TRƯƠNG VĂN THƯƠNG

HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

GIÁO TRÌNH DÙNG CHO SINH VIÊN KHOA TOÁN
CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

TRƯƠNG VĂN THƯƠNG

HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

(GIÁO TRÌNH DÙNG CHO SINH VIÊN KHOA TOÁN CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM)

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại Tp. Đà Nẵng HUỲNH BÁ VÂN

Biên tập nội dung :
TRẦN PHƯỚC CHƯƠNG

Biên tập tái bản :
NGUYỄN THỊ MINH CHÂU

Trình bày bìa :
HỒ MINH QUÂN

Sửa bản in :
TRỊNH THANH SƠN

Chế bản :
TRƯƠNG VĂN THƯƠNG

---

11 – 2007/CXB/232 – 2119/GD   Mã số : 7K411n7 – DAI

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách Hàm số biến số phức được biên soạn dựa theo chương trình hiện hành, dùng để giảng dạy cho sinh viên ngành Toán. Nội dung chính gồm các chương : Chương 1, Chương 2 và Chương 3 : giới thiệu về số phức, các hàm số biến số phức và các phép biến hình bảo giác nhờ các hàm sơ cấp. Chương 4 : giới thiệu về tích phân phức và lí thuyết tích phân. Chương 5 : trình bày phần lí thuyết chuỗi và lí thuyết thặng dư. Ngoài ra, trong chương này giới thiệu một số ứng dụng của lí thuyết thặng dư trong việc tính tích phân thực mà việc tính toán chúng trong giải tích thực rất phức tạp, thậm chí khó có thể tính bằng phương pháp tích phân thông thường, và trình bày một số kết quả về nghiệm của các phương trình đại số.

Để có thể đọc tốt cuốn sách này, sinh viên cần phải được trang bị một số kiến thức cơ bản về phép tính vi tích phân của hàm một biến và nhiều biến thực, một số dạng phương trình của các đường quen thuộc trong hình học giải tích.

Với mục đích là tinh giản, nhưng đầy đủ, do đó có một vài mục nhỏ, tác giả chỉ giới thiệu chứ không trình bày chi tiết hoặc đưa vào bài tập để sinh viên tự nghiên cứu. Ở phần cuối cuốn sách có phần hướng dẫn giải bài tập và kết quả nhằm giúp sinh viên phương pháp giải một số bài toán và kiểm tra kết quả học tập của mình.

Cuốn sách được biên soạn lần đầu nên không tránh khỏi những thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các bạn đọc để lần in sau được hoàn hảo hơn.

TRƯƠNG VĂN THƯƠNG

Chương 1
SỐ PHỨC

§1. SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP SỐ PHỨC

1.1. Định nghĩa.

Chúng ta đã biết rằng trong tập hợp số thực, phương trình bậc $n \geq 2$ không phải bao giờ cũng có nghiệm. Vì vậy cần phải đưa vào một loại số mới có bản chất tổng quát hơn, mà số thực là một trường hợp đặc biệt. Tất nhiên khi đưa ra loại số mới này ta cần phải trang bị trên nó một số phép toán, mà các phép toán này cần phải phù hợp với những phép toán đã có trên tập hợp số thực. Có nhiều phương pháp để xây dựng loại số mới này. Ở đây ta đưa vào số i (gọi là đơn vị ảo) là nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$ trong tập hợp các số mới đưa vào.

Định nghĩa. Số phức là số có dạng $z = x + iy$, trong đó $x, y \in \mathbf{R}$ và i gọi là đơn vị ảo ($i^2 + 1 = 0$).

x gọi là phần thực của số phức z, kí hiệu Rez ;

y gọi là phần ảo của số phức z, kí hiệu Imz.

Đặc biệt, nếu $y = 0$, khi đó số phức $z = x + i0$ là số thực x. Nếu $x = 0$, khi đó $z = iy$ gọi là số thuần ảo.

Hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ gọi là **bằng nhau** nếu $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$.

Cho số phức $z = x + iy$, số phức có dạng $x - iy$ được gọi là **số phức liên hợp** của số phức z, kí hiệu $\bar{z}$, nghĩa là

$$z = x + iy \text{ và } \bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Kí hiệu $\mathbf{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ là tập hợp tất cả các số phức.

1.2. Các phép toán trên các số phức.

Trên tập số phức ta trang bị các phép toán sau:

Phép cộng. Ta gọi tổng của hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ là số phức

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{1}$$

Kí hiệu $z = z_1 + z_2$.

Từ định nghĩa của phép cộng, ta có các tính chất sau:

1) Kết hợp: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.

2) Giao hoán: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Các tính chất này được chứng minh dựa vào tính kết hợp và tính giao hoán của các số thực.

Đặc biệt khi z_1 và z_2 là hai số thực thì định nghĩa (1) trùng với định nghĩa của phép cộng số thực.

Phép trừ. Phép cộng trên có phép toán ngược. Với hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ ta có thể tìm được số phức z sao cho $z_2 + z = z_1$. Số phức này gọi là hiệu của hai số phức z_1 và z_2, kí hiệu $z = z_1 - z_2$.

Rõ ràng từ định nghĩa ta có

$$z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{2}$$

Phép nhân. Ta gọi tích của hai số $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ là một số phức z xác định bởi

$$z = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \tag{3}$$

Kí hiệu $z = z_1.z_2$.

Từ định nghĩa ta có các tính chất sau:

1) Kết hợp: $z_1(z_2.z_3) = (z_1.z_2)z_3$.

2) Giao hoán: $z_1.z_2 = z_2.z_1$.

3) Phép nhân có tính phân phối đối với phép cộng

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3.$$

Nếu z_1 và z_2 là hai số thực thì định nghĩa (2) trùng với định nghĩa thông thường của phép nhân trong tập hợp các số thực.

Đặc biệt khi lấy $z_1 = z_2 = i$. Từ định nghĩa (3) ta có

$$i.i = -1 = i^2. \tag{4}$$

Rõ ràng với $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ thì công thức (3) sẽ có được bằng cách nhân thông thường (phép nhân trong tập hợp số thực) và thay $i^2 = -1$.

Chú ý. $z.\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$.

Phép chia. Phép toán nhân có phép toán ngược nếu ít nhất một trong hai số đó khác không. Giả sử $z_2 \neq 0$. Khi đó ta có thể tìm được một số phức $z = x + iy$ sao cho $z_2.z = z_1$. Theo định nghĩa của phép nhân ta có hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x_2x - y_2y = x_1 \\ y_2x + x_2y = y_1. \end{cases} \tag{5}$$

Vì $z_2 \neq 0$ nghĩa là định thức của hệ Cramer khác 0, nên hệ phương trình trên luôn luôn có một lời giải duy nhất. Số phức z có được gọi là thương của hai số phức z_1 và z_2. Giải hệ phương trình (5) ta được

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ y &= \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned} \tag{6}$$

Kí hiệu $z = \frac{z_1}{z_2}$.

Chú ý.

1) Hệ thức (6) cũng có được bằng cách nhân $\frac{z_1}{z_2}$ với $\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$.

2) Tập hợp tất cả các số phức với hai phép toán cộng và nhân được xây dựng trên tạo thành một trường, được gọi là trường số phức.

Luỹ thừa bậc n. Tích của n lần số phức z được gọi là luỹ thừa bậc n của số phức z. Kí hiệu z^n.

Căn bậc n. Số phức w được gọi là căn bậc n của số phức z nếu $w^n = z$. Kí hiệu $w = \sqrt[n]{z}$.

Ví dụ. Thực hiện các phép tính sau

$$(1-i)(1+i) = (1-i^2-i+i) = 2.$$

$$\frac{1+i}{1+i\sqrt{2}} = \frac{1+i}{1+i\sqrt{2}}.\frac{1-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{3} + i\frac{1-\sqrt{2}}{3}.$$

$$(1+3i)^2 = 1+9i^2+6i = -8+i.9.$$

Định lí 1. Với các số phức z, z_1, z_2, ta có
1) $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z_1+z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$; $\overline{z_1.z_2} = \overline{z}_1.\overline{z}_2$.
2) $z+\overline{z} = 2\text{Re}z = 2x$; $z-\overline{z} = 2i\text{Im}z = 2iy$.
3) $z.\overline{z} = x^2+y^2 \geq 0$.
4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

§2. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

2.1. Dạng lượng giác của số phức.

Xét mặt phẳng tương ứng với hệ toạ độ Descartes xOy và ta biểu diễn một số phức $z = x+iy$ bởi một điểm có toạ độ (x, y). Như vậy các số thực sẽ được biểu diễn bởi các điểm trên trục Ox, nó được gọi là trục thực; các số thuần ảo được biểu diễn bởi các điểm trên trục Oy, nó được gọi là trục ảo.

Ngược lại, với mỗi điểm của mặt phẳng xOy có toạ độ (x, y), ta đặt tương ứng với một số phức $z = x+iy$.

Vậy có sự tương ứng 1-1 giữa tập hợp tất cả các số phức **C** với tập hợp tất cả các điểm của một mặt phẳng.

Vì mỗi điểm có toạ độ (x, y) trong mặt phẳng tương ứng với một vectơ có bán kính vectơ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ và góc cực tương ứng φ. Do đó mỗi số phức $z = x+iy$ có thể biểu diễn dưới dạng:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{7}$$

trong đó r, φ lần lượt là bán kính cực và góc cực của số phức z. Bán kính r gọi là mođun của số phức z, kí hiệu $r = |z|$. Góc cực φ gọi là argument của số phức z, kí hiệu $\varphi = \text{Arg}z$.

Mođun của số phức được xác định một cách duy nhất

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0 \tag{8}$$

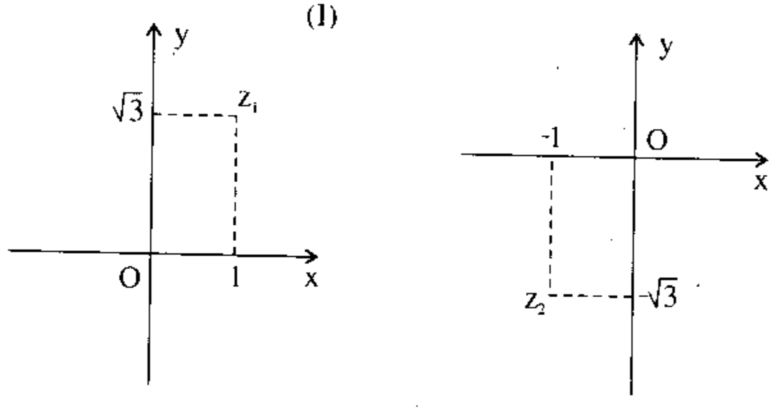
và argument của số phức được xác định với sai khác một bội của 2π.

$$\varphi = \mathrm{Arg}z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{y}{x} + 2k\pi \ (k \in \mathbf{Z}) \\ (\text{nếu số phức } z \text{ ở góc phần tư thứ I, IV}) \\ \mathrm{artg}\frac{y}{x} + (2k+1)\pi \ (k \in \mathbf{Z}) \\ (\text{nếu số phức } z \text{ ở góc phần tư thứ II, III}) \end{cases}$$

với $\mathrm{arctg}\frac{y}{x} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ là giá trị chính của hàm arctg.

Ví dụ. Tìm mođun và argument của số phức

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}\ ,\ z_2 = -1 - i\sqrt{3}.$$



Hình 1

Từ công thức (7) và (8), ta có:

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

$$\varphi_1 = \mathrm{Arg}z_1 = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1} + 2k\pi \ \ (\text{vì } z_1 \text{ ở góc phần tư thứ nhất}).$$

Vậy

$$\mathrm{Arg}z_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \ (k \in \mathbf{Z}).$$

Tương tự

$$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2,$$

và

$$\varphi_2 = \text{Arg}z_2 = \text{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{-1} + (2k+1)\pi \quad (\text{vì } z_2 \text{ ở góc phần tư thứ ba}).$$

Vậy

$$\text{Arg}z_2 = \frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

2.2. Tính chất của mođun và argument.

Định lí 2.

$$\begin{aligned}
&1) \quad |z_1.z_2| = |z_1||z_2| \\
&2) \quad |z| \geq |\text{Re}z| \\
&3) \quad |z| \geq |\text{Im}z| \\
&4) \quad |z| \leq |\text{Re}z| + |\text{Im}z| \\
&5) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \\
&6) |z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|
\end{aligned}$$

Chứng minh. Tính chất 1), 2), 3), 4) bạn đọc chứng minh như bài tập.

Để chứng minh tính chất 5). Ta viết

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\
&= (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2) \\
&= z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + 2\text{Re}(z_2\overline{z}_1) + |z_2|^2.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng $\text{Re}(z_2\overline{z}_1) \leq |z_2\overline{z}_1| = |z_2||\overline{z}_1| = |z_1||z_2|$, ta suy ra

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
&\leq (|z_1| + |z_2|)^2.
\end{aligned}$$

Lấy căn bậc hai của hai vế của bất đẳng thức trên, ta có 5).

Tương tự cho bất đẳng thức 6).

Định lí 3. Cho hai số phức

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Khi đó ta có các hệ thức sau:

$$1) z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \tag{9}$$

$$2) \frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_2). \tag{10}$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\ &+ i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Đẳng thức 1) được chứng minh.
Chứng minh tương tự cho đẳng thức 2).
Tổng quát, ta có công thức sau:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{11}$$

Đặc biệt khi $r = 1$, ta có công thức Moivre

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{12}$$

Giả sử $w = \sqrt[n]{z}$. Khi đó ta có

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \text{ và } \quad \mathrm{Arg}w = \frac{\mathrm{Arg}z}{w}. \tag{13}$$

Ví dụ 1. Tìm tất cả các giá trị của $\sqrt{i}$.
Ta có

$$i = \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi).$$

Từ đẳng thức (13) suy ra

$$\sqrt{i} = \cos(\frac{\pi}{4} + k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4} + k\pi); \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Vậy $\sqrt{i}$ có hai giá trị là

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i);$$

và

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i).$$

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị của $\sqrt{1}$.
Ta có

$$1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi.$$

Từ đẳng thức (13) suy ra

$$\sqrt{1} = \cos k\pi + i\sin k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Vậy $\sqrt{1}$ có hai giá trị là

$$z_0 = 1 \text{ và } z_1 = -1.$$

Nhận xét. Khi ta xem số 1 là một số thực thì căn bậc hai của nó là 1; còn khi ta xem số 1 là một số phức thì căn bậc hai của nó có hai giá trị là 1 và -1.

Ví dụ 3. Tìm tất cả các giá trị của $\sqrt[n]{1}$.
Ta có

$$1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi.$$

Từ đẳng thức (13) suy ra

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Vậy $\sqrt[n]{1}$ có n giá trị là

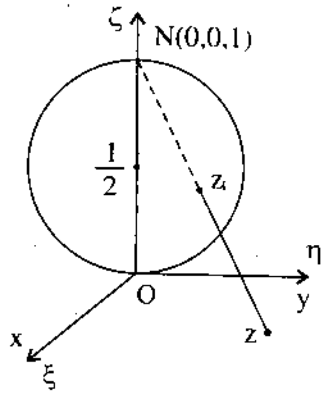
$$\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}; \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1.$$

§3. MẶT CẦU RIEMANN.

Trong nhiều trường hợp, điểm vô cùng có vai trò quan trọng không thể bỏ qua được. Để hiểu rõ bản chất của điểm vô cùng, Riemann đã biểu diễn tập hợp các số phức bằng cách sau:

Trong không gian Euclid ba chiều với hệ toạ độ Descartes vuông góc $(O; \xi, \eta, \zeta)$. Xét mặt cầu S có phương trình

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta. \tag{14}$$



Hình 2

Mặt cầu S có tâm là điểm $I(0, 0, \frac{1}{2})$ và bán kính $r = \frac{1}{2}$.

Lấy mặt phẳng $\zeta = 0$ làm mặt phẳng phức sao cho trục thực Ox trùng với trục $O\xi$, trục ảo Oy trùng với trục $O\eta$. Gọi điểm $N(0, 0, 1)$ là cực bắc của mặt cầu S. Từ mỗi điểm $z(x, y)$ của mặt phẳng phức ta kẻ tia Nz. Tia này cắt mặt cầu S tại điểm $z_1(\xi, \eta, \zeta)$. Ngược lại, từ mỗi điểm $z_1 \in S \setminus \{N\}$ ta kẻ tia Nz_1. Tia này cắt mặt phẳng phức tại điểm $z(x, y)$.

Phép tương ứng này gọi là phép chiếu nổi. Khi z_1 dần đến điểm cực bắc N, tia Nz_1 trở thành tia song song với mặt phẳng xOy. Do đó, ta có thể xem điểm $N \in S$ tương ứng với điểm $z = \infty$.

Mặt phẳng phức có bổ sung điểm vô cùng được gọi là mặt phẳng phức mở rộng. Kí hiệu $\overline{\mathbf{C}}$, nghĩa là $\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$.

Trên đây ta mới thiết lập sự tương ứng giữa các điểm của mặt cầu S với mặt phẳng phức mở rộng bằng hình học. Sau đây ta sẽ thiết lập sự tương ứng giữa chúng bằng các hệ thức giải tích.

Theo giả thiết, ba điểm N, z_1 và z thẳng hàng. Do đó phương trình của đường thẳng Nz là

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1}.$$

Suy ra

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}$$
$$y = \frac{\eta}{1-\zeta}$$

Vậy

$$z = x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}. \tag{15}$$

Mặt khác, vì $z_1(\xi, \eta, \zeta)$ nằm trên mặt cầu nên nó thoả mãn phương trình (14). Suy ra

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1-\zeta)^2} = \frac{\zeta}{1-\zeta}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{1+|z|^2} \\ \eta &= \frac{y}{1+|z|^2} \\ \zeta &= \frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \end{aligned} \tag{16}$$

Các hệ thức (15) và (16) nói lên sự tương ứng 1-1 giữa tập hợp các số phức và tập hợp các điểm trên mặt cầu S trừ điểm N.

Khi z dần ra vô cùng, từ hệ thức (16) ta suy ra điểm $z_1(\xi, \eta, \zeta)$ dần về điểm $N(0, 0, 1)$. Ngược lại, khi điểm z_1 dần về điểm N, từ hệ thức (15) chuyển qua giới hạn khi ζ dần về 1. Ta có $\lim\limits_{\zeta \to 1} z = \infty$.

Vậy có sự tương ứng 1-1 giữa tập hợp tất cả các điểm trên mặt cầu S và tập hợp tất cả các điểm trong mặt phẳng phức mở rộng $\overline{\mathbf{C}}$.

§4. CÁC KHÁI NIỆM HÌNH HỌC

4.1. Khoảng cách.

Định nghĩa. Khoảng cách giữa hai điểm $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ là mođun của số phức $z_1 - z_2$. Kí hiệu $d(z_1, z_2)$, nghĩa là

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|. \tag{17}$$

Ta có thể kiểm tra lại các tiên đề của khoảng cách (hay còn gọi là mêtric) trên $\mathbf{C}$. Khoảng cách này gọi là khoảng cách Euclid. Hệ thức (17) chỉ có nghĩa khi $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

Vì hạn chế này người ta đưa ra một khoảng cách khác mà nó có hiệu lực đối với mọi số phức $z_1, z_2 \in \overline{\mathbf{C}}$. Khoảng cách cầu và nó được định nghĩa như sau:

Khoảng cách cầu giữa hai điểm $z_1, z_2 \in \overline{\mathbf{C}}$ được xác định bởi hệ thức

$$\begin{cases} d^*(z_1, z_2) = \dfrac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}.\sqrt{1+|z_2|^2}}, & z_1, z_2 \in \mathbf{C} \\ d^*(z_1, \infty) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}. \end{cases} \tag{18}$$

4.2. ε -lân cận.

Định nghĩa.

1) Tập hợp những điểm $z \in \mathbf{C}$ thoả mãn hệ thức $|z - z_0| < \epsilon$, trong đó ϵ là số dương cho trước, với $z_0 \in \mathbf{C}$ được gọi là ϵ -lân cận của điểm z_0. Đó là hình tròn mở tâm z_0 bán kính ϵ. Kí hiệu

$$V_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < \epsilon \}.$$

2) Tập hợp những điểm $z \in \mathbf{C}$ thoả mãn hệ thức $|z| > \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1}$, trong đó ϵ là số dương cho trước được gọi là ϵ -lân cận của điểm vô

cùng. Đó là phần ngoài của hình tròn tâm tại gốc toạ độ bán kính $\sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1}$. Kí hiệu

$$V_\epsilon(\infty) = \left\{ z \in \mathbf{C} \mid |z| > \sqrt{\frac{1}{\epsilon^2} - 1} \right\}.$$

Tính chất. Từ định nghĩa của ϵ-lân cận ta có các tính chất sau:

1) Nếu $V_{\epsilon_1}(z_0)$ và $V_{\epsilon_2}(z_0)$ là ϵ_1-lân cận và ϵ_2-lân cận của điểm z_0 thì tồn tại một ϵ-lân cận là $V_\epsilon(z_0)$ chứa trong $V_{\epsilon_1}(z_0) \cap V_{\epsilon_2}(z_0)$.

2) Nếu hai điểm z_1, z_2 bất kì mà $z_1 \neq z_2$ thì tồn tại hai lân cận $V_{\epsilon_1}(z_0)$ và $V_{\epsilon_2}(z_0)$ sao cho $V_{\epsilon_1}(z_0) \cap V_{\epsilon_2}(z_0) \neq \emptyset$.

3) Nếu z_1 là một điểm bất kì thuộc ϵ-lân cận của z_0 thì tồn tại ϵ_1-lân cận $V_{\epsilon_1}(z_1) \subset V_\epsilon(z_0)$.

4.3. Điểm trong. Tập mở. Phần trong.

Điểm trong. Điểm $z_0 \in \mathbf{C}$ được gọi là điểm trong của tập hợp con $E \subset \mathbf{C}$ nếu $z_0 \in E$ và $\exists \epsilon > 0$ sao cho $V_\epsilon(z_0) \subset E$.

Tập mở. Tập con $G \subset \mathbf{C}$ được gọi là tập mở nếu mọi điểm của G đều là điểm trong của nó.

Ví dụ. Tập hợp $B(0;1) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ là tập mở trong $\mathbf{C}$.

Thật vậy, $\forall z \in B(0;1)$ ta có $|z| < 1$. Đặt $\epsilon = 1 - |z| > 0$.

Xét ϵ-lân cận

$$V_\epsilon(z) = \{ t \in \mathbf{C} \mid |t - z| < \epsilon \}.$$

Ta sẽ chứng minh $V_\epsilon(z)$ chứa trong $B(0;1)$. Với mọi $t \in V_\epsilon(z)$ ta có $|t - z| < \epsilon$. Theo tính chất của modun ta có

$$\big|\, |t| - |z| \,\big| \leq |t - z| < \epsilon.$$

Suy ra $|t| < |z| + \epsilon = 1$. Vậy $t \in B(0;1)$.

Do đó z là điểm trong của $B(0;1)$. Vì điểm z được lấy bất kì, nên $B(0;1)$ là tập mở.

Phần trong. Tập hợp tất cả các điểm trong của tập con $E \subset \mathbf{C}$ được gọi là phần trong của E. Kí hiệu $\overset{0}{E}$.

Từ định nghĩa ta có các tính chất sau:

i) $\overset{0}{E} \subset E$.

ii) $\overset{0}{E}$ là tập mở.

iii) E là tập mở $\Longleftrightarrow E = \overset{0}{E}$.

iv) $\overset{0}{E}$ là tập mở lớn nhất (theo quan hệ bao hàm) chứa trong E.

4.4. Điểm biên. Biên.

Điểm biên. Điểm $b \in \mathbf{C}$ được gọi là điểm biên của tập con $E \subset \mathbf{C}$ nếu mọi ϵ-lân cận của điểm b đều chứa điểm của E và điểm của phần bù của E.

Biên. Tập hợp tất cả các điểm biên của E được gọi là biên của E. Kí hiệu ∂E.

Ví dụ 1. Cho hình cầu mở $B(0;1)$. Mọi điểm $z \in \mathbf{C}$ có mođun bằng 1 đều là điểm biên của tập hợp $B(0;1)$ và

$$\partial B(0;1) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}.$$

Ví dụ 2. Cho tập hợp

$$S(0;1) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}.$$

Khi đó mọi điểm của tập hợp $S(0;1)$ đều là điểm biên của nó, nghĩa là $\partial S = S$.

4.5. Điểm giới hạn. Tập đóng. Bao đóng.

Điểm giới hạn. Điểm $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$ được gọi là điểm giới hạn của tập hợp $A \subset \mathbf{C}$ nếu mọi ϵ-lân cận của z_0 đều chứa vô số phần tử của tập hợp A.

Định lí. Điểm $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$ là điểm giới hạn của tập hợp $A \subset \mathbf{C}$ khi và chỉ khi mọi ϵ-lân cận của z_0 đều chứa ít nhất một phần tử của tập hợp A, khác với điểm z_0.

Chứng minh.

Cần. Hiển nhiên.

Đú. Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại một ϵ-lân cận của z_0 chỉ chứa một số hữu hạn phần tử của tập hợp A là $z_1, z_2, \ldots, z_p$.

Gọi $\epsilon_1 = \min\limits_{1 \le k \le p} |z_k - z_0|$.

Tập hợp $V_{\epsilon_1}(z_0) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < \epsilon_1\}$ là ϵ_1-lân cận của điểm z_0. Lân cận này không chứa phần tử nào của A ngoài z_0. Điều này trái với giả thiết.

Định lí. Điểm $z_0 \in \overline{\mathbf{C}}$ là điểm giới hạn của tập hợp $A \subset \mathbf{C}$ khi và chỉ khi tồn tại dãy điểm $\{z_n\}, z_n \in A$ sao cho $z_n \neq z_m (n \neq m)$ và dãy $\{z_n\}$ hội tụ về điểm z_0 (khái niệm hội tụ ta sẽ xét trong phần sau).

Tập đóng. Tập hợp $F \subset \mathbf{C}$ được gọi là tập đóng nếu nó chứa tất cả các điểm giới hạn của nó.

Ví dụ. Tập hợp $\overline{B}(0;1) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \le 1\}$ là tập đóng.

Bao đóng. Hợp của tập hợp E và tập tất cả các điểm giới hạn của nó được gọi là bao đóng của E. Kí hiệu $\overline{E}$.

Từ định nghĩa của bao đóng, ta có kết quả sau:

i) $E \subset \overline{E}$.

ii) $\overline{E}$ là tập đóng.

iii) E là tập đóng $\Longleftrightarrow E = \overline{E}$.

iv) $\overline{E}$ là tập đóng nhỏ nhất chứa E.

v) Nếu A là tập đóng thì $\mathbf{C} \setminus A$ là tập mở.

vi) Nếu A là tập mở thì $\mathbf{C} \setminus A$ là tập đóng.

vii) $\overline{E} = E \cup \partial E$.

4.6. Đường.

Định nghĩa. Đường trong $\mathbf{C}$ (hay trong $\overline{\mathbf{C}}$) là một ánh xạ liên tục $\gamma : [a,b] \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ (trong $\overline{\mathbf{C}}$) cho bởi biểu thức

$$z = \gamma(t) = x(t) + iy(t); \quad t \in [a,b] \tag{19}$$

Ví dụ 1. Đường tròn tâm O bán kính r

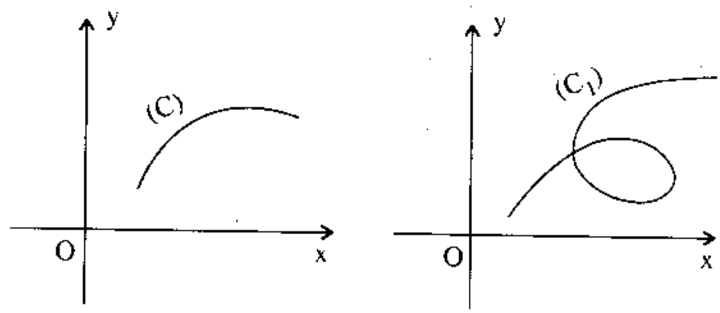
$$\begin{aligned} z &= x(t) + iy(t) \\ &= r(\cos t + i \sin t); \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Đoạn thẳng $[0,1]$, $z = \gamma_1(t)$, trong đó ánh xạ $\gamma_1 : [0,1] \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ xác định bởi $\gamma_1(t) = t$; $t \in [0,1]$ hoặc $z = \gamma_2(t)$, trong đó ánh xạ $\gamma_2 : [0, \frac{\pi}{2}] \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ xác định bởi $\gamma_2(t) = \sin t$; $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Nhận xét. Qua ví dụ trên ta thấy rằng một đường nào đó có thể được xác định bởi nhiều ánh xạ. Tuy nhiên các ánh xạ này thuộc cùng một lớp tương đương theo một quan hệ tương đương được xác định.

Đường Jordan. Đường γ được gọi là đường Jordan nếu γ đơn ánh.

Ví dụ.



Hình 3

(C) đường Jordan. (C_1) đường không Jordan.

Đường cong kín. Đường γ được gọi là đường cong kín nếu $\gamma(a) = \gamma(b)$, $(\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbf{C})$.

Ví dụ. Đường γ cho bởi phương trình $\gamma(t) = a\cos t + i\sin t$; $t \in [0, 2\pi]$.

Đường cong trơn. Đường γ được gọi là đường cong trơn nếu $x(t), y(t)$ trong công thức (19) khả vi liên tục và có

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0 \text{ với mọi } t \in [a,b].$$

Đường cong trơn từng khúc. Nếu γ là hợp của một số hữu hạn đường cong trơn thì γ được gọi là đường cong trơn từng khúc.

4.7. Tập liên thông.

Định nghĩa. Tập con $D \subset \mathbf{C}$ được gọi là tập liên thông nếu không tồn tại hai tập hợp mở A và B sao cho

i) $D \cap A \neq \emptyset$, $D \cap B \neq \emptyset$.

ii) $D \cap A \cap B = \emptyset$.

iii) $D \subset A \cup B$.

Từ định nghĩa ta có hệ quả sau:

Tập hợp A là tập liên thông khi và chỉ khi trong A không tồn tại tập hợp con thực sự của A khác rỗng vừa đóng vừa mở trong A.

Ví dụ 1. Tập hợp $\mathbf{C}$ là tập liên thông.

