Ban Giám Hiệu

Toán Cao Cấp

Tác giả: Ths. Hoàng Xuân Quảng

Lời nói đầu

Giáo trình này được biên soạn trung thành với chương trình Toán Cao Cấp cho khối ngành đại học kinh tế (Toán Cao Cấp C) của Bộ Giáo Dục và Đào Tạo ban hành năm 1995. Tuy nhiên trong giáo trình có sự sắp xếp lại một vài chương, tiết để phù hợp với thực tế giảng dạy. Giáo trình này đã có bổ sung một số ứng dụng của toán học trong kinh tế theo chương trình hiện hành của một số trường, đặc biệt là Trường Đại Học Kinh Tế TP Hồ Chí Minh.

Giáo trình gồm hai phần:

- Giải tích toán học (60 tiết)
- Đại số tuyến tính (45 tiết)

Cuối mỗi chương đều có phần bài tập với số lượng và nội dung phong phú. Các bài tập có hướng dẫn hoặc đáp án. Do vậy, giáo trình là một tà liệu vừa đủ cả về lý thuyết và bài tập của môn Toán Cao Cấp để sinh viên các ngành kinh tế nghiên cứu, học tập. Giáo trình cũng có ích cho những người bước đầu học toán cao cấp hoặc ôn tập về toán cao cấp.

Chúng tôi kính mong và rất biết ơn sự góp ý phê bình của bạn đọc.

Tp. Hồ Chí Minh - Tp. Long Xuyên, tháng 8 năm 2000

Các tác giả

Chương I. Định thức
Định nghĩa và tính chất

1. Hoán vị và nghịch thế
Xét tập n số tự nhiên đầu tiên

$$\{1, 2, 3..., n\}$$

Một cách sắp xếp có thứ tự các số này sẽ được gọi là một hoán vị từ n số đã cho. Ta đã biết số các hoán vị khác nhau từ n phần tử đã cho là:

$$n! = 1.2.3\ldots n$$

Ví vụ: Tập {1, 2, 3} có 3! = 6 hoán vị là

$$p_1 = (1,2,3);$$
$$p_2 = (1,3,2);$$
$$p_3 = (2,1,3);$$
$$p_4 = (2,3,1);$$
$$p_5 = (3,1,2);$$
$$p_6 = (3,2,1);$$

Trong một hoán vị, mỗi cặp số có số lớn đứng trước số bé gọi là một nghịch thế của hoán vị đó. Số nghịch thế của hoán vị p được ký hiệu là N(p).

Ví dụ: Với các phép thế trong ví dụ trên, ta có:

$$N(p_1) = 0$$
$$N(p_2) = N(p_3) = 1$$
$$N(p_4) = N(p_5) = 2$$
$$N(p_6) = 3.$$

2. Định thức cấp n
Cho A là một ma trận vuông cấp n, tức là một bảng gồm n x n số được sắp thành n dòng, n cột.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ta gọi định thức A là số

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(p)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n} \quad (1)$$

trong đó tổng lấy theo tất cả các hoán vị p = (α_1, α_2, α_3,..., α_n) từ n phần tử 1, 2, ..., n.

Khi A có cấp n thì định thức của A gọi là một định thức cấp n.

3. Định thức cấp 2 và cấp 3

Khi n = 2, tổng (1) có dạng

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{N(1,2)} a_{11}a_{22} + (-1)^{N(2,1)} a_{12}a_{21}$$

Vì N(1,2) = 0, N(2,1) = 1 nên ta có:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (2)$$

Như vậy: Định thức cấp 2 bằng tích các số trên đường chéo chính trừ tích các số trên đường chéo phụ.

Khi n = 3, tổng (1) có dạng:

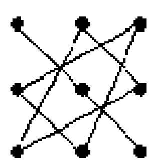
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} a_{3\alpha_3}$$

tổng lấy theo 6 hoán vị (α_1, α_2, α_3) từ ba số 1, 2, 3.

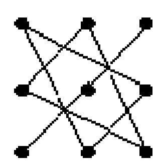
Dựa vào số nghịch thế đã xét trong ví dụ trên, ta có

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - \\ - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31}) \quad (3)$$

Để nhớ công thức (3) người ta thường dùng "qui tắc Sarrus"



Dấu (+)



Dấu (-)

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.(-1).3 + (-2).1.2 + 0.1.1 - [1.1.1 + (-2).1.3 + 0.(-1).2]$$

$$= -3 - 4 - (1 - 6) = -2$$

4. Tính chất của định thức

1. Nếu đổi dòng thành cột, cột thành dòng thì định thức không thay đổi.

Theo tính chất (i), một tính chất của định thức đúng với dòng thì cũng đúng với cột, do đó các tính chất tiếp theo ta chỉ phát biểu đối với dòng nhưng nó cũng dùng đối với cột.

1. Nếu nhân tất cả các phần tử của một dòng với số λ thì định thức được nhân lên với λ.
2. Nếu một dòng của định thức được viết thành tổng của hai dòng thì định thức được viết thành tổng của hai định thức có dòng đang xét là những dòng thành phần.

Ví dụ:

$$\begin{vmatrix} 1+1 & 1+2 & 1+3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Nếu đổi chỗ hai dòng cho nhau thì định thức đổi dấu.
2. Trong một định thức nếu có hai dòng giống nhau thì định thức bằng 0.
3. Nếu cộng một dòng vào một dòng khác đã nhân với một số thì định thức không đổi.

Ở đây nhân một dòng với một số nghĩa là tất cả các phần tử của dòng được nhân với số đó, cộng hai dòng với nhau nghĩa là cộng các phần tử tương ứng với nhau.

Phương pháp tính định thức

Định thức cấp hai và cấp ba có thể tính theo công thức (2) và (3). Định thức cấp cao có thể đưa về định thức cấp hai hoặc ba nhờ công thức khai triển. Một số định thức đặc biệt có thể sử dụng định lý Laplace.

Ví dụ:

a) Tính $\Delta = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$

Ta có: $\Delta = \begin{vmatrix} x+3 & x+3 & x+3 & x+3 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ (cộng các dòng vào dòng 1)

$= (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ (đưa thừa số chung [x+3] ra ngoài định thức)

$= (x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$ (nhân dòng 1 với -1 cộng vào các dòng khác)

$= (x+3)(x-1)^3$

b) Tính định thức Vandermonde cấp 3: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

Ta có: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)(c-b)$

Tương tự, định thức Vandermonde cấp 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)$$

Chương II. Ma trận

Định nghĩa

1. Định nghĩa ma trận

Một ma trận cấp m x n là một bảng gồm m x n số được sắp thành m dòng, n cột theo một thứ tự nhất định.

Ma trận A cấp m x n được viết dưới dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} là phần tử nằm trên dòng i, cột j của ma trận A.

Ta cũng ký hiệu $(A)_{ij}$ là phần tử nằm ở dòng i, cột j của ma trận A.

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ thì $(A)_{11} = 1$, $(A)_{12} = -2$, $(A)_{23} = 0$

Hai ma trận A và B cấp m x n được gọi là bằng nhau nếu

$$(A)_{ij} = (B)_{ij} \text{ với mọi } i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n.$$

2. Phép cộng ma trận và phép nhân số với ma trận

Cho A và B là hai ma trận m x n. Khi đó tổng của A và B là ma trận có cấp m x n xác định bởi:

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} \text{ với } i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

Như vậy tổng của hai ma trận là ma trận có các phần tử bằng tổng các phần tử tương ứng của hai ma trận đã cho.

Cho ma trận A cấp m x n và số $(A)_{ij}$. Khi đó ta gọi tích của A và λ là ma trận λA có cấp m x n xác định bởi:

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda (A)_{ij} \text{ với } i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

Như vậy muốn nhân một số với một ma trận, ta nhân số đó với tất cả các phần tử của ma trận đó.

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Ta có $A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $(-2)A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Ta gọi ma trận không cấp m x n, ký hiệu: $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{m \times n}$ là ma trận cấp m x n có tất cả phần tử đều bằng 0.

