TRẦN TRỌNG HUỆ

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH
và
HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Cuốn "ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VÀ HÌNH HỌC GIẢI TÍCH" này được biên soạn theo Chương trình khung về Toán học cao cấp của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Cuốn sách có thể dùng làm tài liệu giảng dạy, học tập, tham khảo cho sinh viên các trường Đại học và Cao đẳng.

17 – 2007/CXB/74 – 2217/GD

Mã số: 7B663M7 – DAI

MỤC LỤC

Chương I

TẬP HỢP VÀ QUAN HỆ

1.1. TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

1.1.1. Tập hợp, tập hợp con

Trong đời sống hàng ngày cũng như trong khoa học, ta thường gặp những tập hợp của các đối tượng khác nhau. Chẳng hạn, tập hợp sinh viên của một trường đại học, tập hợp các cá thể trong một quần thể sinh vật của một vùng, tập hợp các số nguyên, tập hợp các điểm trên một đoạn thẳng, tập hợp các nghiệm của một phương trình, v.v... Tập hợp là một khái niệm ban đầu của toán học, được hiểu một cách trực giác không định nghĩa.

Để chỉ x là một phần tử của tập hợp X ta viết $x \in X$ (đọc là : x thuộc X). Còn để chỉ x không phải là phần tử của tập hợp X ta viết $x \notin X$ hay $x \,\bar{\in}\, X$ (đọc là : x không thuộc X). Để mô tả một tập hợp thường dùng hai phương pháp sau :

Phương pháp 1. *Liệt kê các phần tử của tập hợp đó.* Chẳng hạn :

– Tập hợp các số tự nhiên :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}.$$

– Tập hợp các số nguyên :

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}.$$

– Tập hợp các số hữu tỷ :

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{m}{n} :\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}.$$

Phương pháp 2. *Chỉ ra đặc trưng của tập đang xét.* Đó là những tính chất mà mọi phần tử của tập đang xét đều có và chỉ những phần tử thuộc tập đó mới có tính chất này.

Nếu tập hợp E gồm những phần tử có tính chất đặc trưng T(x) thì ta viết :

$$E = \{x : T(x)\}.$$

Ví dụ : E là tập hợp các số chẵn.

Ta biết x là một số chẵn khi và chỉ khi x = 2k, k là một số nguyên. Vậy ta có :

$$E = \{x : x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Sau đây danh từ "tập hợp" sẽ gọi một cách vắn tắt là "tập". Để chỉ cùng một khái niệm ngoài danh từ "tập" ta còn dùng các từ "họ", "hệ", "lớp", v.v...

Tập con : Tập A gọi là *tập con* của X nếu $x \in A$ thì $x \in X$, ký hiệu $A \subseteq X$ hay $X \supseteq A$. Nếu $A \subseteq X$ và có phần tử $y \in X$, nhưng $y \notin A$ thì ta viết $A \subset X$.

Ví dụ : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Tập rỗng : *Tập rỗng* là tập không chứa phần tử nào, ký hiệu là $\varnothing$. Vậy $x \notin \varnothing$ đối với mọi đối tượng x. Quy ước $\varnothing \subseteq X$ đối với mọi tập X.

Hai tập trùng nhau : Hai tập A và B gọi là *trùng nhau* nếu $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$, khi đó ta viết $A = B$.

1.1.2. Các ký hiệu lôgic

Trong toán học người ta quy định rằng, mỗi mệnh đề toán học là một điều khẳng định toán học chỉ có thể đúng hoặc sai. Để diễn tả ngắn gọn các mệnh đề toán học người ta thường dùng các ký hiệu sau đây :

– Ký hiệu "$S \Rightarrow T$", có nghĩa là từ mệnh đề S đúng suy ra mệnh đề T đúng.

– Ký hiệu "$S \Leftrightarrow T$", có nghĩa là từ mệnh đề S đúng suy ra mệnh đề T đúng và ngược lại từ mệnh đề T đúng suy ra mệnh đề S đúng.

Trường hợp $S \Leftrightarrow T$, ta nói hai mệnh đề S và T tương đương, hoặc T là điều kiện cần và đủ để có S. Đôi khi còn phát biểu dưới dạng : Có S khi và chỉ khi có T, hay có S nếu và chỉ nếu có T, v.v...

– Ký hiệu "$\forall x \in X : S$", có nghĩa là với mọi phần tử $x \in X$ đều có mệnh đề S.

– Ký hiệu "$\exists x \in X : S$" ($\exists! x \in X : S$), có nghĩa là tồn tại phần tử $x \in X$ (tồn tại duy nhất phần tử $x \in X$) sao cho mệnh đề S đúng.

1.1.3. Các phép toán tập hợp

Giả sử A, B là các tập cho trước, định nghĩa :

– *Hợp* của hai tập A, B là tập :

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ hoặc } x \in B\}.$$

– *Giao* của hai tập hợp A, B là tập :

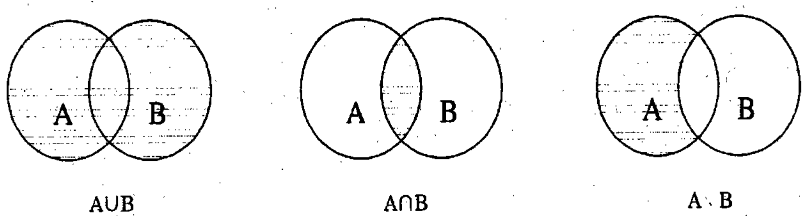
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ và } x \in B\}.$$

– *Hiệu* của hai tập A, B là tập ;

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ và } x \,\overline{\in}\, B\}.$$

Nếu $A \cap B = \varnothing$, ta nói các tập A, B rời nhau. Nếu $A \subseteq X$, ký hiệu $C_X A = X \setminus A$ và gọi là *phần bù* của tập A trong tập X.

Các tập $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ có thể minh hoạ bằng các hình vẽ trong hình 1.1.



Hình 1.1

Các phép toán hợp và giao có thể mở rộng cho một họ bất kỳ các tập. Giả sử I là một tập cho trước. Ứng với mỗi phần tử $i \in I$, có một tập A_i. Khi đó tập I được gọi là *tập các chỉ số*.

– Hợp của họ tập $\{A_i\}$, $i \in I$ là tập :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

– Giao của họ tập $\{A_i\}$, $i \in I$ là tập :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i, \forall i \in I\}.$$

Các tính chất của phép toán tập hợp :

a) Tính chất giao hoán :

$$A \cup B = B \cup A \ ;$$

$$A \cap B = B \cap A.$$

b) Tính chất kết hợp :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \ ;$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

c) Tính chất phân phối :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \ ;$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

d) Công thức De Morgan :

$$X \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i) \ ;$$

$$X \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i).$$

Phần chứng minh các hệ thức trên được xem như bài tập.

1.2. QUAN HỆ

1.2.1. Tích Đề-các của các tập

Giả sử X, Y là các tập cho trước. *Tích Đề-các* (hay *tích trực tiếp*) của các tập X, Y là tập tất cả các cặp có thứ tự (x, y), trong đó $x \in X$, $y \in Y$ và ký hiệu là $X \times Y$.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Theo định nghĩa ta có : $(x, y) = (x', y')$ khi và chỉ khi $x = x'$, $y = y'$.

Một cách tổng quát, giả sử $X_1, X_2, ..., X_n$ là các tập cho trước. Tích Đề-các của tập $X_1, X_2, ..., X_n$ là tập :

$$X_1 \times X_2 \times ... \times X_n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in X_i, i = 1, 2, ..., n\}.$$

Nếu $X_1 = X_2 = ... = X_n = X$, ta viết $X \times X ... \times X = X^n$.

Tập X^n gọi là *lũy thừa Đề-các bậc n* của tập X.

1.2.2. Quan hệ

Định nghĩa : Giả sử X là tập cho trước. Mỗi tập con $S \subset X \times X$ gọi là một *quan hệ* trên tập X.

Nếu cặp $(x, y) \in S$ thì ta nói rằng, phần tử x nằm trong quan hệ S với phần tử y, và viết xSy.

Giả sử S là một quan hệ trên tập X, khi đó :

– Quan hệ S gọi là có tính chất *phản xạ* nếu xSx, $\forall x \in X$;

– Quan hệ S gọi là có tính chất *đối xứng* nếu xSy thì ySx ;

– Quan hệ S gọi là có tính chất *bắc cầu* nếu xSy và ySz thì xSz ;

– Quan hệ S gọi là có tính chất *phản đối xứng* nếu xSy và ySx thì $x = y$.

1. Quan hệ tương đương

Định nghĩa : *Quan hệ tương đương* là một quan hệ có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Giả sử $S \subseteq X \times X$ là một quan hệ tương đương trên tập X. Khi đó, nếu xSy ta thường viết $x \sim y$. Theo định nghĩa ta có :

*) $x \sim x$, với mọi $x \in X$;

*) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;

*) $x \sim y$ và $y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Nếu $x \sim y$ ta nói rằng, phần tử x tương đương với phần tử y.

Với mỗi phần tử $x \in X$, đặt :

$$\overline{x} = \{x' \in X : x' \sim x\}.$$

Tập con $\overline{x}$ gọi là *lớp tương đương* có đại biểu là phần tử x.

Theo tính chất phản xạ ta có : $x \in \overline{x}$. Vậy $\overline{x} \neq \emptyset$ và $\bigcup_{x \in X} \overline{x} = X$.

Mệnh đề 1.1 : Các lớp tương đương rời nhau hoặc trùng nhau.

Chứng minh :

Giả sử $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \varnothing$, khi đó tồn tại phần tử $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$. Theo định nghĩa lớp tương đương ta có : $z \sim x$, $z \sim y$. Do tính chất đối xứng ta có $x \sim z$.

Với mọi $x' \in \overline{x}$ ta có $x' \sim x$, do đó $x' \sim z$. Vì $z \sim y$ nên $x' \sim y$, vậy $x' \in \overline{y}$. Do đó ta có : $\overline{x} \subseteq \overline{y}$.

Chứng minh tương tự ta có : $\overline{y} \subseteq \overline{x}$. Vậy $\overline{x} = \overline{y}$. ■

Sự chia lớp : Họ các tập con $\{A_i\}_{i \in I}$ của tập X được gọi là một *sự chia lớp* tập X nếu $A_i \neq \varnothing$ với $\forall i \in I$; $A_i \cap A_j = \varnothing$ với $i \neq j$ và $\bigcup_{i \in I} A_i = X$.

Theo Mệnh đề 1.1 ta có : Các lớp tương đương là một sự chia lớp tập X.

Tập thương : Xét quan hệ tương đương $(\sim)$ trên tập X. Đặt :

$$X/\sim\ = \{\overline{x} : x \in X\}.$$

Tập $X/\sim$ gọi là *tập thương* của tập X theo quan hệ tương đương.

Ví dụ : Giả sử n là một số nguyên dương cho trước. Xét một quan hệ ~ trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ xác định như sau :

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ chia hết cho } n.$$

Dễ dàng kiểm tra lại rằng, quan hệ đang xét là một quan hệ có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Thật vậy, quan hệ ~ có tính chất phản xạ vì $x - x = 0$, 0 chia hết cho n nên $x \sim x$.

Quan hệ ~ có tính chất đối xứng : Giả sử $x \sim y$, ta có $x - y$ chia hết cho n, do đó $y - x = -(x - y)$ cũng chia hết cho n. Vậy $y \sim x$.

Quan hệ ~ có tính chất bắc cầu : Giả sử $x \sim y$ và $y \sim z$. Vì $x - y$ và $y - z$ chia hết cho n, nên $x - z = (x - y) + (y - z)$ cũng chia hết cho n, do đó $x \sim z$.

Vậy quan hệ đang xét là một quan hệ tương đương trên tập các số nguyên $\mathbb{Z}$.

Nếu $x \sim y$ ta viết $x \equiv y \bmod (n)$ (đọc là : x bằng y đồng dư n). Dễ thấy rằng, với mỗi số nguyên x nếu $x = kn + r$ $(0 \leq r < n)$ thì $x \equiv r \bmod (n)$, do đó $\overline{x} = \overline{r}$.

Vậy, tập thương của tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ theo quan hệ tương đương đang xét là :

$$\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, ..., \overline{n-1}\},$$

trong đó : $\overline{r} = \{x = kn + r : k \in \mathbb{Z}\}$, $r = 0, ..., n-1$.

2. Quan hệ thứ tự

Định nghĩa : *Quan hệ thứ tự* trên một tập là một quan hệ phản xạ, bắc cầu và phản đối xứng.

Quan hệ thứ tự thường được ký hiệu là $\leq$. Vậy quan hệ thứ tự $\leq$ trên tập X là một quan hệ có tính chất :

*) $x \leq x$, với mọi $x \in X$ (Tính chất phản xạ) ;

*) $x \leq y$ và $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Tính chất bắc cầu) ;

*) $x \leq y$ và $y \leq x \Rightarrow x = y$ (Tính chất phản đối xứng).

Nếu $x \leq y$ thì ta nói phần tử x đứng trước phần tử y, hay phần tử y đứng sau phần tử x. Nếu $x \leq y$ và $x \neq y$ thì ta nói phần tử x đứng trước thực sự phần tử y và viết $x < y$ (đôi khi còn viết $y \geq x$, $y > x$).

Tập X có một quan hệ thứ tự $\leq$ được gọi là tập *được sắp thứ tự* và ký hiệu là $(X, \leq)$. Nếu đối với mọi cặp phần tử $x, y \in X$ ta luôn luôn có $x \leq y$ hoặc $y \leq x$ thì quan hệ thứ tự đó gọi là *quan hệ thứ tự toàn phần.*

Ví dụ :

a) Quan hệ thứ tự thông thường trên các tập $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ($x \leq y$ khi và chỉ khi $y - x$ là một số không âm) là một quan hệ thứ tự toàn phần.

b) Giả sử X là một tập cho trước. Ký hiệu P(X) là tập hợp tất cả các tập con của tập X. *Quan hệ thứ tự bao hàm* trên tập P(X) được định nghĩa như sau :

$$A \leq B \text{ khi và chỉ khi } A \subseteq B \text{ ; } A, B \in P(X).$$

Dễ thấy rằng, nếu tập X có hơn một phần tử thì quan hệ thứ tự bao hàm trên P(X) không phải là quan hệ thứ tự toàn phần.

1.3. ÁNH XẠ

1.3.1. Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa : Một *ánh xạ* f từ tập X vào tập Y, ký hiệu là $f : X \to Y$ (hay $X \xrightarrow{f} Y$) là một quy tắc tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất $f(x) \in Y$.

Phần tử f(x) gọi là *ảnh* của phần tử x qua ánh xạ f.

Tích ánh xạ : Giả sử có hai ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$, *tích* (hay *hợp thành*) của ánh xạ f với ánh xạ *g* là ánh xạ $g_\circ f : X \to Z$ được xác định như sau :

$$g_\circ f(x) = g(f(x)), \forall x \in X. \tag{1.1}$$

Ảnh của tập con $A \subseteq X$ qua ánh xạ $f : X \to Y$ là tập

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}. \tag{1.2}$$

Ký hiệu Imf = f(X). Tập con Imf gọi là *ảnh* của ánh xạ f.

Nghịch ảnh của tập con $D \subseteq Y$ là tập

$$f^{-1}(D) = \{x \in X : f(x) \in D\}. \tag{1.3}$$

Ánh xạ $f : X \to Y$ gọi là *đơn ánh* nếu với mọi $x, x' \in X$, $x \neq x'$ thì $f(x) \neq f(x')$.

Ánh xạ f gọi là *toàn ánh* nếu Imf = Y.

Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *song ánh* nếu f vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.

Ví dụ :

a) Giả sử $A \subseteq X$, xét ánh xạ $i_A : A \to X$ xác định bởi $i_A(x) = x$ với mọi $x \in A$. Ánh xạ i_A là một đơn ánh, gọi là *ánh xạ nhúng tập A vào tập X.* Đặc biệt, nếu A = X thì i_X là một song ánh, i_X gọi là ánh xạ *đồng nhất* của tập X (đôi khi còn dùng ký hiệu id_X).

Giả sử $f : X \to Y$, với mỗi tập con $A \subseteq X$, xét ánh xạ $f|_A : A \to Y$ xác định bởi :

$$f|_A(x) = f(x) \text{ với mọi } x \in A.$$

Ánh xạ $f|_A$ gọi là *hạn chế* của ánh xạ f trên tập con A.

Ta có : $f \circ i_A = f|_A$.

b) Giả sử X_1, X_2 là các tập cho trước. Xét ánh xạ $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$, $i = 1, 2$; xác định bởi $p_i(x_1, x_2) = x_i$ với mọi $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

Ánh xạ p_i là một toàn ánh, gọi là *phép chiếu* lên thành phần thứ i.

c) Giả sử quan hệ ~ là một quan hệ tương đương trên tập X. Xét ánh xạ $p : X \to X/\sim$, xác định bởi $p(x) = \overline{x}$ với mọi $x \in X$.

Ánh xạ p là một toàn ánh, gọi là *ánh xạ chính tắc* từ tập X lên tập thương $X/\sim$.

Dễ thấy rằng, tích các đơn ánh (toàn ánh) là một đơn ánh (toàn ánh). Do đó ta có : Tích các song ánh là một song ánh.

Ánh xạ ngược : Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh. Khi đó với mỗi $y \in Y$, tồn tại duy nhất $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Vậy ta có ánh xạ $g : Y \to X$ xác định như sau :

Với mỗi $y \in Y$ đặt $g(y) = x$, trong đó phần tử $x \in X$ và $f(x) = y$. Ta có :

$$g \circ f = i_X, \quad f \circ g = i_Y. \qquad (1.4)$$

Có thể chứng tỏ g là một song ánh duy nhất từ Y lên X thỏa mãn (1.4). Song ánh g gọi là *ánh xạ ngược* của song ánh f và ký hiệu là f^{-1}.

Mỗi song ánh $f : X \to Y$ còn gọi là một *phép tương ứng 1 – 1* giữa hai tập X và Y.

Ví dụ : Ký hiệu $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương. Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ cho bởi $f(x) = e^x$ là một song ánh. Ánh xạ ngược $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ được cho bởi $f^{-1}(y) = \ln y$.

1.3.2. Tập cùng lực lượng

Hai tập X và Y được gọi là *cùng lực lượng* (hay *tương đương*), ký hiệu là $X \sim Y$ nếu tồn tại một song ánh $f : X \to Y$.

Ví dụ :

a) Với n = 1, 2, ... đặt : $E_n = \{1, 2, ..., n\}$.

Xét tập có n phần tử $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Ánh xạ $f : E_n \to A$, xác định bởi $f(k) = a_k$, k = 1, 2, ..., n. Rõ ràng f là một song ánh. Vậy ta có : $E_n \sim A$.

b) Xét các tập :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\} ;$$

$$2\mathbb{N} = \{0, 2, 4, ...\} ;$$

$$X = \{x_1, x_2, x_3, ...\}, \text{ trong đó } x_i \neq x_j \text{ với } i \neq j.$$

Dễ dàng chứng tỏ rằng, các ánh xạ sau đây là các song ánh :

$\alpha : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, xác định bởi $\alpha(k) = 2k$;

$\beta : \mathbb{N} \to X$, xác định bởi $\beta(k) = x_{k+1}$,

k = 0, 1, 2,...

Vậy tập các số chẵn không âm $2\mathbb{N}$ và tập X có cùng lực lượng với tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$.

Tập hữu hạn : Tập có cùng lực lượng với tập E_n gọi là *tập hữu hạn.*

Chẳng hạn, các tập A = {a, b, c} và tập $B = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 10^{10}\}$ là tập hữu hạn.

Tập vô hạn đếm được : Tập có cùng lực lượng với tập $\mathbb{N}$ các số tự nhiên gọi là *tập vô hạn đếm được.*

Theo ví dụ b) các tập $2\mathbb{N}$, X là vô hạn đếm được. Ta có thể chứng minh tập $\mathbb{Z}$ các số nguyên và tập $\mathbb{Q}$ các số hữu tỷ là các tập vô hạn đếm được.

Tập không đếm được : Tập vô hạn không cùng lực lượng với tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ được gọi là *tập không đếm được.*

Người ta chứng minh được rằng, tập các số thực $\mathbb{R}$ là không đếm được.

Chú ý : Giả sử X là một tập vô hạn đếm được. Khi đó tồn tại một song ánh $f : \mathbb{N} \to X$. Ký hiệu $f(i) = x_i$, i = 0, 1, 2, ... Vì f là một toàn ánh nên ta có :

$$X = f(\mathbb{N}) = \{x_0, x_1, x_2, ...\}.$$

Vậy, nhờ song ánh f có thể liệt kê (hay đánh số) tất cả các phần tử của tập X. Từ đó ta suy ra rằng : *Một tập vô hạn là đếm được khi và chỉ khi các phần tử của tập đó đánh số được.*

1.3.3. Mệnh đề quy nạp

Phương pháp quy nạp là một phương pháp chứng minh hay sử dụng. Tính đúng đắn của phương pháp đó được thể hiện ở mệnh đề sau :

Mệnh đề 1.2 : Giả sử $T = T(n)$, $n \in \mathbb{N}$, là một điều khẳng định nào đó. Nếu T đúng đối với $n = 0$, và nếu T đúng đối với $n = k - 1$ thì T đúng đối với $n = k$. Khi đó T đúng đối với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh : Gọi A là tập các số tự nhiên $n > 0$ mà T không đúng. Giả sử $A \neq \varnothing$. Gọi k là số tự nhiên nhỏ nhất thuộc A. Khi đó điều khẳng định T không đúng đối với k. Vì $k - 1 \notin A$ nên T đúng đối với $k - 1$. Khi đó theo giả thiết T đúng đối với $n = k$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $A = \varnothing$ và T đúng đối với mọi $n \in \mathbb{N}$.■

1.4. GIẢI TÍCH TỔ HỢP VÀ NHỊ THỨC NIUTƠN

1.4.1. Chỉnh hợp

Định nghĩa : Giả sử E là một tập có n phần tử. Mỗi tập con p phần tử (phân biệt) của tập E được sắp xếp theo một thứ tự nào đó được gọi là một *chỉnh hợp chập p* của tập E có n phần tử, $n \geq 1$.

Ví dụ :

a) Giả sử $E = \{a, b, c, d, e, g\}$. Với thứ tự từ trái sang phải thì ta có : $\{a, b, d\}$, $\{d, a, b\}$, $\{d, b, a\}$, $\{c, d, g\}$, v.v... là các chỉnh hợp chập 3 của tập E có 6 phần tử. Còn $\{b, a, e, g\}$, $\{a, b, g, e\}$, $\{a, c, d, g\}$, v.v... là các chỉnh hợp chập 4 của tập E.

b) Xét tập $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Ta có : $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 1, 4, 3, 5\}$, $\{5, 6, 1, 7, 8\}$, $\{1, 5, 6, 7, 8\}$, v.v... là các chỉnh hợp chập 5 của tập X có 10 phần tử.

Số chỉnh hợp : Ký hiệu A_n^p là số chỉnh hợp chập p của tập có n phần tử.

Mệnh đề 1.3 :

$$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1). \qquad (1.5)$$

Chứng minh : Công thức (1.5) được chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo p.

Đối với p = 1, theo (1.5) ta có $A_n^1 = n$. Vậy công thức đúng đối với p = 1.

Giả sử công thức đúng đối với p – 1, p > 1. Ta chứng tỏ công thức (1.5) cũng đúng đối với p.

Xét tương ứng :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_p) \mapsto (a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}). \qquad (*)$$

Ứng với mỗi chỉnh hợp chập p của tập E có n phần tử $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ ta có một chỉnh hợp chập p – 1 của tập E dạng $(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1})$. Vì phần tử a_p có thể lấy trong n – (p – 1) phần tử còn lại của tập E khác với các phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$. Do đó ứng với n – p + 1 chỉnh hợp chập p khác nhau của tập E có n phần tử tương ứng (*) cho ta một chỉnh hợp chập p – 1 của tập E. Do đó số chỉnh hợp chập p của tập E bằng n – p + 1 lần số chỉnh hợp chập p – 1 của tập E.

Vậy ta có :

$$A_n^p = A_n^{p-1}(n-p+1).$$

Theo giả thiết quy nạp :

$$A_n^{p-1} = n(n-1)\ldots(n-p).$$

Do đó : $$A_n^p = n(n-1)\ldots(n-p+1). \blacksquare$$

Ví dụ : Hỏi có bao nhiêu cách bố trí chỗ ngồi cho 4 người trên một dãy ghế có 6 chỗ ngồi ?

Ta nhận thấy rằng, mỗi cách bố trí chỗ ngồi là một chỉnh hợp chập 4 của tập có 6 phần tử. Vậy số cách bố trí có thể có là :

$$A_6^4 = 6 \times (6-1) \times (6-2) \times (6-3) = 6.5.4.3 = 360.$$

1.4.2. Hoán vị

a) Định nghĩa : Một chỉnh hợp chập n của tập E có n phần tử gọi là một *hoán vị* (hay *phép thế*) của tập E.

Ký hiệu P_n là số hoán vị của tập có n phần tử. Theo công thức (1.5) ta có :

$$P_n = n! \qquad (1.6)$$

$(n! = n(n-1)\ldots 2.1$ (đọc là n giai thừa)).

Ta quy ước : $0! = 1$.

b) Dấu của hoán vị : Mỗi hoán vị của tập $E_n = \{1, 2, ..., n\}$ có thể xem là một song ánh từ tập E_n vào chính nó. Ký hiệu S_n là tập các hoán vị của tập E_n. Tập S_n có n! phần tử. Mỗi hoán vị $\sigma \in S_n$ thường được trình bày dưới dạng bảng như sau :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma_{(1)} & \sigma_{(2)} & \ldots & \sigma_{(n)} \end{pmatrix}.$$

Xét hoán vị σ, nếu $i < j$ và $\sigma_{(i)} > \sigma_{(j)}$ thì ta nói trong hoán vị σ cặp số $\sigma_{(i)}$ và $\sigma_{(j)}$ lập thành một *nghịch thế*.

Số nghịch thế của hoán vị σ được ký hiệu là N(σ). Để tính số nghịch thế N(σ) ta có thể tiến hành như sau :

Gọi : k_1 là số phần tử $\sigma_{(i)} < \sigma_{(1)}$ trong dãy $\sigma_{(1)}, ..., \sigma_{(n)}$;

k_2 là số phần tử $\sigma_{(i)} < \sigma_{(2)}$ trong dãy $\sigma_{(2)}, ..., \sigma_{(n)}$;

. . .

k_p là số phần tử $\sigma_{(i)} < \sigma_{(p)}$ trong dãy $\sigma_{(p)}, ..., \sigma_{(n)}$;

. . .

Ta có : $N(\sigma) = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$.

Đặt : $\text{sgn}\sigma = (-1)^{N(\sigma)}$ (Ký hiệu sgnσ đọc là xích-num của σ).

Giá trị sgnσ gọi là *dấu* của hoán vị σ. Nếu sgnσ = 1 thì σ gọi là *hoán vị chẵn* ; nếu sgnσ = −1 thì σ gọi là *hoán vị lẻ*.

Ví dụ : Hoán vị $\sigma \in S_5$ cho bởi :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta có : $N(\sigma) = 3 + 3 + 0 + 1 + 0 = 7$, $\text{sgn}\sigma = -1$.

Đó là một hoán vị lẻ.

1.4.3. Chỉnh hợp lặp

Định nghĩa : Giả sử E là một tập có n phần tử. Mỗi dãy p phần tử (có thể lặp lại, không cần phân biệt) của tập E được sắp xếp theo một thứ tự nào đó gọi là một *chỉnh hợp lặp chập p* của tập E có n phần tử.

Ví dụ : Giả sử E = {a, b, c, d} với thứ tự từ trái sang phải ta có : {a, b, c}, {a, a, b}, {a, b, b}, {d, b, a}, {a, b, d}, v.v... là các chỉnh hợp lặp chập 3 của tập E có 4 phần tử.

Số chỉnh hợp lặp : Theo định nghĩa, mỗi chỉnh hợp lặp chập p của tập E có n phần tử có thể xem là một phần tử của lũy thừa Đề-các E^p, và ngược lại mỗi phần tử của E^p xác định một chỉnh hợp lặp. Vậy số chỉnh hợp lặp chập p của tập E có n phần tử là n^p.

1.4.4. Tổ hợp

Mỗi tập con p phần tử (phân biệt) của tập E có n phần tử gọi là một *tổ hợp chập p* của tập E.

Người ta thường ký hiệu số tổ hợp chập p của tập có n phần tử là C_n^p hay $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$.

Mệnh đề 1.4 :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}. \tag{1.7}$$

Ta quy ước : $C_n^0 = 1$.

Chứng minh : Giả sử E là tập có n phần tử. Ứng với mỗi tổ hợp $\{a_1, a_2, ..., a_p\}$ chập p của E bằng cách hoán vị các phần tử của tổ hợp này ta được p! chỉnh hợp chập p khác nhau của tập E. Do đó số chỉnh hợp chập p của E bằng p! lần số tổ hợp chập p của E. Vậy ta có :

$$A_n^p = p!C_n^p\ ;$$

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Công thức (1.7) được chứng minh.■

Mệnh đề 1.5 : Với $1 \le p \le n$ ta có :

a) $C_n^p = C_n^{n-p}$; (1.8)

b) $C_n^p = C_{n-1}^{n-p} + C_{n-1}^p$. (1.9)

Chứng minh :

Theo công thức (1.7) ta có :

a) $$C_n^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = C_n^p.$$

b) $$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}$$

$$= \frac{p(n-1)! + (n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p.$$

1.4.5. Nhị thức Niutơn

Trong Toán học sơ cấp đã có các hằng đẳng thức :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\ ;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Các công thức này có thể viết dưới dạng :

$$(a+b)^2 = \sum_{i=0}^{2} C_2^i a^{2-i} b^i = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2\ ;$$

$$(a+b)^3 = \sum_{i=0}^{3} C_3^i a^{3-i} b^i = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3.$$

Một cách tổng quát, với $n \ge 1$ ta có :

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^n b^n. \quad (1.10)$$

Công thức (1.10) gọi là *nhị thức Niutơn.*

Để chứng minh công thức (1.10), xét biểu thức $(x + 1)^n$.

Đặt : $X_1 = X_2 = ... = X_n = x + 1$, ta có :

$$(x + 1)^n = X_1X_2 ... X_n.$$

Rõ ràng rằng :

$$(x + 1)^n = x^n + k_{n-1}x^{n-1} + ... + k_1x + 1.$$

Nhận thấy hệ số k_p của x^p bằng số cách chọn p lần x trong n thừa số $X_1, X_2, ..., X_n$. Vậy k_p là số tổ hợp chập p của tập có n phần tử.

Ta có : $$k_{n-i} = C_n^{n-i} = C_n^i.$$

Vậy ta có :

$$(x + 1)^n = x^n + C_n^1x^{n-1} + ... + C_n^{n-1}x + 1.$$

Vì $C_n^0 = C_n^n = 1$, với $x = \dfrac{a}{b}$ ta có :

$$(a + b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + ... + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n. \blacksquare$$

Từ công thức (1.9) và $C_n^0 = C_n^n = 1$ có thể tính các hệ số của nhị thức $(a + b)^n$ một cách đơn giản khi biết hệ số của nhị thức $(a + b)^{n-1}$. Các phần tử ở hàng thứ n của bảng (1.11) sau đây là hệ số của nhị thức $(a + b)^{n-1}$.

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
...	...	...	...	...	...			
1	...	$\boxed{C_{n-1}^{p-1}}$	$\boxed{C_{n-1}^{p}}$	...	...	1		(1.11)
1	...	...	C_n^p	...	...	...	1	

Chẳng hạn, các phần tử ở hàng thứ 5 của bảng (1.11) là các hệ số của nhị thức bậc 4. Ta có :

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Từ hàng thứ 5 của bảng (1.11) có thể tính một cách dễ dàng các hệ số của nhị thức bậc 5.

Theo công thức : $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$, ta có :

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Bảng (1.11) thường gọi là *tam giác Paxcan.*

BÀI TẬP

Đề bài

1.1. Hãy chứng minh các hệ thức sau đây :

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

3) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$;

4) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

5) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$.

1.2. Chứng minh công thức De Morgan :

1) $X \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (X \setminus A_i)$;

2) $X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (X \setminus A_i)$.

1.3. Hãy biểu diễn hình học trên mặt phẳng tọa độ tập $A \times B$ với :

1) $A = \{a \in \mathbb{R} : 0 \le a \le 3\}$,
$B = \{b \in \mathbb{R} : |b| \le 1\}$;

2) $A = \{a \in \mathbb{R} : |a| \le 5\}$,
$B = \{b \in \mathbb{Z} : |b| \le 5\}$;

3) $A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x > y\}$.

1.4. $\mathbb{Z}$ là tập các số nguyên, $\mathbb{N}^*$ là tập các số nguyên dương. Quan hệ ~ trên tập $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ được xác định như sau :

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Chứng minh rằng đó là một quan hệ tương đương trên tập $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

1.5. $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên. Trên tập $\mathbb{N}^n$ xét quan hệ $\leq$ xác định như sau :

$$(a_1, ..., a_n) \leq (a_1, ..., a_n)\ ;\ (a_1, ..., a_n) < (b_1, ..., b_n)$$

khi và chỉ khi tồn tại $i \leq n$ sao cho : $a_k = b_k$, với $k = 1, ..., i-1$ và $a_i < b_i$.

Chứng minh rằng đó là một quan hệ thứ tự toàn phần trên tập $\mathbb{N}^n$. Quan hệ thứ tự này gọi là quan hệ *thứ tự từ điển*.

1.6. $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên. Trên tập $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ xét quan hệ $\leq$ xác định như sau :

$$(i, j) \leq (k, m) \Leftrightarrow i + j < k + m : \text{nếu } i + j = k + m \text{ thì } i \leq k.$$

Chứng minh rằng đó là một quan hệ thứ tự toàn phần trên tập $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Viết theo thứ tự đó các phần tử đi trước phần tử (3, 0).

1.7. Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Giả sử A, B là các tập con của tập X ; C, D là các tập con của tập Y. Chứng minh các hệ thức sau :

1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$;

2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
(Cho một ví dụ chứng tỏ nói chung $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$) ;

3) $f(A \setminus B) \supseteq f(A) \setminus f(B)$;

4) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;

5) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;

6) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

1.8. Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Quan hệ ~ trên tập X được xác định như sau :

$$x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

1) Hãy chứng tỏ đó là một quan hệ tương đương trên tập X.

2) Xác định các lớp tương đương của quan hệ đó đối với trường hợp $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi $f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.

1.9. Ký hiệu $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương. Bằng cách xét các ánh xạ :

$$g : (a, b) \to \mathbb{R}^+, \text{ xác định bởi } g(x) = \frac{b - x}{x - a} \ (a, b \in \mathbb{R});$$

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \text{ xác định bởi } f(x) = \log x.$$

Hãy chứng tỏ tập các số thực thuộc khoảng mở (a, b) cùng lực lượng với tập $\mathbb{R}$ tất cả các số thực.

1.10. 1) Cho A, B là các tập vô hạn đếm được rời nhau :

$$A = \{a_0, a_1, \ldots\} ; B = \{b_0, b_1, \ldots\}.$$

Xét tập $X = A \cup B$. Bằng cách xét ánh xạ $f : X \to \mathbb{N}$ xác định bởi $f(a_i) = 2i$, $f(b_i) = 2i + 1$, $i = 0, 1, \ldots$

Hãy chứng tỏ X là một tập vô hạn đếm được.

2) Chứng minh rằng tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ là tập vô hạn đếm được.

1.11. Cho trước n điểm trong mặt phẳng, sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng.

1) Tính số đoạn thẳng nối các cặp điểm đó.

2) Tính số tam giác có đỉnh là các điểm đó.

3) Áp dụng đối với trường hợp : n = 2, n = 6, n = 12.

1.12. Chứng minh các đẳng thức sau :

1) $$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n ;$$

2) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0.$$

1.13. Giả sử rằng p, n là các số nguyên thỏa mãn $n \geq p > 0$.

1) Tính số song ánh của tập có n phần tử vào chính nó.

2) Tính số đơn ánh từ tập B có p phần tử vào tập X có n phần tử.

3) Xét các hoán vị :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} ; \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Tìm $\alpha \circ \beta$; $\beta \circ \alpha$; α^{-1} và β^2.

b) Xét tính chẵn lẻ của α, β và β^2.

1.14. Giả sử A là một tập hữu hạn có n phần tử, B là tập hữu hạn có m phần tử, p là số tự nhiên.

1) Tính số phần tử của các tập $A \times B$, A^p.

2) Tính số phần tử của tập P(A) là các tập con của tập A.

3) Tính số các quan hệ trên tập A.

4) Tính số ánh xạ từ tập A vào tập B.

Đáp số và hướng dẫn

1.3. 1) Hình chữ nhật có các đỉnh M(0, 1), N(3, 1), P(3, −1) và Q(0, −1).

2) Các đoạn thẳng M_kN_k, trong đó $M_k(-5, k)$, $N_k(5, k)$, $k = 0, \pm1, ..., \pm5$.

3) Những điểm có tọa độ nguyên nằm phía dưới đường phân giác thứ nhất.

1.6. $(0, 0) < (0, 1) < (1, 0) < (0, 2) < (1, 1) < (2, 0) < (0, 3) < (1, 2) < (2, 1) < (3,0)$.

1.7. 2) $\bar{\alpha} = \{\pm\alpha + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $\alpha \in [0, \pi]$.

1.8. 1) Hãy chứng tỏ g, f là các song ánh, do đó tích $f_\circ g$ là một song ánh từ (a, b) lên $\mathbb{R}$.

2) Xét ánh xạ, chẳng hạn $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ xác định bởi :

$$h(n) = \begin{cases} 2n & \text{nếu } n \geq 0 \\ 2|n| + 1 & \text{nếu } n < 0 \end{cases}$$

và chứng tỏ h là một song ánh.

1.11. 1) Số đoạn thẳng là $k = C_n^2$.

2) Số tam giác là $l = C_n^3$.

3) Với $n = 2$: $k = 1$, $l = 0$;

Với $n = 6$: $k = 15$, $l = 20$;

Với $n = 12$: $k = 66$, $l = 220$.

1.12. 1) $$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

2) $$0 = (1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k.$$

1.13. 1) n!.

2) A_n^p.

3) $\alpha_\circ\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\beta_\circ\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$\alpha^{-1} = \alpha$

$\beta^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$\text{sgn}\alpha = 1$, $\text{sgn}\sigma = 1$, $\text{sgn}\beta^2 = 1$.

1.14. 1) nm ; n^p.

2) Số tập con có k phần tử của tập A là C_n^k.

Vậy số phần tử của P(A) là $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

3) Vì mối quan hệ trên tập A là một tập con của A × A, do đó số quan hệ trên tập A bằng số phần tử của tập P(A × A) và bằng 2^{n^2}.

4) m^n (Chẳng hạn, có thể lập luận như sau : Vì mỗi ánh xạ f : A → B hoàn toàn xác định nếu biết các ảnh $f(a_i)$, $a_i \in A$, i = 1, ..., n, do đó mỗi ánh xạ f : A → B tương ứng duy nhất với một phần tử $(f(a_1), ..., f(a_n))$ của lũy thừa Đề-các B^n và ngược lại).

Chương II

SỐ PHỨC, ĐA THỨC VÀ PHÂN THỨC HỮU TỶ

2.1. KHÁI NIỆM NHÓM, VÀNH, TRƯỜNG

2.1.1. Phép toán hai ngôi

Chúng ta nhận thấy rằng, phép cộng các số nguyên là một ánh xạ ứng mỗi cặp (a, b) $\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ với số c = a + b $\in \mathbb{Z}$. Tương tự phép nhân các số nguyên là một ánh xạ ứng mỗi cặp (a, b) $\in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ với số nguyên d = a.b. Một cách tổng quát ta có định nghĩa sau :

Định nghĩa : Giả sử X là một tập. Mỗi ánh xạ $\theta : X \times X \to X$ gọi là *một phép toán hai ngôi* (hay *luật hợp thành*, hay *phép toán đại số*) trên tập X.

Phần tử θ(x, y) gọi là *hợp thành* của các phần tử x, y. Có hai cách ký hiệu phần tử hợp thành :

– Ký hiệu theo lối cộng : θ(x, y) = x + y, gọi là *tổng* của x với y.

– Ký hiệu theo lối nhân : θ(x, y) = x.y (hoặc xy, x*y, v.v...), gọi là *tích* của x với y.

Xét phép toán hai ngôi θ trên tập X, ký hiệu theo lối nhân : θ(x, y) = x.y. Phép toán hai ngôi θ gọi là :

– Có tính chất *kết hợp* nếu (x.y).z = x.(y.z) với mọi phần tử x, y, z thuộc X.

– Có tính chất *giao hoán* nếu x.y = y.x với mọi phần tử x, y thuộc X.

– Có phần tử *trung hòa* (hay *đơn vị*) nếu tồn tại phần tử e $\in$ X sao cho e.x = x.e = x với mọi phần tử x $\in$ X.

Ví dụ : Phép cộng các số nguyên là một phép toán kết hợp, giao hoán và có phần tử trung hòa là số 0. Phép nhân các số nguyên là một phép toán kết hợp, giao hoán và có phần tử trung hòa là số 1.

Tính chất 1 : Nếu phép toán hai ngôi θ có phần tử trung hòa e thì e là phần tử trung hòa duy nhất.

Thật vậy, nếu e và e' là hai phần tử trung hòa của phép toán θ, khi đó theo định nghĩa ta có :

$$e' = e'.e = e. \blacksquare$$

Phần tử khả nghịch : Phần tử $x \in X$ gọi là *khả nghịch* nếu tồn tại phần tử $y \in X$ sao cho $x.y = y.x = e$.

Phần tử y gọi là *nghịch đảo* của phần tử x.

Ví dụ :

– Đối với phép toán nhân các số nguyên chỉ có hai phần tử khả nghịch đó là 1 và -1.

– Đối với phép toán cộng các số nguyên thì mọi số nguyên đều khả nghịch, nghịch đảo của a là $-a$.

Tính chất 2 : Nếu phép toán hai ngôi θ có tính chất kết hợp thì mỗi phần tử khả nghịch x có duy nhất một phần tử nghịch đảo, ký hiệu là x^{-1}.

Thật vậy, giả sử y, y' là các nghịch đảo của x. Khi đó ta có :

$$x.y = y'.x = e.$$

Do đó :

$$y' = y'.e = y'.(x.y) = (y'.x).y = e.y = y. \blacksquare$$

Trong trường hợp phép toán hai ngôi ký hiệu theo lối cộng, thì phần tử trung hòa thường gọi là *phần tử không* và ký hiệu là 0 ; phần tử nghịch đảo của phần tử a thường ký hiệu là $-a$, gọi là *phần tử đối* của a.

Ký hiệu (X, .) chỉ tập X cùng với phép toán hai ngôi ký hiệu theo lối nhân, $\theta(x, y) = x.y$.

2.1.2. Nhóm

Định nghĩa : *Nhóm* là một tập được trang bị một phép toán hai ngôi kết hợp, có phần tử trung hòa và mọi phần tử đều khả nghịch.

Vậy (G, .) là một nhóm nếu thỏa mãn các điều kiện sau đây :

*) $(x.y).z = x.(y.z)$ với $\forall x, y, z \in G$;

*) $\exists e \in G : x.e = e.x = x$ với $\forall x \in G$;

*) $\forall x \in G, \exists x^{-1} \in G : x.x^{-1} = x^{-1}.x = e$.

Nếu phép toán hai ngôi giao hoán : $x.y = y.x$ với mọi x, y thuộc G thì (G, .) gọi là *nhóm giao hoán* hay *nhóm Aben.*

Ví dụ :

a) Đối với phép cộng, phép nhân các số thông thường ta có :

*) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ là các nhóm Aben.

*) Còn $(\mathbb{Q}, .)$, $(\mathbb{R}, .)$ không phải là nhóm (vì số 0 không khả nghịch đối với phép toán nhân).

b) Giả sử X là một tập khác rỗng.

Đặt $S(X) = \{f : X \to X, f \text{ là song ánh}\}$.

Trong tập S(X), xét phép toán tích của các ánh xạ f và $g \in S(X)$ như sau : $\theta(f, g) = f_\circ g$, trong đó ánh xạ $f_\circ g : X \to X$ xác định bởi :

$$f_\circ g(x) = f(g(x)), \forall x \in X.$$

Đối với mọi f, g, h thuộc S(X) và mọi x thuộc X ta có :

$$(f_\circ g)_\circ h(x) = f_\circ g(h(x)) = f(g(h(x)))$$
$$= f(g_\circ h(x)) = f_\circ(g_\circ h)(x).$$

Do đó $(f_\circ g)_\circ h = f_\circ(g_\circ h)$. Vậy θ là một phép toán kết hợp. Phép toán θ có phần tử trung hòa $e = i_X$. Với mọi $f \in S(X)$ có nghịch đảo là ánh xạ ngược f^{-1}. Vậy $(S(X), _\circ)$ là một nhóm. Nhóm $(S(X), _\circ)$ gọi là *nhóm các phép thế* trên tập X.

Nếu tập $X = E_n = \{1, 2, ..., n\}$ thì $(S(E_n), _\circ)$ gọi là *nhóm đối xứng bậc n*, được ký hiệu là S_n. Dễ dàng chứng tỏ rằng, với $n \geq 3$ nhóm đối xứng S_n không giao hoán. Theo mục 1.4.2, mỗi phần tử của S_n là một hoán vị của tập có n phần tử. Do đó nhóm S_n có n! phần tử.

c) Giả sử n là một số nguyên dương cho trước.

Đối với số nguyên x, nếu $x = kn + r$, trong đó k, r là các số nguyên và $0 \leq r < n$ thì ta viết : $x = r \bmod (n)$.

Ví dụ : $6 = 0 \bmod (2)$; $-7 = 2 \bmod (3)$.

Trong tập n số tự nhiên $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n - 1\}$, xét hai phép toán sau :

– *Phép cộng đồng dư n :*

$$i + j = r \bmod (n), \forall i, j \in \mathbb{Z}_n.$$

– *Phép nhân đồng dư n :*

$$i.j = s \bmod (n), \forall i, j \in \mathbb{Z}_n.$$

Xem như bài tập, bạn đọc có thể chứng minh được phép cộng đồng dư n có phần tử trung hòa là 0 ; phép nhân đồng dư n có phần tử trung hòa là 1. Đó là các phép toán kết hợp, giao hoán.

$(\mathbb{Z}_n, +)$ là một nhóm Aben. Phần tử đối của $i \in \mathbb{Z}_n$ là $n - i$. Còn $(\mathbb{Z}_n, .)$ không phải là nhóm. Phần tử $i \in \mathbb{Z}_n$ khả nghịch khi và chỉ khi i nguyên tố cùng nhau với n.

Nhóm $(\mathbb{Z}_n, +)$ gọi là *nhóm cộng các số nguyên đồng dư n.*

Nhóm con : Giả sử (G, .) là một nhóm với phần tử trung hòa e. Tập con khác rỗng $X \subseteq G$ gọi là *nhóm con* của nhóm (G, .) nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn :

1) $\forall x, y \in X \Rightarrow x.y \in X$;

2) $\forall x \in X \Rightarrow x^{-1} \in X$.

Giả sử A là một nhóm con bất kỳ của nhóm G. Vì $A \neq \varnothing$ nên tồn tại $a \in A$. Theo điều kiện 2 thì $a^{-1} \in A$. Theo điều kiện 1 ta có $e = a.a^{-1} \in A$. Vậy mọi nhóm con đều chứa phần tử trung hòa e của nhóm (G, .). Do đó mỗi nhóm con cũng là một nhóm đối với phép toán đang xét.

Ví dụ :

a) Mỗi nhóm (G, .) đều có hai nhóm con hiển nhiên đó là G và $\{e\}$.

b) Tập các số chẵn : $2\mathbb{Z} = \{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ là một nhóm con của nhóm cộng các số nguyên $(\mathbb{Z}, +)$.

c) Tập các số thực dương $\mathbb{R}^+$ là một nhóm con của nhóm nhân $(\mathbb{R}^*, .)$ các số thực khác 0.

Đồng cấu nhóm : Giả sử (G, .) và (G', ∘) là các nhóm. Mỗi đồng cấu từ nhóm (G, .) vào nhóm (G', ∘) là một ánh xạ $f : G \to G'$ thỏa mãn điều kiện :

$$f(x.y) = f(x)\circ f(y).$$

Nếu đồng cấu f là một song ánh thì ta nói f là một đẳng cấu. Khi đó ta viết $(G, .) \cong (G', \circ)$.

Ví dụ : Xét các nhóm nhân $(\mathbb{R}^+, .)$ các số thực dương và nhóm cộng $(\mathbb{R}, +)$ các số thực. Ánh xạ $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ xác định bởi :

$$f(x) = \log x.$$

Theo tính chất hàm số logarit ta có :

$$f(x.y) = \log(x.y) = \lg x + \log y = f(x) + f(y).$$

Vậy f là một đồng cấu nhóm. Theo tính chất của hàm số logarit, dễ dàng thấy rằng, ánh xạ f là một song ánh. Do đó f là một đẳng cấu và ta có $(\mathbb{R}^+, .) \cong (\mathbb{R}, +)$.

2.1.3. Vành, trường

Định nghĩa : *Vành* là một tập K được trang bị hai phép toán hai ngôi, một phép toán ký hiệu theo lối cộng "+" gọi là phép cộng ; phép toán kia ký hiệu theo lối nhân "." gọi là phép nhân, sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn :

1) (K, +) là một nhóm Aben.

2) Phép nhân có tính chất kết hợp :

$$x.(y.z) = (x.y).z \; ; \forall x, y, z \in K.$$

3) Phép nhân phân phối đối với phép cộng :

$$x.(y + z) = x.y + x.z \; ;$$

$$(y + z).x = y.x + z.x \; ; \forall x, y, z \in K.$$

Trong nhóm Aben (K, +) phần tử trung hòa thường ký hiệu là 0, gọi là phần tử *không* của vành ; phần tử nghịch đảo của phần tử x ký hiệu là –x, gọi là phần tử *đối* của phần tử x.

Tổng x + (–y), thường viết x – y, gọi là *hiệu* của phần tử x với phần tử y.

Nếu phép nhân giao hoán (x.y = y.x với mọi x, y thuộc K thì (K, +, .) gọi là *vành giao hoán.*

Nếu phép nhân có phần tử trung hòa, thì phần tử trung hòa đó gọi là *đơn vị của vành*, thường ký hiệu là 1. Khi đó vành (K, +, .) gọi là *vành có đơn vị*. Ta có : x.1 = 1.x = x, với mọi $x \in K$.

Định nghĩa : *Trường* là một vành (K, +, .) giao hoán có đơn vị $1 \neq 0$, trong đó mọi phần tử $x \neq 0$ đều khả nghịch đối với phép toán nhân, tức là tồn tại $x^{-1} \in K$ sao cho $x.x^{-1} = 1$.

Ví dụ :

a) Đối với phép toán cộng, nhân các số thông thường thì :

– ($\mathbb{N}$, +, .) không phải là vành vì ($\mathbb{N}$, +) không phải là nhóm Aben ;

– ($\mathbb{Z}$, +, .) là một vành giao hoán có đơn vị, nhưng không phải là trường và gọi là *vành các số nguyên.*

– ($\mathbb{Q}$, +, .) là một trường, gọi là *trường hữu tỷ.*

– ($\mathbb{R}$, +, .) là một trường, gọi là *trường số thực.*

b) Với phép cộng, phép nhân đồng dư p, thì ($\mathbb{Z}_p$, +, .) là một vành giao hoán có đơn vị, được gọi là *vành các số nguyên đồng dư mod (p).* Vành ($\mathbb{Z}_p$, +, .) là một trường khi và chỉ khi p là một số nguyên tố. Việc chứng minh được xem như bài tập.

Vành con : Giả sử (K, +, .) là một vành. Nhóm con A của nhóm cộng (K, +) gọi là *vành con* của vành (K, +, .) nếu điều kiện sau được thỏa mãn :

$$\forall x, y \in A \Rightarrow x.y \in A.$$

Dễ thấy rằng, đối với các phép toán đang xét thì (A, +, .) cũng là một vành. Ta nói rằng, vành *K* là *mở rộng của vành A.*

Ví dụ : Tập các số chẵn $2\mathbb{Z}$ là một vành con của vành các số nguyên ($\mathbb{Z}$, +, .).

Trường con : Giả sử (K, +, .) là một trường. *Trường con* của trường (K, +, .) là một vành con $P \neq \{0\}$ thỏa mãn điều kiện :

$$\forall x \in P, \text{ nếu } x \neq 0 \Rightarrow x^{-1} \in P.$$

Ví dụ : Tập các số hữu tỷ $\mathbb{Q}$ là một trường con của trường các số thực $(\mathbb{R}, +, .)$. Tập các số nguyên $\mathbb{Z}$ là một vành con của trường các số thực $(\mathbb{R}, +, .)$. Nhưng $\mathbb{Z}$ không phải là trường con của trường $(\mathbb{R}, +, .)$ vì với $x \in \mathbb{Z}, x \neq 0, x \neq \pm 1$ thì $x^{-1} \notin \mathbb{Z}$.

Dễ thấy rằng, nếu P là một trường con của trường (K, +, .) với các phép toán đang xét thì (P, +, .) cũng là một trường. Và ta nói rằng, *trường K là trường mở rộng của trường P.*

Đồng cấu vành : Giả sử (K, +, .) và (K', +, .) là các vành cho trước. Một đồng cấu từ vành (K, +, .) vào vành (K', +, .) là một ánh xạ $f : K \to K'$ thỏa mãn các điều kiện sau :

1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$;

2) $f(x.y) = f(x).f(y), \forall x, y \in K$.

Ta nhận thấy, mỗi đồng cấu vành là một ánh xạ bảo toàn các phép toán.

Nếu đồng cấu f là một song ánh thì f được gọi là *đẳng cấu vành*. Khi đó ta nói các vành (K, +, .) và (K', +, .) đẳng cấu với nhau và viết :

$$(K, +, .) \cong (K', +, .).$$

Giả sử K' là một vành con của vành (E, +, .) và $f : K \to K'$ là một đẳng cấu vành. Bằng cách đồng nhất mỗi phần tử $x \in K$ với phần tử $f(x) \in K' \subseteq E$ thì có thể xem K là một vành con của vành (E, +, .).

2.2. TRƯỜNG SỐ PHỨC

Ta biết rằng trong trường số thực $\mathbb{R}$, phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ nếu có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ thì không có nghiệm. Chẳng hạn, phương trình : $x^2 + 1 = 0$ không có nghiệm thực. Do đó cần phải mở rộng trường số thực $\mathbb{R}$ để các phương trình đó có nghiệm.

2.2.1. Trường số phức $\mathbb{C}$

Mỗi cặp số thực (a, b) gọi là một *số phức*. Số phức z = (a, b) bằng số phức z' = (a', b') khi và chỉ khi a = a' và b = b'. Ký hiệu $\mathbb{C}$ là tập tất cả các số phức. Phép toán cộng, phép toán nhân các số phức được định nghĩa như sau :

– *Phép cộng số phức* :

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) ; \qquad (2.1)$$

– *Phép nhân số phức* :

$$(a, b).(c , d) = (ac - bd, ad + bc). \qquad (2.2)$$

Định lý 2.1 :

1) Tập các số phức $\mathbb{C}$ với phép cộng số phức và phép nhân số phức là một trường, được gọi là *trường số phức*.

2) Tập các số phức có dạng (a, 0), $a \in \mathbb{R}$ là một trường con của trường số phức $\mathbb{C}$ và đẳng cấu với trường số thực $\mathbb{R}$.

Chứng minh : Dễ thấy $(\mathbb{C}, +)$ là một nhóm Aben có phần tử trung hòa là (0, 0) ; phần tử đối của số phức (a, b) là (–a, –b). Bằng cách sử dụng các công thức (2.1) và (2.2) chúng ta có thể chứng tỏ phép nhân các số phức có các tính chất giao hoán, kết hợp, phân phối đối với phép cộng số phức và có phần tử đơn vị là (1, 0), số phức $(a, b) \neq (0, 0)$ có nghịch đảo là $\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right)$.

Vậy $(\mathbb{C}, +, .)$ là một trường.

Để chứng minh phần 2) của định lý, xét tập con :

$$\mathbb{R}' = \{z = (a, 0): a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}.$$

Dễ thấy rằng, nếu $z, z' \in \mathbb{R}'$ thì $z + z' \in \mathbb{R}'$, $z.z' \in \mathbb{R}'$, và nếu $z = (a, 0) \neq 0$ thì $z^{-1} = \left(\dfrac{1}{a}, 0\right) \in \mathbb{R}'$. Vậy $\mathbb{R}'$ là một trường con của trường số phức $\mathbb{C}$.

Xét ánh xạ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}'$, xác định bởi $f(a) = (a, 0)$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Rõ ràng f là một song ánh, song ánh f là một đồng cấu vành. Thật vậy, với mọi $a, b \in \mathbb{R}$ ta có :

$$f(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = f(a) + f(b) ;$$

$$f(a.b) = (a.b, 0) = (a, 0).(b, 0) = f(a).f(b).$$

Vậy f là một đẳng cấu từ trường số thực $\mathbb{R}$ lên trường con $\mathbb{R}'$ của trường số phức $\mathbb{C}$. Định lý được chứng minh.■

Theo Định lý 2.1, nếu đồng nhất mỗi số thực a với số phức (a, 0) ta có thể xem $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ và trường số thực $\mathbb{R}$ là một trường con của trường số phức $\mathbb{C}$. Ta sẽ viết (a, 0) là a. Vậy 1 = (1, 0) ; 0 = (0, 0).

2.2.2. Dạng đại số của số phức

Đặt i = (0, 1), số phức *i* được gọi là *đơn vị ảo*. Theo (2.2) thì :

$$i^2 = (0, 1).(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Ta có :
$$i^2 = -1. \tag{2.3}$$

Từ đẳng thức (2.3) ta có $i^2 + 1 = 0$. Do đó i là một nghiệm phức của phương trình $x^2 + 1 = 0$.

Với mỗi $b \in \mathbb{R}$, ta có :

$$b.i = (b, 0).(0, 1) = (0, b).$$

Với mỗi số phức z = (a, b) ta có :

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi.$$

Vậy ta có :

$$z = (a, b) = a + bi. \tag{2.4}$$

Công thức (2.4) gọi là *dạng đại số* của số phức.

Nếu z = a + bi thì a gọi là *phần thực* của z, ký hiệu là a = Rez ; b gọi là *phần ảo* của z và ký hiệu b = Imz.

Số phức có dạng z = a + 0i là một số thực.

Số phức có dạng z = 0 + bi gọi là số *thuần ảo*.

Chú ý : Vì $i^2 = -1$ nên ta có :

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i ;$$

$$(a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

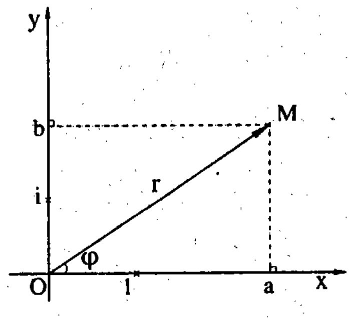
Do đó, để thực hiện các phép tính đối với các số phức ta có thể thực hiện các phép tính cho các biểu thức của i với hệ số thực và lưu ý $i^2 = -1$.

Trường số : Mỗi trường con của trường số phức $\mathbb{C}$ được gọi là *trường số*.

Vậy, trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$, trường số thực $\mathbb{R}$ là các trường số. Xem như một bài tập, bạn đọc có thể chứng minh : Mọi trường số P đều chứa trường số hữu tỷ $\mathbb{Q}$.

