minh

a) $\forall x \in \mathcal{D}$, $\forall y \in \widetilde{\mathcal{D}}$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&\geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j \\
&\geq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \\
&\geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = g(y)
\end{aligned}
$$

b) $\exists x^o \in \mathcal{D}$, $\exists y^o \in \widetilde{\mathcal{D}}$: $f(x^o) = g(y^o)$
$\forall x \in \mathcal{D}$: $f(x) \geq g(y^o) = f(x^o) \Rightarrow f(x^o) = f_{min}$
$\forall y \in \widetilde{\mathcal{D}}$: $g(y) \leq f(x^o) = g(y^o) \Rightarrow g(y^o) = g_{max}$

3.3.2. Nguyên lý 2

Nếu bài toán này có nghiệm thì bài toán kia cũng có nghiệm và cặp nghiệm đó thoả mãn điều kiện cân bằng $f_{min} = g_{max}$.

3.3.3. Nguyên lý 3 (*Độ lệch bù*)

Cho $x \in \mathcal{D}$, $y \in \widetilde{\mathcal{D}}$.
Điều kiện cần và đủ để x, y là nghiệm tương ứng của cặp bài toán đối ngẫu là:

$$
(1)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j > b_i \Rightarrow y_i = 0 \\ y_i = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \end{cases}
$$

$$
(2)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i < c_j \Rightarrow x_j = 0 \\ x_j > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i = c_j \end{cases}
$$

Chứng minh

Theo nguyên lý 1 có:

$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \geq \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i)x_j=\sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)\, y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_iy_i = g(y)$

Do đó $f(x)= g(y) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_jx_j = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i)x_j=\sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)\, y_i= \sum_{i=1}^{m} b_iy_i$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i-c_j)x_j=0 \text{ và } \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j-b_i)\, y_i=0$$

Dựa vào các điều kiện $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$, $x_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \leq c_j$, $y_i \geq 0$ nên vế phải có nghĩa:

1) Nếu $x_j>0$ thì $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$
2) Nếu $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i < c_j$ thì $x_j=0$
3) Nếu $y_i>0$ thì $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$
4) Nếu $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i$ thì $y_i=0$

Có thể phát biểu cách khác về nguyên lý độ lệch bù như sau:

Điều kiện cần và đủ để x , y là nghiệm tương ứng của cặp bài toán đối ngẫu là : trong các cặp điều kiện đối ngẫu, nếu điều kiện này xảy ra với bất đẳng thức thực sự thì điều kiện kia xảy ra với dấu bằng.

3.4. Ý nghĩa kinh tế

Xét cặp đối ngẫu đối xứng ($2, \tilde{2}$)

3.4.1. Ý nghĩa bài toán (2)

Có *n* cách khác nhau để sản xuất *m* loại sản phẩm. Cách thứ *j* sử dụng cường độ 1 cho a_{ij} đơn vị sản phẩm loại i (i=*1..m*) và chi phí c_j (j=*1..n*). Hãy tìm cường độ x_j cần sử dụng cho từng cách sản xuất, để tổng số đơn vị của sản phẩm loại iđược sản xuất ra ít ra bằng b_i (i=*1..m*) và tổng chi phí sản xuất là ít nhất.

$x = (x_j)_n$: *phương án sản xuất*

3.4.2. Ý nghĩa bài toán ($\tilde{2}$)

Cùng điều kiện với bài toán (2) . Giả sử sản xuất được b_i sản phẩm i (i=*1..m*) . Hãy định giá trị y_i cho mỗi đơn vị sản phẩm loại i (i=*1..m*), để đảm bảo tổng giá trị sản phẩm sản xuất theo cách j không vượt quá chi phí sản xuất là c_j (j=*1..n*) đồng thời tổng giá trị sản phẩm là lớn nhất.

$y = (y_i)$: *phương án đánh giá*.

3.4.3. Ý nghĩa nguyên lý độ lệch bù

Điều kiện cần và đủ để phương án sản xuất $x=(x_j)_n$ và phương án đánh giá $y=(y_i)_m$ đồng thời tối ưu là:

1/ Nếu một cách sản xuất được sử dụng ($x_j > 0$) thì tổng giá trị sản phẩm được sản xuất theo cách ấy phải đúng bằng chi phí ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i = c_j$).

2/ Nếu một loại sản phẩm có gái trị ($y_i > 0$) thì tổng số sản phẩm đó được sản xuất phải đúng bằng nhu cầu ($\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$)

---oOo---

3.5. Bài tập

Giải các bài toán sau bằng phương pháp đơn hình. Viết bài toán đối ngẫu của chúng. Dựa vào nguyên lý độ lệch bù để tìm nghiệm bài toán đối ngẫu.

1. $f(x) = -5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 42 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 24 \\ 3x_1 + x_3 \le 15 \\ x_j \ge 0 \ (j = 1..4) \end{cases}$$

2. $f(x) = 2x_1 + 17x_2 + 18x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 \le 50 \\ 8x_1 + 4x_3 \le 30 \\ x_j \ge 0 \ (j = 1..3) \end{cases}$$

3. $f(x) = -5x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 42 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 24 \\ 3x_1 + x_3 \le 15 \\ x_j \ge 0 \ (j = 1..4) \end{cases}$$

4. $f(x) = 8x_1 + 7x_2 + 9x_3$ ----> min

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 4x_3 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 9 \\ x_j \ge 0, \forall j = 1..3 \end{cases}$$

Viết bài toán đối ngẫu các bài toán sau. Giải các bài toán đối ngẫu bằng phương pháp đơn hình. Dựa vào nguyên lý độ lệch bù để tìm nghiệm của bài toán gốc.

1. $f(x) = 7x_1 + 15x_2 + 5x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \ge 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 \ge -3 \\ 2x_1 + x_2 + 8x_3 \ge 2 \\ x_j \ge 0 \ (j = 1..3) \end{cases}$$

2. $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 \ge -6 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_j \ge 0 \ (j = 1..3) \end{cases}$$

****

Chương 4. BÀI TOÁN VẬN TẢI

4.1. Bài toán vận tải dạng chính tắc

4.1.1. Định nghĩa

Cần vận chuyển một loại hàng hoá từ *m* trạm phát $A_1, A_2, ..., A_m$ đến *n* trạm thu $B_1, B_2, ..., B_n$. Lượng hàng cần chuyển đi tương ứng là $a_1 , a_2 , ... , a_m$; yêu cầu của các trạm thu tương ứng là $b_1 , b_2 , ... , b_n$. Chi phí vận chuyển 1 đơn vị hàng hoá từ trạm phát A_i đến trạm thu B_j là c_{ij} . Hãy lập kế hoạch vận chuyển sao cho tổng chi phí thấp nhất và đồng thời đảm bảo các yêu cầu của trạm thu và phát.

