ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH
TRUNG TÂM PHÁT TRIỂN CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

GIÁO TRÌNH
TOÁN CAO CẤP A2

Mail : tolovehl2l@yahoo.com

Sưu tầm và chỉnh sửa by hoangly85

CHƯƠNG I: PHÉP TÍNH VI PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

I. TẬP HỢP R^N VÀ HÀM NHIỀU BIẾN

1. R^n và các tập con

Với n là một số nguyên dương, ký hiệu R^n được dùng để chỉ tập hợp tất cả các bộ n số thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và ta thường gọi R^n là không gian (thực) n chiều. Khi bộ số thực $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được đặt tên là P thì ta viết là:

$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Và gọi nó là một điểm trong không gian R^n.

Cho 2 điểm $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $Q(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ trong R^n, khoảng cách giữa hai điểm P và Q, ký hiệu là d(P, Q) được định nghĩa bởi:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

Khoảng cách này thỏa bất đẳng thức tam giác sau đây:

$$d(P, Q) \leq d(P, R) + d(R, Q)$$

với 3 điểm P, Q, R tùy ý.

Điểm $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ còn được viết gọn dưới dạng $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ với $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, khoảng cách giữa x và y còn được viết bởi:

$$| x - y | = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

Cho $P \in R^n$ và r là số thực dương, tập hợp B(P, r) = {$Q \in R^n$ | d(P, Q) < r} được gọi là hình cầu mở tâm P bán kính r, hay là lân cận bán kính r của P.

Tập hợp E trong R^n được gọi là bị chặn nếu có r > 0 sao cho $E \subset B(O,r)$, với O là điểm O(0, 0, …, 0).

2. Hàm nhiều biến

Cho n là một số nguyên với $n \geq 2$. Một phép tương ứng f: $R^n \to R$ được gọi là một hàm n biến. Tập hợp các điểm $P \in R^n$ mà f(P) xác định được gọi là miền xác định của f. Ta ký hiệu miền xác định của f là D(f).

Ví dụ:

1) Hàm f : $R^2 \to R$

$$(x, y) \to f(x, y)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

Là một hàm 2 biến có miền xác định là tập hợp tất cả các điểm P(x, y) sao cho $4-x^2-y^2>0$. Vậy D(f)=B(0, 2), hình cầu mở tâm O bán kính 2 trong R^2.

2) g : $R^3 \to R$ với $g(x, y, z)=x^2+(y+z)/2$ là một hàm 3 biến có miền xác định là $D(g)=R^3$.

Ta chỉ có thể biểu diễn hình học, bằng vẽ đồ thị, cho hàm 2 biến z = f(x, y). Đồ thị của hàm 2 biến này là tập hợp các điểm trong không gian R^3 sau đây:

$$G(f)=\{(x, y, f(x, y)) \mid (x,y)\in D(f)\}$$

Đây là một mặt cong trong không gian 3 chiều với hệ tọa độ Descartes Oxyz.

Ví dụ: đồ thị của hàm $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ là nửa trên của mặt cầu tâm O bán kính 1 trong không gian 3 chiều Oxyz.

II. GIỚI HẠN VÀ TÍNH LIÊN TỤC

1. Định nghĩa giới hạn

Cho hàm n biến $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xác định trên một lân cận bán kính r của một điểm $P \in R^n$ và có thể không xác định tại P. Ta nói $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tiến về $L \in R$ (hay có giới hạn là L). Khi $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dần đến P nếu với mọi ε > 0 cho trước, tồn tại δ > 0 sao cho:

$$0 < d(P, M) < \delta \Rightarrow | f(M) - L | < \varepsilon.$$

Khi đó ta viết:

$$\lim_{M \to P} f(M) = L$$

Trong trường hợp hàm 2 biến z = f (x, y) thì giới hạn có thể được viết là:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Hay có thể viết:

$$\lim_{\substack{x\to x \\ y\to y_0}} f(x,y) = L$$

Tương tự như đối với hàm một biến, ta cũng có các định nghĩa giới hạn vô cùng và giới hạn ở vô tận như sau:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \infty, +\infty, hay -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to x \\ y\to y_0}} f(x,y) = L, +\infty, -\infty, hay \infty$$

Ví dụ:

1). $\lim_{\substack{x\to 1 \\ y\to 1}} (x^2+2y) = 3$

2). $\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = +\infty$

3). $\lim_{\substack{x\to \infty \\ y\to \infty}} \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$

4). $\lim_{\substack{x\to \infty \\ y\to \infty}} (x^2+y^2+2x) = +\infty$

2. Sự liên tục

Định nghĩa: hàm số z = f (x_1, x_2, …, x_n) được gọi là liên tục tại điểm $P \in D(f)$ khi:

$$\lim_{M\to P} f(M) = f(P)$$

Ví dụ: hàm f(x, y) = $\frac{2x-y}{x^2+y^2}$ liên tục tại mọi điểm (x_o, y_o) khác (0, 0).

Tương tự như hàm một biến liên tục trên một đoạn $[a,b] \in R$, ta cũng có tính chất đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên 1 miền đóng và bị chặn.

III. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. Đạo hàm riêng

Để đơn giản cho việc trình bày, ở đây ta sẽ xét các đạo hàm riêng của hàm 2 biến. Đối với hàm n biến thì hoàn toàn tương tự.

Định nghĩa: cho hàm 2 biến z = f (x, y). Đạo hàm riêng theo biến x tại điểm (x_o, y_o) là giới hạn (nếu có) sau đây:

$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x, y_o) - f(x_o, y_o)}{x - x_o}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

và đạo hàm riêng theo biến x được ký hiệu là $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$ hay vắn tắt là $f'_x(x_o, y_o)$. Ta còn có thể ký hiệu đạo hàm riêng này bởi $z'_x(x_o, y_o)$ hay $\frac{\partial z}{\partial x}(x_o, y_o)$.

Đạo hàm riêng theo biến y của hàm x = f (x, y) tại (x_o, y_o) được định nghĩa tương tự bởi:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = \lim_{y \to y_o} \frac{f(x_o, y) - f(x_o, y_o)}{y - y_o}$$

Nhận xét: dể thấy rằng $f'_x(x_o, y_o) = \frac{df(x, y_o)}{dx} \Big|_{x = x_o}$

Từ đó ta có thể tính dạo hàm riêng theo biến x tại (x_o, y_o) bằng cách coi $y = y_o$ là hằng số và tính đạo hàm của hàm một biến f(x, y_o) tại $x = x_o$. Tương tự, để tính đạo hàm riêng theo biến y tại (x_o, y_o) ta tính đạo hàm của hàm một biến f(x, y_o) tại $y = y_o$ (xem $x = x_o$ là hằng số).

Ví dụ:

1). Cho $z = x^2y$. Tính z'_x và z'_y

Xem y như hằng số và tính đạo hàm theo biến x ta có $z'_x = 2xy$.

Tương tự, xem x như hằng số và tính đạo hàm theo biến y ta vó: $x'_y = x^2$.

2) $z = \ln\left(tg\frac{y}{x}\right)$. Tính z'_x, z'_y và $z'_x(4, \pi)$. Xem *y* như hằng số, ta có:

$$z'_x = \frac{1}{tg\frac{y}{x}}\left(tg\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{tg\frac{y}{x}}\left(1 + tg^2\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{x}\right)'_x$$

$$= \frac{1}{tg\frac{y}{x}}\left(1+tg^2\frac{y}{x}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 tg\frac{y}{x}}\left(1+tg^2\frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow z_x^{'}(4,\pi) = \frac{-\pi}{4^2 tg\frac{\pi}{4}}\left(1+tg^2\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{8}$$

Xem *x* như hằng số, ta có:

$$z'_y = \frac{1}{tg\frac{y}{x}}\left(tg\frac{y}{x}\right)_y^{'} = \frac{1}{tg\frac{y}{x}}\left(1+tg^2\frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{x}\right)_y^{'} = \frac{1}{x.tg\frac{y}{x}}\left(1+tg^2\frac{y}{x}\right)$$

2. Đạo hàm riêng cấp cao

Các đạo hàm riêng z'_x và z'_y của hàm $z = f(x,y)$ được gọi là các đạo hàm riêng cấp 1. Đạo hàm riêng cấp 2 của một hàm là đạo hàm riêng (cấp 1) của đạo hàm riêng cấp 1 của hàm đó. Hàm 2 biến $z = f(x, y)$ có bốn đạo hàm riêng cấp 2 sau đây:

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

Đạo hàm riêng cấp 2 này còn được ký hiệu bằng các cách khác nhau như sau: $z''_{xx}, z''_{x^2}, f''_{xx}, f''_{x^2}, f''_{11}$

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

Đạo hàm riêng cấp 2 này còn được ký hiệu bởi: $z''_{yy}, z''_{y^2}, f''_{yy}, f''_{y^2}, f''_{22}$

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

Đạo hàm riêng cấp 2 này còn được ký hiệu bởi: $z''_{xy}, f''_{xy}, f''_{12}$

4) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$

còn được ký hiệu là $z''_{yx}, f''_{yx}, f''_{21}$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có định nghĩa và ký hiệu cho các đạo hàm riêng cấp cao hơn. Chẳng hạn, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$ hay $z'''_{xxx} = (z''_{xx})'_x$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)$ hay $z'''_{xy^2} = (z''_{y^2})'_x$, và hai đạo hàm riêng cấp 3 này còn được viết là $z^{(3)}_{x^3}, z^{(3)}_{xy^2}$.

Ví dụ:

1) $z = x^4 + y^4 - 2x^3y^3$. Ta có:

$z'_x = 4x^3 - 4xy^3$

$z'_y = 4y^3 - 6x^2y^2$

$z''_{xx} = 12x^2 - 4y^3$

$z''_{yy} = 12y^2 - 12x^2y$

$z''_{xy} = -12y^2$

$z''_{yx} = -12\, y^2$

$z'''_{x^3} = 24x$

$z^{(4)}_{x^3y} = 0$

2) Xét hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{if} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ta có, với $(x, y) \neq (0, 0)$ thì

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2},$$

và tại (0, 0) thì $f(0, 0) = 0$.

Do đó $f'_x(x,y) = y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$ tại $(x, y) \neq (0, 0)$

và $$f'_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

suy ra $$f''_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} -\frac{y}{y} = -1.$$

Hoàn toàn tương tự, ta tính được:

$$f'_y(x,y) = -x\left(\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2)}\right)$$ tại (x, y) ≠ (0, 0)

và $$f'_y(0,0) = 0,$$

$$f''_{yx}(0,0) = 1.$$

Qua ví dụ trên ta thấy các đạo hàm riêng theo cùng các biến nhưng khác thứ tự không phải bao giờ cũng bằng nhau. Tuy nhiên định lý sau đây cho ta điều kiện để các đạo hàm riêng z''_{xy} và z''_{yx} bằng nhau.

Định lý: Nếu $f(x, y)$ có các đạo hàm f''_{xy} và f''_{xy} trong một lân cận của điểm (x_0, y_0) thì

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

chú ý rằng định lý trên cũng mở rộng được ra cho các đạo hàm cấp cao hơn và nhiều biến hơn.

3. Vi phân toàn phần

Định nghĩa:

Hàm số $z = f(x, y)$ được gọi là khả vi tại (x_0, y_0) nếu số gia toàn phần

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

theo các số gia Δx, Δy của các biến x, y tại (x_0, y_0) có thể được viết dưới dạng

$$\Delta f(x_0, y_0) = A.\Delta x + B.\Delta y + \alpha.\Delta x + \beta.\Delta y,$$

trong đó A, B là các hằng số (không phụ thuộc Δx, Δy) và $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ khi $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Biểu thức $A\Delta x + B.\Delta y$ được gọi là vi phân của hàm số f tại (x_0, y_0), ký hiệu là $df(x_0, y_0)$.

Định lý:

(i) Nếu $f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0) thì f có đạo hàm riêng cấp 1 tại đó và

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0).\Delta x + f'_y(x_0, y_0).\Delta y$$

(ii) Nếu $f(x, y)$ có các đạo hàm riêng trên 1 lân cận của (x_0, y_0) và f'_x, f'_y liên tục tại (x_0, y_0) thì f khả vi tại (x_0, y_0).

Chú ý rằng khi xét các trường hợp đặc biệt $f(x, y) = x$ và $g(x, y) = y$ ta có vi phân: $dx = \Delta x$ và $dy = \Delta y$. Do đó công thức vi phân cấp 1 của $f(x, y)$ còn được viết dưới dạng

$$df = f'_x.dx + f'_y.dy$$

và còn được gọi là vi phân toàn phần của hàm $f(x, y)$.

Ví dụ: Với $z = arctg\dfrac{y}{x}$, ta có:

$$f'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2+y^2}.\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}.\left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{x^2}{x^2+y^2}.\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

vậy $dz = -\dfrac{y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy = \dfrac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$

Tính chất: Tương tự như đối với hàm một biến ta có các tính chất sau đây của vi phân:

$$d(f + g) = df + dg$$

$$d(f.g) = g.df + f.dg$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g.df - f.dg}{g^2}$$ (với $g \neq 0$).

Ứng dụng vi phân để tính gần đúng:

Giả sử $z = f(x, y)$ khả vi tại (x_0, y_0). Khi đó, theo định nghĩa của vi phân ta có thể tính gần đúng $f(x, y)$ bởi:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0).(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0).(y - y_0)$$

với (x, y) gần (x_0, y_0).

Ví dụ: Tính gần đúng $A = \sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}$

Xét hàm số $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$, ta tính gần đúng

$A = f(1,02; 1,97)$ như sau:

$$f(1,02; 1,97) \approx f(1, 2) + f'_x(1, 2).(1,02 - 1) + f'_y(1, 2).(1,97 - 2)$$

với $f(1, 2) = \sqrt{1^3 + 2^3} = 3$

$$f'_x = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \Rightarrow f'_x(1,2) = \frac{1}{2}$$

$$f'_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \Rightarrow f'_y(1,2) = 2$$

Suy ra $A \approx 3 + \frac{1}{2}.0,02 - 2.0,03 = 2,95$

4. Vi phân cấp cao

Cho hàm 2 biến $z = f(x, y)$.