2.2.3. Dạng lượng giác của số phức

Cho tương ứng mỗi số phức $z = a + bi$ với một điểm M(a, b) thuộc mặt phẳng tọa độ Oxy (hình 2.1). Dễ thấy rằng, tương ứng đó là một song ánh. Khi đó mặt phẳng Oxy gọi là *mặt phẳng phức*, trục hoành Ox gọi là *trục thực*, trục tung Oy gọi là *trục ảo* của mặt phẳng phức. Điểm M(a, b) hoàn toàn xác định khi biết vectơ $\overrightarrow{OM}$. Vectơ $\overrightarrow{OM}$ xác định nếu biết độ dài $\left|\overrightarrow{OM}\right| = r$ và góc $\widehat{(Ox, OM)} = \varphi + 2k\pi$ với $0 \le \varphi < 2\pi$.



Hình 2.1

Ta có :

$$\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases} \qquad (2.5)$$

Độ dài vectơ $\overrightarrow{OM}$ gọi là *môđun* của số phức z, ký hiệu là $|z|$.

Ta có :

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}. \qquad (2.6)$$

Góc $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ gọi là *argumen* của số phức z, ký hiệu là Argz. Góc φ gọi là *giá trị chính* của argumen của z, ký hiệu là argz.

Theo các công thức (2.4) và (2.5) ta có :

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2.7)$$

Công thức (2.7) gọi là *dạng lượng giác* của số phức z.

Ví dụ : Tìm dạng lượng giác của số phức $z = 1 + i\sqrt{3}$.

Ta có : $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. Vì điểm $M(1, \sqrt{3})$ nằm ở góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng Oxy nên ta có $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Số phức đã cho có dạng lượng giác là $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Sau đây chúng ta xét một vài ứng dụng dạng lượng giác của số phức.

2.2.4. Tích, thương các số phức viết dưới dạng lượng giác

Tích hai số phức : Giả sử : $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$;

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Ta có :

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$= r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)$$
$$= r_1r_2[(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Ta có công thức :

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \qquad (2.8)$$

Vậy, *tích hai số phức là một số phức có môđun bằng tích các môđun, có argumen bằng tổng các argumen.*

Thương hai số phức : Giả sử $z_2 \neq 0$, ta có :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

Ta có công thức :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right). \tag{2.9}$$

Vậy, *thương hai số phức là một số phức có môđun bằng thương các môđun, có argumen bằng hiệu các argumen.*

2.2.5. Lũy thừa của số phức, công thức Moavơrơ

Giả sử $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Theo công thức (2.8) ta có :

$$z^2 = z.z = r^2(\cos2\varphi + i\sin2\varphi)\ ;$$

$$z^3 = z^2.z = r^3(\cos3\varphi + i\sin3\varphi).$$

Bằng quy nạp, ta có công thức (2.10) gọi là công thức Moavơrơ.

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{2.10}$$

Ví dụ : Tính $(1 - i)^8$.

Để áp dụng công thức (2.10), phải tìm dạng lượng giác của số phức $z = 1 - i$. Ta có : $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vì điểm M(1, −1) nằm ở góc phần tư thứ tư của mặt phẳng Oxy, nên ta lấy $\varphi = \frac{7\pi}{4}$.

Vậy : $$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Theo công thức (2.10) ta có :

$$(1 - i)^8 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right]^8;$$

$$(1 - i)^8 = 16(\cos14\pi + i\sin14\pi) = 16.$$

Sử dụng công thức Moavơrơ, có thể chứng minh một số đồng nhất thức lượng giác. Chẳng hạn, với r = 1, n = 3 ta có :

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos3\varphi + i\sin3\varphi.$$

Mặt khác, áp dụng công thức khai triển nhị thức ta có :

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi).$$

Vậy :

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi).$$

So sánh phần thực với phần thực, phần ảo với phần ảo ở hai vế ta nhận được các đồng nhất thức lượng giác sau :

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi;$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

2.2.6. Khai căn số phức

Định nghĩa : Giả sử n là một số nguyên dương. Gọi căn bậc n của số phức z là số phức v sao cho $v^n = z$.

Khi $z = 0$, rõ ràng $v = 0$.

Giả sử $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z \neq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Đặt $v = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $0 \leq \theta < 2\pi$.

Theo công thức Moavrơ ta có :

$$v^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Vậy ta có : $\rho = \sqrt[n]{r}$;

$$\cos n\theta = \cos\varphi \Rightarrow \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Vì $0 \leq \theta < 2\pi$ nên k chỉ lấy các giá trị $0, 1, ..., n - 1$.

Ta có định lý :

Định lý 2.2 : Với $n > 0$, căn bậc n của số phức $z \neq 0$ có n giá trị khác nhau. Số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ có các căn bậc n là :

$$v_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad (2.11)$$

$$k = 0, 1, ..., n - 1.$$

Ví dụ : Tìm căn bậc 5 của số phức $z = -2 + 2i$.

Trước hết biểu diễn số phức đã cho dưới dạng lượng giác ta có :

$$-2+2i = 2^{\frac{3}{2}}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ).$$

Theo công thức (2.11) số phức $-2+2i$ có căn bậc 5 là :

$$v_k = 2^{\frac{3}{10}}\left(\cos\frac{135^\circ + k360^\circ}{5} + i\sin\frac{135^\circ + k360^\circ}{5}\right)$$

$$= 2^{\frac{3}{10}}[\cos(27^\circ + k72^\circ) + i\sin(27^\circ + k72^\circ)],$$

$k = 0, 1, 2, 3, 4.$

Căn bậc n của đơn vị : Ta có : $1 = \cos 0 + i\sin 0$. Theo công thức (2.11) căn bậc n của 1 có n giá trị khác nhau. Đó là :

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\ k = 0, 1, ..., n-1.$$

Ví dụ : Các căn bậc 6 của 1 là :

$$\varepsilon_o = 1 ;$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} ;$$

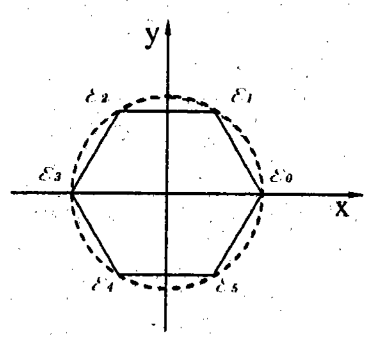
$$\varepsilon_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} ;$$

$$\varepsilon_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 ;$$

$$\varepsilon_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} ;$$

$$\varepsilon_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} ;$$

Nhận thấy rằng, các điểm biểu diễn các số phức $\varepsilon_o, ..., \varepsilon_5$ trong mặt phẳng phức là các đỉnh của hình lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đơn vị có đỉnh ε_o là (1, 0) (hình 2.2).



Hình 2.2

Tổng quát : *Các điểm biểu diễn các căn bậc n của đơn vị $\varepsilon_o, ..., \varepsilon_{n-1}$*

trong mặt phẳng phức là các đỉnh của hình n giác đều nội tiếp trong đường tròn đơn vị có đỉnh ε_o là (1, 0).

2.2.7. Số phức liên hợp

Liên hợp của số phức $z = a + bi$ là số phức $\overline{z} = a - bi$.

Ví dụ : $z = 3 - 5i$, $\overline{z} = 3 + 5i$.

Các tính chất sau đây của phép lấy liên hợp được suy trực tiếp từ định nghĩa :

1) z là một số thực khi và chỉ khi $z = \overline{z}$;

2) $z + \overline{z} = 2\text{Re}z$;

3) $z\overline{z} = |z|^2$.

Từ 3) suy ra, nếu $z \neq 0$ thì $\overline{z}^{-1} = \dfrac{z}{|z|^2}$;

4) $\overline{z \pm z'} = \overline{z} \pm \overline{z'}$;

5) $\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}$.

Theo 5) ta có :

a) $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$;

b) Nếu $z' \neq 0$ thì $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Thật vậy, vì $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}\overline{z'} = \overline{\dfrac{z}{z'}.z'} = \overline{z}$. Do đó $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Chú ý : Các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức của số phức z và số phức liên hợp $\overline{z}$ đối xứng nhau qua trục thực.

2.2.8. Các tính chất của môđun số phức

Từ các công thức (2.8), (2.9) và (2.10) ta có :

1) $|zz'| = |z|\,|z'|$;

2) $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$;

3) $|z^n| = |z|^n$;

4) $|z + z'| \le |z| + |z'|$.

Thật vậy, trước hết xét trường hợp z = 1, ta chứng minh

$$|1 + z'| \le 1 + |z'|.$$

Giả sử z' = x + yi, khi đó :

$$|z'| = \sqrt{x^2 + y^2} \ge |x| ;$$

$$|1 + z'|^2 = (1 + z').\overline{(1 + z')} = (1 + z').(1 + \overline{z'})$$

$$= 1 + z' + \overline{z'} + z'\overline{z'} = 1 + 2x + |z'|^2$$

$$\le 1 + 2|z'| + |z'|^2 = (1 + |z'|)^2.$$

Vậy ta có:

$$|1 + z'| \le 1 + |z'|.$$

Nếu z = 0 thì hiển nhiên, giả sử $z \ne 0$.

Ta có :

$$|z + z'| = \left|z\left(1 + \frac{z'}{z}\right)\right| = |z|\left|1 + \frac{z'}{z}\right|$$

$$\le |z|\left(1 + \left|\frac{z'}{z}\right|\right) = |z| + |z'|.$$

Vậy tính chất 4) được chứng minh.■

2.3. ĐA THỨC

2.3.1. Vành đa thức K[x]

Giả sử K là một trường số. Với mỗi họ hữu hạn các phần tử thuộc K $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_o$ ta lập biểu thức hình thức :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o.$$

Biểu thức f(x) gọi là một *đa thức* của ẩn x (hay biến x) với hệ số trên trường K. Nếu $a_n \ne 0$ thì a_n gọi là hệ số *cao nhất* và số n gọi là *bậc* của đa thức f(x). Khi $a_n = 1$ thì f(x) gọi là *đa thức dạng chuẩn.*

Theo định nghĩa, mỗi phần tử $a \in K$, $a \neq 0$ là một đa thức bậc 0. Ta xem phần tử 0 của trường K là một đa thức có tất cả các hệ số bằng 0, và gọi là *đa thức không*. Quy ước bậc của đa thức 0 bằng $-\infty$.

Ký hiệu K[x] là tập tất cả các đa thức ẩn x, với hệ số trên K. Trong K[x] định nghĩa hai phép toán sau đây :

– *Phép cộng đa thức* :

Giả sử : $f(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_o$;

$g(x) = b_mx^m + ... + b_1x + b_o$ và $m \leq n$.

Khi đó : $f(x) + g(x) = x_nx^n + ... + c_1x + c_o$,

trong đó :
$$c_i = \begin{cases} a_i + b_i, & i = 0,..., m \\ a_i & , i = m+1,...,n \end{cases} \qquad (2.12)$$

– *Phép nhân đa thức* :

$$f(x).g(x) = d_{n+m}x^{n+m} + ... + d_1x + d_o, \qquad (2.13)$$

trong đó : $d_k = \sum\limits_{i+j=k} a_ib_j$, $k = 0, 1, ..., m + n$.

Có thể chứng tỏ tập K[x] với phép toán cộng (2.12) và phép toán nhân (2.13) là một vành giao hoán có đơn vị, chứa K như một trường con.

Vành K[x] gọi là *vành đa thức một ẩn trên trường K*.

Từ định nghĩa bậc của đa thức và phép cộng, phép nhân đa thức suy ra mệnh đề sau :

Mệnh đề 2.1 :

a) Bậc $(f(x) + g(x)) \leq \max\{$bậc $f(x)$, bậc $g(x)\}$.

b) Bậc $f(x).g(x) =$ bậc $f(x) +$ bậc $g(x)$.

Từ điều khẳng định b) ta có :

Hệ quả : Nếu $f(x) \neq 0$ và $g(x) \neq 0$ thì $f(x).g(x) \neq 0$.

2.3.2. Phép chia có dư

Giả sử f(x) là đa thức bậc n, g(x) là đa thức bậc m, $g(x) \neq 0$ và $m \leq n$. Nếu chia đa thức f(x) cho đa thức g(x) sẽ được một đa thức q(x) có bậc n – m và phần dư là một đa thức r(x) có bậc nhỏ hơn m. Khi đó, đa thức f(x) có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng :

$$f(x) = g(x).q(x) + r(x), \qquad (2.14)$$

trong đó bậc r(x) < bậc g(x).

Chẳng hạn : $f(x) = 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x + 1,$

$g(x) = 2x^2 - 3x + 1.$

$$\begin{array}{l|l}
2x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x + 1 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline
\underline{2x^4 - 3x^3 + x^2 \ (= x^2.g(x))} & x^2 + 4x + 5 \ (= q(x)) \\
\quad 8x^3 - \ 2x^2 + 2x + 1 & \\
\quad \underline{8x^3 - 12x^2 + \ 4x \ (= 4x.g(x))} & \\
\qquad 10x^2 - \ 2x + 1 & \\
\qquad \underline{10x^2 - 15x + 5 \ (= 5.g(x))} & \\
\qquad\quad 13x - 4 \ (= r(x)) &
\end{array}$$

Ta có :

$$2x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x + 1 = (2x^2 - 3x + 1)(x^2 + 4x + 5) + 13x - 4.$$

Trong biểu diễn (2.14) của đa thức f(x), đa thức r(x) gọi là *phần dư* của phép chia đa thức f(x) cho đa thức g(x). Nếu r(x) = 0, khi đó f(x) = g(x).q(x), ta nói rằng đa thức f(x) *chia hết* cho đa thức g(x), hay g(x) là một *ước* của f(x).

Ký hiệu $f(x) \vdots g(x)$ chỉ đa thức f(x) chia hết cho đa thức g(x).

2.3.3. Ước chung lớn nhất

Đa thức d(x) gọi là *ước chung* của các đa thức f(x) và g(x) nếu $f(x) \vdots d(x)$ và $g(x) \vdots d(x)$.

Đa thức d(x) gọi là *ước chung lớn nhất* (ƯCLN) của các đa thức f(x) và g(x) nếu d(x) là một ước chung của f(x) và g(x) ; và nếu d'(x) là một ước chung của f(x) và g(x) thì $d(x) \vdots d'(x)$.

***Các tính chất* :**

1) Nếu $f(x) \vdots d(x)$ và $g(x) \vdots d(x)$ thì

$$f(x).g(x) \vdots d(x) \text{ và } (f(x) \pm g(x)) \vdots d(x).$$

2) Nếu $d(x)$ là một ƯCLN của $f(x)$ và $g(x)$ thì với $a \in K$, $a \neq 0$, $a.d(x)$ cũng là ƯCLN của $f(x)$ và $g(x)$.

Từ định nghĩa ƯCLN và tính chất 2) suy ra : Nếu $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ có ƯCLN thì ƯCLN dạng chuẩn là duy nhất. Ký hiệu $(f(x) ; g(x))$ chỉ ƯCLN dạng chuẩn của $f(x)$ và $g(x)$.

Định lý 2.3 : Mọi cặp đa thức $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ đều có ƯCLN.

Chứng minh (Thuật toán Euclid tìm ƯCLN) :

Giả sử bậc của $f(x)$ lớn hơn hoặc bằng bậc của $g(x)$. Liên tiếp thực hiện phép chia có dư, theo công thức (2.14) ta có :

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), \quad \text{bậc } r_1(x) < \text{bậc } g(x) \qquad (1)$$

$$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), \quad \text{bậc } r_2(x) < \text{bậc } r_1(x) \qquad (2)$$

$$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x), \quad \text{bậc } r_3(x) < \text{bậc } r_2(x) \qquad (3)$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)\, q_k(x) + r_k(x) \quad \text{bậc } r_k(x) < \text{bậc } r_{k-1}(x) \qquad (k)$$

$$r_{k-1}(x) = r_k(x)\, q_{k+1}(x).$$

Đẳng thức cuối cùng chứng tỏ $r_{k-1}(x) \vdots r_k(x)$. Theo tính chất 1) từ đẳng thức k suy ra $r_k(x)$ là ước chung của $r_{k-1}(x)$ và $r_{k-2}(x)$; đẳng thức thứ $k - 1$ chứng tỏ $r_k(x)$ là ước chung của $r_{k-2}(x)$ và $r_{k-3}(x)$, ... ; $r_k(x)$ là ước chung của $f(x)$ và $g(x)$.

Nếu $p(x)$ là một ước chung của $f(x)$ và $g(x)$, theo tính chất 1) từ đẳng thức thứ nhất suy ra $r_1(x) \vdots p(x)$, rồi từ đẳng thức thứ 2 suy ra $r_2(x) \vdots p(x)$. Vậy $r_k(x)$ là ƯCLN của $f(x)$ và $g(x)$.

Chú ý : Ta biết rằng, nếu $d(x)$ là ƯCLN của $f(x)$ và $g(x)$ thì với $a \in K$, $a \neq 0$, $ad(x)$ cũng là ƯCLN của $f(x)$ và $g(x)$. Do đó, khi áp dụng thuật toán Euclid tìm ƯCLN ở trên, để tránh tính toán phức tạp, có thể thay đa thức $r_i(x)$ bởi đa thức $r_i^*(x) = ar_i(x)$, $a \in K$, $a \neq 0$.

Ví dụ : Tìm ƯCLN của đa thức thuộc $\mathbb{Q}[x]$:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1,$$

$$g(x) = 3x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

Thực hiện phép chia có dư đa thức f(x) cho đa thức g(x) ta có :

$2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 1 =$

$$= (3x^3 + 4x^2 + 4x + 1)\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{8}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{8}{9}.$$

Ta có : $r_1(x) = \frac{8}{9}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{8}{9}$. Thực hiện phép chia có dư đa thức g(x) cho đa thức $r_1^*(x) = \frac{8}{9}r_1(x)$ ta được :

$$3x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (x^2 + x + 1)(3x + 1).$$

Ta có : $r_2(x) = 0$. Vậy ƯCLN của f(x) và g(x) là $r_1^*(x) = x^2 + x + 1$.

Đa thức nguyên tố cùng nhau : Hai đa thức f(x) và g(x) thuộc K[x], $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ gọi là *nguyên tố cùng nhau* nếu $(f(x) ; g(x)) = 1$.

Định lý 2.4 : Hai đa thức $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi có các đa thức u(x) và v(x) thuộc K[x] sao cho :

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1. \tag{2.15}$$

Chứng minh :

Điều kiện đủ : Giả sử các đa thức f(x), g(x) thỏa mãn hệ thức (2.15). Khi đó, nếu d(x) là một ước chung của f(x) và g(x), theo tính chất 1) của ước chung thì d(x) là ước của 1. Vậy 1 là ƯCLN của f(x) và g(x).

Điều kiện cần : Giả sử $(f(x) ; g(x)) = 1$. Khi đó ƯCLN của f(x) và g(x) là các đa thức bậc 0. Theo thuật toán Euclid ta có :

$$f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x) ;$$

$$g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x) ;$$

$$r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x) ;$$

$$\dots \qquad \dots$$

$$r_{k-3}(x) = r_{k-2}(x)q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x) ;$$

$$r_{k-2}(x) = r_{k-1}(x)q_k(x) + c ;$$

$$r_{k-1}(x) = c.q_{k+1}(x),\ c \in K,\ c \neq 0.$$

Đẳng thức thứ k chứng tỏ c biểu diễn được qua các đa thức $r_{k-1}(x)$ và $r_{k-2}(x)$. Do đó, từ đẳng thức thứ k – 1 suy ra c biểu diễn được qua các đa thức $r_{k-2}(x)$ và $r_{k-3}(x)$, v.v...

Tiếp tục đến đẳng thức thứ nhất, ta có c biểu diễn được qua f(x) và g(x). Vậy ta có :

$$c = f(x)p(x) + g(x)q(x).$$

Nhân hai vế đẳng thức trên với c^{-1} và đặt $u(x) = c^{-1}p(x)$, $v(x) = c^{-1}q(x)$ ta có :

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1. \blacksquare$$

2.3.4. Nghiệm của đa thức

Định nghĩa : Phần tử $\alpha \in K$ gọi là *nghiệm* của đa thức bậc $n > 0$, $f(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_o$ thuộc K[x] nếu thay x bởi α ta có :

$$f(\alpha) = a_n\alpha^n + ... + a_1\alpha + a_o = 0.$$

Mệnh đề 2.2 : Phần tử $\alpha \in K$ là nghiệm của đa thức f(x) thuộc K[x], có bậc $n > 0$ khi và chỉ khi $f(x) \vdots (x - \alpha)$.

Chứng minh :

Theo (2.14) ta có :

$$f(x) = (x - \alpha)q(x) + r, \ r \in K.$$

Thay x bởi α ta có : $f(\alpha) = r$. Vậy $f(\alpha) = 0$ khi và chỉ khi $r = 0$, tức là $f(x) \vdots (x - \alpha)$. $\blacksquare$

Nghiệm bội : Phần tử $\alpha \in K$ gọi là *nghiệm bội k* của đa thức $f(x) \in K[x]$, có bậc > 0, nếu f(x) chia hết cho $(x - \alpha)^k$ và không chia hết cho $(x - \alpha)^{k+1}$.

Vậy, nếu $\alpha \in K$ là nghiệm bội k của f(x) thì $f(x) = (x - \alpha)^kq(x)$, trong đó đa thức q(x) không chia hết cho $(x - \alpha)$.

Mệnh đề 2.3 : Mỗi đa thức f(x) bậc $n > 0$ có không quá n nghiệm kể cả nghiệm bội.

Chứng minh : Giả sử α_i là nghiệm bội k_i của f(x), $i = 1, ..., m$. Theo định nghĩa ta có :

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \ldots (x - \alpha_m)^{k_m} s(x);$$

$$s(\alpha_i) \neq 0, i = 1, \ldots, m.$$

Theo Mệnh đề 2.1, ta có :

$$n = k_1 + \ldots + k_m + \text{bậc của } s(x).$$

Do đó : $n \leq k_1 + \ldots + k_m$.■

Đa thức bất khả quy : Đa thức $f(x) \in K[x]$ có bậc $n > 0$ gọi là *bất khả quy* trên trường K nếu khi có phân tích $f(x) = p(x)q(x)$ với $p(x)$, $q(x) \in K[x]$ thì bậc $p(x) = 0$ hoặc bậc $q(x) = 0$. Tức là đa thức $f(x)$ không thể phân tích thành tích hai đa thức thuộc $K[x]$ có bậc nhỏ hơn n. Từ định nghĩa trực tiếp suy ra :

1) Các đa thức bậc nhất bất khả quy ;

2) Theo Mệnh đề 2.2, ta có : Mỗi đa thức có bậc ≥ 2 bất khả quy trên trường K thì không có nghiệm thuộc K.

Chú ý rằng, tính bất khả quy của đa thức phụ thuộc vào trường đang xét. Chẳng hạn, đa thức $x^2 - 2$ bất khả quy trên trường hữu tỷ $\mathbb{Q}$, nhưng không bất khả quy trên trường số thực $\mathbb{R}$, vì trong $\mathbb{R}[x]$ ta có phân tích :

$$x^2 - 2 = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right).$$

2.3.5. Đa thức trên trường số phức $\mathbb{C}$

Ta thừa nhận định lý sau đây, thường gọi là định lý cơ bản của Đại số học.

Định lý 2.5 : Mỗi đa thức bậc $n > 0$ trên trường số phức đều có nghiệm phức.

Xét $g(x)$ là đa thức hệ số phức, $g(x)$ có bậc $n > 0$. Theo Định lý 2.5, $g(x)$ có nghiệm phức α_1. Theo Mệnh đề 2.2 ta có :

$$g(x) = (x - \alpha_1)q_1(x),$$

trong đó : $q_1(x)$ là một đa thức hệ số phức.

Giả sử α_2 là một nghiệm phức của $q_1(x)$. Ta có phân tích :

$$q_1(x) = (x - \alpha_2)q_2(x).$$

Vậy ta có :

$$g(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)q_2(x).$$

Tiếp tục một cách tương tự ta có phân tích :

$$g(x) = b(x - \alpha_1)^{r_1} \dots (x - \alpha_m)^{r_m}, \tag{2.16}$$

trong đó α_i là nghiệm phức bội r_i của $g(x)$, $i = 1, \dots, m$; $\alpha_i \neq \alpha_j$ với $i \neq j$.

Dễ thấy : $r_1 + \dots + r_m = n$ và b là hệ số cao nhất của $g(x)$.

Từ phân tích (2.16) ta suy ra rằng : Mỗi đa thức hệ số phức bậc $n > 0$ có n nghiệm phức kể cả bội. Do đó, *các đa thức bậc nhất là tất cả các đa thức bất khả quy trên trường số phức* $\mathbb{C}$.

2.3.6. Đa thức trên trường số thực $\mathbb{R}$

Mỗi đa thức hệ số thực $f(x)$ có thể xem là đa thức hệ số phức. Theo Định lý 2.5, nếu bậc $f(x) > 0$ thì $f(x)$ có nghiệm phức.

Mệnh đề 2.4 : Nếu số phức $\alpha = a + bi$ là một nghiệm của đa thức hệ số thực $g(x)$ thì số phức liên hợp $\overline{\alpha} = a - bi$ cũng là nghiệm của $g(x)$.

Chứng minh : Giả sử α là một nghiệm phức của đa thức hệ số thực $g(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_o$. Theo tính chất của số phức liên hợp ta có :

$$\begin{aligned} g(\overline{\alpha}) &= b_m(\overline{\alpha})^m + \dots + b_1\overline{\alpha} + b_o \\ &= \overline{b_m\alpha^m} + \dots + \overline{b_1\alpha} + \overline{b_o} \\ &= \overline{b_m\alpha^m + \dots + b_1\alpha + b_o} = \overline{g(\alpha)} = 0. \end{aligned}$$

Vậy $\overline{\alpha}$ là một nghiệm của đa thức $g(x)$.■

Giả sử $g(x) \in R[x]$ có bậc > 0. Trong phân tích (2.16) nếu $\alpha_k = a_k + ib_k$, $b_k \neq 0$ là một nghiệm phức của $g(x)$, thì theo Mệnh đề 2.4, $\overline{\alpha}_k = a_k - ib_k$ cũng là nghiệm của $g(x)$.

Ta có :

$$\begin{aligned} (x - \alpha_k)(x - \overline{\alpha}_k) &= x^2 - (\alpha_k - \overline{\alpha}_k)x + \alpha_k\overline{\alpha}_k \\ &= x^2 - 2a_k x + a_k^2 + b_k^2 \\ &= x^2 + A_k x + B_k, \end{aligned}$$

với $A_k = -2a_k$, $B_k = a_k^2 + b_k^2$ là các số thực.

Tam thức $x^2 + A_k x + B_k$ không có nghiệm thực. Theo (2.16) đa thức g(x) có thể viết dưới dạng :

$$g(x) = b(x - \alpha_1)^{r_1} \ldots (x - \alpha_q)^{r_q} (x^2 + A_1 x + B_1)^{s_1} \ldots (x^2 + A_p x + B_p)^{s_p} \quad (2.17)$$

trong đó α_k, $k = 1, \ldots, q$ là nghiệm thực bội r_k của g(x) ; $x^2 + A_k x + B_k$, $k = 1, \ldots, p$ là các tam thức bậc hai hệ số thực có biệt thức $\Delta = A_k^2 - 4B_k < 0$; $\alpha_k \neq \alpha_l$ và $(A_k, B_k) \neq (A_l, B_l)$ khi $k \neq l$.

Phân tích (2.17) của đa thức g(x) là duy nhất, chỉ sai khác thứ tự các nhân tử.

Từ phân tích (2.17) ta suy ra rằng : *Đa thức bậc nhất, đa thức bậc hai có biệt thức $\Delta < 0$ là tất cả các đa thức bất khả quy trên trường số thực.*

Từ hệ thức (2.17) ta có :

$$\text{bậc } g(x) = r_1 + \ldots + r_q + 2(s_1 + \ldots + s_p).$$

Do đó, nếu g(x) là một đa thức hệ số thực bậc lẻ thì trong phân tích (2.17) có ít nhất một nhân tử lũy thừa của một nhị thức bậc nhất. Vậy ta có mệnh đề :

Mệnh đề 2.5 : Mỗi đa thức hệ số thực bậc lẻ có ít nhất một nghiệm thực.

2.4. PHÂN THỨC HỮU TỶ THỰC

2.4.1. Trường phân thức hữu tỷ

Giả sử K là một trường số. Ta ký hiệu Ω là tập tất cả các cặp đa thức (f, g) với $f, g \in K[x]$ và $g \neq 0$. Trên tập Ω xét quan hệ ~ xác định như sau :

$$(f, g) \sim (f', g') \text{ khi và chỉ khi } f.g' = f'.g. \quad (2.18)$$

Dễ dàng chứng minh quan hệ ~ có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Do đó nó là một quan hệ tương đương trên tập Ω.

Lớp tương đương chứa cặp (f, g) ký hiệu là $\frac{f}{g}$ và được gọi là một *phân thức hữu tỷ ẩn x trên trường K*. Theo (2.18) ta có : $\frac{f}{g} = \frac{p}{q}$ khi và chỉ khi f.q = p.g.

Ký hiệu K(x) là tập các phân thức hữu tỷ ẩn x trên trường K. Trong tập K(x) ta định nghĩa hai phép toán sau :

– *Phép cộng các phân thức hữu tỷ :*

$$\frac{f}{g} + \frac{p}{q} = \frac{f.q + p.g}{g.q}. \tag{2.19}$$

– *Phép nhân các phân thức hữu tỷ :*

$$\frac{f}{g}.\frac{p}{q} = \frac{f.p}{g.q}. \tag{2.20}$$

Có thể chứng tỏ rằng, các phép toán xác định bởi các công thức (2.19) và (2.20) là đúng đắn, tức là không phụ thuộc vào đại biểu các lớp tương đương, và (K(x), +, .) là một trường, được gọi là *trường các phân thức hữu tỷ ẩn x trên trường K*.

Có thể xem mỗi đa thức f ∈ K[x] là một phân thức hữu tỷ dạng $\frac{f}{1}$. Do đó ta có các bao hàm thức : $K \subset K[x] \subset K(x)$.

Phân thức thực sự : Phân thức hữu tỷ $\frac{f}{g}$ gọi là thực sự nếu bậc f < bậc g.

Giả sử $\frac{f}{g}$ ∈ K[x], nếu bậc f ≥ bậc g, khi đó thực hiện phép chia có dư đa thức f cho đa thức g ta có :

$$f = g.q + r, \quad \text{bậc } r < \text{bậc } g.$$

Do đó theo (2.19) ta có :

$$\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g},$$

trong đó $\frac{r}{g}$ là một phân thức thực sự.

Vậy, *mỗi phân thức hữu tỷ có thể biểu diễn dưới dạng tổng một đa thức và một phân thức thực sự.*

Phân thức đơn giản : Phân thức đơn giản trên trường K là phân thức có dạng $\frac{q(x)}{p^k(x)}$, trong đó p(x) là đa thức bất khả quy trên K và bậc q(x) < bậc p(x).

2.4.2. Các phân thức hữu tỷ thực

Ta biết rằng, đa thức bất khả quy trên trường số thực $\mathbb{R}$ chỉ có thể là đa thức bậc nhất, hoặc đa thức bậc hai có biệt thức $\Delta < 0$. Do đó phân thức đơn giản trên $\mathbb{R}$ chỉ có hai loại sau đây :

– Các phân thức đơn giản loại 1 :

$$\frac{c}{(x-\alpha)^m},\ m = 1, 2, \ldots$$

– Các phân thức đơn giản loại 2 :

$$\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^m},\ \text{trong đó } p^2 - 4q < 0,\ m = 1, 2 \ldots$$

Sử dụng phân tích (2.17) của đa thức hệ số thực, có thể chứng tỏ mỗi phân thức thực sự $\frac{f}{g} \in \mathbb{R}[x]$ đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng các phân thức đơn giản.

Cụ thể, nếu đa thức g(x) có phân tích (2.17) thì phân thức hữu tỷ thực sự $\frac{f}{g}$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$\frac{f}{g} = \sum_{j_1=1}^{r_1} \frac{c_{j_1}}{(x-\alpha_1)^{j_1}} + \ldots + \sum_{j_q=1}^{r_q} \frac{c_{j_q}}{(x-\alpha_q)^{j_q}} +$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{s_1} \frac{a_{i_1}x + b_{i_1}}{(x^2+A_1x+B_1)^{i_1}} + \ldots + \sum_{i_p=1}^{s_p} \frac{a_{i_p}x + b_{i_p}}{(x^2+A_px+B_p)^{i_p}} \qquad (2.21)$$

Ví dụ : Xét phân thức thực sự : $\frac{x^4+2}{x(x^2-1)^2}$.

Ta có :

$$\frac{x^4+2}{x(x^2-1)^2} = \frac{x^4+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}.$$

Áp dụng công thức (2.21), ta có :

$$\frac{x^4+2}{x(x^2-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}.$$

Phương pháp thông thường để xác định các hệ số A, B, C, D, E là quy đồng mẫu số và nhóm các số hạng, rồi so sánh hệ số của x^k ở hai vế. Quy đồng mẫu số rồi nhóm các số hạng ta có :

$$x^4+2 = (A+B+D)x^4 + (B+C-D+E)x^3$$
$$+ (2C-2A-B-D-2E)x^2 + (C-B+E+D)x + A.$$

So sánh hệ số của x^k ở hai vế ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} A+B+D=1 & (1)\\ B+C-D+E=0 & (2)\\ 2C-2A-B-D-2E=0 & (3)\\ C-B+D+E=0 & (4)\\ A=2 & (5)\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta có :

$$A=2,\ B=D=-\frac{1}{2},\ C=\frac{3}{4},\ E=-\frac{3}{4}$$

Vậy phân thức đã cho có biểu diễn :

$$\frac{x^4+2}{x(x^2-1)^2} = \frac{2}{x} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{4(x-1)^2} - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{3}{4(x+1)^2}.$$

BÀI TẬP

Đề bài

2.1. Xét xem các tập sau đây đối với phép toán đã cho có phải là một nhóm hay không ?

1) Tập các số tự nhiên đối với phép toán cộng.

2) Tập các số nguyên đối với phép toán cộng.

3) Tập các số tự nhiên đối với phép toán nhân.

4) Tập các số thực khác 0 đối với phép toán nhân.

5) Tập các số hữu tỷ đối với phép toán nhân.

6) Tập các số hữu tỷ dương đối với phép toán nhân.

7) Tập $M = \{1, -1\}$ đối với phép toán nhân.

2.2. Giả sử $(G, ., e)$ là một nhóm. Chứng minh rằng, với mọi phần tử $a, b \in G$ ta có :

1) $a^n a^m = a^{n+m}$;

2) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;

3) $(a^{-1})^{-1} = a$;

4) Nếu $ab = ba$ thì $(ab)^n = a^n b^n$.

2.3. Chứng minh rằng, ánh xạ $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}^+$ xác định bởi $f(n) = 2^n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$, là một đồng cấu của nhóm cộng các số nguyên $(\mathbb{Z}, +, 0)$ vào nhóm nhân các số hữu tỷ dương $(\mathbb{Q}^+, ., 1)$.

2.4. Giả sử $f : G \to G'$ là một đồng cấu của nhóm $(G, ., e)$ vào nhóm $(G', ., e)$. Chứng minh :

1) $f(e) = e'$

2) $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

3) Ảnh Imf của đồng cấu f là một nhóm con.

2.5. Chứng minh rằng tích các đồng cấu nhóm là một đồng cấu nhóm.

2.6. Xét tập $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, ..., p-1\}$. Chứng minh rằng :

1) Với phép cộng, phép nhân đồng dư p thì $(\mathbb{Z}_p, +, .)$ là một vành giao hoán có đơn vị.

2) Phần tử $i \in \mathbb{Z}_p$ khả nghịch khi và chỉ khi $(i, p) = 1$ (i, p nguyên tố cùng nhau).

3) Vành $\mathbb{Z}_p$ là trường khi và chỉ khi p là một số nguyên tố.

2.7. Chứng minh rằng :

1) Tập các số thực có dạng $a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ là một vành con của trường số thực $\mathbb{R}$.

2) Tập các số thực có dạng $a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ là một trường con của trường số thực $\mathbb{R}$.

3) Tập các số phức có dạng $a + ib$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ là một vành con của trường số phức $\mathbb{C}$.

4) Tập các số phức có dạng $a + ib$ với $a, b \in \mathbb{Q}$ là một trường số.

2.8. Chứng minh rằng :

1) Tập S^1 các số phức có môđun bằng 1 là một nhóm con của nhóm $(\mathbb{C}^*, .)$ các số phức khác 0 đối với phép nhân số phức.

2) Tập các căn bậc n của 1 là một nhóm con của nhóm S^1.

3) Ánh xạ $f : \mathbb{R} \to S^1$ xác định bởi $f(x) = \cos x + i\sin x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là một đồng cấu từ nhóm cộng các số thực $\mathbb{R}$ vào nhóm nhân S^1.

2.9. Chứng tỏ rằng phép lấy liên hợp là một đẳng cấu từ trường số phức $\mathbb{C}$ vào chính nó.

2.10. Chứng minh rằng tích hai đồng cấu vành là một đồng cấu vành.

2.11. Hãy thực hiện các phép tính sau đây :

1) $(1 + 2i)(2 - 3i)(2 + i)(3 - 2i)$;

2) i^n, với n là số nguyên lớn hơn 0 ;

3) $\dfrac{5 + 6i}{3 + 2i} + \dfrac{4 + 2i}{i}$;

4) $\dfrac{(1 + i)^n}{(1 - i)^{n-2}}$;

5) $\dfrac{(1 + 2i)^2 - (1 + i)^3}{(3 + 2i)^3 - (2 + i)^2}$;

6) $\dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}\alpha}$.

2.12. Tìm các số thực x, y thỏa mãn hệ thức :

1) $(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$;

2) $(x + yi)^2 = 3 - 4i$;

3) $(x - yi)^2 = 15 + 8i$.

2.13. Tìm các căn bậc hai của các số phức :

$$2 + 3i\ ;\ 5 + 4i\ ;\ i\ ;\ -1.$$

2.14. Biểu diễn các số phức sau đây dưới dạng lượng giác :

$$-1\ ;\ -i\ ;\ -1 + i\ ;\ -1 + i\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3} - i\ ;\ \sqrt{3} + i\ ;$$

$$2i\ ;\ 1 - i\ ;\ 1 + i\ ;\ 1 + i\sqrt{3}.$$

2.15. Áp dụng công thức Moavrơ tính các biểu thức sau đây :

1) $(1 + i)^{28}$;

2) $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$;

3) $\left(\dfrac{1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{24}$;

4) $\dfrac{\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1 - i)^{20}} + \dfrac{\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{15}}{(1 + i)^{20}}$.

2.16. Hãy tìm :

1) Các căn bậc n của mỗi số phức sau :

$$-1\ ;\ i\ ;\ 1 + i\ ;\ 1 - i\ ;\ \sqrt{3} - i\ ;\ 1 + i\sqrt{3}.$$

2) Căn bậc 6 của $\dfrac{1 - i}{\sqrt{3} + i}$; căn bậc 8 của $\dfrac{1 + i}{\sqrt{3} - i}$; căn bậc 6 của $\dfrac{i - 1}{1 + i\sqrt{3}}$.

2.17. Chứng minh rằng, tổng tất cả các căn bậc n của một số phức bằng 0.

2.18. 1) Tìm điều kiện để tích hai số phức là một số thuần ảo.

2) Tìm số phức u thỏa mãn $\bar{u} = u^2$; $\bar{u} = u^3$; $|u| - u = 1 + 2i$; $|u| + u = 2 + i$.

2.19. 1) Hãy tính $\cos n\alpha$ và $\sin n\alpha$ theo $\cos\alpha$ và $\sin\alpha$.

2) Tính các tổng :

$$S = \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx \text{ ;}$$

$$T = \sin x + \sin 2x + ... + \sin nx.$$

2.20. Chứng minh các hệ thức sau đây :

1) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + ... = 2^{\frac{n}{2}} \cos\dfrac{n\pi}{4}$;

2) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + ... = 2^{\frac{n}{2}} \sin\dfrac{n\pi}{4}$.

2.21. Chứng minh :

1) $(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 2^n \cos^n \dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{n\alpha}{2} + i\sin\dfrac{n\alpha}{2}\right)$;

2) $\left(\dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}\alpha}\right)^n = \dfrac{1 + i\,\mathrm{tg}n\alpha}{1 - i\,\mathrm{tg}n\alpha}$;

3) Nếu số phức z thỏa mãn $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\theta$ thì $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$.

2.22. Thực hiện phép cộng $f(x) + g(x)$ và phép nhân $f(x)g(x)$ với $f(x)$, $g(x)$ là các đa thức sau đây :

1) $f(x) = x^4 - x^3 + 3x - 1$, $\quad g(x) = x^3 + x + 1$;

2) $f(x) = x^3 + ix - 1$, $\quad g(x) = x^2 - (1 + i)x - i$;

3) $f(x) = x^5 + 1$, $\quad g(x) = x^2 - i$.

2.23. Thực hiện phép chia có dư đa thức $f(x)$ cho đa thức $g(x)$ với $f(x)$, $g(x)$ là các đa thức sau đây :

1) $f(x) = x^5$, $\quad g(x) = x^2 - x + i$;

2) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$, $\quad g(x) = 3x^2 - 2x + 1$;

3) $f(x) = x^4 + ix^3 - ix^2 + x + 1$, $\quad g(x) = x^2 - ix + 1$.

2.24. Tìm ƯCLN của các đa thức hệ số thực sau đây :

1) $x^3 - 3x + 1$ và $x^2 + 1$;

2) $x^5 + 1$ và $x^2 - x + 1$;

3) $x^3 + 1$ và $x^2 - 1$;

4) $x^3 + x^2 + 2x + 2$ và $x^2 + x + 1$;

5) $x^2 - 4x + 3$ và $x^3 - 6x^2 - 5x + 10$ và $x^2 - 1$.

2.25. Tìm nghiệm của các đa thức sau đây :

1) $x^2 - ix + i$; 2) $x^2 + 2ix + 2$;

3) $x^2 + (1 - i)x + i$; 4) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100$;

5) $x^8 + x^4 + 1$.

2.26. K là một trường số. Đạo hàm của đa thức $f(x) = a_nx^n + ... + a_1x + a_o$ thuộc K[x] là đa thức $f'(x) = na_nx^{n-1} + ... + 2a_2x + a_1$.

1) Chứng minh rằng :

a) $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$;

b) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

2) Hãy chứng tỏ rằng, nghiệm α của đa thức f(x) là một nghiệm bội $k > 1$ khi và chỉ khi α là nghiệm bội $k - 1$ của đạo hàm f'(x).

2.27. Số 1 có phải là nghiệm của các đa thức sau đây hay không ? Nếu nó là nghiệm hãy tính số bội.

1) $x^2 - 7x + 6$; 2) $x^5 + x^3 + 2x^2 - 6x + 2$;

3) $x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1$.

2.28. Chứng minh :

1) $x(x^{n-1} - na^{n-1}) + (n - 1)a^n$ chia hết cho $(x - a)^2$;

2) $[(1 - x)^n(x + 1) - 2nx^n(1 - x) - n^2x^n(1 - x)]^2$ chia hết cho $(1 - x)^3$.

2.29. Giả sử phép chia đa thức f(x) cho $x - a_i$ có phần dư là r_i, $i = 1, 2$. Hãy tìm phần dư của phép chia đa thức f(x) cho $(x - a_1)(x - a_2)$.

2.30. Hãy phân tích các đa thức sau đây thành tích các đa thức bất khả quy trên trường số thực :

1) $x^4 - 2x\cos\varphi + 1$; 2) $x^4 + 4$;

3) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; 4) $x^4 - 10x^2 + 1$.

2.31. Hãy phân tích các phân thức hữu tỷ thực sau đây thành tổng các phân thức đơn giản :

1) $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}$; 2) $\dfrac{x}{x^4+3x^2+2}$;

3) $\dfrac{2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$; 4) $\dfrac{x^2}{(1-x)^{100}}$;

5) $\dfrac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$; 6) $\dfrac{8}{x^4-4}$.

Đáp số và hướng dẫn

2.1. 1) Không. 2) Có. 3) Không. 4) Có.

5) Không. 6) Có. 7) Có.

2.6. 2) Vì $(i, p) = 1$ khi và chỉ khi tồn tại các số nguyên x, y sao cho $ix + py = 1$. Giả sử $x = kp + j$ với $0 < j < p$. Do đó ta có $ij = 1 \bmod (p)$.

3) Áp dụng 2).

2.11. 1) 65.

2) 1 nếu $n = 4k$; i nếu $n = 4k + 1$; -1 nếu $n = 4k + 2$; $-i$ nếu $n = 4k + 3$.

3) $\dfrac{57-52i}{13}$.

4) $2i^{n-1}$.

(*Hướng dẫn* : Nhân tử số và mẫu số với $i^{(n-2)}$)

5) $\dfrac{44-5i}{318}$.

6) $\cos2\alpha + i\sin2\alpha$.

2.12. 1) $x = -\dfrac{4}{11}, y = \dfrac{5}{11}$. 2) $x = \pm2, y = \mp 1$.

3) $x = \pm1, y = \mp 4$.

2.13. $\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{4+2\sqrt{13}}+i\sqrt{-4+2\sqrt{3}}\right)$;

$\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{10+2\sqrt{41}}+i\sqrt{-10+2\sqrt{41}}\right)$;

$\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)$;

$\pm i$.

2.14. $-1=\cos\pi+i\sin\pi$; $\qquad -i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$;

$-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; $\quad -1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

$\sqrt{3}-i=2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+\sin\frac{11\pi}{6}\right)$; $\quad \sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

$2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; $\quad 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$;

$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $\quad 1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

2.15. 1) -2^{14}. $\qquad$ 2) $2^9(1-i\sqrt{3})$.

3) 1. $\qquad$ 4) -64.

2.16. 1) $\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}$, $k=0, ..., n-1$;

$\cos\frac{\pi+4k\pi}{2n}+i\sin\frac{\pi+4k\pi}{2n}$, $k=0, ..., n-1$;

$\sqrt[2n]{2}\left(\cos\frac{\pi+8k\pi}{4n}+i\sin\frac{\pi+8k\pi}{4n}\right)$, $k=0, ..., n-1$;

$\sqrt[2n]{2}\left(\cos\frac{7\pi+8k\pi}{4n}+i\sin\frac{7\pi+8k\pi}{4n}\right)$, $k=0, ..., n-1$;

$\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{11\pi+12k\pi}{6n}+i\sin\frac{11\pi+12k\pi}{6n}\right)$, $k=0, ..., n-1$;

$$\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{\pi + 6k\pi}{3n} + i\sin\frac{\pi + 6k\pi}{3n}\right), k = 1, ..., n - 1.$$

2) $$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{(24k + 19)\pi}{72} + i\sin\frac{(24k + 19)\pi}{72}\right), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 ;$$

$$\frac{1}{\sqrt[16]{2}}\left(\cos\frac{(24k + 5)\pi}{96} + i\sin\frac{(24k + 5)\pi}{96}\right), k = 0,1, ..., 7 ;$$

$$\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\left(\cos\frac{(24k + 17\pi}{72} + i\sin\frac{24k + 17}{72}\right), k = 0, 1, ..., 5.$$

2.17. *Hướng dẫn* : Gọi S là tổng các căn bậc n của $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Ta có

$$S = \sqrt[n]{r}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Nhân hai vế với $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, ta được :

$$\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)S = \sqrt[n]{r}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right).$$

Vậy : $\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)S = S$, do đó $S = 0$.

2.18. Giả sử $u = x + iy$, $u' = x' + iy'$.

1) $\mathrm{Re}\,uu' = 0 \Leftrightarrow xx' = yy'$.

2) $\bar{u} = u^2 \Leftrightarrow$ ($x = y = 0$; hoặc $x = 1, y = 0$; hoặc $x = -\frac{1}{2}, y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$) ;

$\bar{u} = u^3 \Leftrightarrow$ ($x = y = 0$; hoặc $x = 1, y = 0$; hoặc $x = 0, y = 1$) ;

$u = \frac{3}{2} - 2i$;

$u = \frac{3}{4} + i$.

2.19. 1) *Hướng dẫn* : Tính $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$ theo hai cách khai triển nhị thức Niutơn và công thức Moavơrơ rồi so sánh phần thực với phần thực, phần ảo với phần ảo của các kết quả.

$$\cos n\alpha = C_n^0 \cos^n \alpha - C_n^2 \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + C_n^4 \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha ...$$

$$\sin n\alpha = C_n^1 \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha + C_n^3 \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + C_n^5 \cos^{n-5} \alpha \sin^3 \alpha + ...$$

2) *Hướng dẫn* : Tính biểu thức S + iT. Ta có :

$$S + iT = \cos x + ... + \cos nx + i(\sin x + ... + \sin nx)$$

$$= (\cos x + i\sin x) + ... + (\cos x + i\sin x)^n.$$

Tính tổng cấp số nhân ở vế phải rồi so sánh phần thực, phần ảo ở hai vế ta có :

$$S = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} ;$$

$$T = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)\sin\frac{nx}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

2.20. *Hướng dẫn* : Xét biểu thức $(1 + i)^n$.

2.21. *Hướng dẫn* : 1) và 2) : Áp dụng công thức Moavơrơ.

3) Chứng tỏ rằng $z = \cos\theta + i\sin\theta$, rồi áp dụng công thức Moavơrơ.

2.22. 1) $f(x) + g(x) = x^4 + 4x$,

$f(x)g(x) = x^7 - x^6 + x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 1$.

2) $f(x) + g(x) = x^3 + x^2 - x - (1 + i)$,

$f(x)g(x) = x^5 - (1 + i)x^4 - (1 + i)x^3 - i3x^2 + (2 + i)x + i$.

3) $f(x) + g(x) = x^5 + x^2 + 1 - i$,

$f(x)g(x) = x^7 - ix^5 + x^2 - i$.

2.23. 1) $x^5 = (x^2 - x - 1)(x^3 + x^2 - 1) - x + 1$.

2) $x^3 - 3x^2 - x - 1 = (3x^2 - 2x + 1)\left(\frac{1}{3}x - \frac{7}{9}\right) - 26x + 2$.

3) $x^4 + ix^3 - ix^2 + x + 1 = (x^2 - ix + 1)(x^2 + 2ix + 1) + (2 - i)x + 1$.

2.24. 1) 1. 2) $x + 1$. 3) $x^2 - x + 1$.

4) 1. 5) $x - 1$.

2.25. 1) $\pm\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \left(1 - 2\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)i\right)\right)$.

2) $(-1 \pm \sqrt{3})i$.

3) $\frac{\left(-1 \pm \sqrt{3}\right) + i\left(1 \pm \sqrt{3}\right)}{2}$.

4) $1 \pm 2i, -4 \pm 2i$.

5) $x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$; $x_2 = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}$; $x_3 = -x_1$; $x_4 = -x_2$

và $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \overline{x_4}$.

2.26. *Hướng dẫn* :

1) Xét : $f(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_o$, $a_n \neq 0$;

$g(x) = b_m x^m + ... + b_1 x + b_o$, $b_m \neq 0$.

Giả sử $m \leq n$.

a) Dễ thấy rằng $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$.

b) $f(x)g(x) = d_{n+m}x^{n+m} + ... + d_1 x + d_o$, với $d_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$.

Ta có :

$$[f(x)g(x)]' = (n + m)d_{n+m}x^{n+m-1} + ... + 2d_2 x + d_1. \quad (1)$$

Hệ số của x^k trong biểu thức vế trái (1) là $(k + 1)d_{k+1}$.

Mặt khác :

$$f'(x)g(x) = d'_{n+m-1}x^{n+m-1} + ... + d'_2 x + d'_o,$$

trong đó $d'_k = \sum_{i+j=k} (i+1)a_{i+1}b_j + (a_i b_{j+1})$.

$$f(x)g'(x) = d''_{n+m-1}x^{n+m-1} + \ldots + d''_1 x + d''_0,$$

trong đó $$d''_k = \sum_{i+j=k}\left((j+1)a_i b_{j+1} + ja_{i+1}b_j\right).$$

Hệ số của x^k trong $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ là $d'_k + d''_k = (k+1)d_{k+1}$.

Vậy ta có : $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

2) Giả sử α là nghiệm bội $k > 1$ của $f(x)$. Ta có :

$$f(x) = (x-\alpha)^k q(x),\ q(\alpha) \neq 0\ ;$$

$$f'(x) = k(x-\alpha)^{k-1}q(x) + (x-\alpha)^k q'(x).$$

Vì $q(\alpha) \neq 0$ nên $f'(x)$ chia hết cho $(x-\alpha)^{k-1}$ và $f'(x)$ không chia hết cho $(x-\alpha)^k$. Vậy α là nghiệm bội $k-1$ của $f'(x)$.

Giả sử α là nghiệm bội $k-1$ của $f'(x)$ và là nghiệm bội $s \geq 1$ của $f(x)$. Ta cần chứng minh rằng $k = s$.

Ta có : $f(x) = (x-\alpha)^s q(x),\qquad q(\alpha) \neq 0 \qquad$ (a)

$f'(x) = (x-\alpha)^{k-1}p(x),\qquad p(\alpha) \neq 0 \qquad$ (b)

Từ (a) ta có :

$$f'(x) = s(x-\alpha)^{s-1}q(x) + (x-\alpha)^s q'(x). \qquad \text{(c)}$$

So sánh (b) và (c) ta có :

$$s(x-\alpha)^{s-1}q(x) + (x-\alpha)^s q'(x) = (x-\alpha)^{k-1}p(x). \qquad \text{(d)}$$

Nếu $k > s$ thì từ hệ thức (d) ta có :

$$s\,q(x) + (x-\alpha)\,q'(x) = (x-\alpha)^{k-s}p(x).$$

Với $x = \alpha$ ta có $sq(\alpha) = 0$, trái với giả thiết $q(\alpha) \neq 0$.

Vậy ta có $k \leq s$, khi đó $s > 1$. Theo chứng minh trên thì α là nghiệm bội $s-1$ của $f'(x)$. Do đó ta có : $s = k$.

2.27. *Hướng dẫn* : Sử dụng kết quả bài 2.26, tính $f(1)$, $f'(1)$, ...

Đáp số : 1) 1 là nghiệm đơn.

2) 1 là nghiệm đơn.

3) 1 là nghiệm với số bội bằng 4.

2.28. Áp dụng kết quả bài 2.26.

1) Đặt $f(x) = x(x^{n-1} - na^{n-1}) + (n-1)a^n$, xét $f(a)$ và $f'(a)$.

2) Đặt $g(x) = [(1 - x^n)(x + 1) - 2nx^n(1 - x) - n^2x^n(1 - x)]^n$, xét $g(1)$, $g'(1)$ và $g''(1)$.

2.29. Gọi phần dư cần tìm là $ax + b$, khi đó a, b là nghiệm :

$$aa_i + b = r_i,\ i = 1, 2.$$

2.30. 1) $$x^4 - 2x^2\cos\varphi + 1 = \left(x - \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(x - \cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\times$$
$$\times\left(x + \cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\left(x + \cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= \left(x^2 - 2x\cos\frac{\varphi}{2} + 1\right)\left(x^2 + 2x\cos\frac{\varphi}{2} + 1\right).$$

2) $x^4 + 4 = (x - 1 + i)(x - 1 - i)(x + 1 + i)(x + 1 - i)$
$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).$

3) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$

4) $$x^4 - 10x^2 + 1 = \left(x - \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{3} - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right)\times$$
$$\left(x + \sqrt{3} - \sqrt{2}\right).$$

2.31. 1) $\dfrac{1}{x^2 + 1} - \dfrac{1}{x^2 + 2}.$

2) $\dfrac{x}{x^2 + 1} - \dfrac{x}{x^2 + 2}.$

3) $\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{(x + 1)^2} + \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{(x - 1)^2}.$

4) $\dfrac{1}{(1 - x)^{100}} - \dfrac{2}{(1 - x)^{99}} + \dfrac{1}{(1 - x)^{98}}.$

5) $-\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{3(x + 1)} + \dfrac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)}.$

6) $\dfrac{1}{\sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right)} - \dfrac{1}{\sqrt{2}\left(x + \sqrt{2}\right)} - \dfrac{1}{x^2 + 2}.$

Chương III
KHÔNG GIAN VECTƠ

3.1. ĐỊNH NGHĨA KHÔNG GIAN VECTƠ VÀ VÍ DỤ

3.1.1. Định nghĩa và tính chất

Định nghĩa : Giả sử K là một trường số. Tập V gọi là *một K – không gian vectơ* (hay *không gian vectơ trên K*, hay *không gian tuyến tính trên K*) và các phần tử của V gọi là *vectơ* nếu tập V được trang bị hai phép toán :

– Phép cộng các vectơ, ký hiệu $x + y$, đối với $x, y \in V$;

– Phép nhân các phần tử $\alpha \in K$ với các vectơ $x \in V$, ký hiệu αx, sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn :

1) $(V, +)$ là một nhóm Aben ;

2) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ với mọi $\alpha \in K$ và $x, y \in V$;

3) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$ với mọi $\alpha, \beta \in K$ và $x \in V$;

4) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ với mọi $\alpha, \beta \in K$ và $x \in V$;

5) $1x = x$ với mọi $x \in V$.

Phần tử trung hòa của nhóm Aben $(V, +)$ gọi là *vectơ không*, ký hiệu là θ. Phần tử đối của phần tử x trong nhóm Aben $(V, +)$ gọi là *vectơ đối* của vectơ x, ký hiệu là $-x$.

Theo tính chất của phép toán hai ngôi trong nhóm $(V, +)$, vectơ không (θ) và vectơ đối $(-x)$ của vectơ x là duy nhất.

Thật vậy :

$$x + \theta = x \ ;$$

$$x + (-x) = \theta \text{ với mọi } x \in V.$$

Ta sẽ viết $x + (-y)$ là $x - y$ và gọi là *hiệu* của vectơ x với vectơ y.

Các tính chất suy từ định nghĩa :

1) $0x = \theta$ với mọi $x \in V$.

2) $\alpha\theta = \theta$ với mọi $\alpha \in K$.

3) $\alpha x = \theta$ khi và chỉ khi $\alpha = 0$ hoặc $x = \theta$.

4) $\alpha(-x) = -(\alpha x) = (-\alpha)\, x$, với mọi $\alpha \in K$, $x \in V$.

Chứng minh :

1) Ta có : $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x$.

Do đó : $(0x + 0x) + (-0x) = 0x + (-0x)$

$0x + (0x + (-0x)) = \theta$

$0x + \theta = \theta$.

Vậy : $0x = \theta$.

2) Ta có : $\alpha\theta = \alpha(\theta + \theta) = \alpha\theta + \alpha\theta$

Do đó : $\alpha\theta + \alpha\theta + (-\alpha\theta) = \alpha\theta + (-\alpha\theta)$

$\alpha\theta + (\alpha\theta + (-\alpha\theta)) = \theta$

$\alpha\theta = \theta$.

3) Theo các tính chất 1) và 2) ta có : Nếu $\alpha = 0$ hoặc $x = \theta$ thì $\alpha x = \theta$. Ngược lại, giả sử $\alpha x = \theta$. Nếu $\alpha \neq 0$, khi đó có $\alpha^{-1} \in K$.

Ta có : $\alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1}\theta$

$(\alpha^{-1}\alpha)\, x = \theta$

$1x = \theta$.

Do đó : $x = \theta$.

4) Ta có : $\alpha(-x) + \alpha x = \alpha((-x) + x) = \alpha\theta = \theta$.

Vậy : $\alpha(-x) = -(\alpha x)$.

Tương tự ta có : $(-\alpha)\, x = -(\alpha x)$. ■

3.1.2. Các ví dụ về không gian vectơ

1) Giả sử K là một trường số, n là một số nguyên dương. Xét tập K^n là lũy thừa Đề-các bậc n của tập K :

$$K^n = \{x = (x_1, ..., x_n) : x_i \in K, i = 1, ..., n\}.$$

K^n là một K – không gian vectơ đối với hai phép toán sau đây :

– Phép cộng vectơ : Giả sử : $x = (x_1, ..., x_n)$;

$$y = (y_1, ..., y_n).$$

Ta định nghĩa : $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$.