Ví dụ 2. Tập hợp $\mathbf{C} \setminus \{z_1, z_2, ..., z_p\}$ là tập liên thông.

Ví dụ 3. Đoạn thẳng $[a, b]$ là tập liên thông.

Định lí. Giả sử D là tập hợp mở trong $\mathbf{C}$. Khi đó hai mệnh đề sau tương đương:

i) Tập hợp D là liên thông.

ii) Có thể nối hai điểm tuỳ ý của tập hợp D bằng một đường cong nằm trong D.

Giả sử tập hợp $D \subset \mathbf{C}$ không liên thông. Những tập hợp con liên thông cực đại (nghĩa là chúng không nằm trọn trong một tập hợp con liên thông nào khác của D) được gọi là các **thành phần liên thông** của D.

4.8. Miền.

Định nghĩa. Miền là một tập hợp con D của mặt phẳng phức $\mathbf{C}$ có hai tính chất sau:

i) Với mỗi điểm thuộc D luôn tồn tại hình tròn đủ bé nhận điểm đó làm tâm và nằm hoàn toàn trong D (tính mở);

ii) Có thể nối hai điểm bất kì thuộc D bằng một đường cong nằm hoàn toàn trong D (tính liên thông).

Miền đóng. Tập hợp gồm tất cả các điểm của miền D và các điểm biên của D được gọi là miền đóng. Kí hiệu $\overline{D} = D \cup \partial D$.

Miền đơn liên. Miền đa liên.

Miền D có biên là một tập liên thông thì được gọi là **miền đơn liên**.

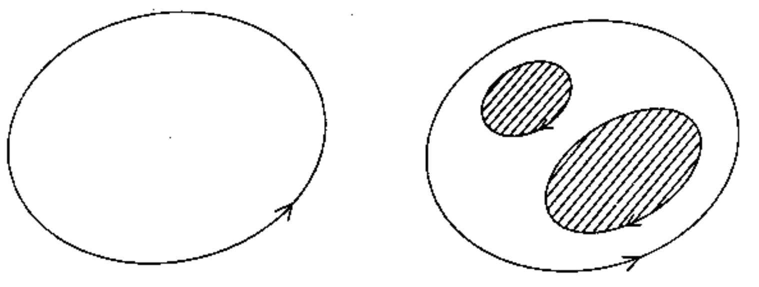
Ngược lại, miền D có biên là tập không liên thông thì được gọi là **miền đa liên**. Nếu số thành phần liên thông của biên D là hữu hạn thì số này được gọi là **cấp liên thông** của miền D; nếu số thành phần này là vô hạn thì D được gọi là miền **vô hạn liên**.

Ví dụ 1. Miền $D_1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ là miền đơn liên.

Miền $D_2 = \{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}$ là miền đa liên.

Ví dụ 2. Miền $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z-1| > 1, |z-2| < 2\}$ là một miền đơn liên.

Ví dụ 3.



Hình 4

Miền đơn liên Miền đa liên.

4.9. Tập hợp compact.

Tập hợp bị chặn (giới nội). Tập hợp $M \subset \mathbf{C}$ được gọi là tập hợp bị chặn nếu tồn tại hình cầu

$$B(a, R) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z-a| < R\}$$

sao cho $M \subset B(a, R)$.

Tập hợp compact. Tập hợp $M \subset \overline{\mathbf{C}}$ được gọi là tập hợp compact nếu M là tập đóng trong $\overline{\mathbf{C}}$.

Tập hợp $M \subset \mathbf{C}$ được gọi là tập hợp compact nếu M là tập đóng và bị chặn trong $\mathbf{C}$.

Ví dụ.

1) Tập một điểm là tập compact.

2) Tập hợp hữu hạn các điểm là tập compact.

3) Tập hợp $\mathbf{C}$ không phải là tập compact.

4) Tập hợp $\overline{\mathbf{C}}$ là tập compact.

Phủ mở. Giả sử $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ là họ tuỳ ý các tập hợp mở sao cho mỗi điểm $z \in M$ thuộc ít nhất một tập hợp G_α nào đó. Khi đó ta gọi họ $\{G_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ là một phủ mở của M.

Bổ đề Heine-Borel. Tập hợp $M \subset \overline{\mathbf{C}}$ là tập compact khi và chỉ khi từ mọi phủ mở của M đều có thể lấy ra một phủ con hữu hạn mà họ này tạo thành một phủ mở của M.

Một trong những hệ quả quan trọng nhất của bổ đề Heine-Borel là nguyên lí Bolzano-Weierstrass.

Nguyên lí Bolzano-Weierstrass. Mọi dãy vô hạn bất kì $\{z_n\}$ thuộc tập hợp M compact trong $\overline{\mathbf{C}}$ có ít nhất một điểm giới hạn.

BÀI TẬP CHƯƠNG 1.

1. Thực hiện các phép tính sau đây:

$$a)\frac{1-i}{1+i}; \qquad b)(1-i\sqrt{3})^6; \qquad c)\sqrt{1+i\sqrt{3}}.$$

2. Tìm mođun và argument của các số phức sau đây:

$$a)1+i; \qquad b)-3+i\sqrt{3}; \qquad c)(3+i\sqrt{3})^2.$$

3. Giải phương trình

$$\overline{z} = z^{n-1}.$$

4. Tìm những giá trị của các căn sau:

$$a)\ \sqrt[4]{-1}; \qquad b)\ \sqrt[8]{1}; \qquad c)\ \sqrt{1-i}.$$

5. Chứng minh các hệ thức sau đây:

a) $\left|\frac{z}{|z|}-1\right| \leq |\arg z|$.

b) $|z_1\bar{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$.

c) $|z_1| + |z_2| = |\frac{z_1+z_2}{2} - \sqrt{z_1z_2}| + |\frac{z_1+z_2}{2} + \sqrt{z_1z_2}|$.

d) $|z_1 + z_2| \geq \frac{1}{2}(|z_1| + |z_2|)|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}|$.

trong đó z_1, z_2 là những số phức bất kì.

6. Dùng công thức Moivre để biểu diễn $\cos nx$ và $\sin nx$ qua các luỹ thừa của $\cos x$ và $\sin x$.

7. Tính các tổng sau:

a) $1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$;

b) $\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$;

c) $\cos a + \cos(a + b) + ... + \cos(a + nb)$;

d) $\sin a + \sin(a + b) + ... + \sin(a + nb)$.

8. Gọi $\epsilon_0, \epsilon_1, ..., \epsilon_{n-1}$ là các căn bậc n của đơn vị

$$\epsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, ..., n - 1$$

và giả sử p là số nguyên dương.

Tính tổng $S = \epsilon_0^p + \epsilon_1^p + \ldots + \epsilon_{n-1}^p$, trong hai trường hợp p là bội của n và p không phải là bội của n.

(Trả lời: $S = n$ nếu p là bội của n; $S = 0$ nếu p không phải là bội của n.)

9. Giải thích ý nghĩa hình học của các biểu thức sau:

a) $|z - 2| + |z + 2| = 5$.

b) $\mathrm{Im}\frac{z-z_1}{z-z_2} = 0$.

c) $\mathrm{Re}\frac{z-z_1}{z-z_2} = 0$.

d) $|\frac{z-z_1}{z-z_2}| = \lambda$, ($\lambda > 0$, và là một hằng số.)

e) $\arg\frac{z-z_1}{z-z_2} = \alpha$, $(-\pi < \alpha < \pi)$

với z_1, z_2 là những hằng số phức.

10. Tìm điều kiện để ba điểm đôi một không trùng nhau nằm trên một đường thẳng.

11. Tìm điều kiện để bốn điểm đôi một không trùng nhau nằm trên một đường thẳng hoặc trên một đường tròn.

12. Xác định tập hợp những điểm $z \in \mathbf{C}$ thoả mãn điều kiện

$$\mathrm{Im}(\frac{z - z_1}{z - z_2})^n = 0, \; n \in \mathbf{N};$$

trong đó z_1, z_2 là các hằng số phức.

13. Trên tập hợp số phức **C**. Cho hàm giá trị thực

$$d : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}$$

sao cho $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ với mọi $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$.

Chứng minh rằng d là một mêtric (khoảng cách) trên **C**.

(Hướng dẫn: Hàm số $d : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$ được gọi là mêtric (khoảng cách) nếu nó thoả mãn các điều kiện sau:

i) $d(x, y) > 0$ nếu $x \neq y$; $d(x, y) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y$;

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ với mọi x, y;

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ với mọi x, y, z.)

14. Chứng minh rằng

i) Tập hợp $B(z_0; r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| < r\}$ là tập hợp mở trong **C** (với r là số thực dương cho trước).

ii) Tập hợp $\overline{B}(z_0; r) = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ là tập hợp đóng trong **C** (với r là số thực dương cho trước).

iii) Biên của tập hợp $B(z_0; r)$ là tập hợp

$$\partial B = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| = r\}.$$

(Hướng dẫn: 1) Để chứng minh tập hợp B là mở ta chứng minh rằng bất kì điểm nào của B đều là điểm trong của B nghĩa là với mỗi $z \in B$ ta chọn được một lân cận của z sao cho lân cận đó chứa trong B.)

Chương 2
HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

§1. DÃY SỐ PHỨC. CHUỖI SỐ PHỨC

1.1. Giới hạn của một dãy số phức.

Định nghĩa dãy số phức. Dãy số phức là một ánh xạ từ tập hợp các số tự nhiên vào $\mathbf{C}$ (hay $\overline{\mathbf{C}}$), nghĩa là ánh xạ

$$A : N \longrightarrow \mathbf{C}$$

$$n \longrightarrow A(n) = z_n$$

Kí hiệu $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ hay $\{z_n\}$.

Giới hạn của dãy số phức. Số phức z_0 gọi là giới hạn của dãy số phức $\{z_n\}$ nếu với mỗi $\epsilon-$lân cận V của z_0 đều tồn tại số $n_0 \in N$ sao cho với mọi $n \in N$ mà $n > n_0$ thì $z_n \in V$, nghĩa là

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in N. \forall n \in N, n > n_0 \Rightarrow |z_n - z_0| < \epsilon.$$

Kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Ta còn nói dãy $\{z_n\}$ hội tụ về z_0. Kí hiệu $z_n \longrightarrow z_0, n \longrightarrow \infty$.

Từ tính chất của ϵ-lân cận ta suy ra kết quả sau:

Trong $\mathbf{C}$ mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất.

Nếu biểu diễn $z_n = x_n + iy_n$ thì định lí sau được khẳng định:

Định lí 1. Dãy $\{z_n\}$ hội tụ về $z_0 = x_0 + iy_0$ khi và chỉ khi dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 và dãy $\{y_n\}$ hội tụ về y_0.

Chứng minh. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 = x_0 + iy_0 \neq \infty$.

Khi đó với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \epsilon, \text{ với mọi } n > n_0.$$

Từ đó suy ra $|x_n - x_0| < \epsilon$ và $|y_n - y_0| < \epsilon$, khi $n > n_0$, nghĩa là

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ và } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Ngược lại, nếu tồn tại $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ và $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$, thì với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $n_1 \in \mathbf{N}$ sao cho $|x_n - x_0| < \epsilon/2$, với mọi $n > n_1$

và tồn tại $n_2 \in \mathbf{N}$ sao cho $|y_n - y_0| < \epsilon/2$, với mọi $n > n_2$. Chọn $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Từ đó suy ra $|z_n - z_0| \le |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \epsilon$, với mọi $n > n_0$.

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 = x_0 + iy_0$.

Ví dụ.

1) Cho dãy $\{z_n\}, z_n = (\frac{1}{n} + \frac{i}{2^n})$.

Do dãy $x_n = \frac{1}{n}$ hội tụ về 0 và dãy $y_n = \frac{i}{2^n}$ hội tụ về 0 nên dãy $\{z_n\}$ hội tụ về 0.

2) Cho dãy $\{z_n\}, z_n = \frac{1}{n} + in$. Dãy $x_n = \frac{1}{n}$ hội tụ về 0, nhưng dãy $y_n = n$ không hội tụ. Vậy dãy $\{z_n\}$ không hội tụ.

Định lí 2. Giả sử $\{z_n\}$ và $\{w_n\}$ là hai dãy số phức có giới hạn lần lượt là z_0 và w_0. Khi đó

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n \pm w_n) = z_0 \pm w_0$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (z_n.w_n) = z_0.w_0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z_0}{w_0}$ $(w_0 \neq 0)$.

Bạn đọc chứng minh định lí trên như bài tập.

Nếu biểu diễn $z_n = r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n)$ (với mọi $z_n \neq 0$) thì định lí sau được khẳng định:

Định lí 3. Dãy $\{z_n\}$ hội tụ về $z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$, $(z_0 \neq 0)$ khi và chỉ khi dãy $\{r_n\}$ hội tụ về r_0 và dãy $\{\varphi_n\}$ hội tụ về φ_0.

Chứng minh. Áp dụng định lí 2 và định nghĩa của mođun và argument của số phức.

Ví dụ. Cho dãy $z_n = (1 + \frac{iy_0}{n})^n$, trong đó y_0 là hằng số thực.

Dãy $r_n = |z_n| = |(1 + \frac{iy_0}{n})^n| = |1 + \frac{iy_0}{n}|^n = \left(\sqrt{1 + \frac{y_0^2}{n^2}}\right)^n = (1 + \frac{y_0^2}{n^2})^{\frac{n}{2}}$. Dãy này hội tụ về 1.

Dãy $\varphi_n = \arg z_n = \arg(1 + \frac{iy_0}{n})^n = n.\arg(1 + \frac{iy_0}{n}) = n.\mathrm{arctg}\frac{y_0}{n}$.

Khi n lớn $\frac{y_0}{n} \approx \mathrm{tg}\frac{y_0}{n}$.

Do đó khi n lớn $\varphi_n \approx y_0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = y_0$.

Suy ra dãy $\{z_n\}$ hội tụ về $z_0 = \cos y_0 + i\sin y_0$.

Ta kí hiệu $\cos y + i\sin y = e^{iy}$.

Đây là công thức Euler mà ta sẽ chứng minh trong chương sau.

1.2. Dãy cơ bản (dãy Cauchy).

Định nghĩa. Dãy $\{z_n\}$ được gọi là dãy cơ bản (hay còn gọi là dãy Cauchy) nếu $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall m, n \in N, m > n_0$ và $n > n_0$ thì $|z_n - z_0| < \epsilon$.

Trong tập hợp số thực ta đã biết rằng mọi dãy cơ bản đều hội tụ và ngược lại. Từ Định lí 1 được khẳng định trong phần 1, ta suy ra:

Định lí 4. (Tiêu chuẩn Cauchy). Dãy $\{z_n\}$ là dãy cơ bản khi và chỉ khi dãy $\{z_n\}$ hội tụ.

Chứng minh. Thật vậy, giả sử $\{z_n\}$ là dãy cơ bản suy ra dãy $\{\mathrm{Re}z_n\}$ là dãy cơ bản nên

$\mathrm{Re}z_n \longrightarrow x_0, n \longrightarrow \infty$.

Tương tự dãy $\{\mathrm{Im}z_n\}$ hội tụ về y_0.

Vậy $z_n \longrightarrow x_0 + iy_0, n \longrightarrow \infty$.

Ngược lại, giả sử $\{z_n\}$ là dãy hội tụ, theo định nghĩa ta suy ra dãy $\{z_n\}$ là dãy cơ bản.

1.3. Chuỗi số phức.

Định nghĩa. Cho dãy số phức $\{z_n\}$, biểu thức

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

gọi là chuỗi số phức. Kí hiệu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$.

Đặt $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi. Dãy $\{S_n\}$ gọi là dãy các tổng riêng của chuỗi.

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ gọi là hội tụ nếu dãy các tổng riêng $\{S_n\}$ hội tụ. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ thì S gọi là tổng của chuỗi. Khi đó ta nói chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ hội tụ.

Ngược lại, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ hoặc không tồn tại thì ta nói chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ phân kì.

Tương tự như chuỗi số thực, điều kiện cần để chuỗi số phức $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ hội tụ là $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Định lí 5. (Tiêu chuẩn Cauchy đối với chuỗi số phức).

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ hội tụ khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$, sao cho

$$|\sum_{k=1}^{p} z_{n+k}| < \epsilon,$$

với mọi $n > n_0$ và $p \in \mathbf{N}$.

Chứng minh. Gọi S_n là tổng riêng thứ n của chuỗi đã cho, khi đó

$$S_{n+p} - S_n = z_{n+1} + ... + z_{n+p},$$

theo định nghĩa của chuỗi hội tụ và Định lí 4, suy ra điều cần chứng minh.

Chuỗi hội tụ tuyệt đối.

Định nghĩa. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ hội tụ.

Từ định nghĩa ta có kết quả sau:

Định lí 6. Mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối đều hội tụ.

Chứng minh. Từ bất đẳng thức

$$|z_{n+1} + ... + z_{n+p}| \leq |z_{n+1}| + ... + |z_{n+p}|$$

và Định lí 5 suy ra điều cần chứng minh.

Chú ý.

1) Chuỗi hội tụ không chắc hội tụ tuyệt đối.

Ví dụ. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$ hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối.

Thật vậy, theo công thức Euler $e^{in} = \cos n + i \sin n$, và từ đó chứng tỏ chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$ hội tụ khi và chỉ khi các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$ và chuỗi

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ hội tụ. Trong giải tích thực hai chuỗi này hội tụ theo dấu hiệu Dirichlet. Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$ hội tụ.

Nhưng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{e^{in}}{n}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi phân kì. Điều này chứng tỏ chuỗi không hội tụ tuyệt đối. Chuỗi như vậy gọi là bán hội tụ (hay hội tụ có điều kiện).

2) Để xét sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi số phức ta có thể sử dụng các dấu hiệu hội tụ của chuỗi số dương.

§2. HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

2.1. Định nghĩa hàm số.

Định nghĩa. Ta nói trên tập M của mặt phẳng phức cho hàm $w = f(z)$, nếu với mỗi điểm $z \in M$ đặt tương ứng với một số phức hay nhiều giá trị phức w.

Nếu mỗi trị số $z \in M$ tương ứng với một giá trị w thì hàm $w = f(z)$ gọi là hàm đơn trị. Còn trường hợp mỗi trị số z tương ứng với nhiều giá trị w thì gọi là hàm đa trị. M gọi là tập xác định của f.

Tập hợp gồm tất cả các giá trị w của $f(z)$ lấy trên M gọi là tập các giá trị.

Khi M và N là những miền trong $\mathbf{C}$, thì ta sẽ có một số tính chất quan trọng được khảo sát ở chương sau.

Vì z và w là những số phức nên ta có thể biểu diễn như sau:

$$z = x + iy; \qquad w = u + iv,$$

khi đó hàm số $w = f(z)$ trở thành

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{1}$$

trong đó $u(x, y) = \mathrm{Re} f(z)$ và $v(x, y) = \mathrm{Im} f(z)$.

Ví dụ.

1) Cho hàm số $f(z) = xy^2 + ix^2y$.

Ta có phần thực của $f(z)$ là $u(x, y) = xy^2$

và phần ảo của $f(z)$ là $v(x,y) = x^2y$.

2) Cho hàm số $f(z) = z.\bar{z}$.

Ta có phần thực của $f(z)$ là $u(x,y) = x^2 + y^2$
và phần ảo của $f(z)$ là $v(x,y) = 0$.

Như vậy việc cho hàm số $f(z)$ của một biến phức (đơn trị) tương đương với việc cho hai hàm số của hai biến số thực $u(x,y)$ và $v(x,y)$.

Về mặt hình học người ta có thể biểu diễn một hàm số của biến số phức như là một phép biến đổi tập hợp M của mặt phẳng phức (z) thành tập hợp N của mặt phẳng phức (w).

Nếu f đơn trị 1-1, khi đó phép biến đổi này được gọi là đơn trị 2 chiều hay còn gọi là đơn diệp.

Hàm ngược.

Cho hàm số phức $w = f(z)$ biến tập hợp M thành tập hợp N. Hàm số $z = \varphi(w)$ đặt tương ứng mỗi $w \in N$ với tất cả các điểm $z \in M$ sao cho $w = f(z)$ được gọi là hàm ngược của hàm f, kí hiệu $\varphi = f^{-1}$.

Rõ ràng $w = f(z)$ đơn trị hai chiều nếu và chỉ nếu f và φ đơn trị.

Ví dụ 1. Cho hàm số phức $f_1(z) = az + b$, $a \neq 0$. Khi đó hàm ngược của nó là

$$f_1^{-1}(w) = \frac{w}{a} - \frac{b}{a} \tag{2}$$

Thường người ta thay biến số w bởi biến z. Khi đó (2) được viết là

$$f_1^{-1}(z) = \frac{z}{a} - \frac{b}{a}$$

Ví dụ 2. Cho hàm số phức $f_2(z) = z^2$. Khi đó hàm ngược của nó là $f_2^{-1}(z) = \sqrt{z}$.

Hàm f_2 là hàm đơn trị, tuy nhiên ở đây hàm ngược của nó f_2^{-1} là hàm đa trị. Tại mọi $z \neq 0$ và $z \neq \infty$ thì hàm f_2^{-1} có hai giá trị, còn tại điểm $z = 0$ và $z = \infty$ hàm chỉ có một giá trị.

Điểm $z = 0$ và $z = \infty$ gọi là điểm phân nhánh của hàm f_2^{-1}.

2.2. Giới hạn của hàm số.

Bây giờ ta xét khái niệm cơ bản của giải tích. Từ đây trở về sau ta chỉ xét trường hợp hàm f là hàm đơn trị.

Định nghĩa 1. Cho hàm số đơn trị $w = f(z)$ xác định trong lân cận của điểm z_0, có thể trừ z_0. Số $A \neq \infty$ gọi là giới hạn của hàm số $f(z)$ khi z dần về z_0, nếu $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall z$ thoả mãn $0 < |z - z_0| < \delta$ ta có $|f(z) - A| < \epsilon$. Kí hiệu $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Định nghĩa 2. Cho hàm số đơn trị $w = f(z)$ xác định trong lân cận của điểm z_0, có thể trừ z_0. Số $A \neq \infty$ gọi là giới hạn của hàm số $f(z)$ khi z dần về z_0, nếu mọi dãy $\{z_n\}, z_n$ thuộc lân cận z_0, mà z_n hội tụ về z_0 thì $f(z_n)$ hội tụ về A. Kí hiệu $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.

Người ta đã chứng minh được rằng hai định nghĩa trên là tương đương.

Định lí 1. Cho hàm số $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ và $A = a + ib \in \mathbf{C}$. Khi đó

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A. \tag{3}$$

khi và chỉ khi

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = a \qquad \text{và} \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = b. \tag{4}$$

Chứng minh. Giả sử f có giới hạn là A khi $z \to z_0$. Khi đó $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $|f(z) - A| < \epsilon$ với mọi z thoả điều kiện

$$|z - z_0| = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} < \delta.$$

Mặt khác

$$|u(x,y) - a| = |\text{Re}(f(z) - A)| \leq |f(z) - A| < \epsilon.$$

và

$$|v(x,y) - b| = |\text{Im}(f(z) - A)| \leq |f(z) - A| < \epsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = a$ và $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = b$.

Ngược lại, giả sử có (4). Khi đó $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ và $\delta_2 > 0$ sao cho $|u(x,y) - a| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ với mọi (x,y) thoả điều kiện $|(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta_1$ và $|v(x,y) - b| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ với mọi (x,y) thoả điều kiện $|(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta_2$.

Nếu chọn $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ thì với mọi z thoả mãn điều kiện $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$, ta có

$$|f(z) - A| \leq [(u(x, y) - a)^2 + (v(x, y) - b)^2]^{1/2} < \epsilon.$$

Vậy $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$.

Ta có định nghĩa tương tự cho các trường hợp giới hạn của hàm số khi $z \longrightarrow \infty$ và giới hạn bằng vô cùng.

Chú ý.

Sự tồn tại giới hạn của hàm số f không phụ thuộc vào hướng khi $z \to z_0$.

Ví dụ. Cho hàm số

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}\right).$$

Đặt $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$. Xét giới hạn của hàm $f(z)$, khi z dần đến 0 theo tia Ot hợp với trục thực một góc bằng φ, ta có

$$f_\varphi(0) = \lim_{z \to 0} \frac{1}{2i}\left(\frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}} - \frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}}\right) = \sin 2\varphi.$$

Suy ra giới hạn của hàm số f khi $z \to 0$ không tồn tại.

Từ định lí trên, tương tự như hàm số biến số thực, ta có các tính chất sau về giới hạn của hàm số biến số phức:

Định lí 2.

$$1)\ \lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \pm \lim_{z \to z_0} g(z).$$

$$2)\ \lim_{z \to z_0} (f(z).g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z). \lim_{z \to z_0} g(z).$$

$$3)\ \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} \qquad (\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0).$$

2.3. Hàm số liên tục và liên tục đều.

Định nghĩa 1. Cho hàm số $f(z)$ xác định trên $D \subset \mathbf{C}$. Hàm số $f(z)$ được gọi là liên tục tại điểm $z_0 \in D$ nếu $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Hàm số $f(z)$ được gọi là liên tục trên D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

Ví dụ. Hàm $f(z) = z^n, n \in N$ liên tục trên $\mathbf{C}$.

Thật vậy, lấy điểm z_0 tuỳ ý trên $\mathbf{C}$.

Ta có:

$$z^n - z_0^n = (z - z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + ... + z_0^{n-1}).$$

Suy ra

$$|z^n - z_0^n| \leq |z - z_0|(|z|^{n-1} + |z_0||z|^{n-2} + ... + |z_0|^{n-1}).$$

Ta xét hình tròn $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r\}$ sao cho z và z_0 thuộc vào hình tròn đó. Khi đó $|z^n - z_0^n| \leq nr^{n-1}|z - z_0|$.

Chọn $\delta = min(\frac{\epsilon}{nr^{n-1}}, r + |z_0|)$.

Vậy f liên tục tại z_0.

Do đó f liên tục trên $\mathbf{C}$.

Định lí 3.

1) Hàm số $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ liên tục tại điểm $z_0 = x_0 + iy_0$ khi và chỉ khi $u(x, y)$ và $v(x, y)$ liên tục tại (x_0, y_0).

2) Nếu hàm số $f(z)$ liên tục tại z_0 thì hàm $|f(z)|$ cũng liên tục tại z_0.

Định lí 4. Tổng, hiệu, tích, thương (mẫu khác không) của các hàm liên tục là một hàm liên tục.

Định nghĩa 2. Hàm $f(z)$ được gọi là liên tục đều trên D nếu $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall z, z' \in D$ mà $|z - z'| < \delta$ ta có $|f(z) - f(z')| < \epsilon$.

Từ tính liên tục đều của hàm f suy ra hàm f liên tục. Điều ngược lại nói chung không đúng.

Ví dụ. Ta xét hàm số $f(z) = \frac{1}{z}$ trên tập hợp

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z - z_0| < 1\}.$$

Rõ ràng hàm $f(z)$ liên tục trên D, nhưng không liên tục đều trên D.

Thật vậy, lấy $\epsilon = 1, \forall \delta > 0, \exists n \in \mathbf{N}$ sao cho $n > \frac{1}{\delta}$ (hay $\delta > \frac{1}{n}$). Chọn $z = \frac{1}{n}, z' = \frac{1}{2n}$ ta có

$$|z - z'| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n} < \delta.$$

và

$$|f(z) - f(z')| = |\frac{1}{z} - \frac{1}{z'}| = |\frac{1}{1/n} - \frac{1}{1/2n}| = n > 1.$$

Vậy $f(z)$ không liên tục đều trên D.

Tính chất của hàm liên tục.

Định lí 5. Nếu hàm số liên tục trên tập hợp compact K thì tập hợp $f(K)$ cũng là tập compact.

Chứng minh. Lấy một dãy bất kì $\{w_n\}$, $w_n \in f(K)$ Khi đó sẽ tồn tại dãy $\{z_n\}$, $z_n \in K$ sao cho $w_n = f(z_n)$. Vì tập K compact nên tồn tại dãy con $\{z_{n_k}\} \subset \{z_n\}$ hội tụ . Đặt $z_0 = \lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}$, khi đó $z_0 \in K$. Hơn nữa, do f liên tục nên $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = f(z_0) \in f(K)$. Điều này chứng tỏ dãy con $\{w_{n_k}\} \subset \{w_n\}$ hội tụ trong $f(K)$. Vậy $f(K)$ là tập compact.

Định lí 6. Hàm số liên tục biến tập hợp liên thông thành tập hợp liên thông.

Bạn đọc có thể đọc chứng minh định lí trong các giáo trình Tôpô đại cương.

Định lí 7. Hàm số liên tục trên tập hợp compact thì bị chặn và đạt giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất về mođun trên tập hợp này.

Chứng minh. Cho hàm $f(z)$, ta xét hàm $|f(z)| = \sqrt{[u(x,y)]^2 + [v(x,y$
Vì f liên tục nên hai hàm u, v liên tục trên K là tập compact. Suy ra điều cần chứng minh.

Định lí 8. Hàm số liên tục trên tập hợp compact thì liên tục đều.

Chứng minh. Cho f là hàm số liên tục trên tập compact K. Giả sử f không liên tục đều trên K, khi đó tồn tại số $\epsilon_0 > 0$ sao cho với mọi $n \in \mathbf{N}$ có $z_n \in K$ và $w_n \in K$ sao cho $|z_n - w_n| < \frac{1}{n}$ và $|f(z_n) - f(w_n)| \geq \epsilon_0$. Dãy $\{z_n\}$ có dãy con $\{z_{n_k}\}$ hội tụ về $z_0 \in K$.

Vì $|z_{n_k} - w_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ và z_{n_k} hội tụ về z_0, nên ta suy ra w_{n_k} hội tụ về z_0.

Như vậy $|f(z_{n_k}) - f(w_{n_k})| \geq \epsilon_0$ (*), với mọi $k \in \mathbf{N}$. Do $f(z)$ liên tục nên chuyển qua giới hạn biểu thức (*) ta có $0 \geq \epsilon_0 > 0$.

Mâu thuẫn này chứng tỏ hàm f liên tục đều trên K.