Gọi x_{ij} là lượng hàng chuyển từ A_i đến B_j
Tổng chi phí theo kế hoạch vận chuyển $x=\{ x_{ij} \}_{mxn}$ là

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

Mô hình toán học:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1..m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1..n) \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1..m, j = 1..n) \end{cases}$$

Đây là bài toán ($\mathcal{D}$, f) dạng chính tắc:
Bài toán đối ngẫu là:

$$g(u,v) = \sum_{j=1}^{n} v_j - \sum_{i=1}^{m} u_i \rightarrow \max$$

$$\{ v_j - u_i \leq c_{ij} \ (i = 1..m, j = 1..n)$$

Cặp điều kiện đối ngẫu là: $x_{ij} \geq 0 \iff v_j - u_i \leq c_{ij}$
Từ đó, theo nguyên lý độ lệch bù có tiêu chuẩn tối ưu cho phương án $x=\{ x_{ij} \}_{mxn}$ là là tồn tại hệ thống số $\{u_i, v_j\}$ thoả mãn:

$$(*) \begin{cases} v_j - u_i \leq c_{ij} \ (i = 1..m, j = 1..n) \\ v_j - u_i = c_{ij} \ neu \ x_{ij} > 0 \end{cases}$$

u_i gọi là thế vị dòng; vj gọi là thế vị cột.
Hệ thống $\{u_i , v_j \}_{m+n}$ gọi là hệ thống thế vị.

Vậy, để giải bài toán vận tải cần tìm phương án cơ bản và kiểm tra tính tối ưu qua hệ thống thế vị.

Dựa vào ý nghĩa chung của bài toán đối ngẫu có thể xem thế vị dòng u_i là giá trị 1 đơn vị hàng tại trạm phát A_i, thế vị cột v_j là giá trị tại trạm thu B_j. Công thức (*) mang ý nghĩa kinh tế là:

Trong mọi phương án vận chuyển tốt nhất thì chênh lệch giá trị hàng tại trạm phát và trạm thu đều không vượt quá chi phí vận chuyển trực tiếp giữa hai nơi. Và nếu hàng vận chuyển từ A_i đến B_j thì giá trị hàng tại B_j đúng bằng giá trị tại A_i cộng chi phí vận chuyển.

4.1.2. Điều kiện cân bằng thu phát

Đặt: $a = \sum_{i=1}^{m} a_i$ gọi là tổng phát

$b = \sum_{j=1}^{n} b_j$ gọi là tổng thu

Bài toán vận tải dạng chính tắc cân bằng thu phát (a=b) luôn luôn có nghiệm.

Xét $x=\{ x_{ij} \}_{mxn}$ với $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{a} = \frac{a_i b_j}{b}$

có $x_{ij} > 0$ (i=1..m, j=1..n)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{b} = \sum_{i=1}^{m} a_i \text{ (i=1..m)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{a} = \sum_{i=1}^{m} b_j \text{ (j=1..n)}$$

Vậy $x \in \mathscr{D}$

Nếu a≠ b thì bài toán không có phương án . Vì vậy bài toán luôn được khảo sát với giả thiết a = b, gọi là điều kiện cân bằng thu phát. Trong điều kiện này bài toán luôn luôn có nghiệm ($\mathscr{D} \neq \emptyset$ và f bị chặn dưới trên $\mathscr{D}$).

4.2. Bảng phân phối và tính chất

4.2.1. Bảng phân phối

Cho bài toán vận tải dạng chính tắc

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1..m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1..n) \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1..m, j = 1..n) \end{cases}$$

Đây là bài toán $(\mathcal{D},f)$ dạng đặc biệt nên được đưa vào bảng phân phối để giải theo thuật toán riêng.

Bảng phân phối:

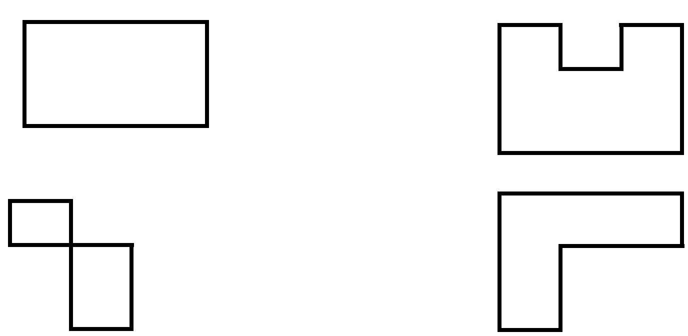
Phát\Thu	b_1	b_2	…	b_j	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1j}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2j}	…	c_{2n}
…	..	..	…	..	…	..
a_i	c_{i1}	c_{i2}	…	c_{ij}	…	c_{in}
…	..	..	…	..	…	..
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mj}	…	c_{mn}

4.2.2. Tính chất

Xét bảng phân phối mxn (m hàng n cột)

- ô ở hàng i , cột j gọi là ô (i,j).
- Dây chuyền là dãy ô có dạng: 2 ô liên tiếp nằm trên cùng 1 hàng hay 1 cột, 3 ô liên tiếp không cùng nằm trên cùng 1 hàng hay 1 cột.
- Chu trình (vòng) là dây chuyền khép kín.

Các dạng vòng thường gặp:



Nhận xét: *Số ô trên một vòng là số chẵn.*

Tính chất 1 Với bảng phân phối $m_x n$ thì số ô tối đa không tạo thành vòng là *m+n-1*.

Tính chất 2 Có *m+n-1* ô không tạo thành vòng thì thêm vào 1 ô bất kỳ sẽ chứa 1 vòng duy nhất và ngược lại bỏ đi 1 ô bất kỳ trong vòng đó sẽ còn lại *m+n-1* ô không chứa vòng.

Gọi x_{ij} là lượng hàng phân phối cho ô (i,j).
Cho phương án $x=\{ x_{ij} \}_{mxn}$. Ô (i,j) gọi là *ô chọn* nếu $x_{ij} > 0$; ngược lại gọi là *ô loại*.

Tính chất 3 Phương án cơ bản là phương án có tập hợp ô chọn không chứa vòng.

4.3. Thuật toán thế vị

4.3.1. Nội dung

Xuất phát từ phương án cơ bản ban đầu, dùng hệ thống thế vị kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu, nếu chưa tối ưu thì chuyển sang phương án cơ bản mới tối ưu. Sau hữu hạn bước có được phương án tối ưu.

4.3.2. Xây dựng phương án cơ bản ban đầu

* ***Nguyên tắc phân phối tối đa***

Khi chọn ô (i,j) để phân phối, phân phối tối đa vào ô (i,j) là đặt $x_{ij} = min\ (a_i , b_j)$. Sau khi phân phối vào ô (i,j), loại hàng i hoặc cột j đã thỏa mãn nhu cầu ra khỏi bảng đơn hình. Tiếp tục phân phối cho bảng mới, cho đến khi thỏa mãn nhu cầu của tất cả các trạm thì có được phương án cơ bản ban đầu. Vì.bằng nguyên tắc tối đa, tập các ô chọn không tạo thành vòng.

* ***Các phương pháp phân phối***

a/ *Phương pháp phân phối theo chi phí nhỏ nhất*

Ưu tiên phân phối cho ô có chi phí c_{ij} nhỏ nhất.

b/ *Phương pháp góc tây bắc*

Ưu tiên phân phối cho ô (1,1), ô ở góc tây bắc.

c/ *Phương pháp xấp xỉ Fôghen*

Ưu tiên phân phối ở ô có cước phí nhỏ nhất thuộc hàng (cột) có chênh lệch lớn nhất giữa cước phí nhỏ nhất và nhì.

Nhận xét:

Phương pháp góc tây bắc, tuy có phương án cơ bản ban đầu xa phương án tối ưu, nhưng thuận tiện trong cài đặt.

Phương pháp Fôghen có phương án cơ bản ban đầu gần phương án tối ưu, vì có tính đến bước sau.