Ta có định lý sau:

<u>Định lý 1:</u> Cho A, B, C là các ma trận cấp m x n, λ, μ là các số. Khi đó:

1. A + (B + C) = (A + B) + C;
2. A + B = B + A;
3. A + 0 = A;
4. A + (-1)A = 0;
5. 1.A = A;
6. (λ +μ)A = λ A + μA;
7. λ (A + B) = λ A + λ B;
8. (λμ)A = λ (μA).

Sau này ta sẽ viết (-1)A = -A; A + (-B) = A – B và gọi A – B là A trừ B.

3. Phép nhân ma trận

Cho ma trận A cấp m x n, ma trận B cấp m x p xác định bởi:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} (B)_{kj},\ i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,p$$

Như vậy:

- Để tích AB xác định thì số cột của A phải bằng số dòng của B.
- Phần tử $(AB)_{ij}$ bằng tổng các tích tương ứng của các phần tử nằm trên dòng i của A và cột j của B.

Ví dụ: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ma trận vuông cấp n được gọi là ma trận đơn vị cấp n, ký hiệu $I = I_n$, nếu:

$$(I)_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{nếu } i = j \\ \mathbf{0} & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Như vậy ma trận đơn vị cấp n là ma trận vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo chính bằng 1, còn các phần tử còn lại bằng 0.

Ví dụ: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

<u>Định lý 2:</u>

1. Cho ma trận A cấp m x n. Khi đó

$$I_mA = A\ _n = A$$
$$0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$$
$$A \times 0_{n\times q} = 0_{m\times q}$$

1. Cho ma trận A cấp m x n, B cấp n x p, C cấp p x q. Khi đó A(BC) = (AB)C
2. Cho ma trận A cấp m x n, B cấp n x p, và số λ. Khi đó: (λ A)B = A(λ B) = λ (AB)
3. Cho ma trận A cấp m x n, B, C có cấp n x p. Khi đó: A (B + C) = AB + AC
4. Cho ma trận A, B cấp m x n, C cấp n x p. Khi đó: (A + B)C = AC + BC

4. Phép chuyển vị

Cho ma trận A cấp m x n. Khi đó ma trận chuyển vị của A là ma trận A^T có cấp n x m xác định bởi.

$$(AT)_{ij} = (A)_{ji} \text{ với } i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n$$

Như vậy ma trận chuyển vị của A là ma trận nhận được từ A bằng cách đổi dòng thành cột, đổi cột thành dòng.

Theo tính chất của định thức, ta có: det A = det A^T nếu A là ma trận vuông.

Định lý sau đây cho ta một số tính chất khác.

<u>Định lý 3:</u>

1. Với mọi ma trận A ta có: $(A^T)^T = A$;
2. Với mọi ma trận A và B cùng cấp ta có: $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. Với mọi ma trận A cấp m x n, B cấp n x p ta có: $(AB)^T = B^T A^T$

Ma trận vuông

1. Vài nhận xét

a) Nếu A và B là các ma trận vuông cấp n thì các tích AB và BA cũng là ma trận vuông cấp n, tuy nhiên nói chung AB ≠ BA.

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} [illegible] & 0 \\ [illegible] & 0 \end{pmatrix}$ thì $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Có các ma trận A và B cấp n sao cho A ≠ 0, B ≠ 0 nhưng AB = BA = 0

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ Ta có $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Trong tập hợp ma trận vuông cấp n có các phép toán cộng, nhân với số và nhân. Phép nhân có phần tử đơn vị $I = I_n$. Với nó:

$$AI = IA = A$$

Với mọi ma trận vuông A cấp n. Ma trận I giống như số 1 trong phép nhân số.

d) Nếu A, B là các ma trận vuông cùng cấp thì ta có

$$\det(AB) = \det A . \det B$$

2. Ma trận đảo

Ma trận vuông A cấp n được gọi là khả đảo nếu tồn tại ma trận B cấp n sao cho

$$AB = BA = I \quad (1)$$

Ma trận B thỏa mãn (1) nếu có là duy nhất.

Thật vậy, nếu ma trận B' cũng thỏa mãn: AB' = B'A = I, thì B' = B'I = B'(AB) = (B'A)B = IB = B

Ma trận B thỏa mãn (1) gọi là ma trận đảo của A, ký hiệu là A^{-1}. Như vậy ma trận đảo của ma trận A nếu có là duy nhất và $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

Định lý 4: Nếu A và B là các ma trận khả đảo cấp n thì:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AT)^{-1} = (A^{-1})T$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
4. $\det(A) . \det(A^{-1}) = 1$

Ma trận đảo tìm được theo định lý sau đây:

Định lý 5:

1. Ma trận vuông A khả đảo $\leftrightarrow$ $\det A \neq 0$
2. Nếu A khả đảo thì

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_{ij})^T \quad (2)$$

Trong định lý này ta ký hiệu

$$(A_{ij})^T - \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{r1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{r2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{rn} \end{pmatrix}$$

là chuyển vị của ma trận có các phần tử là phần phụ của đại số của phần tử tương ứng của ma trận A.

Ma trận vuông A có det A ≠ 0 còn gọi là không suy biến.

Ví dụ:

a) Theo công thức (2), nếu ad – bc ≠ 0 thì $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ta có det A = 6 ≠ 0 nên A khả đảo. Ngoài ra

$A_{11} = 4$, $A_{21} = -3$, $A_{31} = -5$
$A_{12} = 0$, $A_{22} = 3$, $A_{32} = 3$
$A_{13} = 2$, $A_{23} = 3$, $A_{33} = -1$

Do đó theo (2) $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Hạng của ma trận

1. Định nghĩa hạng của ma trận

Cho ma trận A cấp m x n. Nếu chọn các phần tử nằm trên k dòng, k cột của A thì ta được một ma trận vuông con cấp k của A. Định thức của ma trận này gọi là một định thức con cấp k của A.

Ta gọi hạng của ma trận A, ký hiệu rank A, là cấp cao nhất trong các định thức con khác không của ma trận A.

Từ định nghĩa ta có: **rank A ≤ min (m,n)**

2. Cách tìm hạng

- Nếu A = 0 thì rank A = 0
- Nếu A ≠ 0 thì rank A ≥ 1. Cố định một phần tử khác không của A và xét tất cả các định thức con cấp 2 của A chứa phần tử này.
- Nếu có một định thức khác không thì rank A ≥ 2. Nếu không thì ta kết luận rank A = 1.
- Trong trường hợp có một định thức con cấp 2 khác không, ta cố định định thức này và xét tất cả các định thức con cấp ba chứa nó. Nếu có một định thức khác không thì rank A ≥ 3. Nếu không thì ta kết luận rank A = 2.
- Tiếp tục như vậy ta tìm được hạng của A.

Ví dụ:

a) Tìm hạng của ma trận: $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ta có $\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} = -42 \neq 0$ nên rank A ≥ 2. Hai định thức con cấp 3 chứa định thức cấp 2 nói trên là.

$$\begin{vmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 11 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

Như vậy rank A ≥ 3, nhưng ma trận có 3 dòng nên rank A ≤ 3, từ đó rank A = 3.

b) Tìm hạng của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Ta có det A = 0 do đó rank A < 3. Ta lại có $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$ nên rank A ≥ 2. Vậy rank A = 2.

Thông thường để tính hạng của ma trận vuông cấp 3 ta tiến hành như ví dụ b) trên đây, nếu det A ≠ 0 thì ta có ngay rank A = 3.

3. Phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận

Ta gọi các loại phép biến đổi sau đây là những phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận.

- Loại 1: Đổi chỗ hai dòng cho nhau, còn những dòng khác giữ nguyên.
- Loại 2: Nhân một dòng với một số khác không, còn những dòng khác giữ nguyên.
- Loại 3: Cộng một dòng vào một dòng khác đã nhân với một số, còn những dòng khác giữ nguyên.

Theo tính chất của định thức dễ dàng thấy rằng một ma trận vuông không suy biến thì sau khi thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của nó, ma trận mới vẫn không suy biến. Với ma trận suy biến cũng có tính chất tương tự.

Từ điều vừa nhận xét, ta thấy ngay rằng hạng của một ma trận không thay đổi khi ta thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng.