– Phép nhân các phần tử của trường K với các vectơ :

$$\alpha x = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n), \text{ với mọi } \alpha \in K.$$

Dễ dàng kiểm tra lại các điều kiện của định nghĩa không gian vectơ được thỏa mãn. Vậy K^n là một K – không gian vectơ. Không gian K^n có vectơ không là $\theta = (0, ..., 0)$; vectơ đối của vectơ $x = (x_1, ..., x_n)$ là $-x = (-x_1, ..., -x_n)$.

Chẳng hạn, với $K = \mathbb{R}$, $n = 4$, ta có :

$$\theta = (0, 0, 0, 0).$$

Với $x = (0, -1, 3, 1)$, $y = (1, \sqrt{2}, -5, 2)$ thì :

$$x + y = (1, \sqrt{2} - 1, -2, 3) ;$$

$$-x = (0, 1, -3, -1) ;$$

$$2x = (0, -2, 6, 2).$$

Với $n = 1$ ta có $K^1 = K$, vậy mỗi trường K là một không gian vectơ trên chính nó.

2) Giả sử K là một trường số. Khi đó tập K[x] các đa thức ẩn x, hệ số trên K là một K – không gian vectơ đối với phép cộng các đa thức và phép nhân các đa thức với các phần tử của trường K. Vectơ không là đa thức 0, vectơ đối của f(x) là –f(x).

3) Giả sử P là một trường số. K là một trường con của trường P. Khi đó dễ thấy rằng P là một K – không gian vectơ đối với phép cộng các phần tử trong P và phép nhân các phần tử của K đối với các phần tử thuộc P.

Vậy ta có : Tập các số thực $\mathbb{R}$ là một $\mathbb{Q}$ – không gian vectơ. Tập số phức $\mathbb{C}$ là một $\mathbb{R}$ – không gian vectơ...

4) Ký hiệu C(a, b) là tập các hàm số xác định liên tục trên khoảng mở (a, b). Trong tập C(a, b) ta xác định phép toán cộng các hàm số và phép nhận các số thực với các hàm số như sau :

Với mọi f, g $\in$ C(a, b), $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) ;$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \text{ với mọi } x \in (a, b).$$

Dễ thấy rằng, đối với hai phép toán trên, C(a, b) là một $\mathbb{R}$ – không gian vectơ.

3.2. KHÔNG GIAN CON

3.2.1. Định nghĩa không gian con

Định nghĩa : Giả sử V là một K – không gian vectơ. Tập con khác rỗng $F \subseteq V$ gọi là *không gian con* của K – không gian vectơ V nếu các điều kiện sau được thỏa mãn :

1) Với mọi $x, y \in F \Rightarrow x + y \in F$;

2) Với mọi $x \in F \Rightarrow \alpha x \in F$, đối với mọi $\alpha \in K$.

Vì $F \neq \varnothing$ nên tồn tại $x \in F$. Theo điều kiện 2) ta có : $\theta = 0x \in F$. Vậy mọi không gian con đều chứa vectơ θ.

Nếu $x \in F$, theo điều kiện 2) ta có : $-x = (-1)x \in F$.

Vậy, *mỗi không gian con của K – không gian vectơ V cũng là một K – không gian vectơ.*

Mệnh đề 3.1 : Tập con khác rỗng $F \subseteq V$ là không gian con của K – không gian vectơ V khi và chỉ khi điều kiện sau đây được thỏa mãn :

Với mọi $x, y \in F \Rightarrow \alpha x + \beta y \in F$, đối với mọi $\alpha, \beta \in K$.

Chứng minh :

Điều kiện cần : Giả sử $x, y \in F$, theo điều kiện 2) của định nghĩa không gian con, ta có $\alpha x, \beta y \in F$, với mọi $\alpha, \beta \in K$. Theo điều kiện 1) của định nghĩa ta có $\alpha x + \beta y \in F$.

Điều kiện đủ : Nếu lấy $\alpha = \beta = 1$ ta có điều kiện 1) được thỏa mãn. Nếu lấy $\beta = 0$, ta có điều kiện 2) được thỏa mãn. Vậy F là một không gian con.

Ví dụ :

a) Mỗi K – không gian vectơ V đều có hai không gian con, đó là V và không gian *tầm thường* $\{\theta\}$.

b) Với mỗi số nguyên $n \geq 0$. Ta đặt

$$K_n[x] = \{f \in K[x] : \text{bậc } f < n\}.$$

Dễ thấy $K_n[x]$ là một không gian con của không gian các đa thức ẩn x trên trường K.

c) Đặt : $F = \{x = (0, 0, x_3, x_4) \in K^4\}$.

F là một không gian con của K – không gian vectơ K^4.

d) Ký hiệu $C^1_{(a,b)}$ là tập các hàm số xác định và có đạo hàm liên tục trên khoảng (a, b). Dễ thấy $C^1_{(a,b)}$ là một không gian con của $\mathbb{R}$ – không gian vectơ C(a, b) các hàm xác định liên tục trên (a, b).

3.2.2. Bao tuyến tính, tập sinh của một không gian vectơ

1. Biểu diễn tuyến tính

Giả sử A là một tập con của K – không gian vectơ V. Ta nói vectơ $x \in V$ biểu diễn tuyến tính qua tập A nếu tồn tại các vectơ $u_i \in A$, và các phần tử $\alpha_i \in K$, $i = 1, ..., m$ sao cho :

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_m u_m.$$

Khi đó ta nói vectơ x là một tổ hợp tuyến tính của $u_1, ..., u_m$.

Dễ thấy rằng, nếu vectơ x biểu diễn tuyến tính qua tập A, và mỗi vectơ của tập A lại biểu diễn tuyến tính qua tập $B \subseteq V$ thì vectơ x cũng biểu diễn tuyến tính qua tập B.

2. Bao tuyến tính

Giả sử S là tập con của K – không gian vectơ V. *Bao tuyến tính của tập S*, ký hiệu $\mathscr{L}(S)$, là tập tất cả các phần tử của V biểu diễn tuyến tính qua S, tức là

$$\mathscr{L}(S) = \left\{x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i : u_i \in S, \alpha_i \in K\right\}.$$

Mệnh đề 3.2 : Nếu S là một tập con khác rỗng của K – không gian vectơ V thì bao tuyến tính $\mathcal{L}(S)$ là một không gian con và là không gian con nhỏ nhất chứa tập S.

Chứng minh : Với mỗi u ∈ S ta có $u = 1u \in \mathcal{L}(S)$. Do đó $S \subseteq \mathcal{L}(S)$ và $\mathcal{L}(S) \neq \varnothing$. Dễ thấy rằng, nếu $x, y \in \mathcal{L}(S)$ thì $\alpha x + \beta y \in \mathcal{L}(S)$ đối với mọi $\alpha, \beta \in K$. Vậy $\mathcal{L}(S)$ là một không gian con chứa tập S. Giả sử rằng, F là một không gian con chứa tập S. Khi đó với mọi $x \in \mathcal{L}(S)$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$.

Vì $u_i \in S \subseteq F$, $i = 1, ..., n$ và F là không gian con nên $\alpha_i u_i \in F$. Do đó $x \in F$ và $\mathcal{L}(S) \subseteq F$. Vậy $\mathcal{L}(S)$ là không gian con nhỏ nhất chứa tập S.■

Bao tuyến tính $\mathcal{L}(S)$ gọi là *không gian con sinh bởi tập S*. Nếu $\mathcal{L}(S) = V$ thì tập S gọi là *tập các phần tử sinh* (hay *tập sinh*) của K – không gian vectơ V. Theo Mệnh đề 3.2 ta có :

Tập con S là tập các phần tử sinh của K – không gian vectơ V khi và chỉ khi mỗi vectơ của V biểu diễn tuyến tính được qua S.

Ví dụ :

a) Trong K – không gian vectơ K^4, xét hệ vectơ :

$$e_1 = (1, 0, 0, 0);$$

$$e_2 = (0, 1, 0, 0);$$

$$e_3 = (0, 0, 1, 0);$$

$$e_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Khi đó đối với mỗi $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in K^4$ ta có :

$$x = (x_1, 0, 0, 0) + (0, x_2, 0, 0) + (0, 0, x_3, 0) + (0, 0, 0, x_4).$$

$$= x_1(1, 0, 0, 0) + x_2(0, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(0, 0, 0, 1)$$

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4.$$

Vậy ta có : $K^4 = \mathcal{L}(\{e_1, e_2, e_3, e_4\})$. Hệ $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ là tập sinh của không gian vectơ K^4.

Một cách tổng quát ta có hệ vectơ :

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0) ;$$

$$e_2 = (0, 1. 0, ..., 0) ;$$

$$...$$

$$e_n = (0, 0, 0, ..., 1).$$

là tập sinh của K – không gian vectơ K^n.

b) Dễ thấy rằng, trong không gian các đa thức ẩn x trên trường K, ta có :

$$K[x] = \mathscr{L}(\{1, x, x^2, ...\}) ;$$

$$K_n[x] = \mathscr{L}(\{1, x, ..., x^{n-1}\}).$$

3.2.3. Tổng trực tiếp của các không gian con

Giả sử X_i, i = 1, ..., m là các tập con của K – không gian vectơ V. Ký hiệu :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + ... + X_m = \left\{x = \sum_{i=1}^{m} u_i : u_i \in X_i\right\}.$$

Mệnh đề 3.3 : Nếu F_i, i = 1, ..., n là các không gian con của K – không gian vectơ V thì $F = F_1 + ... + F_n$ cũng là không gian con. Không gian con F gọi là *tổng* của các không gian con $F_1, F_2, ..., F_n$.

Chứng minh : Theo Mệnh đề 3.2 dễ dàng thấy rằng :

$$F_1 + ... + F_n = \mathscr{L}(F_1 \cup ... \cup F_n). \blacksquare$$

Định nghĩa tổng trực tiếp : Không gian con F gọi là *tổng trực tiếp* của các không gian con F_1 và F_2, ký hiệu là $F = F_1 \oplus F_2$, nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn :

1) $F = F_1 + F_2$;

2) $F_1 \cap F_2 = \{\theta\}$.

Khi đó không gian con F_i gọi là *bù tuyến tính* (hay *bù trực tiếp*) của không gian con F_j trong không gian F.

Ví dụ : Trong $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $\mathbb{R}^3$ xét các không gian con :

$F_1 = \{x = (x_1, x_2, 0) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\}$;

$F_2 = \{y = (0, 0, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Rõ ràng : $\mathbb{R}^3 = F_1 + F_2$ và $F_1 \cap F_2 = \{\theta\}$.

Vậy ta có : $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$.

Mệnh đề 3.4 : Giả sử F_1, F_2 là các không gian con của K – không gian vectơ F. Khi đó $F = F_1 \oplus F_2$ khi và chỉ khi mỗi vectơ $u \in F$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng :

$$u = u_1 + u_2,\ u_1 \in F_1,\ u_2 \in F_2. \tag{3.1}$$

Chứng minh :

Điều kiện cần : Giả sử $F = F_1 \oplus F_2$. Theo định nghĩa tổng trực tiếp ta có $F = F_1 + F_2$. Do đó với mọi $u \in F$ có biểu diễn (3.1).

Giả sử rằng

$$u = u'_1 + u'_2,\ u'_1 \in F_1,\ u'_2 \in F_2.$$

Khi đó ta có : $\theta = (u_1 - u'_1) + (u_2 - u'_2)$.

Do đó ta có : $u'_1 - u_1 = u_2 - u'_2 \in F_1 \cap F_2 = \{\theta\}$.

Vậy thì $u_1 = u'_1$ và $u_2 = u'_2$. Biểu diễn (3.1) của vectơ $u \in F$ là duy nhất.

Điều kiện đủ : Giả sử mọi vectơ $u \in F$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng (3.1). Khi đó rõ ràng $F = F_1 + F_2$. Nếu có $v \in F_1 \cap F_2$, $v \neq \theta$ khi đó vectơ $\theta \in F$ có hai biểu diễn (3.1) khác nhau, đó là $\theta = \theta + \theta$ và $\theta = v + (-v)$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $F_1 \cap F_2 = \{\theta\}$. Ta có $F = F_1 \oplus F_2$.■

Tổng quát : Không gian con F gọi là tổng trực tiếp của các không gian con $F_1, ..., F_m$, ký hiệu $F = F_1 \oplus ... \oplus F_m = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$, nếu các điều kiện sau được thỏa mãn :

1) $F = \sum_{i=1}^{m} F_i$;

2) $F_j \cap \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{m} F_i = \{\theta\}, j = 1, ..., m.$

Bằng quy nạp ta có : Giả sử F_i, $i = 1, ..., m$ là các không gian con của K – không gian vectơ F. Khi đó $F = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ nếu và chỉ nếu với mọi vectơ $u \in F$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng :

$$u = u_1 + ... + u_m, u_i \in F_i, i = 1, ..., m.$$

3.3. HỆ VECTƠ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

3.3.1. Hệ vectơ độc lập tuyến tính

Định nghĩa :

– Hệ vectơ $\{u_1, ..., u_m\}$ thuộc K – không gian vectơ V gọi là *độc lập tuyến tính* nếu khi có tổ hợp tuyến tính

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_m u_m = \theta,$$

thì suy ra $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0.$

– Tập con S của K – không gian vectơ V gọi là *độc lập tuyến tính* nếu mọi tập con hữu hạn $\{u_1, ..., u_m\} \subseteq S$, $u_i \neq u_j$ khi $i \neq j$ là hệ độc lập tuyến tính.

Ví dụ :

a) Trong không gian K^3, xét hệ vectơ : $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Hệ vectơ $\{e_1, e_2, e_3\}$ là một hệ độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử có tổ hợp tuyến tính : $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = \theta$. Ta có :

$$\alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 0, 0).$$

Vậy : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$

Một cách tương tự ta có :

Trong không gian K^n hệ vectơ :

$$e_1 = (1, 0, ..., 0)$$

$$e_2 = (0, 1, ..., 0)$$

$$......$$

$$e_n = (0, 0, ..., 1)$$

là một hệ độc lập tuyến tính.

b) Trong không gian các đa thức K[x] tập con $B = \{1, x, x^2, ...\}$ là một tập độc lập tuyến tính.

3.3.2. Hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính

Định nghĩa :

– Nếu hệ vectơ $\{u_1, ..., u_m\}$ thuộc K – không gian vectơ V không độc lập tuyến tính thì gọi là *phụ thuộc tuyến tính.*

Vậy, hệ vectơ $\{u_1, ..., u_m\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại các phần tử $\alpha_1, ..., \alpha_m$ thuộc trường K, trong đó có ít nhất một $\alpha_i \neq 0$ sao cho :

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_m u_m = \theta.$$

– Tập con S của K – không gian vectơ V gọi là *phụ thuộc tuyến tính* nếu S là tập không độc lập tuyến tính, tức là S chứa ít nhất một tập con hữu hạn phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ : Trong không gian $\mathbb{R}^4$ hệ các vectơ sau đây là phụ thuộc tuyến tính.

$$u_1 = (1, -1, -1, 3) ; u_2 = (-2, 2, 2, -6) ; u_3 = (-5, 2, 7, 0).$$

Vì nếu chọn $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0$ thì ta có $2u_1 + u_2 + 0u_3 = \theta$.

3.3.3. Tính chất

Các tính chất suy từ định nghĩa :

1) Tập một vectơ $\{u\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $u = \theta$.

Thật vậy, theo tính chất 3) ở mục 3.1.1 ta có $\alpha u = \theta$ khi và chỉ khi hoặc $u = \theta$ hoặc $\alpha = 0$.

Giả sử A, B là các tập con của K – không gian vectơ V và $A \subseteq B$. Khi đó ta có :

– Nếu tập B độc lập tuyến tính thì tập A độc lập tuyến tính.

– Nếu tập A phụ thuộc tuyến tính thì tập B phụ thuộc tuyến tính.

Từ các tính chất trên, suy ra : Mỗi tập con chứa vectơ θ là tập phụ thuộc tuyến tính.

2) Điều kiện cần và đủ để một hệ vectơ độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính :

Mệnh đề 3.5 : Hệ vectơ $\{u_1, ..., u_m\}$, $m \geq 2$ thuộc K – không gian vectơ V là độc lập tuyến tính (hoặc phụ thuộc tuyến tính) khi và chỉ khi không có vectơ nào (hoặc có một vectơ) biểu diễn tuyến tính qua các vectơ còn lại.

Chứng minh :

Điều kiện cần : Giả sử hệ vectơ $\{u_1, ..., u_m\}$, $m \geq 2$ độc lập tuyến tính. Nếu có một vectơ, chẳng hạn u_1, biểu diễn tuyến tính qua các vectơ còn lại : $u_1 = \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m$.

Ta có $u_1 - \alpha_2 u_2 - ... - \alpha_m u_m = \theta$,

trong đó : $\alpha_1 = 1 \neq 0$.

Trái với giả thiết hệ độc lập tuyến tính.

Điều kiện đủ : Giả sử hệ vectơ $\{u_1, ..., u_m\}$ thỏa mãn điều kiện không có vectơ nào biểu diễn tuyến tính qua các vectơ còn lại. Khi đó nếu có tổ hợp tuyến tính $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_m u_m = \theta$ thì $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$.

Vì nếu có α_i nào đó khác 0, chẳng hạn $\alpha_1 \neq 0$, ta có :

$$u_1 = -\left(\alpha_1^{-1}\alpha_2\right)u_2 - ... - \left(\alpha_1^{-1}\alpha_m\right)u_m .$$

Vậy vectơ u_1 biểu diễn tuyến tính qua các vectơ còn lại, trái với giả thiết. Do đó hệ đã cho độc lập tuyến tính.

Điều khẳng định thứ hai suy từ điều khẳng định thứ nhất, vì mỗi hệ vectơ không độc lập tuyến tính thì phụ thuộc tuyến tính và ngược lại.■

3.4. CƠ SỞ, SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTƠ

3.4.1. Cơ sở của không gian vectơ

Định nghĩa : Tập con S gọi là một *cơ sở* của K – không gian vectơ V nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn :

1) S là tập độc lập tuyến tính ;

2) S là tập các phần tử sinh của K – không gian vectơ V, tức là $\mathscr{L}(S) = V$.

Định lý 3.1 : Hệ vectơ $S = \{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở của K – không gian vectơ V khi và chỉ khi mỗi vectơ $x \in V$ có thể biểu diễn tuyến tính duy nhất qua hệ S, tức là :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \tag{3.2}$$

Họ $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ được gọi là *tọa độ* của vectơ x đối với cơ sở S.

Chứng minh :

Điều kiện cần : Giả sử $S = \{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở của K – không gian vectơ V. Vì $\mathscr{L}(S) = V$, nên mỗi vectơ $x \in V$ đều có thể biểu diễn tuyến tính qua S. Giả sử có hai biểu diễn :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$$

và
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda'_i u_i.$$

Khi đó ta có :

$$x - x = \theta = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda'_i) u_i.$$

Vì hệ S độc lập tuyến tính nên ta có : $\lambda_i - \lambda'_i = 0$, $i = 1, ..., n$. Do đó $\lambda_i = \lambda'_i$, $i = 1, ..., n$. Vậy biểu diễn (3.2) là duy nhất.

Điều kiện đủ : Giả sử hệ vectơ $S = \{u_1, ..., u_n\}$ thỏa mãn các điều kiện của định lý. Rõ ràng rằng, $\mathscr{L}(S) = V$. Giả sử có tổ hợp tuyến tính :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \theta.$$

Mặt khác, ta luôn luôn có : $\sum_{i=1}^{n} 0u_i = \theta$. Theo giả thiết vectơ θ chỉ có một biểu diễn tuyến tính duy nhất qua tập S, nên ta có $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.

Do đó S là tập độc lập tuyến tính. Vậy S là một cơ sở của không gian V.■

Chú ý. Định lý 3.1 vẫn đúng đối với trường hợp cơ sở S có vô hạn vectơ.

Ví dụ :

a) Trong K – không gian vectơ K^n xét hệ vectơ :

$$e_1 = (1, 0, ..., 0)$$

$$e_2 = (0, 1, ..., 0)$$

.....

$$e_n = (0, 0, ..., 1)$$

Ta biết rằng, hệ vectơ $\{e_1, ..., e_n\}$ độc lập tuyến tính và là tập sinh của không gian K^n. Vậy hệ vectơ $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở và được gọi là *cơ sở chính tắc* của không gian K^n.

Với mỗi vectơ $x = (x_1, ..., x_n) \in K^n$ đều có biểu diễn $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Do đó họ $\{x_1, ..., x_n\}$ là tọa độ của vectơ x đối với cơ sở chính tắc.

b) Hệ $\{1, x, ..., x^{n-1}\}$ là một cơ sở của không gian $K_n[x]$ các đa thức có bậc < n.

c) Tập $S = \{1, x, x^2 ...\}$ là một cơ sở của không gian các đa thức K[x].

3.4.2. Số chiều của không gian vectơ

Mệnh đề 3.6 : Trong K – không gian vectơ V cho trước hai hệ vectơ :

$$\{u_1, u_2, ..., u_m\} \qquad (I)$$

$$\{v_1, v_2, ..., v_s\} \qquad (II)$$

Nếu hệ (I) độc lập tuyến tính và mỗi vectơ của hệ (I) biểu diễn tuyến tính qua hệ (II) thì $m \le s$.

Chứng minh : Vì mỗi vectơ của hệ (I) biểu diễn tuyến tính qua hệ (II) nên ta có :

$$u_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_s v_s. \qquad (a)$$

Vì hệ (I) độc lập tuyến tính nên $u_1 \neq \theta$. Do đó phải có một α_i nào đó khác không, chẳng hạn $\alpha_1 \neq 0$. Từ đẳng thức (a) ta có :

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}v_2 - \dots - \frac{\alpha_s}{\alpha_1}v_s + \frac{1}{\alpha_1}u_1. \qquad \text{(b)}$$

Trong hệ (II) thay vectơ v_1 bởi vectơ u_1. Ta có hệ :

$$\{u_1, v_2, \dots, v_s\} \qquad \text{(II, 1)}$$

Từ (b) suy ra rằng, mỗi vectơ của hệ (II) biểu diễn tuyến tính qua hệ (II, 1). Do đó mỗi vectơ của hệ (I) biểu diễn tuyến tính qua hệ (II, 1). Ta có :

$$u_2 = \beta_1 u_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_s v_s, \qquad \text{(c)}$$

Vì hệ (I) độc lập tuyến tính nên trong các hệ số $\beta_2, \dots, \beta_s$ phải có hệ số $\beta_i \neq 0$, giả sử $\beta_2 \neq 0$. Từ đẳng thức (c) ta có :

$$v_2 = -\frac{\beta_3}{\beta_2}v_3 - \dots - \frac{\beta_s}{\beta_2}v_s - \frac{\beta_1}{\beta_2}u_1 + \frac{1}{\beta_2}u_2. \qquad \text{(d)}$$

Trong hệ (II, 1) thay vectơ v_2 bởi vectơ u_2. Ta có hệ :

$$\{u_1, u_2, v_3, \dots, v_s\} \qquad \text{(II, 2)}$$

Có thể tiếp tục làm như vậy, sau m bước các vectơ của hệ (I) đều được vào hệ (II). Ta có hệ :

$$\{u_1, u_2, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_s\}, \text{ (II, m)}$$

Từ đó suy ra : $m \leq s$.■

Hệ quả 3.1 : Nếu các hệ vectơ (I) và (II) độc lập tuyến tính và mỗi vectơ của hệ này biểu diễn tuyến tính qua hệ kia thì $m = s$.

Định lý 3.2 : Nếu K – không gian vectơ V có một cơ sở hữu hạn gồm n vectơ thì các cơ sở khác của V cũng có n vectơ.

Số n gọi là *số chiều* của K – không gian vectơ V, ký hiệu $n = \dim V$.

Chứng minh :

Giả sử K – không gian vectơ V có một cơ sở gồm n vectơ :

$$\{f_1, \dots, f_n\}. \qquad \text{(a)}$$

Giả sử S là một cơ sở bất kỳ của không gian V. Chọn tùy ý k vectơ thuộc S :

$$\{u_1, u_2, \dots, u_k\}. \qquad \text{(b)}$$

Vì S là cơ sở nên hệ (b) độc lập tuyến tính. Vì hệ (a) là một cơ sở của không gian V nên mỗi vectơ của hệ (b) biểu diễn tuyến tính qua hệ (a). Theo Mệnh đề 3.6 ta có $k \leq n$. Do đó số vectơ của tập S không thể lớn hơn n. Giả sử rằng :

$$S = \{u_1, u_2, ..., u_m\}. \tag{c}$$

Ta có $m \leq n$. Vì hệ (c) là một cơ sở, nên các vectơ của hệ độc lập tuyến tính (a) biểu diễn tuyến tính qua hệ (c), do đó ta có $n \leq m$. Vậy $m = n$.■

Từ Định lý 3.2, suy ra : Nếu K – không gian vectơ V có một cơ sở có vô hạn vectơ thì số vectơ của các cơ sở khác cũng vô hạn. Khi đó ta nói rằng số chiều của K – không gian vectơ V là vô hạn, ký hiệu $\dim V = \infty$.

Ta quy ước : $\dim\{\theta\} = 0$.

Ví dụ : K – không gian vectơ K^n có cơ sở chính tắc gồm n vectơ : $\{e_1, ..., e_n\}$. Do đó ta có $\dim K^n = n$.

Hệ 4 vectơ : $\{1, x, x^2, x^3\}$ là một cơ sở của không gian $K_4[x]$ các đa thức có bậc < 4. Vậy $\dim K_4[x] = 4$.

Tập $S = \{1, x, x^2, ...\}$ là một cơ sở của không gian các đa thức K[x]. Vậy ta có $\dim K[x] = \infty$.

Định lý 3.3 : Giả sử K – không gian vectơ V có $\dim V = n < \infty$, khi đó trong không gian V đối với mọi hệ k vectơ độc lập tuyến tính $\{u_1, ..., u_k\}$, $k < n$ đều có thể bổ sung thêm $n - k$ vectơ $u_{k+1}, ..., u_n$ để được hệ $\{u_1, ..., u_k, u_{k+1}, ..., u_n\}$ là một cơ sở của K – không gian vectơ V.

Chứng minh : Vì $k < n$, theo Định lý 3.2 thì hệ $\{u_1, ..., u_k\}$ không phải là cơ sở của không gian V. Do đó nó không phải là tập các phần tử sinh của không gian V. Ta có $F = \mathscr{L}(\{u_1, ..., u_k\}) \neq V$. Chọn vectơ $u_{k+1} \in V \setminus F$. Hệ vectơ $\{u_1, ..., u_k, u_{k+1}\}$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử có tổ hợp tuyến tính :

$$\alpha u_1 + ... + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} = \theta.$$

Nếu $\alpha_{k+1} \neq 0$ thì ta có :

$$u_{k+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}u_1 - ... - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}u_k \in F.$$

Mâu thuẫn này chứng tỏ $\alpha_{k+1} = 0$. Vậy ta có :

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k = \theta.$$

Theo giả thiết, hệ $\{u_1, ..., u_k\}$ độc lập tuyến tính, nên ta có $\alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$. Vậy hệ vectơ $\{u_1, ..., u_k, u_{k+1}\}$ độc lập tuyến tính.

Một cách tương tự, nếu $k + 1 < n$ thì ta có thể bổ sung thêm vectơ u_{k+2} để được hệ vectơ $\{u_1, ..., u_k, u_{k+1}, u_{k+2}\}$ độc lập tuyến tính.

Tiếp tục như vậy, sau $n - k$ bước, ta được hệ n vectơ độc lập tuyến tính : $\{u_1, ..., u_k, ..., u_n\}$. Đó là cơ sở cần tìm.■

Mệnh đề 3.7 : $\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim F_1 + \dim F_2$,

trong đó F_1, F_2 là các không gian con hữu hạn chiều của K – không gian vectơ V.

Chứng minh : Giả sử rằng, $\{u_1, ..., u_p\}$ là một cơ sở của không gian vectơ F_1 và $\{v_1, ..., v_q\}$ là một cơ sở của không gian vectơ F_2. Ta sẽ chứng tỏ hệ $S = \{u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q\}$ là một cơ sở của không gian vectơ $F = F_1 \oplus F_2$.

Hệ vectơ S độc lập tuyến tính. Thật vậy, nếu có tổ hợp tuyến tính :

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + ... + \beta_q v_q = \theta \tag{a}$$

thì từ đẳng thức (a) suy ra :

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_p u_p = -\beta_1 v_1 - ... - \beta_q v_q \in F_1 \cap F_2 = \{\theta\}.$$

Do đó ta có :

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_p u_p = \theta \tag{b}$$

$$\beta_1 v_1 + ... + \beta_q v_q = \theta \tag{c}$$

Vì các hệ vectơ $\{u_1, ..., u_p\}$ và $\{v_1, ..., v_q\}$ độc lập tuyến tính nên từ (b) và (c) ta có :

$$\alpha_1 = ... = \alpha_p = \beta_1 = ... = \beta_q = 0.$$

Hệ S là tập các phần tử sinh của không gian vectơ F. Thật vậy, với mọi $x \in F$ ta có :

$$x = u + v,$$

trong đó $u \in F_1 = \mathscr{L}(\{u_1, ..., u_k\}) \subseteq \mathscr{L}(S)$, $v \in F_2 = \mathscr{L}(\{v_1, ..., v_q\}) \subseteq \mathscr{L}(S)$.

Do đó ta có $x = u + v \in \mathscr{L}(S)$, vậy thì $F = \mathscr{L}(S)$. Từ đó suy ra rằng $\dim F = p + q = \dim F_1 + \dim F_2$.

Chú ý : Nếu $\dim V = n < \infty$ thì ta có :

– Số vectơ của mỗi hệ độc lập tuyến tính trong không gian tối đa là n.

– Mỗi hệ n + 1 vectơ của không gian V là phụ thuộc tuyến tính.

– Mỗi hệ n vectơ độc lập tuyến tính là một cơ sở của không gian V.

– Nếu F là một không gian con của không gian V thì $\dim F \le n$; $\dim F = n$ khi và chỉ khi $F = V$.

3.5. CƠ SỞ, HẠNG CỦA MỘT HỆ VECTƠ

3.5.1. Định lý và tính chất

Định nghĩa : Trong K – không gian vectơ V, xét hệ vectơ:

$$A = \{u_1, ..., u_m\}.$$

Hệ con $S = \{u_{i_1}, ..., u_{i_k}\} \subseteq A$ được gọi là *một cơ sở của hệ vectơ A* nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn :

1) S là hệ vectơ độc lập tuyến tính ;

2) Mỗi vectơ của hệ A biểu diễn tuyến tính được qua hệ S.

Mệnh đề 3.8 : Nếu hệ con S là một cơ sở của hệ vectơ A thì S là cơ sở của không gian con $\mathscr{L}(A)$ sinh bởi A, do đó $\dim\mathscr{L}(A) = k$.

Chứng minh : Vì mỗi vectơ của không gian con $\mathscr{L}(A)$ biểu diễn tuyến tính qua A và mỗi vectơ của A biểu diễn tuyến tính qua S, nên mỗi vectơ của $\mathscr{L}(A)$ biểu diễn tuyến tính qua S. Vậy S là một hệ sinh độc lập tuyến tính của không gian con $\mathscr{L}(A)$, nên nó là cơ sở của không gian con đó. ■

Từ Mệnh đề 3.8 suy ra rằng : Nếu hệ vectơ $A = \{u_1, ..., u_n\}$ có một cơ sở k vectơ thì số vectơ của các cơ sở khác cũng bằng k. Số k chung đó được gọi là *hạng của hệ vectơ A*, ký hiệu là r(A).

Các tính chất sau đây được trực tiếp suy ra từ Mệnh đề 3.8 và phép chứng minh của mệnh đề đó :

– Mọi hệ con độc lập tuyến tính của hệ A có số vectơ nhỏ hơn hoặc bằng r(A) ;

– Nếu mỗi vectơ của hệ vectơ A biểu diễn tuyến tính được qua hệ vectơ B thì $r(A) \leq r(B)$;

– Hai hệ hữu hạn vectơ, nếu mỗi vectơ của hệ này biểu diễn tuyến tính được qua hệ kia thì có hạng bằng nhau.

3.5.2. Phép biến đổi sơ cấp

Định nghĩa : Cho trước hệ vectơ :

$$A = \{u_1, ..., u_m\}.$$

Các phép biến đổi sau đây được gọi là các *phép biến đổi sơ cấp* đối với hệ vectơ A :

1) Thay đổi thứ tự các vectơ của hệ A ;

2) Loại vectơ θ (nếu $\theta \in A$) ra khỏi hệ A ;

3) Trong hệ A thay vectơ u_i bởi vectơ αu_i, $\alpha \in K$, $\alpha \neq 0$;

4) Trong hệ A thay vectơ u_i bởi vectơ $u_i + u_k$, $u_k \in A$.

Mệnh đề 3.9 : Các phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của một hệ vectơ.

Chứng minh : Dễ dàng thấy rằng, nếu hệ vectơ B nhận được từ hệ vectơ A bởi một phép biến đổi sơ cấp thì mỗi vectơ của hệ B biểu diễn tuyến tính được qua hệ A và ngược lại mỗi vectơ của hệ A biểu diễn tuyến tính được qua hệ B. Do đó ta có : $r(A) = r(B)$.

3.6. KHÔNG GIAN VECTƠ EUCLID

3.6.1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản

Định nghĩa :

a) Không gian vectơ Euclid : Không gian vectơ Euclid là một không gian vectơ E trên trường số thực $\mathbb{R}$, trong đó với mỗi cặp vectơ $x, y \in E$

được tương ứng với một số thực, ký hiệu là $(x \,.\, y)$, gọi là *tích vô hướng* của hai vectơ x, y, sao cho các điều kiện sau được thỏa mãn :

1) $(x \,.\, y) = (y \,.\, x)$, $\quad \forall x, y \in E$;

2) $(x + x' \,.\, y) = (x \,.\, y) + (x' \,.\, y)$, $\quad \forall x, x', y \in E$;

3) $(\alpha x \,.\, y) = \alpha(x \,.\, y)$, $\quad \forall x, y \in E, \alpha \in \mathbb{R}$;

4) $(x \,.\, x) > 0$, $\quad \forall x \in E, x \neq \theta$.

Điều kiện 1) gọi là *tính chất đối xứng* ; các điều kiện 2) và 3) gọi là *tính chất tuyến tính* đối với biến thứ nhất ; còn điều kiện 4) gọi là *tính chất xác định dương* của tích vô hướng.

Dễ dàng thấy rằng, từ tính chất đối xứng và tính chất tuyến tính của biến thứ nhất, suy ra tính chất tuyến tính đối với biến thứ hai. Ta có :

2') $(x \,.\, y + y') = (x \,.\, y) + (x \,.\, y')$;

3') $(x \,.\, \alpha y) = \alpha(x \,.\, y)$.

Kết hợp các điều kiện 2) và 3) ta có :

$$(\alpha x + \beta x' \,.\, y) = \alpha(x \,.\, y) + \beta(x' \,.\, y).$$

Bằng quy nạp ta có :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \,.\, y\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (u_i \,.\, y). \qquad \text{(a)}$$

Kết hợp các điều kiện 2') và 3') ta có :

$$(x \,.\, \alpha y + \beta y') = \alpha(x \,.\, y) + \beta(x \,.\, y').$$

Bằng quy nạp ta có :

$$\left(x \,.\, \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j (x \,.\, v_j). \qquad \text{(b)}$$

Kết hợp các hệ thức (a) và (b) ta có :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \,.\, \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j (u_i \,.\, v_j).$$

b) Không gian vectơ Unita : Không gian vectơ Unita là một không gian vectơ U trên trường số phức $\mathbb{C}$, trong đó với mỗi cặp vectơ $x, y \in U$

được tương ứng với một số phức, ký hiệu là (x . y), gọi là *tích vô hướng* của hai vectơ x, y sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn :

1*) $(x \, . \, y) = \overline{(y.x)}$, $\forall x, y \in U$.

2) $(x + x'.y) = (x \, . \, y) + (x' \, . \, y)$, $\forall x, x', y \in U$.

3) $(\alpha x \, . \, y) = \alpha(x \, . \, y)$, $\forall x, y \in U, \forall \alpha \in \mathbb{C}$.

4) $(x \, . \, x) > 0$, $\forall x \in U, x \neq \theta$.

c) Độ dài vectơ : Nhờ điều kiện xác định dương 4) có thể định nghĩa độ dài vectơ trong các không gian vectơ Euclid và không gian vectơ Unita như sau :

Độ dài của vectơ x, ký hiệu là $\|x\|$, là số thực không âm xác định bởi :

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}\,. \tag{3.3}$$

Rõ ràng rằng : $\|x\| = 0$ khi và chỉ khi $x = \theta$.

Dưới đây chúng ta chỉ xét các không gian vectơ Euclid, tuy nhiên nhiều tính chất vẫn đúng đối với không gian vectơ Unita.

Ví dụ :

a) Trong $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ có thể định nghĩa một tích vô hướng như sau :

Đối với $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, đặt :

$$(x.y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\,. \tag{3.4}$$

Dễ thấy rằng, các điều kiện từ 1) đến 4) của định nghĩa không gian vectơ Euclid được thỏa mãn. Vậy không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ là một không gian vectơ Euclid đối với tích vô hướng được xác định bởi công thức (3.4), được gọi là *không gian Euclid* $\mathbb{R}^n$.

Theo các công thức (3.3) và (3.4), độ dài của vectơ $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ được tính theo công thức :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,. \tag{3.5}$$

b) Trong $\mathbb{C}$ – không gian vectơ $\mathbb{C}^n$ có thể định nghĩa một tích vô hướng như sau :

Đối với $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$, đặt :

$$(x \,.\, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \,. \tag{3.6}$$

Dễ thấy rằng, các điều kiện 1*) và từ 2) đến 4) của định nghĩa không gian vectơ Unita được thỏa mãn. Vậy không gian vectơ $\mathbb{C}^n$ với tích vô hướng xác định bởi công thức (3.6) là một không gian vectơ Unita.

Theo các công thức (3.3) và (3.6), độ dài của vectơ $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ được tính theo công thức :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \,. \tag{3.7}$$

c) Trong $\mathbb{R}$ – không gian vectơ C[a, b] các hàm số xác định và liên tục trên đoạn [a, b] có thể định nghĩa một tích vô hướng như sau :

Với $f, g \in C[a, b]$ đặt :

$$(f \,.\, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt \,. \tag{3.8}$$

Theo tính chất của tích phân xác định, dễ dàng chứng tỏ các điều kiện từ 1) đến 4) của định nghĩa không gian vectơ Euclid được thỏa mãn. Vậy không gian C[a, b] các hàm số xác định liên tục trên đoạn [a, b] là một không gian vectơ Euclid đối với tích vô hướng xác định bởi công thức (3.8).

Theo các công thức (3.3) và (3.8), độ dài của hàm số $f \in C[a, b]$ được tính theo công thức :

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \,. \tag{3.9}$$

Tính chất không gian vectơ Euclid :

Tính chất 1 (Bất đẳng thức Côsi-Bunhiacôpxki) :

Đối với hai vectơ bất kỳ x, y thuộc không gian vectơ Euclid E ta có :

$$|(x \,.\, y)| \le \|x\| \, \|y\|. \tag{3.10}$$

Chứng minh : Theo điều kiện xác định dương ta có :

$$(tx + y \,.\, tx + y) \geq 0, \text{ đối với mọi } t \in \mathbb{R} \;;$$

$$t^2(x \,.\, x) + 2t(x \,.\, y) + (y \,.\, y) \geq 0,$$

hay $$\|x\|^2 t^2 + 2(x \,.\, y)t + \|y\|^2 \geq 0.$$

Vế trái của bất đẳng thức trên là một tam thức bậc 2 đối với biến t, luôn luôn có giá trị không âm. Vậy ta có :

$$\Delta' = (x \,.\, y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0.$$

Từ đó suy ra rằng : $|(x \,.\, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$.■

Ví dụ áp dụng :

a) Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$, theo các công thức (3.4), (3.5) và (3.10) ta có :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} .$$

b) Trong không gian C[a, b] các hàm số xác định liên tục trên đoạn [a, b], theo các công thức (3.8), (3.9) và (3.10) ta có :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,dt} .$$

Tính chất 2 (Bất đẳng thức tam giác) :

Đối với hai vectơ bất kỳ x, y thuộc không gian vectơ Euclid E ta có :

$$\| x + y \| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{3.11}$$

Chứng minh : Theo bất đẳng thức (3.10) ta có :

$$\|x + y\|^2 = (x \,.\, x) + 2(x \,.\, y) + (y \,.\, y)$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Vậy ta có : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.■

Góc giữa hai vectơ :

Nhờ bất đẳng thức Côsi – Bunhiacôpxki, ta có thể định nghĩa góc giữa hai vectơ trong không gian vectơ Euclid.

Trong không gian vectơ Euclid E, góc α giữa hai vectơ $x \neq \theta$, $y \neq \theta$ được xác định bởi :

$$\cos\alpha = \frac{(x.y)}{\|x\|\|y\|}, 0 \le \alpha \le \pi. \quad (3.12)$$

Nếu $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì ta nói các vectơ x và y *trực giao* với nhau, ký hiệu là $x \perp y$.

Theo (3.12) ta có : với $x \neq \theta$, $y \neq \theta$ thì $x \perp y$ khi và chỉ khi $(x . y) = 0$.

Vì $(x . \theta) = 0$ nên ta quy ước $\theta \perp x$ với mọi $x \in F$.

Tính chất 3 (Định lý Pitago) :

Giả sử $\{u_1, ..., u_k\}$ là hệ các vectơ trong không gian vectơ Euclid từng cặp trực giao với nhau : $(u_i . u_j) = 0$, $i \neq j$. Khi đó ta có :

$$\|u_1 + ... + u_k\|^2 = \|u_1\|^2 + ... + \|u_k\|^2.$$

Chứng minh : Theo tính chất tuyến tính theo từng biến của tích vô hướng ta có :

$$\|u_1 + ... + u_k\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} u_i . \sum_{j=1}^{k} u_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}(u_i . u_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(u_i . u_i) = \sum_{i=1}^{k}\| u_i \|^2 . \blacksquare$$

Tính chất 4 : Nếu hệ vectơ $\{u_1, ..., u_m\}$ không chứa vectơ θ và từng cặp trực giao với nhau, $(u_i . u_j) = 0$, $i \neq j$, thì độc lập tuyến tính.

Chứng minh :

Giả sử có tổ hợp tuyến tính : $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i = \theta$. Khi đó với $k = 1, ..., m$ ta có :

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i . u_k\right) = (\theta . u_k) = 0 \ ;$$

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i (u_i . u_k) = 0 .$$

Vì $(u_i . u_k) = 0$ đối với $i \neq k$. Ta có $\alpha_k(u_k . u_k) = 0$. Vì $(u_k . u_k) > 0$ nên $\alpha_k = 0.$■

Giả sử L là không gian con của không gian vectơ Euclid E. Vectơ $x \in E$ được gọi là *trực giao* với không gian con L, ký hiệu $x \perp L$ nếu $x \perp y, \forall y \in L$.

Tính chất 5 : Trong không gian vectơ Euclid E nếu vectơ x trực giao với các vectơ $u_1, ..., u_m$ thì vectơ x trực giao với không gian con $L = \mathscr{L}(\{u_1, ..., u_n\})$.

Chứng minh : Vì mỗi vectơ $y \in L$ có biểu diễn tuyến tính $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$, do đó ta có :

$$(x.y) = \left(x.\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (x.u_i) = 0. ■$$

3.6.2. Phương pháp trực giao hóa Schmidt

Phương pháp trực giao hóa Schmidt là một phương pháp chuyển một hệ p vectơ độc lập tuyến tính của không gian vectơ Euclid sang hệ p vectơ không chứa vectơ θ, trực giao với nhau từng đôi một và mỗi vectơ của hệ này biểu diễn tuyến tính qua hệ đã cho.

Giả sử trong không gian vectơ Euclid E cho trước hệ p vectơ độc lập tuyến tính :

$$\{g_1, ..., g_p\} \qquad \text{(I)}$$

Dựng hệ p vectơ từng đôi một trực giao :

$$\{f_1, ..., f_p\}, f_i \neq \theta, i = 1, ..., p \qquad \text{(II)}$$

và mỗi f_i biểu diễn tuyến tính qua hệ (I).

– Với k = 1 : Chọn $f_1 = g_1$, tức là đưa vectơ g_1 vào hệ (II).

– Với $k \geq 1$: Giả sử đã dựng được k vectơ khác θ : $f_1, ..., f_k$ trực giao với nhau từng đôi một : $(f_i, f_j) = 0, i \neq j$; trong đó vectơ f_i, $i = 1, ..., k$ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ $g_1, ..., g_i$.

Đặt :

$$f_{k+1} = b_1 f_1 + ... + b_k f_k + g_{k+1}. \qquad (3.13)$$

Vì f_i, i = 1, ..., k là tổ hợp tuyến tính của $g_1, ..., g_i$ nên f_{k+1} là tổ hợp tuyến tính các vectơ $g_1, ..., g_{k+1}$. Vì hệ $\{g_1, ..., g_{k+1}\}$ độc lập tuyến tính và trong tổ hợp tuyến tính ở vế phải hệ số của g_{k+1} là $1 \neq 0$, do đó vectơ $f_{k+1} \neq \theta$ đối với mọi giá trị $b_i \in \mathbb{R}$, i = 1, ..., k.

Ta cần phải chọn b_i, i = 1, ..., k sao cho f_{k+1} trực giao với $f_1, ..., f_k$.

Với i = 1, ..., k đặt :

$$(f_{k+1} . f_i) = \left(\sum_{j=1}^{k} b_j f_j + g_{k+1} . f_i\right) = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{k} b_j (f_j . f_i) + (g_{k+1} . f_i) = 0 ;$$

$$b_i(f_i.f_i) + (g_{k+1}.f_i) = 0.$$

Vậy giá trị b_i cần chọn là :

$$b_i = -\frac{(g_{k+i} . f_i)}{(f_i . f_i)}. \tag{3.14}$$

Tiếp tục tiến hành như vậy, sau p bước ta có hệ (II).

Ví dụ : Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ xét hệ vectơ :

$$g_1 = (1, 1, 0, 0), g_2 = (1, 0, 1, 0), g_3 = (-1, 0, 0, 1).$$

Dễ dàng chứng tỏ hệ vectơ $\{g_1, g_2, g_3\}$ độc lập tuyến tính.

Hãy trực giao hóa hệ đã cho :

Chọn $f_1 = g_1 = (1, 1, 0, 0)$.

Theo công thức (3.13), đặt :

$$f_2 = b_1 f_1 + g_2.$$

Theo công thức (3.14) ta có :

$$b_1 = -\frac{(g_2 . f_1)}{(f_1 . f_1)} = -\frac{1.1 + 0.1 + 1.0 + 0.0}{1.1 + 1.1 + 0.0 + 0.0} = -\frac{1}{2}.$$

Do đó :

$$f_2 = -\frac{1}{2}f_1 + g_2$$

$$= -\frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) + (1, 0, 1, 0)$$

$$= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right).$$

Theo công thức (3.13), đặt :

$$f_3 = b_1f_1 + b_2f_2 + g_3.$$

Theo công thức (3.14) ta có :

$$b_1 = -\frac{(g_3.f_1)}{(f_1.f_1)} = \frac{(-1).1 + 0.1 + 0.0 + 1.0}{1.1 + 1.1 + 0.0 + 0.0} = -\frac{1}{2};$$

$$b_2 = -\frac{(g_3.f_2)}{(f_2.f_2)} = \frac{(-1).\frac{1}{2} + 0\left(-\frac{1}{2}\right) + 0.1 + 1.0}{\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + 1.1 + 0.0} = -\frac{1}{3}.$$

Do đó ta có :

$$f_3 = -\frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{3}f_2 + g_3 = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

Từ hệ vectơ độc lập tuyến tính đã cho $\{g_1, g_2, g_3\}$ bằng phương pháp trực giao hóa Schmidt ta dựng được hệ vectơ trực giao :

$$f_1 = (1, 1, 0, 0)\,;\; f_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right);\;\; f_3 = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right).$$

3.6.3. Cơ sở trực chuẩn

Vectơ đơn vị : Trong không gian vectơ Euclid, mỗi vectơ có độ dài bằng 1 gọi là *vectơ đơn vị*.

Đối với mỗi vectơ $x \neq \theta$ thuộc không gian vectơ Euclid E, thì vectơ $u = \frac{1}{\|x\|}x$ là một vectơ đơn vị, gọi là *chuẩn hóa* của vectơ x. Thật vậy, ta có :

$$\|u\| = \sqrt{(u.u)} = \sqrt{\frac{1}{\|x\|}x.\frac{1}{\|x\|}x} = \frac{1}{\|x\|}\sqrt{(x.x)} = 1.$$

Cơ sở trực giao : Cơ sở $S = \{u_\alpha\}_{\alpha \in I}$ của không gian vectơ Euclid E được gọi là *cơ sở trực giao* nếu S là một hệ vectơ từng đôi một trực giao với nhau, tức là $(u_\alpha . u_\beta) = 0$, với $\alpha \neq \beta$.

Cơ sở trực chuẩn : *Cơ sở trực chuẩn* là một cơ sở trực giao mà các vectơ của cơ sở là vectơ đơn vị.

Theo tính chất 4) ta có : Hệ vectơ $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian vectơ Euclid n chiều E khi và chỉ khi điều kiện sau được thỏa mãn :

$$(u_i . u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ khi } i = j \\ 0 \text{ khi } i \neq j \end{cases} \tag{3.15}$$

(δ_{ij} gọi là ký hiệu Cronecker).

Mệnh đề 3.10 : Mỗi không gian vectơ Euclid hữu hạn chiều đều có cơ sở trực chuẩn.

Chứng minh : Giả sử E là một không gian vectơ Euclid n chiều. Khi đó không gian E có một cơ sở :

$$\{g_1, ..., g_n\}. \tag{a}$$

Từ cơ sở (a), bằng phương pháp trực giao hóa Schmidt ta dựng được hệ n vectơ khác θ trực giao với nhau :

$$\{f_1, ..., f_n\}. \tag{b}$$

Chuẩn hóa hệ (b) : Đặt $u_i = \dfrac{1}{\| f_i \|} f_i$, $i = 1, ..., n$.

Ta có cơ sở trực chuẩn :

$$\{u_1, ..., u_n\}. \blacksquare \tag{c}$$

Mệnh đề 3.11 : Cơ sở $\{u_1, ..., u_n\}$ của không gian vectơ Euclid E là một cơ sở trực chuẩn khi và chỉ khi tích vô hướng của hai vectơ bất kỳ bằng tổng các tích của tọa độ tương ứng đối với cơ sở đó.

Chứng minh :

Điều kiện cần : Giả sử $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian E. Với $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$, theo (3.15) ta có :

$$(x.y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i . \sum_{j=1}^{n} y_j u_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (u_i . u_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Điều kiện đủ : Giả sử cơ sở $\{u_1, ..., u_n\}$ thỏa mãn điều kiện định lý. Khi đó rõ ràng $(u_i, u_j) = \delta_{ij}$. Vậy đó là một cơ sở trực chuẩn.■

Ví dụ : Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$, theo công thức (3.15) thì cơ sở chính tắc $\{e_1, ..., e_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn.

Mệnh đề 3.12 : Giả sử L là không gian con k chiều của không gian vectơ Euclid n chiều E. Khi đó tập $L^{\perp}$ các vectơ trực giao với không gian L là một không gian con (n – k) chiều và $E = L \oplus L^{\perp}$.

Không gian con $L^{\perp}$ gọi là *không gian con bù trực giao* của không gian con L.

Chứng minh : Nếu $L = \{\theta\}$, khi đó ta có $L^{\perp} = E$, và điều khẳng định đúng. Giả sử $L \neq \{\theta\}$. Theo Mệnh đề 3.10, không gian L có một cơ sở trực chuẩn $\{u_1, ..., u_k\}$. Theo Định lý 3.3 và áp dụng phương pháp trực giao hóa Schmidt ta có thể bổ sung thêm n – k vectơ $u_{k+1}, ..., u_n$ để được hệ $\{u_1, ..., u_k, u_{k+1}, ..., u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian vectơ Euclid E. Dễ thấy rằng : $L^{\perp} = \mathcal{L}(\{u_{k+1}, ..., u_n\})$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.■

BÀI TẬP

Đề bài

3.1. Xét K – không gian vectơ V.

Chứng minh rằng, đối với mọi vectơ $x, y \in V$, mọi phần tử $\alpha, \beta \in K$ ta luôn luôn có :

1) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$;

2) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.

3.2. Ký hiệu $\mathbb{R}^+$ là tập các số thực dương.

Chứng tỏ tập $(\mathbb{R}^+)^n$ là một $\mathbb{R}$ – không gian vectơ đối với các phép toán xác định như sau : Với $x = (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ thì :

$$x + y = (x_1y_1, ..., x_ny_n) ;$$

$$\alpha x = (x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha).$$

3.3. Giả sử V, V' là các K – không gian vectơ.

Chứng minh rằng tập tích Đề-các $V \times V'$ cùng với các phép toán sau là một K – không gian vectơ :

$$(x, x') + (y, y') = (x + y, x' + y') ;$$

$$\alpha(x, x') = (\alpha x, \alpha x').$$

3.4. Trong tập E các dãy vô hạn các số thực, ta định nghĩa phép cộng các dãy và phép nhân một số thực với một dãy như sau :

$$\{u_n\} + \{v_n\} = \{u_n + v_n\} ;$$

$$\alpha\{u_n\} = \{\alpha u_n\}.$$

1) Chứng minh rằng E là một $\mathbb{R}$ – không gian vectơ đối với các phép toán đang xét.

2) Chứng tỏ rằng tập F các dãy bị chặn, tập M các dãy chỉ có một số hữu hạn số hạng khác không là các không gian con. Hãy xác định một cơ sở của $\mathbb{R}$ – không gian vectơ M.

3.5. Xét hệ m phương trình, n ẩn số $x_1, ..., x_n$ trên trường số K.

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i ; i = 1, ..., m.$$

Hãy viết hệ phương trình đó dưới dạng một hệ thức vectơ trong không gian vectơ K^m.

3.6. Xét xem các tập con sau đây của không gian vectơ $\mathbb{R}^4$ tập nào là không gian con. Nếu là không gian con hãy xác định một cơ sở và bù tuyến tính của nó :

$$A = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} ;$$

$$B = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\} ;$$

$C = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0\}$;

$D = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2\}$.

3.7. Xét $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $C(-\infty, +\infty)$ các hàm số xác định liên tục trên toàn trục số $\mathbb{R}$.

1) Ký hiệu : $I = \{f \in C(-\infty, +\infty) : f \text{ là hàm số lẻ}\}$;

$P = \{f \in C(-\infty, +\infty) : f \text{ là hàm số chẵn}\}$.

Chứng minh rằng các tập I, P là các không gian con và

$$C(-\infty, +\infty) = I \oplus P.$$

2) Ký hiệu : $A = \{f \in C(-\infty, +\infty) : f(0) = 0\}$;

$B = \{f \in C(-\infty, +\infty) : f(x) = \text{const}\}$.

Chứng minh các tập A, B là các không gian con và

$$C(-\infty, +\infty) = A \oplus B.$$

3.8. Trong không gian vectơ $\mathbb{R}^3$, xét hệ vectơ $u_1 = (1, 2, -1)$; $u_2 = (1, 1, 1)$; $u_3 = (0, 1, 1)$.

Chứng minh rằng hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là một cơ sở của không gian vectơ $\mathbb{R}^3$. Hãy tìm tọa độ của vectơ $u = (x, y, z)$ đối với cơ sở $\{u_1, u_2, u_3\}$.

3.9. Xét $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $C(-\infty, +\infty)$ các hàm số liên tục. Chứng minh rằng các hệ vectơ sau độc lập tuyến tính :

1) $\{\sin x, \sin 2x, ..., \sin nx\}$;

2) $\{1, \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx\}$;

3) $\{1, u(t), u^2(t), ..., u^m(t)\}$, trong đó $u \neq \text{const}$.

3.10. Xét K – không gian vectơ K[x] các đa thức :

1) Giả sử $P_k(x)$ là đa thức có bậc bằng k, với $k = 1, 2, ..., n$.

Chứng minh hệ $\{P_k(x)\}$, $k = 1, 2, ..., n$ độc lập tuyến tính.

2) Giả sử f(x) là đa thức có bậc $n > 1$.

Chứng minh hệ $\{f(x), f(x), ..., f^{(n)}(x)\}$ độc lập tuyến tính.

3.11. Chứng minh rằng hệ vectơ $u_1 = (1, 10, 10)$, $u_2 = (10, 1, 10)$, $u_3 = (10, 10, 1)$ là một cơ sở của $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $(\mathbb{R}^+)^3$ (ở bài tập 3.2).

3.12. Chứng minh hệ $\{(x-2)^k\}$, $k = 0, ..., n-1$ là một cơ sở của không gian $K_n[x]$ các đa thức ẩn x trên trường K có bậc $< n$. Xác định tọa độ của đa thức $f(x) \in K_n[x]$ đối với cơ sở đó.

3.13. Giả sử $\{f_1, ..., f_n\}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính trong K – không gian vectơ V.

1) Xét hệ vectơ : $u_i = f_i + f_{i+1}, i = 1, ..., n-1$;

$$u_n = f_n + f_1.$$

Chứng tỏ rằng hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ độc lập tuyến tính nếu n lẻ, phụ thuộc tuyến tính nếu n chẵn.

2) Với k cho trước, $1 < k < n$, xét hệ vectơ :

$$v_i = f_i, i = 1, ..., k ;$$

$$v_i = \sum_{j=1}^{k} f_j + f_i, \text{ với } i = k+1, ..., n.$$

Chứng minh rằng hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính.

3.14. Chứng minh rằng, mọi không gian con của không gian vectơ hữu hạn chiều đều có bù tuyến tính.

3.15. Hãy chứng tỏ rằng :

1) Tập $\mathbb{R}$ các số thực là một $\mathbb{Q}$ – không gian vectơ đối với phép cộng các số thực và phép nhân số hữu tỷ với số thực.

2) Trong $\mathbb{Q}$ – không gian vectơ $\mathbb{R}$ hệ vectơ $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ độc lập tuyến tính.

3.16. Chứng minh rằng trong không gian vectơ 3 chiều không tồn tại các không gian con 2 chiều M, N thỏa mãn $M \cap N = \{\theta\}$.

3.17. Giả sử F là không gian con m chiều của K – không gian vectơ n chiều V, $m < n$. Chứng minh rằng :

1) Có một cơ sở của V không chứa vectơ nào của F.

2) Có một cơ sở của V chứa đúng k vectơ độc lập tuyến tính cho trước của F, $0 < k \le m$.

3.18*. Giả sử L là một không gian con của K – không gian vectơ V. Trên tập V xét một quan hệ ~ xác định như sau :

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in L.$$

1) Chứng minh rằng, quan hệ ~ là một quan hệ tương đương và mỗi $x \in V$ ta có :

$$\overline{x} = x + L = \{y = x + u : u \in L\}.$$

2) Chứng tỏ rằng, nếu $x' \in \overline{x}$, $y' \in \overline{y}$ thì $x' + y' \in \overline{x + y}$ và $\alpha x' \in \overline{\alpha x}$, $\forall \alpha \in K$.

3) Tập thương của tập V theo quan hệ tương đương ~ được ký hiệu là $V/_L$.