Bản thân $df(x, y) = f'_x(x, y).dx + f'_y(x, y).dy$ cũng là một hàm theo 2 biến x, y nên ta có thể xét vi phân của nó. Nếu df(x, y) có vi phân thì vi phân đó được gọi là vi phân cấp 2 của f(x, y), ký hiệu là $d^2f(x, y)$ hay vắn tắt là d^2f. Vậy:

$$d^2f = d(df)$$

Tổng quát, vi phân cấp n (nếu có) của f được định nghĩa bởi:

$$d^nz = d(d^{n-1}f)$$

Công thức vi phân cấp 2 của z=f(x, y):

$$d^n z = d(dz) = d(z'_x.dx + z'_y.dy)$$

$$= (z''_{xx}dx + z''_{yx}dy)dx + (z''_{xy}dx + z''_{yy}dy)dy$$

$$= z''_{xx}dx^2 + (z''_{xy} + z''_{yx})dxdy + z''_{yy}dy^2$$

Giả thiết thêm rằng, các đạo hàm hỗn hợp liên tục thì ta có:

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

và do đó:

$$d^2 z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$$

hay ta có:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Người ta dùng ký hiệu luỹ thừa một cách hình thức để viết lại công thức vi phân cấp 2 dưới dạng:

$$d^2 z = (\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy)^2 z$$

Tương tự, công thức vi phân cấp n của z = f(x, y) có thể được viết dưới dạng:

$$d^n z = (\frac{\partial}{\partial x}.dx + \frac{\partial}{\partial y}.dy)^n z$$

và công thức này cũng đúng cho trường hợp nhiều biến hơn.

IV. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

1. Trường hợp một biến độc lập

Giả sử z = f(x, y) và x, y lại là các hàm theo t: x = x(t), y = y(t). Vậy z(t) = f(x(t), y(t)) là hàm 1 biến theo t. Đạo hàm của z(t) theo biến t được tính theo công thức sau đây:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

Ví dụ:

Tính $\frac{dz}{dt}$ nếu $z = e^{2x+3y}$, trong đó x=cost, y=sint.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = 2e^{2x+3y}.(-\sin t) + 3e^{2x+3y}(\cos t)$$
$$= 2e^{2x+3y}.(-2\sin t + 3\cos t) = 2e^{2\cos t+3\sin t}.(-2\sin t + 3\cos t)$$

Tính $\frac{dz}{dt}$ nếu $z = e^{2x+3y}$ trong đó y=cosx

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt} = e^{y} + xe^{y}(-\sin x)$$
$$= e^{y}.(1 - x\sin x) = e^{\cos x}.(1 - x\sin x)$$

2. Trường hợp nhiều biến ộc lập

Giả sử z = f(x,y) và x, y lại là các hàm theo các biến s, t. Khi đó để tính các đạo hàm riêng theo s và t của hàm hợp f (x(s,t), y(s,t)) ta cũng có các công thức tương tự như đối với hàm một biến sau đây:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

Ví dụ:

Tìm $\frac{\partial z}{\partial u}$ và $\frac{\partial z}{\partial v}$ nếu z = f(x,y) trong đó x = u.v và y = $\frac{u}{v}$

Ta có $\frac{\partial x}{\partial u} = v$, $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{v}$, $\frac{\partial x}{\partial v} = u$ và $\frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$.

Do đó

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = v.\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{v}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = u.\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{u}{v^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}$$

Cho z = f(x,y,t), trong đó x = x(t), y = y(t).

Tính đạo hàm của hàm hợp:

z(t) = f (x(t), y(t), t).

Ta có:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{dt}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

V. ĐẠO HÀM CỦA HÀM ẨN

1. Hàm ẩn một biến

Giả sử có một hệ thức giữa hai biến x, y dạng

F(x,y) = 0

trong đó F(x,y) là hàm 2 biến xác định trong một lân cận mở D của (x_0, y_0) và $F(x_0, y_0) = 0$. Giả thiết rằng s là số dương và $\forall x \in (x_0 - s, x_0 + s), \exists$ y duy nhất sao cho $(x, y) \in D$ và F(x, y) = 0.

Như vậy ta có hàm số y = y(x) xác định trên khoảng $(x_0 - s, x_0 + s)$ và thỏa F(x, y(x)) = 0 $\forall x \in (x_0 - s, x_0 + s)$. Hàm số y = y(x) này được gọi là hàm ẩn theo biến x xác định bởi phương trình F(x,y) = 0.

Trong toán học người ta gọi các định lý hàm ẩn là các định lý khẳng định sự tồn tại của hàm ẩn và đạo hàm của nó. Dưới đây là định lý cơ bản cho hàm ẩn một biến.

Định lý: Giả sử hàm F(x,y) thỏa 2 điều kiện sau:

(i) F liên tục trong hình tròn mở B(P, ε) tâm $P(x_0, y_0)$ bán kính ε, với $F(x_0, y_0) = 0$;

(ii) Tồn tại các đạo hàm riêng liên tục $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$ trong B(P, ε) và $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Khi đó có ε>0 sao cho phương trình F(x,y) = 0 xác định một hàm ẩn y(x) khả vi liên tục trong $(x_0 - s, x_0 + s)$ và

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'x}{F'y}.$$

Nhận xét: Nếu thừa nhận sự tồn tại của hàm ẩn và đạo hàm của nó thì công thức đạo hàm của hàm ẩn trong định lý trên có thể suy ra dễ dàng từ công thức đạo hàm của hàm hợp:

$$0 = \frac{d}{dx}F(x, y(x)) = F'_x + F'_y \cdot y'$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{F'x}{F'y}$$

Ví dụ: Tính đạo hàm của hàm ẩn $\frac{dx}{dy}$ tại điểm $(1, \pi)$

nếu $x.y - e^x.\sin y = \pi$.

Coi y là hàm theo x, lấy đạo hàm phương trình trên ta được

$$y + x.y' - e^x\sin y - e^x \cos y.\ y' = 0$$

Tại $(x,y) = (1, \pi)$ ta có:

$$\pi + y' + e.y' = 0$$

Suy ra $y'(1) = \frac{-\pi}{1+e}$

Ghi chú: Để tính đạo hàm cấp 2 y'' của hàm ẩn, từ hệ thức

$$0 = F'x + F'y \cdot y'$$

ta có thể tiếp tục lấy đạo hàm thì được:

$$0 = F''_{xx} + F''_{xy}.y' + (F''_{yx} + F''_{yy}.\ y').y' + F'_y.y''.$$

Từ đây sẽ rút ra y''.

2. Hàm ẩn 2 biến

Tương tự như trường hợp hàm ẩn 1 biến, với một số giả thiết thì phương trình

$F(x,y) = 0$

sẽ xác định một hàm ẩn $z = z(x,y)$ theo 2 biến x, y.

Định lý : Giả sử hàm $F(x,y,z)$ thỏa các điều kiện

(i). F liên tục trong hình cầu mở $B(P_0, \varepsilon)$ tâm $P_0(x_0, y_0, z_0)$ bán kính ε và $F(x_0,y_0,z_0) = 0$;

(ii) Tồn tại các đạo hàm riêng liên tục F'_x, F'_y, F'_z trong $B(P_0, \varepsilon)$ và $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.

Khi đó tồn tại δ>0 sao cho phương trình $F(x,y,z) = 0$ xác định một hàm ẩn trong lân cận $B((x_0,y_0), s)$ của điểm (x_0, y_0). Hơn nữa hàm ẩn $z = z(x,y)$ có các đạo hàm riêng trong lân cận này là:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'x}{F'z}\ ;\ 9;\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'y}{F'z}$$

Ghi chú: Định lý này có thể được mở rộng cho trường hợp hàm ẩn nhiều biến hơn $z = z(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ xác định bởi phương trình:

$F(x_1,x_2,\ldots,x_n, z) = 0$

Ví dụ:

Cho hàm ẩn $z = z(x,y)$ xác định bởi phương trình $e^z = x + y + z$

Tính z_x', z_x'' và z_{xy}''.

Đạo hàm phương trình theo biến x ta được:

$$1 + z_x' = e^z \cdot z_x' \Rightarrow z_x' = \frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{x + y + z - 1}$$

Tiếp tục lấy đạo hàm theo x và theo y thì được:

$z_{xx}'' = e^z \cdot (z_x')^2 + e^z \cdot z_{xx}''$;

$z_{xy}'' = e^z \cdot z_y' \cdot z_x' + e^z \cdot z_{xy}''$

Suy ra:

$$z_{xx}'' = \frac{e^z}{(1-e^z)^3} = \frac{x+y+z}{(1-x-y-z)^3}$$

$$z_{xy}'' = \frac{e^z \cdot z'_y \cdot z'_x}{1-e^z}$$

Tính z_y' tương tự như việc tính z_x', ta có:

$$z_y' = \frac{1}{e^z - 1}$$

Do đó

$$z_{xy}'' = \frac{e^z}{(1-e^z)^3} = \frac{x+y+z}{(1-x-y-z)^3}$$

VI. CỰC TRỊ

1.Định nghĩa và Điều kiện cần

Xét hàm z = f(x,y). Điểm $P_0(x,y)$ được gọi là điểm cực đại (địa phương) của hàm f(x,y) khi có δ>0 sao cho $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$ với mọi $(x,y) \in B(P_0,\delta)$.

Trường hợp ta có

> $F(x,y) < f(x_0,y_0)\ \forall\ (x,y) \in B(P_0, \delta) \setminus \{P_0\}$thì ta nói P_0 là điểm cực đại (địa phương) chặt của hàm f(x,y).

Khái niệm cực tiểu (địa phương) được định nghĩa hoàn toàn tương tự. Cực đại địa phương và cực tiểu địa phương được gọi chung là cực trị địa phương.

Định lý: (Fermat)

Nếu hàm f(x,y) đạt cực trị địa phương tại (x_0,y_0) và có các đạo hàm riêng tại đó thì $f_x'(x_0,y_0) = f_y'(x_0,y_0) = 0$.

Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng của f đều bằng 0 được gọi là điểm dừng của hàm. Chú ý rằng định lý trên chỉ cho ta điều kiện cần để có cực trị, nên điểm dừng chưa chắc là điểm cực trị. Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ để có cực trị.

Định lý (Điều kiện Đủ):

Giả sử z = f(x,y) nhận (x_0, y_0) là một điểm dừng, và f(x,y) có các đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong một lân cận của (x_0, y_0). Đặt

> $A = f_{xx}''(x_0,y_0)$, $B = f_{xy}''(x_0,y_0)$, $C = f_{yy}''(x_0,y_0)$,

và $\Delta = B^2 - A.C$

Khi đó ta có:

(i). Nếu $\Delta > 0$ thì hàm số không đạt cực trị tại (x_0,y_0).

(ii). Nếu $\Delta < 0$ thì hàm số đạt cực trị chặt tại (x_0,y_0).

Hơn nữa ta có:

(x_0,y_0) là điểm cực đại khi $A < 0$;

(x_0,y_0) là điểm cực tiểu khi $A > 0$.

(iii). Nếu $\Delta = 0$ thì chưa kết luận được là hàm số f(x,y) có đạt cực trị tại (x_0,y_0) hay không.

Từ định lý trên ta có thể tìm cực trị của hàm z = f(x,y) theo các bước sau đây:

- Bước 1: Tính các đạo hàm riêng
- Bước 2: Tìm các điểm dừng bằng cách giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} f_x'(x,y) = 0 \\ f_y'(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Bước 3: Ứng với mỗi điểm dừng (x_0,y_0), đặt

$A = f_{xx}''(x_0,y_0)$, $B = f_{xy}''(x_0,y_0)$, $C = f_{yy}''(x_0,y_0)$,

$\Delta = B^2 - AC$

Xét dấu của Δ và của A để kết luận.

Lưu ý: Để có kết luận đầy đủ về cực trị ta còn phải xét riêng trường hợp điểm dừng mà tại đó $\Delta = 0$ và xét các điểm mà tại đó không tồn tại đạo hàm riêng cấp 1 hay cấp 2.

Ví dụ:

1) Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Ta có $z_x' = 3x^2 + 3y^2 - 15$,

$z_y' = 6xy - 12$

$z_{xx}'' = 6x$, $z_{xx}'' = 6y$, $z_{yy}'' = 6x$

Để tìm điểm dừng, ta giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình có 4 nghiệm, cho ta 4 điểm dừng:

$M_1(1, 2)$; $M_2(2, 1)$; $M_3(-1, -2)$; $M_4(-2, -1)$.

Tại $M_1(1, 2)$:

$A = z_{xx}''(1, 2) = 6$

$B = z_{xy}''(1, 2) = 12 \Rightarrow \Delta = B^2 - AC > 0$

$C = z_{yy}''(1, 2) = 6$

Hàm số không đạt cực trị tại $M_1(1, 2)$.

Tại $M_2(2,1)$:

$A = z_{xx}''(2, 1) = 12$

$B = z_{xy}''(2, 1) = 6 \Rightarrow \Delta = B^2 - AC < 0$

$C = z_{yy}''(2, 1) = 12$ $A > 0$

Hàm số đạt cực tiểu tại $M_2(2, 1)$, với $z_{min} = z(2, 1) = -28$

Tại $M_3(-1, -2)$:

$A = z_{xx}''(-1, -2) = -6$

$B = z_{xy}''(-1, -2) = -12 \Rightarrow \Delta = B^2 - AC > 0$

$C = z_{yy}''(-1, -2) = -6$

Hàm số không đạt cực trị tại $M_3(-1, -2)$.