Ma trận A cấp m x n gọi là các bậc thang nếu $(A)_{ij}$ với mọi i > j và $(A)_{ik}$ với mọi k ≤ j thì $(A)_{i+1,k} = 0$ với mọi k ≤ j + 1. Trong đó i = 1, 2, …, m – 1; j = 1, 2 …, n –1

Nếu dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận về dạng bậc thang thì số dòng khác không của ma trận dạng bậc thang chính là hạng của A, vì đó cũng chính là cấp cao nhất của định thức con khác không của ma trận A.

Ví dụ:

a) Tìm hạng của $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Ta có: $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 0 & 10 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$

b) $\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3$

4. Tìm ma trận đảo nhờ phép biến đổi sơ cấp

Mỗi phép biến đổi sơ cấp trên ma trận đơn vị I cấp n cho ta một ma trận gọi là ma trận sơ cấp ứng với phép biến đổi sơ cấp đã cho.

Cho ma trận vuông A cấp n.

Ta nhận xét rằng nếu phép biến đổi sơ cấp trên dòng của A có ma trận sơ cấp tương ứng là T thì ma trận nhận được phép biến đổi sơ cấp là T.A. Từ đó, nếu $T_1, T_2, \ldots, T_k$ là dãy các ma trận sơ cấp ứng với các phép biến đổi sơ cấp trên dòng đưa ma trận A thành ma trận đơn vị I thì

$$\mathbf{T_k\, T_{k-1} \ldots T_1.A = I}$$

Từ đó

$$\mathbf{A^{-1} = T_k\, T_{k-1} \ldots T_1 = T_k\, T_{k-1}, \ldots T_1 I}$$

Do vậy ta có

<u>Định lý 6:</u> Các phép biến đổi sơ cấp đưa A thành ma trận đơn vị cũng chính là các phép biến đổi sơ cấp đưa ma trận đơn vị thành A^{-1}.

Theo định lý 6 ta có thể tìm ma trận đảo của A bằng phương pháp biến đổi sơ cấp như sau:

- Ghép A với ma trận đơn vị I thành ma trận $\left(A/I\right)$ cấp n x (2n). Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận này đưa n cột đầu thành ma trận đơn vị I thì n cột cuối thành ma trận A^{-1}.

Ví dụ: Tìm ma trận đảo của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có: $(A/I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = \left(I \middle| A^{-1}\right)$$

Vậy $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Chương III. Không gian vectơ

Vectơ n - chiều

1. Định nghĩa

Một bộ gồm n số $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là một vectơ n chiều. Số x_i được gọi là tọa độ thứ i của vectơ x.

Ta có thể coi x như một ma trận cấp 1 x n. Ta cũng có thể coi như một ma trận cấp n x 1, khi đó ta viết:

$$[x] = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Phép cộng vectơ và phép nhân một số với một vectơ tương tự như đối với ma trận. Cụ thể, với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ và số λ ta có.

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda_x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

- Vectơ n – chiều 0 = (0, 0, …, 0) có tất cả các tọa độ bằng không gọi là vectơ không.
- Vectơ –x = (-1)x gọi là vectơ đối của x.
- Đặt x – y = x + (-y) và gọi là hiệu của x và y.

Tương tự định lý 1 chương 2 ta có:

Định lý 1: Với mọi vectơ n – chiều x, y, z và mọi số λ, μ ta có:

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$
2. $x + y = y + x$
3. $x + 0 = x$
4. $x + (-x) = 0$
5. $1.x = x$
6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
7. $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$
8. $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu)x$

2. Sự phụ thuộc tuyến tính

Cho một hệ gồm k vectơ n – chiều $v_1, v_2, \ldots, v_k$ Hệ này được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại các số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ không đồng thời bằng không sao cho:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0 \quad (1)$$

Nếu (1) chỉ xảy ra khi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$ thì hệ vectơ gọi là độc lập tuyến tính. Vectơ v được gọi là một tổ hợp tuyến tính của hệ vectơ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ nếu tồn tại các số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sao cho:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k$$

Khi v là một tổ hợp tuyến tính của $v_1, v_2, \ldots, v_k$ thì ta cũng nói v biểu thị tuyến tính được qua $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của vectơ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ ký hiệu là:

$$V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle = \left\{ v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,k} \right\}$$

Ví dụ:

a) Hệ ba vectơ $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$, $\varepsilon_3 = (0, 0, 1)$ là độc lập tuyến tính, vì

$$\lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \lambda_3 \varepsilon_3 = 0 \rightarrow (\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3) = (0,0,0)$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

b) Hệ $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0. 1. 1)$, $v_3 = (1, 2, 2)$ là phụ thuộc tuyến tính vì

$$1.(1, 1, 1) + 1.(0.1.1) – 1.(1, 2, 2) = 0$$

<u>Định lý 2:</u> Cho hệ vectơ n – chiều $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Khi đó

1. Nếu k = 1 và $v_1 \neq 0$ thì hệ độc lập tuyến tính.
2. Nếu hệ độc lập tuyến tính thì mọi $v_i \neq 0$
3. Nếu một bộ phận của hệ là phụ thuộc tuyến tính thì hệ thụ thuộc tuyến tính.
4. Nếu hệ độc lập tuyến tính thì mọi bộ phận của hệ đều độc lập tuyến tính.
5. Nếu k>1 thì hệ phụ thuộc tuyến tính ↔ tồn tại ít nhất một vectơ trong hệ là tổ hợp tuyến tính của các vectơ còn lại.

3. Hạng của hệ vectơ

Cho hệ vectơ $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Ta gọi số vectơ độc lập tuyến tính lớn nhất chọn được từ hệ này là hạng của hệ, ký hiệu là rank $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$.

Từ định nghĩa ta có:

Hệ vectơ $v_1, v_2, \ldots, v_k$ độc lập tuyến tính ↔ rank $(v_1, v_2, \ldots, v_k) = k$.

Giả sử:

$$\begin{aligned} v_1 &= (a_{11}, a_{12}, \cdots a_{1n}) \\ v_2 &= (a_{21}, a_{22}, \cdots a_{2n}) \\ &\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ v_k &= (a_{k1}, a_{k2}, \cdots a_{kn}) \end{aligned}$$

Ký hiệu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

là ma trận có các dòng là vectơ của hệ đã cho.

<u>Định lý 3:</u> rank$(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ = rank A

Ví dụ:

a) Xét hệ v1 = (2, 1, 1), v2 = (-1, 1. 4), v3 = (1, 1, 2)

Bởi vì rank (v1, v2, v3) = rank $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ = 3 nên hệ có hạng bằng 3 và hệ độc lập tuyến tính.

b) Hệ (2, -2, 5), (1, -2, 2), (1, 2, 4) có hạng rank $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ nên hệ phụ thuộc tuyến tính.

c) Hệ gồm n + 1 vectơ trong R^n là phụ thuộc tuyến tính. Thật vậy gọi A là ma trận có các vectơ đó là các dòng thì A có cấp (n + 1) n. Vì rank A < n + 1 nên hệ phụ thuộc tuyến tính.

Không gian vectơ n - chiều

1. Định nghĩa

Tập tất cả các vectơ n – chiều cùng với phép cộng vectơ và phép nhân số với vectơ được gọi là không gian vectơ n – chiều R^n, gọi tắt là không gian R^n hay R^n.

Không gian R^n có các tính chất (i) – (viii) trong định lý 1.

2. Cơ sở của Rn

Hệ gồm n vectơ độc lập tuyến tính trong R^n gọi là một cơ sở của R^n.

Theo định lý 3, hệ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ là cơ sở của $R^n \leftrightarrow \text{rank}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = n$.

Bây giờ ta chứng minh điều sau đây:

Trong R^n cho một cơ sở $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và một vectơ v. Khi đó tồn tại duy nhất các số $\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n$ sao cho:

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \quad (2)$$

Chứng minh: Thật vậy, nếu có một cách viết khác

$$v = \lambda'_1 v_1 + \lambda'_2 v_2 + \ldots + \lambda'_n v_n$$

thì lấy (2) trừ cho đẳng thức này ta được

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)v_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)v_2 + \ldots + (\lambda_n - \lambda'_n)v_n = 0$$

Vì $v_1, v_2, \ldots, v_n$ độc lập tuyến tính nên

$$\lambda_1 - \lambda'_1 = 0 \text{ hay } \lambda_1 = \lambda'_1$$

với i = 1, …, n, tức cách viết (2) là duy nhất.