Để đơn giản và ít bước lặp, các ví dụ được trình bày theo phương pháp chi phí nhỏ nhất. Tuy nhiên, trong hướng dẫn cài đặt thì dùng phương pháp góc tây bắc.

4.3.3. Các bước của thuật toán thế vị

Bước 1 Xây dựng phương án cơ bản ban đầu

Xây dựng phương án cơ bản ban đầu với tập S các ô chọn gồm $m+n-1$ không chứa vòng bằng bất kỳ phương pháp nào.

Với bài toán không suy biến, mỗi ô chọn chỉ có một trạm thỏa mãn và được loại ra khoải bảng phân phối, tính lại nhu cầu và phân phối tiếp. Riêng ô cuối cùng, do cân bằng thu phát nên cả hai trạm đều thỏa mãn.. Vậy có đúng $m+n-1$ ô chọn không chứa vòng.

Bước 2 Xây dựng hệ thống thế vị $\{u_i , v_j\}$.

Giải hệ $v_j - u_i = c_{ij}$ nếu $(i ,j) \in S$.

Đây là hệ $m+n-1$ phương trình, $m+n$ ẩn nên có thể chọn 1 ẩn tuỳ ý, thông thường chọn cho $u_1=0$. Các thế vị còn lại được tính theo công thức sau

$v_j = u_i + c_{ij}$ *với* u_i *đã biết và* $(i,j) \in S$

$u_i = v_j - c_{ij}$ *với* v_j *đã biết và* $(i,j) \in S$

Bước 3 Kiểm tra tiêu chuẩn tối ưu.

Đặt $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$. Có $\Delta_{ij} =0$ nếu $(i,j) \in S$

Nếu $\Delta_{ij} \leq 0 \ \forall (i,j)$ thì $x=\{x_{ij}\}_{mxn}$ là phương án tối ưu.

Nếu $\exists (i,j)>0$ thì chuyển sang bước 4.

Bước 4 Điều chỉnh phương án

Nếu $\Delta_{rk} = \max \Delta_{ij}$ thì ô (r, k) gọi là ô điều chỉnh.

$S \cup \{(r, k)\}$ chứa một vòng duy nhất, gọi là vòng điều chỉnh V.

Tìm vòng V bằng cách đánh số chẵn lẻ bắt đầu từ ô ô (r, k). Gọi $V_{lẻ}$ là tập ô có chỉ số lẻ và $V_{chẵn}$ là tập ô có chỉ số chẵn.

Đặt q= min {xc}, với xc là x_{ij} với $(i,j) \in V_{chẵn}$. q gọi là lượng điều chỉnh.

Nếu x_{iojo} =q thì ô(i_o, j_o) trở thành ô loại trong phương án cơ bản mới.

Với bài toán suy biến, lượng điều chỉnh q có thể đạt tại nhiều ô, khi đó chỉ loại 1 ô, các ô còn lại trở thành “ô chọn 0”.

Biến đổi phương án x thành x' theo công thức sau:

$x'_{ij}=x_{ij} + q$ *nếu* $(i,j) \in V_{lẻ}$

$x'_{ij}=x_{ij} - q$ *nếu* $(i,j) \in V_{chẵn}$

Quay lại bước 2.

Sau hữu hạn bước có phương án tối ưu.

Ví dụ 4.1 a=b=130

$a_i \backslash b_j$	**40**	**70**	**20**	v_j
80	**20** 10	**20** 9	+ 2	0
30	4	**20** 3	**20** 1	6
20	**20** 2	6	2	8
u_i	10	9	7	

f(x)=830

$a_i \backslash b_j$	**40**	**70**	**20**	v_j
80	**20** 10	**40** 9	**20** 2	0
30	4	3	**20** 1	6
20	**20** 2	6	2	8
u_i	10	9	7	

$\Delta_{ij} \leq 0 \ \forall (i,j)$, $f_{min}=730$

Ví dụ 4.2 a=b=311

$a_i \backslash b_j$	**76**	**62**	**88**	**45**	**40**	v_j
79	**64** 10	19	15	**15** 6	7	0
102	13	**14** 11	**88** 8	7	4	5
70	12	17	+ 10	**30** 5	**40** 3	1
60	**12** 12	**48** 18	18	10	9	-2
u_i	10	16	13	6	4	

F(x)= 2866

$a_i \backslash b_j$	**76**	**62**	**88**	**45**	**40**	v_j
79	**34** 10	19	15	**45** 6	7	0
102	13	**44** 11	**58** 8	7	4	5
70	12	17	**30** 10	5	**40** 3	3
60	**42** 12	**18** 18	18	10	9	-2
u_i	10	16	13	6	6	

F_{min}= 2806

4.4. Các dạng khác

4.4.1. Không cân bằng thu phát

Nếu a≠ b thì bài toán không có phương án. Tuy nhiên thực tế không đòi hỏi phải chở hết hàng từ các trạm phát mới đáp ứng yêu cầu các trạm thu; hay trái lại có thể lượng hàng ở các trạm phát không đáp ứng được yêu cầu các trạm thu. Khi đó ta thêm trạm thu giả A_{m+1} hoặc trạm phát giả B_{n+1}bằng chênh lệch giữa tổng thu và tổng phát:

$$a_{m+1} = b - a \quad \text{nếu } a<b$$

$$\text{hoặc} \quad b_{n+1} = a - b \quad \text{nếu } a>b$$

Lượng hàng vận chuyển từ trạm phát A_i đến trạm thu giả B_{n+1}, nghĩa là lượng hàng đó được giữ lại A_i , và lượng hàng chuyển từ trạm phát giả A_{m+1} đến trạm thu B_j nghĩa là tại B_j lượng hàng ấy không được thoả mãn.
Tất nhiên cước phí các ô trên trạm giả bằng không.

Cước phí ở các trạm giả bằng không, thường nhỏ nhất, nhưng vẫn ưu tiên phân phối cho các ô có cước phí dương nhỏ nhất ở các ô không phải của trạm giả, cuối cùng hàng còn lại phân phối vào các ô của trạm giả.

Ví dụ 4.3 a=120, b=100. Thêm tram thu giả với a_4=20.

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**30**
20	6	4	3
40	8	3	7
40	7	5	6
20	5	1	2

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**30**	**20**	v_i
20	6	4	**20** 3	0	0
40	8	**20** 3	7	**20** 0	-1
40	**30** 7	5	**10** 6	+ 0	-3
20	5	**20** 1	**0** 2	0	1
u_i	4	2	3	-1	

F(x)= 410

$a_i \backslash b_j$	**30**	**40**	**30**	**20**	v_i
20	6	4	**20** 3	0	0
40	8	**30** 3	7	**10** 0	-1
40	**30** 7	5	6	**10** 0	-3
20	5	**10** 1	**10** 2	0	1
u_i	4	2	3	-1	

F_{min}= 390

4.4.2. Suy biến

Với bài toán suy biến, khi xây dựng phương án cơ bản đầu tiên có thể đồng thời thỏa mãn cả hai trạm thu và phát. Để có được đúng *m+n-1* ô chọn, chỉ loại một trạm, trạm còn lại xem như vẫn còn nhu cầu 0. Khi phân phối cho trạm này tạo nên "ô chọn 0", nghĩa là ô chọn với lượng hàng phân phối là 0. Hay lượng điều chỉnh q có thể đạt tại nhiều ô, khi đó chỉ loại 1 ô, các ô còn lại trở thành "ô chọn 0".