Tại $M_4(-2, -1)$:

$$\begin{aligned} A &= z''_{xx}(-2,-1) = -12 \\ B &= z''_{xy}(-2,-1) = -6 \\ C &= z''_{yy}(-2,-1) = -12 \end{aligned} \; 9; \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \Delta = B^2 - 4AC < 0 \\ &A < 0 \end{aligned}$$

Hàm số đạt cực đại tại $M_4(-2, -1)$ với $z_{max} = z(-2,-1) = 28$

2) Khảo sát cực trị của hàm $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

Ta có:

$$z'_x = 4x^3 - 2x - 2y$$
$$z'_y = 4y^3 - 2x - 2y$$

Giải hệ phương trình sau để tìm điểm dừng:

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0 \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình có 3 nghiệm $\Rightarrow$ 3 điểm dừng:

P1(0, 0); P2(-1, -1); P3(1,1)

Tính các đạo hàm cấp 2:

$$z''_{xx} = 12x^2 - 2$$
$$z''_{xy} = -2$$
$$z''_{yy} = 12y^2 - 2$$

Tại P1(0, 0):

$$A = z''_{xx}(0,0) = -2$$
$$B = z''_{xy}(0,0) = -2$$
$$C = z''_{yy}(0,0) = -2 \text{ 9; } \Rightarrow \Delta = B^2 - AC = 0$$

Ta chưa có kết luận về cực trị tại P_1 mà phải khảo sát trực tiếp. Ta có z(0, 0) = 0, với $x = y = \frac{1}{n}$ thì

$$z\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{z}{n^2}\left(\frac{1}{n^2} - 2\right) < 0$$ (n nguyên dương)

Với $x = \frac{1}{n}, y = -\frac{1}{n}$ thì $z\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \frac{z}{n^4} > 0$. Điều này cho thấy rằng trong mọi lân cận của P_1 hàm số đều có giá trị dương và có giá trị âm. Vậy $P_1(0, 0)$ không phải là điểm cực trị

Tại $P_2(-1, -1)$ và $P_3(1, 1)$ ta có A = 10, B = -2, C = 10, $\Delta = B^2 - AC = -96$. Suy ra tại P2 và P3 hàm số đạt cực tiểu chặt với:

$z_{min} = z(P_2) = z(P_3) = -2$

VII. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

1. Định nghĩa

Xét hàm số $z = f(x, y)$, với điều kiện ràng buộc: $\varphi(x, y) = 0$ (*)

Ta nói:

- $f(x, y)$ đạt cực đại chặt tại (x_0, y_0) với điều kiện (*)
nếu (x_0, y_0) thỏa (*) và với mọi (x, y) thỏa (*) khá gần (x_0,y_0) ta có $f(x, y) < f(x_0, y_0)$

- $f(x, y)$ đạt cực tiểu chặt tại (x_0, y_0) với điều kiện (*)
nếu (x_0, y_0) thỏa (*) và với mọi (x, y) thỏa (*) khá gần (x_0,y_0) ta có $f(x, y) > f(x_0, y_0)$

- $f(x, y)$ đạt cực trị chặt tại (x_0, y_0) với điều kiện (*)
nếu $f(x, y)$ đạt cực đại hoặc cực tiểu tại (x_0,y_0) với điều kiện (*)

2. Phương pháp nhân tử Lagrange

Định lý: (điều kiện cần của cực trị có điều kiện)

Giả sử:

Các hàm $f(x, y)$ và $\varphi(x, y)$ có đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong một lân cận của điểm (x_0,y_0) với $\varphi(x_0, y_0) = 0$

$\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$ hay $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Khi đó, nếu $f(x, y)$ đạt cực trị tại (x_0,y_0) với điều kiện $\varphi(x_0,y_0)=0$ thì tồn tại số thực λ sao cho:

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Hàm số $L(x,y,\lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x,y)$ được gọi là hàm Lagrange. Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ của cực trị có điều kiện.

Định lý: (□iều kiện □ủ của cực trị có □iều kiện)

Giả sử f (x, y) và φ (x,y) có đạo hàm riêng cấp 2 liên tục trong một lân cận của (x_0,y_0) với φ $(x_0,y_0) = 0$, và (x_0,y_0,λ) là điểm dừng của hàm Lagrange. Khi đó ta có:

- Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda) = L''_{xx}(x_0,y_0,\lambda)dx^2 + 2L''_{xy}(x_0,y_0,\lambda)dxdy$

  $L''_{yy}(x_0,y_0,\lambda)dy^2$ xác định dương trong một miền theo dx, dy thỏa ràng buộc:

  $d\varphi(x_0,y_0) = \varphi'_x(x_0,y_0dx) + \varphi'_y(x_0,y_0)dy$ và $dx^2+dy^2 \neq 0$, thì hàm f (x, y) đạt cực tiểu chặt tại (x_0,y_0) với điều kiện φ $(x_0,y_0) = 0$.

- Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda)$ xác định âm trong 1 miền theo dx, dy thỏa ràng buộc như trên thì f (x, y) đạt cực đại chặt tại (x_0,y_0) với điều kiện φ $(x_0,y_0) = 0$.

- Nếu $d^2L(x_0,y_0,\lambda)$ không xác định dấu trong miền nói trên thì không có cực trị có điều kiện tại (x_0,y_0).

Từ định lý trên ta có thể tìm cực trị có điều kiện theo phương pháp nhân tử Lagrange như sau:

- Bước 1: Lập hàm Lagrange

  $L = f(x, y) + \lambda \varphi(x,y)$ $(\lambda \in R)$

- Bước 2: Tính

  $$L'_x = f'_x + \lambda\varphi'_x$$
  $$L'_y = f'_y + \lambda\varphi'_y$$

  và giải hệ phương trình sau đây để tìm các điểm dừng (x_0,y_0) cùng với giá trị λ_0 tương ứng.

  $$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

- Bước 3: Tính vi phân cấp 2 của L = L(x,y)

  $$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2$$

  và tính ràng buộc:

  $d\varphi(x,y) = \varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0$ (**)

Với mỗi điểm dừng (x_0,y_0) và $\lambda = \lambda_0$ tìm được trong bước 2, xét $A = d^2L(x_0,y_0)$ (phụ thuộc dx và dy).

Nếu A > 0 với mọi dx, dy không đồng thời bằng 0 thỏa ràng buộc (**) thì hàm số đạt cực tiểu có điều kiện tại (x_0,y_0).

Nếu A < 0 với mọi dx, dy không đồng thời bằng 0 thỏa ràng buộc (**) thì hàm số đạt cực đại có điều kiện tại (x_0,y_0).

Nếu dấu của A không xác định xét theo dx và dy không đồng thời bằng 0 thỏa ràng buộc (**) thì hàm số không đạt cực trị tại (x_0,y_0).

Ví dụ:

Tìm cực trị của hàm $z = x^2 + y^2$ với điều kiện $x + y = 4$

Lập hàm Lagrange:

$$L(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda (x + y - 4)$$

Ta có: $L'_x = 2x + \lambda, L'_y = 2y + \lambda$

Tìm điểm dừng bằng cách giải hệ:

$$\begin{cases} 2x + \lambda = 0 \\ 2y + \lambda = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

Ta có một điểm dừng M(2,2) ứng với $\lambda = -4$.

Tính đạo hàm riêng cấp 2 của L(x,y):

$$L''_{xx} = 2,\ L''_{xy} = 0,\ L''_{yy} = 2$$

$$\Rightarrow d^2L = 2dx^2 + 2dy^2.$$

Vậy $d^2L > 0$ tại M(2,2) nên hàm số đạt cực tiểu (có điều kiện) tại đó với $z_{min} = z(2,2) = 8$.

Lưu ý: Trong trường hợp từ hệ thức

$$\varphi(x,y) = 0$$

ta có thể tính được 1 biến thiên theo biến kia, chẳng hạn có thể tính $y = \psi(x)$ thì bằng cách thay thế $y = \psi(x)$ vào z ta có thể xem z như hàm theo 1 biến x:

$$z = z(x, \psi(x))$$

Khi đó có thể tìm cực trị của z như hàm theo 1 biến.

Xét lại ví dụ trên, ta thấy:

$x + y = 4 \Leftrightarrow y = 4 - x$

Suy ra $z = x^2 + y^2 = x^2 + (4-x)^2$.

Xem z là hàm 1 biến ta có:

$z'(x) = 2x - 2(4 - x) = 4x - 8$

$z'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Lập bảng biến thiên, ta có:

X	$-\infty$	2	$+\infty$
Z'(x)	-	0	+
Z		8	

Vậy $z = x^2 + y^2$ đạt cực tiểu (với điều kiện $x + y = 4$) tại M(2,2) với $z_{min} = 8$

VIII. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

Cho $\mathcal{D} \subset \Re^2$. Điểm $P(x,y) \in \mathcal{D}$ được gọi là một điểm trong của $\mathcal{D}$ khi tồn tại một hình cầu mở $B(P, \varepsilon)$ đều chứa điểm thuộc $\mathcal{D}$ và điểm không thuộc $\mathcal{D}$. Tập hợp các điểm biên của $\mathcal{D}$ được gọi là biên của $\mathcal{D}$. Miền $\mathcal{D}$ được gọi là miền đóng khi $\mathcal{D}$ chứa mọi điểm biên của nó.

Ta có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x,y)$ trên một miền đóng và bị chặn $\mathcal{D}$ như sau:

- Bước 1: Tính $f'x$ và $f'y$. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

để tìm các điểm dừng ở phần trong của $\mathcal{D}$

- Bước 2: Tìm các điểm tại đó không có đạo hàm riêng

Bước 3: Tìm giá trị lớn nhất của f (x,y) trên biên của $\mathcal{D}$ (liên quan đến cực trị có điều kiện)

Bước 4: So sánh các giá trị của hàm số tại các điểm tìm được ở bước 1, bước 2 với giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên biên (ở bước 3) để rút ra giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Ví dụ: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$

trên miền $\mathcal{D}$ giới hạn bỡi: $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$

Ta có: $\begin{array}{l} z'_x = 2x - y + 1 \\ z'_y = 2y - x + 1 \end{array}$

Giải hệ: $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = -1$

Ta tìm được 1 điểm dừng $M(-1,-1) \in \mathcal{D}$, với $z(-1,-1) = -1$

Biên của miền $\mathcal{D}$ gồm 3 đoạn thẳng OA, OB và AB.

Trên biên OA ta có:

$x = 0, -3 < y < 0$

$z = y^2$

$z' = 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ một điểm cực trị trên OA là $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ với $z\left(0,-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$

Tương tự,

trên OB có cực trị tại $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ với $z\left(-\frac{1}{2},0\right) = -\frac{1}{4}$

trên AB có cực trị tại $\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$ với $z\left(-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

Tại các điểm O, A và B ta có:

z(0,0) = 0; z(0,-3) = 6; z(-3,0) = 6

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên biên của $\mathcal{D}$ lần lượt là 6 và $-\frac{3}{4}$

So sánh các giá trị z=-1, z=6 với $z = -\frac{3}{4}$ ta suy ra giá trị lớn nhất của z là 6 tại A(0, -3) và B(-3, 0); gái trị nhỏ nhất của z là –1 tại M(-1, -1).

BÀI TẬP CHƯƠNG 01

1-Tìm miền xác định của hàm số:

a) $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$

b) $z = \ln(x^2 + y^2)$

c) $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$

d) $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$

2-Tính đạo hàm riêng của hàm số:

e) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$

f) $z = arctg\frac{y}{x}$

g) $z = x^y$

h) $z = (1 + xy)^y$

a) Tính các đạo hàm riêng tại $(\frac{\pi}{3}, 4)$ của hàm:

$$f(x,y) = \sin(x\sqrt{y})$$

b) Tính các đạo hàm riêng tại (0, 0) của hàm:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x - y} & \text{neáu } x \neq y \\ 0 & \text{neáu } x = y \end{cases}$$

3-Tính vi phân toàn phần của hàm số:

i) $z = tg(3x - y) + 6^{x+y}$

j) $z = \arcsin \dfrac{x}{y}$

4- Tìm vi phân cấp 2 của hàm số

k) $z = x^3 - 4x^2y + 5y^2$

l) $z = \ln(x + y$

m) $z = \sqrt{2xy + y^2}$

n) $z = e^x \ln y + \sin y . \ln x$

5-Cho f(t) là hàm một biến khả vi. Đặt z = f(x^2-y^2). Chứng tỏ rằng hàm z thoả mãn phương trình sau:

$$y.\frac{\partial z}{\partial y} + x.\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Chứng minh:

a) $x.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\dfrac{\partial z}{\partial x}$ với $z = \dfrac{x^2y^2}{x + y}$

b) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ với $z = \ln(x^2 + y^2)$

6- Tìm cực trị của hàm số:

o) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$

p) $z = x^3y^2(1 - x - y)$

q) $z = -2x^3 + 6y + 6y + 3y.(2x - y) - 1$

r) $z = 2y^3 + 3x(x - 2y) - 6(x + y) - 3$

s) $z = (x-1)^2 + 2y^2$

t) $z = 2x^3 + 6x(y-1) - 3(y+10) + 2$

7-Tìm cực trị có điều kiện:

a) $z = xy$ với điều kiện $3x + 2y - 5 = 0$

b) $z = x + y^2$ với điều kiện $x + y = 1$

8- Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

c) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ trong tam giác giới hạn bởi các đường $x = 0, y = 0, x - y = 3$

d) $z = xy + x + y$ trong hình giới hạn bởi các đường $x = 1, x = 2, y = 3$ và trục hoành

e) $z = 5xy - 3x - 2y$ trong hình giới hạn bởi các đường $3x + 5y = 40$

9-Tìm đạo hàm của hàm hợp

f) $\frac{dz}{dx}$ với $z = arctg(\frac{u}{v})$ trong đó $u = \sin x$ và $v = \cos 2x$

g) $\frac{dz}{ds}$ và $\frac{dz}{dt}$ với $z = \sin(2^x + y^2)$ trong đó $x = \sin(s + 2t)$ và $y = \ln(st)$

10-Tính gần đúng:

h) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,981})$

i) $\sin(\pi.(0,01).(1.05) + \ln(1.05))$

11-Tính đạo hàm y’ của hàm ẩn y=y(x) xác định bởi các phương trình:

j) $x^3y - y^3x = 1$

k) $xe^y + ye^x - e^{xy} = 0$

12-Cho hàm ẩn z = z(x, y) xác định bởi phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Tính $\frac{dz}{dx}$ và $\frac{dz}{dy}$

CHƯƠNG II: TÍCH PHÂN BỘI

§1. Tích phân kép

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ CÁC TÍNH CHẤT

1. Định nghĩa

Cho hàm *f(x,y)* xác định trong miền đóng, bị chặn *D*. Chia miền *D* thành n mảnh rời nhau $D_1, D_2, .., D_n$ có diện tích lần lượt là $\Delta S_1, \Delta S_2, .., \Delta S_n$. Trong mỗi mảnh D_i , lấy tùy ý một điểm $M_i(x_i, y_i)$. Lập tổng (gọi là tổng tích phân của hàm *f(x,y)*)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$$

Gọi $d(D_i)$ là khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trong D_i. Nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{\max_i d(D_i)\to 0} S_n = S$$

hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia miền *D* và cách chọn điểm $M_i(x_i,y_i)$, thì hàm *f(x,y)* gọi là khả tích trên miền *D*, và *S* gọi là tích phân kép của hàm *f(x,y)* trên miền *D*, ký hiệu

$$\iint_D f(x,y)dS$$

Nếu *f(x,y)* khả tích trên miền *D*, thì tích phân kép không phụ thuộc vào cách chia miền *D*. Do đó, ta chia miền *D* bởi các đường thẳng song song với các trục tọa độ. Khi đó, $\Delta S_i = \Delta x \,.\, \Delta y$ *và* $dS = dx \,.\, dy$

Vì vậy có thể viết

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_D f(x,y)dxdy$$

Người ta chứng minh được rằng: Hàm *f(x,y)* liên tục trên một miền đóng, bị chặn *D* thì khả tích trên miền đó.