2.4. Dãy hàm và chuỗi hàm.

Định nghĩa dãy hàm. Dãy hàm là một ánh xạ từ tập hợp các số tự nhiên $\mathbf{N}$ vào tập hợp các hàm số phức cùng xác định trên tập hợp $D \subset \mathbf{C}$, nghĩa là ánh xạ

$$A : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{F} = \{f : D \longrightarrow \mathbf{C}\}.$$

$$n \longrightarrow A(n) = f_n \qquad (f : D \longrightarrow \mathbf{C}).$$

Kí hiệu: $\{f_n\}$ hay $\{f_n(z)\}$.

Dãy hàm hội tụ.

Dãy hàm $\{f_n\}$ được gọi là hội tụ tại điểm $z_0 \in D$ nếu dãy số phức $\{f_n(z_0)\}$ hội tụ.

Dãy hàm $\{f_n\}$ được gọi là hội tụ trên D nếu dãy hàm $\{f_n\}$ hội tụ tại mọi điểm $z \in D$.

Trong trường hợp này ta có một hàm số xác định trên D cho bởi biểu thức

$$f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z).$$

Ví dụ. Xét dãy hàm $f_n(z) = z^n$ trên hình tròn $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 2\}$.

Dãy hàm $\{f_n(z)\}$ hội tụ về 0 tại mọi $z \in \{|z| < 1\}$, hội tụ về 1 tại $z = 1$ và phân kì tại các điểm khác.

Dãy hàm hội tụ đều.

Dãy hàm $\{f_n(z)\}$ xác định trên D gọi là hội tụ về hàm $f(z)$ trên D nếu $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $\forall n \in \mathbf{N}$ mà $n > n_0$ và với mọi $z \in D$ ta có

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Ví dụ. Dãy hàm $f_n(z) = z^n$ hội tụ đều trên hình tròn $\{|z| < r; 0 < r < 1\}$.

Hệ quả. Mọi dãy hàm hội tụ đều trên D thì hội tụ trên D.

Điều ngược lại nói chung không đúng.

Ví dụ. Xét dãy hàm $f_n(z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ trên $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1.$$

Tuy nhiên $\{f_n(z)\}$ không hội tụ đều trên D.

Thật vậy, ta xét $z = x \in (0,1)$. Khi đó

$$\left|\frac{1}{1-z} - \frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Vì $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty, \forall n \in \mathbf{N}$, nên dãy hàm $\{f_n(z)\}$ không hội tụ đều trên D.

Định nghĩa chuỗi hàm.

Cho dãy hàm $\{f_n(z)\}$, xác định trên D. Biểu thức

$$f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

được gọi là chuỗi hàm. Kí hiệu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Gọi $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ là tổng riêng thứ n của chuỗi hàm.

Chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ được gọi là **hội tụ tại điểm** $z_0 \in D$ nếu dãy hàm $\{S_n(z)\}$ hội tụ tại điểm z_0.

Chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ được gọi là **hội tụ đều trên tập hợp** D nếu dãy $\{S_n(z)\}$ hội tụ đều trên D.

Ở trên ta đã xét sự hội tụ của chuỗi hàm nhờ vào dãy hàm. Tuy nhiên với $z_0 \in D$ chuỗi đã cho là một chuỗi số. Vì vậy ta cũng có thể xét sự hội tụ tại từng điểm của D như chuỗi số hội tụ.

Hệ quả. Mọi chuỗi hàm hội tụ đều trên D thì hội tụ trên D.

Chú ý. Điều ngược lại nói chung không đúng. Chẳng hạn, xét chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^n$ trên $\{z \in \mathbf{C} \mid 0 < |z| < 1\}$.

Một số định lí về chuỗi hàm.

Định lí 9. (dấu hiệu Weierstrass). Cho chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$. Nếu với $\forall z \in D$ và với n đủ lớn ta có $|f_n(z)| \leq a_n$ và chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên D.

Chứng minh. Do $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ nên $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $\forall n \in \mathbf{N}, n > n_0$ và $\forall p \in \mathbf{N}$ ta có

$$|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}| < \epsilon.$$

Theo giả thiết, ta có

$$|\sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(z)| \leq \sum_{k=1}^{p} |f_{n+k}(z)| \leq \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} < \epsilon.$$

với mọi n đủ lớn và lớn hơn n_0.

Vậy chuỗi $\{f_n(z)\}$ hội tụ tuyệt đối và đều trên D.

Định lí 10. Nếu chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ hội tụ đều trên D và các hàm $f_n(z)$ liên tục trên D thì tổng $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ là hàm liên tục trên D.

Chứng minh. Lấy điểm $z_0 \in D$ tuỳ ý. Vì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ hội tụ đều nên $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $\forall n \in \mathbf{N}$ mà $n > n_0$ và $\forall z \in D$, ta có

$$|S_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad\qquad (S_n(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)).$$

Mặt khác, do $S_n(z)$ liên tục (tổng của n hàm liên tục) nên $\exists \delta > 0$ sao cho $\forall z \in D$ mà $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |S_n(z) - S_n(z_0)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Từ các bất đẳng thức trên, ta suy ra

$$\begin{aligned}|f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0)| \\ &+ |S_n(z_0) - f_n(z_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.\end{aligned}$$

Vậy f liên tục tại z_0. Suy ra hàm f liên tục trên D.

2.5. Chuỗi luỹ thừa.

Định nghĩa. Chuỗi luỹ thừa là chuỗi hàm có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{5}$$

trong đó $c_n, z_0 (n = 0, 1, 2, ...)$ là những hằng số phức.

Khi $z_0 = 0$, chuỗi (5) có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{6}$$

Thực ra chuỗi (5) luôn luôn có thể đưa về dạng (6) bằng cách đặt $\eta = z - z_0$. Vì vậy ở đây ta chỉ cần nghiên cứu chuỗi luỹ thừa dạng (6) là đủ.

Định lí Abel.

a) Nếu chuỗi (6) hội tụ với $z_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi z thoả mãn điều kiện $|z| < |z_0|$ và hội tụ đều trong mọi hình tròn $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r, 0 < r < |z_0|\}$.

b) Nếu chuỗi (6) phân kì tại z_1 thì nó sẽ phân kì tại mọi z sao cho $|z| > |z_1|$.

Chứng minh.

a) Giả thiết chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ hội tụ nên $\lim\limits_{n \to \infty} c_n z_0^n = 0$.

Suy ra $|c_n z_0^n| \leq M, \forall n = 0, 1, ...$

Xét số hạng tổng quát của chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n . \frac{z^n}{z_0^n}| = |c_n z_0^n| |\frac{z}{z_0}|^n \leq M q^n,$$

trong đó $q = |\frac{z}{z_0}| < 1$, vì $|z| < |z_0|$.

Do chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ hội tụ, suy ra $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$ hội tụ.

Vậy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hội tụ tuyệt đối với mọi z thoả điều kiện $|z| < |z_0|$.

Bây giờ ta xét chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ trong hình tròn

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq r,\ 0 < r < |z_0|\}.$$

Theo chứng minh trên, chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hội tụ.

Áp dụng dấu hiệu Weierstrass ta suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hội tụ đều trong hình tròn đó.

b) Chứng minh bằng phương pháp phản chứng. Giả sử chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hội tụ tại điểm z_2 nào đó thoả điều kiện $|z_2| > |z_1|$. Theo phần a) ta suy ra chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hội tụ với mọi z. thoả điều kiện $|z| < |z_2|$, do đó chuỗi đã cho hội tụ tại z_1. Điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ phân kì tại mọi z thoả mãn $|z| > |z_1|$.

Khi nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi, ta thấy có những chuỗi chỉ hội tụ tại một điểm $z = 0$ duy nhất. Chẳng hạn, chuỗi

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n.$$

Và có chuỗi hội tụ tại mọi điểm thuộc mặt phẳng phức. Chẳng hạn, chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(ta sẽ chứng minh sau).

Hoặc theo định lí Abel có những chuỗi hội tụ trong một hình tròn nào đó và phân kì bên ngoài nó.

Như vậy vấn đề đặt ra là liệu có tồn tại số $R \geq 0$ sao cho chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hội tụ khi $|z| < R$ và phân kì khi $|z| > R$ hay không?

Định lí sau đây sẽ trả lời câu hỏi trên.

Định lí 11. (về bán kính hội tụ). Với mọi chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ luôn luôn tồn tại số $R \geq 0$ (có thể bằng vô cùng) sao cho chuỗi (6) hội tụ với mọi z, $|z| < R$ và phân kì với z, $|z| > R$. Số R như vậy được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi (6).

Chứng minh.

Đối với chuỗi luỹ thừa chỉ hội tụ tại điểm $z = 0$ duy nhất, ta đặt $R = 0$, và chuỗi hội tụ tại mọi $z \in \mathbf{C}$, ta đặt $R = \infty$.

Bây giờ, giả sử chuỗi (6) hội tụ tại $z_0 \neq 0$ và phân kì tại $z_1 \neq \infty$. Theo định lí Abel, trên nửa trục thực dương tồn tại đoạn thẳng $[a_1, b_1]$ với a_1 là điểm hội tụ của chuỗi, còn b_1 là điểm phân kì của nó. Ta chia đoạn $[a_1, b_1]$ thành hai đoạn bằng nhau và kí hiệu $[a_2, b_2]$ là đoạn mà trong đó a_2 là điểm hội tụ và b_2 là điểm phân kì. Tiếp tục quá trình trên ta thu được dãy các đoạn thắt $[a_n, b_n]$ có tính chất $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, a_n là điểm hội tụ, b_n là điểm phân kì và đường kính $\frac{b_n - a_n}{2^n} \to 0$, khi $n \to \infty$.

Theo nguyên lí các đoạn thắt $\exists a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Đặt $R = a$. Ta sẽ chứng minh chuỗi hội tụ tại z mà $|z| < R$.

Thật vậy, vì $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ và $a_n \leq n_{n+1}$, nên $\exists n_0$ sao cho $|z| < a_{n_0} < a = R$. Theo định lí Abel chuỗi hội tụ tại z mà $|z| < R$.

Với z mà $|z| > R$. Vì $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ và $b_n \geq b_{n+1}$, nên $\exists n_1$ sao cho $|z| > b_{n_1} > a = R$. Vậy chuỗi (6) phân kì tại z mà $|z| > R$.

Định lí 12. (công thức Cauchy-Hadamard).

Bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa được tính theo công thức

$$R = \frac{1}{l} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} \tag{7}$$

trong đó ta đặt $R = 0$ nếu $l = +\infty$ và $R = +\infty$ nếu $l = 0$.

Công thức (7) gọi là công thức Cauchy-Hadamard.

Chứng minh.

1) Nếu $l = \infty$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ không thể hội tụ với $z \neq 0$.

Thật vậy, nếu $\exists z_0 \neq 0$ để $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hội tụ suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$, kéo theo $|c_n z_0^n| < M$ (chọn $M > 1$). Suy ra $\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{M}{|z_0|}$.

Vậy $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \leq \frac{M}{|z_0|}$, trái với giả thiết.

2) Nếu $l = 0$, giả sử $z_0 \neq 0$. Do $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. Suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$, nên $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $\forall n \in \mathbf{N}$ mà $n > n_0$ suy ra $\sqrt[n]{|c_n|} < \epsilon$. Chọn $\epsilon = \frac{1}{2|z_0|}$, ta có

$$|c_n z_0^n| = |c_n||z_0| < \frac{1}{2^n}.$$

Vì $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ, nên $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ hội tụ. Điểm z_0 lấy tuỳ ý do đó $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hội tụ tại mọi $z \in \mathbf{C}$.

3) Nếu $0 < l < +\infty$, ta chứng minh chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hội tụ tại mọi z mà $|z| < \frac{1}{l}$ và phân kì tại mọi z mà $|z| > \frac{1}{l}$.

Theo giả thiết $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ nên $\sqrt[n]{|c_n|} < l + \epsilon$, với n khá lớn và ϵ tuỳ ý.

Với $|z_0| < \frac{1}{l}$ ta chọn $\epsilon = \frac{1 - l|z_0|}{2|z_0|}$.

Suy ra $\sqrt[n]{|c_n|} < l + \frac{1-l|z_0|}{2|z_0|} = \frac{1+l|z_0|}{2|z_0|}$.

Do đó $|c_n z_0^n| < (\frac{1+l|z_0|}{2})^n = q^n$, (trong đó $q < 1$).

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hội tụ tại z_0.

Với $|z_0| > \frac{1}{l}$, trong đó $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$, nên có vô số trị số n để $\sqrt[n]{|c_n|} > l - \epsilon$ với ϵ tuỳ ý.

Chọn $\epsilon = \frac{l|z_0|-1}{|z_0|}$. Suy ra $|c_n z_0^n| > (l - \frac{l|z_0|-1}{|z_0|})^n |z_0|^n = 1$; nghĩa là $\{c_n z_0^n\}$ không dần về 0 khi $n \to \infty$.

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ phân kì tại z_0.

2.6. Định nghĩa một số hàm sơ cấp.

Nhờ vào chuỗi lũy thừa ta có thể định nghĩa các hàm sơ cấp cơ bản sau:

Hàm exponent

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{8}$$

Các hàm lượng giác

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{9}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{10}$$

Các hàm khác

$$\mathrm{sh}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{11}$$

$$\mathrm{ch}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{12}$$

Các chuỗi (8), (9), (10), (11), (12) có bán kính hội tụ $R = \infty$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 2.

1. Tìm giới hạn của các dãy số phức sau:

a) $z_n = n + \frac{i}{n}$;

b) $z_n = z_0^n$ trong đó z_0 là một hằng số phức.

2. Cho dãy số phức $\{z_n\}$ xác định như sau $z_n = (1 + \frac{z}{n})^n$, trong đó z_0 là hằng số phức. Tìm giới hạn của dãy số $\{z_n\}$ khi $n \to \infty$.

3. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi số sau:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$; b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

4. Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$.

5. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}; \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}.$$

6. Cho các hàm số $\frac{\mathrm{Re}z}{z}$, $\frac{z}{|z|}$, $\frac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|^2}$, $\frac{z\mathrm{Re}z}{|z|}$ xác định với $z \neq 0$. Những hàm số nào trong số các hàm số trên có thể bổ sung tại điểm $z = 0$ để chúng trở nên liên tục trên $\mathbf{C}$.

7. Cho các hàm số

a) $f(z) = \frac{1}{1-z}$; b) $g(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

Xét sự liên tục đều của các hàm số f, g trong hình tròn $\{|z| < 1\}$.

8. Cho hàm số $f(z)$ liên tục đều trong hình tròn $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$. Chứng minh rằng với một điểm z_0 bất kì trên đường tròn $\{|z| = 1\}$ và với dãy $\{z_n\}$, $|z_n| < 1$, $z_n \longrightarrow z_0$ (khi $n \longrightarrow \infty$) tồn tại giới hạn $\lim\limits_{z \to z_0} f(z_n)$ và giới hạn đó chỉ phụ thuộc vào z_0.

9. Tìm bán kính hội tụ của các chuỗi sau:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^p};$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n + a^n) z^n.$$

Chương 3
HÀM GIẢI TÍCH

§1. KHÁI NIỆM HÀM GIẢI TÍCH

1.1. Đạo hàm.

Định nghĩa. Cho hàm số $f(z)$ xác định trên miền D, $f(z)$ được gọi là khả vi tại điểm $z_0 \in D$ nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{1}$$

và ta nói rằng hàm f có đạo hàm tại điểm z_0. Kí hiệu

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \tag{2}$$

là đạo hàm của hàm f tại điểm z_0.

Hàm f được gọi là khả vi trên miền D nếu nó khả vi tại mọi điểm $z \in D$.

Ví dụ.

1) Hàm $f(z) = z^2$ khả vi tại mọi $z \in \mathbf{C}$.

Thật vậy, lấy điểm $z \in \mathbf{C}$ bất kì. Xét

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = 2z.$$

Vậy $f'(z) = 2z$.

2) Hàm $f(z) = z\overline{z}$ chỉ khả vi tại điểm $z_0 = 0$.

Thật vậy, ta lập tỉ số

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{z_0\overline{\Delta z} + \overline{z_0}\Delta z + \Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$
$$= z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \overline{z_0} + \overline{\Delta z}$$

Tại $z_0 = 0$, ta có

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = 0 = f'(0).$$

Bây giờ, giả sử $z_0 \neq 0$, vì $\lim\limits_{\Delta z \to 0}(\overline{z_0} + \overline{\Delta z}) = \overline{z_0}$, còn $z_0 \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ không có giới hạn khi $\Delta z \to 0$ nên hàm f không khả vi tại bất kì điểm $z_0 \neq 0$ nào.

Nhận xét. Mọi hàm khả vi tại z_0 thì liên tục tại điểm đó.

Do định nghĩa đạo hàm hoàn toàn tương tự với hàm một biến thực nên một cách tương tự, ta dễ dàng chứng minh các tính chất sau:

Định lí. Nếu các hàm $f(z)$ và $g(z)$ khả vi theo nghĩa phức tại điểm z thì các hàm $f(z) \pm g(z)$, $f(z).g(z)$ và $f(z)/g(z)$ ($g(z) \neq 0$) cũng khả vi tại z và

i) $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$.

ii) $(f(z).g(z))' = f'(z).g(z) + f(z).g'(z)$.

iii) $(\frac{f(z)}{g(z)})' = \frac{f'(z).g(z) - f(z).g'(z)}{(g(z))^2}$.

Nếu $f(z)$ khả vi tại z_0 và $g(z)$ khả vi tại $w_0 = f(z_0)$ thì $g(f(z))$ khả vi tại z_0 và

iv) $(g(f(z_0))' = g'(f'(z_0))$.

Ta đã biết rằng giữa hàm số biến số phức và hàm số biến số thực có sự liên hệ với nhau. Tuy nhiên khi xét về tính khả vi thì sự liên hệ đó biểu hiện như thế nào?

Định lí sau đây sẽ trả lời câu hỏi đó.

Định lí (dấu hiệu Cauchy-Riemann).

Cho hàm số $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ xác định trong lân cận của điểm $z_0 = x_0 + iy_0$. Giả sử u, v khả vi theo nghĩa thực tại điểm z_0. Khi đó điều kiện cần và đủ để f khả vi tại z_0 là

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\}_{z_0} \qquad \text{(điều kiện Cauchy-Riemann)}$$

Chứng minh.

Cần. Vì f khả vi tại z_0 nên tồn tại giới hạn

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) \tag{2}$$

Rõ ràng giới hạn này tồn tại không phụ thuộc vào hướng dần về 0 của Δz.

Chọn $\Delta z = \Delta x$ $(\Delta y = 0)$, ta có:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} [\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta x} - \frac{[(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)]}{\Delta x}] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\
&= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Tương tự, chọn $\Delta z = i\Delta y$ $(\Delta x = 0)$, ta có:

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} \\
&= -i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Từ (3) và (4), ta suy ra

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\}_{z_0}$$

Đủ. Theo giả thiết hàm u, v khả vi tại (x_0, y_0) nên ta có:

$$u(x_0 + \Delta x. y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha(|\Delta z|)$$

$$v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta(|\Delta z|)$$

trong đó $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\alpha(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\beta(|\Delta z|)}{|\Delta z|} = 0.$

Xét

$$\begin{aligned} f(z_0+\Delta z)-f(z_0) &= \Delta u + i\Delta v \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + i(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y) \\ &+ (\alpha \ + i\beta)(|\Delta z|). \end{aligned}$$

Do u, v thoả mãn điều kiện Cauchy-Riemann, nên

$$f(z_0+\Delta z)-f(z_0) = (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(\Delta x + i\Delta y) + (\alpha \ + i\beta)(|\Delta z|).$$

Chia hai vế cho Δz ta được:

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\frac{(\alpha \ + i\beta)(|\Delta z|)}{\Delta z}.$$

Xét

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z\to 0}\left|\frac{(\alpha \ + i\beta)(|\Delta z|)}{\Delta z}\right| &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{|\Delta z|} \\ &\le \lim_{\Delta z\to 0}(\frac{|\alpha\ (|\Delta z|)|}{|\Delta z|} + \frac{|\beta(|\Delta z|)|}{|\Delta z|}) = 0. \end{aligned}$$

Vậy

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

nghĩa là

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{5}$$

Từ điều kiện Cauchy-Riemann, công thức (5) còn được viết dưới dạng

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \\ f'(z_0) &= \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} \\ f'(z_0) &= \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \tag{6}$$

Các công thức (5), (6) cho ta tính đạo hàm của hàm số biến số phức nhờ vào các hàm số biến số thực. Phương pháp tính đạo hàm này đã được biết trong phần phép tính vi phân của hàm số nhiều biến số.

Trong nhiều trường hợp, các hàm u, v được cho theo các biến r, φ lần lượt là bán kính cực và góc cực trong toạ độ cực. Khi đó điều kiện Cauchy-Riemann trở thành

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= -r\frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} &= r\frac{\partial u}{\partial r} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ví dụ 1. Xét tính khả vi của hàm $f(z) = z\bar{z}$ tại $z_0 = 0$. Ta có

$$f(z) = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 - 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Tại $z_0 = 0$, ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\text{và } \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Vậy f khả vi tại $z_0 = 0$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$. Khảo sát tính khả vi của hàm số trên $\mathbf{C}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \sin y.$$

Vậy f khả vi tại mọi $z \in \mathbf{C}$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(z) = z^n$. Ta biểu diễn $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Khi đó $$f(z) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = nr^{n-1}\cos n\varphi\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = nr^n\cos n\varphi$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -nr^n\sin n\varphi\,, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = nr^{n-1}\sin n\varphi$$

Vậy f khả vi tại mọi $z \in \mathbf{C}$.

1.2. Hàm giải tích.

Định nghĩa. Hàm f xác định trên miền D được gọi là giải tích tại $z \in D$ nếu tồn tại ϵ-lân cận của z_0 chứa trong D sao cho f khả vi trong lân cận đó.

Ví dụ. Hàm số $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$ giải tích tại mọi điểm $z \in \mathbf{C} \setminus \{\pm i\}$.

Hàm f xác định trên miền D được gọi là giải tích trên D nếu nó giải tích tại mọi $z \in D$.

Nhận xét.

1) Hàm f giải tích tại điểm z_0 thì khả vi tại điểm đó. Tuy nhiên điều ngược lại nói chung không đúng.

Ví dụ. Hàm $f(z) = z\bar{z}$ khả vi tại điểm $z = 0$ nhưng không giải tích tại điểm đó.

2) Trên miền D (mở), hàm f giải tích trên D khi và chỉ khi f khả vi trên đó.

1.3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm. Ánh xạ bảo giác.

Giả sử hàm $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ giải tích tại $z_0 \in D$ và $f'(z_0) \neq 0$.

Suy ra

$$J(u,v) \neq 0 \tag{8}$$

trong đó $J(u,v)$ là định thức của ma trận Jacobi:

$$J(u,v) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}_{(x_0,y_0)} = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x})^2$$

$$J(u, v) = |f(z_0)|^2.$$

Trong giải tích cổ điển, theo định lí hàm ngược khi $J(u, v)|_{(x_0, y_0)} \neq 0$ thì các hàm số $u = u(x, y)$ và $v = v(x, y)$ có các hàm ngược trong lân cận của điểm (x_0, y_0).

Nói một cách khác, nếu $f'(z_0) \neq 0$ thì hàm $w = f(z)$ sẽ đơn trị hai chiều trong một lân cận nào đó của z_0 và hàm ngược $z = f^{-1}(w)$ cũng khả vi trong lân cận của điểm $w_0 = f(z_0)$ và

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} \tag{9}$$

Giả sử $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [a, b]$ là đường cong Jordan, trơn đi qua điểm z_0. Tại điểm $z_0 = \gamma(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ ta có $\gamma'(t_0) \neq 0$.

Ảnh của γ qua ánh xạ $w = f(z)$ là đường cong $\Gamma = f(\gamma)$ đi qua điểm $w_0 = f(z_0)$.

Phương trình của γ là

$$w = f(\gamma(t)) \ , \ t \in [a, b]$$

và ta có

$$w'(t_0) = f'(\gamma(t_0)).\gamma'(t_0) \neq 0. \tag{10}$$

Từ (10) suy ra đường cong Γ có tiếp tuyến tại w_0 và ta có

$$\arg f'(z_0) = \arg w'(t_0) - \arg z'(t_0) \tag{11}$$

Đẳng thức (11) xác định sai khác một bội của 2π.

Như vậy, qua ánh xạ $w = f(z)$ với $f'(z_0) \neq 0$, tiếp tuyến của đường cong γ tại z_0 quay một góc bằng $\arg f'(z_0)$.

Bây giờ, giả sử γ_1 là một đường cong Jordan trơn khác qua điểm z_0, có phương trình

$$\gamma_1 = \gamma_1(\tau), \quad \tau \in [c, d]$$

$$z_0 = \gamma_1(\tau_0), \quad \gamma(z_0) \neq 0$$

Gọi $\Gamma_1 = f(\gamma_1)$, tương tự trên ta có

$$\arg f'(z_0) = \arg w_1'(t_0) - \arg z_1'(t_0) \tag{12}$$

Từ (11) và (12) ta suy ra

$$\arg w'(t_0) - \arg w_1'(z_0) = \arg z'(t_0) - \arg z_1'(t_0)$$

hay

$$\varphi(\Gamma, \Gamma_1) = \varphi(\gamma, \gamma_1) \tag{13}$$

trong đó $\varphi(\Gamma, \Gamma_1)$, $\varphi(\gamma, \gamma_1)$ lần lượt là góc giữa hai đường cong Γ, Γ_1 và γ, γ_1.

Điều đó chứng tỏ rằng qua ánh xạ $w = f(z)$ với $f'(z_0) \neq 0$, góc giữa hai đường cong tại điểm z_0 được bảo toàn về độ lớn và hướng.

Mặt khác ta có

$$\lim_{\Delta \to 0} \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = |f'(z_0)| = k. \tag{14}$$

Hệ thức (14) chứng tỏ rằng với độ chính xác của các đại lượng bậc cao hơn so với $|\Delta z|$ ta có thể viết

$$k \approx \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| \text{ hay } |\Delta w| = k|\Delta z|.$$

Hệ thức này chỉ phụ thuộc vào $f'(z_0)$ mà không phụ thuộc vào sự chọn các đường cong qua z_0.

Như vậy qua ánh xạ $w = f(z)$ với $f'(z_0) \neq 0$ hệ số co dãn (độ dãn) tại điểm z_0 không phụ thuộc vào dạng và hướng của đường cong.

Ánh xạ bảo giác.

Định nghĩa. Ánh xạ $w = f(z)$ biến miền D của mặt phẳng phức (z) thành miền D^* của mặt phẳng phức (w) được gọi là ánh xạ bảo giác trong miền D nếu tại mọi điểm $z \in D$, góc giữa các đường cong được bảo toàn (cả về độ lớn và hướng) và độ dãn không đổi theo mọi hướng.

Từ ý nghĩa hình học của đạo hàm ta có định lí sau về điều kiện đủ để một ánh xạ là bảo giác.

Định lí. Giả sử ánh xạ $w = f(z)$ biến miền D thành miền D^*, nếu $f(z)$ là một hàm giải tích trong D và $f'(z) \neq 0$ với mọi $z \in D$ thì $f(z)$ là ánh xạ bảo giác trên D.

Định lí sau đây được xem là định lí đảo của định lí trên.

Định lí. Giả sử ánh xạ $w = f(z)$ biến miền D thành miền D^*, nếu $f(z)$ là ánh xạ bảo giác trên D thì $f(z)$ là một hàm giải tích trong D và $f'(z) \neq 0$ với mọi $z \in D$.

Chứng minh. Lấy $z_0 \in D$ tuỳ ý, xét hai điểm

$$z_1 = z_0 + \Delta z_1$$

$$z_2 = z_0 + \Delta z_2$$

qua ánh xạ f chúng lần lượt biến thành các điểm

$$w_1 = w_0 + \Delta w_1 \ (w_0 = f(z_0))$$
$$w_2 = w_0 + \Delta w_2$$

Do f bảo giác trên D, nên f bảo giác tại z_0 nghĩa là với $|\Delta z_1|$, $|\Delta z_2|$ đủ bé, ta có

$$\arg \Delta w_2 - \arg \Delta w_1 = \arg \Delta z_2 - \arg \Delta z_1 \tag{15}$$

và

$$\left|\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1}\right| = \left|\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2}\right| = k \neq 0 \tag{16}$$

Nếu ta đặt

$$\arg \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \alpha \ \text{ thì } \ \arg \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = \alpha \tag{17}$$

Từ (16) và (17) ta suy ra

$$\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} = \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} = ke^{i\alpha}$$

với sai khác một đại lượng vô cùng bé bậc cao hơn so với $\min(|\Delta z_1|, \ |\Delta z_2|)$.

Vì z_1, z_2 chọn tuỳ ý trong lân cận của z_0, nên với mọi z trong lân cận của $z_0 (z = z_0 + \Delta z)$ ta có

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = k^{i\alpha}$$

với sai khác một đại lượng vô cùng bé bậc cao hơn so với $|\Delta z|$.

Vậy

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta}{\Delta z} = ke^{i\alpha} \qquad (18)$$

nghĩa là f khả vi tại z_0 và $f'(z_0) = ke^{i\alpha} \neq 0$. Vì z_0 lấy tuỳ ý nên f giải tích trên D và $f'(z) \neq 0$, với mọi $z \in D$.

§2. CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP

2.1. Hàm luỹ thừa.

Định nghĩa. Hàm luỹ thừa là một hàm có dạng

$$w = z^n. \qquad (1)$$

Hàm luỹ thừa xác định với mọi $z \in \mathbf{C}$ và khả vi trên $\mathbf{C}$ với đạo hàm tại điểm z là $f'(z) = nz^{n-1}$. Đạo hàm này khác không tại mọi $z \neq 0$, với $n > 1$; nên khi $n > 1$ hàm luỹ thừa bảo giác trên miền $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

Bây giờ ta xét hàm (1) tại điểm $z = 0$.

Vì $f'(0) = 0$ nên tại điểm $z = 0$ hàm luỹ thừa mất tính bảo giác. Để hiểu rõ hơn về tính chất này ta biểu diễn số phức $z \neq 0$ trong toạ độ cực (r, φ)

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$\text{và } w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

từ (1), ta có

$$\begin{cases} \rho = r^n \\ \theta = n\varphi \end{cases} \qquad (2)$$

Ta nhận thấy rằng nếu chọn hai điểm z_1, z_2 sao cho

$$\begin{cases} |z_1| &= |z_2| \\ \arg z_1 &= \arg z_2 + \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \tag{3}$$

thì ảnh của chúng qua ánh xạ (1) sẽ trùng nhau.