Để chứng minh sự tồn tại ta xét hệ $v_1, v_2, \ldots, v_n, v$

Vì rank $(v_1, v_2, \ldots, v_n, v) = n$ nên hệ phụ thuộc tuyến tính. Từ đó tồn tại các số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, α không đồng thời bằng không sao cho:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n + \alpha v = 0$$

Nếu $\alpha = 0$ thì $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ và do đó $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, ta gặp mâu thuẫn.

Vậy $\alpha \neq 0$ và

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha}v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha}v_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha}v_n$$

tức v được viết dưới dạng (2) với

$$\lambda_i = \frac{\alpha_i}{\alpha}, i = 1,2,\dots,n$$

Bộ số duy nhất ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$) gọi là tọa độ của vectơ v trong cơ sở V = {v_1, v_2, …v_n}, kí hiệu

$$v/V = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

hoặc

$$[v]_V = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Ví dụ:

a) $\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, …, $\varepsilon_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$ là một cơ sở của R^n.

Cơ sở này gọi là cơ sở chính tắc hay cơ sở mẫu của R^n.

Với mọi vectơ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ta có

$$x = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n$$

do đó $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cũng chính là tọa độ của x trong cơ sở chính tắc.

b) V = {(1,1,1), (0,1,1) , (0,1,1)} là cơ sở của R^3 vì rank(V) = 3.

Vectơ v = (1,2,3) có tọa độ trong cơ sở V là (1,1,1). Do đó

$$v/V = (1,1,1) \text{ hay } [v]_V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Biến đổi tọa độ khi thay đổi cơ sở

Xét hai cơ sở

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\},\ W = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \text{ của } R^n$$

Khi đó với mọi j = 1, …, n ta có

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{r} t_{ij} v_i$$

Ta gọi

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

là ma trận chuyển từ cơ sở V sang cơ sở W.

Xét một vectơ v. Giả sử

$$[v]_W = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad [v]_V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ta có: $$\mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{y}_j \mathbf{w}_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{y}_j \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{t}_{ij} \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{t}_{ij} \mathbf{y}_j \right) \mathbf{v}_i$$

So sánh với $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i \mathbf{v}_i$ ta được $\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{t}_{ij} \mathbf{y}_j$ với mọi i = 1, …, n

Vì vậy

$$[x]_V = T.[x]_W \quad (3)$$

$$\left([x]_W = T^{-1} [x]_V \right)$$

Biến đổi tuyến tính

1. Định nghĩa

Một ánh xạ f : $R^n \rightarrow R^m$ được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu với mọi v, ω Є R^n và mọi số λ, ta có:

1. f (v + ω) = f(v) + f (ω)
2. f(λ v) = λ f(v)
   Từ định nghĩa trên dễ dàng suy ra:
3. f(0) = 0
4. f (v - ω) = f(v) - f (ω)

5. $f\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i v\right) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i f(v_i)$ với mọi $v_i \in R^n$, $\lambda_i \in R$, i = 1, …, k

Ví dụ:

a) Các ánh xạ sau đây là tuyến tính:

$$f : R^2 \to R^1,\ f(x,y) = 3x - 2y$$

$$f : R^2 \to R^2,\ f(x,y) = (x - y, 2x + y)$$

$$f : R^n \to R^m,\ f(v) = 0 \text{ với mọi } v \in R^n$$

$$f : R^n \to R^n,\ f(v) = v \text{ với mọi } v \in R^n$$

b) Các ánh xạ sau đây là không tuyến tính:

$$f : R^2 \to R^2,\ f(x,y) = (x - t, 2x + y + 1)$$

$$f : R^2 \to R^1,\ f(v) = x2 + y2$$

Trường hợp m = n: axtt $f : R^n \to R^n$ gọi là phép biến đổi tuyến tính trên R^n

Trường hợp m = 1 ánh xạ tuyến tính.

$$f : R^n \to R^1$$

được gọi là dạng tuyến tính trên R^n.

2. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính

Xét biến đổi tuyến tính $f : R^n \to R^n$ và một cơ sở $V = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ của R^n.

Với mỗi x ∈Rn, giả sử:

$$[f(x)]_V = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad [x]_V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Với mọi j = 1, …, n, đặt:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

Ta được ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

gọi là ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở V.

Chú ý rằng.

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) v_i$$

so sánh với

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

ta có:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$ với mọi i = 1, …, n

Vì vậy:

$$[f(x)]v = A[x]v \quad (4)$$

Ví dụ:

a) Cho A là một ma trận vuông cấp n bất kỳ. Khi đó ánh xạ f: $R^n \rightarrow R^n$, [f(v)] = A[v] là phép biến đổi tuyến tính. (cơ sở chính tắc).

Thật vậy, với mọi v, ω ∈Rn, ta có

[f(v + ω] = A [v + ω] = A([v] + [ω])

= [v] + A [ω] = [f(v)] + [f(ω)]

tức là f(v+w) = f(v)+f(w) với mọi v ∈Rn và λ ∈R ta có

[f(λ v)] = A[λv] = A(λ[v]) = λA[v] = λ[f(v)]

tức là f(λ v) = λ f(v)

Kết hợp các điều vừa chứng minh, f là phép biến đổi tuyến tính.

b) Cho phép biến đổi tuyến tính

$$f : R^3 \to R^3,\ f(x_1, x_2, x_3) = (5x^1 - 3x^2 + 2x^3, 4x^2 – x^3, x^1 + x^2)$$

Hãy tìm ma trận của f trong cơ sở chính tắc.

Ta có:

$$f(\varepsilon_1) = (5,0,1) = 5.\varepsilon^1 + 0.\varepsilon_2 + 1.\varepsilon_3$$

$$f(\varepsilon_2) = (-3,4,1) = -3.\varepsilon_1 + 4.\varepsilon_2 + 1.\varepsilon_3$$

$$f(\varepsilon_3) = (2,-1,0) = 2.\varepsilon_1 - 1.\varepsilon_2 + 0.\varepsilon_3$$

Vì ma trận của f trong cơ sở chính tắc là $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Không gian vectơ

1. Định nghĩa

Cho L là một tập khác rỗng. Ta gọi một phép cộng trên L là một quy tắc đặt tương ứng hai phần tử x, y $\in$L với một phần tử duy nhất x + y $\in$L, một phép nhân số với phần tử của L là một quy tắc đặt mỗi λ $\in$R, x $\in$L với một phần tử duy nhất λx $\in$L.

Tập L cùng với hai phép toán cộng và nhân với số được gọi là một không gian vectơ hay không gian tuyến tính nếu với mọi x, y, z $\in$L và mọi λ, μ $\in$R thỏa mãn:

1. x + (y + z) = (x + y) + z
2. x + y = y + x
3. $\exists 0 \in L, x + 0 = x$
4. $\exists (-x) \in L, x + (-x) = 0$
5. 1.x = x
6. (λ + μ)x = λ x + μ x
7. λ (x + y) = λ x + λ y
8. λ (μ x) = (λ μ)x

Dễ dàng chứng minh rằng phần tử 0 trong (iii) là duy nhất, phần tử đối –x trong tính chất (iv) cũng duy nhất và –x = (-1)x.

Khi L là một không gian vectơ thì các phần tử của nó gọi là các vectơ.

Ví dụ:

a) Theo định lý 1, không gian vectơ n – chiều R^n là một không gian vectơ.

b) Theo định lý 1 chương 2, tập M_{mxn} tất cả các ma trận cấp m x n với phép cộng và phép nhân ma trận với số là một không gian vectơ.

c) Tập các đa thức với phép cộng và phép nhân đa thức với số thông thường là một không gian vectơ.