Chứng minh rằng, tập $V/_L$ là một K – không gian vectơ đối với các phép toán xác định như sau

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} ;$$

$$\alpha \overline{x} = \overline{\alpha x} .$$

K – không gian vectơ $V/_L$ được gọi là *không gian thương* của không gian vectơ V theo không gian con L.

4) Giả sử rằng, hệ vectơ $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở của không gian V, và $L = \mathscr{L}(\{u_1, ..., u_k\})$.

Chứng minh rằng, $\left\{\overline{u_{k+1}}, ..., \overline{u_n}\right\}$ là một cơ sở của không gian thương $V/_L$.

5) Chiều của không gian thương $V/_L$ được gọi là *đối chiều* của không gian L, ký hiệu là codimL. Giả sử V là K – không gian vectơ hữu hạn chiều, không gian con M là bù tuyến tính của không gian con L. Chứng minh rằng : codimL = dimM.

3.19. Hãy chứng tỏ $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $(\mathbb{R}^+)^n$ (ở bài tập 3.2) là một không gian vectơ Euclid với tích vô hướng xác định như sau :

$$(x.y) = \ln x_1 \ln y_1 + ... + \ln x_n \ln y_n.$$

3.20. 1) Chứng tỏ rằng, không gian C[a, b] các hàm liên tục trên đoạn [a, b] là một không gian vectơ Euclid đối với tích vô hướng xác định như sau :

$$(f \, . \, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

2) Hãy tính tích vô hướng của vectơ sau đây trong không gian C[−1, 1] :

a) $f(t) = 1 - t + t^2 + 5t^3$, $g(t) = t - 3t^2$;

b) $f(t) = 3t^2 - 1$, $g(t) = 3t - 5t^3$.

3.21. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^4$ hãy xác định góc giữa các vectơ $x = (4, 1, 2, 2)$ và $y = (3, 3, 3, -9)$.

3.22. 1) Xét không gian Euclid $\mathbb{R}^6$. Hãy thử lại định lý Pitago đối với các vectơ trực giao $x = (1, 0, 2, 0, 2, 0)$ và $y = (0, 6, 0, 3, 0, 2)$.

2) Trong không gian vectơ Euclid C[0, 1] (Bài tập 3.20) xét các vectơ $x = t^2 + 1$ và $y = \lambda t^2 + 1$. Hãy xác định giá trị λ để các vectơ x và y trực giao với nhau và thử lại định lý Pitago đối với các vectơ này.

3.23. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$, hãy xác định giá trị của k để các vectơ sau đây trực giao với nhau :

1) $u = (2, 1, 3)$, $v = (1, 7, k)$;

2) $u = (k, k, 1)$, $v = (k, 5, 6)$.

3.24. Trong không gian vectơ Euclid C[0, π] (Bài tập 3.20). Hãy chứng tỏ rằng các hệ vectơ sau đây là hệ trực giao (do đó độc lập tuyến tính) :

1) sinx, sin2x, ..., sinnx ;

2) cosx, cos2x, ..., cosnx.

3.25. Xét không gian Euclid $\mathbb{R}^3$. Hãy áp dụng phương pháp trực giao hóa Schmidt để biến đổi cơ sở $\{u_1, u_2, u_3\}$ sau đây thành cơ sở trực chuẩn :

1) $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 2, 1)$;

2) $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (3, 7, -2)$, $u_3 = (0, 4, 1)$.

3.26. Trong không gian $\mathbb{R}_3[x]$ các đa thức ẩn x hệ số thực có bậc < 3 xét tích vô hướng :

$$(f \, . \, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \, .$$

Hãy áp dụng phương pháp trực giao hóa Schmidt để biến đổi cơ sở $\{1, x, x^2\}$ về một cơ sở trực chuẩn.

3.27. Xét $\{e_1, e_2, e_3\}$ là cơ sở chính tắc của không gian Euclid $\mathbb{R}^3$. Với giá trị nào của α, β thì cơ sở lập bởi các vectơ sau đây là một cơ sở trực chuẩn :

$$u_1 = \frac{\alpha}{3}e_1 + \frac{1-\alpha}{3}e_2 + \beta e_3 \, ;$$

$$u_2 = \frac{1-\alpha}{3}e_1 + \beta e_2 + \frac{\alpha}{3}e_3 \, ;$$

$$u_3 = \beta e_1 + \frac{\alpha}{3}e_2 + \frac{1-\alpha}{3}e_3 \, .$$

3.28. Giả sử hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian vectơ Euclid E và $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. Chứng minh rằng $\lambda_i = (x.u_i)$, $i = 1, ..., n$.

3.29. Giả sử e là một vectơ đơn vị của không gian vectơ Euclid E.

1) Chứng minh rằng mỗi vectơ $x \in E$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $x = \alpha e + v$, trong đó $(v.e) = 0$; số thực α được gọi là *hình chiếu* của vectơ x theo hướng vectơ e, ký hiệu $\alpha = pr_e x$.

2) Chứng minh :

a) $pr_e x = (x.e)$;

b) $pr_e(x + y) = pr_e x + pr_e y$;

c) $pr_e(\lambda x) = \lambda pr_e x$.

3.30. Giả sử x, y là các vectơ khác θ của không gian vectơ Euclid E. Chứng minh rằng :

1) $x = \alpha y$, $\alpha > 0$ khi và chỉ khi góc giữa hai vectơ x và y bằng 0 ;

2) $x = \alpha y$, $\alpha < 0$ khi và chỉ khi góc giữa hai vectơ x và y bằng π.

Đáp số và hướng dẫn

3.1. *Hướng dẫn* : Sử dụng tính chất suy từ định nghĩa.

3.2. *Hướng dẫn* : Hãy chứng tỏ tập $(\mathbb{R}^+)^n$ với các phép toán đã cho thỏa mãn các điều kiện của định nghĩa không gian vectơ, với

$\theta = (1, 1, ..., 1)$; $-(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{1}{x_1}, ..., \frac{1}{x_n}\right)$.

3.4. 2) Một cơ sở $\mathbb{R}$ – không gian vectơ M :

Chẳng hạn hệ vectơ $e^k = \{a_n^k\}$, k = 1, 2, ..., trong đó :

$$a_n^k = \begin{cases} 1, & \text{nếu} \quad n = k \\ 0, & \text{nếu} \quad n \neq k \end{cases}$$

Dễ thấy rằng, mỗi $u = \{u_n\} \in M$ có duy nhất biểu diễn tuyến tính $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k e^k$. Do đó hệ vectơ $\{e^k\}$, k = 1, 2, ... là một cơ sở của không gian con M.

3.5. $x_1u_1 + ... + x_nu_n = v$, trong đó :

$v = (b_1, ..., b_m)$;

$u_j = (a_{1j}, ..., a_{mj})$, j = 1, ..., n.

3.6. A, C là các không gian con. Một cơ sở của không gian con A, chẳng hạn {1, –1, 0, 0) ; (1, 0, –1, 0) ; (1, 0, 0, –1)}. Bù tuyến tính của A, chẳng hạn $A' = \mathscr{L}(\{(1, 0, 0, 0)\})$. Một cơ sở của không gian con C, chẳng hạn {1, –1, 0, 0) ; (0, 0, 1, –1)}. Bù tuyến tính của C, chẳng hạn không gian con $C' = \mathscr{L}(\{(0, 1, 0, 0) ; (0, 0, 0, 1)\})$.

3.7. *Hướng dẫn* :

1) $\forall f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ ta có :

$$i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \in I ;$$

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \in P \text{ và } f(x) = i(x) + p(x).$$

2) $\forall f(x) \in C(-\infty, +\infty)$, ta có :

$$g(x) = f(x) - f(0) \in A ;$$

$$k(x) = f(0) \in B \text{ và } f(x) = g(x) + k(x).$$

3.8. Hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ độc lập tuyến tính, vì $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ nên hệ đó là một cơ sở.

$$u = au_1 + bu_2 + cu_3,$$

trong đó : $a = \dfrac{y - z}{3}$; $b = \dfrac{3x - y + z}{3}$; $c = \dfrac{-3x + 2y + z}{3}$.

3.9. *Hướng dẫn* : Đối với $p, q \in \mathbb{N}$ ta có :

$$\int_0^{\pi} \sin px \sin qx dx = \begin{cases} 0, & \text{nếu} \quad p \neq q \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{nếu} \quad p = q \neq 0 \end{cases}$$

Giả sử rằng :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k . \sin kx = 0 .$$

Đối với m = 1, 2, ..., n, nhân hai vế với sinmx ta có :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin mx \sin kx = 0 .$$

Lấy tích phân hai vế ta có :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \int_0^{\pi} \sin mx \sin kx dx = 0 ;$$

$$\lambda_m \frac{\pi}{2} = 0.$$

Vậy $\lambda_m = 0$, với m = 1, ..., n.

2) Bằng phương pháp tương tự, sử dụng hệ thức :

$$\int_0^{\pi} \cos px \cos qx dx = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad p \neq q \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{nếu} \quad p = q \neq 0 \\ \pi & \text{nếu} \quad p = q = 0. \end{cases}$$

3) Sử dụng tính chất mỗi đa thức bậc n + 1 có không quá n + 1 nghiệm.

3.10. 1) Có thể chứng minh bằng quy nạp theo n, với lưu ý đa thức bậc $k > 0$ có hệ tử của x^k khác 0.

2) Áp dụng câu 1.

3.12. *Hướng dẫn* : Sử dụng kết quả câu 1 bài 3.10 (hoặc chứng minh trực tiếp).

$$f(x) = f(2) + \frac{f^1(2)}{1!}(x-2) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(2)}{(n-1)!}(x-2)^{n-1}.$$

3.13. *Hướng dẫn* :

1) Giả sử có tổ hợp tuyến tính :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \theta .$$

Ta có :

$$(\alpha_1 + \alpha_n)f_1 + (\alpha_2 + \alpha_1)f_2 + \ldots + (\alpha_n + \alpha_{n-1})f_n = \theta$$

Vì hệ $\{f_1, \ldots, f_n\}$ độc lập tuyến tính nên suy ra tổ hợp tuyến tính $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \theta$ tương đương với điều kiện :

$$\alpha_n = -\alpha_1 ;$$

$$\alpha_n = -\alpha_{n-1} = (-1)^2\alpha_{n-2} = \ldots = (-1)^{n-1}\alpha_1.$$

Nếu n lẻ ta có $\alpha_n = -\alpha_1$ và $\alpha_n = \alpha_1$, do đó $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Vậy hệ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ độc lập tuyến tính.

Nếu n chẵn ta có thể chọn $\alpha_k = (-1)^k$, do đó hệ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ phụ thuộc tuyến tính.

2) Bằng phương pháp tương tự với lời giải của câu 1.

3.14. *Hướng dẫn* : Giả sử L là không con gian của K – không gian vectơ n chiều V. Dễ thấy rằng phần bù tuyến tính của $\{\theta\}$ (của V) là V (là $\{\theta\}$). Giả sử $k = \dim L$, $0 < k < n$, và $\{u_1, \ldots, u_k\}$ là một cơ sở của L.

Bổ sung thêm các vectơ $u_{k+1}, ..., u_n$ để hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở của V. Hãy chứng tỏ bao tuyến tính $\mathscr{L}(\{u_{k+1}, ..., u_n)$ là một phần bù tuyến tính của L.

3.15. *Hướng dẫn* :

1) Hãy chứng tỏ các điều kiện của định nghĩa không gian vectơ được thỏa mãn.

2) Giả sử có tổ hợp tuyến tính

$$\alpha_1 + \alpha_2\sqrt{2} + \alpha_3\sqrt{3} = 0,$$

trong đó $\alpha_i \in \mathbb{Q}$, $i = 1, 2, 3$.

Sử dụng tính chất vô tỷ của các số $\sqrt{2}$ và $\sqrt{3}$ để chứng tỏ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

3.16. *Hướng dẫn* : Dùng phương pháp phản chứng. Xét $F = M \oplus N$. Khi đó ta có $\dim F = 4$, vô lý.

3.17. *Hướng dẫn :*

1) Theo kết quả bài 3.14 ta có $V = F \oplus L$. Giả sử $\{u_1, ..., u_{n-m}\}$ là cơ sở của L, $\{f_1, ..., f_m\}$ là cơ sở của F. Xét hệ vectơ $\{v_1, ..., v_n\}$, trong đó

$$v_i = \begin{cases} u_i \text{ với } i = 1, .., n - m \\ \sum_{k=1}^{n-m} u_k + f_i \text{ với } i = n - m + 1, ..., n \end{cases}$$

Ta có $v_i \in F$, $i = 1, ..., n$. Theo kết quả của câu 2) bài 3.13, hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính. Đó là cơ sở cần tìm.

2) Giả sử $\{f_1, ..., f_k\}$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính cho trước của F. Bổ sung thêm để hệ $\{f_1, ..., f_k, ..., f_m\}$ là cơ sở của F. Đặt $M_k = \mathscr{L}(\{f_1, ..., f_k\})$, $N_k = \mathscr{L}(\{f_{k+1}, ..., f_m\})$. Ta có $V = M_k \oplus N_k \oplus L$.

Theo kết quả câu 1), trong không gian con $N_k \oplus L$ có cơ sở $\{w_1, ..., w_{n-k}\}$ không chứa vectơ nào của N_k. Ta có hệ $\{f_1, ..., f_k, w_1, ..., w_{n-k}\}$ là cơ sở cần tìm.

3.18. *Hướng dẫn* :

1) Sử dụng tính chất của không gian con để chứng tỏ đó là quan hệ có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

$$x' \in \bar{x} \Leftrightarrow x' - x = u \in L \Leftrightarrow x' \in x + L.$$

2) Ta có :

$$(x' + y') - (x + y) = (x - x') + (y - y') \in L.$$

Do đó :

$$x' + y' \sim x + y \text{ và } x' + y' \in \overline{x + y}.$$

Vì $\alpha x' - \alpha x = \alpha(x' - x) \in L$. Do đó $\alpha x' \sim \alpha x$ và $\alpha x' \in \overline{\alpha x}$.

3) Hãy chứng tỏ tập $V/_L$ với các phép toán đang xét thỏa mãn các điều kiện của định nghĩa không gian vectơ. Với vectơ không $\bar{\theta} = L$, vectơ đối $-\bar{x} = \overline{-x}$.

4) Theo kết quả của câu 1) ta có $\bar{u} = \bar{\theta}$ khi và chỉ khi $u \in L$. Đối với mỗi $\bar{x} \in V/_L$, ta có duy nhất biểu diễn tuyến tính $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$.

Do đó $\bar{x} = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha \bar{u}_i$. Đó là biểu diễn tuyến tính duy nhất của vectơ $\bar{x}$ qua hệ $\{\bar{u}_{k+1}, ..., \bar{u}_n\}$. Vậy hệ này là cơ sở của không gian thương $V/_L$.

5) Sử dụng kết quả của câu 4).

3.19. *Hướng dẫn* : Hãy sử dụng tính chất của hàm số logarit để chứng tỏ các điều kiện của tích vô hướng được thỏa mãn.

3.20. 2) a) $-\dfrac{28}{15}$; b) 0.

3.21. $\cos\alpha = \dfrac{(x.y)}{\|x\|\|y\|} = \dfrac{-5}{5.10} = -0{,}1$, $\alpha = \arccos(-0{,}1) \approx 174^\circ 15'$.

3.22. 1) Ta có : $\|x\| = 3$; $\|y\| = 7$; $\|x + y\| = \sqrt{58}$.

Do đó : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

2) $(x.y) = \dfrac{8\lambda + 20}{15} = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{5}{2}$.

Ta có : $\|x\| = \sqrt{\dfrac{28}{15}}$; $\|y\| = \sqrt{\dfrac{7}{12}}$; $\|x + y\| = \sqrt{\dfrac{49}{20}}$.

Do đó : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

3.23. 1) $k = -3$; 2) $k = -2$, $k = -3$.

3.25. 1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}, -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

2) $(1, 0, 0), \left(0, \dfrac{7}{\sqrt{53}}, -\dfrac{2}{\sqrt{53}}\right), \left(0{,}30\sqrt{11925}, \dfrac{105}{\sqrt{11925}}\right)$.

3.26. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}x, \sqrt{\dfrac{5}{28}} - 3\sqrt{\dfrac{5}{28}}x^2\right\}$.

3.27. Ta được hai cơ sở trực chuẩn. Cơ sở thứ nhất ứng với $\alpha_1 = -1$, $\beta_1 = -\dfrac{2}{3}$; cơ sở thứ hai ứng với $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = \dfrac{2}{3}$.

3.28. *Hướng dẫn* : Nhân vô hướng hai vế của đẳng thức $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ với u_k, $k = 1, ..., n$.

3.29. *Hướng dẫn* :

1) Xét phân tích tổng trực giao $\mathscr{L}(\{x, e\}) = \mathscr{L}(e) \oplus \mathscr{L}^{\perp}(\{e\})$. Ta có :

$$x = \alpha e + v, (e.v) = 0.$$

2) a) Nhân vô hướng hai vế của $x = \alpha e + v$ với e ta có :

$$pr_e(x) = \alpha = (x.e).$$

Từ kết quả câu a) và tính chất của tích vô hướng suy ra b) và c).

3.30. *Hướng dẫn* : Giả sử $x = \alpha y$. Ta có :

$$\cos(\widehat{x;y}) = \frac{(x.y)}{\|x\|\,\|y\|} = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \begin{cases} 1, & \text{nếu } \alpha > 0 \\ -1, & \text{nếu } \alpha < 0 \end{cases}$$

Ngược lại, giả sử :

$$\cos(\widehat{x;y}) = \frac{(x.y)}{\|x\|\,\|y\|} = \pm 1.$$

Khi đó ta có :

$$\|x\|^2 = \frac{(x.y)^2}{\|y\|^2}.$$

Xét vectơ đơn vị $e = \frac{1}{\|y\|}y$. Theo kết quả bài 3.29 ta có :

$$x = (x.e)e + v,$$

trong đó $(e.v) = 0$. Ta có :

$$\|x\|^2 = (x.e)^2 + \|v\|^2;$$

$$= \frac{1}{\|y\|^2}(x.y)^2 + \|v\|^2;$$

$$= \|x\|^2 + \|v\|^2.$$

Vậy $v = \theta$.

Do đó: $$x = (x.e)e = \frac{1}{\|y\|^2}(x.y)\,y.$$

Đặt : $\alpha = \frac{1}{\|y\|^2}(x.y)$, ta có : $x = \alpha y$.

Nếu $\cos(\widehat{x;y}) = 1$ thì $(x.y) > 0$, do đó $\alpha > 0$.

Nếu $\cos(\widehat{x;y}) = -1$ thì $(x.y) < 0$, do đó $\alpha < 0$.

Chương IV

MA TRẬN, ĐỊNH THỨC VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

4.1. CÁC PHÉP TOÁN MA TRẬN

4.1.1. Các định nghĩa

Ma trận cỡ m × n :

Giả sử X là một tập, m và n là các số nguyên dương.

Ma trận A cỡ m × n với các phần tử thuộc tập X là một họ m × n phần tử $a_{ij} \in X$, trong đó i = 1, ..., m gọi là *chỉ số hàng* ; j = 1, ..., n gọi là *chỉ số cột*, thường ký hiệu :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Hay một cách ngắn gọn $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

Ví dụ :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 11 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

là ma trận cỡ 3 × 4 với các phần tử thuộc tập các số nguyên.

Ma trận hàng : Ma trận cỡ 1 × n gọi là *ma trận hàng* :

$$(a_1 \quad \dots \quad a_n).$$

Ma trận cột : Ma trận cỡ $m \times 1$ gọi là *ma trận cột* :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Ma trận vuông : Ma trận cỡ $n \times n$ gọi là *ma trận vuông* cấp n (hay *ma trận cấp n*).

Trong ma trận vuông $A = (a_{ij})_{n\times n}$, dãy các phần tử có chỉ số hàng bằng chỉ số cột $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ gọi là *đường chéo chính của ma trận A*.

Hai ma trận bằng nhau : Hai ma trận cùng cỡ $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$ gọi là *bằng nhau* nếu $a_{ij} = b_{ij}$ đối với mọi (i, j).

Chú ý : Mỗi phần tử $x \in X$ có thể xem là một ma trận cỡ 1×1, để đơn giản ta vẫn ký hiệu là x.

4.1.2. Các phép toán ma trận

Giả sử K là một trường số, ký hiệu $M_{m\times n}[K]$ là tập các ma trận cỡ $m \times n$ với các phần tử thuộc K.

Trong tập $M_{m\times n}[K]$ ta định nghĩa các phép toán sau đây :

1. Phép cộng hai ma trận

Tổng của hai ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ và $B = (b_{ij})_{m\times n}$ là ma trận :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n}. \tag{4.1}$$

2. Phép nhân các phần tử của trường K với ma trận

Tích của phần tử $\lambda \in K$ với ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}[K]$ là ma trận :

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m\times n}. \tag{4.2}$$

Ví dụ : Xét $K = \mathbb{R}$, trong tập $M_{2\times 3}[\mathbb{R}]$ ta có :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dễ dàng chứng minh rằng :

a) $(M_{m\times n}[K], +)$ là một nhóm Aben với phần tử trung hòa là ma trận O có các phần tử đều bằng 0, gọi là *ma trận không*. Phần tử đối của $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$.

b) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

c) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

d) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

e) $1.A = A$, đối với mọi $\alpha, \beta \in K$; $A, B \in M_{m\times n}[K]$.

Vậy, tập $M_{m\times n}[K]$ với các phép toán (4.1) và (4.2) là một K – không gian vectơ.

Ký hiệu E_{ij} là ma trận cỡ $m \times n$ có phần tử ở hàng i cột j bằng 1, các phần tử còn lại bằng 0. Dễ dàng chứng tỏ rằng, đối với mỗi ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ có duy nhất biểu diễn :

$$A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}.$$

Vậy, hệ vectơ $\{E_{ij} : i = 1, ..., m ; j = 1, ..., n\}$ là một cơ sở (gọi là *cơ sở chính tắc*) của K – không gian vectơ $M_{m\times n}[K]$. Do đó ta có :

$$\dim M_{m\times n}[K] = mn.$$

3. Phép nhân ma trận

Định nghĩa : Tích ma trận $A = (a_{ij})_{m\times p}$ với ma trận $B = (b_{ij})_{p\times n}$ là ma trận :

$$C = A.B = (c_{ij})_{m\times n}$$

trong đó :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}. \tag{4.3}$$

Theo công thức (4.3), phần tử c_{ij} của ma trận C là tổng các tích của các phần tử hàng i của ma trận A với các phần tử tương ứng ở cột j của ma trận B.

Tích A.B xác định khi và chỉ khi số cột của ma trận A bằng số hàng của ma trận B.

Ví dụ :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 7 & -4 \\ 3 & 5 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Ma trận đơn vị : Ma trận E cấp n có các phần tử trên đường chéo chính bằng 1, các phần tử ngoài đường chéo chính đều bằng 0 gọi là *ma trận đơn vị* :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad (4.4)$$

Từ định nghĩa phép cộng hai ma trận cùng cỡ và phép nhân ma trận cỡ $m \times p$ với ma trận cỡ $p \times n$ ta trực tiếp suy ra các tính chất sau đây :

Đối với các ma trận có cỡ thích hợp ta có :

a) (A.B)C = A(B.C) (Tính kết hợp)

b) A(B + C) = A.B + A.C (Tính phân phối trái)

c) (B + C)A = B.A + C.A (Tính phân phối phải)

d) E.A = A ; A.E = A.

Ta nhận thấy rằng, tích hai ma trận vuông cùng cấp luôn luôn xác định. Từ các tính chất trên, ta có :

Tập $M_n[K]$ các ma trận cấp n với các phần tử thuộc trường K đối với phép cộng và phép nhân ma trận là một vành có đơn vị E, và được gọi là *vành các ma trận vuông cấp n trên trường K.*

Với $n \geq 2$, vành ma trận $M_n[K]$ không giao hoán. Chẳng hạn, với :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có :

$$A.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \ B.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vậy $A.B \neq B.A$.

Ma trận khả nghịch : Ma trận $A \in M_n[K]$ gọi là *khả nghịch* nếu tồn tại ma trận $B \in M_n[K]$ sao cho :

$$A.B = B.A = E.$$

Ma trận B gọi là *nghịch đảo* của ma trận A.

Theo tính chất của phép toán hai ngôi, vì phép nhân ma trận có tính kết hợp, mỗi ma trận A khả nghịch có duy nhất một nghịch đảo, được ký hiệu là A^{-1}. Ta có :

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = E.$$

Vectơ hàng, vectơ cột *:* Xét ma trận cỡ $m \times n$ với các phần tử thuộc trường K :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Trong ma trận A, mỗi cột có thể xem là một vectơ của không gian vectơ K^m, gọi là *vectơ cột*. Mỗi hàng có thể xem là một vectơ của không gian vectơ K^n, gọi là *vectơ hàng*.

4.1.3. Ma trận chuyển vị

Chuyển vị của ma trận $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận $A^t = (a'_{ij})_{n\times m}$, trong đó $a'_{ij} = a_{ji}$, với mọi $i = 1, ..., m$ và $j = 1, ..., n$.

Vậy, *ma trận chuyển vị A^t là ma trận nhận từ ma trận A bằng cách trong ma trận A chuyển cột thành hàng và chuyển hàng thành cột.*

Ví dụ :

Với $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, ta có : $A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Dễ dàng chứng minh được các tính chất sau đây :

a) $(A^t)^t = A$;

b) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

c) $(AB)^t = B^tA^t$.

Ma trận đối xứng : Ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ gọi là *đối xứng* nếu $A^t = A$, tức là $a_{ij} = a_{ji}$ đối với mọi i, j = 1, ..., n.

4.2. ĐỊNH THỨC

Trong phần này, giả thiết các phần tử của các ma trận thuộc trường số K.

4.2.1. Định thức cấp 2, định thức cấp 3

1. Định nghĩa

a) Định thức cấp 2

Định thức của ma trận cấp 2 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

thường ký hiệu là |A|, hay detA, hay $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ được xác định như sau :

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{4.5}$$

Định thức của ma trận cấp 2 gọi là *định thức cấp 2*.

b) Định thức cấp 3

Định thức của ma trận cấp 3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

thường ký hiệu là |A|, hay detA, hay một cách đầy đủ hơn là :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

được xác định như sau :

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (4.6)$$

Định thức của ma trận cấp 3 gọi là *định thức cấp 3*. Các hàng, các cột của ma trận sẽ gọi là *các hàng, các cột của định thức*.

Theo các công thức (4.5) và (4.6), định thức của ma trận $A = (a_{ij})_{3\times3}$ có thể viết dưới dạng :

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \quad (4.7)$$

Nhận thấy rằng, định thức cấp 3 là một tổng của sáu số hạng, có ba số hạng có dấu +, ba số hạng có dấu –, và mỗi số hạng là tích của ba phần tử nằm trên các hàng các cột khác nhau.

Quy tắc Xarus :

Để tính định thức cấp 3 ta có thể thực hiện theo quy tắc Xarus sau đây :

Viết thêm cột 1, cột 2 vào ma trận A ta được bảng có 3 hàng, 5 cột :

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Ta có : Ba số hạng là tích các phần tử nằm trên mũi tên đi xuống có dấu cộng, ba số hạng là tích của các phần tử nằm trên mũi tên đi lên có dấu trừ.

2. Công thức khai triển theo hàng, theo cột

Trong định thức cấp 3 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

sau khi bỏ hàng i, cột j ta được định thức cấp 2, ký hiệu là M_{ij}. Định thức cấp hai M_{ij} gọi là *định thức con bù của phần tử* a_{ij}.

Đặt

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{4.8}$$

Giá trị A_{ij} gọi là *phần bù đại số của phần tử* a_{ij}.

Chẳng hạn, đối với phần tử a_{11} ta có :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11}.$$

Đối với phần tử a_{12} ta có :

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12}.$$

Đối với phần tử a_{13} ta có :

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}.$$

Nếu sử dụng ký hiệu phần bù đại số của các phần tử ở hàng 1, ta có thể viết công thức (4.6) dưới dạng sau đây :

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{4.9}$$

Công thức (4.9) gọi là *công thức khai triển* định thức |A| theo hàng 1.

Trong biểu thức ở vế phải của đẳng thức (4.7), bằng cách nhóm các số hạng, rồi đặt các phần tử hàng 2, hoặc hàng 3 ra thừa số và áp dụng công thức (4.5) ta có các đẳng thức sau :

$$|A| = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Từ các đẳng thức này nếu sử dụng ký hiệu phần bù đại số của các phần tử ở hàng 2 và hàng 3 ta có các công thức khai triển định thức $|A|$ theo hàng 2 và hàng 3 :

$$|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} ; \qquad (4.10)$$

$$|A| = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}. \qquad (4.11)$$

Các công thức (4.9), (4.10) và (4.11) có thể viết chung dưới dạng :

$$|A| = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{ik}, \ i = 1, 2, 3. \qquad (4.12)$$

Một cách tương tự, trong biểu thức ở vế phải (4.7) bằng cách nhóm các số hạng thích hợp rồi đặt các phần tử ở cột j ra thừa số ta sẽ nhận được công thức khai triển theo cột j :

$$|A| = \sum_{k=1}^{3} a_{kj}A_{kj}, \ j = 1, 2, 3. \qquad (4.13)$$

Từ các công thức (4.12) và (4.13) ta có định lý sau đây :

Định lý 4.1 : Định thức của ma trận $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ bằng tổng các tích của các phần tử của một hàng (hoặc cột) với phần bù đại số của nó.

3. Các tính chất của định thức

Tính chất 1 : $|A| = |A^t|$.

Tính chất 2 : Nếu đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột) thì định thức đổi dấu.

Tính chất 3 : Nếu nhân các phần tử của một hàng (hoặc một cột) với cùng một số k thì định thức được nhân với k.

Tính chất 4 : Nếu định thức có một hàng (hoặc một cột) các phần tử đều bằng 0 thì định thức bằng 0.

Tính chất 5 : Nếu định thức có hai hàng (hoặc hai cột) giống nhau thì bằng 0.

Tính chất 6 : Ta có :

$$\begin{vmatrix} a_{11} + a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ta cũng có đẳng thức tương tự đối với các cột, các hàng khác.

Tính chất 7 : Giá trị của định thức không thay đổi khi ta thêm vào các phần tử của một hàng (hoặc một cột) các phần tử tương ứng của một hàng khác (hoặc cột khác) nhân cùng với một số k. Chẳng hạn :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+ka_{31} \end{vmatrix}$$

Chứng minh : Sử dụng công thức (4.5), dễ dàng chứng tỏ các định thức cấp 2 thỏa mãn các tính chất từ 1 đến 6. Đối với định thức cấp 3 các tính chất đó suy từ định thức cấp 2 và các công thức khai triển (4.12) và (4.13).

Tính chất 7 được suy trực tiếp từ các tính chất 3, 5 và 6.■

Giả sử định thức |A| có hai hàng giống nhau $a_{ik} = a_{mk}$; k = 1, 2, 3 ; $i \neq m$. Theo tính chất 5 thì |A| = 0. Áp dụng công thức khai triển (4.12) ta có :

$$|A| = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}A_{ik} = 0.$$

Trong đẳng thức trên, thay a_{ik} bởi a_{mk} ta có :

$$\sum_{k=1}^{3} a_{mk}A_{ik} = 0, \; m \neq i. \tag{4.14}$$

Tương tự trong công thức (4.13), nếu thay a_{kj} bởi a_{km} ; $m \neq j$ ta có :

$$\sum_{k=1}^{3} a_{km}A_{kj} = 0; \; m \neq j. \tag{4.15}$$

Từ các hệ thức (4.14) và (4.15) ta có định lý sau đây :

Định lý 4.2 : Tổng các tích của các phần tử của một hàng (hoặc cột) của định thức với phần bù đại số của các phần tử tương ứng của một hàng (hoặc cột) khác thì bằng 0.

Nếu sử dụng ký hiệu Crônecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases} \tag{4.16}$$

ta có thể viết gộp lại công thức (4.12) với công thức (4.14), và công thức (4.13) với công thức (4.15) như sau :

$$\sum_{k=1}^{3} a_{mk}A_{ik} = \delta_{mi}|A| \;; \tag{4.17}$$

$$\sum_{k=1}^{3} a_{km}A_{kj} = \delta_{mj}|A|. \tag{4.18}$$

4.2.2. Định thức cấp n

1. Định nghĩa : Định thức |A| của ma trận cấp 4 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

được xác định như sau :

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \tag{4.19}$$

Tương tự từ định thức của ma trận cấp 4, ta định nghĩa định thức của ma trận cấp 5, v.v... ; từ định thức ma trận cấp n – 1 ta định nghĩa định thức của ma trận cấp n.

Định thức của ma trận cấp n, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ thường ký hiệu là :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

hay một cách ngắn gọn là |A| hoặc detA.

Định thức của ma trận A cấp n gọi là *định thức cấp n*. Các hàng, các cột của ma trận A cũng gọi là các hàng, các cột của định thức $|A|$.

2. Công thức khai triển theo hàng, theo cột

Trong định thức cấp n

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sau khi bỏ hàng i, cột j ta được định thức cấp n − 1, ký hiệu là M_{ij}. Định thức M_{ij} được gọi là *định thức con bù của phần tử a_{ij}*.

Đặt :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}, \tag{4.20}$$

giá trị A_{ij} được gọi là *phần bù đại số của phần tử a_{ij}*.

Trong công thức (4.19), nếu sử dụng ký hiệu phần bù đại số của các phần tử ở hàng 1 của ma trận $A = (a_{ij})_{4\times4}$ ta có :

$$|A| = \sum_{k=1}^{4} a_{1k}A_{1k} .$$

Đó là công thức khai triển theo hàng 1 của định thức cấp 4.

Thực hiện một cách tương tự như trong trường hợp định thức cấp 3, sẽ nhận được các công thức khai triển theo hàng, theo cột của định thức cấp 4, cấp 5,... , cấp n.

Đối với định thức cấp n ta vẫn có công thức khai triển theo hàng i, theo cột j như sau :

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} , i = 1, ..., n ; \tag{4.21}$$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} , j = 1, ..., n. \tag{4.22}$$

Do đó Định lý 4.1 vẫn có hiệu lực đối với định thức cấp n bất kỳ.

3. Tính chất của định thức

Nhờ các công thức khai triển (4.21) và (4.22) bằng phương pháp quy nạp theo n, dễ dàng chứng minh được các tính chất của định thức cấp 2, cấp 3 vẫn đúng đối với định thức cấp n bất kỳ. Từ đó suy ra rằng, Định lý 4.2 vẫn đúng đối với định thức cấp n và các công thức (4.17) và (4.18) có thể viết dưới dạng tổng quát sau đây :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{mk} A_{ik} = \delta_{mi} |A| ; \qquad (4.23)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{km} A_{kj} = \delta_{mj} |A|. \qquad (4.24)$$

Ta thừa nhận mệnh đề sau khẳng định rằng, định thức của ma trận tích bằng tích các định thức của ma trận nhân tử.

Mệnh đề 4.1 : Giả sử A, B là các ma trận cấp n, khi đó ta có :

$$|A.B| = |A|.|B|. \qquad (4.25)$$

4. Biểu thức của định thức cấp n

Ta biết rằng, định thức cấp 3 là một tổng có 6 = 3! số hạng, mỗi số hạng là tích của 3 phần tử nằm trên các hàng, các cột khác nhau. Bằng phương pháp quy nạp và sử dụng công thức khai triển (4.21) hoặc (4.22) dễ dàng chứng minh được rằng, định thức cấp n là một tổng n! số hạng, mỗi số hạng là tích của n phần tử nằm trên các hàng và các cột khác nhau. Trong mỗi số hạng của tổng, nếu viết tích các phần tử theo thứ tự tăng dần của chỉ số cột, thì thứ tự chỉ số hàng là một hoán vị của tập {1, 2, ..., n}. Người ta chứng minh được rằng, dấu của số hạng $a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$ trùng với dấu của phép thế σ. Vậy ta có :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \qquad (4.26)$$

Trong công thức trên, nếu thay n = 2 hay n = 3 ta có công thức (4.5) hay (4.7) của định thức cấp 2 hay cấp 3.

4.2.3. Các ví dụ về tính định thức

1. Người ta thường sử dụng các tính chất của định thức để biến đổi định thức đã cho về định thức có một hàng (hoặc một cột) có nhiều phần tử bằng 0, rồi khai triển định thức theo hàng (cột) đó.

Ví dụ :

a) Tính định thức :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Lần lượt nhân hàng 1 với –2, –8 rồi cộng vào hàng 2, hàng 3 ta có :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -9 \\ 0 & -31 & -39 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & -9 \\ -31 & -39 \end{vmatrix}$$

$$D = (-5)(-39) - (-9)(-31) = -84.$$

b) Tính định thức của ma trận :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Lần lượt nhân cột 1 với 1, 2, 3 rồi cộng vào các cột 2, 3, 4 ta có :

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 5 & 9 & 17 & 14 \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức vừa nhận được theo hàng thứ 2 ta có :

$$|A| = -1.(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \\ 9 & 17 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \\ 9 & 17 & 14 \end{vmatrix}$$

Trong định thức sau cùng, thực hiện các phép biến đổi cộng hàng 1 vào hàng 2 ; nhân các phần tử hàng 1 với –9 rồi cộng vào hàng 3 ta có :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 0 & 9 & 11 \\ 0 & -46 & -31 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 9 & 11 \\ -46 & -31 \end{vmatrix}$$

$|A| = 227.$

2. Định thức của ma trận tam giác

Ma trận $A = (a_{ij})_{n \times n}$ được gọi là *ma trận tam giác trên* (*dưới*) nếu tất cả các phần tử nằm dưới (trên) đường chéo chính bằng 0. Các ma trận tam giác trên, ma trận tam giác dưới gọi chung là *ma trận tam giác.*

Ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0 gọi là *ma trận đường chéo.*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} ; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ma trận tam giác trên **Ma trận tam giác dưới**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ma trận đường chéo

Ma trận đường chéo là dạng đặc biệt của ma trận tam giác.

Ta có : *Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử trên đường chéo chính.*

Thật vậy, chẳng hạn đối với định thức của ma trận tam giác trên, liên tiếp khai triển theo cột 1 ta có :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \dots =$$

$$= a_{11}a_{22} \dots a_{nn}.$$

Do việc tính định thức của ma trận tam giác đơn giản, nên người ta thường sử dụng các tính chất của định thức để biến đổi ma trận đã cho về dạng tam giác.

Ví dụ :

a) Tính định thức :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & a+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & a+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & a+1 \end{vmatrix}$$

Nhân hàng 1 với -1 rồi lần lượt cộng vào các hàng 2, hàng 3, ..., hàng n ta có :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & a-1 & 3 & \dots & n \\ 0 & 0 & a-2 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)(a-2)\dots(a-(n-1)).$$

b) Tính định thức :

$$D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -x & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

Cộng các cột vào cột 1 ta có :

$$D = \begin{vmatrix} \sum_{i=0}^{4} a_i & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức vế phải theo cột 1 ta có :

$$D = \sum_{i=0}^{4} a_i \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ -x & x & 0 & 0 \\ 0 & -x & x & 0 \\ 0 & 0 & -x & x \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{4} a_i\right) x^4 .$$

3. Định thức Vandermonde

Định thức Vandermonde cấp n có dạng :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

– Với n = 2, ta có :

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

– Với n = 3, ta có :

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}$$

Lần lượt nhân hàng 2 với $-a_3$ cộng vào hàng 3, nhân hàng 1 với $-a_3$ cộng vào hàng 2 ta có :

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 - a_3 & a_2 - a_3 & 0 \\ a_1^2 - a_1a_3 & a_2^2 - a_2a_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức vế phải theo cột thứ 3 ta có :

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_1 - a_3 & a_2 - a_3 \\ a_1(a_1 - a_3) & a_2(a_2 - a_3) \end{vmatrix}$$

Theo tính chất 3 của định thức, có thể đưa thừa số chung của các cột ra ngoài dấu định thức :

$$D_3 = (a_1 - a_3)(a_2 - a_3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)D_2$$

$$= \prod_{j>i}(a_j - a_i).$$

(Trong đó ký hiệu $\prod_{j>i}(a_j - a_i)$ là tích của các hiệu có $j > i$).

Bằng phương pháp biến đổi hoàn toàn tương tự như trường hợp định thức Vandermonde cấp 3 ta có hệ thức truy hồi :

$$D_n = (a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})D_{n-1} ;$$

$$D_{n-1} = (a_{n-1} - a_1) \dots (a_{n-1} - a_{n-2})D_{n-2} ;$$

...

$$D_3 = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)D_2 ;$$

$$D_2 = (a_2 - a_1).$$

Do đó ta có :

$$D_n = \prod_{j>i}(a_j - a_i). \tag{4.27}$$

Ví dụ : Tính định thức :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{vmatrix}$$

Ta nhận thấy rằng, định thức của ma trận chuyển vị có dạng định thức Vandermonde :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & i & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 9 \\ -1 & -i & 8 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & i & 2 & 3 \\ (-1)^2 & i^2 & 2^2 & 3^2 \\ (-1)^3 & i^3 & 2^3 & 3^3 \end{vmatrix}$$

Theo công thức (4.27), ta có :

$$\Delta = (i + 1)(2 + 1)(3 + 1)(2 - i)(3 - i)(3 - 2)$$
$$= 12(1 + i)(2 - i)(3 - i).$$

4.3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Theo định nghĩa, ma trận vuông A gọi là *khả nghịch* nếu có ma trận nghịch đảo A^{-1} sao cho :

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = E. \qquad (4.28)$$

Trong bài này, chúng ta sẽ xét một điều kiện cần và đủ của ma trận khả nghịch, đồng thời chỉ ra phương pháp tìm ma trận nghịch đảo.

1. Điều kiện khả nghịch

Định lý 4.3 : Ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$.

Chứng minh :

Điều kiện cần : Giả sử ma trận A khả nghịch. Theo (4.28) ta có :

$$A.A^{-1} = E.$$

Theo Mệnh đề 4.1, ta có :

$$|A.A^{-1}| = |E| ;$$

$$|A|.|A^{-1}| = 1.$$

Đẳng thức sau, chứng tỏ định thức $|A| \neq 0$.

Điều kiện đủ : Giả sử ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ có định thức $|A| \neq 0$. Xét ma trận :

$$A^* = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \qquad (4.29)$$

trong đó A_{ij} là phần bù đại số của phần tử a_{ij}.

Ma trận A^* gọi là *ma trận phù hợp* của ma trận A. Xét tích :

$$A^*.A = (c_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Theo công thức (4.24), ta có :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} |A|.$$

Do đó ta có :

$$A^*.A = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| E.$$

Theo giả thiết $|A| \neq 0$, chia hai vế cho $|A|$ ta có :

$$\left(\frac{1}{|A|} A^*\right) A = E.$$

Một cách tương tự, xét tích $A.A^*$ và sử dụng công thức (4.23) ta có :

$$A\left(\frac{1}{|A|} A^*\right) = E.$$

Vậy điều kiện (4.28) được thỏa mãn, ma trận A khả nghịch và ta có :

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{|A|} A^*\right) \tag{4.30}$$

Định lý được chứng minh. ■

2. Tính ma trận nghịch đảo

Có nhiều cách tính ma trận nghịch đảo, dưới đây chúng ta sẽ làm quen với hai phương pháp quan trọng.

Phương pháp 1 : Theo công thức (4.30) để tính ma trận nghịch đảo A^{-1} ta cần tính định thức $|A|$ và ma trận phù hợp A^*. Khi thiết lập ma trận A^* cần lưu ý rằng, các phần tử cột j của ma trận A^* là phần bù đại số của các phần tử tương ứng ở hàng j của ma trận A.

Ví dụ : Cho ma trận :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hãy tìm ma trận nghịch đảo A^{-1} nếu có.

Ta có :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Vậy ma trận đã cho khả nghịch. Theo các công thức (4.29) và (4.30) ta có :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Tính các phần phụ đại số của các phần tử của ma trận đã cho, theo công thức (4.20) ta có :

$$A_{11} = 5,\ A_{12} = 0,\ A_{13} = 0,\ A_{21} = -4,\ A_{22} = 2,$$
$$A_{23} = -1,\ A_{31} = 2,\ A_{32} = -1,\ A_{33} = 3.$$

Vậy :

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Phương pháp 2 : Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Xét hai hệ tham biến $x_1, ..., x_n$ và $y_1, ..., y_n$ thỏa mãn hệ thức :

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \text{(a)}$$

trong đó E là ma trận đơn vị.

Giả sử ma trận A khả nghịch, nhân bên trái hai vế của (a) với A^{-1} ta có :

$$E\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{b}$$

Ta nhận thấy rằng, có thể nhận được hệ thức (b) bằng cách liên tiếp thực hiện đồng thời các biến đổi sơ cấp hệ vectơ hàng của các ma trận ở hệ thức (a). Do đó, để tìm ma trận A^{-1} ta xét ma trận :

$$(A \mid E) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

Chúng ta sẽ sử dụng các phép biến đổi sơ cấp đối với hệ vectơ hàng để đưa ma trận (A|E) về dạng $(E|A^{-1})$.

Bước 1. Thực hiện các phép biến đổi sau đây để đưa vectơ cột 1 về dạng $e_1 = (1, 0, ..., 0)$.

Giả sử $a_{11} \neq 0$ (nếu $a_{11} = 0$ thì đổi chỗ các hàng của ma trận (A|E)), chia hàng 1 cho a_{11}. Sau đó lần lượt nhân hàng mới nhận được với $-a_{k1}$ rồi cộng vào hàng k, $k \neq 1$. Sau bước 1 ta đưa ma trận (A|E) về dạng :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & b'_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_{21} & 1 & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} & b'_{n1} & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \tag{c}$$

Bước 2. Thực hiện tương tự như bước 1 để đưa vectơ cột 2 của ma trận (c) về dạng $e_2 = (0, 1, ..., 0)$, v.v...

Sau n bước ta được ma trận :

$$(E|B) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Ta có : $A^{-1} = B = (b_{ij})_{n \times n}$.

Chú ý :

a) Trong quá trình biến đổi nếu gặp cột j, với $j \le n$, là vectơ có dạng (*, ..., *, 0, ..., 0), trong đó có không quá $j - 1$ thành phần khác 0 thì dừng lại. Vì trong trường hợp này, hạng $r(A) < n$ nên ma trận A không khả nghịch.

b) Ở bước thứ i, nếu cần phải đổi chỗ hai hàng thì đổi chỗ hàng i với hàng k ($k > i$).

Ví dụ : Tìm nghịch đảo của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Ta có :

$$\left(A|E\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sau bước 1, ta có :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sau bước 2, ta có :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -3 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Sau bước 3, ta có :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vậy, ta có :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4. HẠNG CỦA MA TRẬN

4.4.1. Định lý về hạng của ma trận

Định thức con cấp k :

Xét ma trận cỡ $m \times n$, với các phần tử trên trường số K :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Giả sử k là một số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $k \le \min\{m, n\}$. Trong ma trận A, chọn k hàng : $i_1, \dots, i_k$ theo thứ tự $i_1 < \dots < i_k$ và chọn k cột : $j_1, \dots, j_k$ theo thứ tự $j_1 < \dots < j_k$.

Khi đó các phần tử nằm trên giao của k hàng, k cột đã chọn lập thành định thức cấp k :

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} \qquad (4.31)$$

Định thức (4.31) được gọi là *định thức con cấp k của ma trận A*.

Ví dụ : Xét ma trận cỡ 3 × 4 sau :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 7 & -10 & 12 \end{pmatrix}$$

Mỗi phần tử của ma trận A là một định thức con cấp 1.

Nếu chọn các hàng 1 và 3, chọn các cột 2 và 4 ta có định thức con cấp 2 :

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$$

Quan hệ giữa hạng của hệ vectơ hàng, hạng của hệ vectơ cột và định thức con của ma trận A được thể hiện ở định lý quan trọng sau, thường gọi là *định lý về hạng của ma trận*.

Định lý 4.4 : Trong ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$, hạng của hệ vectơ cột bằng hạng của hệ vectơ hàng và bằng cấp cao nhất của các định thức con khác 0.

Số chung đó được gọi là *hạng của ma trận A*, ký hiệu là r(A).

Chứng minh : Giả sử cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận A là p. Khi đó mọi định thức con cấp p + 1 đều bằng 0. Ta sẽ chứng tỏ hạng của hệ vectơ cột của ma trận A bằng p. Biết rằng, phép đổi chỗ hai hàng (cột) chỉ làm đổi dấu của định thức. Do đó, cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận A sẽ không thay đổi đối với phép đổi chỗ các hàng, các cột của ma trận A. Bởi vậy có thể giả thiết, định thức con cấp p nằm ở góc Tây – Bắc của ma trận khác 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & \cdots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{(a)}$$

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad \text{(b)}$$

Ta ký hiệu $\{A^1, A^2, ..., A^n\}$ là hệ vectơ cột của ma trận A, sẽ chứng tỏ p vectơ cột đầu $\{A^1, ..., A^p\}$ là một cơ sở của hệ vectơ cột của ma trận A.

Hệ vectơ $\{A^1, ..., A^p\}$ độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử có tổ hợp tuyến tính :

$$\lambda_1(a_{11}, ..., a_{p1}, ..., a_{m1}) + ... + \lambda_p(a_{1p}, ..., a_{pp}, ..., a_{mp}) = \theta,$$

hay
$$\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_{1k}, ..., \sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_{mk}\right) = (0, ..., 0). \qquad \text{(c)}$$

So sánh thành phần của vectơ ở hai vế đẳng thức (c) ta có m đẳng thức sau :

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k a_{jk} = 0, j = 1, ..., p, ..., m. \qquad \text{(d)}$$

p đẳng thức đầu tiên của (d) có thể viết dưới dạng đẳng thức ma trận :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(e)}$$

Vì định thức của ma trận vuông cấp p trong biểu thức ở vế trái của hệ thức (e) khác 0, do đó ma trận cấp p đó khả nghịch. Nhân bên trái hai vế của (e) với ma trận nghịch đảo của ma trận cấp p đó, ta có :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

hay :
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vậy ta có : $\lambda_1 = ... = \lambda_p = 0$. Do đó hệ vectơ cột $\{A^1, ..., A^p\}$ độc lập tuyến tính.

Bây giờ sẽ chứng tỏ rằng, mỗi cột của ma trận A biểu diễn tuyến tính qua $\{A^1, ..., A^p\}$.

Xét định thức con cấp p + 1 :

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} & a_{1p+k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} & a_{pp+k} \\ a_{j1} & \dots & a_{jp} & a_{jp+k} \end{vmatrix} \qquad \text{(g)}$$

với $k = 1, ..., n - p$.

Nếu $j \leq p$ thì định thức D_j có hai hàng giống nhau, do đó ta có $D_j = 0$. Nếu $j > p$ thì D_j là định thức con cấp p + 1 của ma trận A, theo giả thiết ta có $D_j = 0$. Vậy $D_j = 0$, với $j = 1, ..., m$.

Ký hiệu M_s là phần bù đại số của a_{js}, $s = 1, ..., p$, trong định thức D_j. Dễ thấy rằng, M là phần bù đại số của phần tử a_{jp+k}. Rõ ràng $M_1, ..., M_p$, M không phụ thuộc chỉ số j.

Khai triển định thức D_j theo hàng cuối cùng, ta có :

$$D_j = a_{j1}M_1 + ... + a_{jp}M_p + a_{jp+k}M = 0.$$

Theo (b) thì $M \neq 0$, nên ta có :

$$a_{jp+k} = -\frac{M_1}{M}a_{j1} - ... - \frac{M_p}{M}a_{jp}, \quad j = 1, ..., m. \qquad \text{(h)}$$

Từ các đẳng thức (h), suy ra vectơ cột A^{p+k}, $k = 1, ..., n - p$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ cột $\{A^1, ..., A^p\}$. Vậy hệ $\{A^1, ..., A^p\}$ là một cơ sở của hệ vectơ cột của ma trận A. Do đó hệ vectơ cột của ma trận A có hạng bằng p.

Xét ma trận chuyển vị A^t của ma trận A. Vì phép lấy chuyển vị không làm thay đổi giá trị định thức của ma trận, do đó dễ thấy rằng cấp cao nhất của định thức con khác 0 của ma trận A^t cũng bằng p. Theo chứng minh trên, hạng của hệ vectơ cột của ma trận A^t bằng p. Nhưng hệ vectơ cột của ma trận A^t là hệ vectơ hàng của ma trận A. Định lý hoàn toàn được chứng minh. ■

Mệnh đề sau đây là hệ quả trực tiếp của các Định lý 4.3 và 4.4.

Mệnh đề 4.2 : Đối với ma trận vuông A, các điều khẳng định sau đây là tương đương :

1) Hệ vectơ hàng (hay cột) của ma trận A độc lập tuyến tính ;

2) Định thức $|A| \neq 0$;

3) Ma trận A khả nghịch.

Ma trận thoả mãn một trong các điều kiện tương đương trên gọi là *ma trận không suy biến.*

4.4.2. Áp dụng tính hạng của ma trận, hệ vectơ

Nếu các ma trận A, B có hạng bằng nhau ($r(A) = r(B)$) thì ta viết $A \sim B$.

Vì phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của hệ vectơ (xem Mệnh đề 3.9), do đó để tính hạng của ma trận A ta thường dùng các phép biến đổi sơ cấp đối với hệ vectơ hàng (hay cột) để đưa ma trận A về ma trận có dạng bậc thang B, đối với ma trận này, dễ dàng nhận biết cấp cao nhất của định thức con khác 0. Đó là ma trận có dạng :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

với $b_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, r$.

Ta có $r(A) = r(B) = r$.

Ví dụ : Hãy tính hạng và xác định một cơ sở của hệ vectơ sau : $u_1 = (1, -3, 0, 4)$; $u_2 = (2, -7, 3, 5)$; $u_3 = (4, 5, 3, 1)$; $u_4 = (7, -5, 6, 10)$ trong không gian $\mathbb{R}^4$.

Xét ma trận A có hệ vectơ hàng là u_1, u_2, u_3 và u_4. Khi đó hạng của ma trận A là hạng của hệ vectơ đã cho :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -7 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 \\ 7 & -5 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Để tìm hạng của ma trận A, thực hiện các phép biến đổi sơ cấp đối với hệ vectơ hàng như sau :

– Lần lượt nhân hàng 1 với –2, –4, –7 rồi cộng vào hàng 2, 3, 4 ta có :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 17 & 3 & -15 \\ 0 & 16 & 6 & -18 \end{pmatrix}$$

– Lần lượt nhân hàng 2 với 17, 16 rồi cộng vào hàng 3, 4 ta có :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 54 & -66 \\ 0 & 0 & 54 & -66 \end{pmatrix}$$

– Nhân hàng 3 với –1 rồi cộng vào hàng 4, ta có :

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 54 & -66 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 54 & -66 \end{pmatrix} = B.$$

Dễ thấy rằng, ma trận B có định thức con cấp 3 (cấp cao nhất) khác 0, do đó r(B) = 3. Ta có r(A) = r(B) = 3. Vậy hệ vectơ $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ có hạng bằng 3.

Ta nhận thấy rằng, hệ vectơ hàng của ma trận B nhận được từ hệ vectơ $\{u_1, u_2, u_3\}$ bằng các phép biến đổi sơ cấp. Do đó hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ có hạng bằng 3, và hệ này là một cơ sở của hệ vectơ đã cho.

4.5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

4.5.1. Các khái niệm cơ bản

1. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Hệ m phương trình tuyến tính n ẩn $x_1, ..., x_n$ là hệ có dạng :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{4.32}$$

Hay có thể viết gọn hơn :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i, \; i = 1, ..., m$$

trong đó a_{ik}, b_i là các phần tử thuộc trường số K ; a_{ik} gọi là *hệ số* của ẩn x_k ; b_i gọi là *hệ số tự do*, i = 1, ..., m ; k = 1, ..., n.

Hệ phương trình (4.32) gọi là *hệ phương trình tuyến tính tổng quát.*

Đặc biệt, nếu $b_1 = ... = b_m = 0$ thì hệ (4.32) có dạng :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0, \; i = 1, ..., m. \tag{4.33}$$

Hệ phương trình (4.33) được gọi là *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.*

2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Mỗi nghiệm của hệ (4.32) là một vectơ $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ của không gian vectơ K^n, sao cho khi thay ẩn x_k bởi thành phần α_k, k = 1, ..., n vào hệ (4.32) ta được m đẳng thức.

– Nếu hệ (4.32) có một nghiệm duy nhất thì gọi là *hệ xác định.*

– Nếu hệ (4.32) có nhiều nghiệm thì gọi là *hệ không xác định.*

– Nếu hệ (4.32) không có nghiệm thì gọi là *hệ vô nghiệm.*

Dễ thấy rằng, vectơ $\theta = (0, ..., 0)$ luôn luôn là một nghiệm của hệ thuần nhất (4.33), nghiệm này gọi là *nghiệm tầm thường.*

3. Các hệ phương trình tương đương

Hai hệ phương trình tuyến tính :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i \, , \, i = 1, ..., m$$

và

$$\sum_{k=1}^{n} a'_{jk} x_k = b'_j \, , \, j = 1, ..., p.$$

được gọi là *tương đương* nếu mỗi nghiệm của hệ này là nghiệm của hệ kia và ngược lại. Tức là tập các nghiệm của hai hệ đó trùng nhau.

Các phép biến đổi tương đương : Một phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của các hệ phương trình gọi là *phép biến đổi tương đương.*

Dễ dàng chứng minh được các phép biến đổi sau đây là các phép biến đổi tương đương :

a) Thay đổi thứ tự các phương trình của hệ (4.32).

b) Loại khỏi hệ (4.32) các phương trình có hệ số của các ẩn và hệ số tự do đều bằng 0.

c) Nhân hai vế của một phương trình với một số $k \neq 0$.

d) Cộng hai vế của một phương trình vào các vế của một phương trình khác.

4. Dạng ma trận, dạng vectơ của hệ phương trình tuyến tính

Tương ứng với hệ phương trình (4.32), ta có các ma trận sau :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} ; \; \overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Ma trận A gọi là ma trận của hệ (4.32), hạng của ma trận A gọi là *hạng* của hệ (4.32). Ma trận $\overline{A}$ nhận được từ ma trận A bằng cách bổ sung thêm cột thứ $n + 1$ là các hệ số tự do của hệ phương trình (4.32). Ma trận $\overline{A}$ gọi là *ma trận mở rộng* của hệ (4.32).

Nếu sử dụng ký hiệu ma trận thì hệ phương trình (4.32) có thể viết dưới dạng một phương trình ma trận như sau :

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (4.34)$$

Hệ thức (4.34) gọi là *dạng ma trận* của hệ phương trình tuyến tính (4.32).

Ký hiệu các vectơ cột của ma trận mở rộng $\overline{A}$ là : $A^1, A^2, ..., A^n$, B. Khi đó m đẳng thức của hệ (4.32) tương đương với đẳng thức vectơ :

$$x_1A^1 + x_2A^2 + ... + x_nA^n = B. \qquad (4.35)$$

Hệ thức (4.35) gọi là *dạng vectơ* của hệ phương trình (4.32).

Chú ý : Ta nhận thấy rằng, các phép biến đổi tương đương từ a) đến d) ở trên thực chất là các phép biến đổi sơ cấp trên hệ vectơ hàng của ma trận mở rộng $\overline{A}$.

4.5.2. Điều kiện có nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định lý 4.5 (Định lý Crônecke - Capelli) : Hệ phương trình tuyến tính (4.32) có nghiệm khi và chỉ khi hạng của ma trận A bằng hạng của ma trận mở rộng $\overline{A}$.

Chứng minh :

Điều kiện cần : Giả sử hệ (4.32) có nghiệm $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Khi đó theo dạng vectơ (4.35) của hệ ta có :

$$B = \alpha_1A^1 + \alpha_2A^2 + ... + \alpha_nA^n.$$

Vậy ta có : $B \in \mathscr{L}(A^1, A^2, ..., A^n)$. Do đó, hạng của hệ vectơ $\{A^1, A^2, ..., A^n, B\}$ bằng hạng của hệ $\{A^1, A^2, ..., A^n\}$, hay $r(\overline{A}) = r(A)$.