Như vậy, tại điểm $z = 0$ hàm luỹ thừa mất tính bảo giác, và mọi góc có đỉnh tại $z = 0$ qua hàm luỹ thừa sẽ tăng lên n lần.

Từ định nghĩa của hàm đơn trị. Để hàm $w = z^n$ là đơn trị hai chiều trên miền D, cần và đủ là miền D không chứa bất kì cặp điểm nào thoả mãn điều kiện (3).

Ví dụ. Xét miền D như sau

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n} \}.$$

Hàm luỹ thừa đơn diệp trên D.

Từ (2) ta suy ra ảnh của miền D qua hàm (1) là miền

$$D^* = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \arg w < 2\pi \}.$$

Hàm căn bậc n. Hàm ngược của hàm luỹ thừa $w = z^n$ có dạng $z = \sqrt[n]{w}$, với $w \neq 0$, có n giá trị (hàm đa trị).

Nhận xét. Trên mọi miền D không chứa điểm $z = 0$ ta có thể xác định hàm liên tục và đơn trị, mà mỗi hàm này trùng với một giá trị xác định của $\sqrt[n]{w}$, n hàm này được gọi là các nhánh của hàm đa trị.

Điểm $0, \infty$ được gọi là điểm phân nhánh của hàm căn bậc n của z.

Mỗi nhánh này là một hàm đơn trị 1-1 của miền D nào đó, nên theo tính chất của đạo hàm ta có

$$(\sqrt[n]{w})' = \frac{1}{(z^n)'} = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n} - 1}.$$

2.2. Hàm mũ.

Định nghĩa. Hàm mũ được định nghĩa qua chuỗi luỹ thừa

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{4}$$

Hàm mũ xác định đơn trị trên **C**.

Định lí.

1) Hàm mũ thu hẹp trên tập hợp **R** trùng với hàm mũ thông thường trong giải tích cổ điển và khi đó $f(1) = e$.

2) Hàm mũ có tính chất cộng tính, nghĩa là

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}.e^{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}. \tag{5}$$

3) Hàm mũ khả vi trên **C**.

Chứng minh.

1) Hiển nhiên.

2) Theo định nghĩa, ta có

$$\begin{aligned} e^{z_1}.e^{z_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \end{aligned}$$

trong đó

$$\begin{aligned} c_n z^n &= \sum_{p=0}^{n} \frac{z_1^p}{p!} \frac{z_2^{n-p}}{(n-p)!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} C_n^p z_1^p z_2^{n-p} \\ &= \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n \end{aligned}$$

Vậy

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!}$$
$$= e^{z_1+z_2}.$$

3) Để chứng minh $f(z)$ khả vi trên $\mathbf{C}$. Trước hết ta chứng minh f khả vi tại điểm $z = 0$.

Xét

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - e^0}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!} - 1)$$

do chuỗi này hội tụ đều trong mọi hình tròn bán kính r tuỳ ý nên ta có thể chuyển qua giới hạn dưới dấu tổng, suy ra

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^z - e^0}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z\to 0} \frac{z_1^{n-1}}{n!} = 1$$

Vậy f khả vi tại $z = 0$ và $f'(0) = 1$.

Bây giờ ta xét tại điểm $z \neq 0$ tuỳ ý. Ta có

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f(z).\frac{f(\Delta z) - 1}{\Delta z}$$
$$= f(z).\frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z}.$$

Chuyển qua giới hạn khi $\Delta z \to 0$, ta được

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f(z).f'(0) = f(z).$$

Định lí. Hàm $f(z) = e^z$ là hàm tuần hoàn với chu kì cơ bản $2\pi i$.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh công thức Euler

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Đặt $f(iy) = \alpha(y) + i\beta(y)$. Vì f khả vi nên

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$f'(z) = \beta'(y) - i\alpha'(y). \tag{6}$$

Mặt khác $f'(z) = f(z)$, suy ra

$$\alpha(y) = \beta'(y)$$
$$\text{và } \beta(y) = \alpha'(y).$$

Do $f(0) = 1$ nên $\alpha(0) = 1$ và $\beta(0) = 0$.

Vậy $\alpha(y)$ và $\beta(y)$ lần lượt là nghiệm của phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} \alpha"(y) + \alpha(y) = 0 \\ \alpha(0) = 1 \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} \beta"(y) + \beta(y) = 0 \\ \beta(0) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Giải phương trình (7) ta có nghiệm $\alpha(y) = \cos y$, và phương trình (8) có nghiệm $\beta(y) = \sin y$.

Vậy $$f(iy) = e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Từ công thức Euler ta suy ra

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy}) \tag{9}$$

$$\sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}). \tag{10}$$

Bây giờ ta chứng minh định lí. Từ công thức Euler ta có

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi i} &= e^z.e^{2k\pi i} \\ &= e^z(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi) = e^z \end{aligned}$$

Vậy hàm e^z là hàm tuần hoàn với chu kì cơ bản $2\pi i$.

Định lí. Hàm e^z bảo giác trên mọi miền đơn diệp của nó.

(Bạn đọc dễ dàng chứng minh.)

Do hàm e^z tuần hoàn nên miền D là miền đơn diệp khi nó không chứa cặp điểm thoả mãn điều kiện

$$z_1 - z_2 = 2k\pi i, \; k \in \mathbf{Z}. \tag{11}$$

Ví dụ. Miền

$$D = \{z \in \mathbf{C} \mid 0 < \mathrm{Im} z < 2\pi \}$$

là miền đơn diệp của hàm e^z.

Hàm Lôgarit.

Số phức w được gọi là lôgarit của số phức z nếu $e^w = z$. Kí hiệu $\ln z = w$.

Từ định nghĩa trên ta suy ra tính chất cơ bản sau đây

Nếu $w_1 = \ln z_1$, $w_2 = \ln z_2$ thì

$$\ln z_1 + \ln z_2 = \ln(z_1.z_2) \tag{12}$$

Thật vậy,

$$w_1 = \ln z_1 \Longleftrightarrow e^{w_1} = z_1$$

$$w_2 = \ln z_2 \Longleftrightarrow e^{w_2} = z_2$$

suy ra $z_1.z_2 = e^{w_1}.e^{w_2} = e^{w_1+w_2}$.

Theo định nghĩa ta có $w_1 + w_2 = \ln(z_1.z_2)$.

Vậy $\qquad \ln z_1 + \ln z_2 = \ln(z_1.z_2)$.

Đặc biệt khi $z_1 = |z|$ và $z_2 = e^{i\arg z}$, từ (12) ta có

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

trong đó $\arg z$ là một giá trị nào đó của argument của số phức z.

Vậy với mỗi $z \neq 0$ có vô số giá trị lôgarit.

Định nghĩa. Hàm Lôgarit là hàm ngược của hàm mũ, nó được xác định bởi tập hợp tất cả các số lôgarit của z ($\{w \in \mathbf{C} \mid e^w = z\}$). Kí hiệu $w = \mathrm{Ln} z$.

Nói cách khác, với $z \neq 0$

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i\mathrm{Arg} z \tag{13}$$

Rõ ràng hàm Lôgarit là hàm đa trị.

Chú ý.

1) $\text{Ln}(z_1.z_2) = \text{Ln}z_1 + \text{Ln}z_2$

2) $\text{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \text{Ln}z_1 - \text{Ln}z_2$

3) $2\text{Ln}z \neq \text{Ln}z + \text{Ln}z$

Trên mỗi miền đơn diệp hàm Lôgarit là hàm ngược của hàm mũ và nó là hàm đơn trị $\ln z$, nên theo tính chất của đạo hàm ta có

$$(\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Tính chất hình học của hàm mũ.

Để nghiên cứu phép biến hình thực hiện bởi hàm e^z, ta xét dải $\{-\infty < x < +\infty; 0 < y < 2\pi\}$.

Đặt $z = x + iy$ và $w = \rho e^{i\theta}$. Khi đó $\rho = e^x$ và $\theta = y$.

Đoạn thẳng $x = x_0$ và $y \in [0, 2\pi]$ biến thành đường tròn bán kính e^{x_0}.

Đường thẳng $y = y_0$ biến thành tia xuất phát từ gốc toạ độ hợp với trục thực một góc là y_0 (đo bằng radian).

Từ đó ta suy ra rằng hàm e^z biến nửa dải $\{-\infty < x < 0; 0 < y < 2\pi\}$ thành hình tròn đơn vị với nhát cắt đoạn $[0, 1]$; biến nửa dải $\{-\infty < x < 0; 0 < y < \pi\}$ thành nửa trên hình tròn đơn vị.

2.3. Các hàm lượng giác.

Định nghĩa.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{14}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \tag{15}$$

Định nghĩa này trùng với định nghĩa ở chương 2.

Hàm $\sin z$ xác định đơn trị trên $\mathbf{C}$. Khi $z = x \in \mathbf{R}$ thì hàm $\sin z \equiv \sin x$ thông thường trên $\mathbf{R}$.

Định lí.

1) Hàm $\sin z$ là hàm lẻ.

2) Hàm $\sin z$ khả vi trên $\mathbf{C}$ và có đạo hàm $(\sin z)' = \cos z$.

3) Hàm $\sin z$ là hàm tuần hoàn với chu kì 2π.

4) Các công thức lượng giác cơ bản vẫn còn đúng cho các hàm lượng giác phức.

Bạn đọc tự chứng minh như bài tập.

Đối với hàm lượng giác phức, ngoài các tính chất giống như hàm lượng giác thực. Hàm $\sin z$, $\cos z$ còn có tính chất sau hoàn toàn khác với hàm biến thực.

Định lí. Hàm $\sin z$ có mođun không bị chặn.

Để chứng minh tính chất này, trước hết ta xét đến các hàm hypebolic. Được định nghĩa bởi biểu thức sau

$$\mathrm{ch}z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \tag{16}$$

$$\mathrm{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \tag{17}$$

Các hàm này liên hệ với các hàm lượng giác rất chặt chẽ.

$$\mathrm{ch}z = \cos iz, \ \cos z = \mathrm{ch}iz \tag{18}$$

$$\mathrm{sh}z = -i\sin iz, \ \sin z = -i\mathrm{sh}iz. \tag{19}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh định lí trên.

Ta có

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x+iy)\\ &= \sin x\cos iy + \cos x\sin iy\\ &= \sin x\mathrm{ch}y + i\cos x\mathrm{sh}y\end{aligned}$$

Lấy mođun hai vế ta được

$$\begin{aligned}|\sin z|^2 &= \sin^2 x\mathrm{ch}^2 y + \cos^2 x\mathrm{sh}^2 y\\ &= \sin^2 x(\mathrm{sh}^2 y + 1) + \cos^2 x\mathrm{sh}^2 y\\ &= \sin^2 x + \mathrm{sh}^2 y(\sin^2 x + \cos^2 x) \geq \mathrm{sh}^2\end{aligned}$$

Vậy $|\sin z| \geq |\mathrm{sh}y|$. Điều này chứng tỏ hàm $\sin z$ có mođun không bị chặn.

Với hàm $\cos z$ ta có các tính chất tương tự.

Định nghĩa.

$$\text{tg}z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{cotg}z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq k\pi, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Hàm tg$z$ và cotg$z$ là các hàm tuần hoàn với chu kì cơ bản là π.
Đạo hàm

$$(\text{tg}z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$(\text{cotg}z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

2.4. Hàm phân tuyến tính.

Định nghĩa. Hàm phân tuyến tính là hàm có dạng

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \tag{20}$$

trong đó a, b, c, d là các hằng số phức thoả mãn điều kiện

$$ad - bc \neq 0 \tag{21}$$

Giả thiết này loại trừ trường hợp hàm $f(z) = w$ suy biến thành hằng số, vì

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)}$$

Các tính chất cơ bản của hàm phân tuyến tính.

Định lí 1. Hàm phân tuyến tính xác định đơn trị trên toàn mặt phẳng phức mở rộng với $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ và $f(\infty) = \frac{a}{c}$.

Định lí 2. Ánh xạ phân tuyến tính thực hiện ánh xạ đơn trị hai chiều trên $\overline{\mathbf{C}}$ với ánh xạ ngược

$$z = f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a} \tag{22}$$

Định lí 3. Ánh xạ phân tuyến tính bảo giác trên $\overline{\mathbf{C}}$.

Góc tại điểm vô cùng.

Định nghĩa. Góc giữa hai đường cong γ_1, γ_2 tại điểm $z = \infty$ được hiểu là góc giữa các ảnh của γ_1, γ_2 qua ánh xạ g xác định bởi $g(z) = \frac{1}{z}$, là $\gamma_1^* = g(\gamma_1)$, $\gamma_2^* = g(\gamma_2)$ tại điểm $z^* = 0$ (với $z^* = \frac{1}{z}$).

Với mọi $z \in \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, ta có

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0$$

nghĩa là f bảo giác tại mọi điểm $z \in \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Bây giờ ta xét tại điểm $z = -\frac{d}{c}$.

Giả sử $\varphi = \varphi(\gamma_1, \gamma_2)_{z=-\frac{d}{c}}$ qua ánh xạ phân tuyến tính

$$-\frac{d}{c} \longrightarrow \infty; \qquad \gamma_1 \longrightarrow \Gamma_1; \qquad \gamma_2 \longrightarrow \Gamma_2.$$

Hai đường cong Γ_1, Γ_2 qua điểm $w = \infty$ theo định nghĩa góc ở vô cùng, ta có $\varphi(\Gamma_1, \Gamma_2)_{w=\infty} = \varphi(\Gamma_1^*, \Gamma_2^*)_{w^*=0}$ trong đó $w^* = \frac{1}{w}$, $\Gamma_1^* = g(\Gamma_1)$ và $\Gamma_2^* = g(\Gamma_2)$. Ta có

$$w^* = \frac{cz+d}{az+b} \tag{23}$$

Ánh xạ (23) bảo giác tại điểm $z = -\frac{d}{c}$,
nghĩa là $\varphi(\Gamma_1^*, \Gamma_2^*)_{w^*=0} = \varphi(\gamma_1, \gamma_2)_{z=-\frac{d}{c}}$.

Vậy $$\varphi(\gamma_1, \gamma_2)_{z=-\frac{d}{c}} = \varphi(\Gamma_1, \Gamma_2)_{w=\infty}.$$

Lí luận tương tự cho điểm $z = \infty$.

Vậy hàm phân tuyến tính bảo giác trên $\overline{\mathbf{C}}$.

Định lí 4. Tập hợp tất cả các ánh xạ phân tuyến tính trên $\overline{\mathbf{C}}$ với phép toán là phép toán hợp ánh xạ tạo thành một nhóm không giao hoán.

Độc giả tự chứng minh như bài tập.

Định lí 5. Ánh xạ phân tuyến tính bảo tồn đường tròn trong mặt phẳng phức mở rộng.

Chứng minh.

Nếu $c = 0$ thì ánh xạ phân tuyến tính có dạng $f(z) = az + b$ là hàm tuyến tính, nên nó bảo toàn đường tròn, đường thẳng (đường tròn trên $\overline{\mathbf{C}}$).

Thật vậy, số phức $a \neq 0$ (do điều kiện (21)) viết dưới dạng lượng giác là $a = |a|e^{i\arg a}$. Điều này chứng tỏ phép biến đổi $z \longmapsto az$ chính là hợp của một phép vị tự tâm $O = O(0,0)$ tỉ $k = |a|$ và một phép quay góc $\varphi = \arg a$ tâm O. Phép biến đổi $az \longmapsto az + b$ chính là phép tịnh tiến vectơ b (xem số phức như là một vectơ). Các phép biến đổi này giữ nguyên đường tròn và đường thẳng nên ánh xạ phân tuyến tính $f(z)$ bảo toàn đường tròn, đường thẳng.

Nếu $c \neq 0$ khi đó $f(z)$ được viết dưới dạng

$$f(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)}$$

và $f(z)$ là hợp của các ánh xạ sau

$$\begin{aligned}
z &\xmapsto{f_1} cz + d = z_1 \\
z_1 &\xmapsto{f_2} \frac{1}{z_1} = z_2 \\
z_2 &\xmapsto{f_3} \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} z_2 = f(z)
\end{aligned}$$

f_1, f_3 là hàm tuyến tính. Theo chứng minh trên chúng bảo toàn đường tròn trên mặt phẳng phức mở rộng.

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh hàm f_2 bảo toàn đường tròn trên $\overline{\mathbf{C}}$.

Trước hết ta xét đường tròn γ có phương trình

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0.$$

Đưa về dạng phức

$$Az\overline{z} + B(z + \overline{z}) - i(z - \overline{z}) + D = 0$$

rút gọn ta được

$$Az\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = 0. \tag{24}$$

Gọi $\Gamma = f_2(\gamma)$, khi đó phương trình của Γ có được bằng cách thay $z = \frac{1}{w}$ vào phương trình (24) và ta có

$$Dw\overline{w} + Ew + \overline{E}\overline{w} + A = 0. \tag{25}$$

Điều này chứng tỏ Γ là một đường tròn.

Vậy ánh xạ $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ bảo toàn đường tròn trong $\overline{\mathbf{C}}$.

Định lí 6. Ánh xạ phân tuyến tính bảo toàn cặp điểm đối xứng đối với đường tròn $\overline{\mathbf{C}}$.

Lấy hai điểm z và $\bar{z}$ đối xứng nhau qua trục thực. Một ánh xạ phân tuyến tính với hệ số thực biến trục thực thành chính nó và các điểm $z, \bar{z}$ thành các điểm đối xứng nhau qua trục thực.

Tổng quát hơn, nếu một ánh xạ phân tuyến tính f_1 biến trục thực thành đường tròn (C), chúng ta nói rằng cặp điểm $w = f_1(z)$ và $w^* = f_1(\bar{z})$ là cặp điểm đối xứng đối với (C). Đây là mối liên hệ giữa w, w^* và (C) mà không phụ thuộc vào f_1 . Thật vậy, nếu f_2 là một ánh xạ phân tuyến tính khác biến trục thực thành (C) thì ánh xạ $f_2^{-1} \circ f_1$ là ánh xạ phân tuyến tính có hệ số thực. Như vậy, $f_2^{-1}w = (f_2^{-1} \circ f_1)z$ và $f_2^{-1}w^* = (f_2^{-1} \circ f_1)\bar{z}$ là các số phức liên hợp. Một cách tổng quát tính đối xứng được định nghĩa như sau:

Định nghĩa. Hai điểm z và z^* được gọi là đối xứng nhau qua đường tròn (C) nếu chúng thoả mãn hai điều kiện sau đây:

i) z, z^* cùng nằm trên một tia xuất phát từ tâm đường tròn;

ii) Tích khoảng cách từ hai điểm này đến tâm đường tròn bằng bình phương bán kính của đường tròn đó.

Nghĩa là nếu đường tròn (C) có tâm là điểm z_0 và bán kính là R thì

$$\arg(z - z_0) = \arg(z^* - z_0) \quad \text{và} \quad |z - z_0|.|z^* - z_0| = R^2.$$

Hai hệ thức trên tương đương với hệ thức sau

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0} + z_0 \tag{26}$$

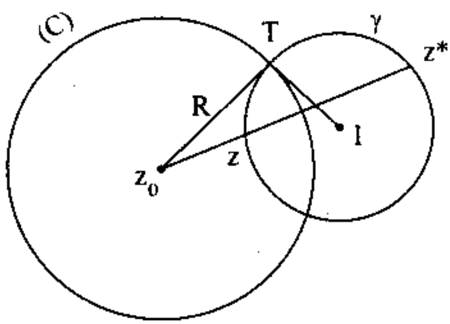
Trong hình học sơ cấp người ta đã xác lập tính chất sau đây đặc trưng cho các điểm đối xứng:

Để cặp điểm z, z^* đối xứng nhau qua đường tròn (C) cần và đủ là mọi đường tròn γ qua z, z^* đều trực giao với đường tròn (C).

Thật vậy, giả sử z và z^* đối xứng qua (C) và γ là đường tròn bất kì qua z và z^*. Khi đó theo định lí đã biết trong hình học sơ cấp: "Bình phương độ dài của tiếp tuyến với γ từ z_0 bằng tích của $|z - z_0|$ với $|z^* - z_0|$(xem hình vẽ); nghĩa là $|z - z_0|.|z^* - z_0| = R^2 = |T - z_0|^2$.

Vậy z_0T là tiếp tuyến của γ. Suy ra z_0T vuông góc với IT, nghĩa là γ trực giao với (C).

Ngược lại, nếu đường tròn γ bất kì đi qua z và z^*, trực giao với (C) (ở đây xem đường thẳng zz^* là một đường tròn trong $\overline{\mathbf{C}}$ qua z và z^*) thì hai điểm z và z^* cùng nằm trên một tia qua điểm z^* và $|z - z_0|.|z^* - z_0| = |T - z_0|^2 = R^2$. Vậy z và z^* đối xứng qua (C).



Hình 5

Bây giờ ta chứng minh tính chất bảo toàn các điểm đối xứng của ánh xạ phân tuyến tính.

Cho z, z^* đối xứng qua (C). Gọi $C' = f(C)$, $w = f(z)$, $w^* = f(z^*)$. Ta sẽ chứng minh w, w^* đối xứng qua C'.

Xét đường tròn Γ bất kì qua w, w^*. Vì f là hàm phân tuyến tính nên f^{-1} cũng là hàm phân tuyến tính, do đó $\gamma = f^{-1}(\Gamma)$ là đường tròn qua z, z^*. Theo tính chất trên $\gamma \perp (C)$.

Vậy $\Gamma \perp C'$.

Phép đẳng cấu, phép tự đẳng cấu phân tuyến tính.

Trong định nghĩa, hàm phân tuyến tính phụ thuộc bốn tham số phức. Ta luôn luôn có thể giả thiết một tham số khác 0 và cho nó bằng 1. Như vậy, hàm phân tuyến tính chỉ còn phụ thuộc vào 3 tham số phức. Từ nhận xét trên dẫn đến kết quả sau:

Định lí. Tồn tại một và chỉ một ánh xạ phân tuyến tính f biến ba điểm $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbf{C}}$ phân biệt $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbf{C}}$ sao cho $f(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$.

Chứng minh.

a)*Sự tồn tại.* Xét ánh xạ phân tuyến tính xác định như sau

$$\begin{aligned} L_1 : \ z_1 &\longmapsto 0; \quad \text{và} & L_2 : w_1 &\longmapsto 0; \\ z_2 &\longmapsto \infty; & w_2 &\longmapsto \infty; \\ z_3 &\longmapsto 1. & w_3 &\longmapsto 1. \end{aligned}$$

Như vậy

$$L_1(z) = \frac{z_0 - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

và

$$L_2(w) = \frac{w_0 - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2}$$

Đặt $f = L_2^{-1} \circ L_1$. Đó là ánh xạ cần tìm.

b)*Sự duy nhất.* Giả sử có hàm phân tuyến tính g sao cho $g(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$.

Xét hàm $h = L_2 \circ g \circ L_1^{-1}$. Rõ ràng h là hàm phân tuyến tính. Với $h(0) = 0, h(\infty) = \infty, h(1) = 1$. Suy ra $h(z) = z$ hay $h = id$ (hàm đồng nhất). Vậy $g = f$.

Định nghĩa. Ánh xạ phân tuyến tính biến miền D thành miền D^* được gọi là phép đẳng cấu phân tuyến tính.

Nếu miền $D^* \equiv D$ thì ta gọi là phép tự đẳng cấu phân tuyến tính.

Ví dụ 1. (Phép đẳng cấu phân tuyến tính). Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến miền $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$ thành miền $D^* = \{w \in \mathbf{C} \mid |w| < 1\}$.

Lấy $z_0 \in D$, ta tìm ánh xạ f sao cho $f(z_0) = 0 \in D^*$. Vì $\bar{z}_0$ đối xứng qua trục thực nên ảnh của nó qua f phải đối xứng với đường tròn $\{|w| = 1\}$, nghĩa là $f(\bar{z}_0) = \infty$.

Suy ra $f(z) = A\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$.

Lấy $z = x$ nằm trên trục thực, khi đó ảnh của nó phải thoả mãn điều kiện $|w| = 1$.

$$|w| = |A\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}| = 1 = |A\frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0}| = |A|.$$

Vậy $A = e^{i\varphi}$. Do đó ánh xạ cần tìm là $f(z) = e^{i\varphi}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$.

Ví dụ 2. (Phép tự đẳng cấu phân tuyến tính). Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến miền $D = \{|z| < 1\}$ thành miền $D^* = \{|w| < 1\}$.

Lấy điểm $z_0 \in D$, tìm hàm phân tuyến tính f sao cho $f(z_0) = 0 \in D^*$. Vì $\frac{1}{\bar{z}_0}$ đối xứng với z_0 qua đường tròn $\{|z| = 1\}$ nên $f(\frac{1}{\bar{z}_0}) = \infty$ (đối xứng với 0 qua đường tròn $\{|w| = 1\}$). Suy ra

$$f(z) = A\frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} = A_1\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

Lấy z sao cho $|z| = 1$. Khi đó ảnh của nó sẽ nằm trên đường tròn $\{|w| = 1\}$, nghĩa là

$$|w| = |A_1\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}| = 1 = |A_1\frac{e^{i\varphi} - z_0}{1 - \bar{z}_0 e^{i\varphi}}| = |A_1|.$$

Suy ra $A_1 = e^{i\varphi}$.

Vậy ánh xạ cần tìm là

$$f(z) = e^{i\varphi}\frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}.$$

2.5. Hàm Jucôpski

Định nghĩa. Người ta gọi hàm hữu tỉ

$$w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}) \tag{27}$$

là hàm Jucôpski.

Các tính chất.

1) Hàm Jucôpski xác định đơn trị trên $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Ta đặt $f(0) = \infty$.

2) Hàm Jucôpski khả vi trên $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ và đạo hàm của nó là

$$f'(z) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{z^2}).$$

Suy ra f bảo giác trên miền $\mathbf{C} \setminus \{0, 1, -1\}$.

Bây giờ ta xét tại điểm $z = 0$, khi đó ánh xạ của nó là $w = \infty$. Do đó theo định nghĩa góc ở vô cùng ta xét ánh xạ

$$z \longrightarrow w^* = \frac{1}{w} = \frac{2z}{z^2 + 1}.$$

Vì đạo hàm của hàm hợp $(g \circ f)'(z) = 2\frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}|_{z=0} \neq 0$, nên f bảo giác tại $z = 0$.

Tương tự, tại điểm $z = \infty$, ta xét $f(\frac{1}{z})$ tại $z = 0$ nhưng vì $f(\frac{1}{z}) = f(z)$ nên f bảo giác tại $z = \infty$.

Tại các điểm $z = \pm 1$, ta viết hàm (27) dưới dạng

$$\frac{w-1}{w+1} = (\frac{z-1}{z+1})^2.$$

Như vậy ánh xạ Jucôpski là hợp của các ánh xạ

$$f_1 : z \longrightarrow \frac{z-1}{z+1} = \eta; \quad g : \eta \longrightarrow \eta^2 = \omega; \quad f_2 : \omega \longrightarrow \frac{1+\omega}{1-\omega} = w.$$

Các hàm f_1, f_2 là ánh xạ phân tuyến tính nên chúng bảo giác trên $\overline{\mathbf{C}}$. Vì hàm g không bảo giác tại điểm $\eta = 0$ (tương ứng với $z = 1$) và tại điểm $\eta = \infty$ (tương ứng với $z = -1$). Do đó hàm Jucôpski không bảo giác tại các điểm $z = \pm 1$.

Miền đơn diệp.

Điều kiện để miền D nào đó đơn diệp là nó không chứa những cặp điểm z_1 và z_2 thoả mãn điều kiện $z_1.z_2 = 1$.

Thật vậy, giả sử $f(z_1) = f(z_2)$. Khi đó ta có:

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2} \Rightarrow (z_1 - z_2)(1 - \frac{1}{z_1 z_2}) = 0,$$

do đó nếu lấy $z_1 \neq z_2$ thì $z_1.z_2 = 1$.

Ví dụ miền đơn diệp

$$D = \{z \in \mathbf{C}|\ |z| < 1\}.$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

1. Xác định các hằng số a, b, c sao cho các hàm số sau:

a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$,

b) $f(z) = \cos x(\text{ch}y + a\text{sh}y) + i\sin x(\text{ch}y + b\text{sh}y)$,

là hàm giải tích trong toàn mặt phẳng phức.

2. Tìm miền D trong đó hàm số $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ là hàm giải tích.

3. Giả sử $z = re^{i\varphi}$ và $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$. Viết phương trình Cauchy-Riemann trong toạ độ cực.

4. Cho hàm số xác định như sau:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2+y^2} & \text{nếu } z \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } z = 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng:

a) $f(z)$ liên tục tại $z = 0$.

b) $f(z)$ thoả mãn điều kiện Cauchy-Riemann tại $z = 0$, nhưng không khả vi tại điểm đó.

5. Chứng minh rằng hàm số $f(z) = \sqrt{|xy|}$ thoả mãn điều kiện Cauchy-Riemann tại $z = 0$, nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

6. Chứng minh rằng hàm số $f(z) = z\text{Re}z$ khả vi tại điểm $z = 0$, nhưng không giải tích tại điểm đó. Tính đạo hàm tại điểm $z = 0$.

7. Tìm ảnh của họ đường cong sau đây:

a) Họ đường tròn $x^2 + y^2 = ax$.

b) Họ đường tròn $x^2 + y^2 = by$.

c) Chùm đường thẳng song song $y = x + b$.

d) Chùm đường thẳng đi qua điểm $z = z_0$,

qua ánh xạ $w = \frac{1}{z}$.

8. Tìm ảnh của các miền sau

a) Góc phần tư thứ hai qua ánh xạ $w = \frac{z-i}{z+i}$.

b) Nửa hình tròn $\{z \in C| \ |z| < 1, \text{Re}z > 0\}$ qua ánh xạ $w = \frac{2z-i}{iz+2}$.

c) Vành tròn $\{z \in C| \ 1 < |z| < 3\}$ qua ánh xạ $w = \frac{z}{z-1}$.