Ví dụ 4.4

$a_i \backslash b_j$	**30**	**20**	**25**	**35**	**40**	v_i
30	18	7	6	**30** 2	12	0
20	**0** 5	**20** 1	10	5	11	0
40	10	5	+ 3	**5** 7	**35** 14	-5
60	**30** 6	3	**25** 2	11	**5** 10	-1
u_i	5	1	1	2	9	

F(x)= 885

$a_i \backslash b_j$	**30**	**20**	**25**	**35**	**40**	v_i
30	18	7	6	**30** 2	12	0
20	**0** 5	**20** 1	10	5	11	0
40	10	+ 5	**25** 3	**5** 7	**10** 14	-5
60	**30** 6	3	2	11	**30** 10	-1
u_i	5	1	-2	2	9	

F(x)= 810

$a_i \backslash b_j$	**30**	**20**	**25**	**35**	**40**	v_i
30	18	7	6	**30** 2	12	0
20	**10** 5	**10** 1	10	5	11	-1
40	10	**10** 5	**25** 3	**5** 7	14	-5
60	**20** 6	3	2	11	**40** 10	-2
u_i	4	0	-2	2	8	

F_{min}=800

4.4.3. Dạng cực đại

Xét bài toán vận tải dạng *max*:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_{ij} \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1..m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1..n) \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1..m, j = 1..n) \end{cases}$$

Đưa về dạng chính tắc tương đương bằng cách đặt c_{ij} = - q_{ij} (*i=1..m, j=1..n*)

$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = 1..m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ (j = 1..n) \\ x_{ij} \geq 0 \ (i = 1..m, j = 1..n) \end{cases}$$

Có $f_{max} = -g_{min}$.

Ví dụ 4.5
Phân phối lao động.

Một công ty vận tải biển cần tuyển 110 người để bố trí 10 người làm máy trưởng (MT), 25 thợ 1, 30 thợ 2 và 45 thợ 3. Phòng tổ chức tìm được 90 người gồm 25 kỹ sư (KS), 20 trung cấp (TC) và 45 công nhân (CN). Khả năng cán bộ được đánh giá theo công việc qua bảng sau

Công việc

Trình độ

	MT	Thợ 1	Thợ 2	Thợ 3
KS	5	4	0	0
TC	3	5	4	0
CN	0	1	5	4

Cần bố trí sao cho sử dụng tối đa năng lực của mọi người.
Đây là bài toán vận tải dạng max. Không cân bằng thu phát. Đưa vào trạm phát giả: a_4= 110 - 90 = 20

$a_i \backslash b_j$	**10**	**25**	**30**	**45**	v_i
25	**10** -5	**5** -4	0	**10** 0	0
20	-3	**20** -5	+ -4	0	1
45	0	-1	**30** -5	**15** -4	4
20	0	0	0	**20** 0	0
u_i	-5	-4	-1	0	

$a_i \backslash b_j$	**10**	**25**	**30**	**45**	v_i
25	**10** -5	**5** -4	0	**10** 0	0
20	-3	**10** -5	**10** -4	0	1
45	0	-1	**20** -5	**25** -4	2
20	0	0	0	**20** 0	-2
u_i	-5	-4	-3	-2	

Đây là phương án tối ưu

Vậy có phương án phân phối lao động tối ưu như sau:

10 kỹ sư làm Máy trưởng
15 kỹ sư làm Thợ 1
10 Trung cấp làm Thợ 1
10 Trung cấp làm Thợ 2
20 Công nhân làm Thợ 2
25 Công nhân làm Thợ 3

Ví dụ 4.6 Bài toán phân phối đất trồng

Có 3 loại ruộng A, B, C với diện tích tương ứng là 20, 25, 30 *ha* để trồng 3 loại lúa I, II, III với diện tích theo kế hoạch là 15, 30, 30 *ha* tương ứng. Hãy tìm phương án phân phối đất trồng sao cho tổng sản lượng cao nhất đồng thời đảm bảo kế hoạch. Biết sản lượng lúa trên từng loại đất cho trong bảng sau (tấn/ha)

lúa \ đất	**I** **15**	**II** **30**	**III** **30**
A(25)	12	8	8
B(25)	8	10	9
C(30)	8	10	10

Đây là bài toán vận tải dạng max

$a_i \backslash b_j$	**15**	**30**	**30**	v_i
25	**15** -12	-8	**5** -8	0
20	-8	**25** -10	-9	2
45	**5** -8	-10	**25** -10	2
u_j	-12	-8	-8	

f_{max}=770

Ví dụ 4.7 Bài toán bổ nhiệm

Cần phân n việc cho n người. Người i làm việc j thì năng suất là c_{ij} (i,j=1..n). Hãy phân công việc cho n người để tổng năng suất cao nhất.

Đặt x_{ij}=1 nếu người i làm việc j; ngược lại đặt x_{ij}=0. Bài toán này còn gọi là bài toán quy hoạch nguyên 0-1. Vì suy biến nên có thuật toán khác tiện hơn.

Bảng năng suất được cho như sau

Việc \ Ng	**1**	**2**	**3**	**4**
A	5	2	6	4
B	3	7	5	6
C	4	1	5	2
D	8	6	7	3

$a_i \backslash b_j$	**1**	**1**	**1**	**1**	v_i
1	-5	-2	**1** -6	**0** -4	0
1	-3	**1** -7	-5	**0** -6	2
1	-4	-1	+ -5	**1** -2	-2
1	**1** -8	-6	**0** -7	-3	1
u_j	-7	-5	-6	-4	

f(x)=23

$a_i \backslash b_j$	**1**	**1**	**1**	**1**	v_i
1	-5	-2	-6	**1** -4	0
1	-3	**1** -7	-5	**0** -6	2
1	-4	-1	**1** -5	**0** -2	-2
1	**1** -8	+ -6	**0** -7	-3	0
u_j	-8	-5	-7	-4	

f(x)=24

$a_i \backslash b_j$	**1**	**1**	**1**	**1**	v_i
1	-5	-2	-6	**1** -4	0
1	-3	**1** -7	-5	**0** -6	2
1	-4	-1	**1** -5	**0** -2	-2
1	**1** -8	**0** -6	-7	-3	1
u_j	-7	-5	-7	-4	

f_{max}=24

4.4.4. Bài toán xe rỗng

Bài toán xe rỗng ứng dụng thường xuyên trong thực tế, nên được xem là một dạng đặc biệt của bài toán vận tải
Ví dụ 4.8 Công ty vận tải cần hoàn thành hợp đồng chở hàng sau:

1) Than: Kim Liên → Ngọc Hồi: 50 tấn
2) Xi măng: Ga Hà Nội → Chuông: 24 tấn
3) Xi măng: Ga Hà Nội → Ba thá: 10 tấn
4) Sắn: Mai Lĩnh → Hà Đông: 8 tấn
5) Muối: Thường Tín → Hà Đông: 42 tấn
6) Muối: Thường Tín → Trúc Sơn : 8 tấn
7) Ngô: Kim bài → Hà Đông: 34 tấn

Hãy lập kế hoạch vận chuyển sao cho tổng số tấn xe rỗng ít nhất.
Với cự ly các địa điểm như sau:

	Ngọc hồi	**Chuông**	**Ba thá**	**Hà Đông**	**Trúc Sơn**
Kim Liên	11	27	40	10	21
Ga Hà Nội	12	28	41	11	22
Mai Lĩnh	18	18	31	7	4
Thường Tín	6	34	35	17	28
Kim Bài	26	2	15	15	20

Cước phí là cự ly
Nơi có hàng là nơi thu xe rỗng
Nơi cần hàng là nơi phat xe rỗng

<u>Trạm thu xe rỗng</u>		<u>Trạm phát xe rỗng</u>	
Kim liên:	50	Ngọc Hồi:	50
Ga Hà Nội:	34	Chuông:	24
Mai Lĩnh:	8	Ba Thá:	10
Thường Tín:	50	Hà Đông:	84
Kim Bài:	34	Trúc Sơn:	8

Đây là bài toán vận tải dạng cực tiểu cân bằng thu phát.