Tính chất:

a) $\iint_D dS = S(D)$ (diện tích của *D*)

b) $\iint_D C.f(x,y)dS = C.\iint_D f(x,y)dS$

c) $\iint_D [f(x,y) + g(x,y)]dS = \iint_D f(x,y)dS + \iint_D g(x,y)dS$

d) Nếu $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \Phi$ thì

$$\iint_D f(x,y)dS = \iint_{D_1} f(x,y)dS + \iint_{D_2} f(x,y)dS$$

e) Nếu $f(x,y) \le g(x,y) \ \forall (x,y) \in D$ thì $\iint_D f(x,y)dS \le \iint_D g(x,y)dS$

f) Nếu $m \le f(x,y) \le M \ \forall \ (x,y) \in D$, m và M là hằng số, thì

$$m.S(D) \le \iint_D f(x,y)dS \le M.S(D)$$

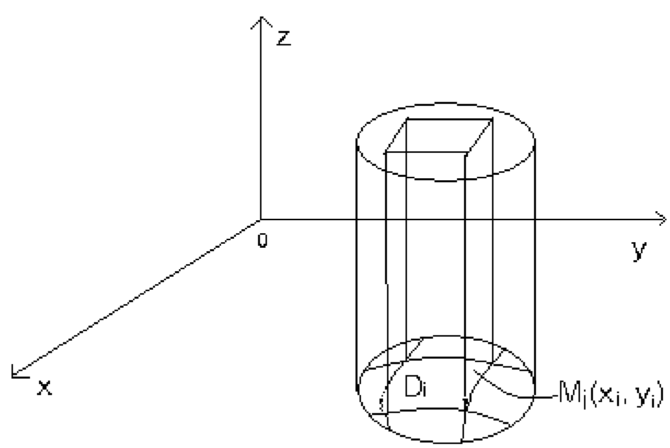
g) Nếu $f(x,y)$ liên tục trên miền đóng, bị chặn D thì tồn tại điểm $M(x_0,y_0)$ sao cho $\iint_D f(x,y)dS = f(x_0,y_0).S(D)$

(Định lý về giá trị trung bình).

Đại lượng $\frac{1}{S(D)}\iint_D f(x,y)dS$ gọi là giá trị trung bình của hàm $f(x,y)$ trên D.

2. Ý nghĩa hình học

Ta xét bài toán: " Tìm thể tích của vật thể Ω giới hạn dưới bởi miền $D \subset (Oxy)$, giới hạn trên bởi mặt cong có phương trình $z = f(x,y) \ge 0$ và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song với Oz và đường chuẩn là biên của D ".



Ta tính thể tích của Ω bằng phương pháp gần đúng.

Chia miền D thành n mảnh rời nhau $D_1, D_2, .., D_n$ có diện tích $\Delta S_1, \Delta S_2, .., \Delta S_n$. Lấy mỗi mảnh nhỏ làm đáy, dựng hình trụ con có đường sinh song song với Oz, mặt phía trên giới hạn bởi mặt $z = f(x,y)$.

Xét hình trụ con thứ i: đáy là D_i, Lấy tùy ý 1 điểm $M_i(x_i,y_i)$. ta có thể tích hình trụ con thứ i

$$\Delta V_i \approx f(x_i y_i).\Delta S_i$$

Thể tích gần đúng của Ω :

$$V(\Omega) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta S_i$$

Phép xấp xỉ này càng chính xác nếu n càng lớn và các mảnh D_i có đường kính càng nhỏ ($d(D_i)$: đường kính của D_i)

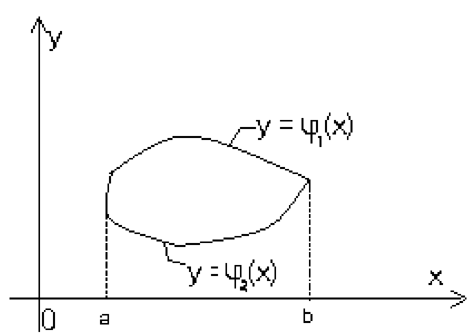
Vậy $V(\Omega) = \lim_{\max_i d(D_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint_D f(x,y)dS$

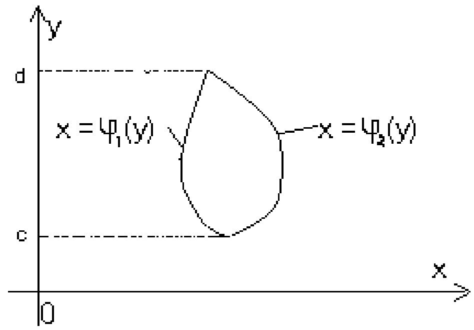
II. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN KÉP

1. Đưa về tích phân lặp

Nếu $D = \{(x,y): a \le x \le b; \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$





Nếu $D = \{(x,y): c \le y \le d; \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y)\}$ thì $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx$

Ví dụ 1: Xác định cận của tích phân $\iint_D f(x,y)dxdy$ với miền *D* xác định bởi các đường

y = 0, y = x, x = 2

y = 0, y = x², x + y = 2

Giải:

Có hai cách biểu diễn *D*:

$D = \{(x,y): 0 \le x \le 2; 0 \le y \le x\}$

hoặc

$D = \{(x,y): 0 \le y \le 2; y \le x \le 2\}$

Do đó $\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^2 dx \int_0^x f(x,y)dy = \int_0^2 dy \int_y^2 f(x,y)dx$

Có 2 cách biểu diễn *D*:

$D = \{(x,y): 0 \le y \le 1; \sqrt{y} \le x \le 2 - y\}$

$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^0 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx$

$$D = D_1 \cup D_2 = \left\{(x,y): 0 \le x \le 1; 0 \le y \le x^2\right\} \cup \left\{(x,y): 1 \le x \le 2; 0 \le y \le 2-x\right\}$$

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$$

Ví dụ 2: Tính $I = \iint_D xydxdy$, *D* giới hạn bởi các đường $y = x - 4$, $y^2 = 2x$

Giải: Hoành độ giao điểm:

$$2x = (x-4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2 \\ y = 4 \end{array}\right.$$

Do đó, miền *D* được biểu diễn

$$D = \left\{(x,y): -2 \le y \le 4; \frac{y^2}{2} \le x \le y + 4\right\}$$

Vậy

$$I = \int_{-2}^{4} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} xydx = \int_{-2}^{4} \left(y.\frac{x^2}{2} \Bigg|_{x=\frac{y^2}{2}}^{x=y+4} \right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} \left(y^3 + 8y^2 + 16y - \frac{y^5}{4} \right) dy = \frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4} + \frac{8y^3}{3} + 8y^2 - \frac{y^6}{24} \right)\Bigg|_{-2}^{4} = 90$$

2. Đổi biến trong tích phân kép

a. Đổi biến tổng quát

Giả sử $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ là hai hàm có đạo hàm riêng liên tục trên miền đóng, bị chặn D_{uv}. Gọi $D_{xy} = \left\{(x,y) / x = x(u,v); y = y(u,v), (u,v) \in D_{uv}\right\}$

Nếu $f(x,y)$ khả tích trên D_{xy} và định thức Jacobi

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \ne 0$$

trên D_{uv} thì ta có

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v),y(u,v)).|J|.dudv$$

-

Ví dụ 3: Tính $\iint_D dxdy$ với *D* giới hạn bởi các đường

$$y = 1 - x, y = 2 - x, y = 2x - 1, y = 2x - 3$$

Giải: Các đường thẳng viết lại $x + y = 1, x + y = 2, 2x - y = 1, 2x - y = 3$

Đặt *u = x + y, v = 2x – y* thì $x = \frac{u+v}{3}, y = \frac{2u-v}{3}$

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{3}; D_{uv} = \{(u,v): 1 \le u \le 2; 1 \le v \le 3\}$$

Vậy $\iint_D dxdy = \iint_{D_{uv}} \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3}\int_1^2 du \int_1^3 dv = \frac{2}{3}$

b. Tích phân kép trong tọa độ cực

Công thức liên hệ tọa độ

x = r.cosφ

y = r.sinφ

Ta có:

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Do vậy: $\iint_{D_{xy}} f(x,y)dxdy = \iint_{D_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$

Ví dụ 4: Tính $I = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, với D giới hạn bởi: $(x-1)^2 + y^2 \le 1, y \ge 0$

Giải:

Rõ ràng $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Thay x = rcosφ , y = rsinφ vào $(x-1)^2 + y^2 = 1$, ta được r = 2cosφ

Vậy $D_{r\varphi} = \left\{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}; 0 \le r \le 2\cos\varphi\right\}$

Do đó:

$$I = \iint\limits_{D_{r\varphi}} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{4-r^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \frac{rdr}{\sqrt{4-r^2}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)d\varphi = \pi - 2$$

<u>Ví dụ 5:</u> Tính $I = \iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ với D là hình tròn $x^2 + y^2 \le R^2$.

<u>Giải:</u> Chuyển sang hệ tọa độ cực, ta có:

$$D_{r\varphi} = \{(r,\varphi) : 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le r \le R\}$$

Do đó:

$$I = \iint\limits_{D_{r\varphi}} e^{-r^2} rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} rdr = 2\pi\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Bigg|_0^R = \pi\left(1-e^{-R^2}\right)$$

BÀI TẬP

1 -Tính các tích phân kép

a) $\int_0^2\int_2^3 (4-x^2)dydx$

b) $\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}dxdy$

c) $\int_0^4\int_0^x x\sin y\,dydx$

d) $\int_0^1 \int_0^{1/y} y e^{xy}\,dxdy$

2-Tính các tích phân kép

a) $\iint_D (4x+2)\,dxdy$, D: $0 \le x \le 2$; $x^2 \le y \le 2x$

b) $\iint_D (1-6xy^2)\,dxdy$, D: $0 \le x \le 2$; $-1 \le y \le 1$

c) $\iint_D y\ln x\,dxdy$, D: $xy = 1$; $y = \sqrt{x}$; $x = 2$

3- Đổi thứ tự biến lấy tích phân

a) $\int_0^1 \int_2^{4-2x} f(x,y)\,dydx$

b) $\int_0^{3/2} \int_0^{9-4x^2} f(x,y)\,dydx$

c) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\,dxdy$

d) $\int_0^1 \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$

4- Tính các tính phân

d) $\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$, D: $y = \sqrt{1-x^2}$; $y = 0$

e) $\iint_D x\,dxdy$, D: $y = x$; $x = \sqrt{2-y^2}$; $y = 0$

f) $\iint_D \frac{2dxdy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$, D: $x^2 + y^2 \le 1$

g) $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, D: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$; $a, b > 0$

h) $\iint\limits_D \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$, D: $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{4}; x^2+y^2=\pi^2$

i) $\iint\limits_D (y-x)dxdy$, D: y = x + 1; y = x – 3; $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{9}; y=-\frac{1}{3}x+5$

5-Tính diện tích miền D giới hạn bởi

j) D: $y = x^2$; y = x + 2

k) D: $y^2 = x$; $y = 2x - x^2$

l) D: $y=2\sqrt{1-x^2}$; x = ± 1; y = -1

m) D: $y = 2^x$; y = -2x; y = 4

§2 Tích phân bội 3

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

1. Định nghĩa

Cho hàm số f (x,y,z) xác định trong miền đóng, giới nội Ω của không gian Oxyz.

Chia miền Ω thành n miền nhỏ có thể tích là $\Delta V_1,\ldots,\Delta V_n$. Lấy tùy ý một điểm $M_i(x_i,y_i,z_i)$ trong miền nhỏ thứ i.

Lập tổng

$$I_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

Nếu giới hạn $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \lim\limits_{\max d_i\to 0} I_n = I$: hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia miền Ω , và M_i, thì f (x,y,z) gọi là khả tích trên miền Ω , và I gọi là tích phân bội 3 của hàm f trên Ω , ký hiệu

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dV$$

Tương tự như tích phân kép, ta ký hiệu dxdydz thay cho dV và tích phân bội 3 thường viết

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$$

Chú ý: Nếu f (x,y,z) = 1 thì $\iiint_{\Omega} dxdydz = V(\Omega)$ (thể tích của Ω).