2. Sự phụ thuộc tuyến tính

Hệ phần tử $v_1, v_2, \ldots, v_k$ trong không gian vectơ L được gọi là phụ thuộc tuyến tính nếu tồn tại các số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ không đồng thời bằng không sao cho:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_k v_k = 0$$

Nếu đẳng thức trên chỉ xảy ra khi $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$ thì hệ được gọi là độc lập tuyến tính.

3. Cơ sở và tọa độ

Cho L là một không gian vectơ.

Nếu tồn tại số n sao cho mọi hệ độc lập tuyến tính của L chỉ có nhiều nhất là n phần tử thì L được gọi là không gian vectơ (hữu hạn) n – chiều. Ký hiệu: dim L = n

Nếu L = {0} thì ta gọi L là không gian không chiều.

Ký hiệu: dim L = 0

Trường hợp mọi số tự nhiên n đều tìm được một hệ độc lập tuyến tính trong L có n phần tử thì L được gọi là vô hạn chiều.

Ví dụ:

a) Không gian R^n là hữu hạn n – chiều.

b) Không gian, M_{mxn} là m x n – chiều.

c) Không gian vectơ các đa thức là vô hạn chiều, vì mọi n, hệ các đa thức 1, x, …, x^{n-1} là độc lập tuyến tính.

Cho L là một không gian vectơ n – chiều. Khi đó mỗi hệ độc lập tuyến tính gồm n phần tử của L được gọi là một cơ sở của L.

Xét hệ vectơ: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ của L

<u>Định lý 4:</u> Hệ V là cơ sở của L nếu và chỉ nếu mọi vectơ $x \in L$, toàn tại duy nhất bộ số $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ sao cho

$$x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \quad (5)$$

Nếu V là cơ sở thì bộ số $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ gọi là tọa độ của x trong cơ sở V, ký hiệu là

$$v/_V = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

hoặc là

$$[v]_v = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Nhận xét: V là cơ sở của L nếu V độc lập tuyến tính và với mọi x ∈L có biểu diễn (5).

4. Biến đổi tuyến tính

Cho hai không gian vectơ L, M. Một ánh xạ f : L → M được gọi là ánh xạ tuyến tính nếu:

$$f(v + \omega) = f(v) + f(\omega) \text{ với mọi } v, \omega \in L$$

$$f(\lambda v) = \lambda f(v) \text{ với mọi } \lambda \in R, v \in L$$

- Nếu M = R thì ánh xạ tuyến tính f : L → R được gọi là dạng tuyến tính trên L.
- Nếu M = L thì ánh xạ tuyến tính f : L → L được gọi là phép biến đổi tuyến tính trên L.

Cho phép biến đổi tuyến tính f : L → L và cơ sở V = { v_1, v_2, …, v_n} của L.

Với mỗi j đặt:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$$

ta được ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gọi ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở V.

Tương tự công thức (4) ta có:

$$[f(x)]_v = A[x]_v$$

Ví dụ: Gọi L là tập các đa thức bậc ≤ 3. Khi đó L là không gian vectơ 4 – chiều với phép tính cộng và nhân đa thức với số thông thường.

Xét phép biến đổi:

$$f: L \mapsto L$$
$$P \mapsto P' \text{ (đạo hàm của P)}$$

Dễ dàng kiểm tra f là phép biến đổi tuyến tính trên L.

Với cơ sở V={1, x, x^2, x^3} của L ta có

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0 &&= 0.1 + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3 \\
f(x) &= 1 &&= 1.1 + 0.x + 0.x^2 + 0.x^3 \\
f(x^2) &= 2x &&= 0.1 + 2.x + 0.x^2 + 0.x^3 \\
f(x^3) &= 3x^2 &&= 0.1 + 0.x + 3.x^2 + 0.x^3
\end{aligned}$$

Do đó ma trận của f trong cơ sở V là:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nhận xét: Cho không gian vectơ n-chiều L có cơ sở V={v_1,v_2,...,v_n} và ánh xạ

$$f : L \mapsto R^n$$
$$x \mapsto x/V$$

Dễ dàng kiểm tra f là ánh xạ tuyến tính và song ánh. Ta nói rằng L và R^n đẳng cấu tuyến tính với nhau. Do tính chất này, L có tất cả các khái niệm và tính chất tương tự như trong R^n, ở trên ta chỉ đưa ra một vài khái niệm và tính chất.

5. Không gian vectơ con

Cho L là một không gian vectơ. Tập con M $\subset$ L được gọi là một không gian vectơ con của L nếu 0 $\in$ M và với các phép toán trong L, M cũng là không gian vectơ.

Từ định nghĩa ta thấy ngay L và 0 ≡ {0} là những không gian vectơ con của L, gọi là không gian con tầm thường. Không gian vectơ con thường gọi vắn tắt là không gian con.

<u>Định lý 5:</u> Tập con M của không gian vectơ L là không gian vectơ con của L nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn một trong hai điều kiện tương đương sau đây:

(i) M ≠ Ø và x + y $\in$ M với mọi x, y $\in$ M; λ x $\in$ M với mọi λ $\in$ R, x $\in$ M

(ii) 0 $\in$ M và x + λ y $\in$ M với mọi x, y $\in$ M, λ $\in$ R.

Ví dụ:

a) Ký hiệu L là không gian vectơ tất cả các hàm xác định [a,b] với phép cộng và phép nhân hàm với số thông thường, L_1 là tập các hàm khả tích, L_2 là tập các hàm liên tục L_3 là tập các hàm khả vi trên [a,b].

Ta có:

- L_1, L_2, L_3 là không gian vectơ con của L;
- L_2, L_3 là không gian vectơ con của L_1;
- L_3 là không gian vectơ con của L_2.

b) Trong R^n xét hệ vectơ $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$

Ký hiệu $L = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$

là tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Ta có L là không gian vectơ con của R^n và

$$\dim L = rank\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$$

gọi là không gian con sinh bởi $v_1, v_2, \ldots, v_k$.

c) Trong R^3 xét:

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$$

M là không gian vectơ con của R^3.

Thật vậy, vì 0 – 2.0 + 0 = 0 nên $0 = (0,0,0) \in M$.

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in M,\ y = (y_1, y_2, y_3) \in M \text{ và } \lambda \in R, \text{ ta có}$$

$$x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3)$$

$$\text{Vì } (x_1 + \lambda y_1) - 2(x_2 + \lambda y_2) + (x_3 + \lambda y_3)$$

$$= (x_1 - 2x_2 + x_3) + \lambda (y_1 - 2y_2 + y_3) = 0$$

nên ta cũng có:

$$x + \lambda y \in M$$

Chương IV. Hệ phương trình tuyến tính

Các khái niệm

1. Hệ phương trình tuyến tính

Hệ phương trình tuyến tính m phương trình, n ẩn số là hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó các a_{ij}, b_i, i=1, ... m; j=1, ..., n là các hệ số x_j, j= 1, ..., n là các ẩn số.

Bộ số $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ được gọi là một nghiệm của hệ (1) nếu thay các x_i vào vị trí của x_j trong hệ (1) ta được m đẳng thức đúng.

Mỗi nghiệm của hệ (1) là một véc tơ của R^n, tập tất cả các nghiệm của hệ (1) là tập con của R^n.

Giải hệ phương trình là tìm tất cả các nghiệm của hệ.

Đặt: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

và gọi A là ma trận các hệ số, B là cột các hệ số tự do. Hệ phương trình (1) có thể viết dưới dạng ma trận

$$AX = B \quad (2)$$

Ta gọi: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ là ma trận các hệ số bổ sung. Hệ (1) hoàn toàn được xác định khi biết ma trận các hệ số bổ sung của nó.

2. Hệ phương trình thuần nhất

Hệ phương trình tuyến tính (1) được gọi là thuần nhất nếu tất cả các hệ số tự do bằng không. Dưới dạng ma trận hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trở thành

$$AX = 0 \quad (3)$$

Hệ phương trình thuần nhất luôn có ít nhất một nghiệm, đó là X = 0, gọi là nghiệm tầm thường.

Định lý 1: Tập hợp nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là một không gian véc tơ con của R^n.

Chứng minh: Giả sử tập nghiệm của phương trình (3) là M. Ta có $0 \in M$. Nếu X, M $\in R$ và $\lambda \in R$ thì:

$$A(X+ \lambda Y) = AX + \lambda AY = 0$$

Do đó $X + \lambda Y \in M$. Vậy M là không gian véc tơ con.