$a_i \backslash b_j$	**50**	**34**	**8**	**50**	**34**	v_i
50	11	12	18	**50** 6	25	0
24	27	28	18	34	**24** 2	11
10	40	41	31	35	**10** 15	-2
84	**50** 10	**34** 11	**0** 7	17	+ 15	-4
8	21	22	**8** 4	**0** 28	**0** 20	-1
u_i	6	7	3	6	13	

F(x)= 1404

$a_i \backslash b_j$	**50**	**34**	**8**	**50**	**34**	v_i
50	11	12	18	**50** 6	25	0
24	27	28	18	34	**24** 2	11
10	40	41	31	35	**10** 15	-2
84	**50** 10	**34** 11	7	17	**0** 15	-2
8	21	22	**8** 4	**0** 28	**0** 20	-1
u_i	8	9	3	6	13	

F_{min}= 1404

Bảng phân phối xe rỗng với tổng tấn x km xe rỗng ít nhất là:

Tuyến đường	Số tấn xe rỗng
Ngọc hồi → Thường tín	50
Chuông → Kim bài	24
Ba thá → Kim bài	10
Hà đông → Kim liên	50
Hà đông → Ga Hà nội	34
Trúc sơn → Mai lĩnh	8

Kết hợp các trạm có nguồn xe (Ga Hà nội, Bến xe Kim liên), có thể phân phối lộ trình tối ưu như sau:

1. Ga Hà nội (24 xi măng) → Chuông → Kim bài (24 ngô) → Hà đông → Ga Hà nội.
2. Ga Hà nội (10 xi măng) → Ba thá → Kim bài (10 ngô) → Hà đông → Ga Hà nội.
3. Kim liên (42 than) → Ngọc hồi → Thường tín (42 muối) → Hà đông → Kim liên.
4. Kim liên (8 than) → Ngọc hồi → Thường tín (8 muối) → Trúc sơn → Mai lĩnh (8 sắn) → Hà đông → Kim liên.

4.4.5. Bài toán ô cấm

Do yêu cầu kỹ thuật, phải hạn chế không được vận chuyển trên một số tuyến đường nào đó. Khi đó ta xem cước phí của ô (i,j) bị cấm là c_{ij}= M khá lớn(M→∞). Tiếp tục thuật toán thế vị bình thường.

Ví dụ 4.9

$a_i \backslash b_j$	**72**	**45**	**9**	$\mathbf{v_i}$
22	5	**22** 3	7	0
60	**60** 1	**0** 2	M	1
5	M	3	**5** 4	1
23	M	**23** 2	5	1
16	**12** 3	+ 3	**4** 6	-1
$\mathbf{u_i}$	2	3	5	

$a_i \backslash b_j$	**72**	**45**	**9**	$\mathbf{v_i}$
22	5	**22** 3	7	0
60	**60** 1	2	M	1
5	M	3	**5** 4	1
23	M	**23** 2	5	1
16	**12** 3	**0** 3	**4** 6	-1
$\mathbf{u_i}$	2	3	5	

4.5. Cài đặt thuật toán thế vị

4.5.1. Khai báo dữ liệu

a) Ma trận cước phí $C=(c_{ij})_{mxn}$, mảng hàng phát $A=(a_i)_m$, mảng hàng thu $B=(b_j)_n$, phương án $X=(x_{ij})_{mxn}$

int a[m], b[n], c[m][n], x[m][n];

b) Hệ thống thế vị $\{u_i, v_j\}$.

int u[m], v[n];

c) Mảng S các ô chọn và vòng điều chỉnh V được khai báo là các ma trận 0/1 để đánh dấu như sau:

int S[m][n], V[m][n];

với ý nghĩa:

S[i][j]=1 ⇔ ô (i,j) $\in S$

và

V[i][j]=1 ⇔ ô (i,j) $\in V$

4.5.2. Xây dựng phương án cơ bản ban đầu

Tìm phương án cơ bản ban đầu bằng nguyên tắc phân phối tối đa và phương pháp góc tây bắc.

Các mảng đánh dấu các trạm đã thỏa mãn chưa (đã loại khỏi bảng phân phối).

int aa[m], bb[n];.

với ý nghĩa:

Trạm A_i đã thỏa mãn ⇔ aa[i]=0

và

Trạm B_j đã thỏa mãn ⇔ bb[j]=0

```
void phanphoi()
{
   int i, j, dem=0;

   for (đem=0; dem<m+n-1; dem++){
      i=0; while (!aa[i])i++;
      j=0; while (!bb[j])j++;
      S[i][j]=1;
      if (a[i]<=b[j]){
         aa[i]=1;
         b[j]-=a[i];
         x[i][j]=a[i];
      }
      else {
```

```
         bb[j]=1;
         a[i]-=b[j];
         x[i][j]=b[j];
      }
   }
}
```

4.5.3. Xây dựng hệ thống thế vị

Để đơn giản, lặp nhiều nhất *m+n-1* lần cho việc kiểm tra cả bảng phân phối.
Các mảng đánh dấu các thế vị u_i, v_j đã được tính chưa
int uu[m], vv[n];.

với ý nghĩa:

u_i đã có $\Leftrightarrow$ uu[i]=1

và

v_j đã có $\Leftrightarrow$ vv[j]=1

```
void Thevi()
{
   int i, j, uu[m]={0}, vv[n]={0}, dem;

   u[1]=0; uu[1]=1;
   for (dem=0; dem<m+n-1; dem++){
      for (i=0; i<m; i++)
         for (j=0; j<m; j++){
            if (u[i]){v[j]=u[i]+c[i][j]; vv[j]=1;}
            if (v[v]){u[i]=v[j]-c[i][j]; uu[i]=1;}
         }
   }
```

4.5.4. Kiểm tra tối ưu

Vừa kiểm tra tối ưu vừa tìm ô điều chỉnh (r,k).

```
int ToiUu ( )
{
   int i,j, drk;

   drk=v[0]-[u[0]-c[0][0]; r=0; k=0;
   for (i=0; i<=m; i++)
      for (j=0; j<m; j++)
         if (v[j]-[u[i]-c[i][j]>drk){
            r=i; k=j;
            drk= v[j]-[u[i]-c[i][j];
         }
      }
   return drk>0;
}
```