Điều kiện đủ : Giả sử $r(A) = r(\overline{A})$.

Khi đó ta có :

$$\dim\mathscr{L}(\{A^1, A^2, ..., A^n, B\}) = r(\overline{A}) = r(A) = \dim\mathscr{L}(\{A^1, A^2, ..., A^n\}).$$

Từ đó suy ra :

$$\mathscr{L}(\{A^1, A^2, ..., A^n, B\}) = \mathscr{L}(\{A^1, A^2, ..., A^n\}).$$

Ta có $B \in \mathscr{L}(\{A^1, A^2, ..., A^n\})$. Theo Mệnh đề 3.3 sẽ tồn tại các số $\lambda_i \in K, i = 1, ..., n$ sao cho :

$$B = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A^k .$$

Vectơ $\alpha = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ là một nghiệm của hệ (4.32). Định lý được chứng minh.■

4.5.3. Cấu trúc tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

1. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

Định lý 4.6 : Giả sử hệ phương trình tuyến tính thuần nhất :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0, i = 1, ..., m \tag{4.36}$$

có hạng bằng k. Khi đó tập N_o các nghiệm của hệ (4.36) là một không gian con n – k chiều của không gian vectơ K^n. Tập N_o được gọi là *không gian nghiệm* của hệ thuần nhất (4.36).

Chứng minh : Ký hiệu hệ vectơ hàng của ma trận A là $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$. Khi đó ta có :

$$\dim \mathscr{L}(\{v_1, v_2, ..., v_m\}) = \text{hạng của } \{v_1, v_2, ..., v_m\} = r(A) = k.$$

Để đơn giản, giả sử $K = \mathbb{R}$.

Theo (4.36) thì vectơ $\alpha = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ là nghiệm của hệ khi và chỉ khi các hệ thức sau được thỏa mãn :

$$(v_i.\alpha) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\lambda_k = 0, i = 1, 2, ..., m.$$

Vậy trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ vectơ α trực giao với hệ vectơ $\{v_1, v_2, ..., v_m\}$.

Theo tính chất 5 của không gian vectơ Euclid (xem mục 3.6.1) thì vectơ α trực giao với không gian con $\mathscr{L}(\{v_1, v_2, ..., v_m\})$. Do đó tập N_o các nghiệm của hệ (4.36) trùng với không gian con bù trực giao của không gian con k chiều $\mathscr{L}(\{v_1, v_2, ..., v_m\})$. Theo Mệnh đề 3.12, N_o là một không gian con (n – k) chiều.■

Hệ nghiệm cơ bản : Mỗi cơ sở $\{u_1, u_2, ..., u_{n-k}\}$ của không gian con nghiệm N_o gọi là một *hệ nghiệm cơ bản* của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (4.36). Khi đó, mỗi nghiệm $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ của hệ đều có thể biểu diễn tuyến tính duy nhất quan hệ nghiệm cơ bản :

$$\alpha = a_1u_1 + ... + a_{n-k}u_{n-k}.$$

2. Hệ phương trình tuyến tính tổng quát

Xét hệ phương trình tuyến tính :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i\ ;\ i = 1, ..., m. \tag{4.37}$$

Tương ứng với hệ phương trình tuyến tính tổng quát (4.37) ta có hệ phương trình tuyến tính thuần nhất :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0\ ;\ i = 1, ..., m. \tag{4.38}$$

Hệ thuần nhất (4.38) gọi là *hệ thuần nhất liên kết* với hệ (4.37).

Định lý 4.7 : Giả sử N_o là không gian con nghiệm của hệ thuần nhất liên kết (4.38), và $\alpha^o = (\alpha_1^o, \alpha_2^o, ..., \alpha_n^o)$ là một nghiệm nào đó của hệ (4.37). Khi đó tập N các nghiệm của hệ (4.37) có dạng :

$$N = \alpha^o + N_o = \{\alpha = \alpha^o + \beta : \beta \in N_o\}. \tag{4.39}$$

Chứng minh Theo (4.35) hệ phương trình (4.37) và hệ thuần nhất liên kết có thể viết dưới dạng vectơ :

$$\sum_{k=1}^{n} x_kA^k = B \tag{a}$$

và

$$\sum_{k=1}^{n} x_kA^k = \theta. \tag{b}$$

Giả sử $\alpha = \alpha^o + \beta$, trong đó $\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) \in N_o$. Ta có

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) = (\alpha_1^o + \beta_1, ..., \alpha_n^o + \beta_n).$$

Trong hệ thức (a) thay x_k bởi α_k ta có :

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k A^k = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^o + \beta_k\right) A^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^o A^k + \beta_k A^k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^o A^k + \sum_{k=1}^{n}\beta_k A^k$$

$$= B + \theta = B.$$

Vậy $\alpha = \alpha^o + \beta$ là một nghiệm của hệ phương trình (4.37). Ta có $\alpha^o + N_o \subseteq N$.

Ngược lại, giả sử $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in N$. Đặt $\beta = \alpha - \alpha^o$. Ta có :

$$\beta = (\beta_1, ..., \beta_n) = (\alpha_1 - \alpha_1^o, ..., \alpha_n - \alpha_n^o).$$

Trong hệ thức (b), thay x_k bởi β_k ta có :

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_k A^k = \sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k - \alpha_k^o\right) A^k = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k A^k - \sum_{k=1}^{n}\alpha_k^o A^k$$

$$= B - B = \theta.$$

Vậy vectơ β là một nghiệm của hệ thuần nhất liên kết (4.38). Ta có $\alpha = \alpha^o + \beta \in \alpha^o + N_o$. Do đó : $N \subseteq \alpha^o + N_o$.

Vậy $N = \alpha^o + N_o$. Định lý được chứng minh.■

4.5.4. Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

1. Quy tắc Cramer

Hệ Cramer : Một hệ phương trình tuyến tính có số phương trình bằng số ẩn và ma trận A của hệ có định thức $|A| \neq 0$ gọi là *hệ Cramer.*

Định lý 4.8 : Hệ Cramer

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4.40}$$

là một hệ xác định. Nghiệm duy nhất của hệ được tính bởi công thức :

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}\ ;\ j = 1, ..., n \tag{4.41}$$

trong đó $\Delta = |A|$ và

$$\Delta_j = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & b_2 & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \end{array} \tag{4.42}$$

Công thức (4.41) gọi là *công thức Cramer*.

Chú ý : Định thức Δ_j là định thức của ma trận nhận được từ ma trận A của hệ (4.40) bằng cách thay cột thứ j (hệ số của ẩn x_j) bởi các phần tử $b_1, ..., b_n$ (các hệ số tự do).

Chứng minh : Theo (4.42), nếu khai triển định thức Δ_j theo cột thứ j ta có :

$$\Delta_j = \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj} \tag{a}$$

trong đó A_{kj} là phần bù đại số của phần tử a_{kj} trong định thức $|A|$.

Viết lại hệ (4.40) dưới dạng ma trận :

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{b}$$

Vì định thức $|A| \neq 0$, nên có ma trận nghịch đảo A^{-1}. Nhân bên trái hai vế của đẳng thức (b) với ma trận A^{-1}, theo công thức (4.30) và hệ thức (a) ta có :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\Delta}\right) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\Delta}\right) \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} b_k A_{k1} \\ \sum_{k=1}^{n} b_k A_{k2} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \vdots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix} \qquad \text{(c)}$$

Từ đẳng thức ma trận (c) ta có :

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}\ ;\ j = 1, \dots, n.$$

Công thức Cramer được chứng minh.

Theo Mệnh đề 4.2, vì định thức $|A| \neq 0$ nên hệ vectơ cột $\{A^1, A^2, \dots, A^n\}$ của ma trận A là một cơ sở của không gian K^n. Bởi vậy, mỗi vectơ $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in K^n$ chỉ có một biểu diễn duy nhất qua cơ sở $\{A^1, A^2, \dots, A^n\}$. Vậy hệ Cramer (4.40) có duy nhất nghiệm cho bởi công thức (4.41).■

Định lý sau đây đối với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất có một vai trò quan trọng trong áp dụng.

Định lý 4.9 : Hệ n phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn số

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0 \,;\, i = 1, ..., n \tag{4.43}$$

chỉ có nghiệm tầm thường $\theta = (0, 0, ..., 0)$ khi và chỉ khi định thức $|A| \neq 0$.

Chứng minh :

Điều kiện cần : Nếu hệ thuần nhất (4.43) chỉ có nghiệm tầm thường $\theta = (0, 0, ..., 0)$ thì hệ vectơ cột của ma trận A độc lập tuyến tính. Theo Mệnh đề 4.2 ta có $|A| \neq 0$.

Điều kiện đủ : Nếu ma trận A của hệ thuần nhất (4.43) có định thức $|A| \neq 0$, khi đó hệ phương trình (4.43) là một hệ Cramer, do đó hệ chỉ có nghiệm duy nhất, đó là nghiệm tầm thường $\theta = (0, ..., 0)$.■

Ví dụ : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

Ta nhận thấy rằng, hệ đang xét có số phương trình của hệ bằng số ẩn và bằng 3. Định thức của ma trận của hệ là :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Vậy hệ phương trình đã cho là một hệ Cramer. Theo công thức (4.41) ta có :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = -\frac{1}{2} \,;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-2} = 1 \,;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Hệ phương trình có một nghiệm duy nhất là :

$$\alpha = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right).$$

2. Phương pháp Gauss

Đối với các hệ phương trình tuyến tính có nhiều phương trình, nhiều ẩn ta thường dùng phương pháp Gauss để giải. Đó là phương pháp khử dần các ẩn.

Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (H_1)$$

– Bước 1 :

a) Giả sử $a_{11} \neq 0$ (nếu $a_{11} = 0$ thì thay đổi thứ tự các phương trình), chia hai vế của phương trình 1 cho a_{11}.

b) Nhân hai vế của phương trình mới nhận được lần lượt với $-a_{21}, -a_{31}, \dots, -a_{m1}$ rồi cộng vào hai vế tương ứng của các phương trình 2, 3, ..., m.

Sau bước 1, được hệ (H_2) tương đương với hệ (H_1) :

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \qquad a'_{p2}x_2 + \dots + a'_{pn}x_n = b'_p \end{cases} \qquad (H_2)$$

Hệ (H_2) có số phương trình là p, vì có thể có một vài phương trình giống nhau, hoặc có phương trình có tất cả các hệ số đều bằng 0 được loại ra khỏi hệ, nên $p \leq m$.

– *Bước 2 :* Trong hệ (H_2), giữ nguyên phương trình 1 và tiếp tục biến đổi như bước 1 đối với p – 1 phương trình còn lại, v.v... (Chú ý: Nếu trong hệ (H_2) có $a'_{22} = ... = a'_{p2} = 0$ (hệ số của ẩn x_2) thì ta đổi chỗ x_2 cho ẩn x_j có hệ số $a'_{2j} \neq 0$).

Cuối cùng ta được một hệ r phương trình có dạng bậc thang tương đương với hệ (H_1) sau :

$$\begin{cases} x_{i_1} + a''_{12}x_{i_2} + ... + a''_{1r}x_{i_r} + ... + a''_{1n}x_{i_n} = b''_1 \\ \qquad x_{i_2} + ... + a''_{2r}x_{i_r} + ... + a''_{2n}x_{i_n} = b''_2 \\ \qquad\qquad ... \qquad ... \qquad ... \\ \qquad\qquad x_{i_r} + ... + a''_{rn}x_{i_n} = b''_r \,. \end{cases} \qquad (H_s)$$

trong đó $x_{i_1}, ..., x_{i_n}$ là một hoán vị nào đó của các ẩn $x_1, ..., x_n$.

Các trường hợp sau có thể xảy ra :

– *Trường hợp 1 :* Nếu trong quá trình gặp phương trình vô nghiệm dạng $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b$, $b \neq 0$, thì biến đổi dừng lại và kết luận hệ đã cho vô nghiệm.

– *Trường hợp 2 :* Nếu r = n, khi đó phương trình cuối cùng của hệ (H_s) có dạng :

$$x_{i_n} = b'_n \,.$$

Hệ (H_s) là một hệ Cramer, do đó hệ đã cho (H_1) có duy nhất nghiệm. Có thể tìm nghiệm đó bằng cách giải từng phương trình của hệ (H_s) từ dưới lên, và thay thế dần giá trị của các ẩn tìm được ở phương trình dưới vào các phương trình trên.

– *Trường hợp 3 :* Nếu r < n thì hệ phương trình đã cho vô số nghiệm. Để giải hệ (H_s) ta có thể xem các ẩn $x_{i_{r+1}}, ..., x_{i_n}$ là các tham số (lấy giá trị tùy ý) và chuyển các số hạng chứa các ẩn đó sang vế phải ; rồi dùng phương pháp ở trường hợp 2 để giải đối với các ẩn $x_{i_1}, ..., x_{i_r}$.

3. Ví dụ áp dụng

Trong thực hành, để biến đổi hệ phương trình (H_1) về hệ bậc thang (H_s), thay cho việc biến đổi các phương trình ta biến đổi các hàng và đổi chỗ các cột của ma trận mở rộng của hệ (H_1) về ma trận mở rộng của hệ (H_s) :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \to \dots \to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & a''_{12} & \dots & a''_{1r} & \dots & a''_{1n} & b''_1 \\ 0 & 1 & \dots & a''_{2r} & \dots & a''_{2n} & b''_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & a''_{rn} & b''_r \end{array}\right)$$

Các ví dụ :

1) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

Ma trận mở rộng của hệ phương trình (a) là :

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 9 \end{array}\right)$$

Sau bước 1 ta có :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} & \frac{26}{3} \end{array}\right).$$

Sau bước 2 ta có :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 8 \end{array}\right).$$

Sau bước 3 ta có :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{16}{5} \end{array}\right)$$

Vậy hệ phương trình (a) tương đương với hệ bậc thang :

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{3} \\ \qquad x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 = \frac{16}{5} \end{cases} \qquad (b)$$

Ta có r = n = 3, hệ phương trình (a) có duy nhất nghiệm (trường hợp 2). Ta giải hệ bậc thang (b) như sau :

Từ phương trình thứ 3, ta có : $x_3 = \frac{16}{5}$; thay giá trị của x_3 vào phương trình 2 ta tính được : $x_2 = \frac{1}{5}$; thay các giá trị của x_2, x_3 vào phương trình 1 ta có : $x_1 = -\frac{4}{5}$.

Hệ phương trình đã cho có nghiệm $\alpha = \left(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{16}{5}\right)$

2) Hãy tìm một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất :

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 0 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \qquad (c)$$

Ma trận mở rộng của hệ phương trình (c) là :

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 0 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Để tính toán đơn giản, ta đổi chỗ hàng 1 và hàng 2 của ma trận $\overline{A}$ (tương đương với việc thay đổi thứ tự các phương trình của hệ (c)) :

$$\overline{A} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 0 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Sau bước 1 ta có :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -14 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & -21 & 15 & 0 \end{array}\right)$$

Sau bước 2 ta có :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Hệ phương trình (c) tương đương với hệ bậc thang

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ \qquad\; x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases} \qquad \text{(d)}$$

Hệ bậc thang (d) có $r = 2 < n = 4$ (trường hợp 3). Giải hệ (d) đối với các ẩn x_1, x_2 và xem x_3, x_4 là các tham số. Từ hệ (d) ta có :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -5x_3 + 2x_4 \\ x_2 = 7x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -26x_3 + 17x_4 \\ x_2 = 7x_3 - 5x_4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho (c) là những vectơ có dạng :

$$\beta = (-26x_3 + 17x_4, 7x_3 - 5x_4, x_3, x_4), \qquad \text{(e)}$$

trong đó x_3, x_4 lấy từ giá trị tùy ý.

Hệ đã cho có hạng bằng 2. Vậy số chiều của không gian nghiệm của hệ là $k = 4 - 2 = 2$.

– Với $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ theo (e) có nghiệm :

$$\beta_1 = (-26, 7, 1, 0).$$

– Với $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ theo (e) ta có nghiệm :

$$\beta_2 = (17, -5, 0, 1).$$

Dễ thấy rằng, hệ vectơ $\{\beta_1, \beta_2\}$ độc lập tuyến tính. Đó là một hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình (c).

4. Phương pháp chung giải hệ phương trình tuyến tính

Để giải phương trình tuyến tính tổng quát

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \,;\; i = 1, 2, ..., m$$

ta có thể tiến hành như sau :

Xác định hạng của ma trận A và hạng của ma trận mở rộng $\overline{A}$. Các trường hợp sau đây có thể xảy ra :

– Nếu $r(\overline{A}) > r(A)$, hệ đã cho vô nghiệm.

– Nếu $r(\overline{A}) = r(A) = r$, hệ đã cho có nghiệm.

a) Nếu $r = n$, hệ đã cho là một hệ xác định, nó tương đương với một hệ Cramer. Ta có thể giải hệ đó theo quy tắc Cramer hoặc phương pháp khác.

b) Nếu $r < n$, hệ đã cho là một hệ có vô số nghiệm. Để tìm nghiệm trong hệ đã cho, ta chọn ra r phương trình, r ẩn số sao cho trong r phương trình đã chọn hệ số của r ẩn này lập thành định thức con cấp r khác 0. Các phương trình được chọn gọi là *hệ các phương trình độc lập*, r ẩn được chọn gọi là *các ẩn chính*.

Hệ r phương trình độc lập tương đương với hệ đã cho. Ta giải hệ này đối với các ẩn chính, và xem $n - r$ ẩn còn lại là tham số, gọi là $n - r$ *ẩn tự do*.

Ví dụ : Giải và biện luận theo tham số λ hệ phương trình sau đây :

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1 \end{cases} \qquad (f)$$

Định thức của ma trận của hệ phương trình (f) là :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda+2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (\lambda+2)(\lambda-1)^2.$$

Ta nhận thấy rằng : $\Delta \neq 0$ khi và chỉ khi $\lambda \neq -2$ và $\lambda \neq 1$.

a) Nếu $\lambda \neq -2$ và $\lambda \neq 1$ hệ phương trình đã cho là một hệ Cramer. Ta có thể giải theo quy tắc Cramer.

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}}{(\lambda+2)(\lambda-1)^2} = \frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda+2)(\lambda-1)^2} = \frac{1}{\lambda+2}.$$

Ta nhận thấy rằng, vai trò các ẩn x_1, x_2 và x_3 trong hệ (f) là đối xứng, do đó ta có :

$$x_2 = x_3 = \frac{1}{\lambda+2}.$$

Hệ đã cho có nghiệm $\alpha = \left(\frac{1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}, \frac{1}{\lambda+2}\right)$.

b) Nếu $\lambda = 1$, hệ phương trình đã cho tương đương với hệ phương trình :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \qquad (g)$$

Hệ có nghiệm $\alpha = (1 - x_2 - x_3, x_2, x_3)$, trong đó x_2, x_3 lấy giá trị tùy ý.

c) Nếu $\lambda \neq -2$, hệ phương trình đã cho có dạng :

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad (h)$$

Xét ma trận mở rộng của hệ (h) :

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Để tìm hạng của ma trận, ta thực hiện các phép biến đổi sơ cấp như sau :

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overline{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Từ ma trận cuối cùng, suy ra $r(A) = 2$, $r(\overline{A}) = 3$, hệ đã cho vô nghiệm.

BÀI TẬP

Đề bài

4.1. 1) Giả sử A là ma trận cỡ $m \times p$. Hãy xác định cỡ của các ma trận B, C sao cho các biểu thức sau có nghĩa :

$$(A + B)C \,;\, C(A + B) \,;\, (A.B)C.$$

2) Chứng minh các hệ thức :

a) $(A + B)C = A.C + B.C$;

b) $C(A + B) = C.A + C.B$;

c) $(A.B)C = A(B.C)$.

3) Chứng tỏ tập $M_n[K]$ các ma trận cấp n với các phần tử thuộc trường K là một vành có đơn vị đối với phép cộng ma trận và phép nhân ma trận.

4) Liên hợp của ma trận phức $A = (a_{ij})_{m\times n}$ là ma trận $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{m\times n}$. Chứng minh rằng :

a) $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$;

b) $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$;

c) $\overline{A.B} = \overline{A}.\overline{B}$.

4.2. Giả sử $A \in M_n[K]$. Vết của ma trận A ký hiệu là Tr(A), là tổng của các phần tử trên đường chéo chính. Chứng minh rằng :

1) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$;

2) $Tr(A.B) = Tr(B.A)$;

3) Không tồn tại các ma trận vuông A, B sao cho : $A.B - B.A = E$.

4.3. Giả sử $A, B \in M_n[K]$ giao hoán được ($A.B = B.A$).
Chứng minh rằng :

$$(A + B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i A^{n-i} B^i .$$

4.4. Tính :

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5$

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^n$ 4) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n$

5) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

7) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n-1}$

(ma trận đã cho cấp n).

4.5. Tính M^n, $n > 0$, với :

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $M = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4.6. Cho ma trận cấp 2 trên trường số phức $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ trong đó } b \neq 0.$$

1) Chứng minh rằng ma trận $B \in M_2[\mathbb{C}]$:

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

giao hoán được với A (tức là A.B = B.A) khi và chỉ khi tồn tại một số phức k sao cho :

$$y = kb,\ z = kc,\ x - t = k(a - d).$$

2) Chứng minh rằng, tập tất cả các ma trận phức giao hoán được với ma trận A là một không gian con 2 chiều của $\mathbb{C}$ – không gian vectơ $M_2[\mathbb{C}]$.

4.7. Chứng tỏ rằng, mỗi ma trận trên trường K :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

là nghiệm của phương trình ma trận cấp 2 :

$$X^2 - (a + d)X + (ad - bc)E = 0.$$

4.8. Một ma trận vuông A gọi là ma trận lũy đẳng nếu $A^2 = A$.

1) Chứng tỏ rằng :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

là ma trận lũy đẳng.

2) Chứng minh : Nếu ma trận A lũy đẳng thì ma trận $B = 2A - E$ có bình phương bằng ma trận đơn vị E. Do đó B khả nghịch và $B^{-1} = B$.

4.9. Ma trận $A \in M_n[K]$ gọi là lũy linh bậc p nếu p là một số nguyên dương sao cho $A^{p-1} \neq 0$ và $A^p = 0$.

1) Chứng minh rằng : Nếu A là ma trận lũy linh bậc p thì $E - A$ là ma trận khả nghịch và $(E - A)^{-1} = E + A + ... + A^{p-1}$.

2) Áp dụng câu 1), tìm ma trận nghịch đảo của ma trận :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{pmatrix}$$

4.10. Tích A.B của các ma trận A và B sẽ thay đổi như thế nào nếu :

1) Đổi chỗ hàng i và hàng j của ma trận A ;

2) Nhân hàng j của ma trận A với số k rồi cộng vào hàng i của ma trận A ;

3) Đổi chỗ cột i và cột j của ma trận B ;

4) Nhân cột j của ma trận B với số k, rồi cộng vào cột i của B.

4.11. Chứng minh rằng :

1) $$\begin{vmatrix} \sin a & \cos a & \cos(a+d) \\ \sin b & \cos b & \cos(b+d) \\ \sin c & \cos c & \cos(c+d) \end{vmatrix} = 0$$

2) $$\begin{vmatrix} (a_1+b_1)^2 & a_1^2+b_1^2 & a_1b_1 \\ (a_2+b_2)^2 & a_2^2+b_2^2 & a_2b_2 \\ (a_3+b_3)^2 & a_3^2+b_3^2 & a_3b_3 \end{vmatrix} = 0$$

3) $$\begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+bz' \end{vmatrix} = 0$$

4) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$

5) $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

4.12. Giải các phương trình sau :

1) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0$

trong đó $a_1, \dots, a_{n-1}$ là các số khác nhau.

2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1-x \end{vmatrix} = 0$

4.13. Tính các định thức sau đây :

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$

3) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$ (cấp 2n)

5) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a \\ 0 & 2 & \dots & a & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a & \dots & 2n-1 & 0 \\ a & 0 & \dots & 0 & 2n \end{vmatrix}$

6) $\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} a_1 & x & \dots & x \\ x & a_2 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$

8) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_n \end{vmatrix}$

9) $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & x_n \end{vmatrix}$

10) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$

11) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{vmatrix}$

12) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}^2$

13) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} \cos^{n-1}\varphi_1 & \dots & \cos\varphi_1 & 1 \\ \cos^{n-1}\varphi_2 & \dots & \cos\varphi_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos^{n-1}\varphi_n & \dots & \cos\varphi_n & 1 \end{vmatrix}$

4.14. Giải các phương trình ma trận sau đây :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

2) $X \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 1 & 11 & 7 \\ 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

4.15. Ma trận nghịch đảo A^{-1} thay đổi như thế nào nếu trong ma trận A ta thực hiện các phép biến đổi sau đây :

1) Đổi chỗ hàng i với hàng j ;

2) Nhân các phần tử hàng i với số k khác không ;

3) Cộng vào hàng i các phần tử hàng j nhân với số k ;

4) Các phép biến đổi tương tự đối với cột.

4.16. Giả sử A, B là các ma trận khả nghịch. Hãy chứng minh rằng :

1) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$;

2) A^t khả nghịch và $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$;

3) Nếu $A.B = B.A$ thì $A^{-1}.B = B.A^{-1}$ và $B^{-1}.A = A.B^{-1}$;

4) Nếu $A.X = 0$ hoặc $X.A = 0$ thì $X = 0$.

4.17. Tìm chiều và một cơ sở của không gian con sinh bởi hệ vectơ :

1) $u_1 = (1, 0, 0, -1)$; $u_2 = (2, 1, 1, 0)$;

$u_3 = (1, 1, 1, 1)$; $u_4 = (1, 2, 3, 4)$;

$u_5 = (0, 1, 2, 3)$.

2) $v_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$; $v_2 = (1, 1, -1, -1, -1)$;

$v_3 = (2, 2, 0, 0, -1)$; $v_4 = (1, 1, 5, 5, 2)$;

$v_5 = (1, -1, -1, 0, 0)$.

4.18. Hãy xác định hạng của các ma trận sau đây đối với các giá trị λ khác nhau :

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

4.19. Giải các hệ phương trình :

1) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ \quad\quad x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 \quad\quad - 3x_4 = 1 \\ \quad -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases}$$

4.20. Giải và biện luận các hệ phương trình.

1) $$\begin{cases} \lambda x + y + z + t = 1 \\ x + \lambda y + z + t = \lambda \\ x + y + \lambda z + t = \lambda^2 \\ x + y + z + \lambda t = \lambda^3 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

3) $\begin{cases} x + y + (a+1)z = a^2 + 3a \\ x + (a+1)y + z = a^3 + 3a^2 \\ (a+1)x + y + z = a^4 + 3a^3 \end{cases}$

4.21. 1) Tìm tam thức bậc hai f(x) biết :

$f(1) = -1$; $f(-1) = 9$; $f(2) = -3$.

2) Tìm đa thức bậc ba g(x) biết :

$g(-1) = 0$; $g(1) = 4$; $g(2) = 3$; $g(3) = 16$.

4.22. Tìm nghiệm tổng quát và một hệ nghiệm cơ bản của các hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau :

1) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 + x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$

4.23. Tìm giá trị của λ để vectơ u biểu diễn tuyến tính được qua các vectơ $u_1, ..., u_m$.

1) $\begin{cases} u_1 = (2, 3, 5) \\ u_2 = (3, 7, 8) \\ u_3 = (1, -6, 1) \\ u\ = (7, -2, \lambda) \end{cases}$

2) $\begin{cases} u_1 = (4, 4, 3) \\ u_2 = (7, 2, 1) \\ u_3 = (4, 1, 6) \\ u\ = (5, 9, \lambda) \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_1 = (1, 2, 3) \\ u_2 = (-1, 3, \lambda) \\ u\ = (2, 3, 1) \end{cases}$

4) $\begin{cases} u_1 = (3, 2, 5) \\ u_2 = (2, 4, 7) \\ u_3 = (5, 6, \lambda) \\ u\ = (1, 3, 5) \end{cases}$

4.24. Xét mặt phẳng tọa độ Oxy.

1) Tìm điều kiện cần và đủ để 3 điểm $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ cùng nằm trên đường thẳng.

2) Tìm điều kiện cần và đủ để ba đường thẳng :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$$

cắt nhau tại một điểm.

3) Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm (1, 2), (1, −2), (0, −1). Tìm tâm và bán kính của nó.

4) Chứng minh rằng, đường tròn đi qua ba điểm với tọa độ hữu tỷ thì tâm của nó cũng có tọa độ hữu tỷ.

Đáp số và Hướng dẫn

4.3. *Hướng dẫn* : Quy nạp theo n.

4.4. 1) $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ với n chẵn ; $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ với n lẻ ;

4) $\begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

8) *Hướng dẫn* : Biểu diễn ma trận đã cho dưới dạng E + A, rồi áp dụng bài 4.3.

$$\begin{pmatrix} 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & \dots & C_{n-1}^{1-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

4.5. 1) $M^2 = E$, do đó :

$$M^n = \begin{cases} E \text{ nếu n chẵn} \\ M \text{ nếu n lẻ} \end{cases}$$

2) $M^n = 3^{n-1}M$;

3) Đặt $M = E + A$, ta có $A^3 = 0$;

Áp dụng bài 4.3.

$$M^n = (E + A)^n = E + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

4) $M = M + E - E$, ta có $(M + E)^3 = 0$; áp dụng bài 4.3. Ta có :

$$M^n = ((M + E) - E)^n = \sum_{k=0}^{2} C_n^k (M + E)^k (-1)^{n-k} =$$

$$= (-1)^n \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix} \right]$$

4.6. 2) Theo câu 1) thì A.B = B.A khi và chỉ khi $y = kb$, $z = kc$, $x - t = k(a - d)$. Do đó ma trận B có biểu diễn duy nhất :

$$B = t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} a-d & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

Vì $b \neq 0$ nên tập các ma trận B giao hoán được với A là một không gian con 2 chiều của không gian $M_2[C]$.

4.9. 2) Đặt B = E − A, trong đó $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận lũy linh bậc 3. Áp dụng 1) ta có :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ab - c & -b & 1 \end{pmatrix}$$

4.10. 1) Hàng i và hàng j của tích đổi chỗ.

2) Cộng vào hàng i của tích hàng j nhân với k.

3) Cột i và cột j của tích đổi chỗ.

4) Cộng vào cột i của tích cột j nhân với k.

4.12. 1) $x_i = a_i$, $i = 1, ..., n - 1$;

2) $x_i = i - 1$, $i = 1, ..., n - 1$.

4.13. 1) $(x - 1)(x - 2) \ldots (x - (n - 1))$;

2) $2n + 1$;

3) $x_1(x_2 - a_{12})(x_3 - a_{23}) \ldots (x_n - a_{n-1n})$;

4) $(a^2 - b^2)^n$;

5) $\prod_{i=1}^{n}\left(i(2n + 1 - i) - a^2\right)$;

6) $\dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$.

7) *Hướng dẫn* : Phân tích hàng cuối cùng thành tổng :

$$(x, x, ..., a_n) = (x, x, ..., x) + (0, 0, ..., a_n - x)$$

ta sẽ có : $D_n = x(a_1 - x) \ldots (a_{n-1} - x) + (a_n - x)D_{n-1}$.

Đáp số : $D_n = x(a_1 - x) \ldots (a_n - x)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a_1 - x} + \ldots + \dfrac{1}{a_n - x}\right)$.

8) Khai triển theo cột cuối cùng ta có :

$$D_n = x_n D_{n-1} + a_n y_1 y_2 \dots y_n.$$

Đáp số : $D_n = a_n y_1 \dots y_n + a_{n-1} y_1 \dots y_{n-1} x_n + \dots + a_o x_n \dots x_1$.

9) $\prod_{i=1}^{n}(x_i - a_i) + \sum_{j=1}^{n} a_j \prod_{i \neq j}(x_i - a_j)$.

10) Nhân hàng đầu với $-x$, rồi lần lượt cộng vào các hàng khác, sau đó khai triển theo cột cuối ta được công thức truy hồi.

Đáp số : $D_n = (-1)^{n-1}(n-1)\, x^{n-2}$.

11) Xét định thức Vandermonde cấp 5 :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & x^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & x^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & x^4 \end{vmatrix}$$

Nếu khai triển định thức này theo cột cuối cùng thì hệ số của x^3 là $-D$, D là định thức cần tính. Mặt khác tính định thức trên theo công thức của định thức Vandermonde ; so sánh hệ số của x^3 ta có :

$$D = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \prod_{i>k}(a_i - a_k).$$

12) *Hướng dẫn* : Áp dụng công thức $(\det A)^2 = \det A^2$.

Đáp số : $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$.

13) *Hướng dẫn* : Sử dụng công thức $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ biến đổi các phần tử của ma trận. Ta có :

$$D_n = D_{n-1} = \dots = D_1 = 1.$$

14) *Hướng dẫn* : Đổi chỗ cột k với cột $n - k + 1$, $k = 1, 2, \dots$ đưa định thức về dạng Vandermonde.

Đáp số : $\prod_{i<k}(\cos\varphi_i - \cos\varphi_k)$.

4.14. *Hướng dẫn* :

a) Nếu các ma trận A, C khả nghịch ta có :

– Nghiệm của phương trình $AX = B$ là $X = A^{-1}B$.

– Nghiệm của phương trình $XA = B$ là $X = BA^{-1}$.

– Nghiệm của phương trình $AXC = B$ là $X = A^{-1}BC^{-1}$.

b) Tổng quát : Để tìm nghiệm của phương trình ma trận

$$(a_{ij})_{m\times p}(x_{ij})_{p\times n} = (b_{ij})_{m\times n}$$

ta giải n hệ phương trình tuyến tính :

$$\sum_{k=1}^{p} a_{ik}x_{kj} = b_{ij}\ ,\ i = 1, ..., m\ ;\ j = 1, ..., n.$$

Đáp số :

1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 7-3c_1 & 5-3c_2 & 7-3c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 5c_1-9 & 5c_2-3 & 5c_3-7 \end{pmatrix}$

(c_1, c_2, c_3 là các tham số)

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$

4.15. 1) Đổi chỗ cột i và cột j.

2) Nhân cột i với k^{-1}.

3) Trừ cột i cho cột j nhân với k.

4) Phép biến đổi các cột có kết quả tương tự (thay từ cột bởi từ hàng).

4.17. 1) Số chiều bằng 3, một cơ sở chẳng hạn $\{u_1, u_2, u_4\}$.

2) Số chiều bằng 3, một cơ sở chẳng hạn $\{v_1, v_2, v_5\}$.

4.18. 1) $r(A) = 2$ nếu $\lambda = 0$; $r(A) = 3$ với $\lambda \neq 0$.

2) $r(B) = 2$ nếu $\lambda = 3$; $r(B) = 3$ nếu $\lambda \neq 3$.

4.19. 1) $\alpha = (-8, 3 + x_4, 6 + 2x_4, x_4)$.

2) Vô nghiệm.

4.20. 1) Chẳng hạn dùng phương pháp tính định thức :

$$D = \det A = (a - \lambda)^3 (\lambda + 3).$$

– Nếu $\lambda \neq 1$ và $\lambda \neq 3$, hệ có duy nhất nghiệm $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, trong đó :

$$\alpha_1 = \frac{\lambda^2 + 2\lambda + 2}{\lambda + 3}; \qquad \alpha_2 = \frac{\lambda^2 + \lambda - 1}{\lambda + 3};$$

$$\alpha_3 = \frac{2\lambda + 1}{\lambda + 3}; \qquad \alpha_4 = \frac{\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1}{\lambda + 3}.$$

– Nếu $\lambda = 1$ ta có : $r(\overline{A}) = r(A) = 1$, hệ có nghiệm :

$$\alpha = (1 - y - z - t, y, t, z), \text{ với } y, t, z \text{ bất kỳ.}$$

– Nếu $\lambda = 1$ ta có : $r(A) = 3$, $r(\overline{A}) = 4$, hệ vô nghiệm.

2) Nếu a, b, c từng đôi một khác nhau, hệ có duy nhất nghiệm :

$$\alpha = \left(\frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}, \frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)}, \frac{(a-d)(b-d)}{(a-c)(b-c)}\right)$$

– Nếu $a = b = c = d$, hệ có nghiệm $\alpha = (1 - y - z, y, z)$ với y, z bất kỳ.

– Nếu $a = b \neq c$:

+ Nếu $d \neq a$ và $d \neq c$ thì hệ vô nghiệm ;

+ Nếu $d = a \neq 0$ hệ có nghiệm $\alpha = (x, 1 - x, 0)$ còn $d = a = 0$ hệ vô nghiệm ;

+ Nếu $d = c$ hệ có nghiệm $\alpha = (x, 1 - x, 1)$ với $a \neq 0$; hệ vô nghiệm với $a = 0$.

3) – Nếu $a \neq 0$ và $a \neq -3$, hệ có duy nhất nghiệm :

$$\alpha = (a^3 + 2a^2 - a - 1, 2a - 1, 2 - a^2).$$

– Nếu a = 0, hệ thuần nhất tương ứng có hệ nghiệm cơ bản $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

– Nếu a = –3, hệ thuần nhất tương ứng có hệ nghiệm cơ bản $\{(1, 1, 1)\}$.

4.21. 1) $f(x) = x^2 - 5x + 3$.

2) $g(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7$.

4.22. 1) Hệ có nghiệm tổng quát :

$$\alpha = \left(x_1, x_2, x_3, \frac{-9x_1 + 3x_2 - 10x_3}{11}, \frac{3x_1 + x_2 + 4x_3}{11}\right)$$

Một hệ nghiệm cơ bản của hệ, chẳng hạn :

$$\left\{\left(1, 0, 0, \frac{-9}{11}, \frac{-3}{11}\right), \left(0, 1, 0, \frac{3}{11}, \frac{1}{11}\right), \left(0, 0, 1, \frac{-10}{11}, \frac{4}{11}\right)\right\}$$

2) Hệ chỉ có một nghiệm tầm thường (0, 0, 0, 0, 0, 0).

4.23. 1) $\lambda = 15$; 2) λ tùy ý ;

3) $\lambda = 22$; 4) $\lambda \neq 12$.

4.24. 1) $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

Hướng dẫn : Ba điểm $M(x_i, y_i)$, i = 1, 2, 3 nằm trên một đường thẳng $ax + by + c = 0$ khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $ax_i + by_i + c = 0$, i = 1, 2, 3 có nghiệm không tầm thường.

2) $r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = 2.$

Hướng dẫn : Một họ đường thẳng cắt nhau tại một điểm khi và chỉ khi hệ phương trình của các đường thẳng đó có duy nhất nghiệm.

3) $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$; $O(2, 0)$; $r = \sqrt{5}$.

4) *Hướng dẫn* :

Xét ba điểm có tọa độ hữu tỷ $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$. Hãy chứng tỏ các đường trung trực của các đoạn thẳng M_iM_3, $i = 1, 2$ có phương trình $a_ix + b_iy + c_i = 0$, $i = 1, 2$ với a_i, b_i, c_i hữu tỷ. Do đó tọa độ của tâm đường tròn là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính có hệ số hữu tỷ. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Chương V

PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH

5.1. ĐỊNH NGHĨA ÁNH XẠ TUYẾN TÍNH

5.1.1. Định nghĩa

Giả sử V, V' là các K – không gian vectơ, ánh xạ $f : V \to V'$ được gọi là *ánh xạ tuyến tính* (hay *K – đồng cấu*) của không gian vectơ V vào không gian vectơ V' nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn đối với mọi vectơ x, y thuộc V và mọi số $\alpha \in K$:

$$\text{a) } f(x + y) = f(x) + f(y) ; \tag{5.1}$$

$$\text{b) } f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Từ điều kiện b) ta có :

$$f(\theta) = f(0\theta) = 0f(\theta) = \theta.$$

Vậy, các ánh xạ tuyến tính chuyển vectơ không thành vectơ không.

Kết hợp các điều kiện a) và b) ta có : Ánh xạ $f : V \to V'$ là tuyến tính khi và chỉ khi :

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \text{ với } \forall x, y \in V ; \forall \alpha, \beta \in K.$$

Một cách tổng quát bằng quy nạp ta có :

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(x_i) \tag{5.2}$$

với mọi $x_i \in V$, $\alpha_i \in K$, i = 1, ..., m.

Nếu ánh xạ tuyến tính f là một đơn ánh thì gọi là *đơn cấu*.

Nếu ánh xạ tuyến tính f là một toàn ánh thì gọi là *toàn cấu*.

Một ánh xạ tuyến tính vừa là đơn cấu vừa là toàn cấu thì gọi là *đẳng cấu*.

Khi có một đẳng cấu $f : V \to V'$ thì ta nói hai không gian vectơ V và V' đẳng cấu với nhau và ký hiệu là $V \cong V'$.

Hệ thức (5.2) chứng tỏ ánh xạ tuyến tính chuyển một hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính thành hệ vectơ phụ thuộc tuyến tính.

Mệnh đề 5.1 : Tích các ánh xạ tuyến tính là một ánh xạ tuyến tính.

Chứng minh : Giả sử V, E và F là các K – không gian vectơ ; $f : V \to E$, $g : E \to F$ là một ánh xạ tuyến tính. Theo định nghĩa ánh xạ tích thì $g_\circ f(x) = g(f(x))$, với mọi $x \in V$. Do đó, đối với mọi $x, y \in V$, mọi $\alpha \in K$ ta có :

$$\begin{aligned} g_\circ f(x+y) &= g(f(x+y)) = g(f(x) + f(y)) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) = g_\circ f(x) + g_\circ f(y) ; \\ g_\circ f(\alpha x) &= g(f(\alpha x)) = g(\alpha f(x)) = \alpha g(f(x)). \\ &= \alpha g_\circ f(x). \end{aligned}$$

Vậy các điều kiện (5.1) được thỏa mãn, $g_\circ f$ là một ánh xạ tuyến tính.■

Vì tích các song ánh là một song ánh, do đó tích các đẳng cấu là một đẳng cấu. Vậy ta có : Nếu $V \cong V'$ và $V' \cong V''$ thì $V \cong V''$.

Định lý sau đây chỉ ra rằng, một ánh xạ tuyến tính hoàn toàn xác định nếu biết giá trị của nó tại các vectơ thuộc một cơ sở.

Định lý 5.1 : Giả sử V, V' là các K – không gian vectơ, hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở của không gian V và hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ là n vectơ bất kỳ của không gian V'. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $f : V \to V'$ sao cho $f(u_i) = v_i$, $i = 1, ..., n$.

Chứng minh : Xét ánh xạ $f : V \to V'$ xác định như sau : Vì mỗi vectơ $x \in V$ có biểu diễn tuyến tính duy nhất $x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$, đặt :

$$f(x) = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n. \tag{5.3}$$

Ánh xạ f là một ánh xạ tuyến tính. Thật vậy, giả sử $x, y \in V$, $\alpha \in K$. Khi đó các vectơ x, y có các biểu diễn duy nhất :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i.$$

Ta có :

$$\alpha x = \sum_{i=1}^{n}(\alpha\alpha_i)u_i \ ;$$

$$x + y = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)u_i \ .$$

Theo (5.3) ta có :

$$f(x + y) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i + \beta_i)v_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_i v_i$$

$$= f(x) + f(y) \ ;$$

$$f(\alpha x) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha\alpha_i)v_i = \alpha\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i$$

$$= \alpha f(x).$$

Các điều kiện (5.1) được thỏa mãn.

Vậy, ánh xạ f là một ánh xạ tuyến tính từ không gian V vào không gian V'.

Giả sử g là một ánh xạ tuyến tính từ V vào V' thỏa mãn điều kiện : $g(u_i) = v_i$, $i = 1, ..., n$. Khi đó đối với mọi vectơ $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i$ ta có :

$$g(x) = g\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i g(u_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i = f(x).$$

Vậy g = f. Định lý được chứng minh. ■

Bằng phương pháp chứng minh tương tự, ta thấy Định lý 5.1 vẫn đúng đối với trường hợp V là K – không gian vectơ vô hạn chiều.

Hệ quả 5.1 : Hai không gian vectơ hữu hạn chiều có cùng số chiều thì đẳng cấu. Vậy, mỗi không gian n chiều trên trường K đẳng cấu với không gian K^n.

Chứng minh : Giả sử dimV = dimV' = n. Chọn hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở của không gian vectơ V, hệ $\{v_1, ..., v_n\}$ là một cơ sở của không gian vectơ V'. Khi đó dễ dàng chứng minh được rằng, ánh xạ tuyến tính φ từ V vào V' xác định bởi : $\varphi(u_i) = v_i$, $i = 1, ..., n$ là một đẳng cấu.■

5.1.2. Các ví dụ về ánh xạ tuyến tính

1. Giả sử V, V' là các K – không gian vectơ. Dễ dàng chứng tỏ được rằng :

– Ánh xạ O : $V \to V'$, xác định bởi :

$$O(x) = \theta', \text{ đối với mọi vectơ } x \in V$$

là một ánh xạ tuyến tính của không gian V vào không gian V'. Ánh xạ tuyến tính đó gọi là *ánh xạ không* hay *ánh xạ tầm thường*.

– Ánh xạ đồng nhất $i_V : V \to V$ xác định bởi : $i_V(x) = x$, đối với mọi $x \in V$, là một đẳng cấu.

– Giả sử F là một không gian con của không gian vectơ V. Khi đó ánh xạ nhúng $i_F : F \to V$ xác định bởi $i_F(x) = x$, đối với mọi vectơ $x \in F$, là một đơn cấu của không gian vectơ F vào không gian vectơ V.

2. Xét ánh xạ ∂ từ không gian $R_n[x]$ các đa thức hệ số thực có bậc < n vào không gian $R_{n-1}[x]$ các đa thức hệ số thực có bậc < n – 1 xác định như sau :

Với mọi $f(x) \in R_n[x]$:

$$\partial(f(x)) = f'(x).$$

Theo tính chất của đạo hàm ta có :

$$\partial(f(x) + g(x)) = (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$
$$= \partial(f(x)) + \partial(g(x)) ;$$

và
$$\partial(\alpha f(x)) = (\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$$
$$= \alpha\partial(f(x))$$

đối với mọi đa thức $f(x), g(x) \in R_n[x]$ và với mọi $\alpha \in K$.

Vậy ánh xạ ∂ thỏa mãn các điều kiện (5.1). Do đó ∂ là một ánh xạ tuyến tính từ không gian $R_n[x]$ vào không gian $R_{n-1}[x]$.

3. V là một K – không gian vectơ. Giả sử rằng : $V = L_1 \oplus L_2$. Khi đó mỗi vectơ $x \in V$ có biểu diễn duy nhất :

$$x = x_1 + x_2 \ ; \ x_i \in L_i, \ i = 1, 2.$$

Xét ánh xạ chiếu $p_i : V \to L_i$; $i = 1, 2$, $p_i(x) = x_i$. Dễ thấy rằng, p_i là một toàn cấu từ không gian vectơ V vào không gian vectơ L_i. Toàn cấu p_i gọi là *phép chiếu lên không gian L_i theo phương song song với L_j.*

4. Ta biết rằng, trường số phức $\mathbb{C}$ là một không gian vectơ trên trường số thực $\mathbb{R}$. Xét ánh xạ $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ xác định bởi :

$$\varphi(z) = \overline{z}, \text{ với mọi } z \in \mathbb{C}.$$

Theo tính chất của liên hợp số phức ta có :

$$\varphi(z + z') = \overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z}' = \varphi(z) + \varphi(z');$$

$$\varphi(\alpha z) = \overline{\alpha z} = \alpha\overline{z} = \alpha\varphi(z), \text{ với mọi } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Vậy, φ là một ánh xạ tuyến tính. Dễ thấy rằng φ là một song ánh, do đó φ là một đẳng cấu của $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $\mathbb{C}$ vào chính nó.

5.1.3. Ảnh, nhân của ánh xạ tuyến tính

Giả sử $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính.

Ảnh của ánh xạ tuyến tính f là tập :

$$\mathrm{Im}f = \{f(x) : x \in V\}. \tag{5.4}$$

Nhân của ánh xạ tuyến tính f là tập :

$$\mathrm{Ker}f = \{x \in V : f(x) = \theta'\}. \tag{5.5}$$

Mệnh đề 5.2 : Ảnh, nhân của một ánh xạ tuyến tính là các không gian con.

Chứng minh : Giả sử $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính.

a) Rõ ràng $\mathrm{Im}f \neq \varnothing$. Giả sử $x', y' \in \mathrm{Im}f$. Khi đó tồn tại các vectơ $x, y \in V$ sao cho $f(x) = x'$, $f(y) = y'$. Đối mọi $\alpha, \beta \in K$ ta có :

$$\alpha x' + \beta y' = \alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y) \in \mathrm{Im}f.$$

Theo Mệnh đề 3.1, Imf là một không gian con của K – không gian vectơ V'.

b) Vì $f(\theta) = \theta'$ nên $\mathrm{Ker}f \neq \varnothing$. Với mọi vectơ $x, y \in \mathrm{Ker}f$, mọi $\alpha, \beta \in K$ ta có :

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \theta' + \theta' = \theta'.$$

Theo (5.5) thì $\alpha x + \beta y \in$ Kerf.

Vậy, Kerf là một không gian con của không gian V.■

Mệnh đề 5.3 : Giả sử $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính. Điều kiện cần và đủ để ánh xạ f là một đơn cấu và Kerf = $\{\theta\}$.

Chứng minh : Giả sử f là một đơn cấu. Ta có $f(\theta) = \theta'$, do đó vectơ θ là phần tử duy nhất có ảnh là θ'. Vậy Kerf = $\{\theta\}$.

Ngược lại, giả sử rằng Kerf = $\{\theta\}$. Với hai vectơ $x, y \in V$ nếu $f(x) = f(y)$ thì ta có :

$$f(x - y) = f(x) - f(y) = \theta.$$

Vậy $x - y \in$ Kerf = $\{\theta\}$. Do đó $x - y = \theta$, hay $x = y$. Vậy f là một đơn ánh.■

Hệ quả 5.2 : Mỗi đơn cấu chuyển một hệ vectơ độc lập tuyến tính thành một hệ vectơ độc lập tuyến tính.

Chứng minh : Giả sử $f : V \to V'$ là một đơn cấu và $\{u_1, ..., u_m\}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính của không gian V. Giả sử có tổ hợp tuyến tính $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(u_i) = \theta'$. Vì f là ánh xạ tuyến tính, nên ta có : $f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i\right) = \theta'$. Vậy $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i \in$ Kerf.

Vì f là đơn cấu, theo Mệnh đề 5.3 ta có Kerf = $\{\theta\}$. Do đó $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = \theta$. Vì hệ vectơ $\{u_1, ..., u_m\}$ độc lập tuyến tính nên $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$.

Do đó, hệ vectơ $\{f(u_1), ..., f(u_m)\}$ cũng độc lập tuyến tính.

Định lý 5.2 : Giả sử $f : V \to V'$ là một ánh xạ tuyến tính và dimV = n. Khi đó ta có :

$$n = \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f. \tag{5.6}$$

Chứng minh : Giả sử dimKerf = $k > 0$ và $\{u_1, ..., u_k\}$ là một cơ sở của không gian Kerf. Đặt : $s = n - k$. Nếu $s > 0$, theo Định lý 3.3 có thể bổ sung thêm s vectơ $v_1, ..., v_s$ sao cho hệ vectơ :

$$\{u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_s\} \quad \text{(a)}$$

là một cơ sở của không gian vectơ V.

Ta sẽ chứng tỏ hệ vectơ :

$$\{f(v_1), ..., f(v_s)\} \quad \text{(b)}$$

là một cơ sở của không gian con Imf.

Thật vậy, với mỗi vectơ x' ∈ Imf sẽ có vectơ x ∈ V sao cho f(x) = x'. Vì (a) là cơ sở của V nên vectơ x có biểu diễn tuyến tính :

$$x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + ... + \beta_s v_s.$$

Ta có :

$$x' = f(x) = \alpha_1 f(u_1) + ... + \alpha_k f(u_k) + \beta_1 f(v_1) + ... + \beta_s f(v_s)$$
$$= \beta_1 f(v_1) + ... + \beta_s f(v_s).$$

Vậy, hệ vectơ (b) là một hệ sinh của không gian con Imf.

Giả sử có tổ hợp tuyến tính tầm thường :

$$\lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_s f(v_s) = \theta'.$$

Ta có :

$$f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_s v_s) = \theta'.$$

Vậy, $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_s v_s \in$ Kerf. Vectơ này có thể biểu diễn tuyến tính qua cơ sở $\{u_1, ..., u_k\}$ của không gian Kerf :

$$\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_s v_s = \mu_1 u_1 + ... + \mu_k u_k.$$

Ta có :

$$-\mu_1 u_1 - ... - \mu_k u_k + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_s v_s = \theta.$$

Vì hệ (a) độc lập tuyến tính nên ta có :

$$\mu_1 = ... = \mu_k = \lambda_1 = ... = \lambda_s = 0.$$

Vậy, hệ (b) là một hệ độc lập tuyến tính và là một cơ sở của không gian Imf.

Ta có :

$$n = s + k = \dim \mathrm{Imf} + \dim \mathrm{Kerf}.$$

Nếu dimKerf = 0 thì dimImf = s = n. Đẳng thức (5.6) vẫn đúng.■

5.2. PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH VÀ MA TRẬN

Mỗi ánh xạ tuyến tính từ K – không gian vectơ V vào chính nó gọi là *phép biến đổi tuyến tính* (hay *toán tử tuyến tính*, hay *K – tự đồng cấu*) của không gian V. Mỗi phép biến đổi tuyến tính của không gian vectơ V mà đẳng cấu thì gọi là *một tự đẳng cấu* của không gian V.

Hạng, số khuyết của phép biến đổi tuyến tính :

Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính của K – không gian vectơ n chiều V. Khi đó $\dim \mathrm{Im}\varphi$ gọi là *hạng* của phép biến đổi φ, ký hiệu là $r(\varphi)$; $\dim \mathrm{Ker}\varphi$ gọi là *số khuyết* của φ. Theo Định lý 5.2. Ta có :

$$n = r(\varphi) + \text{số khuyết } \varphi. \qquad (5.7)$$

5.2.1. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính

Xét phép biến đổi tuyến tính φ của K – không gian vectơ n chiều V. Trong không gian V ta chọn cơ sở :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad (I)$$

Khi đó đối với mỗi vectơ $\varphi(u_j)$ có duy nhất biểu diễn :

$$\varphi(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_i \text{ , } j = 1, ..., n \qquad (5.8)$$

Định nghĩa : Ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ được gọi là ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ đối với cơ sở (I).

Theo Định lý 5.1 thì phép biến đổi tuyến tính φ hoàn toàn xác định nếu biết ma trận của nó đối với một cơ sở nào đó. Vậy, ánh xạ tương ứng mỗi phép biến đổi tuyến tính trong không gian vectơ V với ma trận của nó đối với cơ sở (I) là một song ánh.

Sử dụng ký hiệu ma trận ta có :

$$(\varphi(u_1) \ \ ... \ \ \varphi(u_n)) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}u_i \ \ ... \ \ \sum_{i=1}^{n} a_{in}u_i \right) = (u_1 \ \ ... \ \ u_n)A.$$

Do đó n đẳng thức (5.8) có thể viết dưới dạng một đẳng thức ma trận :

$$(\varphi(u_1) \ \ ... \ \ \varphi(u_n)) = (u_1 \ \ ... \ \ u_n)A. \qquad (5.9)$$

Nếu biết ma trận A của phép biến đổi tuyến tính φ đối với cơ sở (I), khi đó với mỗi vectơ $x \in V$ cho trước ta luôn tính được tọa độ của vectơ $\varphi(x)$ đối với cơ sở (I). Thật vậy, giả sử rằng :

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \ ; \tag{a}$$

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \beta_i u_i \ . \tag{b}$$

Hệ thức (b) có thể viết dưới dạng ma trận :

$$\varphi(x) = (u_1 \ \ \dots \ \ u_n)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \tag{c}$$

Mặt khác, vì φ là một ánh xạ tuyến tính nên theo (a) ta có :

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi(u_j) = (\varphi(u_1) \ \ \dots \ \ \varphi(u_n))\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Theo công thức (5.9) ta có :

$$\varphi(x) = (u_1 \ \ \dots \ \ u_n)A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{d}$$

Từ (c) và (d) ta có :

$$(u_1 \ \ \dots \ \ u_n)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = (u_1 \ \ \dots \ \ u_n)A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{e}$$

Vì hệ vectơ $\{u_1, \dots, u_n\}$ độc lập tuyến tính, từ hệ thức (e) ta có :

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

Từ đẳng thức ma trận (5.10) ta có :

$$\beta_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik} \; ; \; i = 1, ..., n.$$

Ví dụ : Phép biến đổi tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cho bởi :

$$\varphi(e_1) = (1, 0, -2) ;$$

$$\varphi(e_2) = (2, 1, 0) ;$$

$$\varphi(e_3) = (0, -1, 1).$$

Với $x = (2, -1, 1)$, tìm vectơ $\varphi(x)$.

Ma trận của φ đối cơ sở chính tắc là :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Giả sử $\varphi(x) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, theo công thức (5.10) ta có :

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vậy ta có : $\varphi(x) = (0, -2, -3)$.

Từ Mệnh đề 5.1 suy ra rằng, tích hai phép biến đổi tuyến tính trong K – không gian vectơ là một phép biến đổi tuyến tính. Định lý sau đây khẳng định rằng, ma trận của phép biến đổi tích đó bằng tích các ma trận của các ánh xạ nhân tử.

Định lý 5.3 : Giả φ, ψ là các phép biến đổi tuyến tính trong K – không gian vectơ V với cơ sở :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad \text{(I)}$$

Nếu $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận của φ đối với cơ sở (I), $B = (b_{ij})_{n \times n}$ là ma trận của ψ đối với cơ sở (I) thì A.B là ma trận của $\varphi \circ \psi$ đối với cơ sở (I).

Chứng minh :

Theo công thức (5.8) ta có :

$$\psi(u_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} u_i \, , \; j = 1, ..., n ;$$

$$\varphi(u_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}u_k, \quad i = 1, ..., n;$$

$$\varphi \circ \psi(u_j) = \varphi(\psi(u_j)) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}u_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\varphi(u_i) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}u_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ij}\right)u_k. \tag{a}$$

Giả sử $C = (c_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của phép biến đổi tích $\varphi \circ \psi$ đối với cơ sở (I). Theo công thức (5.8) ta có :

$$\varphi \circ \psi(u_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj}u_k. \tag{b}$$

Từ các hệ thức (a), (b) ta có :

$$\sum_{k=1}^{n} c_{kj}u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ij}\right)u_k.$$

Vì hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ij}, \text{ với } k, j = 1, ..., n.$$

Theo công thức tính các phần tử của ma trận tích (4.3) ta có $C = A.B$. Định lý được chứng minh.■

Định lý 5.4 : Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính của K – không gian vectơ n chiều V. Khi đó hạng của phép biến đổi tuyến tính φ bằng hạng của ma trận của nó đối với một cơ sở nào đó.