3. Định lý Kronecker – Capelli

Định lý 2 (Kronecker – Capelli): Hệ phương trình tuyến tính (1) có nghiệm nếu và chỉ nếu

$$\text{rank } A = \text{rank } \bar{A} = r$$

- Nếu r = n thì hệ có một nghiệm duy nhất.
- Nếu r < n thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc n – r tham số.

Ví dụ:

a) Hệ phương trình tuyến tính (1) luôn có nghiệm nếu

$$\text{rank } A = m \text{ (số phương trình của hệ)}$$

Thật vậy, rank A ≤ rank Ā = m, do đó từ điều trên ta có rank A = rank Ā, nghĩa là hệ có nghiệm.

b) Hệ thuần nhất có nghiệm không tầm thường nếu và chỉ nếu rank A < n.

c)Hệ phương trình $\begin{cases} 5x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ 11x_1 & +4x_2 & +x_5 & - & 2 \\ 2x_1 & +2x_2 & & = & 1 \end{cases}$ có rank A = 2, rank Ā = 3 vì vậy hệ vô nghiệm.

d) Hệ phương trình $\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & +x_4 & = & C \end{cases}$ có rank A = rank Ā = 2 < 4, do dó hệ có vô số nghiệm phụ thuộc 2 tham số.

Phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

1. Phương pháp ma trận đảo

Xét hệ phương trình dưới dạng (2): AX = B

Nếu A là ma trận vuông khả đảo thì A^{-1} (AX) = A^{-1} B, do đó

$$X= A^{-1} B$$

Vậy nghiệm có hệ duy nhất A^{-1} B

Ví dụ: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x_1 & -2x_2 & & = & 1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ & x_2 & +2x_3 & = & -1 \end{cases}$

Ta có $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ và } A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Do đó nghiệm của hệ là $$\overline{X} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/15 \\ -3/15 \\ -6/15 \end{pmatrix}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất: $\left(\frac{3}{5}, \frac{-1}{5}, \frac{-2}{5}\right)$

2. Phương pháp Cramer

Hệ phương trình tuyến tính gọi là hệ Cramer nếu nó có số phương trình bằng số ẩn và det A ≠ 0

Nếu hệ là Cramer thì ta đặt Δ = det A trong đó Δ_j là định thức của ma trận được nhận từ A bằng cách thay cột thứ j bởi cột hệ số tự do.

__Định lý 3 (Cramer):__ Hệ Cramer có một nghiệm duy nhất là:

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$$

Ví dụ: Giải hệ phương trình: $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Ta có $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -28$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -16, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -20$$

Do đó hệ có nghiệm duy nhất là (7/ 2, 2, 5/ 2)

3. Phương pháp Gauss

Xét ma trận hệ số bổ sung Ā của hệ (1)

Các phép biến đổi sơ cấp trên các dòng của ma trận Ā đưa Ā thành ma trận hệ số của một hệ phương trình tuyến tính mới tương đương với hệ phương trình xuất phát.

Phương pháp dùng phép biến đổi sơ cấp đưa Ā về dạng bậc thang, để đưa hệ đã cho về dạng bậc thang để giải, gọi là phương pháp Gauss.

Ví dụ:

a) Giải hệ: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ -1 & -4 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

Ta có

Hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ x_3 = 11 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (-40, 15, 11)

b) Giải hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & -7 & 6 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Ta có

Hệ đã cho tương đương với hệ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3 \\ 7x_2 + 6x_3 - -11 \\ 0x_3 - 7 \end{cases}$

Vì phương trình thứ ba vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

c) Giải hệ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -6 & -4 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ta có

Hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ \qquad\qquad - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$

Hệ đã cho có vô số nghiệm dạng $(-2x_2 - 2x_4 + 4, x_2, -x_4 + 2, x_4)$ trong đó x_2, x_4 tuỳ ý thuộc R.

4. Vài ví dụ ứng dụng

a) Tìm tọa độ của một hệ vectơ trong một cơ sở

Ví dụ: Tìm tọa độ của vectơ v = (1, 2, -1) trong cơ sở V = {(1, 1 , -1), (2,1, 1), (1,-2, 2)}

Đặt: x_1 (1, 1, -1) + x_2 (2, 1, 1) + x_3 (1, -2 , 2) = (1, 2, -1)

ta được hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

Hệ này có nghiệm $\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{-1}{2}\right)$, đó chính là tọa độ của vectơ v trong cơ sở V.

b) Tìm ma trận của một ánh xạ tuyến tính

Ví dụ: Tìm ma trận của phép biến đổi tuyến tính f: $R^3 \rightarrow R^3$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, 2x_3 - x_1)$$

trong cơ sở v_1 = (1, 1 , 1), v_2 =(0, 1 , 1) , v_3 =(0, 0 , 1)

Ta có: $f(v_1) = (1, 1, 1) = 1.v_1 + 0.v_2 + 0.v_3$

$f(v_1) = (-1, 1, 2)$

Đặt $x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 = (-1, 1, 2)$, ta có hệ

$$\begin{cases} x_1 & - & -1 \\ x_1 + x_2 & = & 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \end{cases} \quad Vây \quad \begin{cases} x_1 & - & -1 \\ x_2 & = & 2 \\ x_3 & = & 1 \end{cases}$$

do đó $f(v_2) = -1.v_1 + 2.v_2 + 1.v_3$

Tương tự

$$f(v_3) = (0, -1, 2) = 0.\ v_1 - 1.\ v_2 + 3.\ v_3$$

Từ đó ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong cơ sở V là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Chương V. Dạng song tuyến tính - Dạng toàn phương

Giá trị riêng, vectơ riêng

1. Định nghĩa

Cho phép đổi tuyến tính $f : R^n \to R^n$

Số λ được gọi là một giá trị riêng của f nếu tồn tại một vectơ $x \neq 0$ sao cho

$$f(x) = \lambda x \quad (1)$$

Vectơ x thỏa (1) được gọi là vectơ riêng của f tương ứng với giá trị riêng λ.

Ký hiệu: S_λ là tập tất cả các vectơ riêng của f tương ứng với giá trị riêng λ cùng với vectơ 0.

Định lý 1: S_λ là một không gian vectơ con của R^n và $f(S_\lambda) \subset S_\lambda$

Chứng minh: Ta có $0 \in S_\lambda$. Nếu x, y $\in S_\lambda$ và a $\in R$ thì

$$f(x+ay) = f(x) + a f(y) = \lambda x + a \lambda y = \lambda (x+ay)$$

nghĩa là $x+ay \in S_\lambda$. Vậy S_λ là không gian vectơ con.

Mặt khác nếu $x \in S_\lambda$ thì $f(x) = \lambda x \in S_\lambda$ do đó $f(S_\lambda) \in S_\lambda$

Do bao hàm thức $f(S_\lambda) \in S_\lambda$, người ta nói S_λ là một không gian con bất biến của f.

2. Phương trình đặc trưng

Giả sử A là ma trận của phép biến đổi tuyến tính f trong một cơ sở V. Khi đó:

$$[f(x)]_V = A[x]_V$$

Ta cũng có $[\lambda x]_V = \lambda I [x]_V$

do đó $f(x) = \lambda x \leftrightarrow A [x]_V = \lambda I [x]_V$

và cuối cùng $(A - \lambda I) [x]_V = 0 \quad (2)$

Đẳng thức (2) là một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất dưới dạng ma trận.

λ là giá trị riêng $\leftrightarrow$ (2) có nghiệm không tầm thường $\leftrightarrow$ rank $(A - \lambda I) < n \leftrightarrow$ det $(A - \lambda I) = 0$

Đặt:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \quad (3)$$

$P_A(\lambda)$ là một đa thức bậc n của λ, gọi là đa thức đặc trưng của ma trận A và cũng gọi là đa thức đặc trưng của phép biến đổi tuyến tính f. Các giá trị riêng của f cũng gọi là giá trị riêng của ma trận A.