4.5.5. Tìm vòng điều chỉnh

Ô treo trong tập V là ô ở một mònh trên dòng hoặc cột.
Thuật toán tìm vòng điều chỉnh V duy nhất trên tập S bằng cách xóa tất cả các ô treo cho đến khi không còn thì tập ô còn lại là vòng V cần tìm.

```
int TimVongDC( )
{
   int i,j,done=0,dem;

   for (i=0; i<m; i++)
      for (j=0; j<n; j++) V[i][j]= S[i][j];

   while (!done){
   done=1;
   // treo tren hang
   for (i=1; i<=m; i++){
      dem=0; for (j=0; j<m; j++)dem+=V[i][j];
      if (dem==1){
            for (j=0; j<m; j++)V[i][j]=0;
            done=0;
      }
   }

   // treo tren cot
   for (j=0; j<m; j++) {
      dem=0; for (i=1; i<=m; i++) dem+=V[i][j];
      if (dem==1){
            for (i=1; i<=m; i++)V[i][j]=0;
            done=0;
      }
   }
}
```

4.5.6. Biến đổi bảng

```
int Biendoi( )
{
   int i,j,q;

   i=r; j=k;

   // tim luong dieu chinh q
   j=0; while (j<n || j==k || !V[r][j]) j++;
   q=x[r][j]; i0=r; j0=j;

   while (i!=r || j!=k){
      j=0; while (j<n ||!V[i][j]) j++;//di theo hang tim o chan
      if (x[i][j]<q){ q= x[i][j]; i0=i; j0=j;}
      i=0; while (i<m ||!V[i][j]) i++;//di theo cot tim o le
   }
   // dieu chinh
   x[r][k]=q; S[r][k]=1;
   x[i0][j0]=0;   S[i0][j0]=0;
   while (i!=r || j!=k){
```

```
        j=0; while (j<n ||!V[i][j]) j++;//di theo hang tim o chan
        x[i][j]-=q;
        i=0; while (i<m ||!V[i][j]) i++;//di theo cot tim o le
        x[i][j]+=q;
    }
}
```

---oOo---

4.6. Bài tập

Giải các bài toán vận tải dạng min sau đây:

1.

phat\thu	76	62	88	45
79	10	20	15	6
102	5	11	8	7
70	12	4	10	5
60	10	18	2	10

2.

phat\thu	40	100	20
50	8	9	2
45	4	3	1
35	2	6	5

3.

phat\thu	30	40	30
70	6	9	6
40	6	2	7
50	5	5	3
20	4	1	2

4.

phat\thu	30	20	25	35
35	2	8	6	2
25	5	2	1	3
50	9	5	4	6

5.

	120	45	65	180
240	9	3	5	7
70	5	2	8	6
100	6	3	4	2

6.

	70	30	70	80
65	9	3	7	4
55	6	1	4	2
60	2	5	9	5

7.

	100	35	45	200
240	8	7	6	7
60	5	2	4	6
80	6	3	3	2

8.

phat\thu	30	20	25	35
35	2	8	6	2
25	5	2	1	3
50	9	5	4	6

9.

	120	50	45	100
200	6	1	3	7
75	3	2	4	5
80	4	3	9	2

10.

	10	45	65	120
25	10	7	9	8
120	4	5	2	3
60	1	2	6	2

****

Chương 5. PHƯƠNG PHÁP HUNGARY

Phương Pháp này được nhà toán học Hungary Egervary công bố trong một bài báo năm 1931, 16 năm trước khi phương pháp đơn hình của Dantzig ra đời, nhưng không ai biết đến, cho đến năm 1953 nhà toán học Mỹ Kuhn dịch bài báo và đặt tên là "Phương pháp Hungary".

5.1. Bài toán bổ nhiệm

Cần phân n việc cho n người. Người i làm việc j thì chi phí là cij (i,j=1..n). Hãy phân công việc cho n người để tổng chi phí thấp nhất.

Đặt x_{ij}=1 nếu người i làm việc j; ngược lại đặt x_{ij}=0.
Mô hình toán học:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (i = 1..n) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (j = 1..n) \\ \quad x_{ij} = 0 \text{ hay } 1 \ (\text{i, j} = 1..\text{n}) \end{cases}$$

Ma trận C=(c_{ij})*nxn* gọi là ma trận chi phí.
Thực sự có thể bỏ hạn chế x_{ij}=0 hoặc 1 để thay x_{ij} là số tự nhiên thì mỗi ràng buộc đảm bảo x_{ij}=0 hoặc 1. Do đó, ràng buộc x_{ij}=0 hoặc 1 được viết lại là $x_{ij}\geq 0$, nguyên. Đây là mô hình thực sự của bài toán vân tải. Có thể dùng thuật toán thế vị để giải. Với thuật toán này có $_{2n-1}$ ô chọn. Tuy nhiên chỉ có *n* ô chọn khác 0, vì bài toán suy biến. Vì vậy có thể có nhiều bước lặp mà phương án mới không tốt hơn.

Rõ ràng mỗi phương án là một hoán vị của các số *1..n*. Ví dụ hoán vị (4,2,1,3) nghĩa là người 1 làm việc 4, người 2 làm việc 2, người 3 làm việc 1 và người 4 làm việc 3. Một cách viết hoán vị dạng ma trận M=(m_{ij})nxn, với m_{ij}=1 khi và chỉ khi người i làm việc j.

Định lý 5.1. *Nếu ma trận chi phí của bài toán bổ nhiệm có các phần tử không âm và có ít nhất n số 0, thì một phương án tối ưu tồn tại nếu n số 0 nằm trong các vị trí các số 1 của ma trận hoán vị Pnxn. Ma trận P biểu diễn phương án tối ưu.*

Rõ ràng, mọi phương án đều có tổng chi phí không nhỏ hơn 0, nên 0 là nhỏ nhất.

Định lý này cung cấp một mục tiêu của thuật toán. Chúng ta sẽ chứng tỏ rằng có thể thay đổi chi phí mà không thay đổi lời giải. Thuật toán sẽ trình bày cách sửa đổi để ma trận chi phí có chứa các số 0 trên mỗi dòng và mỗi cột.

Định lý 5.2. *Giả sử ma trận chi phí là* $C=(c_{ij})_{n\times n}$. Giả sử $X=(x_{ij})_{n\times n}$ *là phương án tối ưu. Gọi C' là ma trận có được từ C bằng cách cộng hằng số* $\boldsymbol{\alpha}$ *vào dòng thứ r. Thì X cũng là phương án tối ưu của bài toán mới xác định bởi C'.*

Chứng minh

Hàm mục tiêu của bài toán mới là

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq r}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}(c_{rj}+\boldsymbol{\alpha})x_{rj}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \boldsymbol{\alpha}\sum_{j=1}^{n} x_{rj}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \boldsymbol{\alpha}$$

vì mỗi dòng có tổng bằng 1. Do đó giá trị nhỏ nhất cho g(x) nhận được khi f(x) nhỏ nhất. Hay hai bài toán cùng phương án tối ưu.

Phát biểu tương tự cho việc cộng thêm hằng số vào cột. Do đó, chiến thuật là sửa đổi C bằng cách cộng thêm vào mỗi dòng/cột các hằng số.

Ví dụ 5.1. Giả sử bài toán bổ nhiệm có ma trận chi phí

C=

4	5	2	5
3	1	1	4
12	3	6	3
12	6	5	9

Bắt đầu rút gọn để mỗi dòng có số 0 bằng cách trừ mỗi dòng cho số nhỏ nhất trên dòng đó.

2	3	0	3
2	0	0	3
9	0	3	0
7	1	0	4

Cột 1 không có số 0. Trừ cột 1 cho 2 có

0	3	0	3
0	0	0	3
7	0	3	0
5	1	0	4

Bây giờ có ít nhất 1 số 0 trên mỗi dòng/cột.