9. Tìm các ánh xạ phân tuyến tính thoả điều kiện sau:

a) Điểm 1 và i bất động, điểm 0 biến thành điểm -1.

b) Điểm -1, 0, 1 lần lượt biến thành các điểm 1, i, -1.

c) Các điểm -1, $i, 1+i$ biến thành các điểm $i, \infty, 1$ tương ứng.

10. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến đường tròn đơn vị thành chính nó, hai điểm $z = \frac{1}{2}, z = 2$ là điểm bất động và điểm $z = \frac{5}{4} + i\frac{3}{4}$ biến thành điểm vô cùng.

11. Tìm dạng tổng quát của ánh xạ phân tuyến tính biến

a) Nửa mặt phẳng trên thành chính nó,

b) Nửa mặt phẳng trên thành nửa mặt phẳng trái.

12. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến đường tròn $\{z \in C| \ |z| = 2\}$ thành đường tròn $\{w \in C| \ |w+1| = 1\}$ và các điểm -2, 0 biến thành $0, i$ tương ứng.

13. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến nửa mặt phẳng trên $\{z \in C| \ \text{Im}z > 0\}$ thành hình tròn đơn vị $\{w \in C| \ |w| < 1\}$ sao cho:

a) $w(i) = 0, \arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}$.

b) $w(a+ib) = 0, \arg w'(a+ib) = 0$, trong đó $b > 0$.

14. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến hình tròn đơn vị thành chính nó sao cho:

a) $w(\frac{i}{2}) = 0, \arg w'(\frac{i}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

b) $w(a) = a, \arg w'(a) = \alpha$ trong đó α là một số thực.

15. Tìm ánh xạ bảo giác biến miền D thành miền D^*

a) $D = \{|z-2| < 1\}, D^* = \{|w-2i| < 2\}$ sao cho $w(2) = i$ và $\arg w'(2) = 0$.

b) $D = \{|z| < 1, |z-i| < 1\}, D^* = \{\text{Im}w > 0\}$.

c) $D = \{|z| < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}, D^* = \{\text{Im}w > 0\}$.

d) $D = \{|z| < 1, \text{Im}z > 0\}, D^* = \{\text{Im}w > 0\}$ sao cho $w(-1) = 0, w(0) = 1, w(1) = \infty$.

16. Tìm ánh xạ phân tuyến tính biến miền $D = \{|z-3| > 9, |z-8| < 16\}$, thành miền $D^* = \{w \in C| \ \rho < |w| < 1\}$. Hãy xác định ρ.

Chương 4
LÍ THUYẾT TÍCH PHÂN

§1. TÍCH PHÂN CỦA HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

1.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản.

Định nghĩa. Cho γ là đường cong Jordan, trơn từng khúc với hai đầu mút a, b. Trên γ cho hàm số $f(z)$. Chia γ thành n phần bởi các điểm chia $a = z_1, z_2, ..., z_{n+1} = b$ (các điểm chia được cho theo chiều tăng của tham số), trên mỗi cung $z_k z_{k+1}$ lấy điểm ζ_k bất kì $(k = 1, 2, ..., n + 1)$.

Lập tổng:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) \tag{1}$$

S_n gọi là tổng tích phân.

Nếu giới hạn của tổng tích phân trên tồn tại khi $d = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |z_{k+1} - z_k|$ dần về 0, không phụ thuộc vào cách chia đường cong γ và cách chọn ζ_k, thì giới hạn đó được gọi là tích phân của hàm $f(z)$ dọc theo đường cong γ. Kí hiệu:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_{k+1} - z_k) \tag{2}$$

Sự tồn tại của tích phân trên tương đương với sự tồn tại của tích phân của hai hàm số biến số thực.

Thật vậy, đặt:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y); z_k = x_k + iy_k;$$

$$\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k;$$

$$\zeta_k = \xi_k + i\eta_k; u_k = u(\xi_k, \eta_k); v_k = v(\xi_k, \eta_k).$$

Khi đó (1) có thể viết dưới dạng:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^{n} (u_k \Delta y_k + v_k \Delta x_k) \tag{3}$$

vế phải của (3) là tổng tích phân của các tích phân đường loại hai tương ứng. Sự tồn tại $\lim\limits_{d \to 0} S_n$, kéo theo sự tồn tại của các tổng tích phân ở vế phải và ta có:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i \int_\gamma udy + vdx. \tag{4}$$

Bây giờ nếu ta xem đường cong γ cho dưới dạng tham số, thì hàm $f(z)$ được biểu diễn dưới dạng hàm số phức của biến số thực

$$w(t) = f(z(t)) = \phi(t) + i\psi(t). \tag{5}$$

với điều kiện thích hợp của hàm f, ta có:

$$\int_\alpha^\beta w(t)dt = \int_\alpha^\beta \phi(t)dt + i \int_\alpha^\beta \psi(t)dt. \tag{6}$$

hoặc

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt. \tag{7}$$

trong đó $z(t) = \gamma(t)$ với $\gamma(\alpha) = a$ và $\gamma(\beta) = b$.

1.2 Ví dụ.

1) Tính tích phân sau $\int\limits_\gamma \overline{z}dz$,trong đó γ là đoạn thẳng nối $z = 0$ và $z = 2 + i$. Áp dụng công thức (4) ta có

$$\int\limits_\gamma \overline{z}dz = \int\limits_\gamma (xdx + ydy) + i\int\limits_\gamma (xdy - ydx)$$

Phương trình của γ là $y = \frac{x}{2}, x \in [0, 2]$. Suy ra

$$\int\limits_\gamma \overline{z}dz = \int_0^2 (xdx + \frac{x}{2}\frac{dx}{2}) + i\int_0^2 (x\frac{dx}{2} - \frac{x}{2}dx) = \frac{5}{4}\int_0^2 xdx = \frac{5}{2}$$

2) Tính tích phân sau $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a}$ với γ là đường tròn tâm a bán kính r. Phương trình tham số của γ là

$$z = \gamma(t) = a + re^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

Áp dụng công thức (7), ta có

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}dt} = 2\pi i.$$

1.3 Các tính chất cơ bản.

1) Giả sử γ^+ là đường cong γ với hướng dương cho trước (thường người ta cho theo chiều tăng của tham số) còn γ^- là γ với hướng ngược lại. Khi đó

$$\int\limits_{\gamma^-} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma^+} f(z)dz$$

2) Nếu f và g là các hàm số liên tục trên đường cong γ và a, b là các hằng số phức thì

$$\int\limits_\gamma (af(z) + bg(z))dz = a\int\limits_\gamma f(z)dz + b\int\limits_\gamma g(z)dz \tag{8}$$

3) Giả sử γ_1, γ_2 là hai đường cong Jordan trơn, sao cho $\gamma_k(t)$ xác định trên $[\alpha_k, \beta_k]$, $(k = 1, 2)$ và $\beta_1 = \alpha_2$. Khi đó với $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, ta có:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

4) Đối với hàm f bất kì, liên tục trên γ trơn, ta luôn luôn có

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz\right| \leq \int_{\gamma} |f(z)||dz|$$

trong đó $|dz| = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ là vi phân cung.

§2. TÍCH PHÂN CAUCHY

2.1. Bổ đề Goursat.

Nếu $w = f(z)$ là hàm liên tục trên miền đơn liên D và γ là đường cong Jordan, trơn, kín chứa trong D thì với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại đa giác $P \subset D$, có các đỉnh nằm trên γ sao cho

$$\left|\int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\partial P} f(z)dz\right| < \varepsilon$$

trong đó ∂P là biên của đa giác P.

Chứng minh. Gọi D_1 là miền sao cho $\gamma \subset \overline{D_1} \subset D$ và l là độ dài cung của γ. Do f liên tục trên $\overline{D_1}$ nên f liên tục đều trên $\overline{D_1}$, nghĩa là: với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $z_1, z_2 \in \overline{D_1}$ mà $|z_1 - z_2| < \delta$ kéo theo $|f(z_1) - f(z_2)| < \frac{\varepsilon}{2l}$.

Chia đường cong γ thành n cung nhỏ $\gamma_k (k = 1, 2, ..., n)$ bởi các điểm chia $z_1, z_2, ..., z_n$ sao cho $d(\gamma_k) < \delta_1 < \delta$, trong đó $d(\gamma_k)$ là đường kính của γ_k, nghĩa là

$$d(\gamma_k) = \max_{z, z' \in \gamma_k} |z - z'|;$$

δ_1 là số được chọn sao cho $P \subset D$ (P là đa giác với các đỉnh là $z_1, z_2, ..., z_n$). Khi đó ta có:

$$\Big|\int_\gamma f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k\Big| \le \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} |f(z) - f(z_k)||dz| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tương tự

$$\Big|\int_{\partial P} f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} f(z_k)\Delta z_k\Big| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vậy

$$\Big|\int_\gamma f(z)dz - \int_{\partial P} f(z)dz\Big| < \varepsilon.$$

2.2. Định lí Cauchy.

Như chúng ta đã biết, tích phân đường loại hai

$$\int_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{9}$$

nói chung phụ thuộc vào dạng đường cong γ nối hai điểm (x_0, y_0) và (x_1, y_1). Tuy nhiên khi cho $P(x,y)$ và $Q(x,y)$ thêm một số điều kiện nào đó thì (9) chỉ phụ thuộc vào (x_0, y_0) và (x_1, y_1) mà không phụ thuộc vào dạng của đường cong γ.

Điều kiện đó là: các hàm P, Q phải có các đạo hàm riêng cấp một liên tục và các đạo hàm đó phải thoả mãn hệ thức:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ với mọi } (x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2.$$

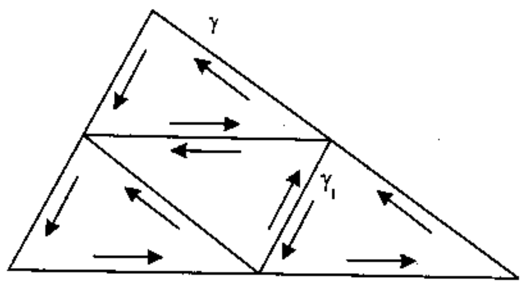
Bây giờ đối với hàm số biến số phức, ta xét xem với điều kiện nào của hàm $f(z)$ thì $\int\limits_\gamma f(z)dz$ không phụ thuộc vào dạng của đường cong, mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối của đường cong. Nội dung của định lí Cauchy sẽ trả lời câu hỏi này.

Định lí Cauchy. Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên, hữu hạn D. Khi đó với mọi đường cong Jordan, trơn (hoặc trơn từng khúc), kín γ chứa trong D, ta có:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Chứng minh. Giả sử γ là biên của tam giác Δ, ta chứng minh:

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$



Hình 6

Đặt

$$M = \left|\int_\gamma f(z)dz\right|.$$

Chia tam giác Δ thành 4 tam giác bằng nhau, ta có:

$$M = \left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \sum_{k=1}^{4}\left|\int_{\gamma_k} f(z)dz\right|$$

trong đó γ_k là biên của các tam giác mới.

Từ bất đẳng thức trên, suy ra tồn tại một tam giác mà ta kí hiệu Δ_1 sao cho

$$\Big|\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz\Big| \geq \frac{M}{4}$$

với $\gamma_1 = \partial\Delta_1$

Tiếp tục quá trình như trên ta được một dãy các tam giác$\{\Delta_n\}$ sao cho

$$\Delta \supset \Delta_1 \supset ... \supset \Delta_n \supset ...$$

với chu vi bằng độ dài cung của γ chia cho 2^n. Gọi số đó là $\frac{l}{2^n}$ và

$$\Big|\int\limits_{\gamma_n} f(z)dz\Big| \geq \frac{M}{4^n}$$

Theo định lí dãy hình cầu đóng lồng vào nhau với đường kính dần về 0, ta có:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n = \{z_0\}.$$

Vì hàm $f(z)$ giải tích tại $z_0 \in D$ nên với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $z \in D$ mà $|z - z_0| < \delta$ kéo theo

$$|\alpha(z)| = \Big|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\Big| < \varepsilon.$$

Hay

$$f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0) = (z - z_0)\alpha(z),$$

trong đó $\lim\limits_{z \to z_0} \alpha(z) = 0$.

Hơn nữa

$$\int\limits_{\gamma_n} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_n} f(z)dz + (z_0 f'(z_0) - f(z_0))\int\limits_{\gamma_n} dz - f'(z_0)\int\limits_{\gamma_n} zdz$$

$$= \int\limits_{\gamma_n} f(z)dz - f(z_0)\int\limits_{\gamma_n} dz - f'(z_0)\int\limits_{\gamma_n} (z - z_0)dz.$$

(Vì tích phân của hàm $g_1(z) = 1$ và $g_2(z) = z$ trên γ_n đều bằng không.)

Mặt khác, với n đủ lớn ta luôn luôn có:

$$\Delta_n \subset \{z \in \mathbf{C} \| z - z_0| < \delta\}.$$

Khi đó:

$$\frac{M}{4^n} \leq \Big|\int\limits_{\gamma_n} f(z)dz\Big| = \Big|\int\limits_{\gamma_n} \alpha(z)(z - z_0)dz\Big| \leq \int\limits_{\gamma_n} |\alpha(z)||z - z_0||dz| < \frac{\varepsilon l^2}{4^n}.$$

Từ bất đẳng thức trên ta suy ra $M = 0$.

Vậy

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Nếu γ là biên của một đa giác P, thì ta chia đa giác đó thành các hình tam giác và do tính định hướng của các biên của các tam giác, ta suy ra:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(z)dz = 0$$

trong đó γ_k là biên của tam giác.

Nếu γ là đường cong kín bất kì, thì dùng bổ đề Goursat, ta được:

$$\Big|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\Big| = \Big|\int\limits_{\gamma} f(z)dz - \int\limits_{\partial P} f(z)dz\Big| < \varepsilon$$

Vậy

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

2.3. Định lí Cauchy mở rộng trên biên.

Nếu $f(z)$ là hàm giải tích trên miền đơn liên, hữu hạn D và liên tục trên biên của miền D, thì $\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát ta giả sử miền D có tính chất: Tồn tại điểm $z_0 \in D$ sao cho mọi tia xuất phát từ điểm z_0

chỉ cắt biên của D tại một điểm. Và ta có thể giả sử $z_0 = 0$. Khi đó ∂D có phương trình:

$$z = z(t) = r(t)e^{it},\ t \in [0, 2\pi]$$

Gọi γ_λ là đường cong có phương trình: $\zeta = \lambda z(t),\ \lambda \in (0, 1)$. Theo định lí Cauchy, ta có: $\int\limits_{\gamma_\lambda} f(\zeta)d\zeta = 0$.

Suy ra

$$\int\limits_{\partial D} f(\lambda z)d\lambda z = \lambda \int\limits_{\partial D} f(\lambda z)dz = 0$$

hay

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = \int\limits_{\partial D} (f(z) - f(\lambda z))dz.$$

Vì $f(z)$ liên tục trên $\overline{D} = D \cup \partial D$ nên nó liên tục đều trên đó, nghĩa là: với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $z, \zeta \in \overline{D}$ mà

$$|z - \zeta| < \delta \quad \text{ta có} \quad |f(z) - f(\zeta)| < \frac{\varepsilon}{l}.$$

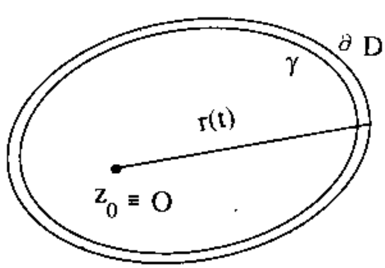
Suy ra

$$\left|\int\limits_{\partial D} f(z)dz\right| \leq \int\limits_{\partial D} |f(z) - f(\lambda z)||dz| < \varepsilon$$

(Chọn λ sao cho $\lambda > 1 - \frac{\delta}{r}, r = \max\limits_{t \in [0, 2\pi]} r(t)$).

Vậy

$$\int\limits_{\partial D} f(z)dz = 0$$

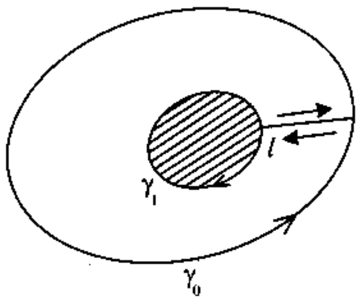


Hình 7

2.4. Định lí Cauchy cho miền đa liên.

Giả sử $f(z)$ giải tích trên miền D hữu hạn, đa liên với biên là $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup ... \cup \gamma_n$ và $f(z)$ liên tục trên $\overline{D} = \gamma \cup D$. Khi đó $\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Chứng minh. Để đơn giản mà không mất tính tổng quát, ta đưa về trường hợp miền nhị liên với biên là $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_1$



Hình 8

Nối γ_0 với γ_1 bởi đoạn l. Khi đó trên miền $D^* = D \backslash l$ hàm f(z) thoả mãn điều kiện của định lí Cauchy suy rộng trên biên, nên:

$$\int_{\partial D^*} f(z)dz = 0, \quad \text{trong đó} \quad \partial D^* = \gamma_0 \cup l^+ \cup \gamma_1 \cup l^-$$

Suy ra

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz + \int_{l^+} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{l^-} f(z)dz = 0$$

Vậy

$$\int_{\gamma_0 \cup \gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

2.5. Công thức tích phân Cauchy.

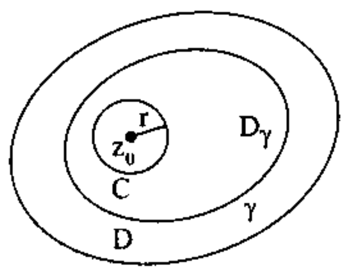
Định lí. Giả sử $f(z)$ giải tích trong miền hữu hạn đơn liên D và $z_0 \in D$, còn γ là đường cong Jordan, trơn, kín bất kì bao quanh z_0 và nằm trong D. Khi đó ta có công thức tích phân Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Hơn nữa, nếu $f(z)$ liên tục trên biên của D thì với mọi $z \in D$; ta có:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Chứng minh. Gọi D_γ là miền giới hạn bởi đường cong γ. Theo giả thiết $z_0 \in D_\gamma$. Chọn $r > 0$ khá bé sao cho $\overline{B}_r = \{|z - z_0| \leq r\} \subset D_\gamma$. Gọi D^* là miền giới hạn bởi γ và C là đường tròn tâm z_0 bán kính r.



Hình 9

Theo định lí Cauchy, ta có:

$$\int\limits_{\gamma \cup C^-} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta = 0.$$

Hay

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int\limits_{C} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta. \quad (10)$$

Xét

$$\left| \int\limits_{C} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| \leq \int\limits_{C} \left| \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \right| |d\zeta|. \quad (11)$$

Do hàm f giải tích tại z_0, nên:

$$\frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0}$$

bị chặn trong lân cận của z_0, nghĩa là: $\left|\frac{f(\zeta)-f(z_0)}{\zeta-z_0}\right| \leq M$, với r đủ bé.Từ (11) suy ra:

$$\left|\int\limits_C \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta\right| \leq 2M\pi r$$

vì r bé tuỳ ý và do (10), nên:

$$\left|\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta\right| = 0$$

hay

$$\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int\limits_\gamma \frac{f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Mặt khác ta có:

$$\int\limits_\gamma \frac{f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta = \int\limits_C \frac{f(z_0)}{\zeta - z_0} d\zeta = f(z_0)2\pi$$

Vậy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Mệnh đề thứ hai được suy ra từ mệnh đề thứ nhất bằng cách áp dụng định lí Cauchy mở rộng cho biên.

Chú ý.

1) Nếu γ không bao quanh z_0 thì $\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = 0$.

2) Công thức tích phân Cauchy vẫn đúng cho miền đa liên, hữu hạn.

§3. TÍCH PHÂN LOẠI CAUCHY

Tích phân loại Cauchy nói lên rằng giá trị tại một điểm $z_0 \in D$ của hàm giải tích phụ thuộc vào giá trị trên biên. Tuy nhiên hàm $f(z)$ không đòi hỏi giải tích trên biên mà chỉ cần liên tục mà thôi. Vì vậy vấn đề tự nhiên được đặt ra là phải nghiên cứu tính chất của hàm xác định bởi hệ thức sau:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{12}$$

trong đó l là đường cong Jordan, trơn (hoặc trơn từng khúc).φ là hàm liên tục trên l. Hàm $F(z)$ xác định bởi (12) gọi là tích phân loại Cauchy.

Tích phân loại Cauchy có tính chất sau:

3.1.Định lí. Nếu $\varphi(\zeta)$ liên tục trên đường cong Jordan, trơn l thì tích phân loại Cauchy là một hàm giải tích trên $C\backslash l$ và có đạo hàm

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta. \tag{13}$$

Hơn nữa $F(z)$ có đạo hàm mọi cấp và

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_l \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \tag{14}$$

Để chứng minh định lí trên ta dùng bổ đề sau:

Bổ đề. Giả sử $\zeta = \xi + i\eta \in l$ và $z = x + iy \in D \subset C\backslash l$. Giả sử nếu với mọi $\zeta \in l$ hàm $\Psi(\zeta, z)$ giải tích trên D; $\Psi(\zeta, z)$ và $\frac{\partial \Psi}{\partial z}(\zeta, z)$ liên tục trên $l \times D$, thì

$$F(z) = \int_l \Psi(\zeta, z) d\zeta. \tag{15}$$

là hàm giải tích trên D và có đạo hàm là

$$F'(z) = \int_l \frac{\partial \Psi}{\partial z}(\zeta, z) d\zeta. \tag{16}$$

Chứng minh. Đặt

$$\Psi(\zeta, z) = u(\xi, \eta, x, y) + iv(\xi, \eta, x, y)$$

$$F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$$

Theo định nghĩa tích phân, từ (15) ta có:

$$U(x, y) = \int_l ud\xi - vd\eta \tag{17}$$

$$V(x, y) = \int_l vd\xi + ud\eta \tag{18}$$

Theo giả thiết $\frac{\partial\Psi}{\partial z}$ liên tục, suy ra $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ liên tục theo các biến ξ, η, x, y.

Vì vậy đối với các công thức (17) và (18) ta có thể lấy vi phân theo x và y dưới dấu tích phân. Ta có:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int_l \frac{\partial u}{\partial x}d\xi - \frac{\partial v}{\partial x}d\eta = \int_l \frac{\partial v}{\partial y}d\xi + \frac{\partial u}{\partial y}d\eta = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_l \frac{\partial u}{\partial y}d\xi - \frac{\partial v}{\partial y}d\eta = -\int_l \frac{\partial v}{\partial x}d\xi + \frac{\partial u}{\partial x}d\eta = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Vậy $F(z)$ giải tích trên D. Hơn nữa $F'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}$

$$F'(z) = \int_l (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})d\xi + (-\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial x})d\eta$$

$$= \int_l (\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x})(d\xi + id\eta) = \int_l \frac{\partial\Psi}{\partial z}(\zeta, z)d\zeta$$

Bổ đề được chứng minh.

Bây giờ ta chuyển sang chứng minh định lí.

Đặt

$$\Psi_k(\zeta, z) = \frac{(k-1)!\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^k}, \quad k \in N, \forall\zeta \in l, \forall z \in D \subset C\backslash l.$$

Hàm Ψ_k thoả mãn điều kiện của bổ đề, nên ta có:

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}(\zeta, z)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta$$

và

$$\begin{aligned} F^{(n)}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\partial \Psi_n}{\partial z}(\zeta, z)d\zeta \\ &= \frac{n!}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta \end{aligned}$$

Hệ quả. Nếu $f(z)$ giải tích trên miền đơn liên D có biên là γ, thì nó có đạo hàm mọi cấp và đạo hàm của nó cho bởi biểu thức

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta.$$

3.2. Nguyên hàm của hàm số biến số phức.

Từ định lí Cauchy ta có hệ quả sau:

Hệ quả. Nếu $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D và $z_0, z \in D$, thì tích phân $\Phi(z_0, z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, chỉ phụ thuộc vào z_0 và z mà không phụ thuộc vào dạng của đường cong nối chúng và nằm trong D. Khi cố định z_0 thì $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ là hàm của biến số z. Hơn nữa $F(z)$ cũng là hàm giải tích. Điều này được chứng minh trong định lí sau:

Định lí. Giả sử $f(z)$ liên tục trên miền đơn liên D và với mọi đường cong Jordan, trơn, kín γ chứa trong D, ta đều có $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Khi đó với $z_0 \in D$ cố định, hàm $F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ là hàm giải tích trên D và $F'(z) = f(z)$.

Chứng minh. Theo giả thiết $\int_\gamma f(z)dz = 0$, $\forall \gamma \subset D$.

Suy ra $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$, xác định một hàm trên D. Với mọi $z \in D$, ta xét:

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta$$

Mặt khác $\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} d\zeta = 1$.

Suy ra:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}(f(\zeta)-f(z))d\zeta\right|$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}|f(\zeta)-f(z)||d\zeta| \tag{19}$$

Do f liên tục trên D nên $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ sao cho $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$; với mọi $\zeta \in D$ mà $|\zeta - z| < \delta$.

Chọn Δz sao cho $|\Delta z| < \delta$ từ (19) ta có:

$$\left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z}\epsilon|d\zeta| = \epsilon.$$

Vậy

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

Hay

$$F'(z) = f(z).$$

Định nghĩa. Hàm $F(z)$ được gọi là nguyên hàm của hàm $f(z)$ trên D nếu $F'(z) = f(z)$ với mọi $z \in D$. Nếu $F(z)$ là một nguyên hàm của $f(z)$ thì

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta = F(z_2) - F(z_1)$$

Đây là công thức Newton-Leibniz.

Ví dụ. Tính tích phân sau: $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$.

Hàm dưới dấu tích phân giải tích tại mọi điểm $z \neq 0$, vì vậy tích phân này có nghĩa với mọi $z \neq 0$ và khi đường lấy tích phân không đi qua điểm $z = 0$. Nếu đường lấy tích phân không bao quanh điểm $z = 0$, nghĩa là $-\pi \leq \arg z \leq \pi$, thì hàm $F(z)$ là hàm đơn trị giải tích và ta có: $lnz = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad -\pi \leq \arg z < \pi$. Trong trường hợp $z = x > 0$, ta có: $lnx = \int_1^x \frac{du}{u}$. Nếu đường lấy tích phân bao quanh điểm $z = 0$, thì ta nhận được $F(z)$ là hàm đa trị $Lnz = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$.

3.3. Định lí đảo của định lí Cauchy (định lí Morera).

Nếu hàm $f(z)$ liên tục trong miền đơn liên D và tích phân $\int_\gamma f(z)dz$ dọc theo mọi đường cong Jordan, trơn, kín chứa trong D đều bằng 0 thì hàm $f(z)$ giải tích trong D.

Chứng minh. Đặt

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \text{ với } z, z_0 \in D.$$

Theo định lí trên, hàm $F(z)$ giải tích trên D và $F'(z) = f(z)$

Từ hệ quả của tích phân loại Cauchy, suy ra $f(z)$ là hàm giải tích trên D.

3.4. Hàm điều hoà.

Định nghĩa. Hàm số thực $u(x,y)$; xác định trên miền D và có đạo hàm riêng cấp hai liên tục, thoả mãn điều kiện

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{20}$$

gọi là hàm điều hoà.

Phương trình đạo hàm riêng (20) gọi là phương trình Laplace.

Toán tử vi phân

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{21}$$

gọi là toán tử Laplace.

Trước đây, theo hệ quả của tích phân loại Cauchy ta đã chứng minh được rằng: nếu hàm $w = f(z)$ giải tích trên D thì tại mọi $z \in D$, hàm số f(z) có đạo hàm mọi cấp. Từ đó suy ra các đạo hàm riêng

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y},$$

liên tục và

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

cũng có đạo hàm liên tục.

Hơn nữa, vì $f(z)$ giải tích trên D, nên ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{22}$$

Vậy

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{23}$$

và

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{23'}$$

Hệ thức (23) chứng tỏ phần thực và phần ảo của hàm số giải tích là các hàm điều hoà.

Hai hàm điều hoà u, v thoả mãn hệ thức (22) được gọi là hàm liên hợp điều hoà.

Vì vậy ta có thể xác định được hàm số phức $w = f(z)$ giải tích trên miền D, khi biết phần thực (hay phần ảo) của nó là hàm điều hoà. Chẳng hạn, khi biết hàm phần thực $u(x, y)$, ta có thể xác định hàm $f(z)$ như sau:

$$f(z) = u(x, y) + i\int_{z_0}^{z} (-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy) + C.$$

§4. MỘT SỐ ĐỊNH LÍ QUAN TRỌNG VỀ HÀM GIẢI TÍCH

4.1. Định lí giá trị trung bình.

Giả sử $f(z)$ giải tích trong miền D và hình tròn $\overline{B}_R = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0| \leq R\} \in D$. Khi đó giá trị $f(z_0)$ bằng trung bình cộng các giá trị của nó trên đường tròn $C_R = \{z \in \mathbf{C} \mid |z - z_0|\}$, nghĩa là:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi})d\varphi = \frac{1}{2\pi R}\int_{C_R} f(\zeta)ds \tag{1}$$

trong đó ds là vi phân cung.

Chứng minh. Theo công thức tích phân Cauchy, ta có:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta. \tag{2}$$

vì $\zeta \in C_R$, nên ta có thể viết:

$$\zeta = z_0 + Re^{i\varphi},\ \varphi \in [0, 2\pi]$$

do đó $d\zeta = iRe^{i\varphi} d\varphi$.

Thế vào (2) ta được:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi}} iR^{i\varphi} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Hơn nữa $ds = Rd\varphi$, nên:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R} f(\zeta) ds.$$

4.2. Nguyên lí mođun cực đại.

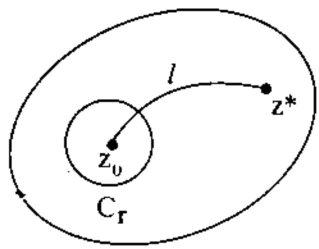
Giả sử $f(z)$ giải tích trên miền D và liên tục trên $\overline{D}$. Nếu $f(z) \neq const$ thì $|f(z)|$ đạt cực đại trên biên của D.

Chứng minh. Hàm $g(z) = |f(z)|$ liên tục trên $\overline{D}$ nên nó đạt cực đại trên $\overline{D}$, nghĩa là $\exists z_0 \in \overline{D}$, sao cho $|f(z_0)| = \max\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)|$.