Chứng minh : Trong không gian V ta chọn cơ sở bất kỳ :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad \text{(I)}$$

Giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ đối với cơ sở (I). Ta sẽ chứng tỏ $r(\varphi) = r(A)$. Với mỗi vectơ $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ ta có :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(u_i).$$

Vậy thì $\qquad \operatorname{Im}\varphi = \mathscr{L}(\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)).$

Theo Mệnh đề 3.8 thì $\dim \operatorname{Im}\varphi$ bằng hạng của hệ vectơ :

$$\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}.$$

Theo chứng minh của Hệ quả 5.1 ta có đẳng cấu $f : V \to K^n$ xác định bởi $f(u_i) = e_i$, $i = 1, ..., n$; trong đó $\{e_1, ..., e_n\}$ là cơ sở chính tắc của không gian vectơ K^n. Theo hệ thức (5.8) ta có :

$$\varphi(u_j) = a_{1j}u_1 + ... + a_{nj}u_n.$$

Vậy thì
$$\begin{aligned} f(\varphi(u_j)) &= a_{1j}f(u_1) + ... + a_{nj}f(u_n) \\ &= a_{1j}e_1 + ... + a_{nj}e_n \\ &= (a_{1j}, ..., a_{nj}). \end{aligned}$$

Vectơ $A^j = (a_{1j} \quad ... \quad a_{nj})$ là vectơ cột thứ j của ma trận A. Vì đẳng cấu $f : V \to K^n$ không làm thay đổi hạng của hệ vectơ nên ta có :

$$r(\varphi) = \text{hạng}\,\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\} = \text{hạng}\,\{A^1, ..., A^n\} = r(A).$$

Định lý được chứng minh.■

Ví dụ : Tìm hạng và số khuyết của phép biến đổi tuyến tính $\partial : R_4[x] \to R_4[x]$ được cho bởi $\partial(f(x)) = f'(x)$.

Xét cơ sở $S = \{1, x, x^2, x^3\}$. Ta có $\partial(1) = 0$; $\partial(x) = 1$; $\partial(x^2) = 2x$; $\partial(x^3) = 3x^2$. Ma trận của ∂ đối với cơ sở S là :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ta có : $r(\partial) = r(A) = 3$; số khuyết của $\partial = 4 - 3 = 1$.

5.2.2. Các điều kiện tương đương

Định lý 5.5 : Giả sử rằng :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad \text{(I)}$$

là một cơ sở của K – không gian vectơ V, φ là một phép biến đổi tuyến tính của không gian V có ma trận đối với cơ sở (I) là A. Khi đó các điều khẳng định sau là tương đương :

1) $\mathrm{Ker}\varphi = \{\theta\}$;

2) φ là một đơn cấu ;

3) Hệ vectơ $\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}$ độc lập tuyến tính ;

4) φ là một toàn cấu ;

5) Hạng của $\varphi = n$;

6) φ là một tự đẳng cấu ;

7) Ma trận A khả nghịch.

Phép biến đổi tuyến tính φ thỏa mãn một trong các điều kiện tương đương trên được gọi là *phép biến đổi không suy biến.*

Chứng minh :

1) $\Rightarrow$ 2) : Theo Mệnh đề 5.3.

2) $\Rightarrow$ 3) : Theo Hệ quả 5.2.

3) $\Rightarrow$ 4) : Vì hệ n vectơ độc lập tuyến tính $\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}$ là một cơ sở của không gian V, do đó :

$$\mathrm{Im}\varphi = \mathscr{L}(\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}) = V.$$

4) $\Rightarrow$ 5) : Vì hạng $\varphi = \dim\mathrm{Im}\varphi = \dim V = n$.

5) $\Rightarrow$ 6) : Vì $\dim\mathrm{Im}\varphi = n = \dim V$ nên $\mathrm{Im}\varphi = V$, φ là một toàn cấu. Theo công thức (5.6) ta có : $\dim\mathrm{Ker}\varphi = 0$. Vậy $\mathrm{Ker}\varphi = \{\theta\}$. Theo Mệnh đề 5.3, φ là một đơn cấu. Do đó φ là một tự đẳng cấu.

6) $\Rightarrow$ 7) : φ có ánh xạ ngược φ^{-1} cũng là một phép biến đổi tuyến tính. Ta có : $\varphi\circ\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\circ\varphi = i_V$. Phép biến đổi đồng nhất i_V có ma trận đối với cơ sở (I) là ma trận đơn vị E. Giả sử B là ma trận của phép biến đổi φ^{-1} đối với cơ sở (I). Theo Định lý 5.3 ta có :

$$A.B = E = B.A.$$

Vậy, ma trận A khả nghịch và $B = A^{-1}$.

7) $\Rightarrow$ 1) : Giả sử rằng : $x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n \in \mathrm{Ker}\varphi$. Khi đó ta có :

$$\varphi(x) = \theta = 0u_1 + ... + 0u_n.$$

Theo công thức (5.10) ta có :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Nhân bên trái hai vế đẳng thức trên với ma trận A^{-1} ta có :

$$A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^{-1}A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Suy ra : $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$.

Vậy $x = \theta$ và $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{\theta\}$.■

5.3. PHÉP CHUYỂN CƠ SỞ

5.3.1. Ma trận chuyển

Giả sử rằng :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad \text{(I)}$$

$$\{v_1, ..., v_n\} \qquad \text{(II)}$$

là hai cơ sở của K – không gian vectơ V. Theo Định lý 5.5 thì phép biến đổi tuyến tính φ xác định bởi :

$$\varphi(u_j) = v_j, \quad j = 1, ..., n$$

là một tự đẳng cấu, có ma trận $T = (t_{ij})_{n\times n}$ đối với cơ sở (I) là một ma trận khả nghịch.

Theo hệ thức (5.9) ta có :

$$(v_1 \ \ ... \ \ v_n) = (u_1 \ \ ... \ \ u_n)T. \qquad (5.11)$$

Từ (5.11) ta có :

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} t_{kj} u_k .$$

Ma trận T được gọi là *ma trận chuyển từ cơ sở (I) sang cơ sở (II).*

Nhân bên phải hai vế của hệ thức (5.11) với T^{-1} ta có :

$$(u_1 \quad \ldots \quad u_n) = (v_1 \quad \ldots \quad v_n)T^{-1} \tag{5.12}$$

Từ hệ thức (5.12) suy ra rằng : *Nếu ma trận T là ma trận chuyển từ cơ sở (I) sang cơ sở (II) thì ma trận nghịch đảo T^{-1} là ma trận chuyển từ cơ sở (II) sang cơ sở (I).*

5.3.2. Công thức biến đổi tọa độ

Giả sử vectơ $x \in V$ có tọa độ đối với cơ sở (I) là $x_1, \ldots, x_n$; và có tọa độ đối với cơ sở (II) là $x'_1, \ldots, x'_n$. Khi đó ta có :

$$x = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n = (u_1 \quad \ldots \quad u_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{a}$$

Mặt khác, theo hệ thức (5.11) ta có :

$$x = x'_1v_1 + \ldots + x'_nv_n = (v_1 \quad \ldots \quad v_n)\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

$$x = (u_1 \quad \ldots \quad u_n)\, T\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{b}$$

So sánh vế phải của (a) và (b), vì hệ vectơ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

Công thức (5.13) chỉ ra mối quan hệ giữa tọa độ của vectơ x đối với hai cơ sở khác nhau và được gọi là *công thức biến đổi tọa độ* ứng với phép chuyển cơ sở (I) sang cơ sở (II) cho bởi (5.11).

Ngược lại, tương ứng với phép biến đổi tọa độ (đổi biến) cho bởi (5.13) với ma trận T không suy biến thì ta có phép chuyển cơ sở (5.11).

5.3.3. Ma trận đồng dạng

Định nghĩa : Hai ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ và $B = (b_{ij})_{n\times n}$ trên trường số K gọi là *đồng dạng* nếu tồn tại một ma trận khả nghịch S sao cho :

$$A = S^{-1}.B.S. \tag{5.14}$$

Định lý 5.6 : Hai ma trận của cùng một phép biến đổi tuyến tính trong không gian vectơ hữu hạn chiều đối với hai cơ sở khác nhau thì đồng dạng.

Chứng minh : Giả sử rằng :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad \text{(I)}$$

$$\{v_1, ..., v_n\} \qquad \text{(II)}$$

là hai cơ sở của K – không gian vectơ V.

Phép biến đổi tuyến tính φ có ma trận đối với cơ sở (I) là $A = (a_{ij})_{n\times n}$; có ma trận đối với cơ sở (II) là $B = (b_{ij})_{n\times n}$. Gọi $T = (t_{ij})_{n\times n}$ là ma trận chuyển từ cơ sở (I) sang cơ sở (II). Theo (5.11) thì :

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}u_k\,,\; j = 1, ..., n.$$

Suy ra :

$$\varphi(v_j) = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}\varphi(u_k)\,,\; j = 1, ..., n.$$

Do đó, ta có đẳng thức ma trận :

$$(\varphi(v_1)\ \ ...\ \ \varphi(v_n)) = (\varphi(u_1)\ \ ...\ \ \varphi(u_n))T. \tag{a}$$

Theo công thức (5.9) ta có :

$$(\varphi(u_1)\ \ ...\ \ \varphi(u_n)) = (u_1\ \ ...\ \ u_n)A\ ; \tag{b}$$

$$(\varphi(v_1)\ \ ...\ \ \varphi(v_n)) = (v_1\ \ ...\ \ v_n)B. \tag{c}$$

Từ (a), (b) và (5.12) ta có :

$$(\varphi(v_1)\ \ ...\ \ \varphi(v_n)) = (v_1\ ...\ v_n)T^{-1}.A.T. \tag{d}$$

So sánh vế phải của (c) và (d), vì hệ vectơ $\{v_1, ..., v_n\}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

$$B = T^{-1}.A.T. \tag{5.15}$$

Định lý được chứng minh.■

5.4. GIÁ TRỊ RIÊNG VÀ VECTƠ RIÊNG. MA TRẬN CHÉO HÓA ĐƯỢC

5.4.1. Giá trị riêng và vectơ riêng

Định nghĩa : Phần tử λ của trường K được gọi là *giá trị riêng* của phép biến đổi tuyến tính φ trong K – không gian vectơ V nếu trong không gian V có vectơ $u \neq \theta$ sao cho hệ thức sau được thỏa mãn :

$$\varphi(u) = \lambda u. \tag{5.16}$$

Khi đó, vectơ u được gọi là *vectơ riêng* của phép biến đổi tuyến tính φ ứng với giá trị riêng λ.

Ví dụ : Xét $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $\mathbf{C}^{\infty}(a, b)$ các hàm số xác định trên khoảng (a, b) và có đạo hàm vô hạn lần ; và phép biến đổi tuyến tính $\partial : \mathbf{C}^{\infty}(a, b) \to \mathbf{C}^{\infty}(a, b)$ xác định bởi : $\partial(f(x)) = f'(x)$. Khi đó hàm số $f(x) = e^{2x}$ là một vectơ riêng của ∂ ứng với giá trị riêng 2 vì : $\partial(f(x)) = 2e^{2x} = 2f(x)$.

Định lý 5.7 : Các vectơ riêng của cùng một phép biến đổi tuyến tính ứng với các giá trị riêng khác nhau thì độc lập tuyến tính.

Chứng minh : Giả sử $u_1, ..., u_k$ là các vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính φ trong K – không gian vectơ V ứng với các giá trị riêng khác nhau $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Ta cần chứng tỏ hệ $\{u_1, ..., u_k\}$ độc lập tuyến tính. Định lý được chứng minh bằng quy nạp theo k.

– Đối với k = 1, vì $u_1 \neq \theta$ nên hệ $\{u_1\}$ độc lập tuyến tính.

– Đối với k > 1, giả sử định lý đúng đối với k – 1, ta chứng minh định lý đúng đối với k. Giả sử có tổ hợp tuyến tính tầm thường :

$$a_1u_1 + ... + a_ku_k = \theta. \tag{a}$$

Nhân hai vế đẳng thức (a) với λ_k ta có :

$$\lambda_k a_1 u_1 + \dots + \lambda_k a_k u_k = \theta. \tag{b}$$

Tác động φ vào hai vế của (a) ta có :

$$\lambda_1 a_1 u_1 + \dots + \lambda_k a_k u_k = \theta. \tag{c}$$

Trừ từng vế của (b) cho (c) ta có :

$$a_1(\lambda_k - \lambda_1)u_1 + \dots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})u_{k-1} = \theta.$$

Theo giả thiết quy nạp hệ vectơ $\{u_1, \dots, u_{k-1}\}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

$$a_1(\lambda_k - \lambda_1) = \dots = a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) = 0.$$

Vì $\lambda_k \neq \lambda_i$, $i = 1, \dots, k-1$, do đó : $a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$.

Theo (a) ta có : $a_k u_k = \theta$, vì $u_k \neq \theta$ nên $a_k = 0$. Vậy, hệ vectơ riêng $\{u_1, \dots, u_k\}$ độc lập tuyến tính.■

Ở ví dụ trên, trong $\mathbb{R}$ –không gian vectơ $\mathbf{C}^{\infty}(a, b)$ hệ hàm $\{e^x, e^{2x}, \dots, e^{nx}\}$ là một hệ vectơ độc lập tuyến tính. Vì đó là các vectơ riêng ứng với các giá trị riêng khác nhau của phép biến đổi tuyến tính ∂ xác định bởi : $\partial(f(x)) = f'(x)$.

Hệ quả sau đây được suy trực tiếp từ Định lý 5.7.

Hệ quả 5.2 : Nếu phép biến đổi tuyến tính φ trong không gian vectơ n chiều V có n giá trị riêng khác nhau thì trong không gian vectơ V có một cơ sở gồm các vectơ riêng của φ.

Phương pháp tìm giá trị riêng và vectơ riêng :

Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính trong K – không gian vectơ n chiều V và $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của φ đối với cơ sở :

$$\{u_1, \dots, u_n\}. \tag{I}$$

Giả thiết vectơ $u = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ là một vectơ riêng của phép biến đổi φ ứng với giá trị riêng λ. Theo định nghĩa ta có : $u \neq \theta$ và

$$\varphi(u) = \lambda u. \tag{a}$$

Theo hệ thức (5.10) thì từ (a) ta có đẳng thức ma trận :

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda E\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Do đó ta có :

$$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

Vì vectơ riêng $u \neq \theta$ nên tồn tại tọa độ $x_i \neq 0$, do đó vectơ $\alpha = (x_1, ..., x_n) \neq (0, ..., 0)$. Theo Định lý 4.9 thì hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.17) có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi định thức của ma trận của hệ đó bằng 0. Do đó ta có :

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.18}$$

Đa thức đặc trưng :

Xét đa thức biến λ xác định bởi :

$$P(\lambda) = |A - \lambda E|. \tag{5.19}$$

Ta nhận thấy rằng, đa thức $P(\lambda)$ chỉ phụ thuộc vào phép biến đổi tuyến tính φ, không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở của không gian V.

Thật vậy, giả sử B là ma trận của phép biến đổi φ đối với cơ sở :

$$\{v_1, ..., v_n\}. \tag{II}$$

Gọi ma trận T là ma trận chuyển từ cơ sở (I) sang cơ sở (II), theo công thức (5.15) thì $B = T^{-1}.A.T$. Vậy ta có :

$$|B - \lambda E| = |T^{-1}.A.T - \lambda E| = |T^{-1}(A - \lambda E)T|$$

$$= |T^{-1}|\,|A - \lambda E|\,|T| = |A - \lambda E| = P(\lambda).$$

Đa thức $P(\lambda) = |A - \lambda E\}$ gọi là *đa thức đặc trưng* của phép biến đổi tuyến tính φ.

Kết luận :

1) Phần tử $\lambda \in K$ là giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính φ khi và chỉ khi λ là một nghiệm của đa thức đặc trưng của φ xác định bởi (5.19).

2) Vectơ $u \in V$ là vectơ riêng của phép biến đổi φ ứng với giá trị riêng λ khi và chỉ khi các tọa độ của vectơ u đối với cơ sở (I) là một nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.17).

Đa thức $P(\lambda) = |A - \lambda E|$ cũng gọi là đa thức *đặc trưng của ma trận A*, các nghiệm của đa thức này cũng gọi là *giá trị riêng của ma trận A*.

Các nghiệm không tầm thường của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (5.17) gọi là các *vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ*.

Theo chứng minh trên, hai ma trận đồng dạng có cùng một đa thức đặc trưng, do đó có cùng giá trị riêng, vectơ riêng.

Ví dụ : Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi :

$$\varphi(x, y) = (5x + 4y, 8x + 8y).$$

Chọn cơ sở chính tắc : $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$.

Theo giả thiết ta có :

$$\varphi(e_1) = (5, 8), \varphi(e_2) = (4, 9).$$

Vậy đối với cơ sở chính tắc $\{e_1, e_2\}$, phép biến đổi φ có ma trận :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của phép biến đổi φ là :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 14\lambda + 13.$$

Đa thức $\lambda^2 - 14\lambda + 13$ có hai nghiệm $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 13$. Vậy phép biến đổi φ có hai giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 13$.

Vectơ riêng $u = (x, y)$ của phép biến đổi φ ứng với giá trị riêng λ theo (5.17) là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất :

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hay
$$\begin{cases} (5-\lambda)x + 4y = 0 \\ 8x + (9-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

–Với $\lambda = \lambda_1 = 1$ ta có hệ :

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 8x + 8y = 0 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $u = (s_1 - s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Vậy, các vectơ riêng của φ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$ là : $u = (s, -s)$; $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$.

Với $s = 1$ ta có vectơ riêng $u_1 = (1, -1)$ ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$.

– Tương tự với $\lambda = \lambda_2 = 13$ ta có hệ :

$$\begin{cases} -8x + 4y = 0 \\ 8x - 4y = 0 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm $u = (s, 2s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Do đó các vectơ riêng của φ ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 13$ là :

$$u = (s, 2s),\ s \in \mathbb{R},\ s \neq 0.$$

Với $s = 1$ ta có vectơ $u_2 = (1, 2)$ là vectơ riêng ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 13$.

Dễ dàng thử lại : $\varphi(u_1) = u_1$, $\varphi(u_2) = 13u_2$. Các vectơ riêng u_1, u_2 ứng với các giá trị riêng khác nhau nên hệ $\{u_1, u_2\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Đối với cơ sở đó, ma trận của φ có dạng đường chéo :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

5.4.2. Ma trận chéo hóa được

Định nghĩa : Mỗi ma trận đồng dạng với ma trận đường chéo gọi là *ma trận chéo hóa được*.

Vậy, ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là chéo hóa được nếu tồn tại ma trận khả nghịch $T = (t_{ij})_{n\times n}$ sao cho :

$$T^{-1}.A.T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Mệnh đề 5.4 : Ma trận cấp n có n giá trị riêng khác nhau thì chéo hóa được.

Chứng minh : Xét ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ có n giá trị riêng khác nhau $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính trong K – không gian vectơ V và A là ma trận của φ đối với cơ sở :

$$\{u_1, \dots, u_n\} \qquad \text{(I)}$$

Các giá trị riêng của φ là $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Khi đó, theo Hệ quả 5.2 trong không gian V có một cơ sở gồm các vectơ là vectơ riêng của φ :

$$\{v_1, \dots, v_n\}. \qquad \text{(II)}$$

Vì $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, n$; nên đối với cơ sở (II) ma trận B của phép biến đổi φ có dạng đường chéo :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở (I) sang cơ sở (II), theo công thức (5.15) ta có :

$$T^{-1}.A.T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Vậy A là ma trận chéo hóa được.■

Nhận xét : Từ chứng minh Mệnh đề 5.4 suy ra rằng : *Ma trận cấp n chéo hóa được khi và chỉ khi có n vectơ riêng độc lập tuyến tính.*

Ở mục 5.6 sẽ chứng tỏ các ma trận đối xứng thực là chéo hóa được.

5.5. PHÉP BIẾN ĐỔI TRỰC GIAO VÀ MA TRẬN TRỰC GIAO

5.5.1. Phép biến đổi trực giao

Định nghĩa : Giả sử E là không gian vectơ Euclid. Phép biến đổi tuyến tính φ trong không gian E được gọi là *phép biến đổi trực giao* nếu điều kiện sau được thỏa mãn đối với mọi vectơ x, y $\in$ V :

$$(\varphi(x).\varphi(y)) = (x.y) \tag{5.20}$$

Vậy, phép biến đổi trực giao là phép biến đổi tuyến tính bảo toàn tích vô hướng.

Mệnh đề 5.5 : Phép biến đổi tuyến tính φ trong không gian vectơ Euclid E là phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi φ là phép biến đổi bảo toàn độ dài vectơ. Tức là φ thỏa mãn điều kiện sau đối với mọi vectơ x $\in$ E :

$$\|\varphi(x)\| = \|x\|. \tag{5.21}$$

Chứng minh : Giả φ là một phép biến đổi trực giao. Khi đó theo hệ thức (5.20), với x = y ta có :

$$(\varphi(x).\varphi(x)) = (x.x).$$

Do đó :

$$\|\varphi(x)\| = \sqrt{(\varphi(x).\varphi(x))} = \sqrt{(x.x)} = \|x\|.$$

Vậy điều kiện (5.21) được thỏa mãn.

Ngược lại, giả sử phép biến đổi tuyến tính φ thỏa mãn điều kiện (5.21), khi đó đối với mọi vectơ x, y thuộc E ta có :

$$(\varphi(x + y).\varphi(x + y)) = ((x + y).(x + y)). \tag{a}$$

Khai triển vế trái (a) ta có :

$$(\varphi(x + y).\varphi(x + y)) = (\varphi(x).\varphi(x)) + 2(\varphi(x).\varphi(y)) + (\varphi(y).\varphi(y))$$
$$= (x.x) + 2(\varphi(x).\varphi(y)) + (y.y). \tag{b}$$

Khai triển vế phải (a) ta có :

$$((x + y).(x + y)) = (x.x) + 2(x.y) + (y.y). \qquad (c)$$

So sánh vế phải của (b) và (c) ta có :

$$(\varphi(x).\varphi(y)) = (x.y).$$

Vậy điều kiện (5.20) được thỏa mãn, φ là phép biến đổi trực giao.■

Hệ quả 5.3 : Mỗi phép biến đổi trực giao trong không gian vectơ Euclid hữu hạn chiều là tự đẳng cấu.

Chứng minh : Giả sử φ là phép biến đổi trực giao trong không gian vectơ Euclid E hữu hạn chiều. Khi đó theo điều kiện (5.21) ta có $\varphi(x) = \theta$ khi và chỉ khi $x = \theta$, do đó $\text{Ker}\varphi = \{\theta\}$. Theo Định lý 5.5 thì φ là một tự đẳng cấu.■

Mệnh đề 5.6 : Phép biến đổi tuyến tính φ trong không gian vectơ Euclid n chiều là phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi φ chuyển cơ sở trực chuẩn thành cơ sở trực chuẩn.

Chứng minh : Giả sử hệ vectơ $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở trực giao của không gian vectơ Euclid E. Từ điều kiện (5.20) ta có :

$$(\varphi(u_i).\varphi(u_j)) = (u_i.u_j) = \delta_{ij}.$$

Theo (3.15) hệ vectơ $\{\varphi(u_1, ..., \varphi(u_n)\}$ là một cơ sở trực chuẩn.

Ngược lại, giả sử phép biến đổi tuyến tính φ chuyển cơ sở trực chuẩn $\{u_1, ..., u_n\}$ thành cơ sở trực chuẩn $\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}$. Khi đó đối với mọi vectơ $x, y \in E$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$ ta có :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(u_i),\ \varphi(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(u_j).$$

Theo Mệnh đề 3.11 thì đối với cơ sở trực chuẩn $\{u_1, ..., u_n\}$ ta có :

$$(x.y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \qquad (a)$$

Đối với cơ sở trực chuẩn $\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}$ ta có :

$$(\varphi(x).\varphi(y)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \qquad (b)$$

So sánh các đẳng thức (a) và (b) ta có :

$$(\varphi(x).\varphi(y)) = (x.y).$$

Điều kiện (5.20) được thỏa mãn, φ là phép biến đổi trực giao.

Từ Mệnh đề 5.6, trực tiếp suy ra hệ quả sau đây :

Hệ quả 5.4 :

a) Tích các phép biến đổi trực giao là một phép biến đổi trực giao.

b) Phép biến đổi ngược của một phép biến đổi trực giao là một phép biến đổi trực giao.

5.5.2. Ma trận trực giao

Định nghĩa : Ma trận thực $A = (a_{ij})_{n\times n}$ gọi là *ma trận trực giao* nếu hệ vectơ cột $\{A^1, ..., A^n\}$ là một hệ trực chuẩn trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$.

Tức là điều kiện sau được thỏa mãn :

$$(A^i.A^j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}. \qquad (5.22)$$

Ví dụ : Các ma trận sau đây là ma trận trực giao :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mệnh đề 5.7 : Ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận trực giao khi và chỉ khi $A^t.A = E$.

Chứng minh : Giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n}$, ta có $A^t = (a'_{ij})_{n\times n}$, trong đó $a'_{ij} = a_{ji}$. Do đó :

$$A^t.A = E \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a'_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}.$$

Theo điều kiện (5.22) thì A là ma trận trực giao khi và chỉ khi $A^t.A = E$.■

Hệ quả 5.5 : Nếu A là ma trận trực giao thì ma trận chuyển vị A^t cũng trực giao và $A^t = A^{-1}$.

Hệ quả 5.6 : Định thức của ma trận trực giao bằng ±1.

Chứng minh : Giả sử A là ma trận trực giao. Theo Mệnh đề 5.7 ta có :

$$|A^t.A| = |E| = 1.$$

Vì $|A^t| = |A|$ nên :

$$|A^t.A| = |A^t|\,|A| = |A|^2 = 1. \text{ Vậy } |A| = \pm 1.$$■

Quan hệ giữa các khái niệm ma trận trực giao và phép biến đổi trực giao được thể hiện ở mệnh đề sau đây :

Mệnh đề 5.8 : Phép biến đổi tuyến tính trong không gian vectơ Euclid n chiều là một phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi ma trận của nó đối với một cơ sở trực chuẩn nào đó là ma trận trực giao.

Chứng minh : Giả sử $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của phép biến đổi tuyến tính φ đối với cơ sở trực chuẩn $\{u_1, ..., u_n\}$. Khi đó :

$$\varphi(u_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}u_k\,,\ \ i = 1, ..., n.$$

Theo Mệnh đề 5.6 thì φ là phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi hệ vectơ $\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_n)\}$ là một cơ sở trực chuẩn, tức là :

$$(\varphi(u_i).\varphi(u_j)) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}\,.$$

Vậy, phép biến đổi φ là một phép biến đổi trực giao khi và chỉ khi ma trận A là ma trận trực giao.

Hệ quả 5.7 : Ma trận Q là ma trận chuyển một cơ sở trực chuẩn thành cơ sở trực chuẩn khi và chỉ khi Q là ma trận trực giao.

Chứng minh : Điều khẳng định được suy trực tiếp từ các Mệnh đề 5.6 và 5.8.■

5.6. PHÉP BIẾN ĐỔI ĐỐI XỨNG VÀ MA TRẬN ĐỐI XỨNG

5.6.1. Định nghĩa

Phép biến đổi tuyến tính φ trong không gian vectơ Euclid E gọi là *phép biến đổi đối xứng* nếu điều kiện sau đây được thỏa mãn :

$$(\varphi(x).y) = (x.\varphi(y)), \quad \forall x, y \in E. \tag{5.23}$$

Ví dụ : Phép biến đổi đồng dạng với hệ số đồng dạng k :

$$\theta_k(x) = kx, \quad \forall x \in E.$$

Ánh xạ θ_k là một phép biến đổi tuyến tính vì với mọi $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ta có :

$$\theta_k(\alpha x + \beta y) = k(\alpha x + \beta y) = \alpha(kx) + \beta(ky)$$
$$= \alpha\theta_k(x) + \beta\theta_k(y).$$

Phép biến đổi tuyến tính θ_k là phép biến đổi đối xứng vì với mọi $x, y \in E$ ta có :

$$(\theta_k(x).y) = (kx.y) = (x.ky) = (x.\theta_k(y)).$$

– Với k = 0 ta có phép biến đổi không :

$$0(x) = \theta, \quad \forall x \in E.$$

– Với k = 1 ta có phép biến đổi đồng nhất :

$$i_E(x) = x, \quad \forall x \in E.$$

Mệnh đề sau đây chỉ ra mối quan hệ giữa các phép biến đổi đối xứng và ma trận đối xứng.

Mệnh đề 5.9 : Một phép biến đổi tuyến tính trong không gian vectơ Euclid hữu hạn chiều là phép biến đổi đối xứng khi và chỉ khi ma trận của nó đối với một cơ sở trực chuẩn nào đó là ma trận đối xứng.

Chứng minh :

Điều kiện cần : Giả sử $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận của phép biến đổi đối xứng φ đối với cơ sở trực chuẩn $\{u_1, ..., u_n\}$. Ta chứng tỏ A là một ma trận đối xứng. Ta có :

$$\varphi(u_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k.$$

Do đó :

$$(\varphi(u_i).u_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}u_k.u_j\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}(u_k.u_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\delta_{kj} = a_{ji}.$$

Một cách tương tự, ta có :

$$(u_i, \varphi(u_j)) = a_{ij}.$$

Vì φ là phép biến đổi đối xứng nên $(\varphi(u_i).u_j) = (u_i.\varphi(u_j))$. Do đó ta có : $a_{ji} = a_{ij}$. Vậy A là ma trận đối xứng.

Điều kiện đủ : Giả sử phép biến đổi tuyến tính φ đối với cơ sở trực chuẩn $\{u_1, ..., u_n\}$ có ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ đối xứng. Khi đó đối với mọi vectơ x, y của không gian E ta có :

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \; y = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j \; ;$$

$$(\varphi(x).y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(u_i).\sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right) = \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i y_j a_{ki}(u_k.u_j)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i y_j a_{ki}\delta_{kj} = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ji}.$$

Tương tự ta có :

$$(x.\varphi(y)) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j a_{ij}.$$

Vì $a_{ij} = a_{ji}$ nên ta có :

$$(\varphi(x).y) = (x.\varphi(y)).$$

Vậy φ là một phép biến đổi đối xứng.■

5.6.2. Chéo hóa ma trận thực đối xứng

Dưới đây ta sẽ chứng tỏ rằng, đối với mỗi phép biến đổi đối xứng φ trong không gian vectơ Euclid E hữu hạn chiều thì trong không gian E có một cơ sở trực chuẩn gồm các vectơ riêng của φ. Từ đó suy ra rằng, các ma trận thực đối xứng chéo hóa được.

Bổ đề 5.1 : Các nghiệm của đa thức đặc trưng của ma trận thực đối xứng là các số thực.

Chứng minh : Giả sử rằng λ là một nghiệm phức của đa thức đặc trưng của ma trận thực đối xứng $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Theo (5.19) ta có :

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{a}$$

Khi đó hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên trường số phức sau đây sẽ có nghiệm không tầm thường :

$$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{b}$$

Gọi liên hợp của ma trận phức $X = (x_{ij})_{m\times n}$ là ma trận $\overline{X} = (\overline{x}_{ij})_{m\times n}$.

Giả sử $\alpha = (b_1, ..., b_n) \neq \theta$ là một nghiệm của hệ phương trình (b).

Ký hiệu $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, ta có $\overline{B} = \begin{pmatrix} \overline{b}_1 \\ \vdots \\ \overline{b}_n \end{pmatrix}$.

Thay B vào phương trình (b) ta có $(A - \lambda E)B = 0$ hay $A.B = \lambda B$. Đặt $z = \overline{B}^t(A.B)$.

Ta có :

$$z = \overline{B}^t \lambda B = \lambda \overline{B}^t.B = \lambda \sum_{k=1}^{n} \overline{b}_k b_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2.$$

Vì $\alpha = (b_1, ..., b_n) \neq \theta$ nên $\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 \neq 0$.

Do đó ta có :

$$\lambda = \frac{z}{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2}. \tag{c}$$

Theo tính chất của liên hợp phức và phép lấy chuyển vị của ma trận ta có :

$$\bar{z} = \overline{\bar{B}^t.A.B} = \bar{\bar{B}}^t.\overline{A.B} = B^t.A.\bar{B}.$$

Mặt khác :

$$\bar{z} = \bar{z}^t = (B^t.A.\bar{B})^t = \bar{B}^t.A^t.(B^t)^t ;$$

$$\bar{z} = \bar{B}^t AB = z.$$

Do đó z là một số thực. Theo (c) thì λ cũng là một số thực.

Không gian con bất biến :

Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính trong K – không gian vectơ V. Không gian con $L \subseteq V$ gọi là *không gian con bất biến* đối với phép biến đổi φ nếu với mọi $x \in L$ thì $\varphi(x) \in L$.

Bổ đề 5.2 : Nếu L là không gian con bất biến của phép biến đổi đối xứng φ trong không gian vectơ Euclid hữu hạn chiều E thì không gian bù trực giao $L^{\perp}$ của L cũng là không gian bất biến của phép biến đổi φ.

Ta phải chứng tỏ, nếu $x \in L^{\perp}$ thì $\varphi(x) \in L^{\perp}$.

Thật vậy, vì $x \in L^{\perp}$ nên $x \perp L$. Suy ra với mọi $y \in L$ ta có :

$$(\varphi(x).y) = (x.\varphi(y)) = 0, \text{ vì } \varphi(y) \in L.$$

Do đó $\varphi(x) \perp L$, vậy $\varphi(x) \in L^{\perp}$.

Định lý 5.6 : Nếu φ là một phép biến đổi đối xứng trong không gian vectơ Euclid hữu hạn chiều E, thì trong không gian E có một cơ sở trực chuẩn gồm các vectơ riêng của φ.

Chứng minh : Theo Mệnh đề 5.9 và Bổ đề 5.1 thì phép biến đổi φ có giá trị riêng λ_1.

Chọn vectơ đơn vị u_1 là vectơ riệng của φ ứng với giá trị riêng λ_1 ; $\varphi(u_1) = \lambda_1 u_1$. Đặt :

$$L_1 = \mathscr{L}(u_1) = \{x = \alpha u_1 ; \alpha \in \mathbb{R}\},$$

L_1 là không gian con bất biến 1 chiều của φ.

Thật vậy, nếu $x \in L_1$ thì :

$$x = \alpha u_1 ;$$

$$\varphi(x) = \varphi(\alpha u_1) = \alpha\varphi(u_1) = (\alpha\lambda_1)u_1 \in L_1.$$

Theo Mệnh đề 3.12, ta có :

$$E = L_1 \oplus L_1^{\perp}. \qquad (a)$$

Theo Bổ đề 5.2 thì $L_1^{\perp}$ là không gian con bất biến của phép biến đổi φ. Ta có thể xem φ là một phép biến đổi đối xứng trong không gian $L_1^{\perp}$. Khi đó, trong $L_1^{\perp}$ phép biến đổi φ có vectơ riêng u_2 ($\|u_2\| = 1$) ứng với giá trị riêng λ_2. Đặt $L_2 = \mathscr{L}(u_2)$, L_2 là không gian con bất biến 1 chiều của φ. Ta lại có :

$$L_1^{\perp} = L_2 \oplus L_2^{\perp}. \qquad (b)$$

Từ (a) và (b) ta có :

$$E = L_1 \oplus L_2 \oplus L_2^{\perp} \qquad (c)$$

Tiếp tục tiến hành như vậy sau n bước (n = dimE), ta có phân tích :

$$E = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n, \qquad (d)$$

trong đó các vectơ $u_i \in L_i$, $\|u_i\| = 1$, là vectơ riêng của φ ứng với giá trị riêng λ_i, $i = 1, \ldots, n$.

Từ phân tích (d) ta có hệ vectơ $\{u_1, \ldots, u_n\}$ là cơ sở trực chuẩn cần tìm.

Hệ quả 5.8 : Mỗi ma trận A đối xứng thực tồn tại ma trận trực giao Q sao cho : $B = Q^tA.Q$ là ma trận đường chéo. Do đó các ma trận đối xứng thực chéo hóa được.

Chứng minh : Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ xét phép biến đổi tuyến tính φ có ma trận đối với cơ sở chính tắc $\{e_1, \ldots, e_n\}$ là A. Vì A là ma trận đối xứng, từ Mệnh đề 5.9 suy ra φ là một phép biến đổi đối xứng. Theo Định lý 5.6, trong không gian Euclid $\mathbb{R}^n$ có một cơ sở trực chuẩn $\{u_1, \ldots, u_n\}$ là các vectơ riêng của φ ; $\varphi(u_i) = \lambda_i u_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ma trận B của φ đối với cơ sở này có dạng đường chéo :

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Gọi Q là ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn $\{e_1, ..., e_n\}$ sang cơ sở trực chuẩn $\{u_1, ..., u_n\}$. Theo Hệ quả 5.7 Q là ma trận trực giao, $Q^{-1} = Q^t$. Áp dụng công thức (5.15) ta có : $B = Q^t.A.Q$. Điều khẳng định được chứng minh.

Nhận xét : Theo chứng minh trên thì λ_i, $i = 1, ..., n$ là các giá trị riêng của ma trận A, còn các cột của ma trận chuyển Q là các vectơ riêng của A.

BÀI TẬP

Đề bài

5.1. Ký hiệu $Hom_k(V, V')$ là tập các ánh xạ tuyến tính từ K – không gian vectơ V vào K – không gian vectơ V'. Trên tập $Hom_k(V, V')$ xét các phép toán sau :

– Phép cộng các ánh xạ tuyến tính :

Với $f, g \in Hom_k(V, V')$, ánh xạ $f + g : V \to V'$ xác định bởi :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

– Phép nhân các phần tử của trường K với ánh xạ tuyến tính :

Với $\alpha \in K$, $f \in Hom_k(V, V')$, ánh xạ $\alpha f : V \to V'$ xác định bởi :

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

1) Hãy chứng tỏ $f + g$ và αf là các ánh xạ tuyến tính.

2) Chứng minh tập $Hom_k(V, V')$ với hai phép toán trên là một K – không gian vectơ. K – không gian vectơ $Hom_k(V, V')$ được gọi là *không gian các ánh xạ tuyến tính* từ V vào V'.

5.2. Giả sử $f \in Hom_k(V, V')$, chứng minh :

1) Nếu tập con $A \subseteq V$ là một tập vectơ phụ thuộc tuyến tính thì f(A) cũng là một tập phụ thuộc tuyến tính.

2) f là một đơn cấu khi và chỉ khi ảnh của một tập độc lập tuyến tính qua ánh xạ f là một tập độc lập tuyến tính.

3) Nếu f là một đẳng cấu thì ánh xạ ngược f^{-1} cũng là một đẳng cấu.

5.3. Với mỗi số thực $a > 0$, $a \neq 1$, xét ánh xạ $f : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^+)^n$ xác định bởi : Với $x = (x_1, ..., x_n)$ thì $f(x) = \left(a^{x_1}, ..., a^{x_n}\right)$.

Chứng minh rằng, f là một đẳng cấu từ không gian vectơ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$ – không gian vectơ $(\mathbb{R}^+)^n$ (Bài tập 3.2).

5.4. Xét ánh xạ $\theta : R[x] \to R[x]$ xác định bởi : $\theta(p(x)) = p'(x)$.

Chứng minh θ là một phép biến đổi tuyến tính trong không gian các đa thức $\mathbb{R}[x]$. Hãy xác định $\mathrm{Ker}\theta$, $\mathrm{Im}\theta$.

5.5. Xét tập V các hàm số x(t) xác định trên $\mathbb{R}$ cho bởi công thức :

$$x(t) = a_o + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

trong đó n là một số tự nhiên cho trước; a_k, b_k là các số thực tùy ý.

1) Hãy chứng tỏ V là một không gian con của không gian $C(-\infty, +\infty)$ các hàm số liên tục. Tìm dimV.

2) Xét ánh xạ $\varphi : V \to V$ xác định bởi : Với mỗi $x \in V$, $\varphi(x)$ là một hàm số xác định như sau :

$$\varphi(x)(t) = x\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Chứng minh φ là một phép biến đổi tuyến tính và $\varphi^8 = i_V$.

3) Xác định $\dim\mathrm{Im}\varphi$, $\dim\mathrm{Ker}\varphi$.

5.6. Giả sử $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là phép biến đổi tuyến tính đối với cơ sở chính tắc có ma trận :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Tìm một cơ sở của không gian con Kerf và Imf.

5.7. Xét ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi : Với $x = (x_1, x_2, x_3)$, $\varphi(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2)$.

1) Chứng minh φ là một phép biến đổi tuyến tính.

2) Tính $\dim\mathrm{Im}\varphi$ và $\dim\mathrm{Ker}\varphi$.

5.8. Cho ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n[K]$. Xét ánh xạ $f : M_{1\times n}[K] \to M_{1\times n}[K]$ xác định bởi :

$$f((x_1 \ \ldots \ x_n)) = (x_1 \ \ldots \ x_n)A.$$

Chứng tỏ f là một phép biến đổi tuyến tính. Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của không gian $M_{1\times n}[K]$.

5.9. Giả sử V là K – không gian vectơ và $V = L_1 \oplus L_2$; $\{u_1, ..., u_k\}$ là một cơ sở của L_1 ; $\{u_{k+1}, ..., u_n\}$ là một cơ sở của L_2. Xét ánh xạ $p_i : V \to V$, i = 1, 2 xác định như sau : Với $x \in V$ nếu $x = x_1 + x_2$, $x_i \in L_i$, i = 1, 2 thì $p_i(x) = x_i$.

1) Chứng minh rằng p_i (i = 1, 2) là các phép biến đổi tuyến tính và :

$$p_i^2 = p_i \ ;$$

$$p_1p_2 = p_2p_1 = 0, \ p_1 + p_2 = i_V.$$

2) Xác định ma trận của p_1, p_2 đối với cơ sở $\{u_1, ..., u_n\}$.

5.10. Tìm ma trận chuyển từ cơ sở $\{1, x, ..., x^{n-1}\}$ sang cơ sở $\{1, x + 2, ..., (x + 2)^{n-1}\}$ trong không gian $\mathbb{R}_n[x]$.

5.11. Giả sử E là một Q – không gian vectơ hai chiều. $B = \{e_1, e_2\}$ là một cơ sở của E.

1) Chứng minh $B' = \{e'_1, e'_2\}$, trong đó $e'_1 = e_1 + e_2$; $e'_2 = e_1 - e_2$, là một cơ sở của E.

Tìm ma trận chuyển P từ cơ sở B sang cơ sở B' và ma trận chuyển P' từ cơ sở B' sang cơ sở B.

3) Giả sử $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ là ma trận của phép biến đổi tuyến tính f đối với cơ sở B. Hãy tìm ma trận của f đối với cơ sở B'.

5.12. Chứng minh rằng, vết của các ma trận của cùng một phép biến đổi tuyến tính đối với các cơ sở khác nhau của không gian vectơ là bằng nhau. Giá trị chung đó được gọi là *vết* của phép biến đổi tuyến tính.

5.13. Chứng minh rằng, tập $End_k(V)$ các phép biến đổi tuyến tính của K – không gian vectơ V với phép cộng (Bài tập 5.1) và tích phép biến đổi tuyến tính là một vành đẳng cấu với vành ma trận $M_n[K]$.

5.14. Tìm các giá trị riêng và các vectơ riêng của các ma trận :

1) $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

5.15. Giả sử φ là một phép biến đổi tuyến tính trong K – không gian vectơ V.

1) Chứng minh rằng, nếu λ là giá trị riêng của φ thì λ^k là một giá trị riêng của φ^k.

2) Với mỗi đa thức $f(t) = a_m t^m + ... + a_1 t + a_o \in K[t]$, ta ký hiệu $f(\varphi) = a_m \varphi^m + ... + a_1\varphi + a_o i_V$.

Chứng minh rằng, nếu $u \in V$ là vectơ riêng của φ ứng với giá trị λ thì u cũng là vectơ riêng của $f(\varphi)$ ứng với giá trị riêng $f(\lambda)$. Giả sử A là ma trận của φ đối với cơ sở $\{u_1, ..., u_n\}$, hãy xác định ma trận của $f(\varphi)$ đối với cơ sở đó.

5.16. Giả sử phép biến đổi tuyến tính φ trong không gian $\mathbb{R}^3$ đối với cơ sở chính tắc có ma trận là :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của φ.

2) Tìm một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ mà đối với cơ sở đó ma trận B của φ có dạng tam giác. Viết ma trận B.

3) Chứng tỏ rằng, trong tất cả các cơ sở của $\mathbb{R}^3$ thỏa mãn điều kiện 2) thì có ít nhất một cơ sở mà đối với nó ma trận B ngoài đường chéo chính chỉ có một phần tử khác 0 bằng 1. Viết ma trận B cho trường hợp đó.

5.17. Tìm các giá trị riêng và vectơ riêng của phép biến đổi tuyến tính φ có ma trận đối với cơ sở $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ là :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Chứng tỏ rằng các không gian con sinh bởi vectơ $u_1 + 2u_2$ và $u_2 + u_3 + 2u_4$ bất biến đối với φ.

5.18. Cho ma trận thực A, tìm ma trận khả nghịch T sao cho ma trận $B = T^{-1}.A.T$ là ma trận đường chéo. Cho biết ma trận B :

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

5.19. Cho trước ma trận đối xứng thực A, hãy tìm ma trận trực giao Q sao cho $B = Q^t.A.Q$ là ma trận đường chéo :

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

5.20. Chứng minh rằng, các vectơ riêng của một phép biến đổi đối xứng ứng với các giá trị riêng khác nhau thì trực giao với nhau.

5.21. Ma trận phức A gọi là *tự liên hợp* nếu $\overline{A}^t = A$. Chứng minh rằng, các giá trị riêng của ma trận tự liên hợp là các số thực.

Đáp số và hướng dẫn

5.4. $\mathrm{Ker}\theta = \mathbb{R}$; $\mathrm{Im}\theta = \mathbb{R}[x]$.

5.5. 1) $\dim V = 2n + 1$.

2) Ta có : $\varphi^k(x)(t) = x\left(t + k\dfrac{\pi}{4}\right)$

Do đó :

$$\varphi^8(c)(t) = x(t + 2\pi) = x(t), \text{ ta có } \varphi^8 = i_V.$$

3) Theo kết quả ở 2) thì φ là một đơn cấu, do đó $\dim\mathrm{Ker}\varphi = 0$, $\dim\mathrm{Im}\varphi = 2n + 1$.

5.6. *Hướng dẫn* :

a) Kerf là không gian nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất :

$$A(x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t = (0 \quad 0 \quad 0)^t.$$

Đáp số : Kerf có cơ sở $u_1 = \{(-1, 4, 7)\}$.

b) Có thể sử dụng phương pháp chứng minh Định lý 5.2 để xác định cơ sở của Imf. Chẳng hạn, trong $\mathbb{R}^3$ chọn cơ sở $\{e_1, e_2, u_1\}$. Khi đó : $\{f(e_1) = (1, 2, 1), f(e_2) = (2, -3, -5)\}$ là cơ sở của Imf.

5.7. 2) $\dim\mathrm{Im}\varphi = 3$; $\dim\mathrm{Ker}\varphi = 0$.

5.8. Ma trận A^t là ma trận của f đối với cơ sở chính tắc.

5.9. $A_{p_1} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A_{p_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$

trong đó E_1 là ma trận đơn vị cấp k ; E_2 là ma trận đơn vị cấp n – k.

5.10.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & C_2^1.2 & \dots & C_{n-1}^1.2^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & C_{n-1}^2.2^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

5.11. 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ 3) $\begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

5.14. 1) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng 1 là $t(1, 1, 1)$, $\forall t \neq 0$. Còn đối với giá trị riêng 0 có dạng $t(1, 2, 3)$, $\forall t \neq 0$.

2) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng 3 có dạng t(1, 2, 2), còn đối với giá trị riêng -1 có dạng t(1, 2, 1), $\forall t \neq 0$.

5.15. 2) $f(A) = a_m A^m + ... + a_1 A + a_0 E$.

5.16. 1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$. Các vectơ riêng ứng với giá trị riêng 4 là t(1, −1, 1), còn ứng với giá trị riêng 2 là t(1, 1, 1), $\forall t \neq 0$.

2) Chọn một cơ sở gồm hai vectơ riêng $\alpha_1 = (1, -1, 1)$, $\alpha_2 = (1, 1, 1)$ và α_3 không biểu diễn tuyến tính qua α_1 và α_2, chẳng hạn $\alpha_3 = (0, 0, 1)$. Đối với cơ sở này ma trận của φ có dạng :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3) Lấy cơ sở $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3\}$, $\alpha'_3 = a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3$, trong đó $c \neq 0$. Để $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_3\}$ độc lập tuyến tính có thể chọn $a = 0$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$. Đối với cơ sở đó ma trận của φ có dạng :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

5.17. Có duy nhất giá trị riêng $\lambda = 1$. Các vectơ riêng có dạng :

$$t(u_1 + 2u_2) + s(u_2 + u_3 + 2u_4),$$

trong đó : t, s là các tham số không đồng thời bằng 0.

5.18. *Hướng dẫn :* Sử dụng phương pháp ở nhận xét của chứng minh Hệ quả 5.8.

1) $$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{3}{14} & -\frac{3}{35} \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{14} & \frac{1}{35} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

2) $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & O \\ O & & 2 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$

5.19. 1) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$; $Q = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

5.20. Xét các vectơ riêng u_1, u_2 của phép biến đổi đối xứng φ ứng với các giá trị riêng λ_1, λ_2 ; $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Vì $(\varphi(u_1).u_2) = (u_1.\varphi(u_2))$, do đó :

$$\lambda_1(u_1.u_2) = \lambda_2(u_1.u_2) ;$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1.u_2) = 0 \Rightarrow (u_1.u_2) = 0.$$

5.21. *Hướng dẫn :* Chứng minh hoàn toàn tương tự như Bổ đề 5.1.

Chương VI

DẠNG SONG TUYẾN TÍNH VÀ DẠNG TOÀN PHƯƠNG

6.1. DẠNG SONG TUYẾN TÍNH

6.1.1. Dạng tuyến tính

Giả sử K là một trường số. Mỗi ánh xạ tuyến tính từ K – không gian vectơ V vào K được gọi là *một dạng tuyến tính* trên V. Vậy, mỗi dạng tuyến tính trên V là một ánh xạ $f : V \to K$ thỏa mãn các điều kiện :

$$f(x + y) = f(x) + f(y) ;$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \qquad (6.1)$$

đối với mọi $x, y \in V$ và $\alpha \in K$.

Ký hiệu V* là tập tất cả các dạng tuyến tính trên V. Trên tập V* xét hai phép toán sau đây :

– Phép cộng các dạng tuyến tính :

Với f, g thuộc V*, ánh xạ $f + g : V \to K$ xác định bởi :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in V. \qquad (6.2)$$

– Phép nhân các phần tử của trường K với dạng tuyến tính :

Với $\alpha \in K$, $f \in V^*$, ánh xạ $\alpha f : V \to K$ xác định bởi :

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall x \in V. \qquad (6.3)$$

Dễ dàng chứng tỏ rằng, các ánh xạ $f + g$, αf là các dạng tuyến tính trên V, và tập V* với hai phép toán trên là một K – không gian vectơ, với vectơ không là ánh xạ tầm thường $O : V \to K$. Xác định bởi $O(x) = 0$, $\forall x \in V$. Vectơ đối của vectơ f là $(-1)f = -f$.

K – không gian vectơ V^* được gọi là *không gian đối ngẫu* của K – không gian vectơ V.

Đối với mỗi cặp $f \in V^*$, $x \in V$ ta ký hiệu :

$$f(x) = \langle x \mid f \rangle. \tag{6.4}$$

Định lý 6.1 : Nếu hệ $\{u_1, ..., u_n\}$ là một cơ sở của K – không gian vectơ V thì hệ các dạng tuyến tính $\{u^1, ..., u^n\}$ trên V xác định bởi :

$$u^j(u_i) = \langle u_i \mid u^j \rangle = \delta_{ij} \tag{6.5}$$

là một cơ sở của không gian đối ngẫu V^*.

Cơ sở $\{u^1, ..., u^n\}$ gọi là *cơ sở đối ngẫu* của cơ sở $\{u_1, ..., u_n\}$.

Chứng minh : Vì mỗi ánh xạ tuyến tính hoàn toàn được xác định bởi giá trị của nó tại các vectơ thuộc một cơ sở, do đó các hệ thức (6.5) xác định n dạng tuyến tính trên V.

– Hệ $\{u^1, ..., u^n\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Thật vậy, giả sử có tổ hợp tuyến tính :

$$\lambda_1 u^1 + ... + \lambda_n u^n = \theta.$$

Theo (6.2) và (6.3), với i = 1, ..., n ta có :

$$(\lambda_1 u^1 + ... + \lambda_n u^n)(u_i) = 0(u_i) ;$$

$$\lambda_1 u^1(u_i) + ... + \lambda_n u^n(u_i) = 0 ;$$

$$\lambda_1 \delta_{i1} + ... + \lambda_i \delta_{ii} + ... + \lambda_n \delta_{in} = 0 ;$$

$$\lambda_i = 0.$$

– Hệ vectơ $\{u^1, ..., u^n\}$ là một hệ sinh của không gian vectơ V^*. Thật vậy, đối với mỗi $x = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$ thuộc V ta có :

$$u^i(x) = u^i\left(\sum_{k=1}^{n} x_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k u^i(u_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{ki} = x_i$$

Do đó đối với mọi f thuộc V^* ta có :

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k f(u_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(u_k) u^k(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} f(u_k) u^k\right)(x), \ \forall x \in V.$$

Do đó ta có :

$$f = \sum_{k=1}^{n} f(u_k)u^k$$

Vậy, mỗi vectơ của không gian V* biểu diễn tuyến tính được qua hệ $\{u^1, ..., u^n\}$.■

6.1.2. Dạng song tuyến tính

Định nghĩa : Giả sử V là một K – không gian vectơ. Ánh xạ $\varphi : V \times V \to K$ được gọi là *dạng song tuyến tính* trên không gian vectơ V nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn đối mọi vectơ x, x', y, y' thuộc V và mọi phần tử α thuộc K.

$$\begin{cases} \varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \\ \varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x, y) \end{cases} \quad (6.6)$$

$$\begin{cases} \varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y') \\ \varphi(x, \alpha y) = \alpha\varphi(x, y) \end{cases} \quad (6.7)$$

Điều kiện (6.6) chứng tỏ với mỗi y cố định thì $\varphi(x, y)$ là một dạng tuyến tính trên V đối với biến x. Điều kiện (6.7) chứng tỏ với mỗi x cố định thì $\varphi(x, y)$ là một dạng tuyến tính trên V đối với biến y.

Dạng song tuyến tính φ gọi là *đối xứng* nếu thỏa mãn điều kiện :

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x), \forall x, y \in V. \quad (6.8)$$

Ví dụ : Mỗi tích vô hướng của không gian vectơ Euclid là một dạng song tuyến tính đối xứng trên $\mathbb{R}$ – không gian vectơ.

1. Ma trận của dạng song tuyến tính

Trong K – không gian vectơ V xét cơ sở :

$$\{u_1, ..., u_n\}. \qquad (I)$$

Giả sử φ là một dạng song tuyến tính trên không gian vectơ V. Khi đó đối với các vectơ $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j u_j$. Áp dụng tính chất tuyến tính theo từng biến của φ ta có :

$$\varphi(x, y) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi\left(u_i, \sum_{j=1}^{n} y_j u_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(u_i, u_j). \tag{6.9}$$

Đặt $a_{ij} = \varphi(u_i, u_j)$; $i, j = 1, ..., n$.

Ma trận $A = (a_{ij})_{n \times n}$ được gọi là *ma trận của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở (I).*

Từ biểu thức (6.9) suy ra dạng song tuyến tính φ hoàn toàn xác định nếu biết ma trận của nó đối với cơ sở nào đó.

Biểu thức (6.9) có thể viết lại dưới dạng :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j. \tag{6.10}$$

Biểu thức (6.10) được gọi là *biểu thức tọa độ* của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở (I).

Từ biểu thức (6.10) ta có :

$$\varphi(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1} x_i \quad \ldots \quad \sum_{i=1}^{n} a_{in} x_i\right)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x, y) = (x_1 \quad \ldots \quad x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Do đó biểu thức tọa độ của dạng song tuyến tính φ có thể viết dưới dạng ma trận :

$$\varphi(x, y) = (x_1 \quad \dots \quad x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (6.11)$$

Mệnh đề 6.1 : Dạng song tuyến tính φ trên K – không gian vectơ hữu hạn chiều V là đối xứng khi và chỉ khi ma trận của nó đối với cơ sở nào đó là ma trận đối xứng.

Chứng minh : Giả sử φ là dạng song tuyến tính đối xứng và $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận của φ đối với cơ sở $\{u_1, ..., u_n\}$. Theo (6.9) ta có :

$$a_{ij} = \varphi(u_i, u_j) = \varphi(u_j, u_i) = a_{ji}, \; i, j = 1, ..., n.$$

Vậy A là ma trận đối xứng.

Ngược lại, giả sử rằng A là ma trận đối xứng, theo hệ thức (6.10) ta có :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ji}y_jx_i = \varphi(y, x).$$

Vậy, φ là một dạng song tuyến tính đối xứng. Mệnh đề được chứng minh. ■

2. Tích Tenxơ

Ký hiệu $(V^*)^* = V^{**}$ là không gian đối ngẫu của K – không gian vectơ V^*. Người ta chứng tỏ được rằng, nếu V là K – không gian vectơ hữu hạn chiều thì có thể đồng nhất không gian V với không gian V^{**}. Tức là, $(V^*)^* = V$. Mỗi phần tử $x \in V$ là một dạng tuyến tính trên V^*.

– Với mỗi $f \in V^*$: $\langle x \mid f\rangle = f(x), \forall x \in V$.

– Với mỗi $x \in V$: $\langle x \mid f\rangle = x(f), \forall f \in V^*$.

Xét K – không gian vectơ hữu hạn chiều V.

Định nghĩa : Tích Tenxơ của vectơ x với vectơ y, ký hiệu $x \otimes y$, là một dạng song tuyến tính trên K – không gian vectơ V^* được xác định bởi :

$$x \otimes y((f, g)) = \langle x \mid f\rangle\langle y \mid g\rangle, \; \forall f, g \in V^*. \qquad (6.12)$$

Tích Tenxơ của dạng tuyến tính f với dạng tuyến tính g, ký hiệu $f \otimes g$, là một dạng song tuyến tính trên K – không gian vectơ V được xác định bởi :

$$f \otimes g((x, y)) = \langle x \mid f \rangle \langle y \mid g \rangle, \ \forall x, y \in V. \tag{6.13}$$

6.2. DẠNG TOÀN PHƯƠNG

6.2.1. Định nghĩa

Giả sử φ là một dạng song tuyến tính đối xứng trên K – không gian vectơ V, khi đó ánh xạ $\omega : V \to K$ xác định bởi :

$$\omega(x) = \varphi(x, x), \ \forall x \in V \tag{6.14}$$

được gọi là *dạng toàn phương trên không gian vectơ V sinh bởi dạng song tuyến tính đối xứng φ.*

Trong không gian vectơ V, xét cơ sở :

$$\{u_1, ..., u_n\} \quad (I)$$

Giả sử $A = (a_{ij})_{n \times n}$ là ma trận của dạng song tuyến tính đối xứng φ. Theo Mệnh đề 6.1, A là ma trận đối xứng. Theo các công thức (6.10) và (6.11), với $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ ta có :

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{6.15}$$

$$\omega(x) = (x_1 \ \ ... \ \ x_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

Các hệ thức (6.15), (6.16) được gọi là *biểu thức tọa độ* của dạng toàn phương ω đối với cơ sở (I).

Xét một cơ sở khác của không gian V :

$$\{v_1, ..., v_n\} \quad (II)$$

Giả sử B là ma trận của dạng toàn phương ω đối với cơ sở (II). Khi đó theo công thức (6.16) ta có :

$$\text{Với } x = \sum_{i=1}^{n} x'_i v_i \text{ thì } \omega(x) = (x'_1 \;\; \dots \;\; x'_n)B\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad \text{(a)}$$

Gọi T là ma trận chuyển từ cơ sở (I) sang cơ sở (II). Theo công thức biến đổi tọa độ (5.13) ta có :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}$$

Thực hiện phép chuyển vị ma trận ở hai vế của đẳng thức (b) ta có :

$$(x_1 \;\; \dots \;\; x_n) = (x'_1 \;\; \dots \;\; x'_n)T^t. \qquad \text{(c)}$$

Từ các công thức (6.16), (b) và (c) ta có :

$$\omega(x) = (x'_1 \;\; \dots \;\; x'_n)T^t.A.T\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \qquad \text{(d)}$$

So sánh vế phải (a) và (d) ta có :

$$B = T^t.A.T. \qquad (6.17)$$

Hệ thức (6.17) thể hiện quan hệ giữa hai ma trận của cùng một dạng toàn phương đối với một cơ sở khác nhau.