Thử gán các số 1 cho ma trận hoán vị.
Thực ra, không cần ma trận hoán vị, mà chỉ cần đánh dấu “*” tại các số 0 trên ma trận chi phí để biểu hiện một bổ nhiệm. Phải đánh dấu * tại vị trí (4,3) vì dòng 4 chỉ có một số 0. Còn lại bắt đầu từ dòng 1 là (1,1), dòng 2 là (2,2), dòng 3 là (3,4).

0*	3	0	3
0	0*	0	3
7	0	3	0*
5	1	0*	4

May thay đây là phương án tối ưu, và tổng chi phí là: 4 + 1 + 3 + 5 = 13.
Tuy nhiên, không phải luôn gặp may như ví dụ 1.

Ví dụ 5.2

4	1	3	4
5	6	2	9
6	5	8	5
7	6	2	3

Trừ mỗi dòng cho phần tử nhỏ nhất, có được

3	0	2	3
3	4	0	7
1	0	3	0
5	4	0	1

Trừ mỗi cột cho phần tử nhỏ nhất, có được

2	0	2	3
2	4	0	7
0	0	3	0
4	4	0	1

Tạo một cách đánh dấu “*” từng dòng, có được

2	0*	2	3
2	4	0*	7
0*	0	3	0
4	4	0	1

Ma trận này không biểu diễn cách bổ nhiệm đầy đủ; người 4 chưa có việc. Có hai trường hợp: hoặc là không thể hoàn thành việc đánh dấu "*" cho các số 0, hoặc là có nhưng thuật toán không tìm ra.

Lưu ý đầu tiên là các số 0 trong ma trận $n_{x}n$ có tính chất là tất cả các số 0 có thể được phủ bởi n dòng/cột. Ví dụ, chọn n cột để phủ cả ma trận. Giả sử các số 0 có thể phủ với k dòng/cột, k<n. Gọi ***a*** là phần tử nhỏ nhất không phủ. Tạo ma trận C' mới bằng cách trừ ***a*** vào mỗi phần tử trên mỗi dòng không phủ và cộng ***a*** vào mỗi phần tử trên mỗi cột bị phủ. Mỗi phần tử không bị phủ bị giảm ***a***, vì chúng thuộc dòng không phủ và cột không phủ. Mỗi phần tử bị phủ bởi một dòng/cột thì không thay đổi: hoặc chúng thuộc dòng phủ và cột không phủ nên giữ nguyên; hoặc chúng thuộc dòng không phủ và cột phủ nên chúng được cộng thêm ***a*** rồi trừ bớt ***a*** nên cũng giữ nguyên. Mỗi phần tử bị phủ cả dòng và cột (phủ kép) được cộng thêm ***a***. Do đó C' có các phần tử 0 tại các vị trí mà C không có, và đó có thể là khả năng hoàn thành bổ nhiệm. Thủ tục sửa đổi ma trận C có thể phát biểu đơn giản hơn: trừ ***a*** vào mỗi phần tử không bị phủ và cộng ***a*** vào mỗi phần tử phủ kép. Với ví dụ trên, phủ ma trận cuối cùng như sau

2	0	2	3
2	4	0	7
0	0	3	0
4	4	0	1

Phần tử nhỏ nhất không phủ trên C' là 1. Trừ 1 vào mỗi phần tử không phủ và cộng 1 vào mỗi phần tử phủ kép, có

1	0	2	2
1	4	0	6
0	1	4	0
3	4	0	0

Dùng thuật toán bổ nhiệm cho ma trận cuối cùng có được

1	0*	2	2
1	4	0*	6
0*	1	4	0
3	4	0	0*

Thủ tục trên dựa vào định lý sau, được chứng minh bằng lý thuyết đồ thị bởi Konig.

Định lý 5.3. *Số tối đa các số 0 được đánh dấu "*" bằng số tối thiểu các dòng/cột cần để phủ tất cả các số 0.*

Trong ví dụ 5.2, vì có thể phủ tất cả các số 0 với 3 dòng/cột, nên theo định lý trên thì nhiều nhất là 3 số 0 được đánh dấu "*". Nghĩa là không thể đánh dấu "*" cho 4 số 0, và đánh dấu "*" nhiều số 0 hơn phải dùng thủ tục mô tả ở trên. Một khả năng khác không hoàn thành bổ nhiệm là thuật toán tìm theo dòng thất bại.

Ví dụ 5.3.

4	2	9	7
7	8	5	6
3	3	4	1
7	5	2	6

Trừ mỗi dòng, rồi trừ mỗi cột như trên, có được

0	0	7	5
0	3	0	1
0	2	3	0
3	3	0	4

Trên mỗi dòng, đánh dấu "*" cho phần tử 0 đầu tiên không nằm trên cột đã đánh dấu trước đó, có được

0*	0	7	5
0	3	0*	1
0	2	3	0*
3	3	0	4

việc bổ nhiệm chưa hoàn thành. Tuy nhiên có một cách đánh dấu hoàn thành là

0	0*	7	5
0*	3	0	1
0	2	3	0*
3	3	0*	4

Do đó phải khai triển một thuật toán tìm ra cách đánh dấu "*". Các bước của thuật toán như sau:

Bước 1. Trừ mỗi dòng, mỗi cột để mỗi dòng và mỗi cột có ít nhất một số 0.
Bước 2. Trên mỗi dòng, đánh dấu "*" cho phần tử 0 đầu tiên không nằm trên cột đã đánh dấu trước đó. Nếu n số 0 được đánh dấu thì hoàn thành bổ nhiệm, dừng; có được phương án tối ưu.
Bước 3. Giả sử đánh dấu ít hơn n số 0, xác định có cách khác để đánh dấu hoàn thành không. Nếu có thì dừng sau khi bổ nhiệm lại.
Bước 4. Nếu việc đánh dấu lại không hoàn thành thì tìm k dòng/cột (k<n) để phủ tất cả các số 0.
Bước 5. Gọi ***a*** là phần tử nhỏ nhất không phủ. Trừ ***a*** vào mỗi phần tử không phủ và cộng ***a*** vào mỗi phần tử phủ kép. Quay lại bước 2.

Chi tiết bước 3

Gọi i_0 là dòng không đánh dấu được ở bước 2. Trên dòng i_0, phải có số 0 trên cột j_0 mà cột j_0 đã được đánh dấu, vì j_0 chưa đánh dấu thì dòng i_0 không thất bại. Gọi ô đánh dấu trên cột j_0 là ô (i_1,j_0). Bắt đầu từ ô (i0,j0), xây dựng đường đi xen kẻ theo dòng rồi theo cột, môt tả như sau:

0 tại (i_0, j_0) đến
0* tại (i_1, j_0) đến
0 tại (i_1, j_1) đến
0* tại (i_2, j_1) đến

.....
ở đây các cột $j_0, j_1, j_2,..., j_n$ phải khác nhau.
Các ô tiếp theo trong dãy nhận được như sau.

Trường hợp A. Giả sử đang ở ô (i_k, j_k), tìm 0* trên cột j_k. Nếu có thì thêm vào dãy. Nếu không có 0* trên cột j_k thì đánh dấu lại trên ma trận C': trên dãy từ (i_0,j_0) đến (i_k,j_k) đổi 0 thanh 0* và ngược lại. Lưu ý, bằng cách này tạo một 0* trên dòng i_0 và mỗi dòng trước đó có 0* vẫn giữ nguyên. Bây giờ lặp lại bước 3 cho dòng tiếp theo chưa đánh dấu.