Đặt $M = |f(z_0)|$. (xem hình trang 90)

Giả sử $z_0 \in D$. Khi đó tồn tại hình cầu mở $B_r(z_0)$ có tâm z_0 và bán kính r, sao cho: $\overline{B}_r = B_r \bigcup C_r \subset D$. Từ định lí về giá trị trung bình, ta có:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi.$$



Hình 10

Hay

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})| d\varphi. \tag{3}$$

Vì

$$|f(z_0)||f(z)|, \quad \forall z \in C_r,$$

nên

$$0 \leq \int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z)|) d\varphi \leq 2\pi |f(z_0)| - \int_0^{2\pi} |f(z)| d\varphi. \tag{4}$$

$$0 \leq |f(z_0)| - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\varphi})| d\varphi. \tag{5}$$

Từ (3), (4), (5) suy ra:

$$|f(z)| = |f(z_0)| = M, \quad \forall z \in C_r.$$

Lập luận tương tự cho các điểm nằm trên C_{r_1} với $0 < r_1 < r$, ta có: $|f(z)| = M$, trên $\overline{B}_r$.

Giả sử z^* là điểm bất kì nằm trên D. Nối z_0 với z^* bởi đường gấp khúc $l \subset D$ với $d(l, \partial D) = d > 0$ (khoảng cách giữa hai tập hợp).

Lấy hình tròn bán kính $r' < d$ có tâm chạy trên l từ z_0 đến z^*. Vì l là tập compact trong C, nên có một họ hữu hạn các hình tròn bán kính r' phủ nó. Vì vậy với lập luận như trên ta được:

$$|f(z^*)| = M.$$

Do đó: $f(z) = const$ trên D.

Mặt khác

$$f(z) = |f(z)|e^{iargf(z)} = M(\cos\theta(x,y) + i\sin\theta(x,y)).$$

Do $f(z)$ giải tích trong D, nên:

$$\frac{\partial}{\partial x}(M\cos\theta(x,y)) = \frac{\partial}{\partial y}(M\sin\theta(x,y))$$

và

$$\frac{\partial}{\partial x}(M\sin\theta(x,y)) = -\frac{\partial}{\partial y}(M\cos\theta(x,y)).$$

Hay

$$-\sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$\cos\theta\frac{\partial\theta}{\partial x} = \sin\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$\cos\theta\sin\theta\big[(\frac{\partial\theta}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\theta}{\partial y})^2\big] = 0. \tag{6}$$

Đẳng thức (6) đúng với mọi θ, suy ra:

$$\frac{\partial\theta(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial\theta(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Vậy

$$\theta(x,y) = const.$$

Từ đó suy ra $f(z) = const$ trên D, trái với giả thiết. Điều đó chứng tỏ $z_0 \in \partial D$.

Chú ý.

1) Cho hàm $f(z)$ giải tích trên D và liên tục trên $\overline{D}$. Nếu $f(z) \neq 0$, với mọi $z \in D$ và $f(z) \neq const$ thì $|f(z)|$ đạt cực tiểu trên biên. Nếu

ta bỏ giả thiết $f(z) \neq 0$ thì $|f(z)|$ không đạt cực tiểu trên biên. Ví dụ $f(z) = z$, trên miền $D = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$. $|f(z)|$ đạt cực tiểu tại $z = 0$ thuộc D.

2) Nếu miền D không bị chặn thì định lí trên không còn đúng nữa. Ví dụ $f(z) = e^z$ trên $D = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Re}z > 0\}$. Hàm $|f(z)|$ không đạt cực đại trên biên vì $|f(z)| = 1$, với mọi z thuộc biên.

4.3. Bổ đề Schwartz.

Cho hàm $f(z)$ giải tích trong hình tròn đơn vị $U = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ và liên tục trên $\overline{U} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| \leq 1\}$.
Nếu hàm $f(z)$ thoả mãn:

$f(0) = 0$; $\quad |f(z)| < 1$, với $|z| < 1$,
thì $|f(z)| \leq |z|$, với mọi $|z| \leq 1$ và $f'(0) \leq 1$.
Nếu tồn tại $z_0 \in U, z_0 \neq 0$ mà $|f(z_0)| = |z_0|$, hay $f'(0) = 1$,
thì $|f(z)| = |z|, \forall z \in U$ và $f(z) = e^{i\alpha}z, \alpha \in \mathbf{R}$.

Chứng minh. Xét hàm số

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{nếu } z \neq 0 \\ f'(0), & \text{nếu } z = 0. \end{cases}$$

Rõ ràng $\varphi(z)$ liên tục trên U, và giải tích tại mọi $z \in U \backslash \{0\}$. Ta có:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)}{t} dt = f(0) = 0.$$

Từ đó suy ra:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t}\right) f(t) dt = \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)}{t(t - z)} dt.$$

Hay

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)}{t(t - z)} dt.$$

Do $\varphi(z)$ liên tục trên $\overline{U}$ nên $\frac{f(z)}{z}$ giải tích trên U (theo định lí tích phân loại Cauchy). Từ nguyên lí mođun cực đại, suy ra: $|\varphi(z)|$ đạt cực đại trên biên, nghĩa là:

$$\max_{z\in\overline{U}}|\varphi(z)| = \max_{|z|=1}\left|\frac{f(z)}{z}\right| = \max_{|z|=1}|f(z)|.$$

Do $|f(z)| < 1$, với $|z| < 1$ và $f(z)$ liên tục trên $\overline{U}$ nên $|f(z)| \leq 1$ với mọi $z \in \overline{U}$.

Vậy

$$\max_{|z|=1}|f(z)| \leq 1.$$

Hay

$$|\varphi(z)| \leq 1, \quad \text{với mọi } z \in \overline{U}.$$

Suy ra

$$|f(z)| \leq |z|, \quad \forall z \in \overline{U}.$$

Nếu tồn tại $z_0 \in U$ mà $z_0 \neq 0$ sao cho $|f(z_0)| = |z_0|$. Khi đó ta có $|\varphi(z_0)| = 1,\ z_0 \in U$

Theo nguyên lí mođun cực đại

$$|\varphi(z)| = 1,\ \text{với mọi } z \in \overline{U}$$

Hay

$$|f(z)| = |z|$$

nghĩa là `

$$f(z) = e^{i\alpha}z,\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

4.4. Định lí Liouville.

Nếu hàm $f(z)$ giải tích và bị chặn trên toàn mặt phẳng phức thì $f(z) = const$.

Chứng minh. Lấy z bất kì trong $\mathbf{C}$, khi đó theo hệ quả của tích phân loại Cauchy

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad R > 0.$$

Theo giả thiết $|f(z)| \leq M, \forall z \in \mathbf{C}$. Suy ra

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta - z| = R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} |d\zeta|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta - z| = R} \frac{M}{R^2} |d\zeta| \leq \frac{M}{R}$$

dần về không, khi R dần về vô cùng; nghĩa là $f'(z) = 0$.

Vậy $f(z) = const$ trên $\mathbf{C}$.

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

1. Giả sử γ là một đường cong Jordan trơn, kín giới hạn một miền D. Chứng minh rằng:

a. $\int\limits_{\gamma} x dz = iS$;

b. $\int\limits_{\gamma} y dz = -S$;

c. $\int\limits_{\gamma} \bar{z} dz = 2iS$.

trong đó S là diện tích của miền D.

2. Tính tích phân:

$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$, trong đó γ là các đường cong sau đây:

a. Nửa đường tròn: $\{z \in \mathbf{C} | |z| = 1, Imz \leq 0\}$, $\sqrt{1} = 1$.

b. Nửa đường tròn: $\{z \in \mathbf{C} | |z| = 1, Imz \leq 0\}$, $\sqrt{1} = -1$.

c. Đường tròn: $\{z \in \mathbf{C} | |z| = 1\}$, $\sqrt{-1} = i$.

3. Tính tích phân:

a. $\int\limits_{\gamma} \frac{\sin z}{z+i} dz$, trong đó γ cho bởi phương trình $\gamma(t) = -i + 3e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

b. $\int\limits_{\gamma} \frac{1}{z^2+i} dz$, trong đó γ cho bởi phương trình $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

c. $\int\limits_{\gamma} \frac{e^z}{z^2-1} dz$, trong đó γ cho bởi phương trình $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

d. $\int\limits_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2-\pi^2} dz$, trong đó γ cho bởi phương trình $\gamma(t) = 4e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Chứng minh rằng

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} < \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}$$

5. Tính tích phân

$\int\limits_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1} dz$, trong đó $a > 1$.

6. Tính tích phân:

a. $\int\limits_{\gamma} \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz$

b. $\int\limits_{\gamma} \frac{e^z}{z(z^2-a^2)} dz$

trong đó γ là đường tròn $\{z \in \mathbf{C} \,|\, |z-a| = \frac{3}{2}a\}$

7. Tính tích phân

$\int\limits_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-1)^3} dz$, trong đó γ là đường cong Jordan, trơn, kín giới hạn một miền D và phân biệt 3 trường hợp:

a. D chứa điểm $z = 0$ và không chứa điểm $z = 1$;

b. D chứa điểm $z = 1$ và không chứa điểm $z = 0$;

c. D chứa cả hai điểm $z = 0$ và $z = 1$.

8. Chứng minh rằng:

$$\int\limits_{|z|=1} e^z d\bar{z} = -2\pi i.$$

9. Cho hàm số hai biến số thực $u(x, y)$ xác định trong miền D. Hàm số u được gọi là hàm điều hoà trong miền đó nếu nó khả vi liên tục

đến cấp 2 và thoả mãn điều kiện:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

a. Chứng minh rằng mọi hàm giải tích trong D đều có hàm phần thực và hàm phần ảo là hàm điều hoà.

b. Chứng minh rằng mọi hàm phần thực u điều hoà trong miền đơn liên D đều là phần thực của một hàm giải tích nào đó trong D.

10. Tìm hàm giải tích $f(z)$nếu:

a. $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y) + 2\sin x\mathrm{sh}y + x^3 - 3xy^2 + y.$

b. $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2.$

c. $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y) - \frac{y}{x^2+y^2}.$

d. $v(x,y) = \cos x\mathrm{sh}y - \mathrm{sh}x\sin y.$

e. $v(x,y) = (x^2 - y^2) + x - 2y.$

Chương 5
LÍ THUYẾT CHUỖI VÀ LÍ THUYẾT THẶNG DƯ

§1. CHUỖI TAYLOR

1.1. Định lí Weierstrass

Nếu chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ hội tụ đều và hàm f_n giải tích trên miền D với mọi $n \in \mathbf{N}$ thì tổng f của chuỗi hàm cũng là một hàm giải tích trên miền D và

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z). \tag{1}$$

Chứng minh. Theo Định lí 2 Chương 2 thì hàm f liên tục trên D.

Lấy γ là đường cong Jordan, trơn, kín chứa trong miền D. Đặt $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$.

Theo giả thiết chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ hội tụ đều về hàm $f(z)$ nên dãy S_n hội tụ đều về hàm f trên D. Suy ra : $\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall\, n \in \mathbf{N}, n > n_0$ sao cho:

$$\left| \int_\gamma f(z)dz - \int_\gamma S_n(z)dz \right| \leq \int_\gamma |f(z) - S_n(z)||dz| < \epsilon l$$

trong đó l là độ dài của γ.

Chuyển qua giới hạn, ta có:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma S_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

Mặt khác, vì $S_n(z)$ giải tích trên $D, \forall n \in \mathbf{N}$, nên theo định lí Cauchy

$$\int_\gamma S_n(z)dz = 0, \text{ với mọi } n \in \mathbf{N}.$$

Vậy $\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$.

Theo Định lí Morera hàm $f(z)$ giải tích trên miền D.

Bây giờ ta chứng minh đẳng thức (1). Với z_0 bất kì thuộc D, lấy đường cong Jordan, trơn, kín bao quanh điểm z_0 sao cho $z_0 \in D_\gamma \subset D$($D_\gamma$ là miền giới hạn bởi đường cong γ).

Gọi $d = \min\limits_{\zeta\in\gamma}|\zeta - z_0| > 0$. Đặt $\varphi(\zeta) = \frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$, $\zeta \in \gamma$.

Ta có $|\varphi(\zeta)| \le \frac{1}{d^{n+1}}$, $\zeta \in \gamma$. Theo giả thiết $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ hội tụ đều về hàm $f(z)$ trên D, nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$ hội tụ đều về $\frac{f(z)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$ trên γ, do đó ta có thể lấy tích phân từng số hạng và nhân cho $\frac{k!}{2\pi i}$, ta được:

$$\frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f_n(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}}.$$

Theo công thức tích phân loại Cauchy, ta có:

$$f^{(k)}(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z_0).$$

Vì z_0 lấy tuỳ ý trong D, nên ta cũng có:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z),\ \forall z \in D.$$

Chú ý. Trong định lí trên ta chứng minh được tính chất lấy đạo hàm từng số hạng của chuỗi tại các điểm $z \in D$, chứ không phải tại các điểm $z \in \overline{D}$ và ta đã sử dụng $d = d(\gamma, z) > 0$. Ví dụ sau chứng tỏ đối với $z \in \overline{D}$ định lí này không còn đúng nữa.

Ví dụ. Cho chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

Chuỗi này hội tụ đều trên miền $\{|z| \le 1\}$, và mọi số hạng của nó đều là các hàm giải tích trên $\{|z| \le 1\}$. Tuy nhiên chuỗi các đạo hàm của nó là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ lại phân kì tại điểm $z = 1$.

1.2. Định lí Taylor

Bây giờ ta xét chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ (2)
có bán kính hội tụ là R.

Gọi $f(z)$ là tổng của chuỗi. Theo Định lí Weierstrass hàm $f(z)$ giải tích trong mọi hình tròn $\{|z-z_0| < R_1 < R\}$ và có thể lấy đạo hàm từng số hạng, nghĩa là:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)...(n-k+1)c_n(z-z_0)^{n-k}.$$

Khi $z = z_0$, suy ra $f(z_0) = c_0$, $f'(z_0) = c_1$, $f''(z-z_0) = 2!c_2, \ldots, f^{(n)}(z_0) = n!c_n$ hay

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Như vậy (2) cho ta:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Chuỗi luỹ thừa (2) với hệ số xác định bởi các đạo hàm (3) gọi là chuỗi Taylor.

Đặc biệt, khi $z_0 = 0$ ta có chuỗi Maclaurin.

Ngược lại, nếu $f(z)$ là giải tích trên D thì vấn đề đặt ra là có thể khai triển hàm này thành chuỗi hàm luỹ thừa hội tụ về $f(z)$ trên miền D hay không? Định lí sau đây sẽ trả lời câu hỏi đó.

Định lí Taylor. Nếu $f(z)$ giải tích trong hình tròn $\{|z-z_0| < R\}$ thì $f(z)$ khai triển được thành chuỗi Taylor trong hình tròn đó.

Chứng minh. Giả sử với bất kì $z \in \{|z-z_0| < R\}$. Lấy số thực R_1 sao cho $0 < R_1 < R$ và $z \in \{|z-z_0| \le qR_1\}$, trong đó $0 < q < 1$. Gọi γ là đường tròn $\{|\zeta - z_0| = R_1\}$.

Theo công thức tích phân Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Mặt khác, ta lại có:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z}}.$$

Vì $|z - z_0| < |\zeta - z_0|$ nên ta có:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \qquad (4)$$

Nếu cố định z trong hình tròn $\{|z - z_0| < R\}$ thì chuỗi hàm $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ hội tụ đều trên γ, nên ta có thể lấy tích phân từng số hạng của (4), suy ra:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(\zeta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta(z - z_0)^n,$$

trong đó: $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Vậy $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, trong đó các hệ số c_n được xác định bởi đạo hàm của hàm $f(z)$.

1.3. Chuỗi Taylor của các hàm số sơ cấp cơ bản

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{\alpha} z^n,$$

trong đó α là số thực dương và

$$\binom{n}{\alpha} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}.$$

1.4. Không-điểm và định lí duy nhất của hàm giải tích

a) Không-điểm. Điểm z_0 được gọi là không-điểm của hàm $f(z)$ nếu $f(z_0) = 0$.

Giả sử z_0 là không-điểm của hàm giải tích $f(z)$. Khi đó khai triển Taylor của hàm $f(z)$ trong lân cận của điểm z_0 có dạng:

$$f(z) = f'(z_0)(z-z_0) + ... + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + ...$$

Nếu hàm $f(z)$ không đồng nhất bằng 0 trong lân cận của điểm z_0 thì tồn tại ít nhất một hệ số c_n trong khai triển Taylor khác 0. Chỉ số bé nhất trong các hệ số khác 0 này được gọi là cấp của không-điểm z_0.

Như vậy trong lân cận của điểm z_0 (không-điểm cấp n) có khai triển Taylor

$$f(z) = c_n(z-z_0)^n + c_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + ...$$

với hệ số $c_n \neq 0$, $\ n > 1$.

Rõ ràng, cấp của không-điểm z_0 cũng là cấp bé nhất làm cho $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Do đó nếu hàm $f(z)$ giải tích và nhận z_0 làm không-điểm cấp n thì hàm $f(z)$ được viết dưới dạng:

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

trong đó $\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z - z_0) + \ldots$ giải tích trong lân cận của điểm z_0 và $\varphi(z_0) \neq 0$.

Do $\varphi(z)$ liên tục nên $\varphi(z) \neq 0$ trong một lân cận của điểm z_0. Ta có thể phát biểu thành định lí sau:

Định lí. Cho hàm $f(z)$ giải tích trong lân cận của điểm z_0 và nhận z_0 làm không-điểm. Nếu $f(z)$ không đồng nhất bằng không trong lân cận nào đó của điểm z_0, thì tồn tại một lân cận $V(z_0)$ sao cho trong lân cận đó hàm $f(z)$ chỉ nhận z_0 là không-điểm duy nhất.

b) Định lí về sự duy nhất của hàm giải tích

Định lí. Nếu hai hàm $f_1(z)$ và $f_2(z)$ giải tích trong miền D và giá trị của chúng trùng nhau tại một dãy điểm $\{z_n\}, z_n \in D$, hội tụ về $z_0 \in D$ thì

$$f_1(z) = f_2(z), \quad \forall z \in D.$$

Chứng minh. Đặt $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$. Khi đó $f(z_n) = 0$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Do hàm $f(z)$ liên tục, suy ra $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0) = 0$. Theo Định lí 4.a hàm $f(z) = 0$ trong lân cận nào đó của điểm z_0.

Gọi E là tập hợp tất cả các điểm trong của tập hợp các không-điểm của hàm $f(z)$. Khi đó, $z_0 \in E$, nghĩa là $E \neq \emptyset$. Ta có E là tập hợp mở (theo định nghĩa của tập hợp E) và $E \subseteq D$.

Giả sử $E \neq D$. Khi đó $\exists b \in \partial E \cap D$. Do $b \in \partial E$ nên tồn tại dãy $\{b_n\} \subset E$, $b_n \longrightarrow b$. Suy ra $\lim\limits_{n \to \infty} f(b_n) = f(b) = 0$.

Theo định lí trên b là điểm trong của E, mâu thuẫn với b là điểm biên.

Vậy $E = D$, nghĩa là hàm $f(z) = 0$, $\forall z \in D$ hay $f_1(z) = f_2(z)$, $\forall z \in D$.

Chú ý:

1. Dãy $\{z_n\}$ trong giả thiết của định lí phải hội tụ về điểm z_0 là điểm trong của miền D.

Ví dụ. Xét hàm $f_1(z) = \sin\frac{1}{z}$ giải tích trên $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ và hàm $f_2(z) = 0$. Ta thấy $f_1(z_n) = f_2(z_n)$, $z_n = \frac{1}{n\pi} \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$, nhưng dãy $z_n \longrightarrow 0$ không thuộc $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Rõ ràng $\sin\frac{1}{z} \neq 0$ trên $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.

2. Định lí về sự duy nhất khẳng định tính duy nhất về sự thác triển của hàm giải tích lên các miền.

Ví dụ. Xét hàm $f_1(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$ giải tích trên $\mathbf{C}$. Vì hàm $f_2(z) = 1$ trùng với $f_1(z)$ trên toàn trục số thực, nên ta có $f(z) = 1$ trên $\mathbf{C}$ hay $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ trên $\mathbf{C}$.

3. Định lí về sự duy nhất nói lên sự khác nhau cơ bản giữa hàm giải tích phức và hàm biến số thực.

Ví dụ. Xét hàm

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Hàm này khả vi trên $\mathbf{R}$ và có đạo hàm

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Tương tự ta có $f^{(n)}(0) = 0$ với mọi $n \in \mathbf{N}$.

Tuy nhiên hàm $f(x)$ không đồng nhất bằng không trong một lân cận nào của điểm không.

§2. CHUỖI LAURENT

Chuỗi Taylor là một công cụ giúp ta nghiên cứu hàm số trong lân cận của một điểm nào đó, mà tại điểm đó hàm số là giải tích. Tuy nhiên ta có những hàm không giải tích. Khi đó chuỗi Taylor không thể sử dụng được, do vậy ta phải dùng một công cụ khác. Đó là chuỗi Laurent mà ta sẽ nghiên cứu sau đây.

2.1. Định lí Laurent. Cho hàm $f(z)$ giải tích trong vành $K = \{r < |z - z_0| < R\}$ trong đó $0 \leq r < R \leq +\infty$.

Chọn r_1 và R_1 sao cho $r < r_1 < R_1 < R$ và q thoả mãn điều kiện $0 < q < 1$. Xét vành $K_1 = \{\frac{r_1}{q} < |z - z_0| < qR_1\}$. Ta có thể biểu diễn hàm $f(z)$ theo công thức tích phân Cauchy như sau: lấy $z \in K_1$, ta có

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \tag{5}$$

trong đó $\gamma_{R_1} = \{|\zeta - z_0| = R_1\}$ và $\gamma_{r_1} = \{|\zeta - z_0| = r_1\}$.

Lấy $\zeta \in \gamma_{R_1}$, ta có $|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}| < 1$.

Vậy

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \tag{6}$$

Vì chuỗi (6) hội tụ đều về hàm $\frac{1}{\zeta - z}$ trên γ_{R_1} nên ta có thể lấy tích phân từng số hạng. Suy ra:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \tag{7}$$

trong đó

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta. \tag{8}$$

Tương tự, ta có:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} \tag{9}$$

trong đó

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}d\zeta. \tag{10}$$

Vậy

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \tag{11}$$

trong đó

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad n = 0, 1, 2, \ldots \text{và}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}} d\zeta \quad n = -1, -2, \ldots$$

Theo định lí Cauchy cho miền đa liên ta có thể thay đường tròn γ_{R_1} và γ_{r_1} bởi đường tròn $\gamma = \{|\zeta - z_0| = r'\}$ trong đó $r_1 < r' < R_1$. Khi đó các hệ số c_n được xác định như sau:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{12}$$

Khai triển (11) với hệ số xác định bởi (12) được gọi là khai triển Laurent của hàm $f(z)$. Chuỗi ở vế phải của (11) được gọi là chuỗi Laurent.

Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ được gọi là phần đều,

và chuỗi $\sum_{-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n$ gọi là phần chính của chuỗi Laurent.

Theo định lí Abel phần đều của chuỗi Laurent hội tụ trong hình tròn $\{|z - z_0| < R\}$ hơn nữa chuỗi này hội tụ đều trong mọi hình tròn $\{|z - z_0| < qR\}$ $(0 < q < 1)$. Phần chính hội tụ ngoài hình tròn $\{|z - z_0| > r\}$, hơn nữa nó hội tụ đều ngoài hình tròn $\{|z - z_0| > \frac{r}{q}\}$.

Như vậy ta có kết quả sau:

Định lí Laurent. Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong vành

$$K = \{r < |z - z_0| < R\} \quad (0 \le r < R \le \infty)$$

thì có thể khai triển hàm $f(z)$ thành chuỗi Laurent và chuỗi này hội tụ đều trong mọi miền đóng chứa trong K.

Chứng minh. Theo trên

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

với $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Chuỗi này hội tụ đều trong miền đóng $\overline{K'} \subset K$.

Bây giờ giả sử hàm $f(z)$ biểu diễn thành chuỗi như sau:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Ta hãy xác định các hệ số của chuỗi này. Theo định lí Abel chuỗi hàm hội tụ đều về hàm $f(z)$ trong miền đóng $\overline{K'}$($\overline{K'}$ là miền bất kì chứa trong vành K). Vì vậy chuỗi $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{(z-z_0)^n}{(z-z_0)^{k+1}}$ hội tụ đều về hàm $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}$, $k \in \mathbf{Z}$ trên γ (trong đó γ là đường cong Jordan trơn kín bao quanh điểm z_0 chứa trong miền K') và ta có thể lấy tích phân từng số hạng, nghĩa là:

$$\int\limits_\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_\gamma \frac{(z - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Sử dụng kết quả

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \neq 1 \\ 2\pi i & \text{nếu } n = 1. \end{cases}$$

Ta suy ra

$$\int\limits_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = 2\pi i c_k.$$

Vậy

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Ví dụ. Cho hàm $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$. Ta khai triển $f(z)$ thành chuỗi Laurent trong vành $K = \{1 < |z| < 2\}$.

Ta có

$$\frac{1}{z - 2} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}, \quad |z| < 2$$

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} = \sum_{k=-1}^{-\infty} z^k, \quad |z| > 1.$$

Vậy

$$f(z) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}} - \sum_{k=-1}^{-\infty} z^k. \quad 1 < |z| < 2.$$

2.2. Bất đẳng thức Cauchy

Giả sử $f(z)$ giải tích trong vành K. Khi đó hàm $f(z)$ bị chặn trên đường tròn $\gamma = \{|z - z_0| = \rho\} \subset K$. Do đó

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

trong đó $M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|$.

§3. ĐIỂM BẤT THƯỜNG CÔ LẬP

Chuỗi Laurent cho phép chúng ta nghiên cứu dễ dàng hơn các hàm giải tích trong lân cận của điểm nào đó mà tại điểm đó hàm mất tính giải tích. Điểm như vậy gọi là điểm bất thường cô lập.

3.1. Định nghĩa. Điểm $z_0 \in \mathbf{C}$ được gọi là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ nếu tồn tại một lân cận thủng $\{z \in \mathbf{C} |\ 0 < |z - z_0| < R\}$ của điểm z_0 sao cho tại lân cận này hàm f giải tích.

Ví dụ

1) Hàm $f(z) = \frac{1}{z-1}$ nhận điểm $z = 1$ làm điểm bất thường cô lập.

2) Hàm $f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$ nhận các điểm $z = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbf{Z}$ làm điểm bất thường cô lập. Tuy nhiên điểm $z = 0$ là điểm bất thường không cô lập, vì trong bất kì lân cận nào của điểm $z = 0$ đều có chứa điểm bất thường khác không.

3.2. Phân loại. Có ba loại điểm bất thường cô lập:

1) Điểm z_0 là bất thường bỏ được nếu $\lim_{z \to z_0} f(z) \neq \infty$.

2) Điểm z_0 là cực điểm nếu $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$.

3) Điểm z_0 là bất thường cốt yếu nếu hàm $f(z)$ không có giới hạn khi z dần về z_0.

Ví dụ.

1) Hàm số $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ nhận điểm $z = 0$ làm điểm bất thường bỏ được vì

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

2) Hàm số $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ nhận điểm $z = 0$ làm cực điểm vì

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z}{z} = \infty.$$

1) Hàm số $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ nhận điểm $z = 0$ làm điểm bất thường cốt yếu.

Thật vậy, ta có:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{\substack{z\to 0\\ y=0,x>0}} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$$

và

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{\substack{z\to 0\\ y=0,x<0}} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Điều này chứng tỏ $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ không tồn tại.

3.3. Sự liên hệ giữa chuỗi Laurent và điểm bất thường cô lập.

Định lí: Cho $z_0 \in \mathbf{C}$ là điểm bất thường cô lập của hàm số $f(z)$ và khai triển Laurent của hàm $f(z)$ trong lân cận thủng của z_0 là:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{13}$$

Khi đó 3 mệnh đề sau là đúng:

1) Điểm z_0 là bất thường bỏ được nếu và chỉ nếu phần chính của chuỗi (13) bằng 0.

2) Điểm z_0 là cực điểm nếu và chỉ nếu phần chính của chuỗi (13) chỉ có một số hữu hạn số hạng (không kể các số hạng bằng 0).

3) Điểm z_0 là bất thường cốt yếu nếu và chỉ nếu phần chính của chuỗi (13) có vô số số hạng khác 0.

Chứng minh.

1) Giả sử $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$. Khi đó

$$|f(z)| \leq M = \sup_{z \in V} |f(z)|$$

trong đó $V = \{z \in \mathbf{C} | \ 0 < |z - z_0| < R\}$.

Ta có

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = R_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad 0 < R_1 < R.$$

Lấy mođun hai vế ta được:

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta - z_0| = R_1} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{M}{R_1^n}.$$

Khi $n < 0$ và $R_1 \to 0$ thì $c_n \to 0$.

$$\text{Vậy} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Ngược lại, giả sử $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Vì chuỗi đã cho hội tụ đều trong hình tròn bán kính R_1 (với $R_1 < R$-bán kính hội tụ của chuỗi). Chuyển qua giới hạn ta được:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z \to z_0} c_n (z - z_0)^n = c_0 \neq \infty.$$

Vậy z_0 là điểm bất thường bỏ được.

2) Giả sử z_0 là cực điểm cấp n của hàm $f(z)$ (nghĩa là hàm $\frac{1}{f(z)}$ nhận z_0 làm 0-điểm cấp n.)

Đặt

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{nếu } z \neq z_0 \\ 0 & \text{nếu } z = z_0. \end{cases}$$

Vì hàm $f(z)$ giải tích trong lân cận thủng của điểm z_0 nên $g(z)$ giải tích trong lân cận thủng của điểm z_0. Suy ra hàm $g(z)$ có thể biểu diễn dưới dạng:

$$g(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$$

trong đó hàm $\varphi(z)$ là hàm giải tích và $\varphi(z_0) \neq 0$. Do $\varphi(z)$ liên tục, nên $\varphi(z) \neq 0$ trong lân cận của điểm z_0.

Vậy $f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^n \varphi(z)}$.