2. Tính chất

$$\iiint_{\Omega} Cf(x,y,z)\,dV = C\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV$$

$$\iiint_{\Omega} (f+g)\,dV = \iiint_{\Omega} f\,dV + \iiint_{\Omega} g\,dV$$

- Nếu $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$ thì $\iiint_{\Omega} f\,dV = \iiint_{\Omega_1} f\,dV + \iiint_{\Omega_2} f\,dV$
- Nếu f (x,y,z) ≥ g(x,y,z) ∀ (x,y,z) ∈ Ω thì $\iiint_{\Omega} f\,dV \geq \iiint_{\Omega} g\,dV$
- Nếu f (x,y,z) liên tục trong miền đóng, bị chặn Ω thì tồn tại điểm $(x_0,y_0,z_0) \in \Omega$ sao cho

$$f(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{V(\Omega)}\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV$$ (Định lý về giá trị trung bình)

II. CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN BộI 3

1. Tích phân bội 3 trong hệ tọa □ộ Descartes

Cho Ω giới hạn bỡi:

- Mặt trên: $z = \varphi_2(x,y)$
- Mặt dưới: $z = \varphi_1(x,y)$
- Xung quanh: mặt trụ có đường sinh song song với trục Oz và đường chuẩn là biên của miền D thuộc mặt phẳng Oxy. (D là hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxy).

Khi đó

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{D}\left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dxdy$$

Nếu miền $D=\{(x,y): a \le x \le b, \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x)\}$ thì

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} dy \int_{\Psi_1(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

<u>Ví dụ 1</u>: Cho miền Ω giới hạn bởi các mặt: x = 0, y = 0, z = 0, x + y + 2z = 2.

Viết tích phân bội 3 $I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ theo các thứ tự :

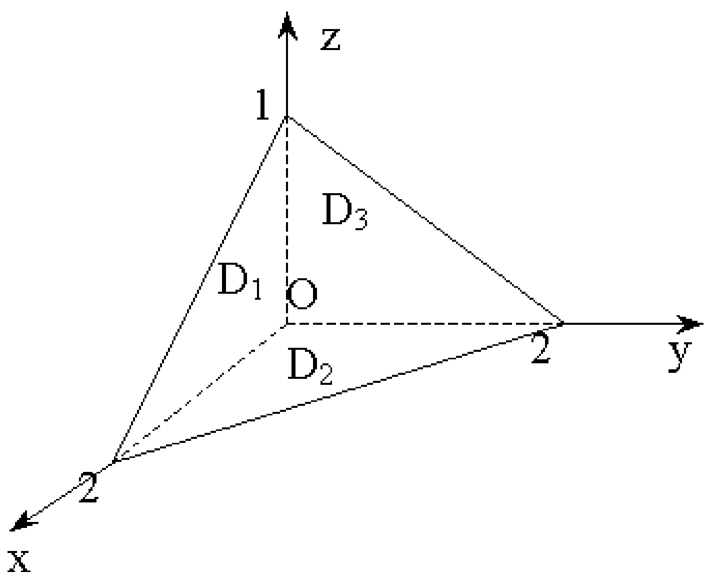
a). dxdydz

b). dxdzdy

c). dydzdx

<u>Giải:</u>

a). Hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxy là miền



$D_1=\{(x,y):\ 0\le x\le 2;\ 0\le y\le 2-x\}$

Giới hạn trên của Ω: $z = 1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}$

Giới hạn dưới của Ω: $z=0$

Vậy:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \int_0^{1-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}} f(x,y,z)dz$$

b). Hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxz là miền

$$D_2 = \left\{(x,z):\ 0 \le x \le 2;\ 0 \le z \le 1 - \frac{x}{2}\right\}$$

Giới hạn trên của Ω: $y = 0 - x - 2z$

Giới hạn dưới của Ω: $y = 0$

Vậy:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} dz \int_0^{2-x-2z} f(x,y,z)dy$$

c). Hình chiếu Ω của xuống mặt phẳng Oyz là

$$D_3 = \left\{(y,z): 0 \le y \le 2; 0 \le z \le 1 - \tfrac{y}{2}\right\}$$

Giới hạn trên của Ω là : x = 2-y-2z

Giới hạn dưới của Ω là : x = 0

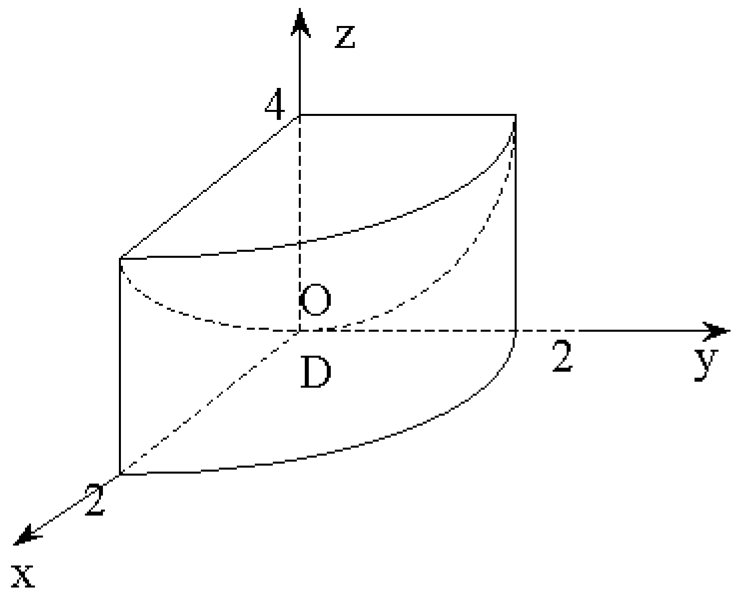
Vậy

$$I = \int_0^2 dy \int_0^{1-\frac{y}{2}} dz \int_0^{2-y-2z} f(x,y,z)dx$$

Ví dụ 2: Tính $I = \iiint\limits_{\Omega} x\,dxdydz$, Ω là miền giới hạn bởi các mặt:

$z = x^2+y^2$; $z = 4$; $x = 0$; $y = 0$.

Giải:



Hình chiếu của miền Ω xuống mặt phẳng Oxy là $\frac{1}{4}$ hình tròn :

$$D_4 = \left\{(y,z): 0 \le y \le 2; 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}$$

Mặt trên của Ω: z=4,

Mặt dưới của Ω: $z=x^2+y^2$.

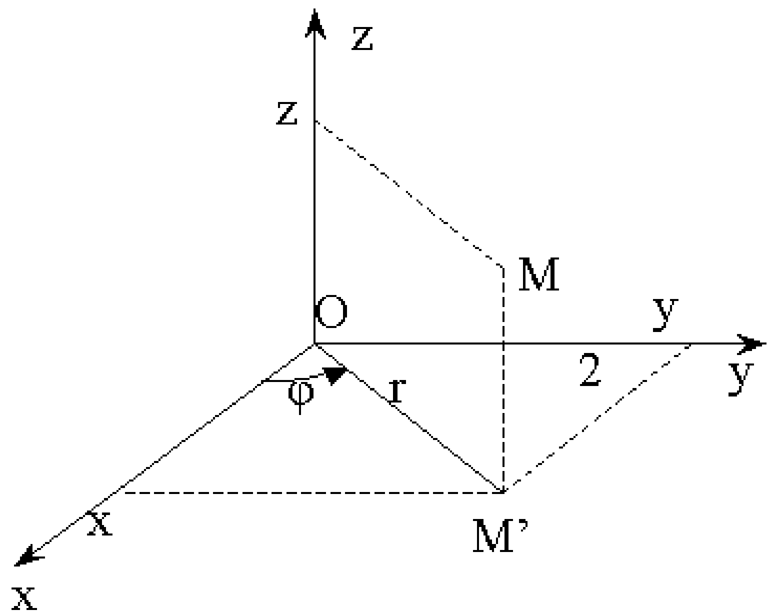
Vậy:

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{4} x.dz = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(x.z \Big|_{z=x^2+y^2}^{z=4} \right) dy$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4x - x^3 - xy^2)dy = \int_0^2 (4xy - x^3y - \frac{xy^3}{3}) \Big|_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$I = \frac{2}{3}\int_0^2 x(4-x^2)^{3/2} dx = \frac{64}{15}$$

2. Tính tích phân bội 3 trong hệ toạ ộ trụ



Toạ độ trụ của điểm M(x,y,z) là bộ ba số (r,φ,z), với (r,φ) là toạ độ cực của hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy (Hình vẽ)

Ta luôn có: $r \geq 0$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; $-\infty < z < +\infty$.

Mối liên hệ giữa toạ độ Descartes và toạ độ trụ

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

Ta có :

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi, r\sin\varphi, z).rdrd\varphi dz$$

<u>Ví dụ 3</u>: Tính $I = \iiint_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$ với Ω là miền giới hạn bởi $z = x^2+y^2$; $z = 4$

<u>Giải:</u>

Hình chiếu của Ω xuống mặt phẳng Oxy là hình tròn $x^2+y^2 \leq 4$

Chuyển sang toạ độ trụ

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z.$$

Ω giới hạn bởi: $o \le \varphi < 2\pi$; $0 \le r \le 2$; $r^2 \le z \le 4$.

Vậy:

$$I = \iiint_\Omega r^2 .r dr d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr \int_{r^2}^4 dz = \frac{64\pi}{3}$$

3. Tính tích phân bội 3 trong hệ toạ □ộ cầu

Toạ độ cầu của một điểm M(x,y,z) là bộ 3 số (r,θ,φ), với r = OM, θ là góc giữa trục Oz và $\overrightarrow{OM}$, φ là góc giữa trục Ox và $\overrightarrow{OM'}$, với M' là hình chiếu của M xuống mặt phẳng Oxy.

Ta có: Với mọi điểm M trong không gian thì $r \ge 0$; $0 \le \theta \le \pi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$

Mối liên hệ giữa toạ độ Descartes và toạ độ cầu:

$x = r \sin\theta \cos\varphi$

$y = r \sin\theta \sin\varphi$

$z = r \cos\theta$

Công thức tích phân trong hệ toạ độ cầu

$$\iiint_\Omega f(x,y,z) dx dy dz$$

$$= \iiint_\Omega f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta).r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

<u>Ví dụ 1</u>: Tính $I = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ với Ω là miền giới hạn bởi hai mặt cầu

$x^2+y^2+z^2 = 1$; $x^2+y^2+z^2 = 4$.

Chuyển sang hệ toạ độ cầu, ta có: $I = \iiint_\Omega r^4 \sin\theta dr d\theta d\varphi$

Miền Ω xác định bởi $1 \le r \le 2$; $0 \le \theta \le \pi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Vậy:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_1^2 r^4 dr = \frac{124\pi}{5}$$

Ví dụ 4: Tính $I = \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz$ với Ω là miền giới hạn bởi $x^2+y^2+z^2 \le z$.

Chuyển sang hệ toạn độ cầu ta có:

$$I = \iiint_{\Omega} r^3 \sin\phi\, dr d\phi d\varphi$$

Miền Ω xác định bởi $0 \le r \le \cos\theta$; $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Vậy:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\cos\phi} r^3 \sin\phi\, dr = \frac{\pi}{10}$$

§3 Ứng dụng của tích phân bội

I. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC

1. Tính diện tích hình phẳng

Diện tích của miền D trong mặt phẳng Oxy

$$S(D) = \iint_D dxdy$$

2. Thể tích vật thể

Vật thể Ω trong không gian Oxyz là:

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz$$

Nếu Ω giới hạn trên bởi mặt $z = f_2(x,y)$, giới hạn dưới bởi mặt $z = f_1(x,y)$ và giới hạn xung quanh bởi mặt trụ có đường sinh song song với Oz và có đường chuẩn là biên của miền D trong mặt phẳng Oxy thì

$$V(\Omega) = \iint_D [f_2(x,y) - f_1(x,y)]\, dxdy$$

Ví dụ 1: Tính thể tích phần hình nón $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong mặt cầu $x^2+y^2+z^2 = 4$

Giải:

Gọi Ω là vật thể hình nón $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ nằm trong hình cầu $x^2+y^2+z^2 \leq 4$

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz$$

Chuyển sang hệ toạ độ cầu thì

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} r^2 \sin\phi dr d\phi d\varphi$$

Miền giới hạn bởi $0 \leq r \leq 2$; $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Vậy

$$V(\Omega) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^2 r^2 \sin\phi dr = \frac{\pi^3}{3}(2-\sqrt{2})(dvtt)$$

<u>Ví dụ 2</u>: Tính thể tích hình cầu có bán kính R

<u>Giải:</u>

Ta có thể tích hình cầu hình cầu

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dxdydz$$

Hình cầu Ω: $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$

Chuyển sang hệ toạ độ cầu thì

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} r^2 \sin\phi dr d\phi d\varphi$$,

Và miền Ω: $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Vậy:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^R r^2 \sin\theta dr = \int_0^{2\pi} d\varphi . \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta . \int_0^R r^2 dr$$

$$= 2\pi.(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} . \frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3 (dvtt)$$

II. ỨNG DỤNG CƠ HỌC

1. Tính khối lượng

a. Khối lượng của vật thể Ω có khối lượng riêng tại điểm M(x, y, z) là f(x, y, z) thì:

$$m(\Omega) = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

b. Nếu bản phẳng D trong mặt phẳng Oxy và có khối lượng riêng là f(x, y) thì :

$$m(\Omega) = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$$

2. Momem quán tính của vật thể Ω với khối lượng riêng ρ(x, y, z) □ối với

c. trục Ox: $I_x = \iiint\limits_{\Omega}(y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$

d. trục Oy: $I_y = \iiint\limits_{\Omega}(x^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$

e. trục Oz: $I_z = \iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$

f. đường thẳng L: $I_L = \iiint\limits_{\Omega} r^2(x,y,z)\rho(x,y,z)dxdydz$, r(x, y, z) là khoảng cách từ điểm M(x, y, z) đến L

g. Mặt Oxy: $I_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z^2\rho(x,y,z)dxdydz$

h. Mặt Oxz: $I_{xz} = \iiint\limits_{\Omega} y^2\rho(x,y,z)dxdydz$

i. Mặt Oyz: $I_{yz} = \iiint\limits_{\Omega} x^2\rho(x,y,z)dxdydz$

j. Gốc tọa độ: $I_o = \iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$

3. Momen tĩnh của Ω với khối lượng riêng ρ(x, y, z) □ối với

a) Mặt Oxy: $M_{xy} = \iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)dxdydz$

b) Mặt Oxz: $M_{xz} = \iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)dxdydz$

c) Mặt Oyz: $M_{yz} = \iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z)dxdydz$

4. Trọng tâm của Ω với khối lượng riêng ρ(x, y, z) là

$$x_o = \frac{M_{yz}}{m(\Omega)}; y_o = \frac{M_{xz}}{m(\Omega)}; z_o = \frac{M_{xy}}{m(\Omega)}.$$

BÀI TẬP

1- Tính $\iiint_{\Omega}(1-x-y)dxdydz$ với Ω

a) giới hạn bởi $0 \le x \le 1$; $1 \le y \le 2$; $2 \le z \le 3$.

b) giới hạn bởi các mặt: $x + y + z = 1$; $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2-Tính:

a) $\iiint_{\Omega} xdxdydz$, Ω: $z = x^2 + y^2$; $z = 4$, $x = 0$, $y = 0$ (lấy trong miền $x \ge 0$, $y \ge 0$).

b) $\iiint_{\Omega} ydxdydz$, Ω: $y = x^2$, $y + z = 1$, $z = 0$.