Vì T là ma trận không suy biến, nên ta có r(B) = r(A). Vậy, hạng của ma trận dạng toàn phương ω không phụ thuộc vào cơ sở và được gọi là *hạng của dạng ω*. Nếu r(A) = n thì ω gọi là *dạng không suy biến*.

6.2.2. Dạng chính tắc của dạng toàn phương

1. Cơ sở chính tắc

Cơ sở $\{v_1, ..., v_n\}$ của K – không gian vectơ V được gọi là *cơ sở chính tắc* của dạng toàn phương ω nếu ma trận B của dạng ω đối với cơ sở đó có dạng đường chéo.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Khi đó biểu thức tọa độ của ω có dạng :

$$\omega(x) + b_1t_1^2 + ... + b_nt_n^2 \tag{6.18}$$

trong đó : $x = t_1v_1 + ... + t_nv_n$.

Biểu thức (6.18) gọi là *dạng chính tắc* của dạng toàn phương ω.

Rõ ràng rằng, số hệ số khác 0 trong dạng chính tắc bằng hạng của dạng toàn phương.

2. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc

a) Phương pháp Lagrăng :

Xét dạng toàn phương khác không (có hạng khác không) :

$$\omega(x) = \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j .$$

Nếu mọi hệ số $a_{ii} = 0$; $i = 1, ..., n$, khi đó phải có hệ số $a_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$. Chẳng hạn a_{12}, thực hiện phép biến đổi tọa độ :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ ... \\ x_k = y_k , \qquad k = 3, ..., n \end{cases} \tag{6.19}$$

ta được biểu thức tọa độ mới của ω(x) có hệ số của y_1^2 là $2a_{12} \neq 0$.

Do đó không mất tính tổng quát, có thể giả thiết có hệ số $a_{ii} \neq 0$, chẳng hạn $a_{11} \neq 0$. Ta có :

$$\omega(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + ... + 2a_{1n}x_1x_n + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

$$\Rightarrow \omega(x) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j$$

Thực hiện phép biến đổi tọa độ sau đây :

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ y_k = x_k , \quad k = 2, ..., n \end{cases} \tag{6.20}$$

Dạng toàn phương ω có dạng tọa độ mới là :

$$\omega(x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a'_{ij} y_i y_j .$$

Giữ nguyên biến y_1, tiếp tục thực hiện các phép biến đổi trên đối với các biến $y_2, ..., y_n$. Sau một số bước ta sẽ khử hết các số hạng của tích hai tọa độ và nhận được dạng chính tắc của dạng toàn phương ω.

Ví dụ : Xét dạng toàn phương ω trong không gian $\mathbb{R}^3$ cho bởi :

$$\omega(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 4x_1x_3 + 4x_3^2 + 2x_2x_3$$

với $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Ta có $a_{11} = 1 \neq 0$, sử dụng phép biến đổi (6.20) :

$$\omega(x) = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 - (-x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 + 4x_3 + 2x_2x_3$$

$$= (x_1 - x_2 + 2x_3)^2 + 6x_2x_3.$$

Thực hiện phép biến đổi tọa độ :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

Dạng tọa độ mới của ω là :

$$\omega(x) = y_1^2 + 6y_2y_3 .$$

Giữ nguyên y_1, biến đổi y_2, y_3.

Ta có $a_{ii} = 0$, $i = 2, 3$. Sử dụng phép biến đổi (6.19) :

$$\begin{cases} y_1 = t_1 \\ y_2 = t_2 + t_3 \\ y_3 = t_2 - t_3 \end{cases}$$

Biểu thức tọa độ mới của ω là :

$$\omega(x) = t_1^2 + 6t_2^2 - 6t_3^2 .$$

Đó là dạng chính tắc cần tìm.

b) Phương pháp giá trị riêng :

Mệnh đề sau đây là một áp dụng của Định lý 5.6 vào việc khảo sát các dạng toàn phương trên không gian vectơ Euclid.

Mệnh đề 6.2 : Mỗi dạng toàn phương ω trên không gian vectơ Euclid hữu hạn chiều E đều có một cơ sở chính tắc là cơ sở trực chuẩn của không gian E.

Các vectơ của cơ sở chính tắc đó gọi là các *phương chính* của dạng toàn phương ω.

Chứng minh : Trong không gian vectơ Euclid E xét một cơ sở trực chuẩn :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad \text{(I)}$$

Gọi A là ma trận của dạng toàn phương ω đối với cơ sở trực chuẩn (I). Vì A là ma trận đối xứng thực, theo Hệ quả 5.8 tồn tại ma trận trực giao Q sao cho :

$$B = Q^t.A.Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ma trận trực giao Q chuyển cơ sở trực chuẩn (I) về cơ sở trực chuẩn $\{f_1, ..., f_n\}$ (II) xác định bởi :

$$\{f_1 \ \ ... \ \ f_n) = (u_1 \ \ ... \ \ u_n)Q.$$

Theo công thức (6.17), ma trận đường chéo B là ma trận của dạng toàn phương ω đối với cơ sở trực chuẩn (II). Vậy, cơ sở trực chuẩn (II) là một cơ sở chính tắc của dạng toàn phương ω.

Chú ý :

1) Trong cơ sở các phương chính (II), biểu thức tọa độ của dạng toàn phương ω là :

$$\omega(x) = \lambda_1 t_1^2 + ... + \lambda_n t_n^2 \tag{6.21}$$

với $x = \sum_{i=1}^{n} t_i f_i$. trong đó $\lambda_1, ..., \lambda_n$ là các giá trị riêng của ma trận A.

2) Các cột của ma trận chuyển Q là các vectơ riêng của ma trận A.

Ví dụ : Dạng toàn phương ω trên không gian $\mathbb{R}^3$ được cho bởi :

$$\omega(x) = 11x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 16x_1x_3 + 20x_2x_3$$

với $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Ma trận của dạng toàn phương ω đối với cơ sở chính tắc $\{e_1, e_2, e_3\}$ là :

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là :

$$P(\lambda) = |A - \lambda E| = -\lambda^2 + 18\lambda^2 + 81\lambda - 1458$$
$$= (\lambda - 9)(\lambda + 9)(\lambda - 18).$$

Vậy ma trận A có giá trị riêng là : $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 18$, $\lambda_3 = -9$. Theo hệ thức (6.21) dạng toàn phương đã cho có dạng chính tắc :

$$\begin{cases} \omega(x) = 9y_1^2 + 18y_2^2 - 9y_3^2 \\ x \quad\;\; = y_1f_1 + y_2f_2 + y_3f_3 \end{cases}$$

Các vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ_i là nghiệm không tầm thường của hệ phương trình :

$$(A - \lambda_i E)\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 9$, hệ có nghiệm $u = t(2, 2, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Với $t = 1$ ta có $u_1 = (2, 2, 1)$.

$\lambda_2 = 18$, hệ có nghiệm $u = t(2, -1, -2)$, $t \in \mathbb{R}$. Với $t = 1$ ta có $u_2 = (2, -1, -2)$.

$\lambda_3 = -9$, hệ có nghiệm $u = t(-1, 2, 2)$, $t \in \mathbb{R}$. Với $t = 1$ ta có $u_3 = (-1, 2, 2)$.

Vì u_1, u_2, u_3 là các vectơ riêng của ma trận đối xứng thực ứng với các giá trị riêng khác nhau nên trực giao với nhau (Bài tập 5.20).

Chuẩn hóa :

$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$v_3 = \frac{1}{\|u_3\|} u_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Do đó ta có :

$$(f_1 \quad f_2 \quad f_3) = (e_1 \quad e_2 \quad e_3)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Cơ sở các phương chính của ω là :

$$\begin{cases} f_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ f_2 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \\ f_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

6.3. DẠNG TOÀN PHƯƠNG THỰC

6.3.1. Dạng toàn phương xác định dương

Định nghĩa : Dạng toàn phương ω trên $\mathbb{R}$ – không gian vectơ V gọi là *xác định dương* nếu $\omega(x) > 0$, đối với mọi vectơ $x \neq \theta$. Và nếu $\omega(x) < 0$ đối với mọi $x \neq \theta$ thì dạng ω gọi là *xác định âm.*

Mệnh đề 6.3 : Dạng toàn phương trên $\mathbb{R}$ – không gian vectơ n chiều V xác định dương khi và chỉ khi tất cả các hệ số trong dạng chính tắc của nó đều dương. Tức là, nếu ω có dạng chính tắc :

$$\omega(x) = b_1 t_1^2 + \ldots + b_n t_n^2$$

thì $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Chứng minh : Giả sử các hệ số $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Khi đó nếu vectơ $x \in V$, $x \neq \theta$ thì có ít nhất một tọa độ $t_{i_0} \neq 0$. Do đó ta có :

$$\omega(x) \geq b_{i_0} t_{i_0}^2 > 0.$$

Vậy dạng toàn phương $\omega(x)$ xác định dương.

Ngược lại, giả sử ω là một dạng toàn phương xác định dương. Nếu có $b_i \leq 0$, ta chọn vectơ $x \in V$ có tọa độ đối với cơ sở chính tắc đang xét là $t_1 = 0, \ldots, t_{i-1} = 0, t_i = 1, t_{i+1} = 0, \ldots, t_n = 0$. Khi đó vectơ $x \neq \theta$, nhưng $\omega(x) = b_i \leq 0$. Vô lý. Vậy các hệ số chính tắc $b_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Người ta chứng minh được rằng :

Dạng toàn phương ω có biểu thức tọa độ :

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính :

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = |A|$$

đều dương.

6.3.2. Luật quán tính

Một dạng toàn phương có thể có nhiều cơ sở chính tắc khác nhau, định lý sau đây thường gọi là *luật quán tính* cho ta thấy một tính chất bất biến về dấu của các hệ số trong các dạng chính tắc.

Định lý 6.2 (Luật quán tính) : Số hệ số dương và số hệ số âm trong dạng chính tắc của một dạng toàn phương ω không phụ thuộc vào việc chọn cơ sở chính tắc.

Số hệ số dương được gọi *chỉ số dương quán tính*. Số hệ số âm gọi là *chỉ số âm quán tính*.

Chứng minh : Giả sử ω là dạng toàn phương trên $\mathbb{R}$ – không gian vectơ có hạng $r > 0$, có các cơ sở chính tắc :

$$\{u_1, ..., u_n\} \qquad \text{(I)}$$

$$\text{và} \quad \{v_1, ..., v_n\}. \qquad \text{(II)}$$

Ta có thể giả thiết rằng, đối với các cơ sở chính tắc (I) và (II) dạng toàn phương ω lần lượt có biểu thức tọa độ :

$$\omega(x) = b_1x_1^2 + ... + b_px_p^2 - b_{p+1}x_{p+1}^2 - ..... - b_rx_r^2 \qquad \text{(a)}$$

$$\text{và} \quad \omega(x) = c_1y_1^2 + ... + c_qy_q^2 - c_{q+1}x_{q+1}^2 - ..... - c_rx_r^2 \qquad \text{(b)}$$

trong đó : $b_i > 0$, $c_i > 0$, $i = 1, ..., r$.

Ta cần chứng tỏ $p = q$. Xét các không gian con :

$$L = \mathscr{L}(\{u_1, ..., u_p\}) \text{ và } M = \mathscr{L}(\{v_{q+1}, ..., v_n\}).$$

Giả sử $x \in M \cap L$, $x \neq \theta$. Vì $x \in L$ nên theo (a) ta có $\omega(x) > 0$. Vì $x \in M$ nên theo (b) ta có : $\omega(x) < 0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ rằng $M \cap L = \{\theta\}$. Theo Mệnh đề 3.7 ta có :

$$\dim(L \oplus M) = \dim L + \dim M \leq \dim V.$$

Do đó ta có:

$$p + (n - q) \leq n.$$

Vậy $p - q \leq 0$, hay $p \leq q$.

Tương tự bằng cách xét các không gian con :

$L' = \mathscr{L}(\{u_{p+1}, ..., u_n\})$, $M' = \mathscr{L}(\{v_1, ..., v_q\})$ ta có : $q \leq p$.

Vậy $p = q$.

BÀI TẬP

Đề bài

6.1. Trong K – không gian vectơ V xét cơ sở $\{u_1, ..., u_n\}$. Giả sử f là một dạng tuyến tính trên V. Hãy chứng tỏ rằng, đối với mọi vectơ $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_iu_i$, f(x) có thể viết dưới dạng :

$$f(x) = (a_1 \quad \dots \quad a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ma trận hàng $(a_1 \ \dots \ a_n)$ gọi là ma trận của dạng f đối với cơ sở đang xét.

6.2. Xét các dạng tuyến tính f_1, f_2 trên K – không gian vectơ n chiều V.

1) Chứng minh rằng, ánh xạ $\varphi : V \times V \to K$ xác định bởi $\varphi(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ là một dạng song tuyến tính trên V.

2) Giả sử $A = (a_1 \ \dots \ a_n)$, $B = (b_1 \ \dots \ b_n)$ là ma trận của các dạng f_1 và f_2 đối với cơ sở nào đó của không gian vectơ V. Hãy xác định ma trận của dạng song tuyến tính φ đối với cơ sở đó. Tìm điều kiện cần và đủ để φ là dạng song tuyến tính đối xứng.

6.3. Tìm ma trận của dạng song tuyến tính φ trên không gian $R_{n+1}[x]$ các đa thức có bậc nhỏ hơn n + 1 xác định bởi :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

đối với cơ sở $\{1, t, \dots, t^n\}$ và cơ sở $\{1, t-1, \dots, (t-a)^n\}$.

6.4. 1) Trong không gian vectơ K^n xét các vectơ $x = (a_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Xác định các tích tenxơ $x \otimes y$, $y \otimes x$. Tìm điều kiện để $x \otimes y = y \otimes x$.

2) Giả sử f, g là các dạng tuyến tính trên không gian vectơ K^n cho bởi :

$$f(x) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n \ ; \ \ g(x) = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$$

với $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Hãy xác định tích tenxơ $f \otimes g$.

6.5. Với những giá trị nào của λ thì dạng toàn phương trên $\mathbb{R}^3$ sau xác định dương :

$$\omega(x) = \lambda x_1^2 + 6x_2^2 + (\lambda - 2)x_3^2 + 4x_1x_2$$

với $x = (a_1, x_2, x_3)$.

6.6. Hãy dùng phương pháp Lagrăng đưa các dạng toàn phương trên không gian vectơ K^n sau đây về dạng chính tắc :

1) $\omega(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$;

2) $\omega(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$, với $x = (x_1, x_2, x_3)$;

3) $\omega(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$, với $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$,

với $x = (x_1, x_2, x_3)$

6.7. Dùng phương pháp giá trị riêng đưa các dạng toàn phương trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ sau đây về dạng chính tắc :

1) $\omega(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3$;

2) $\omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

3) $\omega(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$,

trong đó : $x = (x_1, x_2, x_3)$.

6.8. Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^3$ dạng toàn phương ω đối với cơ sở chính tắc có biểu thức tọa độ :

$$\omega(x) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Hãy tìm một cơ sở trực chuẩn của $\mathbb{R}^3$ là cơ sở chính tắc của ω. Viết dạng chính tắc của ω ứng với cơ sở chính tắc đó.

Đáp số và hướng dẫn

6.1. *Hướng dẫn :* Đặt $a_i = f(u_i)$, $i = 1, ..., n$, ta có :

$$f(x) = a_1x_1 + ... + a_nx_n = (a_1 \;\; ... \;\; a_n)(x_1 \;\; ... \;\; x_n)^t.$$

6.2. 2) $A^t.B = (a_ib_j)_{n\times n}$. Dạng song tuyến tính φ đối xứng khi và chỉ khi $a_ib_j = a_jb_i$, $\forall i, j$.

6.3. $$\left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{n+1\times n+1} \; ; \; \left(\frac{(1-a)^{i+j-1} + (-1)^{i+j}a^{i+j-1}}{i+j-1}\right)_{n+1\times n+1}$$

6.4. *Hướng dẫn :*

1) Theo định nghĩa $x \otimes y$ là một dạng song tuyến tính trên $(K^n)^*$ xác định bởi :

$$x \otimes y(f, g) = \langle x \mid f\rangle\langle y \mid g\rangle.$$

Do đó $x \otimes y$ được xác định nếu biết ma trận C của nó đối với một cơ sở nào đó của không gian $(K^n)^*$. Chẳng hạn, cơ sở đối ngẫu $\{e^1, ..., e^n\}$ của cơ sở chính tắc $\{e_1, ..., e_n\}$ của K^n. Áp dụng kết quả Bài 6.2 ta có : $C = (x_i y_j)_{n\times n}$.

Tương tự ma trận D của dạng song tuyến tính $y \otimes x$ là $D = (y_i x_j)_{n\times n}$. $x \otimes y = y \otimes x$ khi và chỉ khi $x_i y_j = x_j y_i$, $\forall i, j$. Do đó tích tenxơ nói chung không giao hoán.

2) Vì $f \otimes g$ là một dạng song tuyến tính trên không gian K^n. Theo định nghĩa ta có :

$$f \otimes g((x, y)) = \langle x \mid f\rangle\langle y \mid g\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j y_j\right)$$

$$= (x_1 \dots x_n)\,(a_1 \dots a_n)^t\,(b_1 \dots b_n)\,(y_1 \dots y_n)^t.$$

Vậy ma trận của $f \otimes g$ đối với cơ sở chính tắc của K^n là $M = (a_i b_j)_{n\times n}$.

6.5. Sử dụng kết quả dạng toàn phương thực xác định dương khi và chỉ khi các định thức con chính đều dương.

Đáp số : $\lambda > 2$.

6.6. 1) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, với phép biến đổi tọa độ :

$$x_1 = y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{5}{6}y_3 \;;\; x_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{6}y_3 \;;\; x_3 = \frac{1}{3}y_3.$$

2) $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$, với phép biến đổi tọa độ :

$$x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \;;\quad x_2 = y_1 + y_2 - y_3 \;;\quad x_3 = y_3.$$

3) $y_1^2 - y_2^2$, với phép biến đổi tọa độ :

$$x_1 = y_1 - y_2 - y_3 \;;\quad x_2 = y_1 + y_2 - y_4 \;;\quad x_3 = y_3 \;;\; x_4 = y_4.$$

6.7. 1) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}y_1^2 + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}y_2^2$;

2) $3y_1^2 + 6y_2^2 - 2y_3^2$;

3) $5y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$.

6.8. Các giá trị riêng và các vectơ riêng tương ứng ω :

$$\lambda_1 = 3\ , \qquad u_1 = \left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

$$\lambda_2 = 6\ , \qquad u_2 = \left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)$$

$$\lambda_3 = 9\ , \qquad u_3 = \left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

Hệ $\{u_1, u_2, u_3\}$ là cơ sở trực chuẩn cần tìm. Đối với cơ sở đó ω có biểu thức tọa độ :

$$\omega(x) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2.$$

Chương VII
HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

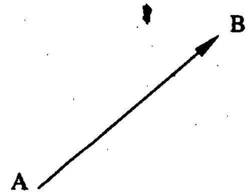
7.1. KHÔNG GIAN CÁC VECTƠ TỰ DO

7.1.1. Vectơ tự do

Ta sẽ gọi các đường thẳng, các mặt phẳng và không gian hình học là các không gian điểm một chiều, không gian điểm hai chiều và không gian điểm ba chiều, ký hiệu tương ứng là $Đ^1$, $Đ^2$ và $Đ^3$. Thuật ngữ số chiều của $Đ^n$, n = 1, 2, 3 chỉ là sự hình dung trực giác đường thẳng có một chiều dài ; mặt phẳng có chiều dài, chiều rộng và không gian có chiều dài, chiều rộng và chiều cao.

1. Vectơ buộc

Ứng với mỗi cặp điểm (A, B) của không gian điểm $Đ^n$ ta xác định một vectơ buộc (hay đoạn thẳng có định hướng), ký hiệu là $\overrightarrow{AB}$. Điểm A được gọi là *điểm gốc*, điểm B được gọi là *điểm ngọn* của vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$.



Hình 7.1

– *Hướng* của vectơ $\overrightarrow{AB}$ đi từ điểm gốc A đến điểm ngọn B (hình 7.1). Nếu A ≡ B thì $\overrightarrow{AA}$ gọi là vectơ buộc "không", là vectơ buộc hướng không xác định.

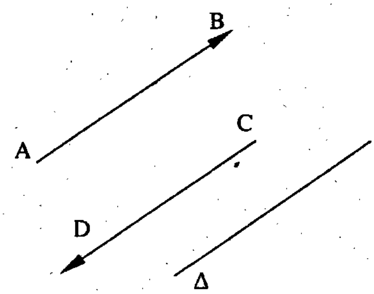
– *Độ dài* của vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$, ký hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, là khoảng cách giữa hai điểm A và B.

Vectơ buộc có độ dài bằng 1 gọi là *vectơ buộc đơn vị*.

Vectơ cộng tuyến :

Vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$ gọi là *song song* với đường thẳng Δ nếu đường thẳng AB trùng hoặc song song với đường thẳng Δ, ta viết $\overrightarrow{AB} \parallel \Delta$.

Hai vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng song song với một đường thẳng được gọi là hai vectơ *cộng tuyến* (hay cùng phương), ta viết $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ (hình 7.2).

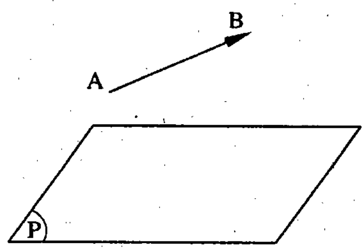


Hình 7.2

Hai vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ được gọi là *cùng hướng* (hoặc *ngược hướng*) nếu $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ và hai điểm B, D ở cùng phía (hoặc khác phía) đối với đường thẳng AC.

Vectơ đồng phẳng :

Vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$ gọi là song song với mặt phẳng P nếu đường thẳng AB song song với mặt phẳng P hoặc $AB \subset P$. ta viết $\overrightarrow{AB} \parallel P$ (hình 7.3).



Hình 7.3

Trong không gian $Đ^3$ các vectơ buộc cùng song song với một mặt phẳng gọi là *đồng phẳng*.

Vectơ buộc bằng nhau :

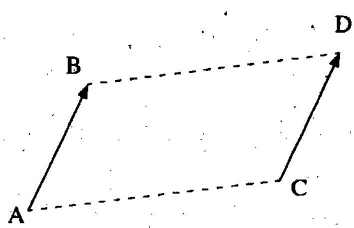
Định nghĩa :

– Các vectơ buộc "không" thì bằng nhau, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{CC}$.

– Đối với các vectơ buộc khác vectơ buộc "không" thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ nếu và chỉ nếu các điều kiện sau đây được thỏa mãn :

a) $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right|$.

b) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ và cùng hướng (hình 7.4).



Hình 7.4

2. Vectơ tự do

Ta nhận thấy rằng, quan hệ "bằng nhau" của các vectơ buộc là một quan hệ tương đương trên tập các vectơ buộc của không gian điểm $Đ^n$.

Định nghĩa : Mỗi lớp vectơ buộc bằng nhau được gọi là *vectơ tự do*. Ta ký hiệu E^n là tập các vectơ tự do trong $Đ^n$, n = 1, 2, 3.

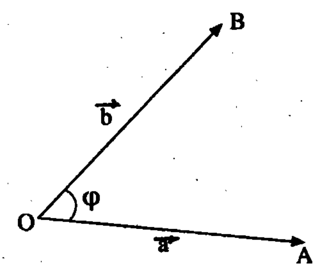
Các vectơ tự do được ký hiệu bởi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

Nếu $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ thì ta viết $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, và nói rằng buộc vectơ tự do $\vec{a}$ ở điểm A. Độ dài, phương, hướng của vectơ buộc $\overrightarrow{AB}$ là độ dài, phương, hướng của vectơ tự do $\vec{a}$.

Lớp vectơ buộc không gọi là vectơ tự do "không", ký hiệu là $\vec{O}$.

Góc của hai vectơ tự do :

Giả sử $\vec{a}, \vec{b}$ là các vectơ tự do khác vectơ $\vec{O}$. Ta buộc hai vectơ tự do $\vec{a}, \vec{b}$ ở điểm O : $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Các vectơ buộc $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ tạo nên hai góc φ và (2π – φ) (hình 7.5). Góc φ (0 ≤ φ ≤ π) được gọi là *góc* của hai vectơ tự do $\vec{a}$ và $\vec{b}$.



Hình 7.5

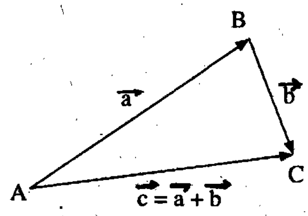
Nếu $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ thì ta nói các vectơ tự do $\vec{a}, \vec{b}$ *vuông góc* với nhau, ký hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Các vectơ tự do gọi là *cộng tuyến* hoặc *đồng phẳng* nếu các vectơ buộc tương ứng với mỗi vectơ tự do đó là cộng tuyến hoặc đồng phẳng.

7.1.2. Các phép toán trên tập các vectơ tự do

1. Phép cộng hai vectơ tự do

Tổng của hai vectơ tự do $\vec{a}$, $\vec{b}$ thuộc E^n là vectơ tự do $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ được xác định như sau : Ta buộc vectơ tự do $\vec{a}$ ở điểm A : $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$; rồi buộc vectơ tự do $\vec{b}$ ở điểm B : $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó $\overrightarrow{AC} = \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (hình 7.6).



Hình 7.6

2. Phép nhân số thực với vectơ tự do

Tích của số thực α với vectơ tự do $\vec{a}$ là một vectơ tự do, ký hiệu là $\alpha\vec{a}$, được xác định như sau :

– Độ dài : $|\alpha\vec{a}| = |\alpha|\,|\vec{a}|$.

– Phương : $\alpha\vec{a} // \vec{a}$, $\alpha\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $\alpha > 0$ và $\alpha\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $\alpha < 0$.

Vectơ tự do $(-1)\vec{a}$ gọi là *vectơ đối* của vectơ tự do $\vec{a}$, ký hiệu là $-\vec{a}$.

Ở chương trình Trung học đã chứng minh rằng, các hệ thức sau đây luôn luôn thỏa mãn đối với các vectơ tự do thuộc E^n và các số thực $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) Phép cộng vectơ tự do có các tính chất sau đây :

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (tính chất giao hoán).

b) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (tính chất kết hợp).

c) $\vec{a} + \vec{O} = \vec{a}$ ($\vec{O}$ là phần tử trung hòa).

d) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{O}$.

Vậy $(E^n, +)$ là một nhóm Aben.

2) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$.

3) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.

4) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

5) $1.\vec{a} = \vec{a}$.

Ta nhận thấy rằng, các điều kiện của định nghĩa không gian vectơ đều được thỏa mãn.

Vậy, *tập các vectơ tự do E^n với phép cộng vectơ tự do và phép nhân số thực với vectơ tự do là một không gian vectơ trên trường số thực* $\mathbb{R}$.

Dễ dàng chứng minh được các điều khẳng định sau đây :

– Hệ hai vectơ tự do $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $\vec{u}_1 \,//\, \vec{u}_2$, tức là $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ là hai vectơ tự do cộng tuyến. Vậy ta có $\dim E^1 = 1$.

– Hệ ba vectơ tự do $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi các vectơ tự do $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ và $\vec{u}_3$ đồng phẳng. Vậy ta có $\dim E^2 = 2$.

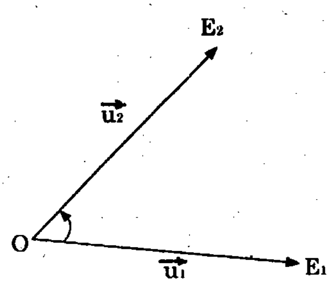
– Trong $\mathbb{R}$ – không gian vectơ E^3 hệ bốn vectơ tự do luôn luôn phụ thuộc tuyến tính. Vậy ta có $\dim E^3 = 3$.

7.1.3. Cơ sở định hướng

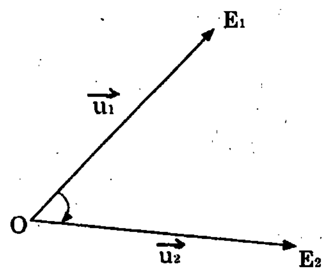
1) Giả sử hệ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}$ – không gian vectơ E^2. Ta buộc các vectơ tự do $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ ở điểm O bất kỳ của không gian điểm $Đ^2$:

$$\overrightarrow{OE_1} = \vec{u}_1,\ \overrightarrow{OE_2} = \vec{u}_2.$$

Cơ sở $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ được gọi là *định hướng dương* nếu phép quay ngắn nhất từ $\overrightarrow{OE_1}$ đến trùng với hướng của $\overrightarrow{OE_2}$ ngược chiều kim đồng hồ (hình 7.7).



Hình 7.7



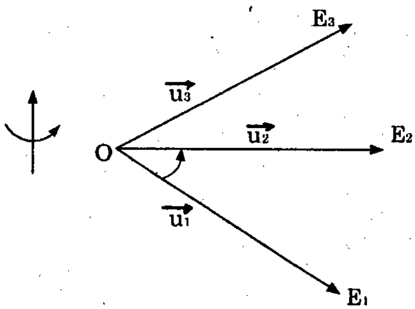
Hình 7.8

Trong trường hợp ngược lại, cơ sở $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ gọi là *cơ sở định hướng âm* (hình 7.8).

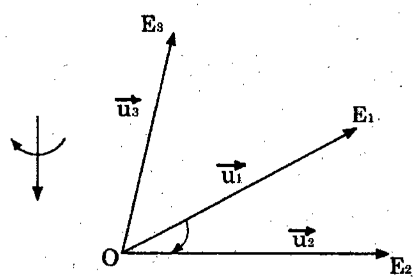
2) Giả sử hệ $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ là một cơ sở của R – không gian vectơ E^3. Ta buộc các vectơ tự do của cơ sở đó ở điểm O bất kỳ của không gian $Đ^3$:

$$\overrightarrow{OE_1} = \vec{u}_1,\ \overrightarrow{OE_2} = \vec{u}_2,\ \overrightarrow{OE_3} = \vec{u}_3.$$

Cơ sở $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ được gọi là *định hướng dương* nếu khi quay cái vặn nút chai theo chiều quay ngắn nhất từ $\overrightarrow{OE_1}$ đến $\overrightarrow{OE_2}$ thì cái vặn nút chai tiến theo hướng $\overrightarrow{OE_3}$ (hình 7.9).



Hình 7.9



Hình 7.10

Trong trường hợp ngược lại, cơ sở $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ được gọi là *định hướng âm* (hình 7.10).

7.1.4. Tích vô hướng

Định nghĩa : Tích vô hướng của hai vectơ tự do $\vec{a}$, $\vec{b}$ thuộc E^n là một số thực, ký hiệu là $(\vec{a}\ .\ \vec{b})$, được xác định như sau :

*) $(\vec{a}\ .\ \vec{O}) = (\vec{O}\ .\ \vec{a}) = 0$;

*) Nếu $\vec{a} \neq \vec{O}$, $\vec{b} \neq \vec{O}$ thì $(\vec{a}\ .\ \vec{b}) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$, (7.1).

trong đó φ là góc giữa hai vectơ tự do $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Ở chương trình Toán trung học đã chứng minh được rằng, tích vô hướng của hai vectơ xác định bởi (7.1) có các tính chất sau đây :

1) $(\vec{a}\ .\ \vec{b}) = (\vec{b}\ .\ \vec{a})$;

2) $((\vec{a} + \vec{b}) . \vec{c}) = (\vec{a} . \vec{c}) + (\vec{b} . \vec{c})$;

3) $(\alpha\vec{a} . \vec{b}) = \alpha(\vec{a} . \vec{b})$;

4) $(\vec{a} . \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \geq 0$;

5) $(\vec{a} . \vec{b}) = 0$ khi và chỉ khi hoặc $\vec{a} = \vec{O}$, hoặc $\vec{b} = \vec{O}$ hoặc $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ta nhận thấy rằng, tích vô hướng của các vectơ tự do thỏa mãn các điều kiện của định nghĩa không gian vectơ Euclid ở mục 3.6.1. Vậy $\mathbb{R}$ – không gian vectơ E^n là một không gian vectơ Euclid đối với tích vô hướng xác định bởi (7.1). Ta sẽ gọi là không gian Euclid E^n.

Giả sử hệ $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid E^3. Với các vectơ tự do :

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} ;$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} .$$

Theo Mệnh đề 3.11, ta có :

$$(\vec{a} . \vec{b}) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \qquad (7.2)$$

Từ (7.1) và (7.2) ta có các công thức sau đây :

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} ; \qquad (7.3)$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \qquad (7.4)$$

7.1.5. Tích vectơ

Định nghĩa : *Tích vectơ* (hay *tích có hướng*) của vectơ tự do $\vec{a}$ với vectơ tự do $\vec{b}$ là một vectơ tự do, ký hiệu là $\vec{d} = \vec{a} \wedge \vec{b}$, được xác định như sau :

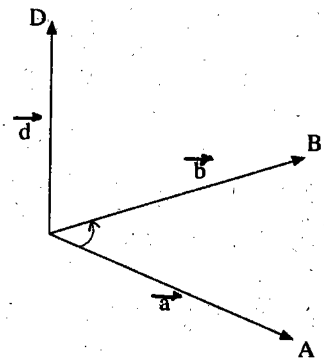
*) $\vec{a} \wedge \vec{O} = \vec{O} \wedge \vec{a} = \vec{O}$.

*) Nếu $\vec{a} \neq \vec{O}, \vec{b} \neq \vec{O}$ thì $\vec{d}$ có :

– Độ dài : $|\vec{d}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$.

– Phương : $\vec{d} \perp \vec{a}$ và $\vec{d} \perp \vec{b}$.

– Hướng : Nếu $\vec{d} \neq \vec{O}$ thì $\vec{d}$ có hướng sao cho hệ $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\}$ là một cơ sở định hướng dương (hình 7.11).



Hình 7.11

Tính chất : Đối với mọi vectơ tự do của không gian vectơ E^3 và mọi số thực α các hệ thức sau đây luôn luôn thỏa mãn :

1) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -(\vec{b} \wedge \vec{a})$;

2) $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{O}$ khi và chỉ khi hoặc $\vec{a} = \vec{O}$ hoặc $\vec{b} = \vec{O}$ hoặc $\vec{a} \,//\, \vec{b}$;

3) $\alpha\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \alpha\vec{b} = \alpha\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$;

4) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{c} + \vec{b} \wedge \vec{c}$.

Từ các tính chất trên đây suy ra rằng, nếu hệ $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ là một cơ sở trực chuẩn định hướng dương của không gian Euclid E^3 thì ta có :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k},\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i},\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}\ ;$$

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{O}.$$

Đối với các vectơ tự do :

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\ ;$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

ta có :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\right) \wedge \left(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\right)$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\,\vec{i} - (x_2z_1 - z_1z_2)\,\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}. \qquad (7.5)$$

Hệ thức (7.5) có thể viết dưới dạng sau đây :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (7.6)$$

Với quy ước định thức cấp 3 ở vế phải (7.6) khai triển theo hàng thứ nhất.

7.1.6. Tích hỗn tạp

Định nghĩa : *Tích hỗn tạp* (hay *thể tích có hướng*) của ba vectơ tự do $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$, ký hiệu là $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]$, là tích vô hướng vectơ tự do $\vec{a} \wedge \vec{b}$ với vectơ tự do $\vec{c}$.

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}.\vec{c}\right) \qquad (7.7)$$

Giả sử rằng :

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}\ ;$$

$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}\ ;$$

$$\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

trong đó $\left\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right\}$ là một cơ sở trực chuẩn định hướng dương của không gian Euclid E^3. Khi đó theo các công thức (7.2), (7.3) và (7.7) ta có :

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (7.8)$$

Tính chất : Theo hệ thức (7.8) và tính chất của định thức ta có :

1) $\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0$ nếu có ít nhất một vectơ bằng $\vec{0}$, hoặc có hai vectơ cộng tuyến, hoặc ba vectơ đồng phẳng.

2) Tích hỗn tạp không thay đổi khi ta hoán vị vòng quanh các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, tức là :

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right].$$

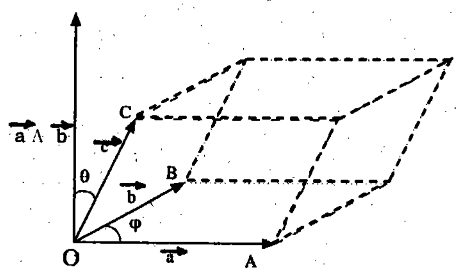
3) Điều kiện cần và đủ để 3 vectơ tự do $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác vectơ $\vec{O}$ đồng phẳng là :

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = 0.$$

4) Thể tích của hình hộp có các cạnh $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ bằng $\left\|\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right]\right\|$.

Chứng minh : Các điều khẳng định 1), 2) và 3) trực tiếp suy từ hệ thức (7.8) và tính chất của định thức. Ta chứng minh tính chất 4.

Gọi φ là góc giữa hai vectơ tự do $\vec{a}, \vec{b}$ và θ là góc giữa hai vectơ tự do $\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c}$ (hình 7.12).



Hình 7.12

Khi đó hình hộp đang xét có diện tích đáy $S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ và đường cao $h = |\vec{c}|\cos\theta$.

Theo định nghĩa, tích vô hướng, tích vectơ và tích hỗn tạp ta có :

$$\left|\left(\vec{a} \wedge \vec{b}.\vec{c}\right)\right| = |\vec{a} \wedge \vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$

$$= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi|\vec{c}|\cos\theta$$

$$= S.h = V.$$

Điều khẳng định được chứng minh.

7.1.7. Tâm tỷ cự

Mệnh đề 7.1 : Giả sử $M_1, ..., M_p$ là một họ điểm cho trước trong không gian $Đ^n$. Khi đó đối với mỗi họ hệ số $\lambda_1, ..., \lambda_p$, thỏa mãn $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \neq 0$ tồn tại duy nhất điểm $G \in Đ^n$ sao cho :

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}.$$

Chứng minh : Ta chọn điểm $G \in Đ^n$ sao cho

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \overrightarrow{OM_i}$$

trong đó $k = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i$.

Ta có :

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\left(\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}\right) = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i \overrightarrow{OM_i} - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i \overrightarrow{OG}$$

$$= k\overrightarrow{OG} - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG}\left(k - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i\right) = \vec{0}.$$

Vậy : $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$.

Giả sử điểm $G' \in Đ^n$ thỏa mãn $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \overrightarrow{G'M_i} = \vec{0}$. Ta có :

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \overrightarrow{GM_i} - \sum_{i=1}^{p}\lambda_i \overrightarrow{G'M_i} = \vec{0}\ ;$$

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\left(\overrightarrow{GM_i} - \overrightarrow{G'M_i}\right) = \vec{0}\ ;$$

$$\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\right)\overrightarrow{GG'} = \vec{0}.$$

Vì $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \neq 0$ nên $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$, hay G' = G.

Định nghĩa : Điểm G ∈ $Đ^n$ thỏa mãn điều kiện Mệnh đề 7.1 được gọi là *tâm tỷ cự* của hệ điểm $M_1, ..., M_p$ đối với họ hệ số $\lambda_1, ..., \lambda_p$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i \neq 0$.

Đặc biệt, nếu $\lambda_1 = ... = \lambda_p = 1$ thì G gọi là *trọng tâm* của hệ điểm $M_1, ..., M_p$.

7.2. HỆ TỌA ĐỘ AFIN

7.2.1. Định nghĩa hệ tọa độ afin

Ta chọn điểm O ∈ $Đ^n$ và một cơ sở $\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\}$ của không gian vectơ E^n. Khi đó hệ thống $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ được gọi là *hệ tọa độ afin* của không gian điểm $Đ^n$. Điểm O được gọi là *điểm gốc* (hay *mốc*) tọa độ.

Nếu cơ sở $\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\}$ là một cơ sở trực chuẩn của không gian Euclid E^n thì hệ thống $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ được gọi là *hệ tọa độ vuông góc* của không gian điểm $Đ^n$.

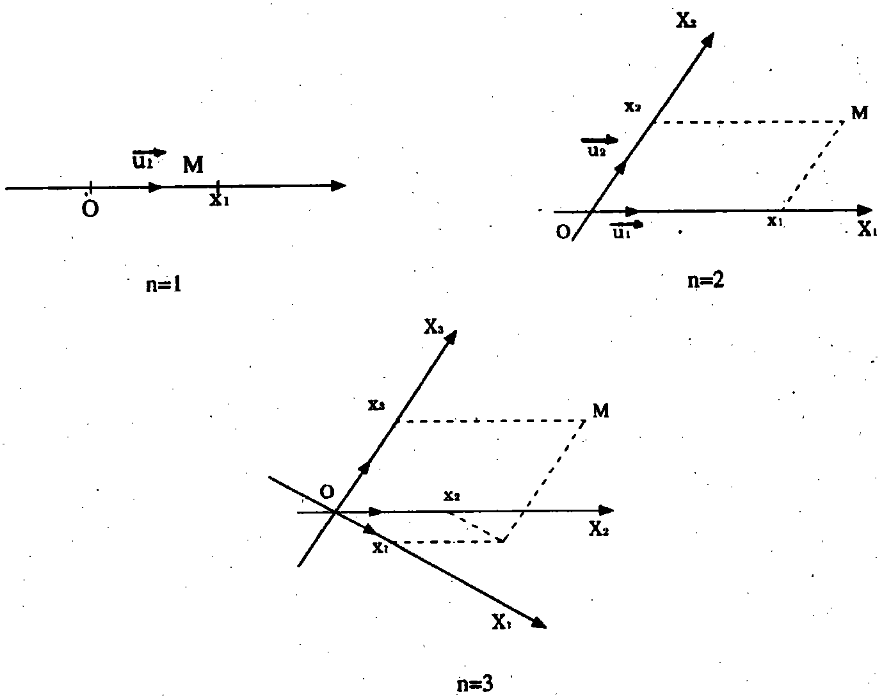
Xét hệ tọa độ afin $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ với $\|\overrightarrow{u_i}\| = 1, i = 1, ..., n$.

Ta buộc các vectơ tự do $\overrightarrow{u_i}$, i = 1, ..., n ở điểm gốc O và xét các trục số OX_i có gốc là điểm O, vectơ đơn vị là $\overrightarrow{u_i}$ (hình 7.13).

Khi đó các trục số OX_i được gọi là *hệ trục tọa độ* (hay *hệ quy chiếu*) *afin* tương ứng với hệ tọa độ afin $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ thường được ký hiệu là $O.X_1 ... X_n$.

Với mỗi điểm M ∈ $Đ^n$, đặt tương ứng với vectơ tự do $\overrightarrow{OM} = \vec{u} \in E^n$. Nếu $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{u_i}$ thì bộ số thực $(x_1, ..., x_n)$ được gọi là *tọa độ* của điểm M (tọa độ của vectơ tự do $\vec{u}$) đối với hệ tọa độ afin $\left(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\right)$ (hay đối với hệ trục toạ độ $O.X_1...X_n$) và ta viết :

$$M(x_1, ..., x_n)\ (\vec{u}(x_1, ..., x_n)).$$



Hình 7.13

Nếu cơ sở $\left\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\right\}$ là một cơ sở định hướng dương thì hệ tọa độ afin $\left(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\right)$ và hệ trục toạ độ $O.X_1 ... X_n$ gọi là *hệ thuận*. Trong trường hợp ngược lại được gọi là *hệ nghịch*.

7.2.2. Phép biến đổi tọa độ afin

Giả sử $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ và $(O', \overrightarrow{u'_1}, ..., \overrightarrow{u'_n})$ là các hệ tọa độ afin của không gian điểm $Đ^n$.

Giả sử $T = (t_{ij})_{n\times n}$ là ma trận chuyển từ cơ sở $\left\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\right\}$ sang cơ sở $\left\{\overrightarrow{u'_1}, ..., \overrightarrow{u'_n}\right\}$.

Ta có :

$$\overrightarrow{u'_i} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki}\overrightarrow{u_k}. \qquad (a)$$

Đối với mỗi điểm $M \in Đ^n$ ta có :

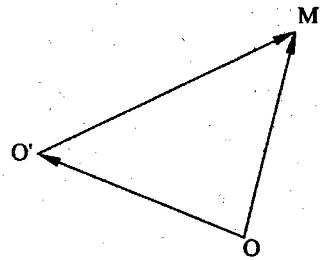
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \qquad (b)$$

Giả sử rằng :

$$\overrightarrow{OO'} = \sum_{i=1}^{n} b_i\overrightarrow{u_i};$$

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{u_i};$$

$$\overrightarrow{O'M} = \sum_{i=1}^{n} x'_i\overrightarrow{u'_i}.$$



Hình 7.14

Theo (a) và (b) ta có :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\overrightarrow{u_i} = \sum_{i=1}^{n} b_i\overrightarrow{u_i} + \sum_{j=1}^{n} x'_j\left(\sum_{k=1}^{n} t_{kj}\overrightarrow{u_k}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(b_i + \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j\right)\vec{u}_i. \qquad (c)$$

So sánh hệ số của $\vec{u}_i$ ở hai vế của (c), vì hệ $\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

$$x_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x'_j, \quad i = 1, ..., n \qquad (7.9)$$

trong đó : $(x_1, ..., x_n)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ afin $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$; $(x'_1, ..., x'_n)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ afin $(O', \overrightarrow{u'_1}, ..., \overrightarrow{u'_n})$.

Công thức (7.9) được gọi là *công thức biến đổi tọa độ* từ hệ tọa độ afin $(O, \overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n})$ sang hệ tọa độ afin $(O', \overrightarrow{u'_1}, ..., \overrightarrow{u'_n})$.

Có thể chứng minh được rằng, nếu định thức |T| > 0 thì các cơ sở $\{\overrightarrow{u_1}, ..., \overrightarrow{u_n}\}$ và $\{\overrightarrow{u'_1}, ..., \overrightarrow{u'_n}\}$ cùng hướng (nghĩa là hai cơ sở cùng định hướng dương hoặc cùng định hướng âm) ; nếu |T| < 0 thì hai cơ sở ngược hướng.

7.3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG

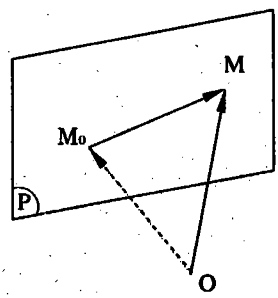
7.3.1. Phương trình mặt phẳng

1. Phương trình tham số của mặt phẳng

Giả sử P là một mặt phẳng cho trước trong không gian $Đ^3$ (hình 7.15).

Đặt : $E_p = \{\vec{u} \in E^3 : \vec{u} /\!/ P\}$

dễ thấy tập E_p là một không gian con 2 chiều của không gian E^3. Không gian con E_p được gọi là *không gian chỉ phương của mặt phẳng P.*



Hình 7.15

Giả sử $(O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ là một hệ tọa độ afin của không gian $Đ^3$. Chọn điểm $M_0(b_1, b_2, b_3) \in P$, khi đó đối với mỗi điểm $M(x_1, x_2, x_3) \in P$ ta có $\overrightarrow{M_0M} \in E_p$ và :

$$\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \sum_{i=1}^{3}(x_i - b_i)\overrightarrow{u_i}. \qquad (a)$$

Giả sử hệ $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ là một cơ sở của không gian E_p và :

$$\overrightarrow{v_j} = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\overrightarrow{u_i}, \ j = 1, 2 ;$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \sum_{j=1}^{2} t_j\overrightarrow{v_j}.$$

Ta có :

$$\overrightarrow{M_oM} = \sum_{j=1}^{2} t_j \left(\sum_{i=1}^{3} a_{ij} \overrightarrow{u_i} \right) = \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij} t_j \right) \overrightarrow{u_i} . \qquad \text{(b)}$$

So sánh vế phải các hệ thức (a) và (b), vì hệ $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ độc lập tuyến tính nên ta có :

$$x_i = b_i + \sum_{j=1}^{2} a_{ij} t_j \ ; i = 1, 2, 3 \qquad (7.10)$$

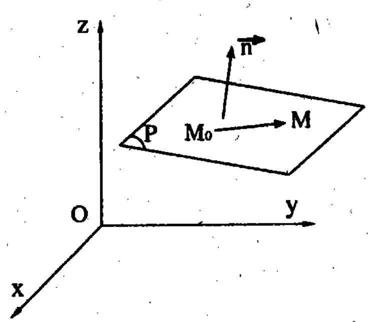
trong đó t_1, t_2 là tham số thực.

Hệ (7.10) được gọi là *phương trình tham số* của mặt phẳng P trong hệ tọa độ afin $(O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$.

2. Phương trình tọa độ của mặt phẳng

Pháp tuyến của mặt phẳng : Mỗi vectơ tự do $\vec{n}$ vuông góc với mặt phẳng P gọi là *vectơ pháp tuyến* của mặt phẳng đó.

Giả sử O.xyz là một hệ trục tọa độ vuông góc của không gian Đ^3.



Hình 7.16

Giả sử P là một mặt phẳng cho trước với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A, B, C)$ (hình 7.16). Chọn điểm $M_o(x_o, y_o, z_o) \in P$, khi đó đối với mọi điểm $M(x, y, z) \in P$ ta có $\vec{n} \perp \overrightarrow{M_oM}$. Do đó ta có hệ thức :

$$\left(\vec{n}.\overrightarrow{M_oM}\right) = 0 .$$

Theo công thức (7.2) ta có :

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0 ;$$

$$Ax + By + Cz - (Ax_o + By_o + Cz_o) = 0.$$

Đặt $D = -(Ax_o + By_o + Cz_o)$ ta có phương trình :

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (7.11)$$

Phương trình (7.11) gọi là *phương trình tọa độ* của mặt phẳng P trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz.

3. Góc của hai mặt phẳng

Giả sử trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz của không gian điểm $Đ^3$, các mặt phẳng P, Q có phương trình :

$$Ax + By + Cz + D = 0 ;$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng đó là $\vec{n}(A, B, C)$ và $\vec{n}'(A', B', C')$. Ta ký hiệu φ là góc của các vectơ tự do $\vec{n}$ và $\vec{n}'$; θ là góc của hai mặt phẳng P và Q. Ta biết rằng, θ là góc phẳng nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Do đó :

$$\cos\theta = |\cos\varphi|.$$

Theo công thức (7.4), ta có :

$$\cos\theta = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}. \qquad (7.12)$$

Theo công thức (7.12) ta có : Hai mặt phẳng P, Q vuông góc với nhau khi và chỉ khi :

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

7.3.2. Phương trình đường thẳng trong không gian

1. Phương trình tham số của đường thẳng

Giả sử l là một đường thẳng trong không gian $Đ^3$.

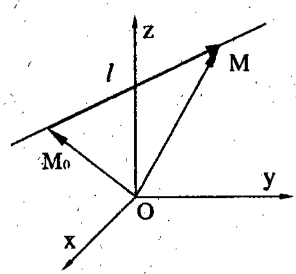
Ta đặt : $$E_1 = \left\{\vec{u} \in E^3 : \vec{u} \,//\, l\right\}.$$

Dễ thấy rằng, E_1 là một không gian con 1 chiều của không gian vectơ E^3.

Giả sử $\left(O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right)$ là một hệ tọa độ afin của không gian điểm $Đ^3$. Chọn một điểm $M_o(x_o, y_o, z_o) \in l$ (hình 7.17). Đối với mỗi điểm $M(x, y, z) \in l$ ta có $\overrightarrow{M_oM} \in E_1$.

Giả sử $\{\vec{\alpha}\}$ là cơ sở của không gian vectơ E_1 và $\overrightarrow{M_oM} = t\vec{\alpha}$.

Tham số t phụ thuộc vào vị trí của điểm $M \in l$.



Hình 7.17

Giả sử $\vec{\alpha} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2} + c\overrightarrow{u_3}$. Ta có :

$$\overrightarrow{M_oM} = ta\overrightarrow{u_1} + tb\overrightarrow{u_2} + tc\overrightarrow{u_3} \quad \text{(a)}$$

Mặt khác ta có :

$$\overrightarrow{M_oM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_o}.$$

Do đó :

$$\overrightarrow{M_oM} = (x - x_o)\overrightarrow{u_1} + (y - y_o)\overrightarrow{u_2} + (z - z_o)\overrightarrow{u_3}. \quad \text{(b)}$$

So sánh các đẳng thức (a) và (b) ta có :

$$\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases} \quad (7.13)$$

trong đó t là một tham số thực.

Hệ phương trình (7.13) gọi là *phương trình tham số* của đường thẳng l trong hệ trục tọa độ afin O.xyz. Vectơ $\vec{\alpha}(a, b, c)$ gọi là *vectơ chỉ phương* của đường thẳng l.

2. Phương trình tọa độ của đường thẳng

Đường thẳng l trong không gian $Đ^3$ có thể xem là giao tuyến của hai mặt phẳng P_1 và P_2 cắt nhau. Giả sử rằng, trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz các mặt phẳng đó có phương trình :

$$\begin{cases} P_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ P_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (7.14)$$

Vậy, mỗi điểm thuộc đường thẳng l có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình tuyến tính (7.14).

Hệ phương trình (7.14) gọi là *phương trình tọa độ* của đường thẳng l trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz.

Nhận thấy rằng, đường thẳng l vuông góc với các vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ và $\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ của các mặt phẳng P_1 và P_2.

Do đó vectơ chỉ phương của đường thẳng l có thể chọn là : $\vec{\alpha} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$.

3. Góc của hai đường thẳng

Giả sử trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz các đường thẳng l, l' có vectơ chỉ phương tương ứng là $\vec{\alpha}(a, b, c)$ và $\vec{\alpha}'(a', b', c')$. Ta ký hiệu φ là góc của các vectơ tự do $\vec{\alpha}$ và $\vec{\alpha}'$. Gọi θ là góc của hai đường thẳng l và l'. Vậy θ có thể xác định như sau :

Vì $0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}$ nên ta có :

$$\cos\theta = |\cos\varphi|.$$

Theo (7.4) ta có :

$$\cos\theta = \frac{|aa' + bb' + cc'|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}. \qquad (7.15)$$

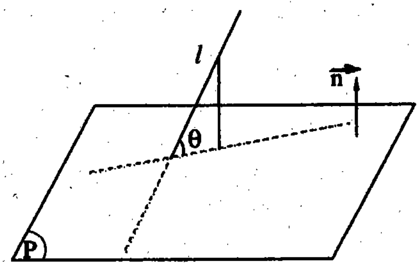
4. Góc của đường thẳng với mặt phẳng

Góc của đường thẳng l với mặt phẳng P là góc θ của đường thẳng l với hình chiếu vuông góc của nó trên mặt phẳng P (hình 7.18). Giả sử trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz đường thẳng l có vectơ chỉ phương là $\vec{\alpha}(a, b, c)$ và mặt phẳng P có phương trình tọa độ :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ký hiệu φ là góc của vectơ chỉ phương $\vec{\alpha}(a, b, c)$ của đường thẳng l với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A, B, C)$ của mặt phẳng P. Ta có : $\sin\theta = |\cos\varphi|$. Do đó góc θ có thể xác định như sau :

$$\sin\theta = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{7.16}$$



Hình 7.18

7.4. TÍNH CÁC KHOẢNG CÁCH

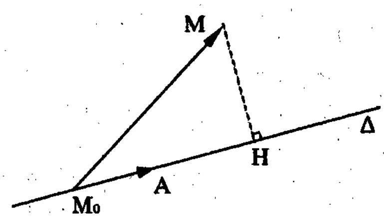
Định nghĩa : Khoảng cách giữa hai tập con X và Y của không gian điểm $Đ^n$, ký hiệu $\zeta(X, Y)$, là một số thực không âm được xác định như sau :

$$\zeta(X, Y) = \inf\left\{\left|\overrightarrow{AB}\right| : A \in X, B \in Y\right\}. \tag{7.17}$$

7.4.1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Giả sử trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz của không gian điểm $Đ^3$ đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{\alpha}(a, b, c)$, đi qua điểm $M_o(x_o, y_o, z_o)$. M(x, y, z) là một điểm bất kỳ thuộc $Đ^3$.

Khoảng cách $\zeta(M, \Delta)$ là độ dài đoạn thẳng vuông góc MH, (hình 7.19). Ta nhận thấy rằng, MH là đường cao của hình bình hành có các cạnh là $\overrightarrow{M_oM}$ và $\overrightarrow{M_oA} = \vec{\alpha}$. Theo định nghĩa của tích vectơ thì số đo diện tích của hình bình hành đó bằng số đo độ dài của vectơ $\overrightarrow{M_oM} \wedge \vec{\alpha}$. Do đó ta có :



Hình 7.19

$$\zeta(M, \Delta) = \frac{\left|\overrightarrow{M_oM} \wedge \vec{\alpha}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right|}.$$

Theo các công thức (7.3) và (7.5) ta có :

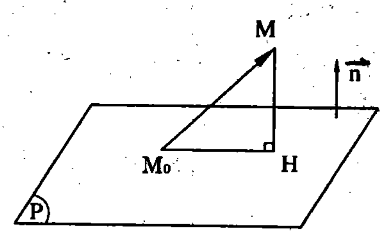
$$\zeta(M, \Delta) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y-y_o & z-z_o \\ b & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-x_o & z-z_o \\ a & c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o \\ a & b \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \quad (7.18)$$

7.4.2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Giả sử trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz mặt phẳng P có phương trình tọa độ :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

M(x, y, z) là một điểm bất kỳ trong $Đ^3$. Khoảng cách $\zeta(M, P)$ là độ dài đoạn thẳng MH (điểm H là chân đường thẳng vuông với mặt phẳng P (hình 7.20). Lấy điểm $M_o(x_o, y_o, z_o) \in P$. Ký hiệu φ là góc giữa vectơ $\overrightarrow{M_oM}$ với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A, B, C)$, xét tam giác vuông M_oMH ta có :



Hình 7.20

$$\zeta(M, P) = \left|\overrightarrow{M_oM}\right| \, |\cos\varphi|.$$

Theo các công thức (7.1) và (7.4) ta có :

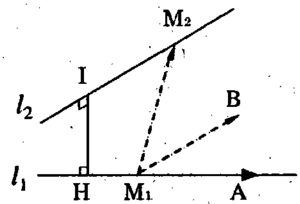
$$\zeta(M, P) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{M_oM}.\vec{n}\right)\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

$$= \frac{\left|A(x-x_o) + B(y-y_o) + C(z-z_o)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{\left|Ax + By + Cz + D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \quad (7.19)$$

7.4.3. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Xét hai đường thẳng chéo nhau l_1 và l_2. Giả sử trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz đường thẳng l_1 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{\alpha_1}(a_1, b_1, c_1)$ và đi qua điểm $M_1(x_1, y_1, z_1)$; đường thẳng l_2 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{\alpha_2}(a_2, b_2, c_2)$ và đi qua điểm $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (hình 7.21). Khoảng cách $\zeta(l_1, l_2)$ là độ dài đoạn thẳng vuông góc chung IH của hai đường thẳng l_1 và l_2. Ta nhận thấy rằng, IH là đường cao của hình hộp có các cạnh là $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1A} = \overrightarrow{\alpha_1}$ và $\overrightarrow{M_1B} = \overrightarrow{\alpha_2}$. Theo ý nghĩa hình học của tích hỗn tạp các vectơ thì thể tích hình hộp đó có giá trị bằng $\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}\right]\right|$; còn diện tích đáy của hình hộp bằng $\left|\overrightarrow{\alpha_1} \wedge \overrightarrow{\alpha_2}\right|$. Do đó ta có :



Hình 7.21

$$\zeta(l_1, l_2) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{\alpha_1}, \overrightarrow{\alpha_2}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{\alpha_1} \wedge \overrightarrow{\alpha_2}\right|}.$$

Theo các công thức (7.3), (7.5) và (7.8) ta có :

$$\zeta(l_1, l_2) = \frac{\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}}. \qquad (7.20)$$

7.5. ĐƯỜNG BẬC HAI

7.5.1. Nhắc lại các đường cônic

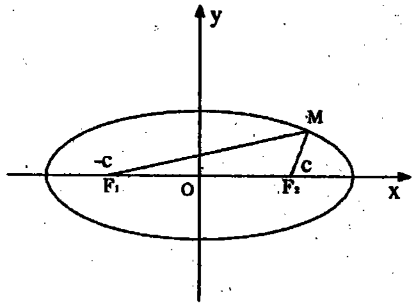
1. Elip

Elip là quỹ tích những điểm trong mặt phẳng có tổng các khoảng cách đến hai điểm cho trước F_1 và F_2 (gọi là *tiêu điểm*) bằng một số không đổi 2a (a > c = $\frac{1}{2}\zeta(F_1, F_2)$) ; khoảng cách $\zeta(F_1, F_2)$ gọi là *tiêu cự*.