Hàm $\varphi(z)$ giải tích và $\varphi(z) \neq 0$, nên hàm $\frac{1}{\varphi(z)}$ giải tích trong lân cận của điểm z_0. Khi đó khai triển Taylor của hàm $\frac{1}{\varphi(z)}$ sẽ là:

$$\frac{1}{\varphi(z)} = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

$$= c_{-n} + c_{-n+1}(z - z_0) + c_{-n+2}(z - z_0)^2 + \ldots$$

trong đó $c_{-n} = a_0 \neq 0$.

Vậy

$$f(z) = c_n(z - z_0)^{-n} + \ldots + c_{-1}(z - z_0)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k.$$

Ngược lại, giả sử $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$. Khi đó:

$$\varphi(z) = (z - z_0)^n f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k(z - z_0)^{k+n}.$$

Chuyển qua giới hạn ta được:

$$\lim_{z \to z_0} \varphi(z) = c_{-n} \neq 0.$$

Vậy

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n} = \infty.$$

3) Mệnh đề 3 được suy ra từ hai mệnh đề trên.

Chứng minh.

1) Giả sử $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A \neq \infty$. Khi đó

$$|f(z)| \leq M = \sup_{z\in V}|f(z)|$$

trong đó $V = \{z \in \mathbf{C} |\ 0 < |z - z_0| < R\}$.

Ta có

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta - z_0| = R_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad 0 < R_1 < R.$$

Lấy mođun hai vế ta được:

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta - z_0| = R_1} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} |d\zeta| \leq \frac{M}{R_1^n}.$$

Khi $n < 0$ và $R_1 \to 0$ thì $c_n \to 0$.

$$\text{Vậy} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Ngược lại, giả sử $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$. Vì chuỗi đã cho hội tụ đều trong hình tròn bán kính R_1 (với $R_1 < R$-bán kính hội tụ của chuỗi). Chuyển qua giới hạn ta được:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{z\to z_0} c_n(z - z_0)^n = c_0 \neq \infty.$$

Vậy z_0 là điểm bất thường bỏ được.

2) Giả sử z_0 là cực điểm cấp n của hàm $f(z)$ (nghĩa là hàm $\frac{1}{f(z)}$ nhận z_0 làm 0-điểm cấp n.)

Đặt

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{nếu } z \neq z_0 \\ 0 & \text{nếu } z = z_0. \end{cases}$$

§4. LÍ THUYẾT THẶNG DƯ

4.1. Khái niệm thặng dư.

Cho hàm số $f(z)$ giải tích trong lân cận của điểm $z_0 \in \mathbf{C}$ (có thể trừ điểm z_0). Ta gọi thặng dư của hàm số $f(z)$ tại điểm z_0 (z_0 là điểm bất thường cô lập) là số phức:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz \tag{14}$$

trong đó $\gamma := \{|z - z_0| = r\}$, r là số dương đủ bé. Kí hiệu

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz.$$

Ta chứng minh định nghĩa trên là hợp lí.

Giả sử r_1, r_2 là hai số dương đủ bé để $\gamma_1 := \{|z - z_0| = r_1\}$, $\gamma_2 := \{|z - z_0| = r_2\}$ chứa trong V (lân cận thủng của điểm z_0) $r_1 < r_2$, theo định lí Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Vậy giá trị thặng dư không phụ thuộc vào đường tròn γ.

Khi $z_0 = \infty$ và $f(z)$ giải tích trong lân cận của điểm vô cùng, thặng dư được định nghĩa như sau:

$$\mathrm{Res}(f, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^-} f(z)dz \tag{15}$$

trong đó $\gamma^- := \{|z| = R\}$ là đường tròn với bán kính R đủ lớn có chiều cùng chiều kim đồng hồ.

4.2. Cách tính.

Từ định lí Laurent ta suy ra:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = c_{-1} \tag{16}$$

$$\text{Res}(f, \infty) = -c_{-1} \tag{17}$$

Ví dụ. Tính thặng dư của hàm $f(z) = \frac{1}{z}$ tại điểm $z = 0$ và $z = \infty$. Ta có $\text{Res}(f, 0) = 1$ và $\text{Res}(f, \infty) = -1$.

Tuy nhiên, việc tính thặng dư dựa vào khai triển Laurent nhiều lúc gặp phải những khó khăn nhất định. Do đó với z_0 là cực điểm ta có cách tính sau:

a) Giả sử $f(z)$ nhận z_0 làm cực điểm đơn. Khi đó ta có:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Suy ra

$$c_{-1} = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0).$$

b) Nếu $f(z)$ có dạng $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ trong đó $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$ thì theo (17), ta có:

$$c_{-1} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\lim_{z \to z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi(z_0)}. \tag{18}$$

c) Nếu $f(z)$ nhận điểm z_0 làm cực điểm cấp n $(n \geq 1)$ thì khi đó $f(z)$ có khai triển Laurent có dạng:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{19}$$

Nhân hai vế của (19) cho $(z - z_0)^n$ và lấy đạo hàm đến cấp $(n-1)$, sau đó chuyển qua giới hạn ta được:

$$c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \tag{20}$$

Ví dụ.

1. Tính thặng dư của hàm $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ tại $z = 1$.

Ta có:

$$\text{Res}(f, 1) = \lim_{z \to 1} (z - 1) f(z) = 1.$$

2. Tính thặng dư của hàm $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+1}$ tại $z = i$.
Ta có:

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = i.$$

Ta cũng có thể dùng công thức (19) để tính thặng dư tại điểm $z = i$.

$$\text{Res}(f, i) = \frac{\varphi(i)}{\psi'(i)} = \frac{-2}{2i} = i.$$

3. Tính thặng dư của hàm $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ tại $z = i$.
Ta có:

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}[(z-i)^3 f(z)]"$$

Tính

$$[(z-i)^3 f(z)]" = [\frac{1}{(z+i)^3}]" = \frac{12}{(z+i)^5}.$$

Vậy

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5} = -\frac{3}{16}i.$$

4.3. Các định lí cơ bản về thặng dư.

a) Định lí Cauchy. Giả sử hàm số $f(z)$ giải tích trong miền D trừ một số hữu hạn điểm bất thường cô lập. Khi đó mọi đường Jordan trơn kín nằm trong D, giới hạn một miền G chứa tất cả các điểm a_k thì ta có:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, a_k). \tag{21}$$

Chứng minh. Gọi γ_k là các đường tròn $\{|z-a_k| = r_k\}$. Với r_k đủ bé sao cho các hình tròn $\overline{B}_k = \{|z-a_k| \leq r_k\} \subset G$ và $\overline{B}_k \cap \overline{B}_{k'} = \emptyset$.

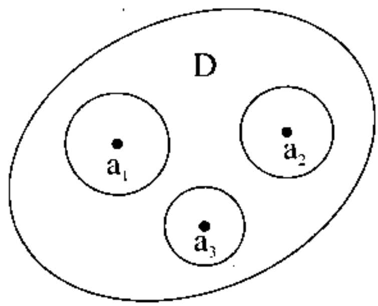
Đặt $G^* = G \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B}_k$. Xét hàm $f(z)$ trên G^*, theo định lí Cauchy ta có:

$$\int_{\partial G^*} f(z)dz = 0.$$

Mặt khác $\int\limits_{\partial G^*} f(z)dz = \int\limits_{\gamma \cup (\bigcup\limits_{k=1}^{n} \gamma_k^-)} f(z)dz.$

Suy ra

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k).$$



Hình 11

Ví dụ. Tính tích phân $\int_\gamma \frac{z}{z^4-1}dz$, trong đó $\gamma := \{|z-2| = 2\}$. Theo định lí Cauchy về thặng dư, ta có:

$$\int\limits_{\gamma} \frac{z}{z^4-1}dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, 1) = 2\pi i \frac{1}{4} = \frac{\pi i}{2}$$

b) Định lí thặng dư toàn phần. Giả sử $f(z)$ giải tích trong toàn mặt phẳng phức trừ một số hữu hạn điểm bất thường cô lập a_k $(k = 1, 2, ..., n)$. Điểm $z = \infty$ được xem là điểm bất thường cô lập. Khi đó tổng thặng dư của chúng bằng không, nghĩa là:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0. \tag{22}$$

Chứng minh. Ta chọn đường tròn $\gamma := \{|z| = R\}$ đủ lớn sao cho mọi điểm bất thường cô lập a_k $(k = 1, 2, ..., n)$ thuộc hình tròn $\{|z| < R\}$. Theo định lí Cauchy về thặng dư ta có:

$$\mathrm{Res}(f, a_k) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k) = -\int_{\gamma^-} f(z)dz.$$

Theo định nghĩa của thặng dư ở vô cùng, ta có:

$$\int_{\gamma^-} f(z)dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, \infty).$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k) + \mathrm{Res}(f, \infty) = 0.$$

Ví dụ. Tính tích phân sau $\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^4+1}dz.$

Theo định lí Cauchy về thặng dư, ta có:

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z^4+1}dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} \mathrm{Res}(f, a_k)$$

Áp dụng định lí thặng dư toàn phần

$$2\pi i \sum_{k=1}^{4} \mathrm{Res}(f, a_k) = -2\pi i \mathrm{Res}(f, \infty).$$

Mặt khác vì hệ số c_{-1} trong khai triển Laurent ở lân cận điểm $z = \infty$ của hàm số $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ bằng 0 nên $\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z^4+1}dz = 0.$

Định lí Cauchy về thặng dư là một trong những định lí quan trọng của lí thuyết hàm biến phức. Định lí đó chỉ đúng trong trường hợp khi trên biện γ không chứa điểm bất thường của hàm $f(z)$. Tổng quát hơn, ta xét trường hợp biên γ có chứa cực điểm đơn của hàm $f(z)$.

Giả sử hàm số $f(z)$ giải tích trong miền $D_\gamma \subset D$ trừ một số hữu hạn điểm bất thường cô lập $a_1, a_2, ..., a_n$ và giải tích trên γ trừ một số hữu hạn điểm bất thường cô lập $b_1, b_2, ..., b_m$ (hàm f giải tích trên γ nghĩa là f giải tích trong miền chứa γ).

Gọi γ_k, $k = 1, 2, ..., m$ là đường tròn tâm b_k bán kính r đủ bé sao cho mỗi đường tròn γ_k chỉ cắt γ tại hai điểm.

Đặt $\quad B(b_k, r) = \gamma \cap \{\ |z - b_k| \leq r\},\ k = 1, 2, ..., m;$

$$\gamma(r) = \gamma \setminus \bigcup_{k=1}^{m} B(b_k, r).$$

Để xét mối liên hệ giữa giá trị của tích phân và các điểm bất thường nói trên, ta đưa vào một khái niệm mới.

Giá trị chính.

Định nghĩa. Giới hạn của tích phân

$$\int_{\gamma} f(z)dz, \quad \text{khi } r \longrightarrow 0$$

được gọi là **giá trị chính** của tích phân $\int_{\gamma} f(z)dz$ theo Cauchy; kí hiệu

$$\text{v.p} \int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{r \to 0} \int_{\gamma(r)} f(z)dz.$$

Định lí. Giả sử $f(z)$ là một hàm giải tích trên miền D trừ một số hữu hạn điểm bất thường cô lập $a_1, a_2, ..., a_n$. Giả sử trên biên trơn γ của miền $D_\gamma \subset D$ hàm $f(z)$ chỉ có một số hữu hạn cực điểm đơn $a_1, a_2, ..., a_m$ $(m \leq n)$.

Khi đó giá trị chính của tích phân $\int_{\gamma} f(z)dz$ tồn tại và được xác định bởi

$$\text{v.p} \int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \Big[\sum_{a_j \in D_\gamma} \text{Res}[f, a_j] + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \text{Res}[f, a_k] \Big].$$

Chứng minh. Ta kí hiệu các điểm bất thường cô lập của hàm f trong $\overset{\circ}{D}_\gamma$ là $b_1, b_2, ..., b_p$. Chọn r đủ bé sao cho các điểm $b_1, b_2, ..., b_p$ không nằm trên các đường tròn $\gamma_k = \{\ |z - a_k| = r\},\ k = 1, 2, ..., m.$

Đặt $\quad C(a_k, r) = D_\gamma \cap \gamma_k,$

là cung tròn chạy theo hướng âm, và

$$\gamma^*(r) = \gamma(r) \cup [\bigcup_{k=1}^{m} C(a_k, r)].$$

Xét miền D^* là miền có biên là γ^*. Áp dụng Định lí Cauchy về thặng dư cho hàm $f(z)$ trên miền D^*, ta có

$$\int\limits_{\gamma^*(r)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \text{Res}[f, b_k].$$

Mặt khác, ta có

$$\int\limits_{\gamma^*(r)} f(z)dz = \int\limits_{\gamma(r)} f(z)dz + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{C(a_k,r)} f(z)dz.$$

Từ hai đẳng thức trên, ta có

$$\int\limits_{\gamma(r)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \text{Res}[f, b_k] + \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{C^+(a_k,r)} f(z)dz.$$

Vì $a_1, a_2, ..., a_m$ là cực điểm đơn của hàm f. Theo định lí về mối liên hệ giữa chuỗi Laurent và điểm bất thường cô lập, trong lân cận của điểm a_k hàm $f(z)$ viết được dưới dạng

$$f(z) = \frac{c_{-1,k}}{z - a_k} + \phi_k(z),$$

trong đó hàm $\phi_k(z)$ giải tích trong lân cận của điểm a_k.

Khi đó ta có

$$\int\limits_{C^+(a_k,r)} f(z)dz = c_{-1,k} \int\limits_{C^+(a_k,r)} \frac{dz}{z - a_k} + \int\limits_{C^+(a_k,r)} \phi_k(z)dz.$$

Chuyển qua giới hạn đẳng thức trên, khi r dần về 0, ta có

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{C^+(a_k,r)} f(z)dz = c_{-1,k}\pi i = \pi i \text{Res}[f, a_k].$$

Vậy

$$\text{v.p}\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\Big[\sum_{a_j\in D_\gamma}\text{Res}[f,a_j] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\text{Res}[f,a_k]\Big].$$

Chú ý. Định lí trên vẫn còn đúng khi γ là đường trơn từng khúc.

4.4. Ứng dụng của lí thuyết thặng dư

a) Tính tích phân của các hàm số lượng giác

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta \tag{23}$$

trong đó R là hàm hữu tỉ theo $\sin\theta$ và $\cos\theta$.

Đặt $z = e^{i\theta}$, $dz = izd\theta$, $\cos\theta = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})$. Do đó (23) có dạng:

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = \int_{|z|=1} R_1(z)dz \tag{24}$$

trong đó $R_1(z) = -\frac{i}{z}R[\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})]$ là hàm hữu tỉ theo z.

Theo định lí Cauchy về thặng dư, ta có :

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}[R_1,a_k] \tag{25}$$

trong đó a_k là các điểm bất thường cô lập của hàm $R_1(z)$ trong hình tròn đơn vị.

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$I = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}, \quad 0<p<1.$$

Theo (24) ta có:

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz[1 - p(z + \frac{1}{z}) + p^2]}$$
$$= i \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{pz^2 - (p^2+1)z + p}.$$

$$I = i \int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{p(z-p)(z-\frac{1}{p})}$$
$$= -2\pi \mathrm{Res}[\frac{1}{pz^2 - (p^2+1)z + p}; p].$$

Vậy $I = \frac{2\pi}{1-p^2}$.

Ví dụ 2. Tính tích phân

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b\cos x)^2}, \quad 0 < b < a.$$

Ta có

$$I = \int\limits_{|z|=1} \frac{4b^2 z dz}{i(b^2 z^2 + 2abz + b^2)^2}$$
$$= -i \int\limits_{|z|=1} \frac{4b^2 z dz}{(bz + a - \sqrt{a^2-b^2})^2 (bz + a + \sqrt{a^2 - b^2})^2}.$$

Hay

$$I = -i \int\limits_{|z|=1} \frac{4z dz}{b^2 (z - z_1)^2 (z - z_2)^2},$$

trong đó $z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2-b^2}}{b}$ và $z_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

Theo (24) ta có:

$$I = 2\pi \mathrm{Res}[\frac{4z}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}; z_1].$$

Vậy $\quad I = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$.

b) Tính tích phân của hàm giảm nhanh trên phần vô hạn.

1) Trường hợp hàm số không có điểm bất thường trên trục thực.

Bổ đề 1. Giả sử

i) Hàm $f(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng trên ($\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$) trừ một số điểm bất thường cô lập $a_1, a_2, ..., a_n$.

ii) Trên nửa đường tròn bán kính R nằm trong nửa mặt phẳng trên, kí hiệu là $\delta(R) = \{z \in \mathbf{C} : |z| = R, \mathrm{Im} z \geq 0\}$, bất đẳng thức sau được thoả mãn:

$|f(z)| < \frac{M}{R^{1+\delta}}$, trong đó M và δ là các hằng số dương. Khi đó:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\delta(R)} f(z)dz = 0.$$

Chứng minh. Với mọi $z \in \delta(R)$ ta có thể viết $z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$. Suy ra

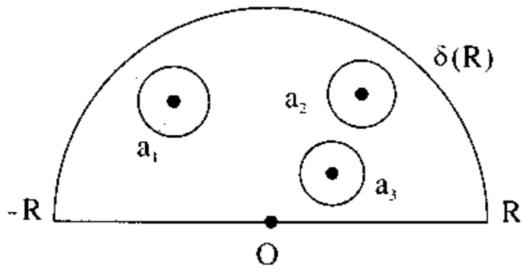
$$\Big|\int\limits_{\delta(R)} f(z)dz\Big| \leq \int\limits_0^\pi |f(z)|Rd\theta \leq \frac{RM}{R^{1+\delta}} \int\limits_0^\pi d\theta = \frac{M\pi}{R^\delta}.$$

Vậy $\quad \lim_{R\to\infty} \int\limits_{\delta(R)} f(z)dz = 0.$

Định lí. Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng trên ($\{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$) trừ một số điểm bất thường cô lập $a_1, a_2, ..., a_n$ và $|f(z)| < \frac{M}{R^{1+\delta}}$ trên $\delta(R)$. Khi đó ta có công thức:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a_k) \tag{26}$$

Chứng minh. Vẽ nửa đường tròn tâm O bán kính R đủ lớn sao cho các điểm a_k $(k = 1, 2, ..., n)$ thuộc miền D giới hạn bởi $[-R, R]$ và cung tròn $\delta(R)$.



Hình 12

Theo định lí Cauchy về thặng dư, ta có:

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\delta(R)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, a_k).$$

Theo Bổ đề 1 khi $R \to \infty$ ta có

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(f, a_k).$$

Ví dụ 1. Tính tích phân

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Giải. Đặt $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Thác triển hàm $f(x)$ lên mặt phẳng phức ta được hàm $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, hàm này giải tích trong nửa mặt phẳng trên trừ điểm $z = i$. Áp dụng công thức (26) ta được:

$$I = 2\pi i \text{Res}(f, i) = \pi.$$

Ví dụ 2. Tính tích phân

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

Giải. Đặt $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^3}$. Thác triển hàm $f(x)$ lên mặt phẳng phức ta được hàm $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^3}$, hàm này giải tích trong nửa mặt phẳng trên trừ điểm $z = i$. Áp dụng công thức (26) ta được:

$$I = 2\pi i \mathrm{Res}(f, i) = 2\pi i(-\frac{3}{16}i) = \frac{3\pi}{8}.$$

Bổ đề 2 (Jordan) Giả sử hàm số $f(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng trên $(\{\mathrm{Im}z > 0\})$ trừ một số hữu hạn điểm bất thường cô lập $a_1, ..., a_n$. Giả sử mođun của hàm $f(z)$ dần đều về 0 khi mođun của z dần ra vô cùng. Khi đó với mọi số thực dương α, ta có:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\delta(R)} e^{i\alpha z} f(z)dz = 0$$

trong đó $\delta(R) = \{|z| = R, \mathrm{Im}z \geq 0\}$.

Chứng minh. Theo giả thiết ta có: $|f(z)| \leq M(R)$ với mọi z sao cho khi $|z| = R($ với R đủ lớn) và $M(R) \to 0$ khi $R \to \infty$.

Đặt $z = Re^{i\theta}$ ta có thể biểu diễn

$$\int_{\delta(R)} e^{i\alpha z} f(z)dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}) e^{i\alpha R(\cos\theta + i\sin\theta)} Rie^{i\theta} d\theta.$$

Lấy mođun hai vế ta được

$$
\begin{aligned}
\Big|\int\limits_{\delta(R)} e^{i\alpha z} f(z)dz\Big| &\le R\int\limits_0^{\pi} |f(z)| e^{-\alpha R\sin\theta} d\theta \\
&\le 2RM(R)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\sin\theta} d\theta \\
&\le 2RM(R)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R\frac{2}{\pi}} d\theta \qquad (27) \\
&\le -\frac{\pi M(R)}{\alpha} e^{-\alpha R\frac{2}{\pi}\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\le \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{e^{\alpha R}})M(R). \qquad (28)
\end{aligned}
$$

ta có bất đẳng thức (27) nhờ vào bất đẳng thức $\sin\theta > \frac{2}{\pi}\theta$ khi $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Chuyển qua giới hạn khi R dần ra vô cùng vế phải của bất đẳng thức (28) dần về không.

Vậy $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\delta(R)} e^{i\alpha z} f(z)dz = 0$.

Ví dụ 3. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2}dx$, $(a > 0)$.

Giải. Đặt $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$. Khi đó $|f(z)| \le \frac{1}{R^2-a^2} \to 0$, khi $R \to \infty$. Theo Bổ đề Jordan

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\delta(R)} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}dz = 0.$$

Suy ra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{a^2+x^2}dx = 2\pi i \mathrm{Res}[\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}; ia] = 2\pi i\frac{e^{-a}}{2ia} = \frac{\pi}{ae^a}.$$

Vậy

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\text{Re}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2ae^a}.$$

Ví dụ 4. Tính tích phân $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx$.

Giải. Dùng công thức biến đổi lượng giác và tính chẵn của hàm dưới dấu tích phân ta có

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos^2 x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2}dx. \tag{29}$$

Đặt $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Khi đó $|f(z)| \leq \frac{M}{R^2} \to 0$, khi $R \to \infty$. Theo kết quả trong Ví dụ 1 số hạng thứ nhất ở vế phải của (29) bằng $\frac{\pi}{2}$. Theo Bổ đề Jordan

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\delta(R)} \frac{e^{i2z}}{z^2+1}dz = 0.$$

Suy ra

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i2x}}{1+x^2}dx = 2\pi i \text{Res}[\frac{e^{i2z}}{z^2+1}; i] = 2\pi i \frac{e^{-2}}{2i} = \frac{\pi}{e^2}.$$

Khi đó số hạng thứ hai ở vế phải của (29) bằng $\frac{\pi}{2e^2}$.

Vậy $I = \frac{\pi}{2}(1 - \frac{1}{e^2})$.

2) Trường hợp hàm số có điểm bất thường trên trục thực.

Trong trường hợp này ta dùng giá trị chính của tích phân, trên cơ sở các định lí sau:

Định lí. Giả sử hàm $f(x)$ có dạng

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

trong đó $P_n(x)$, $Q_m(x)$ là các đa thức có bậc lần lượt là n và m sao cho $m \geq n+1$. Giả sử a_k là các không-điểm phức hoặc là không điểm thực cấp 1 của Q_m.

Khi đó

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \Big[\sum_{\operatorname{Im} a_k > 0} \operatorname{Res}[f, a_k] + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} a_k = 0} \operatorname{Res}[f, a_k] + \frac{1}{2} \operatorname{Res}[f, \infty] \Big]. \tag{30}$$

Bạn đọc nào quan tâm đến chứng minh định lí này hãy đọc ở tài liệu "Cơ sở lí thuyết hàm biến phức" của Nguyễn Thủy Thanh.

Chú ý

1) Nếu $m \geq n + 2$ thì $\operatorname{Res}[f, \infty] = 0$.

2) Nếu $Q_m(x)$ không có nghiệm thực thì số hạng thứ hai của (30) bằng không.

3) Từ định lí thặng dư toàn phần, (30) còn có thể viết dưới dạng

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -2\pi i \Big[\sum_{\operatorname{Im} a_k < 0} \operatorname{Res}[f, a_k] + \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{Im} a_k = 0} \operatorname{Res}[f, a_k] + \frac{1}{2} \operatorname{Res}[f, \infty] \Big]. \tag{30'}$$

Định lí. Giả sử hàm $f(x)$ có dạng

$$f(x) = e^{imx} F(z),$$

trong đó $m > 0$ và hàm $F(z)$ giải tích trên nửa mặt phẳng trên kể cả trục thực trừ một số hữu hạn điểm bất thường cô lập $a_1, a_2, ..., a_n$ và các cực điểm đơn nằm trên trục thực $b_1; b_2, ..., b_m$ sao cho $F(z) \longrightarrow 0$, khi $z \longrightarrow \infty$ và $\operatorname{Im} z \geq 0$.

Khi đó

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \Big[\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f, a_k] + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}[f, b_j] + \frac{1}{2} \operatorname{Res}[f, \infty] \Big]. \tag{31}$$

Chứng minh. Dùng định lí về thặng dư (phần giá trị chính) và Bổ đề Jordan.

Ví dụ 5. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Giải. Áp dụng định lí trên và theo công thức (31) ta có

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \mathrm{Im}(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx) = \mathrm{Im}(2\pi i.\frac{1}{2}\mathrm{Res}[\frac{e^{iz}}{z}, 0]) = \pi.$$

Vậy $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Ví dụ 6. Tính tích phân

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 5x + 6} dx.$$

Giải: Áp dụng định lí trên và theo công thức (31) ta có

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 5x + 6} dx &= \mathrm{Im}(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 - 5x + 6} dx) \\
&= \mathrm{Im}(\pi i[\mathrm{Res}[\frac{ze^{iz}}{z^2 - 5z + 6}, 2] + \mathrm{Res}[\frac{ze^{iz}}{z^2 - 5z + 6}, 3]) \\
&= \mathrm{Im}(\pi i[-2e^{2i} + 3e^{3i}]).
\end{aligned}$$

Vậy $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 5x + 6} dx = \pi(3\cos 3 - 2\cos 2)$.

4.5. Thặng dư lôgarit và ứng dụng của nó

a. Định nghĩa. Thặng dư lôgarit của hàm $f(z)$ tại điểm z_0 là thặng dư của hàm đạo hàm của hàm $f(z)$ tại điểm z_0.

Ta đặt

$$F(z) = \frac{d}{dz}[\ln(f(z))] = \frac{f'(z)}{f(z)}. \tag{32}$$

Rõ ràng thặng dư lôgarit không chỉ tại các điểm bất thường của hàm $f(z)$ mà còn xét tại các không-điểm của hàm $f(z)$ (nghĩa là các điểm bất thường của hàm $F(z)$).

Giả sử z_0 là không-điểm cấp n của hàm $f(z)$, khi đó trong lân cận của điểm này ta có thể biểu diễn hàm $f(z)$ dưới dạng

$$f(z) = (z - z_0)^n f_1(z),$$

trong đó $f_1(z)$ giải tích trong lân cận của điểm z_0 kể cả điểm z_0 và $f_1(z_0) \neq 0$.

Suy ra:

$$F(z) = \frac{d}{dz}[n\ln(z - z_0) + \ln f_1(z)] = \frac{n}{z - z_0} + \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}.$$

Vậy
$$\operatorname{Res}[F; z_0] = n. \tag{33}$$

Bây giờ, giả sử z_0 là cực điểm cấp n của hàm $f(z)$, khi đó $f(z) = \frac{f_2}{(z-z_0)^n}$, trong đó hàm $f_2(z)$ giải tích trong lân cận điểm z_0 và $f_2(z_0) \neq 0$.

Suy ra:

$$F(z) = \frac{d}{dz}[\ln f_2(z) - n\ln(z - z_0)] = \frac{f_1'(z)}{f_1(z)} - \frac{n}{z - z_0}.$$

Vậy
$$\operatorname{Res}[F; z_0] = -n. \tag{34}$$

Từ (33) và (34) ta có thể đi đến định lí sau:

b. Định lí. Giả sử $f(z)$ giải tích trong miền hữu hạn D trừ một số hữu hạn cực điểm $z_1, z_2, ..., z_n$ lần lượt có cấp $p_1, p_2, ..., p_n$. Giả sử $a_1, a_2, ..., a_m$ là các không-điểm của hàm $f(z)$ trong D có cấp tương ứng là $q_1, q_2, ..., q_m$. Khi đó với mọi đường Jordan, trơn, kín γ bao quanh các cực điểm và không-điểm ta có:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{m} q_j - \sum_{k=1}^{n} p_k = N(f) - P(f) \tag{35}$$

trong đó $N(f)$ là số không-điểm của hàm $f(z)$ và $P(f)$ là số cực điểm của hàm $f(z)$ trong miền D.

Chứng minh. Theo định lí Cauchy về thặng dư, ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j}\mathrm{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)}; z_j]$$

trong đó z_j là các điểm bất thường cô lập của $\frac{f'(z)}{f(z)}$. Từ kết quả trên ta có

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{m} q_j - \sum_{k=1}^{n} p_k = N(f) - P(f).$$

c. Nguyên lí argument.

Định lí. Cho hàm số $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$ đóng trừ một số hữu hạn các cực điểm và biên của miền D không chứa các không-điểm của $f(z)$. Khi đó hiệu số giữa số các không-điểm và số các cực điểm của hàm $f(z)$ bằng sự biến thiên của $\mathrm{Arg}f(z)$ khi z chạy một vòng trên biên Γ của miền D theo chiều dương chia cho 2π.

Chứng minh. Cho hàm $f(z)$ giải tích thoả mãn điều kiện của định lí, ta xét

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} d(\mathrm{Ln}f(z))\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} d(\ln|f(z)|) + \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} d(\mathrm{Arg}f(z)).\end{aligned} \tag{36}$$

Vì tích phân trong số hạng thứ nhất của vế phải (36) và tích phân của số hạng thứ hai bằng độ biến thiên argument của hàm $f(z)$ khi z chạy trên Γ. Kí hiệu độ biến thiên argument của hàm $f(z)$ là $\Delta\mathrm{Arg}f(z)|_{z\in\Gamma}$.