3- Tính:

a) $\iiint_{\Omega} zdxdydz$, Ω: $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = 4$; $z = 0$.

b) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)^3dxdydz$, Ω: $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

c) $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+1)\ dxdydz$, Ω: $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = x^2 + y^2$.

d) $\iiint_{\Omega} xyzdxdydz$, Ω: góc phần tám thứ nhất của khối cầu đơn vị.

e) $\iiint_{\Omega} zdxdydz$, Ω: $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

f) $\iiint\limits_{\Omega}(y^2 + z^2)^3 dxdydz$, Ω: $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $x \le 0$.

4-Tính thể tích vật giới hạn bởi:

a) $z = x^2 + 3y^2$, $z = 8 – x^2 – y^2$

b) $y + z = 2$; $x = 4 – y^2$, các mặt phẳng tọa độ nằm trong góc phần tám thứ nhất

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z^2$.

d) $z = 4 – x^2 – y^2$, các mặt phẳng tọa độ nằm trong góc phần tám thứ nhất.

5- Tính momen quán tính đối với các trục Ox, Oy, Oz của khối chữ nhật đồng chất Ω: $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \le x \le \frac{b}{2}; -\frac{c}{2} \le x \le \frac{c}{2}$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm của vật thể đồng chất giới hạn bởi các mặt $z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

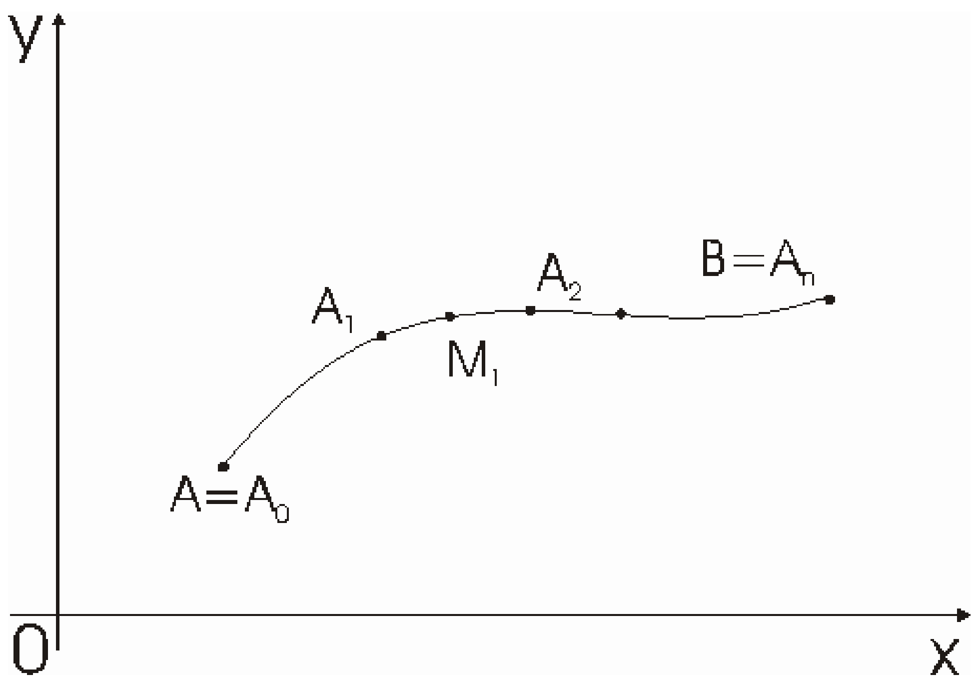
b) Tìm tọa độ trọng tâm của nửa hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$, $z \ge 0$ nếu khối lượng riêng tại mỗi điểm tỷ lệ với khoảng cách từ điểm đó đến gốc tọa độ.

CHƯƠNG III: TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

I. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI MỘT

1. Định nghĩa

Cho hàm f(M) xác định trên cung AB. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ th ành n phần tùy ý bởi các điểm A = Ao < A_1 < …… < An = B. Đặt Δli là độ dài cung $AiAi_{-1}$ và trên cung $AiAi_{-1}$ lấy một điểm Mi tùy ý, i = 1, 2 , … , n.



(Hình 1.1)

Lập tổng : $S_n = \sum_{i=1}^{n-1} f(M_i)\Delta l_i$

Nếu Sn có giới hạn hữu hạn I khi n → ∞ sao cho max{ Δli } → 0 và i không phụ thuộc vào cách chia các cung $AiAi_{-1}$ và cách chọn các Mi, thì I được gọi là tích phân đường loại 1 của f(M) trên cung $\overset{\frown}{AB}$ và được ký hiệu là:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)dl$$

Vậy:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)dl = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta l_i$$

Khi đó ta nói f(M) là khả tích trên cung AB.

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ thuộc mặt phẳng xy và f là hàm theo 2 biến f(x,y) thì dùng ký hiệu : $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,dl$

Trong không gian xyz, f là hàm f(x,y,z) thì dùng ký hiệu $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\,dl$

<u>Ý nghĩa thực tế:</u>

Xem 1 dây vật chất hình dạng L và có mật độ khối lượng là f(M) phụ thuộc vào điểm M trên dây, thì khối lượng của dây vật chất là :

Tích phân đường loại 1 có nhiều ứng dụng thực tế, được trình bày ở mục I.8

$$M = m(AB) = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\,dl$$

2. Định lý tồn tại

Nếu hàm f(M) liên tục dọc theo cung trơn $\overset{\frown}{AB}$ thì tích phân đường loại 1 tồn tại.

3. Các tính chất

- Tích phân đường loại 1 không phụ thuộc hướng của cung, nghĩa là: $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\,dl = \int_{\overset{\frown}{BA}} f(M)\,dl$

- Nếu f, g khả tích trên cung AB và k là hằng số thì kf+g cũng khả tích và : $\int_{\overset{\frown}{AB}} (kf+g)dl = k\int_{\overset{\frown}{AB}} fdl + \int_{\overset{\frown}{AB}} gdl$

- Nếu f khả tích trên AB và C là 1 điểm trên cung AB thì: $\int_{\overset{\frown}{AB}} (M)dl = \int_{\overset{\frown}{AC}} f(M)dl + \int_{\overset{\frown}{CB}} F(M)dl$

- Nếu f(M) ≥ 0 khả tích trên AB thì : $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)\,dl \geq 0$

Nếu f khả tích trên trên AB thì $|f|$ cũng khả tích trên AB

và: $\left|\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)dl\right| \le \int_{\overset{\frown}{AB}} |f(M)|dl$

Lưu ý: Nếu cung AB trơn từng khúc (nghĩa là cung AB có thể chia thành 1 số hữu hạn cung trơn) và f(M) liên tục trên cung AB thì định lý tồn tại và các tính chất nêu trên vẫn đúng.

4. Định lý (về giá trị trung bình)

Nếu f(M) liêân tục trên cung trơn AB có độ dài L. Khi đó tồn tại điểm $\overline{M}$ thuộc cung AB thỏa : $\int_{\overset{\frown}{AB}} (kf + g)dl = F(\overline{M}).L$

5. Công thức tính tích phân ường loại 1 trên mặt phẳng

a) Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số :

Cho hàm số f(x,y) liên tục trên cung trơn $\overset{\frown}{AB}$, và cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \qquad a \le t \le a \end{cases}$$

Chia [a,b] thành n đoạn bởi các điểm:

a = to < t_1< …. < tn = b .

Khi đó cung AB được chia tương ứng thành n cung bởi các điểm Ak(x(tk), y(tk)), k= 0,1,2….,n. Theo định lý giá trị trung bình ta có :

$$\Delta l_k = \int_{k=0}^{t_{k+1}} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \sqrt{x'(\bar{t}_k)^2 + y'(\bar{t}_k)^2}\,\Delta t_k$$

Lấy điểm giữa Mk(x(tk), y(tk)) thì có tổng tích phân:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\overline{M}_k)\Delta l_k = \sum f(x(\bar{t}_k), y(\bar{t}_k))\sqrt{x'(\bar{t}_k)^2 + y'(\bar{t}_k)^2}\,\Delta t_k$$

Vế phải là tổng tích phân xác định, khi qua giới hạn, ta được:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)dl = \int_a^b f(x(t),\ y(t))\sqrt{x'(\bar{t}_k)^2 + y'(\bar{t}_k)^2}\,dl$$

b) Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình: y = y(x), a ≤ x ≤ b :

Khi đó từ công thức trên, ta có :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'(x)^2}\,dx$$

c) Cung AB có phương trình tọa độ cực

$$r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$$
$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi \\ y = r(\varphi)\sin\varphi, \qquad \alpha \le \varphi \le \beta \end{cases}$$

Nếu xem φ là tham số, ta có :

$$x'^2_\varphi + y'^2_\varphi = r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2$$

Vậy :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(u)\,dl = \int_\alpha^\beta f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'(\varphi)^2}\,dl$$

6. Công thức tính tích phân đường loại 1 trong không gian

Cho hàm số f(x,y, z) liên tục trên cung trơn AB trong không gian. Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số :

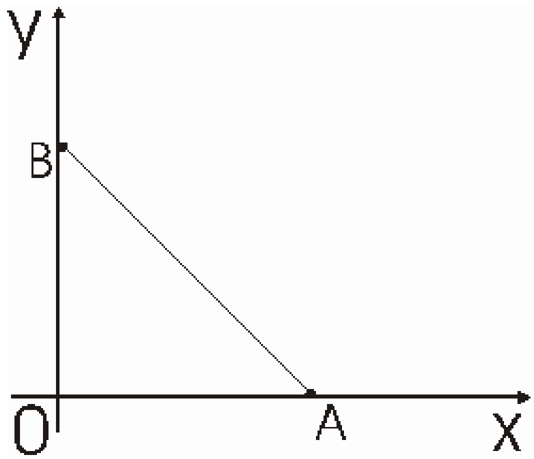
$$x = x(t), y = y(t),\ z = z(t),\ a \le t \le b$$

Hoàn toàn tương tự như phần I.5.a, ta có:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\,dl = \int_a^b f(x(t),\ y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,dl$$

7. Các thí dụ

a) Thí dụ 1: Tính $\int_C f(x+y)\,dl$ Với C là đường các cạnh tam giác có đỉnh O(0,0), A(1,0), B(0,1)



(Hình 1.2)

Ta có : $\int_C = \int_{\overline{OA}} + \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BO}}$

Trên $\overline{OA}$: y=0, dl = dx nên:

$$\int_{\overline{OA}} (x+y)\,dl = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

Trên $\overline{OB}$: x=0, dl = dy nên:

$$\int_{\overline{BO}} (x+y)\,dl = \int_{\overline{BO}} (x+y)\,dy = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$$

Trên $\overline{AB}$: y= 1-x

$$\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \sqrt{2}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{\overline{AB}} (x+y)\,dl = \sqrt{2}\int_0^1 dx = \sqrt{2}$$

Vậy : $\int_C (x+y)\,dl = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$

b) Thí dụ 2: Tính $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dl$ Với C là đường cong có phương trình: $x^2+y^2=ax$

Sử dụng tọa độ cực:

$$\left.\begin{array}{l} x=r(\varphi).\cos\varphi \\ y=r(\varphi).\sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

$$\Rightarrow ax=r^2$$

$$\Rightarrow r=a\cos\varphi, \quad -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$$

Vậy:

$$\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{ax}.\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\,d\varphi$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos\varphi}.\sqrt{a^2}\,d\varphi \;=a^2[\sin\varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \qquad =2a^2$$

c) Thí dụ 3: Tính $\int_{\widehat{AB}} z^2\,dl$ Với cung $\widehat{AB}$ có phương trình: x = acost , y = asint, z= bt , $0\le t\le 3$

Xem t là tham số, ta có :

$$\int_{\widehat{AB}} z^2\,dl=\int_0^3 bt^2\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\;dt$$

$$=b^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^3 t^2dt=9b^2\;\sqrt{a^2+b^2}$$

d) Thí dụ 4:

Tính $\int_L xy\,dl$ với đường L là phần trong góc tọa độ thứ nhất của giao tuyến giữa mặt Paraboloid elliptic có phương trình $z=2-x^2-2y^2$ và mặt trụ parabolic $z=x^2$ từ điểm (0,1,0) đến (1,0,1)

Dùng tham số t= x , thì ta có :

$$x=t, z=t^2 \quad, y^2=\frac{z-t^2-z}{2}=1-t^2$$

Vì L nằm trong góc tọa độ thứ nhất, nên ta được phương trình tham số sau:

$$x = t,\ y = \sqrt{1 - t^2},\ z = t^2,\quad 0 \le t \le 1$$

Do đó :

$$dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dl$$
$$= \sqrt{1 + \frac{t^2}{1+t^2} + 4t^2}\,dl \quad = \frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}\,dl$$