Bằng cách giải phương trình đặc trưng $P_A(\lambda) = 0$

Ta tìm được các giá trị riêng của f (có nhiều nhất là n giá trị riêng). Thay các giá trị riêng tìm được vào phương trình (2), ta tìm được tọa độ của các vectơ riêng trong cơ sở đang xét. Ta gọi các nghiệm không tầm thường của (2) là các vectơ riêng của ma trận A ứng với giá trị riêng λ. Như vậy vectơ riêng của ma trận A là tọa độ của vectơ riêng của f trong cơ sở đang xét. Trường hợp cơ sở là chính tắc thì chúng trùng nhau.

Ví dụ: Cho phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở R3 có ma trận trong cơ sở V = $\{v_1, v_2, v_3\}$ là

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Hãy tìm giá trị riêng và vectơ riêng của f.

Đa thức đặc trưng của A là:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 4 \\ 1 & -1-\lambda & -8 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

Do đó f có giá trị riêng là 1 (bội 2) và –2

Để tìm vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ =1, ta lập hệ

$$\begin{pmatrix} 3-1 & -4 & 4 \\ 1 & -1-1 & -8 \\ 0 & 0 & -2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 = 0 \\ -3x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được nghiệm (2c, c, 0) , c tùy ý.

Do đó vectơ riêng của ma trận A ứng với λ = 1 là $c(2v_1+v_2)$, c ≠ 0

Để tìm vectơ riêng ứng với λ = -2 ta lập hệ

$$\begin{cases} 5x_1 & -4x_2 & +4x_3 = & 0 \\ x_1 & +x_2 & -8x_3 = & 0 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm là (28c, 44c, 9c), với c tùy ý. Do đó vectơ riêng của ma trận A ứng với $\lambda = -2$ là: (28c, 44c, 9c), $c \neq 0$ và vectơ riêng của f ứng với $\lambda = -2$ là

$$c\,(28v_1 + 44v_2 + 9v_3)$$

Nếu cho cụ thể chẳng hạn $v_1=(1,1,1)$, $v_2= (0,1,1)$, $v_3 =(0,0,1)$ thì vectơ riêng của f

- ứng với $\lambda = 1$ là $x = c(2, 3, 3)$, $c \neq 0$;
- ứng với $\lambda = -2$ là $x = c(28, 72, 81)$, $c \neq 0$

3. Giá trị riêng của ma trận đồng dạng

Hai ma trận vuông cấp n A và B được gọi là đồng dạng với nhau nếu tồn tại ma trận T không suy biến sao cho.

$$B = T^{-1}AT$$

<u>Định lý 2:</u> Các ma trận của một phép biến đổi tuyến tính f trong các cơ sở khác nhau là đồng dạng với nhau.

<u>Chứng minh:</u> Giả sử B là ma trận của f trong cơ sở W. Ta cần chứng minh A đồng dạng với B. (A là ma trận của f trong cơ sở V)

Theo (4) trong chương 3, ta có.

$$[f(x)]_V = A[x]_V;\ \ [f(x)]_W = B[x]_W;\ \ [x]_V = T[x]_W$$

Gọi T là ma trận từ V sang W. Theo (3) chương 3, ta có

$$[f(x)]_W = T^{-1}[f(x)]_V = T^{-1}A\,[x]_V$$

$$= (T^{-1}A)\,(T[x]_W) = (T^{-1}\,AT)\,[x]_W$$

Vì ma trận của f trong cơ sở W là duy nhất nên

$$B = T^{-1}AT \quad (4)$$

nghĩa là A và B đồng dạng nhau.

<u>Định lý 3:</u> Các ma trận đồng dạng có cùng đa thức đặc trưng.

<u>Chứng minh:</u> Giả sử $B= T^{-1}AT$. Khi đó

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det(T^{-1}AT - T^{-1}\lambda IT)$$

$$= \det[T^{-1}(A - \lambda I)T] = \det T^{-1}\det(A - \lambda I)\det T$$

$$= \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda)$$

Từ định lý 2 và 3 ta thấy rằng đa thức đặc trưng của một phép biến đổi tuyến tính là duy nhất.

Chéo hóa ma trận

1. Định nghĩa

Ma trận vuông A gọi là có dạng chéo nếu tất cả các phần tử không nằm trên đường chéo chính của nó đều bằng không, nghĩa là

$$(A)_{ij} = 0 \text{ với mọi } i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n$$

Ma trận vuông A gọi là chéo hóa được nếu tồn tại một ma trận vuông không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận chéo.

2. Điều kiện để một ma trận chéo hóa được

<u>Định lý 4:</u> Ma trận vuông A cấp n chéo hóa được nếu và chỉ nếu A có n vectơ riêng độc lập tuyến tính trong R^n.

Nếu λ là giá trị riêng đơn thì ứng với nó chỉ có duy nhất một vectơ riêng độc lập tuyến tính. Nếu λ là giá trị riêng bội m thì ứng với nó có số vectơ riêng độc lập ≤ m.

Dựa vào định lý 4 ta có kết quả như sau:

<u>Định lý 4':</u> M trận vuông A cấp n chéo hóa được nếu và chỉ nếu A có n giá trị riêng (kể cả số lần bội) và ứng với vectơ riêng bội m có m vectơ riêng độc lập tuyến tính.

Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Chứng tỏ A chéo hóa được. Tìm ma trận khả đảo T sao cho $A = TBT^{-1}$ với B là ma trận chéo.

Ta có $P_A(\lambda) - \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 12)$

$$P_A(\lambda) = 0 \leftrightarrow \lambda = 1, 3, -4$$

Với λ = 1, vectơ riêng tương ứng là v = c(1,0,3), c ≠ 0, ta chọn $v_1 = (1,0,3)$

Với λ = 3, vectơ riêng tương ứng là v = c(-3,-2,1), c ≠ 0, ta chọn $v_2 = (-3,-2,1)$

Với λ = -4, vectơ riêng tương ứng là v = c(-3,5,1), c ≠ 0, ta chọn $v_3 = (-3,5,1)$

Ta được cơ sở $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ của R^3 (V chọn bằng phương pháp trên luôn là cơ sở, nhưng ta không đi sâu vào vấn đề này).

Theo chứng minh định lý 4, với $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

thì $B = T^{-1}AT$ hay $A = TBT^{-1}$ trong đó B là ma trận chéo.

3. Chéo hóa ma trận đối xứng

Ma trận vuông A gọi là đối xứng nếu $A^T = A$.

Ma trận vuông A gọi là trực giao nếu $A^TA = A A^T = I$, nói cách khác, A là trực giao nếu $A^T = A^{-1}$.

<u>Định lý 5:</u> Mọi ma trận đối xứng A đều chéo hóa được, hơn nữa luôn có thể tìm được ma trận trực giao T sao cho T^TAT là có dạng chéo.

Cho $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ là các vectơ trong R^n. Ta gọi tích vô hướng của x và y là

$$\langle x | y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

x và y gọi là trực giao (hay vuông góc) nếu $\langle x | y \rangle = 0$. Ta gọi môđun của x là $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$

Một cơ sở của R^n được gọi là cơ sở trực chuẩn nếu các vectơ trong cơ sở có môđun bằng 1 và đôi một vuông góc nhau.

Nếu A là đối xứng thì có thể tìm được một cơ sở trực chuẩn của R^n gồm các vectơ riêng của A với cơ sở này, ma trận T nói trong định lý 4 là trực giao.

Ví dụ: Chéo hóa ma trận đối xứng $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ta có $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda^2)(2-\lambda)$

Vì vậy A có giá trị riêng là –1 (bội) và 2.

Với trị riêng 2, ta có vectơ riêng là (c, c, c), c ≠ 0 ta chọn vectơ có môđun bằng 1 là

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Với trị riêng –1 ta có vectơ riêng là $(c_1, c_2, -c_1 - c_2)$, c_1, c_2 không đồng thời bằng 0. Ta có thể chọn 2 vectơ riêng vuông góc là (1, 0 ,-1), (1, -2, 1). Vì vậy ta có hai vectơ trực giao có môđun 1 là

$$v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ v_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Ta có $\{v_1, v_2, v_3\}$ là cơ sở trực chuẩn. Với

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

thì $T^{-1} = T^T$ và

$$T^T A T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

là ma trận chéo

4. Tính lũy thừa ma trận

Cho ma trận A chéo hóa được, khi đó tồn tại ma trận vuông T sao cho $A = TBT^{-1}$ với

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

là ma trận chéo. Dễ dàng thấy rằng

$$A^n = TB^nT^{-1} = T\begin{pmatrix} \lambda^n_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^n_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^n_n \end{pmatrix}T^{-1}$$

do đó ta tính được A^n một cách khá đơn giản.