Vậy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi}\Delta\mathrm{Arg}f(z)|_{z\in\Gamma} = N(f) - P(f).$$

Chú ý. Nếu $f(z)$ không có các cực điểm trong miền D thì số không-điểm của hàm f bằng số vòng mà hàm f vạch nên khi z chạy một vòng trên Γ, nghĩa là:

$$N(f) = \frac{1}{2\pi}\Delta \text{Arg} f(z)|_{z\in\Gamma}.$$

Kết quả này có ý nghĩa rất lớn đối với việc tìm nghiệm của hàm f trong miền D.

d. Định lí Rouché. Giả sử hai hàm $f(z)$ và $g(z)$ giải tích trong miền hữu hạn $\overline{D}$; hơn nữa $|f(z)| > |g(z)|$ trên biên của D. Khi đó hàm $f+g$ và hàm f có số các không-điểm bằng nhau trong miền D.

Chứng minh. Theo giả thiết ta có:

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad \text{với mọi } z \text{ thuộc } \Gamma$$

nên $\quad |f(z)+g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0, \quad \forall z \in \Gamma$
và $|f(z)| > 0, \quad \forall z \in \Gamma$ (theo giả thiết).

Điều này chứng tỏ $f(z)$ và $f(z)+g(z)$ khác không trên Γ. Do đó ta có thể viết:

$$f(z) + g(z) = f(z)[1 + \frac{g(z)}{f(z)}]. \qquad (37)$$

Từ đẳng thức (37) ta có:

$$\text{Arg}(f+g) = \text{Arg} f + \text{Arg}(1 + \frac{g}{f}).$$

Theo nguyên lí argument, ta suy ra:

$$N(f+g) = \frac{1}{2\pi}\Delta \text{Arg} f = N(f).$$

(Vì $\text{Arg}(1+\frac{g}{f}) = 0$).

Định lí (về nghiệm của phương trình)

Mọi phương trình bậc n luôn luôn có n nghiệm trong trường số phức.

Chứng minh. Gọi đa thức cấp n là $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, trong đó $a_n \neq 0$.

Đặt $f(z) = a_n z^n$ và $g(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_{n-1} z^{n-1}$.

Trên đường tròn tâm 0 bán kính R đủ lớn, ta có:

$$\left|\frac{g(z)}{f(z)}\right|_{|z|=R} = \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{z} + ... + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{z^n}\right|_{|z|=R}$$

$$= \left[\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|\left|\frac{1}{z}\right| + ... + \left|\frac{a_0}{a_n}\right|\left|\frac{1}{z}\right|^n\right]_{|z|=R} < 1.$$

Suy ra $|f(z)| > |g(z)|$ trên đường tròn $\{|z| = R\}$. Vậy theo Định lí Rouché ta có:

$$N(P_n) = N(f) = n.$$

Ví dụ. Tìm số nghiệm của đa thức

$$f(z) = z^5 + 5z^3 + 2z.$$

trong hình tròn đơn vị.

Giải. Theo định lí trên hàm $f(z)$ có 5 nghiệm trong **C**. Tuy nhiên ở đây ta chỉ xét xem hàm $f(z)$ có bao nhiêu nghiệm trong hình tròn $\{|z| < 1\}$.

Bây giờ ta xét hàm $h(z) = 5z^3$ và $g(z) = z^5 + 2z$.

Trên đường tròn $\{|z| = 1\}$ ta có $|h(z)| > |g(z)|$. Theo Định lí Rouché hàm $f(z)$ có số không-điểm bằng số không-điểm của hàm $h(z)$ trong hình tròn $\{|z| < 1\}$, nghĩa là hàm $f(z)$ có 3 nghiệm trong hình tròn đơn vị.

BÀI TẬP CHƯƠNG 5

1. Phân tích các hàm số sau thành chuỗi lũy thừa ở lân cận điểm $z_0 = 0$ và tìm bán kính hội tụ

$$\sin^2 z, \quad (a+z)^\alpha, \quad \frac{1}{az+b}\ (b \neq 0),$$

$$\frac{z}{z^2 - 4z + 13}, \quad \frac{z^2}{(z+1)^2}, \quad \ln\frac{1+z}{1-z},$$

$$\int_0^z \frac{\sin t}{t} dt, \quad \int_0^z e^{t^2} dt.$$

2. Tìm các không-điểm và cực điểm của các hàm số sau (nếu có). Xác định cấp của chúng

$$z^2+9, \quad \frac{z^2+9}{z^4}, \quad \frac{\sin z}{z}, \quad (z^2-4)^3, \quad \sin z^3.$$

3. Khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận của điểm z_0 và tìm bán kính hội tụ của chuỗi đó

a) $\sin(2z-z^2)$ tại $z_0=1$. b) $\frac{z}{z^2+4}$ tại $z_0=i$.

4. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi luỹ thừa trong lân cận của điểm $z=0$ và điểm $z=\infty$.

a) $f(z)=\frac{1}{z-2}$;

b) $f(z)=\frac{1}{(z-a)^k}$, $a\neq 0$, $k\in \mathbf{N}$.

5. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Laurent

a) $f(z)=\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$ trong lân cận điểm $z=2$ và trong vành tròn $\{z\in \mathbf{C} \mid 1<|z|<2\}$.

b) $f(z)=\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ (trong đó a,b thoả điều kiện $0<|a|<|b|$), trong lân cận của điểm $z=0$, $z=a$, $z=\infty$ và trong vành tròn $\{z\in \mathbf{C} \mid |a|<|z|<|b|\}$.

c) $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$ trong lân cận của điểm $z=i$, và $z=\infty$.

d) $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z-1}$ trong lân cận của điểm $z=1$.

6. Tính thặng dư của các hàm số sau tại các điểm bất thường cô lập của chúng

$$\frac{z^2}{(z^2+1)^2}, \quad \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}, \quad z^n\sin\frac{1}{z}, \quad n\in\mathbf{N};$$

$$\frac{e^z}{z^2(z^2+9)}, \quad \mathrm{tg} z, \quad \frac{1}{\sin z}, \quad \cos\frac{1}{z-2}, \quad \mathrm{cotg}^2 z.$$

7. Áp dụng lí thuyết thặng dư để tính các tích phân sau

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1}, \quad \int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}; \quad \int\limits_{|z|=1} \frac{z^3dz}{2z^4+1};$$

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}, \quad \int\limits_{|z|=r} \sin\frac{1}{z}dz, \quad \int\limits_{|z|=r} z^n e^{\frac{2}{z}}dz, \ (n\in\mathbf{N}).$$

8. Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2+\cos\varphi)^2}$;

b) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$.

9. Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$;

b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$;

c) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$;

d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$, $(a > 0)$.

10. Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+4}dx$;

b) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx$;

c) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2-4)(x-1)}dx$;

d) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^3+1}dx$, trong đó t là số thực.

11. Tính các tích phân sau:

a) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x(x^2+4)}dx$;

b) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b)^2}dx$, trong đó a, b là những số thực dương;

c) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$;

d) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx$, trong đó a, b là những số thực dương.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP

Chương 1

1. a) $-i$, b) $\sqrt{64}$, c) $z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+i)$, $z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)$.

2. a) $\sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4}$, b) $2\sqrt{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, c) 12, $\frac{\pi}{3}$.

3. Nếu $n = 1$ thì $z = 1$;

Nếu $n = 2$ thì $z = x$, $x \in \mathbf{R}$;

Nếu $n > 2$ thì $z = \cos\varphi_k + i\sin\varphi_k$, trong đó $\varphi_k = \frac{2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Ngoài ra $z = 0$ cũng là nghiệm.

4. a) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$,

b) ± 1, $\pm i$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$,

c) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{\sqrt{2}+1} - i\sqrt{\sqrt{2}-1})$.

5. Dùng những kiến thức về hình học để chứng minh.

Bài hướng dẫn

c) Chứng minh đẳng thức sau

$$|z_1| + |z_2| = \left|\frac{z_1+z_2}{2} - \sqrt{z_1z_2}\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2} + \sqrt{z_1z_2}\right|.$$

Giải: Ta xét đẳng thức sau

$$\begin{aligned}(|z_1| + |z_2|)^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1z_2| = z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + 2|z_1z_2| \\ &= \frac{1}{2}[(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2) + (z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2)] + 2|z_1z_2| \\ &= \left(\frac{\overline{z}_1+\overline{z}_2}{2} - \overline{\sqrt{z_1z_2}}\right)\left(\frac{z_1+z_2}{2} - \sqrt{z_1z_2}\right) \\ &+ \left(\frac{z_1+z_2}{2} + \sqrt{z_1z_2}\right)\left(\frac{\overline{z}_1+\overline{z}_2}{2} + \overline{\sqrt{z_1z_2}}\right) + \frac{1}{2}|z_1-z_2|^2 \\ &= \left|\frac{z_1+z_2}{2} - \sqrt{z_1z_2}\right|^2 + \left|\frac{z_1+z_2}{2} + \sqrt{z_1z_2}\right|^2 + 2\left|\frac{(z_1+z_2)^2}{4} - z_1z_2\right|.\end{aligned}$$

Vậy đẳng thức trên được chứng minh.

d) Chứng minh bất đẳng thức sau

$$|z_1+z_2| \geq \frac{1}{2}(|z_1| + |z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|.$$

Giải. Đặt $z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$. Khi đó:

$$\begin{aligned}\frac{|z_1 + z_2|}{|z_1| + |z_2|} &= \frac{|\rho_1 e^{i\varphi_1} + \rho_2 e^{i\varphi_2}|}{\rho_1 + \rho_2}\\ &= \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2} e^{i\varphi_1} + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} e^{i\varphi_2} = |u|;\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\frac{1}{2}\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right| = \left|\frac{1}{2}e^{i\varphi_1} + \frac{1}{2}e^{i\varphi_2}\right| = |v|.$$

Số phức u nằm trên dây cung nối hai điểm $e^{i\varphi_1}$ với $e^{i\varphi_2}$ của đường tròn đơn vị, còn số phức v là điểm giữa của dây cung đó. Vậy $|u| \geq |v|$, nghĩa là bất đẳng thức được chứng minh.

6. Theo công thức Moivre ta có

$$\begin{aligned}(\cos x + i \sin x)^n &= \cos nx + i \sin nx\\ &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (i)^k \sin^k x \cos^{n-k} x\\ &= \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} C_n^{2p} (-1)^p \sin^{2p} x \cos^{n-2p} x\\ &+ i \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} C_n^{2p+1} (-1)^p \sin^{2p+1} x \cos^{n-2p-1} x\end{aligned}$$

(nếu n chẵn và $\frac{n}{2}$ lẻ).

Suy ra

$$\cos nx = \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} C_n^{2p} (-1)^p \sin^{2p} x \cos^{n-2p} x;$$

và

$$\sin nx = \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}} C_n^{2p+1} (-1)^p \sin^{2p+1} x \cos^{n-2p-1} x.$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại.

7.

$$a)\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\cos\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}};\quad b)\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}};$$

$$c)\frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}}\cos(a+\frac{nb}{2});\quad d)\frac{\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{b}{2}}\sin(a+\frac{nb}{2}).$$

8. Gọi ε_k là căn bậc n của đơn vị, khi đó $\varepsilon_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$
Do đó tổng

$$\begin{aligned} S &= 1 + e^{i\frac{2p\pi}{n}} + e^{i\frac{4p\pi}{n}} + \dots + e^{i\frac{2(n-1)p\pi}{n}} \\ &= 1 + e^{i\frac{2p\pi}{n}} + (e^{i\frac{2p\pi}{n}})^2 + \dots + (e^{i\frac{2p\pi}{n}})^{n-1} \end{aligned}$$

Nếu p là bội của n thì $S = n$.
Nếu p không là bội của n thì

$$S = \frac{1 - e^{i\frac{2np\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2p\pi}{n}}} = 0.$$

9. Ý nghĩa hình học của hệ thức

$$|z-2| + |z+2| = 5.$$

Khoảng cách từ z đến 2 là $|z-2|$ và khoảng cách từ z đến -2 là $|z+2|$. Vậy tập hợp tất cả những điểm z thoả mãn hệ thức đó là một elip có trục lớn là 5 và trục nhỏ là 3.

11. Điều kiện cần và đủ là

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} : \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \alpha \in \mathbf{R}.$$

12. Những điểm z thoả mãn điều kiện của bài toán sẽ thoả phương trình sau:

$$(1-\alpha^k)z\overline{z} + (\overline{z}_1\alpha^k - \overline{z}_2)z + (z_2\alpha^k - z_1)\overline{z} + (z_1\overline{z}_2 - \alpha^k\overline{z}_1 z_2) = 0, \quad (1)$$

trong đó $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Nếu $k = 0$ thì (1) là phương trình đường thẳng dưới dạng phức qua hai điểm z_1, z_2.

Nếu $k \neq 0$ thì (1) là đường tròn qua hai điểm z_1, z_2.

Chương 2

1.a)

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(n + \frac{i}{n}) = \infty$$

b) Nếu $|z_0| < 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Nếu $|z_0| \geq 1$ thì dãy (z_n) không hội tụ.

2.

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{z}{n})^n = e^z.$$

3. a) Hội tụ vì các chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\frac{i^n}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\frac{i^n}{n} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1};$$

là hội tụ theo dấu hiệu Leibnitz.

Không hội tụ tuyệt đối.

b) Hội tụ với mọi z có $|z| < 1$.

Phân kì với mọi z có $|z| > 1$.

Với z có $|z| = 1$, hội tụ với mọi $z \neq 1$.

4. Là trường hợp đặc biệt của bài tập 3 (hội tụ không tuyệt đối).

5. a) Hội tụ tuyệt đối. b) Hội tụ tuyệt đối.

c) Hội tụ tuyệt đối. d) Phân kì.

6. Hướng dẫn:

Do $f(z)$ liên tục đều trên U nên

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ sao cho } \forall z', z" \in U$$

mà

$$|z' - z"| < \delta \Rightarrow |f(z') - f(z")| < \varepsilon.$$

Mặt khác do dãy (z_n) hội tụ về z_0, nên

$$\forall m, n \in \mathbf{N},\ m > n_0,\ n > n_0 \Rightarrow |z_m - z_n| < \delta$$

theo trên $|f(z_m) - f(z_n)| < \varepsilon$ với mọi m, n lớn hơn n_0 nào đó .

Vậy $\{f(z_n)\}$ là dãy Cauchy nên hội tụ.

Hơn nữa giới hạn đó là duy nhất và không phụ thuộc vào dãy (z_n).

7. a) Liên tục nhưng không liên tục đều.

b) Liên tục nhưng không liên tục đều.

9. a) $R = 1,\ R = 0$; b) $R = 2,\ R = 1$,

c) $R = 1/2,\ R = 1$ nếu $a \leq 1$ và $R = a$ nếu $a > 1$.

Chương 3

1.a) Theo giả thiết hàm $f(z)$ giải tích trong mặt phẳng phức **C**, do đó điều kiện Cauchy-Riemann được thoả mãn tại mọi $z \in \mathbf{C}$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) & = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

Ta được $a = -b,\quad c = 1$.

Khi đó $\quad f(z) = (1 - ai)z$.

b) Tương tự câu a), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -\sin x(\text{ch}y + a\text{sh}y) & = \sin x(\text{sh}y + b\text{ch}y) \\ \cos x(\text{sh}y + a\text{ch}y) & = -\cos x(\text{ch}y + b\text{sh}y) \end{cases} \quad (2)$$

Hệ (2) đúng với mọi (x, y) suy ra $a = b = -1$.

Khi đó $f(z) = e^{iz}$.

2. Hàm giải tích trong các miền

$$\{\ z \in \mathbf{C} \mid 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\} \cup \{\ z \in \mathbf{C} \mid \pi < \arg z < \frac{5\pi}{4}\}$$

với $\quad f(z) = z^2$,

và

$$\{\ z \in \mathbf{C} \mid \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{4}\} \cup \{\ z \in \mathbf{C} \mid \frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{7\pi}{4}\}$$

với $\quad f(z) = -z^2$.

3. Điều kiện Cauchy-Riemann trong toạ độ cực

$$\begin{cases} r\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= -r\frac{\partial v}{\partial r}. \end{cases}$$

7. Dùng định nghĩa của phần thực và phần ảo của số phức, ta có

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ và } \frac{z - \overline{z}}{2i} \text{ và } w = u + iv.$$

a) Họ các đường thẳng $u = \frac{1}{a}$ (song song với trục ảo trừ đường $v = 0$).

b) Họ các đường thẳng $v = -\frac{1}{b}$ (song song với trục thực trừ đường $u = 0$).

c) Họ các đường tròn $b(u^2 + v^2) + u + v = 0$ tiếp xúc với đường thẳng $v = -u$ tại gốc toạ độ.

d) Chùm đường tròn đi qua gốc toạ độ và qua điểm $w_0 = \frac{1}{z_0}$ (kể cả đường thẳng qua gốc toạ độ và điểm w_0.

8. Đó là miền

$$\text{a) } D^* = \{\, w \in \mathbf{C} \mid |w| < 1,\ \mathrm{Im} w < 0\}.$$

$$\text{b) } D^* = \{\, w \in \mathbf{C} \mid |w| < 1,\ |w + \frac{5}{4}i| > \frac{3}{4}\}.$$

$$\text{c) } D^* = \{\, w \in \mathbf{C} \mid |w - \frac{3}{4}| > \frac{2}{3},\ \mathrm{Re} w > \frac{1}{2}\}.$$

9. Hàm phân tuyến tính cần tìm

$$\text{a)} \qquad w = \frac{(-1 + 3i)z + 1 - i}{(1 + i)z - 1 + i}.$$

$$\text{b)} \qquad w = \frac{z - i}{iz - 1}.$$

$$\text{c)} \qquad w = \frac{(1 + 2i)z + 6 - 3i}{5z - 5i}.$$

10. Trước hết ta tìm hàm phân tuyến tính xác định bởi hai bộ ba điểm phân biệt sau đó ta kiểm tra điều kiện: ảnh của đường tròn đơn

vị là đường tròn đơn vị.

$$w = \frac{(1-4i)z - 2(1-i)}{2(1-i)z - (4-i)} = \frac{(5-3i)z - 4}{4z - (5+3i)}.$$

Bài này có thể dùng hàm phân tuyến tính dạng

$$w = e^{i\varphi}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z}_0 z}$$

và dùng cặp điểm đối xứng qua đường tròn để giải.

11.

a) $$w = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ trong đó } a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ và } (ad - bc) > 0. \quad (3)$$

b) $w = iw_1$, trong đó w_1 là ánh xạ ở phần a).

12.

$$w = \frac{iz + 2i}{(1-i)z + 2}.$$

13.

a) $$w = \frac{z - i}{z + i}.$$

b) $$w = e^{\frac{i\pi}{2}}\frac{z - (a+bi)}{z - (a-bi)} = i\frac{z - (a+bi)}{z - (a-bi)}.$$

14.

a) $$w = \frac{2iz + 1}{iz + 2}.$$

b) $$\frac{w - a}{1 - \overline{a}w} = e^{i\alpha}\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$

15.

a) $$w = 2\frac{z - 2 + i}{iz - 2i + 2}.$$

b) $$w = -\left(\frac{2z + \sqrt{3} - i}{2z - \sqrt{3} - i}\right)^{3/2}.$$

c) $$w = e^{\frac{\pi i(z+1)}{z-1}}.$$

d) $$w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2.$$

16. Hướng dẫn: Lấy cặp điểm z_1, z_2 đối xứng đối với hai đường tròn $\{ |z-3| = 9\}$ và $\{ |z-8| = 16\}$, khi đó ảnh của chúng là w_1, w_2 phải đối xứng nhau qua hai đường tròn $\{ |z| = \rho\}$ và $\{ |z| = 1\}$. Ta chọn $w_1 = 0,\ w_2 = \infty$.

Suy ra ánh xạ phân tuyến tính có dạng

$$w = \lambda \frac{z}{z+24}$$

Từ điều kiện của bài toán, ta tìm được $\rho = \frac{2}{3}$.

Vậy $\qquad w = 3e^{i\varphi}\frac{z}{z+24}$.

Chương 4

1. Hướng dẫn: Dùng công thức

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma udx - vdy + i\int_\gamma vdx + udy.$$

Sau đó dùng công thức Green đưa về tích phân hai lớp với các hàm u, v như sau:

a) $u(x,y) = x,\ v(x,y) = 0$. b) $u(x,y) = y,\ v(x,y) = 0$.

c) $u(x,y) = x,\ v(x,y) = -y$.

2. a) $I = -2(1-i)$. b) $I = 2(1-i)$. c) $I = 4i$.

3.

$$\text{a)} -\pi(e - \frac{1}{e}), \quad \text{b)}0,$$

$$\text{c)}\pi i(e + \frac{1}{e}), \quad \text{d)}0.$$

5. $\frac{\pi i}{2}$.

6.

$$\text{a)}2\pi i e^a(2+a),$$

$$\text{b)}\frac{\pi i}{a^2}(e^a - 1).$$

7. a) $-2\pi i$, b) $-\pi e i$, c) $-\pi(2+e)$.

10. a) $f(z) = ze^z + 2i\cos z + z^3 - iz + Ci$, b) $f(z) = z^2 + 2 + Ci$, c) $f(z) = ze^z - \frac{i}{z} + Ci$, d) $f(z) = \sin z - \mathrm{ch} z + C$, e) $f(z) = iz^2 + (i-2)z + C$.

Chương 5

1. Phân tích các hàm số sau thành chuỗi luỹ thừa ở lân cận điểm $z_0 = 0$ và tìm bán kính hội tụ

a)

$$\begin{aligned}\sin^2 z &= \frac{1-\cos 2z}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2z \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n} \text{ với } R = \infty.\end{aligned}$$

b)

$$(a+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} a^{\alpha}\binom{\alpha}{n}\left(\frac{z}{a}\right)^n,$$

trong đó $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$, $(n = 1, 2, \ldots)$, $\binom{\alpha}{0} = 1$; $R = a$.

c)

$$\frac{1}{az+b} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^n}{b^{n+1}}z^n, \quad R = |\frac{b}{a}|.$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{z}{z^2-4z+13} &= \frac{z}{6i}[\frac{1}{z-2-3i} - \frac{1}{z-2+3i}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6i}[\frac{1}{(2-3i)^{n+1}} - \frac{1}{(2+3i)^{n+1}}]z^{n+1}, \quad R = \sqrt{13}.\end{aligned}$$

e) $\frac{z^2}{(z+1)^2} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)z^n$, $R = 1$, f)

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = \ln(1+z) - \ln(1-z).$$

Áp dụng khai triển cơ bản

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Lấy tích phân hai vế ta được

$$\int_0^z \frac{dt}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z t^n dt.$$

Suy ra

$$\ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

Tương tự

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

Vậy

$$\ln\frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad R = 1.$$

g)

$$\int_0^z \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad R = \infty.$$

h)

$$\int_0^z e^{t^2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}, \quad R = \infty.$$

2. Tìm các không-điểm và cực điểm của các hàm số sau (nếu có). Xác định cấp của chúng

a) $z^2 + 9$ có các không-điểm cấp một $z = \pm 3i$.

b) $\frac{z^2+9}{z^4}$ có các không-điểm cấp một $z = \pm 3i$ và không-điểm cấp hai $z = \infty$.

c) $\frac{\sin z}{z}$ có các không-điểm cấp một $z = k\pi$ $(k = \pm 1, \pm 2, ...)$.

d) $(z^2 - 4)^3$ có các không-điểm cấp ba $z = \pm 2$.

e) $\sin z^3$ có các không-điểm cấp ba $z = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

3. Khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận của điểm z_0 và tìm bán kính hội tụ của chuỗi đó.

a)

$$\sin(2z - z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(1 + \frac{n\pi}{2})}{n!}(z-1)^{2n}, \quad R = \infty.$$

b)

$$\frac{z}{z^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i^{n+1}}[\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} - 1](z-i)^n, \quad R = 1.$$

4. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi luỹ thừa trong lân cận của điểm $z = 0$ và điểm $z = \infty$.

a) Tại lân cận $z = 0$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2.$$

Tại lân cận $z = \infty$

$$f(z) = \frac{1}{z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2.$$

b) Tại lân cận $z = 0$

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k-1} \frac{(-1)^k}{a^k} \frac{z^n}{a^n}, \quad |z| < |a|.$$

Tại lân cận $z = \infty$

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k-1} \frac{a^n}{z^{n+k}}, \quad |z| > |a|.$$

5. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Laurent

a) Tại lân cận $z = 0$

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} = \frac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty} i \frac{(z-2)^n}{(i-2)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} i(-1)^n \frac{(z-2)^n}{(i+2)^{n+1}}$$

Trong vành tròn $\{z \in \mathbf{C} \mid 1 < |z| < 2\}$

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z^2+1)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{(-1)^n}{z^{2(n+1)}}.$$

b) Tại lân cận $z = 0$

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{b-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(ab)^{n+1}} z^n.$$

Trong lân cận của điểm $z = a$

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \frac{1}{z-a} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}.$$

Trong lận cận $z = \infty$

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{b-a} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b^{n-1} - a^{n-1}}{z^n};$$

Trong vành tròn $\{z \in \mathbf{C} \mid |a| < |z| < |b|\}$

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{b^{n+1}} + \frac{a^{n+1}}{z^{n+1}}\right).$$

c) Trong lân cận của điểm $z = i$

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = -\frac{i}{4(z-i)} - \frac{1}{4(z-i)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)i^n}{2^{n+4}} (z-i)^n,$$

Trong lân cận của điểm $z = \infty$

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{z^{2n+2}},$$

d) Trong lân cận của điểm $z = 1$. Đặt $z - 1 = t \Rightarrow z = t + 1$, khi đó hàm

$$f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1} = (t^2 + 2t + 1) \sin \frac{1}{t} = g(t)$$

Khai triển hàm $g(t)$ trong lân cận điểm $t = 0$

$$\begin{aligned} g(t) &= (t^2 + 2t + 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! z^{2n+1}} \\ &= 2 + t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! t^{2n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! t^{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)! t^{2n-1}}. \end{aligned}$$

6. Tính thặng dư của các hàm số sau tại các điểm bất thường cô lập của chúng

a) $\text{Res}[f, i] = -\frac{i}{4}$, $\text{Res}[f, -i] = \frac{i}{4}$, $\text{Res}[f, \infty] = 0$.

b) $\text{Res}[f, -1] = (-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$, $\text{Res}[f, \infty] = (-1)^n \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$,

c)

$$\text{Res}[f, 0] = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \; n < 0 \; \text{ hay } n > 0 \text{ lẻ} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!} & \text{nếu } \; n = 0 \text{ hay } n > 0 \text{ chẵn} \end{cases}$$

$\text{Res}[f, \infty] = - \text{Res}[f, 0]$.

d) $\text{Res}[f, 0] = \frac{1}{9}$, $\text{Res}[f, 3i] = -\frac{1}{54}(\sin 3 - i \cos 3)$,

$\text{Res}[f, 3i] = -\frac{1}{54}(\sin 3 + i \cos 3)$, $\text{Res}[f, \infty] = \frac{1}{27}(\sin 3 - 3)$.

e) $\text{Res}[f, \frac{2k+1}{2}\pi] = -1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

f) $\text{Res}[f, k\pi] = (-1)^k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

g) $\text{Res}[f, 2] = \text{Res}[f, \infty] = 0$, h) $\text{Res}[f, k\pi] = 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$

7. Áp dụng lí thuyết thặng dư để tính các tích phân sau

$$a) \int\limits_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^4+1} = -\frac{\pi i}{\sqrt{2}}; \quad b) \int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)} = -\frac{\pi i}{121};$$

$$c) \int\limits_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{2z^4+1} = \pi i, \quad d) \int\limits_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)} = -\frac{2\pi i}{9};$$

$$e)\ \int\limits_{|z|=r} \sin\frac{1}{z}dz = 2\pi i; \quad f)\ \int\limits_{|z|=r} z^n e^{\frac{2}{z}}dz = \begin{cases} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} & \text{nếu } n \geq -1 \\ 0 & \text{nếu } n < -1 \end{cases}.$$

8. Tính các tích phân sau:

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2+\cos\varphi)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}; \quad b) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

9. Tính các tích phân sau:

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}; \quad b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{\pi}{2};$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2} = -\frac{\pi}{27}; \quad d) \int_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{4a}.$$

10. Tính các tích phân sau:

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+4}dx = \frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{e^4}); \quad b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2-2x+10}dx = \frac{\pi}{3e^3}(3\cos 1+\sin 1);$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{(x^2-4)(x-1)}dx = \frac{\pi}{5}(\cos 1 - \frac{1}{e^2});$$

$$d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos tx}{x^3+1}dx = \frac{\pi}{3}[\sin|t| + e^{-\frac{|t|\sqrt{3}}{2}}(\sin|\frac{t}{2}| + \sqrt{3}\cos\frac{t}{2})];$$

11. Tính các tích phân sau:

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x(x^2+4)}dx = \frac{\pi}{8}(1-\frac{1}{e^4}); \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b)^2}dx = \frac{\pi}{4b^4}[2-(2+ab)e^{-ab}$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}; \quad d) \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}dx = \frac{\pi(b-a)}{2}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Alford

   Complex Analysis.

2. Trần Anh Bảo

   Lí thuyết hàm số biến số phức.

3. M. Lavrentiev, B. Chabat

   Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complex.

4. Nguyễn Văn Khuê - Vũ Tuấn

   Hàm số biến số phức.

5. Đinh Văn Phiêu - Lê Mậu Hải - Nguyễn Thu Nga - Nguyễn Huy Lợi

   Bài tập hàm số biến số phức.

6. B. Sabat

   Nhập môn giải tích phức - tập 1.

7. Nguyễn Thuỷ Thanh

   Cơ sở lí thuyết hàm biến phức.

8. Nguyễn Thuỷ Thanh

   Hướng dẫn giải bài tập hàm biến phức.

9. L. I. Vônkôvưski - G. L. Lunxơ- I. G. Aramnôvich

   Bài tập lí thuyết hàm biến phức.

MỤC LỤC

HÀM SỐ BIẾN SỐ PHỨC

Mã số: 7K411n7 - DAI

In 1.000 bản, khổ 17x24 cm, tại Công ty Cổ phần In Phúc Yên.
Số xuất bản: 11- 2007/CXB/232 - 2119/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2007

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYÊN - HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn

8934980759301

Giá: 15.300đ