Vậy:

$$\int_L xyds = \int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\ \frac{\sqrt{1+4t^2-4t^4}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

$$= \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2-4t^4}\,dt \ = \int_0^1 t\sqrt{2-(2t^2-1)^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{2-u^2}\,du \qquad (u = 2t^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 t\sqrt{2-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi+2}{8}$$

8. Ứng dụng của tích phân ường loại 1

a). Khối lượng 1 cung:

Giả sử cung vật chất chiều dài L có khối lượng riêng phụ thuộc điểm M trên dây cung là δ (M). Khi đó với 1 cung nhỏ A_iA_{i+1}, có :

$$\mathbf{m(A_iA_{i+1}) \approx \delta(M_i)l(A_i + A_{i+1}) = \delta(M_i)\Delta l_i}$$

Vậy: $$m(AB) = \sum_{i=0}^{n-1}\delta(M_i)\Delta li$$

Qua giới hạn ta được :

$$M = m(AB) > \int_{\widehat{AB}} \delta dl$$

b). Moment tĩnh (moment thu nhất), trọng tâm cung phẳng :

Cho 1 cung phẳng $\widehat{AB}$ thuộc mặt phẳng xy, có khối lượng riêng phụ thuộc điểm M(x,y) trên dây cung là δ (x,y). Theo định nghĩa moment trong cơ học, ta có công thức moment của cung $\overset{\frown}{AB}$ đối với trục Ox là Mx và đối với trục Oy là My là :

$$M_x = \int_{\overset{\frown}{AB}} y\delta(x,y)dl,\ M_y = \int_{\overset{\frown}{AB}} x\delta(x,y)dl$$

Từ đó trọng tâm khối lượng của cung AB được xác định bởi:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{M}\int_{AB} y\delta(x,y)dl$$
$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{M}\int_{AB} x\delta(x,y)dl$$

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ là đồng chất, δ (x,y) = hằng số , thì : M= δ .L (L là chiều dài cung AB), và tọa độ trọng tâm sẽ là :

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_{AB} xdl \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_{AB} ydl$$

Cũng nhớ rằng : khi cung $\overset{\frown}{AB}$ không cắt trục Ox và quay quanh trục Ox thì diện tích mặt tròn xoay do cung phẳng đó tạo ra là :

$$S = 2\pi\int_{\overset{\frown}{AB}} ydl$$

Từ công thức toạ độ trọng tâm, có:

$$S = 2\pi\bar{y}L$$
$$\text{hay } \bar{y} = \frac{S}{2\pi L}$$

<u>**Thí dụ 5**:</u> Tìm trọng tâm của nửa trên vòng tròn tâm O bán kính R.

<u>Giải:</u> Xét nửa vòng tròn AB tâm 0. Do tính đối xứng nên trọng tâm (x,y) phải nằm trên trục Oy ($\bar{x} = 0$). Khi nửa vòng tròn AB quay quanh trục Ox ta được quả cầu có diện tích mặt cầu là: S = 4π R^2, và độ dài nửa cung tròn AB là L = π R. Vậy trọng tâm có tung độ là :

$$\bar{y} = \frac{S}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi\pi L} = \frac{2R}{\pi}$$

c). Moment tĩnh (moment thứ nhất), trọng tâm cung trong không gian:

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ trong không gian với khối lượng riêng là δ (x,y,z) thì tương tự trường hợp phẳng ta có khối lượng cung và các moment tĩnh cung AB đối với các mặt tọa độ x0y, x0z, y0z là :

$$M = \int_{\overset{\frown}{AB}} \delta(x,y,z)dl$$

$$M_{xy} = \int_{\overset{\frown}{AB}} z\delta(x,y)dl,\ M_{yz} = \int_{\overset{\frown}{AB}} x\delta(x,y)dl,\ M_{xz} = \int_{\overset{\frown}{AB}} y\delta(x,y)dl$$

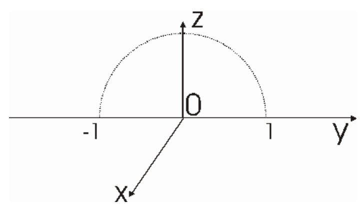
Và trọng tâm khối lượng của cung $\overset{\frown}{AB}$ có công thức :

$$\overline{x} = \frac{M_{yz}}{M},\quad \overline{y} = \frac{M_{xz}}{M},\quad \overline{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Nếu cung AB đồng chất (δ =hằng số) thì $M = \delta.L$ và :

$$\overline{x} = \frac{1}{L}\int_{\overset{\frown}{AB}} x dl,\quad \overline{y} = \frac{1}{L}\int_{\overset{\frown}{AB}} y dl,\quad \overline{z} = \frac{1}{L}\int_{\overset{\frown}{AB}} z dl$$

Thí dụ 6: Cho nửa vòng tròn bằng thép đặt trong mặt phẳng y^0z có phương trình $y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$. Biết khối lượng riêng là φ (x,y,z) = 2 – z. Hãy tìm khối lượng và trọng tâm của nửa vòng tròn đó.



(Hình 1.3)

Do nửa vòng tròn nằm trong mặt phẳng yz, nên trọng tâm có x= 0. Ngoài ra do đối xứng và có khối lượng phân bố đối xứng đối qua trục Oz nên trọng tâm có y=0. Phương trình tham số của nửa vòng tròn là : x=0 , y = cos t , z = sin t , 0 ≤ t ≤ π

Vậy:

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \sqrt{0^2 + \sin^2 t + \cos^2 t}\,dt = dt$$

$$M = \int_C \delta(x,y,z)dl = \int_C \delta(2-z)dl = \int_0 \delta(2-\sin t)dl$$

$$= 2\pi - 2$$

$$M_{xy} = \int_C z\delta(x,y,z)dl = \int_C z(2-z)dl = \int_0^{\pi} \sin t(2-\sin t)dt = \frac{8-\pi}{1}$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8-\pi}{4\pi-4}$$

d). Moment quán tính (moment thứ hai)

Ta có công thức moment quán tính cung $\overset{\frown}{AB}$ với khối lượng riêng δ (x,y,z) đối với các trục toạ độ là :

$$I_x = \int_{\overset{\frown}{AB}} (y^2 + z^2)\delta(x,y,z)dl$$

$$I_y = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 + z^2)\delta(x,y,z)dl$$

$$I_x = \int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2 + y^2)\delta(x,y,z)dl$$

Tổng quát, moment quán tính đối với đường thẳng Δ được tính bởi :

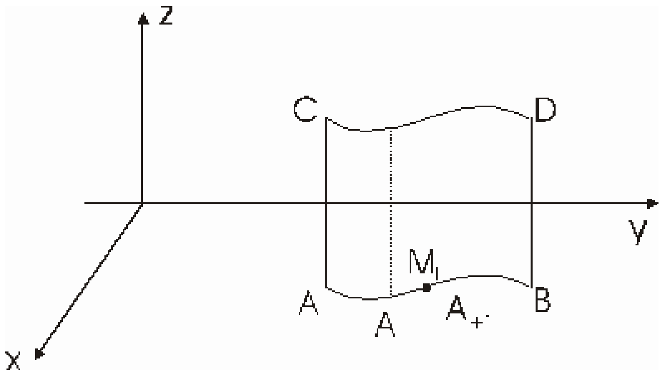
$$I_\Delta = \int_{\overset{\frown}{AB}} r^2(x,y,z)\delta(x,y,z)dl$$

Với r(x,y,z) : khoảng cách từ điểm M(x,y,z) đến đường thẳng Δ

Khi cung $\overset{\frown}{AB}$ là cung phẳng ta có các khái niệm và công thức tương tự.

e). Diện tích mặt trụ

Cho một cung $\overset{\frown}{CD}$ trong không gian với z ≥ 0 có hình chiếu vuông góc xuống mặt phẳng x0y là cung $\overset{\frown}{AB}$ Xem mặt trụ với đường sinh song song trục Oz, đường chuẩn CD giới hạn trên cung CD, giới hạn dưới bởi cung AB, giới hạn 2 bên bởi các đường thẳng AC, BD



(Hình 1.4)

Giả sử cung CD có phương trình z = f(M),M∈ AB

Chia cung AB thành n phần bởi các điểm A=Ao, A_1, ……, An = B

Khi đó mặt trụ cũng được chia tương ứng thành n mặt trụ nhỏ, và mặt trụ thứ i với đáy là cung $AiAi_{+1}$ có diện tích được tính gần đúng diện tích hình chữ nhật có đáy là $\Delta_i = AiAi_{+1}$ chiều cao f(Mk), với Mk ∈ $AiAi_{+1}$ là Si = Δ_i x f(Mi).

Khi đó diện tích mặt trụ có diện tích tính gần đúng là:

$$S_n \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta l_i$$

Qua giới hạn, ta có: $S = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)dl$

<u>Thí dụ 7</u>: Tính diện tích phần mặt trụ $x^2 + y^2 = R^2$ nằm giữa mặt z= 0 và z= $\frac{xy}{2R}$ ở góc x ≥ 0 , y ≥ 0.

<u>Giải:</u> Do mặt trụ giới hạn trên bởi đường cong z = $\frac{xy}{2R}$, giới hạn dưới bởi ¼ vòng tròn $x^2 + y^2 = R^2$ trong mặt phẳng xy, nên nó có phương trình : X= Rcos t, y = Rsin t , 0 ≤ t ≤ π /2

Vậy : $S = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(M)dl = \int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{xy}{2R} dl$

Ta có:

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\ dt = Rdt$$

$$\Rightarrow S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R.\cos t.R \sin r}{2R} Rdt = \frac{R^2}{4}$$

II. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI

1. Định nghĩa tích phân ường loại hai trong mặt phẳng

Cho 2 hàm P(x,y), Q(x,y) xác định trên cung $\overset{\frown}{AB}$ thuộc mặt phẳng xy. Chia cung $\overset{\frown}{AB}$ th ành n phần tùy ý bởi các điểm A = Ao < A_1 < …… < An = B, với Ai(xi,yi) Trên mỗi cung $AiAi_{+1}$ lấy một điểm Mi (xi, yi) tùy ý, và i = 1, 2 , … , n và đặt Δxi = x_{i+1} – xi , Δyi = yi_{+1} – yi

Lập tổng : $S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\left[P(\overline{x_i}, \overline{y_i}).\Delta x_i + Q((\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta y_i\right]$

Nếu Sn có giới hạn hữu hạn I khi n → ∞ sao cho max{ Δli } → 0 với Δli là độ dài cung $AiAi_{+1}$ và không phụ thuộc vào cách chia cung đoạn $AiAi_{-1}$ và cách chọn các Mi, thì I được gọi là tích phân đường loại 2 của f(M) trên cung AB và được ký hiệu là:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Vậy:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1}\left[P(\overline{x_i}, \overline{y_i}).\Delta x_i + Q((\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta y_i\right]$$

2. Định lý

Nếu các hàm P(x,y) , Q(x,y) liên tục trong một miền mở chứa cung AB trơn từng khúc thì tích phân đường loại 2 $\int_{\overset{\frown}{AB}} pdx + ldy$ luôn tồn tại.

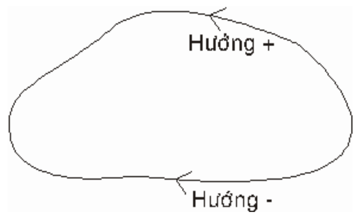
3. Tính chất

a). Do khi đổi hướng cung $\overset{\frown}{AB}$ thành $\overset{\frown}{BA}$ thì trong tổng tích phân các Δxi = x_{i+1} – xi , Δyi = yi_{+1} – yi được thay bằng - Δxi , -Δyi nên tích phân đường loại 2 bị đổi dấu. Ta có :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = -\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy$$

Do đó khi đường lấy tích phân là đường cong kín C, ta quy ước hướng dương trên C là hướng mà khi đi dọc trên C thì miền bị chặn bởi C nằm phía bên trái. Hướng ngược lại là hướng âm. Tích phân theo hướng dương được ký hiệu là :

$$\int_{C} Pdx + Qdy \quad hay \quad \oint_{C} Pdx + Qdy$$



(hình 2.1)

b). Nếu P(x,y), Q(x,y) khả tích trên cung $\overset{\frown}{AB}$, và cung $\overset{\frown}{AB}$ được chia thành 2 cung $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{CB}$ thì P, Q cũng khả tích trên 2 cung đó , và ta có :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} pdx + Qdx = \int_{\overset{\frown}{AC}} pdx + Qdy + \int_{\overset{\frown}{CB}} pdx + Qdy$$

4. Công thức tính tích phân đường loại 2 trên mặt phẳng

a). Cung AB có phương trình tham số :

Cho hàm số P(x,y), Q(x,y) liên tục trong miền mở D chứa cung trơn $\overset{\frown}{AB}$. Cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình tham số : x=x(t) , y = y(t) , a≤ t ≤ b, t=a ứng với điểm A và t = b ứng với điểm B.

Từ định nghĩa có thể coi tích phân $\int_{\overset{\frown}{AB}} pdx + Qdx$ là tổng của 2 tích phân riêng biệt (giới hạn của 2 tích phân) sau:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} p(x,y)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} P(\overline{x_i},\overline{y_i})\Delta x_i$$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)\,dy = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} Q(\overline{x_i},\overline{y_i})\Delta y_i$$

Chia [a,b] thành n đoạn bởi các điểm : a = to < t_1 < …… < tn = b . Khi đó cung AB được chia tương ứng thành n cung bởi các điểm Ak(x(tk), y(tk)), k=0,1,2….,n. Theo định lý Lagrange ta có : $\bar{t}_i \in (t_i, t_{i+1})$ thỏa:

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\bar{t}_i)\Delta t_i$$

Lấy điểm giữa Mk(x(tk), y(tk)) thì có :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} p(x,y)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} p(x(\bar{t}_i), y(\bar{t}_i))x'(\bar{t}_i).\Delta t_i$$
$$= \int_a^b p(x(t), y(t)x'(t)dt$$

Tương tự có: $\int_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)dy = \int_a^b Q(x(t), y(t)y'(t)dt$

Như vậy công thức tính tích phân đường loại 2 được tính thông qua tích phân xác định:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} p(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[p(x(t),y(t))x't + Q(x(t),y(t))y't\right]dt$$

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình y=y(x), a≤ t ≤ b thì ta có

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} p(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[p(x,y(x)) + Q(x,y)y'(x)\right]dx$$

Chú ý : Các công thức trên vẫn đúng khi cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc.