Ví dụ: Tính $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^{100}$

Đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

A có 2 giá trị riêng là 1, -3 với các vectơ riêng độc lập tương ứng là (1 , 0) và (1 , -2).

Ta có $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ và $B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Từ đó $A^{100} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right]^{100}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{100} & 0 \\ 0 & (-3)^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-3^{100}) \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix}$$

5. Ma trận xác định dương

Ma trận đối xứng được gọi là xác định dương nếu

$$\Delta_1 = a_{11} > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_n = \det A > 0$$

Ví dụ: Ma trận đối xứng $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$

Có 17 > 0, $\begin{vmatrix} 17 & -8 \\ -8 & 17 \end{vmatrix} = 1088 > 0$, det A = 2187 >0, do đó xác định dương.

Dạng song tuyến tính - Dạng toàn phương

1. Dạng song tuyến tính

Một ánh xạ f: $R^n \times R^n \rightarrow R$ được gọi là một dạng song tuyến tính trên R^n nếu với mọi x, y, z $\in R^n$, $\lambda \in R$ ta có

1. $f(x+z, y) = f(x, y) + f(z, y)$
   $f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y)$
2. $f(x, y+z) = f(x, y) + f(x,z)$
   $f(x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$

Như vậy f(x,y) là một dạng song tuyến tính f trên R^n nếu với mọi y cố định f là một dạng tuyến tính trên R^n theo biến x, và với mỗi x cố định f là một dạng tuyến tính trên R^n theo biến y.

Cho một dạng song tuyến tính f trên R^n và xét một cơ sở $V=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ của R^n.

Đặt $f(v_i, v_j) = a_{ij}$. Khi đó ta được ma trận

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^T$$

Ta gọi A là ma trận của dạng song tuyến tính f.

Ký hiệu [x]v, [y]v là tọa độ của x và y trong cơ sở V, ta có

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i , \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right)$$

$$= \sum_{,j=1}^{n} x_i y_j \, f(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

Vì vậy $f(x,y) = [y]^T{}_V A[x]_V$

$$f(x,y) = [y]_V^T A[x]_V$$

Ví dụ:

Cho $f(x,y) = x_1y_1 - 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1 - 4x_2 y_2$

với mọi $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ là một dạng song tuyến tính trên R^2.

Trong cơ sở chính tắc $\varepsilon_1 = (1,0)$, $\varepsilon_2 = (0,1)$ ta có $f(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = 1$, $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -2$, $f(e_2, e_1) = 3$,

$f(\varepsilon_2, \varepsilon_2) = -4$. Do đó ma trận của f trong cở sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

và ta có thể viết $f(x,y)=(y_1,y_2)\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

Một dạng song tuyến tính f(x,y) trên R^n gọi là đối xứng nếu

$$f(x,y) = f(y,x) \text{ với mọi } x,y \in R^n$$

Ta có tính chất sau đây

<u>Định lý 1:</u> Dạng song tuyến tính là đối xứng nếu và chỉ nếu ma trận của nó trong cơ sở bất kỳ là đối xứng.

2. Dạng toàn phương

Cho f(x,y) là một dạng song tuyến tính đối xứng trên R^n. Khi đó

$$\omega(x) = f(x, x)$$

gọi là một dạng toàn phương trên R^n

Ma trận của dạng song tuyến tính f cũng là ma trận của dạng toàn phương ω. Vậy ma trận của dạng toàn phương là một ma trận đối xứng.

Ví dụ: a) Trên R^3

$$f(x,y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3$$

là dạng song tuyến tính, có ma trận trong cơ sở chính tắc là

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

vì A là đối xứng nên f là dạng song tuyến tính đối xứng.

Từ đó $\omega(x) = f(x,x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2$ là một dạng toàn phương

b) Cho dạng toàn phương $\omega(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2$ trên R^3.

Ta có
$$\begin{aligned}\omega(x) = {} & x_1^2 + x_1x_2 - \tfrac{1}{2}x_1x_3\\ & + x_2x_1 + x_2^2 + 0x_2x_3\\ & - \frac{1}{2}x_3x_1 + 0x_3x_2 + x_3^2\end{aligned}$$

do đó ma trận ω(x) là
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1/2\\ 1 & 1 & 0\\ -1/2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Dạng toàn phương ω(x) gọi là xác định dương nếu ω(x) >0 với mọi x ≠ 0, gọi là bán xác định dương nếu ω(x) ≥ 0 với mọi x. Đổi chiều bất đẳng thức, ta có khái niệm xác định âm và bán xác định âm. Nếu ω(x) có dấu thay đổi thì ta nói nó không xác định.

3. Dạng chính tắc của dạng toàn phương

Dạng toàn phương $\omega(x) = b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_n x_n^2$ gọi là có dạng chính tắc.

Cơ sở của R^n để xác định ω(x) có dạng chính tắc gọi là cơ sở chính tắc của dạng toàn phương.

Nếu ω(x) có dạng chính tắc thì ta thấy ngay

- ω(x) xác định dương nếu mọi $b_i > 0$
- bán xác định dương nếu mọi $b_i \geq 0$
- xác định âm nếu mọi $b_i < 0$
- bán xác định âm nếu mọi $b_i \leq 0$
- không xác định nếu có các b_i trái dấu

Để xét tính xác định của một dạng toàn phương bấy kỳ, ta tìm cách đưa nó về dạng chính tắc, khi đó ta kết luận theo cách trên.

4. Phương pháp đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc
Phương pháp Lagrange:

Nếu trong dạng toàn phương ω(x) có $a_{11} \neq 0$ thì ta viết

$$\omega(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \dots$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + g_1$$

Đặt $x_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n, x'_j = x_j$

Với j = 2, ... , n ta có $\omega(x) = a_{11}x_1'^2 + g_1$

trong đó g_1 là một dạng toàn phương không chứa x_1

Nếu $a_{11} = 0$ nhưng $a_{12} \neq 0$ thì đặt

- $x_1 = x'_1 + x'_2$
- $x_2 = x'_1 - x'_2$

Khi đó $a_{12}x_1x_2 = x'^2_1 - a_{12}x'^2_2$. Theo trường hợp $a_{11} \neq 0$ ta cũng có $\omega(x) = bx'^2_1 + g_1$ với g_1 là dạng toàn phương không chứa x_1. Tiếp tục quá trình này, ta sẽ đưa được ω(x) về dạng

$$\omega(x) - b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + \ldots + b_nx_n^2$$

Ví dụ: $\omega(x) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, a \neq 0$

Ta có $\omega(x) = a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)x_2^2$

Đặt $x'_1 = x_1 + \frac{b}{a}x_2, x'_2 = x_2$ ta có $\omega(x) = ax'^2_1 + \frac{ac - b^2}{a}x'^2_2$

Ta cũng có kết luận ω(x) xác định dương ↔ a > 0 và ac-b > 0.

Phương pháp Jacobi

Giả sử dạng toàn phương ω(x) có ma trận là $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Đặt $\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det A$

Khi đó nếu mọi $\Delta_i \neq 0$ thì tồn tại một cơ sở để ω(x) có thể viết dưới dạng

$$\omega(x) = \frac{1}{\Delta_1}x_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}x_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}x_n^2$$

Ví dụ: Có dạng toàn phương $\omega(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2$

có ma trận là $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -1$, $\Delta_3 = -2$, do đó trong một cơ sở nào đó, ω(x) có dạng

$$\omega(x) = x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{2}x_3^2$$

Dạng toàn phương ω(x) là không xác định.

Từ phương pháp Jacobi, ta thấy rằng ω(x) xác định dương ↔ ma trận của nó xác định dương.