Trường hợp B. Giả sử, cách khác, đang ở 0* tại ô (i_{k+1}, j_k). Tìm 0 trên dòng i_{k+1} không nằm trên cột đã có trong dãy. Nếu có thì thêm vào dãy. Nếu không có 0 thì không thể sửa đổi như trường hợp A.; mà quay lại đánh nhãn cột k là *cột cần thiết* và định hướng lại cách tìm. Thực hiện điều này bằng cách xoá 0* tại ô (i_{k+1},j_k) và 0 tại ô (i_k,j_k) ra khỏi dãy. Nếu $k\geq 1$ thì quay lại 0* tại (i_k,j_{k+1}) và lặp lại tiến trình này với dòng i_k thay cho dòng i_{k+1}. Đó là tìm 0 trên dòng i_k khác với 0 trên cột j_k (cột cần thiết) để không nằm trên cột đã có trong dãy.
Nếu k=0 thì tìm 0 khác trên dòng i_0, giả sử j_0', xây dựng đường đi như trên bắt đầu tại (i_0,j_0'). Nếu không tìm được phần tử 0 phù hợp khác trên dòng i_0 thì chưa tạo được một bổ nhiệm hoàn thành.

Có hai cách xây dựng dãy này có thể kết thúc. Một cách khi thay 0 thành 0* và ngược lại. Cách khác là khi khi tất cả các ô được xoá vì chúng nằm trên cột cần thiết. Trong trường hợp này, không thể bổ nhiệm, và phải sang bước 4.

Ví dụ 5.4.

C=

8	7	9	9
5	2	7	8
6	1	4	9
2	3	2	6

C'=

1	0	2	0
3	0	5	4
5	0	3	6
0	1	0	2

Đánh dấu 0 bắt đầu từ dòng 1 ở bước 2. Thấy dòng 2 là dòng đầu tiên không có 0 trên cột chưa đánh dấu. Ở điểm này,

C'=

1	0*	2	0
3	0	5	4
5	0	3	6
0*	1	0	2

Rồi bắt đầu xây dựng lại dãy 0 và 0* theo bước 3. Ô đầu tiên là ô (2,2), chứa 0. Tìm 0* trên cột 2 ở ô (1,2). Tìm 0 trên dòng 1 ở ô (1,4). Trên cột 4 không có . Rơi vào trường hợp A. Dãy ô là: (2,2), (1,2), (1,4).

Đổi 0 thành 0* và ngược lại, có

C'=

1	0	2	0*
3	0*	5	4
5	0	3	6
0*	1	0	2

tăng được 0* một phần tử. Bây giờ lặp lại bước 3 cho dòng 3.

Không có 0* trên dòng 3; do đó xây dựng dãy ô bắt đầu tự ô (3,2). 0* trên cột 2 ở ô (2,2). Nhưng không có 0 trên dòng 2. Rơi vào trường hợp B và cột 2 là cột cần thiết. Dãy ô là: 0 tại (3,2), 0* tại (2,2).

Vì tất cả các ô trong dãy đều nằm trên cột cần thiết nên phải sang bước 4 để xác định các dòng cần thiết.

Một dòng được gọi là cần thiết nếu có 0* trên cột không cần thiết. Bắt đầu với dòng 1, tìm 0* trên cột 4, vì vậy dòng 1 là dòng cần thiết. Dòng 2 có 0* trên cột cần thiết, cột 2. Do đó dòng 2 không cần thiết. Dòng 3 không có 0* vì vậy không cần thiết. Dòng 4 có 0* trên cột 1 nên là dòng cần thiết.

Chi tiết bước 4

Phủ mỗi dòng và cột cần thiết với một đường cho ra k đường phủ như mô tả trước đây. Thủ tục này tự động phủ tất cả các phần tử 0 của C’.

C’ được phủ như sau

C’=

1	0	2	0*
3	0*	5	4
5	0	3	6
0*	1	0	2

Sang bước 5. Trừ 3 vào mỗi phần tử không phủ, cộng 3 vào mỗi phần tử phủ kép. C’ để quay lại bước 2 là

C’=

1	3	2	0
0	0	2	1
2	0	0	3
0	4	0	2

Hoàn thành bổ nhiệm ở bước 2 như sau

1	3	2	0*
0*	0	2	1
2	0*	0	3
0	4	0*	2

Bây giờ có thể viết lại bước 3 trong thuật toán như sau: Giả sử không có 0 trên dòng i0 được đánh dấu và có một phần tử 0 tại (i_0,j_0). Xây dựng một dãy theo cột rồi theo dòng xen kẻ từ 0 đến 0* đến 0, đến 0*, ... như sau:
(A) Nếu đang 0 tại ô (i_k,j_k) tìm 0* trên cột j_k. Nếu có thì nối vào dãy. Nếu không có thì thay đổi trong dãy với 0 thành 0* và 0* thành 0 và tìm dòng tiếp theo không có 0*.
(B) Nếu đang 0* tại ô (i_{k+1},j_k) tìm 0 trên dòng i_{k+1}. Nếu có thì nối vào dãy. Nếu không có thì đánh dấu j_k là cột cần thiết và xoá các ô (i_k,j_k) và (i_{k+1},j_k) ra khỏi dãy. Nếu có nhiều ô thì xem là 0* ở ô (i_k, j_{k-1}). Lặp lại trường hợp B. Nếu không có nhiều ô trong

dãy, tìm phần tử 0 trên dòng i_0 không nằm trên cột cần thiết. Nếu tìm thấy trên cột j_0’ thì lặp lại bước 3 bắt đầu từ ô (i_0,j_0’). Nếu không có thì sang bước 4.

Thuật toán này gọi là **phương pháp Hungary** với công trình của hai nhà toán học Konig và Egervary. Phương pháp Hungary giả sử bài toán dạng cực tiểu. Tuy nhiên có thể sửa đổi một ít để giải cho bài toán cực đại như sau: Nếu nhân -1 cho mọi chi phí thì chi phí dương thành âm và không áp dụng được tiêu chuẩn tối ưu của định lý 5.3. Để sử dụng phương pháp Hungary, sau khi nhân -1, cộng thêm chi phí lớn nhất trên ma trận gốc, thì tất cả chi phí đều không âm.

Ví dụ 5.5. Giả sử bài toán bổ nhiệm chi phí dạng cực đại cho bởi

C =

3	7	4	6
5	2	8	5
1	3	4	7
6	5	2	6

Lấy chi phí lớn nhất là 8 trừ cho tất cả chi phí, có bài toán dạng cực tiểu tương ứng là

5	1	4	2
3	6	0	3
7	5	4	1
2	3	6	2

---oOo---

5.2. Bài tập

Giải các bài toán bổ nhiệm dạng min sau đây:

1.

10	20	15	6
5	11	8	7
12	4	10	5
10	18	2	10

2.

4	5	3
8	9	2
4	3	1
2	6	5

3.

9	3	5	7
5	2	8	6
6	3	4	2
5	4	8	3

4.

5	7	2	9
9	3	7	4
6	1	4	2
2	5	9	5

Giải các bài toán bổ nhiệm dạng max sau đây:

5.

2	1	5	3
8	7	6	7
5	2	4	6
6	3	3	2

6.

3	1	2	5	5
2	7	8	6	2
9	3	7	3	1
5	6	2	1	3
9	2	5	4	6

****

MỤC LỤC