Nếu chọn hệ trục tọa độ vuông góc O.xy sao cho $F_2(-c, 0)$, $F_1(c, 0)$ (hình 7.22) thì phương trình elip có dạng chính tắc (dạng đơn giản) là :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7.21)$$

trong đó : $b^2 = a^2 - c^2$; a, b được gọi là các *bán trục*.



Hình 7.22

2. Hypecbôn

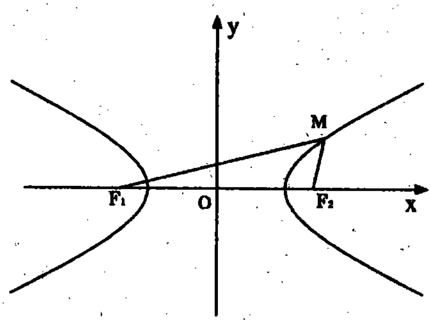
Hypecbôn là quỹ tích những điểm trong mặt phẳng có giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách đến hai điểm cố định F_1 và F_2 (gọi là tiêu điểm) bằng một số không đổi 2a.

Nếu ta chọn hệ trục tọa độ vuông góc O.xy sao cho $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ (hình 7.23) thì phương trình hypecbôn có dạng chính tắc :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7.22)$$

trong đó : $b^2 = c^2 - a^2$.

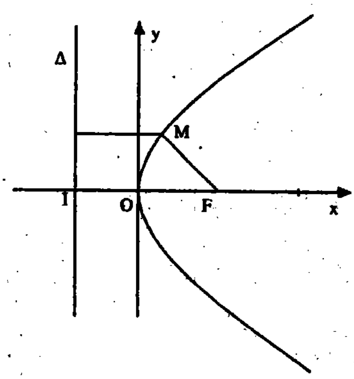
Trục Ox được gọi là *trục thực* ; trục Oy được gọi là *trục ảo* của hypecbôn.



Hình 7.23

3. Parabôn

Parabôn là quỹ tích những điểm trong mặt phẳng cách đều



Hình 7.24

một điểm F cho trước (gọi là *tiêu điểm*) và một đường thẳng Δ cố định (gọi là *đường chuẩn*).

Nếu ta chọn hệ trục tọa độ vuông góc O.xy sao cho $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ và đường chuẩn Δ có phương trình $x = -\frac{p}{2}$ (hình 7.24) thì parabôn có phương trình chính tắc :

$$y^2 = 2px. \tag{7.23}$$

7.5.2. Đưa phương trình của đường bậc hai về dạng chính tắc và phân loại đường bậc hai

Giả sử $(0, \vec{i}, \vec{j})$ là một hệ tọa độ vuông góc của không gian $Đ^2$.

Định nghĩa : Một đường bậc hai $\mathscr{L}$ là quỹ tích những điểm M(x, y) trong mặt phẳng có tọa độ thỏa mãn phương trình có dạng :

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_o = 0 \tag{7.24}$$

trong đó các hệ số a_{11}, a_{22}, a_{12} không đồng thời bằng 0.

Phương trình (7.24) được gọi là *phương trình tổng quát của đường bậc hai*.

Một bài toán được đặt ra là : Hãy xác định dạng của các đường bậc hai $\mathscr{L}$ cho bởi phương trình tổng quát (7.24). Để trả lời câu hỏi này, đưa phương trình của đường cong về dạng đơn giản.

– *Bước 1.* Khử số hạng chứa tích hai tọa độ ở vế trái của (7.24), xét dạng toàn phương :

$$\omega(\vec{u}) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy \tag{7.25}$$

trong đó : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Theo Mệnh đề 6.2, trong không gian E^2 có một cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ là cơ sở chính tắc của dạng toàn phương ω. Giả sử Q là ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ sang cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ (Q là ma trận trực giao). Ta có :

$$\left(\overrightarrow{u_1} \quad \overrightarrow{u_2}\right) = \left(\vec{i} \quad \vec{j}\right) Q.$$

Ta có phép biến đổi tọa độ tương ứng (phép quay) :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Trong cơ sở chính tắc $\left\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right\}$ dạng toàn phương ω có biểu thức tọa độ :

$$\omega(\vec{u}) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 \qquad (7.26)$$

trong đó : λ_1, λ_2 là các giá trị riêng của ma trận đối xứng $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ và các cột của ma trận chuyển Q là các vectơ riêng của ma trận A.

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O.x'y', phương trình của đường cong $\mathscr{L}$ có dạng :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + a'_o = 0. \qquad (7.27)$$

– *Bước 2 :* Để đơn giản các số hạng bậc nhất ở vế trái (7.27), nhóm các số hạng theo từng biến ở vế trái, sau đó thực hiện phép biến đổi tọa độ bởi phép tịnh tiến có dạng :

$$\begin{cases} x' = x'_o + X \\ y' = y'_o + Y \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O'.XY, phương trình đường bậc hai cho bởi (7.24) có một trong 9 dạng sau :

Trường hợp 1 : Nếu $\lambda_1\lambda_2 > 0$ thì ta có :

1) Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$: Đường $\mathscr{L}$ là elip (đường tròn khi $a^2 = b^2$).

2) Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$: Đường $\mathscr{L}$ suy biến về 1 điểm.

3) Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$: Đường $\mathscr{L}$ được gọi là elip ảo.

Trường hợp 2 : Nếu $\lambda_1\lambda_2 < 0$, chẳng hạn $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ thì ta có :

4) Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$: Đường $\mathscr{L}$ là hypecbôn.

5) Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ hay $\left(\dfrac{X}{a} + \dfrac{Y}{b}\right)\left(\dfrac{X}{a} - \dfrac{Y}{b}\right) = 0$: Đường $\mathscr{L}$ là cặp đường thẳng cắt nhau.

Trường hợp 3 : Nếu $\lambda_1\lambda_2 = 0$, chẳng hạn $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, thì ta có :

6) Hoặc $Y^2 = 2pX$: Đường $\mathscr{L}$ là parabôn.

7) Hoặc $Y^2 = b^2$ hay $Y = \pm b$: Đường $\mathscr{L}$ là cặp đường thẳng song song với trục O'X.

8) Hoặc $Y^2 = -b^2$ hay $Y = \pm ib$: Đường $\mathscr{L}$ được gọi là cặp đường thẳng ảo liên hợp song song.

9) Hoặc $Y^2 = 0$: Đường $\mathscr{L}$ là cặp đường thẳng trùng nhau và trùng với trục O'X.

Kết luận : Đường bậc hai $\mathscr{L}$ cho bởi phương trình tổng quát (7.24) chỉ có thể là một trong 9 loại trên. Trong đó các loại 3) và 8) không có ý nghĩa hình học.

Ví dụ : Đường cong $\mathscr{L}$ trong hệ tọa độ vuông góc $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$ có phương trình :

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0. \tag{a}$$

Hãy viết phương trình chính tắc của $\mathscr{L}$, xác định vị trí và vẽ đường cong đó đối với hệ trục tọa độ O.xy.

Bước 1 : Xét dạng toàn phương :

$$\begin{cases} \omega(\vec{u}) = 5x^2 + 4xy + 8y^2 \\ \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \end{cases}$$

Ma trận của dạng ω đối với cơ sở trực chuẩn $\left\{\vec{i}, \vec{j}\right\}$ là :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Ma trận A có các giá trị riêng : $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$.

Các vectơ riêng của A ứng với giá trị riêng 9 là $\alpha = (t, 2t)$, $t \neq 0$, với $t = 1$ ta có : $\alpha_1 = (1, 2)$; ứng với giá trị riêng 4 là $\alpha = (-2t, t)$, $t \neq 0$, với $t = 1$ ta có : $\alpha_2 = (-2, 1)$. Các vectơ α_1, α_2 là hệ trực giao. Chuẩn hóa ta có :

$$\beta_1 = \frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right); \ \beta_2 = \frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Thực hiện phép chuyển cơ sở :

$$\left(\overrightarrow{u_1} \quad \overrightarrow{u_2}\right) = \left(\vec{i} \quad \vec{j}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

hay
$$\begin{cases} \overrightarrow{u_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} \\ \overrightarrow{u_2} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} \end{cases}$$

Tương ứng với phép chuyển cơ sở trên ta có phép biến đổi tọa độ :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ O.x'y' đường cong đã cho có phương trình :

$$9x'^2 + 4y'^2 + 8\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 14\left(\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'\right) + 5 = 0$$

hay
$$9x'^2 + 4y'^2 + \frac{36}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 5 = 0. \qquad \text{(b)}$$

Bước 2 : Nhóm các số hạng ở vế trái (b) theo từng biến ta có :

$$9\left(x'^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x'\right) + 4\left(y'^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right) + 5 = 0.$$

Biến đổi để các biểu thức trong ngoặc thành các chính phương ta có :

$$9\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{36}{5} + 4\left(y' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{20} + 5 = 0,$$

hay
$$9\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Chuyển điểm gốc O về điểm $O'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)$ bởi phép tịnh tiến :

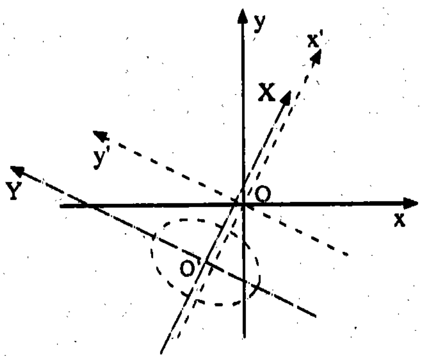
$$\begin{cases} x' = -\frac{2}{\sqrt{5}} + X \\ y' = \frac{1}{4\sqrt{5}} + Y \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O'.XY phương trình đường cong đã cho có dạng :

$$9X^2 + 4Y^2 = \frac{9}{4}$$

hay
$$\frac{X^2}{\frac{1}{4}} + \frac{Y^2}{\frac{9}{16}} = 1 \qquad (c)$$

Vậy đường cong đang xét là elip (hình 7.25).



Hình 7.25

Chú ý : Nếu phương trình (7.24) có thể viết dưới dạng :

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0.$$

Khi đó ta có :

– Nếu $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ thì $\mathscr{S}$ là cặp đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

– Nếu $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ thì $\mathscr{S}$ là cặp đường thẳng cắt nhau.

7.6. MẶT BẬC HAI

7.6.1. Cấu tạo và phương trình chính tắc của một số mặt bậc hai

1. Mặt trụ bậc hai

Định nghĩa : *Mặt trụ* là một mặt S được tạo bởi một đường thẳng Δ di chuyển trong không gian luôn luôn song song với một phương cho trước và tựa vào một đường cong $\mathscr{L}$ cho trước.

Đường thẳng Δ gọi là *đường sinh* ; đường cong $\mathscr{L}$ gọi là *đường chuẩn.*

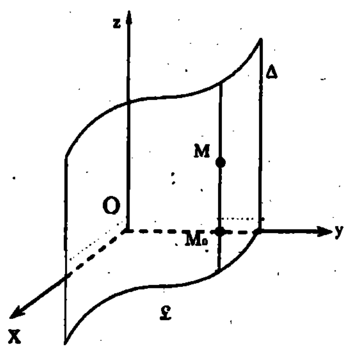
Nếu đường chuẩn $\mathscr{L}$ là một đường cong bậc hai trong mặt phẳng P vuông góc với phương của đường sinh thì mặt S được gọi là *mặt trụ bậc hai.*

Phương trình chính tắc của mặt trụ bậc hai :

Nhận xét : Trong hệ trục tọa độ vuông góc O.xyz xét mặt S xác định bởi phương trình :

$$f(x, y) = 0. \quad (7.28)$$

Giả sử điểm $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ (hình 7.26) ta có : $f(x_0, y_0) = 0$. Khi đó với mọi số thực z, điểm $M(x_0, y_0, z)$ cũng thuộc mặt S vì điểm $M(x_0, y_0, z)$ có tọa độ thỏa mãn phương trình (7.28). Do đó đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0, y_0, z_0)$ song song với trục Oz nằm trong mặt S. Vậy, mặt S cho bởi phương trình (7.28) là mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz và đường chuẩn $\mathscr{L}$ có phương trình :



Hình 7.26

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (7.29)$$

Tương tự ta có : Trong không gian $Đ^3$ phương trình $g(y, z) = 0$ xác định mặt trụ có đường sinh song song với trục Ox ; phương trình $h(x, z) = 0$ xác định mặt trụ có đường sinh song song với trục Oy.

Theo nhận xét trên, nếu lần lượt lấy các đường bậc hai elip, hypecbôn, parabôn làm đường chuẩn ta có :

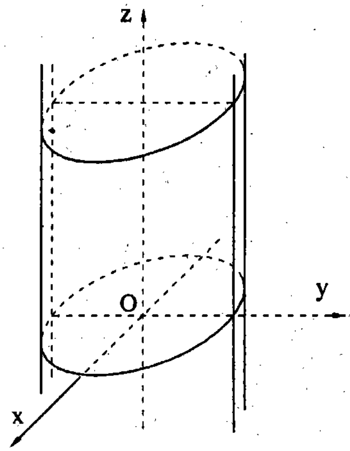
a) Mặt trụ elip

Mặt trụ elip (hình 7.27) có phương trình :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (7.30)$$

Đường sinh song song với trục Oz, đường chuẩn là đường elip :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad (7.31)$$



Hình 7.27

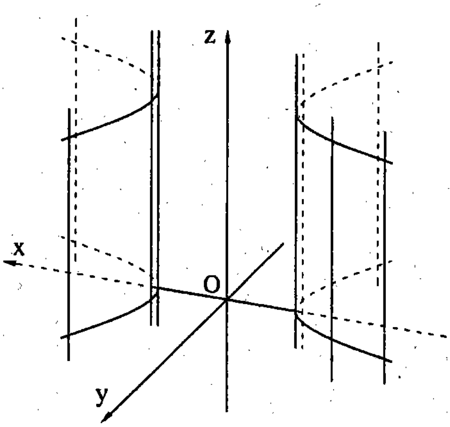
b) Mặt trụ hypecbôn

Mặt trụ hypecbôn (hình 7.28) có phương trình :

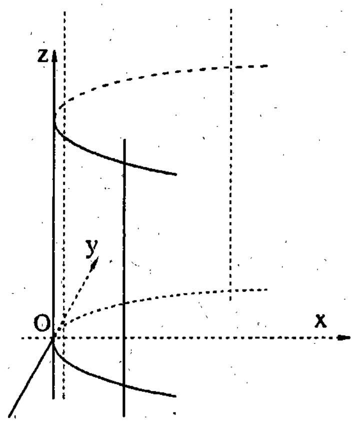
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (7.32)$$

Đường sinh song song với trục Oz, đường chuẩn là đường hypecbôn :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad (7.33)$$



Hình 7.28



Hình 7.29

c) Mặt trụ parabôn

Mặt trụ parabôn có phương trình :

$$y^2 = 2px \tag{7.34}$$

(hình 7.29, với p > 0).

Đường sinh song song với trục Oz, đường chuẩn là đường parabôn :

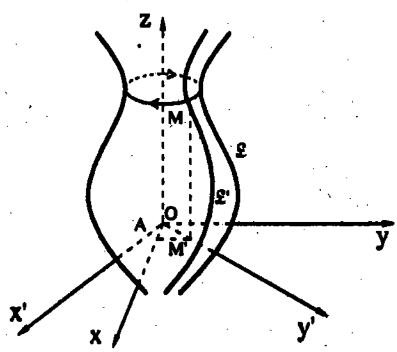
$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ z = 0 \end{cases} \tag{7.35}$$

2. Mặt tròn xoay bậc hai và biến dạng của nó

Định nghĩa : Khi cho đường cong $\mathscr{L}$ quay xung quanh một đường thẳng Δ thì nó tạo thành một mặt S, mặt đó được gọi là *mặt tròn xoay* (hình 7.30).

Nếu $\mathscr{L}$ là một đường bậc hai, đường thẳng Δ là trục đối xứng của $\mathscr{L}$ thì mặt S gọi là *mặt tròn xoay bậc hai.*

Dưới đây ta giả thiết O.xyz là hệ trục tọa độ vuông góc.



Hình 7.30

Định lý 7.1 : Nếu đường cong $\mathscr{L}$ trong mặt phẳng O.yz có phương trình :

$$\begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \tag{7.36}$$

quay xung quanh trục Oz thì mặt tròn xoay S tạo bởi phép quay đó có phương trình là :

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0. \tag{7.37}$$

Chứng minh : Lấy điểm M(x, y, z) ∈ S. Gọi M'(x, y, 0) là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng Oxy. Xét hệ trục tọa độ vuông góc O.x'y'z' có trục Oy' trùng với OM', trục Oz' trùng với trục Oz. Gọi $\mathscr{L}'$ là giao tuyến của mặt phẳng Oy'z' với mặt S. Khi ta quay mặt phẳng Oyz xung quanh trục Oz đến trùng với mặt phẳng Oy'z' thì đường cong $\mathscr{L}$ trùng với giao tuyến $\mathscr{L}'$. Do đó trong mặt phẳng Oy'z phương trình của đường cong $\mathscr{L}'$ có dạng $f(y', z) = 0$. Trong tam giác vuông OMA ta có :

$$y' = OM' = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Do đó ta có :

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0.$$

Vậy, điểm $M(x, y, z) \in S$ có tọa độ thỏa mãn phương trình (7.37). Dễ thấy rằng, mỗi điểm có tọa độ thỏa mãn phương trình (7.37) thì thuộc mặt S. Định lý được chứng minh.

Một cách tương tự, khi cho đường cong có phương trình :

$$\begin{cases} g(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục Ox thì ta được mặt tròn xoay có phương trình :

$$g\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0. \qquad (7.38)$$

Khi cho đường cong có phương trình :

$$\begin{cases} h(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục Oy thì ta được mặt tròn xoay có phương trình :

$$h\left(\sqrt{x^2 + z^2}, y\right) = 0. \qquad (7.39)$$

Áp dụng Định lý 7.1 lần lượt cho đường cong $\mathscr{L}$ là elip, hypecbôn, parabôn, cặp đường thẳng cắt nhau quay xung quanh trục đối xứng ta sẽ tạo được mặt bậc hai sau đây :

a) Elipxôit

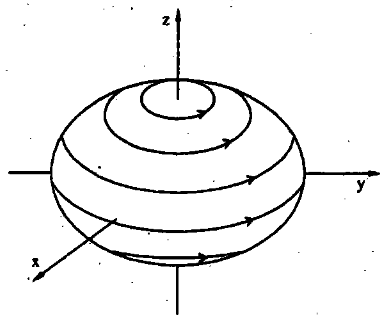
Nếu cho elip có phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục Oz thì ta được một mặt tròn xoay gọi là *elipxôit tròn xoay* (hình 7.31). Elipxôit tròn xoay có phương trình :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1. \quad (7.40)$$

Bây giờ ta thực hiện một phép co dãn mặt elipxôit tròn xoay (7.40) theo phương của trục Oy bằng cách chuyển mỗi điểm M(x, y, z) thuộc mặt đó về điểm $M'\left(x, \frac{a}{b}y, z\right)$ thì sẽ được một mặt cong có phương trình là :



Hình 7.31

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (7.41)$$

Mặt có phương trình (7.41) được gọi là *elipxôit.*

b) Hypecbôlôit một tầng

Nếu cho hypecbôn có phương trình :

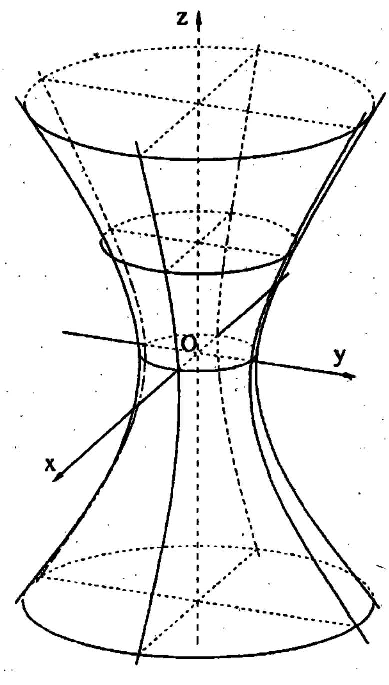
$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục ảo Oz thì ta được một mặt tròn xoay gọi là *hypecbôlôit tròn xoay một tầng* (hình 7.32).

Hypecbôlôit tròn xoay một tầng có phương trình là :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (7.42)$$

Bây giờ ta thực hiện một phép co dãn mặt hypecbôlôit tròn xoay



Hình 7.32

một tầng (7.42) theo phương của trục Oy bằng cách chuyển mỗi điểm M(x, y, z) thuộc mặt đó về điểm $M'\left(x, \frac{b}{a}y, z\right)$ thì sẽ được một mặt cong có phương trình là :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (7.43)$$

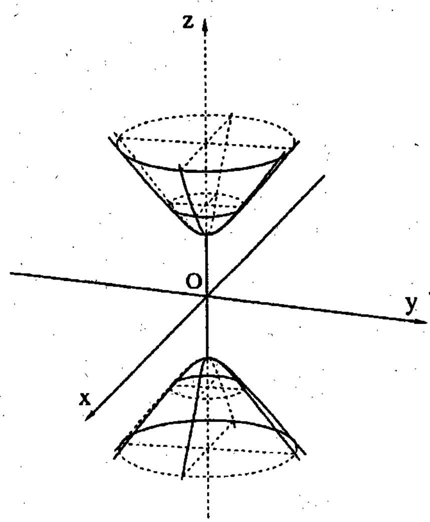
Mặt có phương trình (7.43) được gọi là *hypecbôlôit một tầng.*

c) Hypecbôlôit hai tầng

Nếu cho hypecbôn có phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục thực Oz thì ta được một mặt tròn xoay gọi là *hypecbôlôit tròn xoay hai tầng* (hình 7.33).



Hình 7.33

Hypecbôlôit tròn xoay hai tầng có phương trình là :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (7.44)$$

Bây giờ ta thực hiện một phép co dãn mặt hypecbôlôit tròn xoay hai tầng (7.44) theo phương của trục Oy bằng cách chuyển mỗi điểm M(x, y, z) thuộc mặt đó về điểm $M'\left(x, \frac{a}{b}y, z\right)$ thì sẽ được một mặt cong có phương trình là :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (7.45)$$

Mặt có phương trình (7.45) được gọi là *hypecbôlôit hai tầng.*

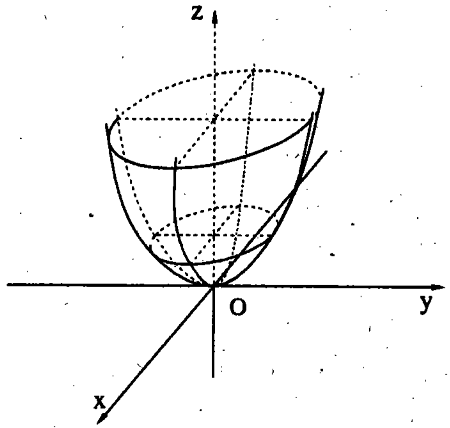
d) Parabôlôit elip

Nếu cho parabôn có phương trình :

$$\begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục Oz thì ta được một mặt tròn xoay gọi là *parabôlôit tròn xoay* (hình 7.34, với $p > 0$). Parabôlôit tròn xoay có phương trình là :

$$x^2 + y^2 = 2pz. \qquad (7.46)$$



Hình 7.34

Bây giờ ta thực hiện phép co dãn mặt parabôlôit tròn xoay (7.46) theo phương của trục Oy bằng cách chuyển mỗi điểm M(x, y, z) thuộc mặt đó về điểm $M'\left(x, \sqrt{\frac{p}{q}}y, z\right)$ thì ta được một mặt cong có phương trình là :

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z\,;\ pq > 0. \qquad (7.47)$$

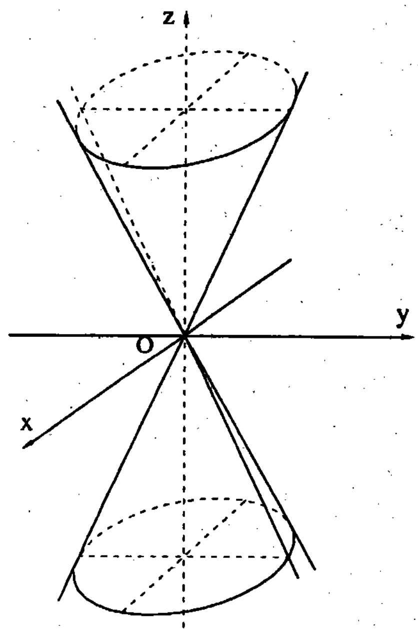
Mặt có phương trình (7.47) được gọi là *parabôlôit elip* có đỉnh O, trục Oz.

3. Mặt nón bậc hai

Khi cho cặp đường thẳng cắt nhau có phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

quay xung quanh trục Oz thì ta được một mặt tròn xoay gọi là *mặt nón tròn xoay* (hình 7.35) có phương trình là :



Hình 7.35

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (7.48)$$

Bây giờ nếu ta thực hiện một phép co dãn mặt tròn xoay (7.48) theo phương của trục Oy bằng cách dịch mỗi điểm M(x, y, z) thuộc mặt đó về điểm $M'\left(x, \frac{a}{b}y, z\right)$ thì ta được một mặt cong có phương trình là :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (7.49)$$

Mặt xác định bởi phương trình (7.49) được gọi là *mặt nón bậc hai* có đỉnh O, trục Oz.

4. Parabôlôit hypecbôn (hay mặt yên ngựa)

Parabôlôit hypecbôn là mặt được xác định bởi phương trình :

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z; \; pq < 0. \qquad (7.50)$$

Dưới đây sẽ xét hình dạng (ý nghĩa hình học) của mặt parabôlôit hypecbôn.

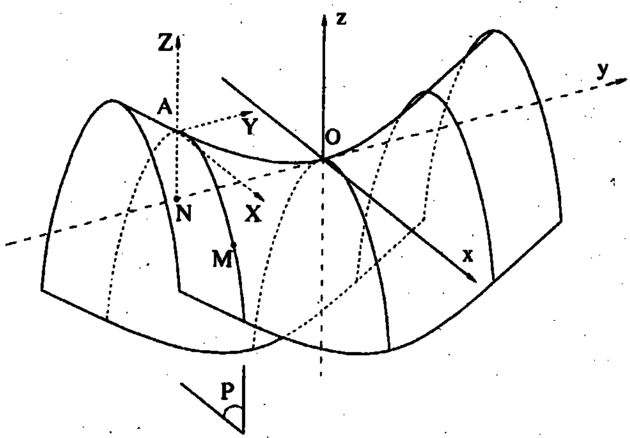
Giả sử trong mặt phẳng O.yz ta có parabôn :

$$\begin{cases} y^2 = 2qz; \; q > 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad (I)$$

Trong mặt phẳng O.xz ta có parabôn :

$$\begin{cases} x^2 = 2pz; \; p < 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad (II)$$

Bây giờ ta cho parabôn (II) di chuyển trong không gian sao cho mặt phẳng chứa parabôn này luôn luôn song song với mặt phẳng Oxz và đỉnh của parabôn (II) di chuyển trên parabôn (I), trục đối xứng có phương không đổi. Parabôn (II) sẽ tạo nên một mặt S, có hình dạng cái yên ngựa (hình 7.36). Đó là mặt parabôlôit hypecbôn được xác định bởi phương trình (7.50). Thật vậy, giả sử điểm M(x, y, z) ∈ S. Qua điểm M ta dựng mặt phẳng P song song với mặt phẳng Oxz. Mặt phẳng P cắt trục Oy tại điểm N(O, y, O). Giao tuyến của mặt phẳng P với mặt phẳng S là một parabôn có đỉnh A ; điểm A là giao điểm của mặt phẳng P với parabôn (I) nên $A\left(0, y_A, \frac{y_A^2}{2q}\right)$, trong đó : $y_A = y$.



Hình 7.36

Ta thực hiện phép tịnh tiến hệ tọa độ :

$$\begin{cases} x = X \\ y = y_A + Y \\ z = \dfrac{y_A^2}{2q} + Z \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

$$\begin{cases} X = x \\ Y = y - y_A \\ Z = z - \dfrac{y_A^2}{2q} \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

Giao tuyến của mặt S với mặt phẳng P đi qua điểm M(x, y, z) trong hệ trục tọa độ mới A.XYZ có vị trí đúng như vị trí của parabôn (II) trong hệ trục tọa độ O.xyz. Vậy phương trình của giao tuyến đó là :

$$\begin{cases} X^2 = 2pZ \\ Y = 0 \end{cases} \qquad \text{(c)}$$

Đối với tọa độ của điểm M(x, y, z) từ các hệ thức (b) và (c) ta có :

$$x^2 = X^2 = 2pZ = 2p\left(z - \frac{y_A^2}{2q}\right) = 2p\left(z - \frac{y^2}{2q}\right).$$

Do đó ta có :

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Vậy, điểm M(x, y, z) ∈ S có tọa độ thỏa mãn phương trình (7.50) và S là mặt parabôlôit hypecbôn.

Tóm lại : Ta có 9 loại mặt bậc hai : Trụ elip (7.30), trụ hypecbôn (7.32), trụ parabôn (7.34), elipxôit (7.41), hypecbôlôit một tầng (7.43), hypecbôlôit hai tầng (7.45), parabôlôit elip (7.47), mặt nón bậc hai (7.49) và parabôlôit hypecbôn (7.50).

7.6.2. Đưa phương trình của mặt bậc hai về dạng chính tắc và phân loại mặt bậc hai

Dưới đây ta luôn luôn giả thiết $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ là một hệ tọa độ vuông góc trong không gian $Đ^3$.

Định nghĩa : Một mặt bậc hai S là quỹ tích những điểm M(x, y, z) trong không gian $Đ^3$ với tọa độ thỏa mãn phương trình có dạng sau :

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_o = 0 \quad (7.51)$$

trong đó các hệ số a_{ij} ; i, j = 1, 2, 3, không đồng thời bằng 0.

Phương trình (7.51) được gọi là *phương trình tổng quát của mặt bậc hai.*

Một bài toán được đặt ra là : Hãy xác định dạng của mặt bậc hai S cho bởi phương trình tổng quát (7.51).

Để trả lời câu hỏi này, cần phải tìm phương trình chính tắc của mặt đang xét.

– *Bước 1 :* Để khử các số hạng chứa tích hai tọa độ ở vế trái (7.51) ta xét dạng toàn phương :

$$\omega(\vec{u}) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \quad (7.52)$$

trong đó : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Theo Mệnh đề 6.2, trong không gian Euclid E^3 có một cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ là cơ sở chính tắc của dạng toàn phương ω. Giả sử ma trận trực giao Q là ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ về cơ sở trực chuẩn $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$.

Ta có :

$$\{\overrightarrow{u_1} \quad \overrightarrow{u_2} \quad \overrightarrow{u_3}\} = \{\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}\}Q.$$

Phép biến đổi tọa độ tương ứng là :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Trong cơ sở chính tắc $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ dạng toàn phương ω có biểu thức tọa độ :

$$\omega(\bar{u}) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2. \qquad (7.53)$$

Cần lưu ý λ_1, λ_2, λ_3 là các giá trị riêng của ma trận đối xứng $A = (a_{ij})_{3\times 3}$; các cột của ma trận Q là các vectơ riêng của A.

Đối với hệ trục tọa độ vuông góc O.x'y'z' phương trình của mặt bậc hai S cho bởi (7.51) có dạng :

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a'_o = 0. \qquad (7.54)$$

– *Bước 2 :* Nhóm các số hạng theo từng biến ở vế trái (7.54). Sau đó thực hiện phép biến đổi hệ tọa độ bởi phép tịnh tiến có dạng :

$$\begin{cases} x' = x'_o + X \\ y' = y'_o + Y \\ z' = z'_o + Z \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O'.XYZ phương trình của mặt S cho bởi (7.51) sẽ là một trong 17 dạng sau đây :

Trường hợp 1 : Các giá trị riêng λ_1, λ_2 và λ_3 đều khác 0.

a) Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ cùng dấu thì ta có :

1. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$: Mặt S là elipxôit.

2. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = -1$: Mặt S được gọi là elipxôit ảo (không có ý nghĩa hình học).

3. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 0$: Mặt S suy biến về một điểm.

b) Nếu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ khác dấu, chẳng hạn λ_1, λ_2 khác dấu với λ_3 thì ta có :

4. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$: Mặt S là hypecbôlôit một tầng.

5. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = -1$: Mặt S là hypecbôlôit hai tầng.

6. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 0$: Mặt S là mặt nón bậc hai.

Trường hợp 2 : Có một giá trị riêng λ_i bằng 0, chẳng hạn $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, còn $\lambda_3 = 0$.

a) Nếu λ_1 và λ_2 cùng dấu thì ta có :

7. Hoặc $\dfrac{X^2}{p} + \dfrac{Y^2}{q} = \pm 2Z$, $pq > 0$: Mặt S là parabôlôit elip.

8. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$: Mặt S là trụ elip.

9. Hoặc $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1$: Mặt S được gọi là trụ elip ảo (không có ý nghĩa hình học).

10. Hoặc $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0$ hay $\left(\frac{X}{a} + i\frac{Y}{b}\right)\left(\frac{X}{a} - i\frac{Y}{b}\right) = 0$: Mặt S được gọi là cặp mặt phẳng ảo cắt nhau (không có ý nghĩa hình học).

b) Nếu λ_1 và λ_2 khác dấu, chẳng hạn $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ thì ta có :

11. Hoặc $\frac{X^2}{p} + \frac{Y^2}{q} = \pm 2Z$, $pq < 0$: Mặt S là parabôlôit hypecbôn.

12. Hoặc $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = \pm 1$: Mặt S là trụ hypecbôn.

13. Hoặc $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0$ hay $\left(\frac{X}{a} + \frac{Y}{b}\right)\left(\frac{X}{a} - \frac{Y}{b}\right) = 0$: Mặt S là cặp mặt phẳng cắt nhau.

Trường hợp 3 : Có hai giá trị riêng λ_i, λ_j bằng 0, chẳng hạn $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Khi đó phương trình (7.54) có dạng :

$$\lambda_1 x'^2 + 2a'_1 x' + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + a'_o = 0.$$

a) Nếu $D = \sqrt{a'^2_2 + a'^2_3} \neq 0$ thì ta chuyển hệ tọa độ vuông góc O.x'y'z' về hệ tọa độ vuông góc O.x"y"z" bởi phép biến đổi tọa độ sau đây :

$$\begin{cases} x' = x'' \\ y' = \frac{a'_3}{D} y'' + \frac{a'_2}{D} z'' \\ z' = -\frac{a'_2}{D} y'' + \frac{a'_3}{D} z'' \end{cases}$$

Trong hệ tọa độ O.x"y"z" phương trình của mặt cho bởi (7.51) có dạng :

$$\lambda_1 x''^2 + 2a'_1 x'' + 2Dz'' + a'_o = 0.$$

Thực hiện phép tịnh tiến hệ tọa độ :

$$\begin{cases} x'' = -\dfrac{a'_1}{\lambda_1} + X \\ y'' = Y \\ z'' = -\dfrac{a'_o}{2D} + \dfrac{a'^2_1}{2D\lambda_1} + Z \end{cases}$$

Trong hệ tọa độ vuông góc O'.XYZ phương trình mặt S có dạng :

14. $X^2 = 2pZ$: Mặt S là trụ parabôn.

b) Nếu $D = 0$ thì phương trình (7.54) có dạng :

$$\lambda_1 x'^2_1 + 2a'_1 x' + a'_o = 0.$$

Thực hiện phép tịnh tiến hệ tọa độ :

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{a'_1}{\lambda_1} + X \\ y' = Y \\ z' = Z \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O'.XYZ phương trình của mặt S cho bởi (7.51) sẽ là một trong các dạng sau :

15. Hoặc $X^2 = k^2$ hay $X = \pm k$: Mặt S là cặp mặt phẳng song song.

16. Hoặc $X^2 = -k^2$ hay $X = \pm ik$: Mặt S được gọi là cặp mặt phẳng ảo song song (không có ý nghĩa hình học).

17. Hoặc $X^2 = 0$: Mặt S là cặp mặt phẳng trùng nhau.

Kết luận : Bằng các phép biến đổi tọa độ thích hợp, phương trình tổng quát (7.51) của mặt bậc hai có thể đưa về một trong 17 loại trên. Trong đó có 9 loại phương trình của các mặt bậc hai ta đã xét ở mục 7.6.1. Các trường hợp còn lại là phương trình của cặp mặt phẳng cắt nhau, hoặc song song, hoặc trùng nhau, hoặc suy biến về một điểm, hoặc mặt ảo không có ý nghĩa hình học.

Chú ý : Nếu phương trình (7.51) có thể viết dưới dạng :

$$(ax + by + cz + d)(a'x + b'y + c'z + d') = 0.$$

Khi đó xét ma trận :

$$\overline{A} = \left(A \left| \begin{matrix} d \\ d' \end{matrix} \right.\right) = \left(\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix} \left| \begin{matrix} d \\ d' \end{matrix} \right.\right)$$

– Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = 2$ thì S là cặp mặt phẳng cắt nhau.

– Nếu $r(A) = r(\overline{A}) = 1$ thì S là cặp mặt phẳng trùng nhau.

– Nếu $r(A) < r(\overline{A})$ thì S là cặp mặt phẳng song song.

7.6.3. Ví dụ

Trong hệ tọa độ vuông góc $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ mặt S có phương trình :

$$x^2 - yz - 4x + 3y + z = 0. \tag{a}$$

Để biết S là mặt gì thì ta phải tìm phương trình chính tắc của nó.

Bước 1 : Tương ứng với phương trình (a) ta xét dạng toàn phương :

$$\omega(\vec{u}) = x^2 - yz. \tag{b}$$

Ma trận của dạng toàn phương ω đối với cơ sở trực chuẩn $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ là :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là :

$$P(\lambda) = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \lambda)\left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)$$

Do đó ma trận A có các giá trị riêng là :

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2}$$

Ta xác định ma trận trực giao Q là ma trận chuyển từ cơ sở trực chuẩn $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ sang cơ sở chính tắc $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ của dạng toàn phương (b). Các cột của ma trận Q là các vectơ riêng đơn vị của ma trận A. Vectơ riêng $\alpha_i = (x, y, z)$ của ma trận A ứng với giá trị riêng λ_i là nghiệm khác θ của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất :

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_i & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hay

$$\begin{cases} (1-\lambda_i)x = 0 \\ -\lambda_i y - \frac{1}{2}z = 0 \\ -\frac{1}{2}y - \lambda_i z = 0 \end{cases}$$

– Với $\lambda_1 = 1$ ta có :

$$\alpha_1 = (1, 0, 0)$$

– Với $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ ta có :

$$\alpha_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

– Với $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ ta có :

$$\alpha_3 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Vậy ma trận chuyển Q có dạng :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Thực hiện phép biến đổi tọa độ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Ta có :

$$\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z' \\ z = -\frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z' \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O.x'y'z' mặt S có phương trình :

$$x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}z'^2 - 4x' + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z'\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z'\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ x'^2 - 4x' + \frac{1}{2}y'^2 - \sqrt{2}y' - \frac{1}{2}z'^2 + 2\sqrt{2}z' = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (x' - 2)^2 - 4 + \frac{1}{2}\left(y' - \sqrt{2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2}\left(z' - 2\sqrt{2}\right)^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (x' - 2)^2 + \frac{1}{2}\left(y' - \sqrt{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(z' - 2\sqrt{2}\right)^2 = 1. \qquad \text{(b)}$$

Bước 2 : Thực hiện phép tịnh tiến hệ tọa độ bằng cách đưa điểm gốc O về điểm $O'\left(2, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$:

$$\begin{cases} x' = 2 + X \\ y' = \sqrt{2} + Y \\ z' = 2\sqrt{2} + Z \end{cases}$$

Trong hệ trục tọa độ vuông góc O'.XYZ, mặt S có phương trình chính tắc :

$$X^2 + \frac{Y^2}{2} - \frac{Z^2}{2} = 1. \quad \text{(c)}$$

Mặt S là hypecbôlôit một tầng.

7.6.4. Mặt kẻ bậc hai

Định nghĩa : Mặt S được gọi là *mặt kẻ* nếu tại mỗi điểm $M \in S$ có ít nhất một đường thẳng Δ đi qua M sao cho : $\Delta \subset S$.

Như vậy, mỗi mặt kẻ được tạo bởi các đường thẳng. Các đường thẳng đó gọi là *đường sinh của mặt kẻ.*

Theo định nghĩa ta có : *Các mặt trụ bậc hai, mặt nón bậc hai là các mặt kẻ bậc hai.*

Dưới đây sẽ chứng tỏ các mặt hypecbôlôit một tầng, parabôlôit hypecbôn cũng là các mặt kẻ.

1) Xét mặt hypecbôlôit một tầng có phương trình chính tắc :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Phương trình trên có thể viết dưới dạng :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

hoặc
$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (7.55)$$

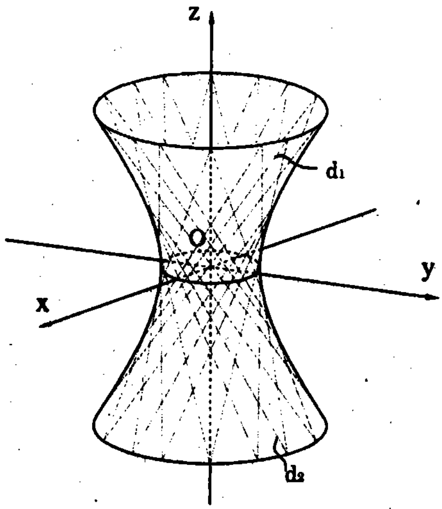
Từ (7.55) trực tiếp suy ra hai họ đường thẳng sau đây nằm hoàn toàn trong mặt hypecbôlôit một tầng đang xét :

$$d_1 : \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (7.56)$$

và $\quad d_2 : \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \quad (7.57)$

trong đó : λ, μ là các tham số không đồng thời bằng 0.

Vậy hypecbôlôit một tầng là mặt kẻ (hình 7.37).



Hình 7.37

2) Xét mặt parabôlôit hypecbôn có phương trình chính tắc :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Phương trình trên có thể viết dưới dạng :

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 2z. \quad (7.58)$$

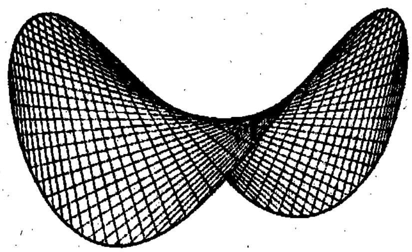
Từ phương trình (7.58) trực tiếp suy ra hai họ đường thẳng sau đây nằm hoàn toàn trong mặt parabôlôit hypecbôn đang xét :

$$e_1 : \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = \mu 2z \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \lambda \end{cases} \quad (7.59)$$

và $$e_2 : \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = \mu 2z \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = \lambda \end{cases} \qquad (7.60)$$

trong đó : λ, μ là các tham số, $\mu \neq 0$.

Vậy parabôlôit hypecbôn là mặt kẻ (hình 7.38).



Hình 7.38

BÀI TẬP

Đề bài

Xét hệ toạ độ vuông góc $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

7.1. Xác định góc giữa các vectơ $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ và $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

7.2. Tính diện tích hình bình hành ABCD có $\overrightarrow{AB} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ và $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$.

7.3. Tính diện tích tam giác với các đỉnh A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(4, 3, 2).

7.4. Tìm tích hỗn tạp của các vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$.

7.5. Chứng minh các điểm A(5, 7, –2), B(3, 1, –1), C(9, 4, –4) và D(1, 5, 0) cùng nằm trong một mặt phẳng.

7.6. Tính thể tích hình chóp tam giác có các đỉnh A(2, 2, 2), B(4, 3, 3), C(4, 5, 4), D(5, 5, 6).

7.7. Với giá trị nào của m các vectơ $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ vuông góc với nhau.

7.8. Chứng minh rằng, các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không thể vuông góc với nhau nếu : $(\vec{a}.\vec{i}) > 0$, $(\vec{a}.\vec{j}) > 0$, $(\vec{a}, \vec{k}) > 0$, $(\vec{b}.\vec{i}) < 0$, $(\vec{b}.\vec{j}) < 0$, $(\vec{b}.\vec{k}) < 0$.

7.9. Các số thực $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3$ thỏa mãn các đẳng thức :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{cases} x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \\ x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 = 0 \\ x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = 0 \end{cases}$$

có thể đồng thời khác 0 được không ?

7.10. Chứng minh rằng :

1) $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}.\vec{b})\vec{c}$;

2) $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge (\vec{c} \wedge \vec{a}) + \vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{O}$.

7.11. 1) Lập phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$.

2) Áp dụng đối với trường hợp $M_1(2, -1, 1)$, $M_2(3, 2, 1)$, $M_3(-1, 3, 2)$.

7.12. Tìm phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $A(2, -1, 4)$, $B(3, 2, -1)$ và vuông góc với mặt phẳng $x + y + 2z = 3$.

7.13. Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $x + 5y + 9z = 13$, $3x - y - 5z = -1$ và điểm $M(0, 2, 1)$.

7.14. Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của các mặt phẳng $x + 2y + 3z - 5 = 0$, $3x - 2y - z + 1 = 0$ và chắn các trục Ox, Oz những đoạn bằng nhau.

7.15. Tìm phương trình mặt phẳng đi qua các điểm $P(0, 2, 0)$, $Q(2, 0, 0)$ và tạo với mặt phẳng $x = 0$ một góc 60^o.

7.16. Tìm điểm M trên mặt phẳng $2x - 5y + 2z + 5 = 0$ sao cho đường thẳng OM lập với các trục tọa độ những góc bằng nhau.

7.17. Viết phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của các mặt phẳng $\left(1 + \sqrt{2}\right)x + 2y + 2z = 4$, $x + y + z = -1$ và tạo với mặt phẳng tọa độ Oxy một góc 60^o.

7.18. Viết phương trình của mặt phẳng đi qua giao tuyến của các mặt phẳng $2x - y - 12z = 3$, $3x + y - 7z = 2$ và vuông góc với mặt phẳng $x + 2y + 5z = 1$.

7.19. Lập phương trình mặt phẳng đi qua giao tuyến của các mặt phẳng $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ và qua gốc tọa độ.

7.20. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $M(0, 2, 1)$ và song song với các vectơ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

7.21. Xác định góc giữa vectơ $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ và mặt phẳng :

$$x + y + 2z - 4 = 0.$$

7.22. Viết phương trình tham số của các đường thẳng :

1) Đi qua hai điểm $M_1(2, 0, 1)$, $M_2(-4, 1, 2)$.

2) Là giao tuyến của các mặt phẳng $2x - y + 3z = 1$ và $5x + 4y - z = 7$.

7.23. Từ gốc tọa độ hạ đường vuông góc với đường thẳng :

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = z - 3.$$

Viết phương trình đường thẳng vuông góc đó.

7.24. Hãy xác định tham số λ sao cho các đường thẳng sau đây cắt nhau :

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{\lambda} \text{ và } \frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}.$$

Tìm giao điểm của chúng.

7.25. Hãy xác định điểm N đối xứng với điểm $M(1, 1, 1)$ qua mặt phẳng $x + y - 2z = 6$.

7.26. Hãy xác định điểm N đối xứng với điểm $M(1, 1, 1)$ qua đường thẳng :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}.$$

7.27. Viết phương trình mặt phẳng đi qua đường thẳng :

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{3}$$

và song song với đường thẳng :

$$\frac{x}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-3}.$$

7.28. Viết phương trình hình chiếu của đường thẳng $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$ trên mặt phẳng $x + y + 2z - 5 = 0$.

7.29. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm M(1, 1, 1) và vuông góc với các vectơ $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

7.30. Tìm phương trình các hình chiếu của đường thẳng :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 26 = 0 \\ 3x + y + 4z - 14 = 0 \end{cases}$$

trên các mặt phẳng tọa độ.

7.31. Tìm phương trình đường thẳng đi qua điểm M(1, –2, 3) và lập với các trục Ox và Oy các góc 45^{o} và 60^{o}.

7.32. Tìm góc giữa các đường thẳng :

$$\begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

7.33. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm M(0, 2, 1) và tạo với các vectơ $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j}$, $\vec{c} = 3\vec{k}$ những góc bằng nhau.

7.34. Chứng minh rằng, trong mặt phẳng Oxy các phương trình sau xác định một cặp đường thẳng :

1) $x^2 + 8xy + 16y^2 - 25 = 0$;

2) $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 14x - 2y + 8 = 0$.

7.35. Viết phương trình chính tắc rồi vẽ các đường bậc hai có phương trình :

1) $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 20x + 4 = 0$;

3) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;

3) $5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$;

4) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

7.36. Tìm phương trình của mặt tạo bởi đường thẳng Δ di chuyển trong không gian O.xyz luôn luôn đi qua điểm M(0, 0, 1) và tựa vào đường elip :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

Đó là mặt gì ?

7.37. Các phương trình sau đây xác định mặt gì ? Dựng các mặt đó.

1) $x^2 + y^2 = 4$;

2) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$;

3) $x^2 - y^2 = 1$;

4) $y^2 = 2x$;

5) $z^2 = y$;

6) $z + x^2 = 0$;

7) $x^2 + y^2 = 2y$;

8) $x^2 + y^2 = 0$;

9) $x^2 - z^2 = 0$;

10) $y^2 = xy$.

7.38. Lập phương trình giao tuyến của mặt nón $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ với các mặt phẳng :

1) $y = 3$;

2) $z = 1$;

3) $x = 0$.

7.39. Tìm phương trình của mặt nhận được khi quay đường thẳng sau đây quanh trục Oz :

$$\begin{cases} 2y + z - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

7.40. Tìm phương trình parabôlôit elip có đỉnh tại gốc tọa độ, trục là trục Oz và cho trước hai điểm M(−1, −2, 2) và N(1, 1, 1) nằm trên mặt đó.

7.41. Tìm phương trình elipxôit có các trục đối xứng là các trục tọa độ và ba điểm A(3, 0, 0), B(−2, 5/3, 0), C(0, −1, $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$) nằm trên mặt đó.

7.42. Tìm phương trình giao tuyến của các mặt $z = 2 - x^2 - y^2$ và $z = x^2 + y^2$.

7.43. Phương trình $x^2 + z^2 = m(y^2 + z^2)$ xác định những mặt gì khi :

1) $m = 0$; 2) $0 < m < 1$;

3) $m > 1$; 4) $m < 0$;

5) $m = 1$.

7.44. Cho biết ý nghĩa hình học của các phương trình sau đây :

1) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 12yz + 6xz + 4xy - 4x - 8y - 12z + 3 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 - yz - xz - xy = 0$.

7.45. Mặt nón $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ cắt mặt phẳng $y = 2$ theo đường gì ?

7.46. Các phương trình sau đây xác định mặt gì ? Xác định vị trí mặt đó đối với hệ trục tọa độ ban đầu O.xyz.

1) $x^2 = yz$.

2) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$.

3) $x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0$.

4) $x^2 + y^2 - z^2 - 2y - 2z = 0$.

5) $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0$.

6) $4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0$.

7) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$.

8) $9x^2 - z^2 - 18x - 18y - 6z = 0$.

9) $x^2 - xy - xz + yz = 0$.

10) $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy - 2yz = 0$.

Đáp số và hướng dẫn

7.1. $\varphi = \arccos\dfrac{2}{7}$.

7.2. $S = \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = 49$ (đvdt).

7.3. $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{24}$ (đvdt).

7.4. 33.

7.6. $\frac{7}{6}$.

7.7. $m = 1$.

7.9. Không, vì ba vectơ khác θ đồng phẳng không thể từng đôi một vuông góc với nhau.

7.10. *Hướng dẫn* : Tính toán hai vế rồi so sánh kết quả.

7.11. 1) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$.

2) $11x + 5y + 13z - 30 = 0$.

7.12. $x - 7y - 2z - 21 = 0$.

7.13. $x + y + z - 3 = 0$.

7.14. $5x + 2y + 5z - 9 = 0$.

7.15. $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + z\left(\pm\sqrt{2}\right) - 1 = 0$.

7.16. $M(5, 5, 5)$.

7.17. $\sqrt{2}\,x + y + z - 5 = 0$.

7.18. $4x + 3y - 2z - 1 = 0$.

7.19. $(A_1D_2 - A_2D_1)x + (B_1D_2 - B_2D_1)y + (C_1D_2 - C_2D_1)z = 0$.

7.20. $x - y + 2 = 0$.

7.21. $\arcsin\frac{5}{6}$.

7.22. 1) $x = 2 - 6t$, $y = t$, $z = -1 + 3t$;

2) $x = -11t$, $y = 2 + 17t$, $z = 1 + 13t$.

7.23. Chân đường vuông góc $H\left(\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right)$; phương trình đường thẳng OH : $x = t$, $y = -2t$, $z = 4t$.

7.24. $\lambda = 1$, giao điểm $M(2, -2, 1)$.

7.25. $N(3, 3, -3)$.

7.26. $N\left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{22}{7}\right)$.

7.27. $x - y - z + 4 = 0$.

7.28. $x = t,\ y = \frac{5}{3} - t,\ z = -\frac{5}{3}$.

7.29. $x = 1 + 5t,\ y = 1 - t,\ z = 1 - 7t$.

7.30. – Trên mặt phẳng Oyz :

$$5y + 5z - 64 = 0,\ x = 0$$

– Trên mặt phẳng Oxz :

$$5x + 5z - 2 = 0,\ y = 0$$

– Trên mặt phẳng Oxy :

$$5y - 5x + 62 = 0,\ z = 0.$$

7.31. $x = 1 + \sqrt{2}t,\ y = -2 + t,\ z = 3 \pm t$.

7.32. $\varphi = \arccos\frac{20}{21}$.

7.33. $x = t,\ y = 2 - t,\ z = 1 - t$.

7.35. 1) Elip với phương trình chính tắc :

$$\frac{5X^2}{4} + 5Y^2 = 1$$

2) Hypecbôn với phương trình chính tắc :

$$X^2 - \frac{Y^2}{9} = 1$$

3) Elip với phương trình chính tắc :

$$4X^2 + \frac{16Y^2}{9} = 1$$

4) Parabôn với phương trình chính tắc :

$$Y^2 = \sqrt{2}X.$$

7.36. Mặt nón đỉnh M(0, 0, 1) trục Oz có phương trình

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{(z-1)^2}{4}=0.$$

7.37. 1) Trụ tròn ; 2) Trụ elip ;

3) Trụ hypecbôn ; 4) Trụ parabôn ;

5) Trụ parabôn ; 6) Trụ parabôn ;

7) Trụ tròn ; 8) Trục Oz ;

9) Các mặt phẳng phân giác $x = z$ và $x = -z$;

10) Các mặt phẳng $y = 0$ và $y = x$.

7.38. 1) $x^2 + z^2 = 9$, $y = 3$ (đường tròn) ;

2) $y^2 - x^2 = 1$; $z = 1$ (hypecbôn) ;

3) $z^2 - y^2$, $x = 0$ (hai đường thẳng).

7.39. $4x^2 + 4y^2 - (z - 2)^2 = 0.$

7.40. $3z = 2x^2 + y^2.$

7.41. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}+z^2=1.$

7.42. $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ (đường tròn).

7.43. 1) Trục Oy ;

2) Nón có trục Oy và đỉnh tại gốc tọa độ ;

3) Nón có trục Ox và đỉnh tại gốc tọa độ ;

4) Gốc tọa độ ;

5) Hai mặt phẳng cắt nhau theo trục Oz.

7.44. 1) Xác định cặp mặt phẳng có phương trình :

$$x + 2y + 3z - 1 = 0 \text{ và } x + 2y + 3z - 3 = 0.$$

2) Xác định đường thẳng $x = y = z$.

7.45. Giao tuyến là hypecbôn.

7.46. 1) Mặt nón với phương trình chính tắc :

$$X^2-\frac{Y^2}{2}+\frac{Z^2}{2}=0.$$

2) Elipxôit với phương trình chính tắc :

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} + Z^2 = 1.$$

3) Parabôlôit hypecbôn : $X^2 - Y^2 = 2Z.$

4) Nón bậc hai : $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0.$

5) Parabôlôit tròn xoay : $X^2 + Y^2 = 4Z.$

6) Hypecbôlôit một tầng :

$$X^2 + \frac{Y^2}{4} - \frac{Z^2}{4} = 1.$$

7) Hypecbôlôit hai tầng :

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = -1.$$

8) Parabôlôit hypecbôn :

$$X^2 - \frac{Z^2}{9} = 2Y.$$

9) Hai mặt phẳng $X = Y$ và $X = Z$.

10) Đường thẳng : $X = Y = Z$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Alecxandrov P.S. (1980), *Giáo trình hình học giải tích và đại số tuyến tính,* Nhà xuất bản Nauka, Maxcơva (tiếng Nga).
2. Đankô P.E., Pôpôp A.G., Côgiepnhicôva I.Ia. (1983), *Bài tập toán cao cấp,* Nhà xuất bản Mir, Maxcơva (tiếng Việt).
3. Genphand G.M. (1966), *Bài giảng đại số tuyến tính*, Nhà xuất bản Nauka, Maxcơva (tiếng Nga).
4. Kostrikin A.I., Manin Ju.I. (1980), *Đại số tuyến tính và hình học giải tích,* MGU, Maxcơva (tiếng Nga).
5. Margier J.P., Vadot C. (1990), *Algèbre linéair, géométrie,* Vuibert, Paris.
6. Modenov P.S., Parkhomenkho A.S. (1976), *Bài tập hình học giải tích,* Nhà xuất bản Nauka, Maxcơva (tiếng Nga).
7. Monier D.C. (1997), *Géometrie*, Dunod - Paru, Paris.
8. Phadeev D.C., Sominxki I.S. (1977), *Tuyển tập các bài tập đại số cao cấp,* Nhà xuất bản Nauka, Maxcơva (tiếng Nga).
9. Praskuriakov I.V. (1967), *Tuyển tập các bài tập đại số tuyến tính,* Nhà xuất bản Nauka, Maxcơva (tiếng Nga).

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc Công ty CP Sách ĐH – DN
TRẦN NHẬT TÂN

Biên tập và sửa bản in :
ĐỖ HỮU PHÚ

Trình bày bìa :
LƯU CHÍ ĐỒNG

Chế bản :
QUANG CHÍNH

ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH VÀ HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

Mã số: 7B663M7–DAI

In 1.500 bản, khổ 16 x 24cm. Tại Nhà in Hà Nam
Số 29 - Đường Lê Hoàn - TX. Phủ Lý - Hà Nam
Số in: 431. Số xuất bản: 17-2007/CXB/74-2217/GD
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2007.