5. Bài toán cơ học dẫn tới tích phân đường loại 2: công do một lực sinh ra trên một cung

Xét bài toán tìm công do lực $\overline{F}(x,y) = P(x,y)\,\overline{i} + Q(x,y)\,\overline{j}$ sinh ra dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$.

Nếu lực $\overline{F}$ không đổi thì công được biết là : $W = \overline{F}.\overline{AB}$

Trong trường hợp tổng quát, chia cung $\overset{\frown}{AB}$ bởi các điểm A = Ao < A_1 < …… < An = B. Trên mỗi cung AiAi_{-1} lấy một điểm Mi $(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ tùy ý, với i = 1, 2 , … , n. Nếu cung AiAi_{+1} khá bé thì có thể xấp xỉ là đoạn thẳng AiAi_{+1} và lực $\overline{F}$ là không đổi xấp xỉ bởi $F^{\cdot}(M_i)$. Khi đó công sinh ra trên cung A_iA_{i+1} được xấp xỉ bởi $F^{\cdot}(M_i).\ A_iA_{i-1}$. Khi đó, có: $A_iA_{i+1} = \Delta x_i\ \vec{i} + \Delta y_i.\ \vec{j}$ và $F(M_i)\ .\ A_iA_{i-1} = P(x,y)\ \Delta x_i + Q(x,y).\Delta y_i$

Và như vậy công sinh ra trên cung AB được xấp xỉ bởi tổng :

$$W \approx \sum_{i=0}^{n-1} P(\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta x_i + Q(\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta y_i$$

Nếu Sn có giới hạn hữu hạn I khi $n \to \infty$ sao cho $\max\{\ \Delta l_i\ \} \to 0$ với Δl_i là độ dài cung A_iA_{i-1} và không phụ thuộc vào cách chia cung đoạn A_iA_{i-1} và cách chọn các M_i, thì I được gọi là tích phân đường loại 2 của f(M) trên cung AB và được ký hiệu là:

$$W = \int_{\overset{\frown}{AB}} p(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Vế phải chính là tổng tích phân đường loại 2 của các hàm số P(x,y), Q(x,y) dọc theo cung AB. Qua giới hạn ta được :

$$W = \int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Từ bài toán này tích phân đường loại 2 còn gọi là tích phân công dù rằng còn nhiều bài toán thực tế cũng dẫn tới việc tìm giới hạn và dẫn tới việc tính tích phân đường loại 2.

6. Một số thí dụ tích phân đường loại 2

Thí dụ 1: Tính tích phân đường loại 2 : $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} x^2dx + xydy$ với A(0,0), B(1,1). Cung AB là đường:

a). Đoạn thẳng AB có phương trình $y = x,\ 0 \le x \le 1$.

b). Đường Parabol $y = x^2$.

Giải:

a). Với AB : $y = x,\ 0 \le x \le 1$ thì :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} x^2dx + xydy = \int_0^1 (x^2 + x^2)dx = \frac{2}{3}$$

b). Với AB : $y = x^2$, $0 \le x \le 1$ thì :

$$\int_{AB} x^2dx + xydy = \int_0^1 (x^2 + x.x^2.2x)dx = \frac{11}{5}$$

Ví dụ này cho thấy tích phân đường loại 2 nói chung phụ thuộc vào các điểm đầu và cuối A, B mà còn phụ thuộc vào đường nối 2 điểm đầu và cuối

Thí dụ 2: Tính tích phân đường loại 2: $\int_C y^2dx - x^2dy$ với C là vòng tròn tâm O(0,0) bán kính 1, có phương trình : x=cost, y=sint, $0 \le t \le 2\pi$

Vậy: $$I = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t(-\sin t) - \cos^2 .\cos t)dt = 0$$

Thí dụ 3: Tính công sinh bởi lực $\vec{F} = (y - x^2)\vec{i} + x^2\vec{j}$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$: x = t, y = t^2, $0 \le t \le 1$

Ta có công sinh ra :

$$W = \int_{AB} (y - x^2)dx + x^2dy = \int_0^1 \left[(t^2 - t^2) + t^2.2t\right]dt = \int_0^1 2t^3dt = \frac{1}{2}$$

7. Tích phân đường loại 2 trong không gian

Cho hàm số P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) liên tục trong miền mở D chứa cung trơn $\overset{\frown}{AB}$, thì tương tự như trên mặt phẳng, ta có định nghĩa tích phân đường loại hai trong không gian :

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$
$$= \lim_{\max \Delta l \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i$$

Nếu cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình : x=x(t) , y = y(t) , z= z(t), $a \le t \le b$, t=a ứng với điểm A và t = b ứng với điểm B, và các đạo hàm liên tục (do cung AB trơn) , thì ta có công thức tính :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$
$$= \int_{\overset{\frown}{AB}} \left[P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t)\right]dt$$

Công sinh ra do lực $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ được tính bởi:

$$W = \int_{\overset{\frown}{AB}} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$$

-

Thí dụ 4: Tính tích phân các hàm P =z, Q = x, R =y dọc theo cung $\overset{\frown}{AB}$ có phương trình : x = cos t, y = sin t, z = 3t , $0 \le t \le 2\pi$

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\overset{\frown}{AB}} tdx + xdy + ydz$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[zt(-\sin x) + \cos t.\cos t + \sin t.z\right]dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-3t\sin t + \cos^2 t + 3\sin t)dt - 6\pi + \pi + 0 = 7\pi$$

8. Liên hệ giữa 2 loại tích phân ường loại 1 và loại 2

Giả sử cung AB có phương trình tham số: x=x(t) , y = y(t) , z= z(t), a$\le$ t $\le$ b, với t là độ dài cung. Lúc đó vectơ : $\vec{v}(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$ l vectơ pháp tuyến đơn vị. Khi đó nếu gọi α , β , γ là các góc của v đối với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz tương ứng, thì:

x'(t) = cos α , y'(t) = cosβ , z'(t) = cos γ

Vậy tích phân đường loại hai được tính bằng :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$$

$$= \int_{b}^{a} \left[P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt$$

$$= \int_{a}^{b} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dt$$

9. Tích phân □ường không phụ thuộc tham số của cung lấy tích phân.

Giả sử cung AB có phương trình tham số r(t) = x(t) i + y(t) j + z(t) z , a≤ t ≤ b, t=a ứng với điểm A và t = b ứng với điểm B. Ngoài ra có hàm số t =φ (s) liên hệ giữa hai tham số t, s với α ≤ s ≤ β , a=φ (α), b=φ (β). Lúc đó cung AB có phương trình tham số s là : R(s) = r(φ (s)).

Vậy tích phân đường loại hai của vectơ F theo cung AB được tính bởi công thức :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \bar{F}(\bar{R})d\bar{R} = \int_{\alpha}^{\beta} \bar{F}(\bar{R}(s).\frac{d\bar{R}}{ds})ds$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \overline{F}(\overline{r}(\varphi(s)).\frac{d\overline{r}}{dt}.\frac{dt}{ds})ds$$

$$= \int_{a}^{b} \overline{F}(\overline{r}(t).\frac{d\overline{r}}{dt}dt \qquad = \int_{\overset{\frown}{AB}} \overline{F}(\overline{r}).d\overline{r}$$

điều này cho thấy tích phân đường không phụ thuộc tham số của cung lấy tích phân.

III. CÔNG THỨC GREEN

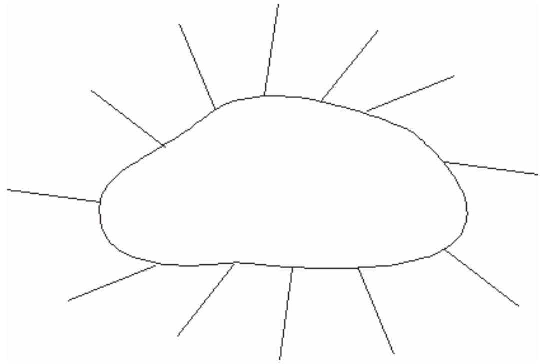
1. Định Lý Green

Cho D là miền đóng giới nội trong mặt phẳng xy và C là đường cong trơn từng khúc. Các hàm P(x,y), Q(x,y) và các đạo hàm riêng của chúng liên tục trong miền mở chứa D. Khi đó công thức Green sau:

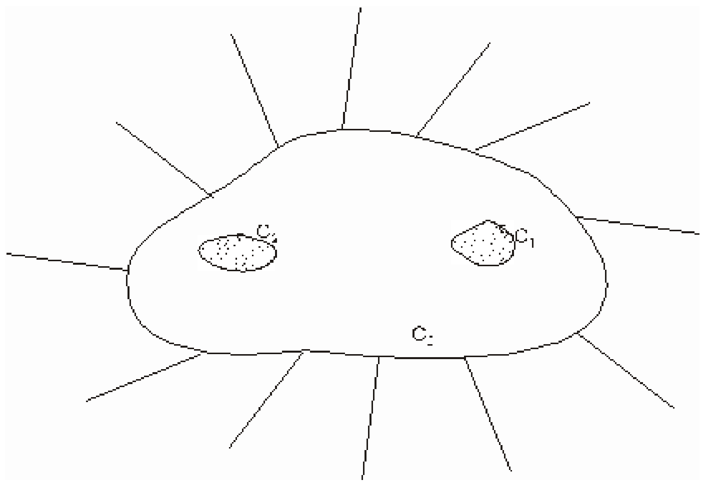
$$\int_{C} Pdx + Qdy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Trong đó : tích phân đường loại 2 ở vế trái lấy theo hướng dương

<u>Chú ý</u> : Chu tuyến C có thể bao gồm nhiều chu tuyến C1, C2, C3, …. Khi đó miền D gọi là đa liên, và mỗi miền trong chu tuyến Ci gọi là 1 thành phần liên thông. Miền D gọi là đơn liên nếu chỉ có 1 thành phần liên thông.



(hình 3.1a): đơn liên



(hình 3.1b): đa liên

Thí dụ 1: Với P(x,y) = x – y ; Q(x,y) = x. Với D là hình tròn tâm O(0,0) bán kính 1. Biên C có phương trình: x=cost, y=sint, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Khi đó:

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_D^{2\pi} [(\cos t - \sin t)(-\sin t) + \cos t.\cos t]\, dt$$
$$= \int_D^{2\pi} (1 - \cos t.\sin t)dt = 2\pi$$

và:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (1+1)\, dxdy = 2\int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\varphi = 2\pi$$

2. Ứng dụng Định Lý Green để tính diện tích phẳng

Trong công thức Green, lấy P =-y, Q= x, ta có :

$$\int_C xdy - ydx = 2\iint_D dxdy = 2S(D)$$

Vậy diện tích miền D biên C là :

$$S(D) = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$$

Thí dụ 2: Tính diện tích hình Ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$

Ta biết biên hình Ellipse là đường Ellip phương trình : x = acost, y= bsint, 0≤ t ≤ 2 π

Theo công thức Green, có :

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\cos t.b\cos t - b\sin t(-a\sin t)]dt$$
$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt = \pi ab$$

Thí dụ 3: Tính diện tích hình phẳng bằng tích phân đường trong tọa độ cực.

Ta có : x= r(φ) cos φ ; y= r(φ) sin φ

Nên : dx= dr'(φ) cos φ - r(φ) sin φ dφ ; dy= dr'(φ) sin φ - r(φ) sin φ dφ

Khi đó từ công thức Green diện tích miền D là :

$$S = \frac{1}{2}\int_C r^2 d\varphi$$

IV. ĐIỀU KIỆN ĐỂ TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI 2 KHÔNG PHỤ THUỘC ĐƯỜNG LẤY TÍCH PHÂN

Thí dụ 8 cho thấy tích phân đường loại hai $\int_{AB} pdx + Qdy$ không những phụ thuộc vào các điểm A, B mà còn phụ thuộc vào cung nối 2 điểm A,B. Định lý sau cho biết điều kiện để tích phân đường loại hai chỉ phụ thuộc vào các điểm đầu, điểm cuối và không phụ thuộc vào các cung nối 2 điểm đó.

1. Định lý 1

Cho các hàm P(x,y), Q(x,y) và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong một miền mở đơn liên D. Các mệnh đề sau là tương đương :

i) Tích phân $\int_{\overset{\frown}{AB}} p\,dx + Q\,dy$ không phụ thuộc đường trơn từng khúc nối A,B

ii) Tồn tại 1 hàm U(x,y) sao cho biểu thức P(x,y)dx + Q(x,y)dy là vi phân toàn phần của U, nghĩa l2 : dU = P(x,y)dx + Q(x,y)dy

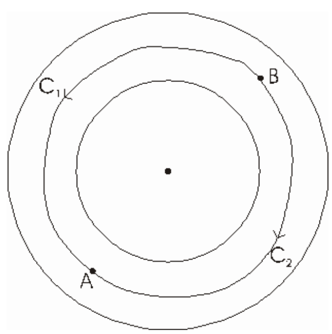
iii) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}$ trong D

vi) $\int_{\overset{\frown}{AB}} p\,dx + Q\,dy$ với mọi chu tuyến kín trơn từng khúc trong D

Lưu ý : Định lý này không thể phát triển cho miền đa liên. Thí dụ ta lấy D là miền nhị liên, hình vành khăn nằm giữa hai vòng tròn đồng tâm O, bán kính R_1, R_2. Xét tich phân :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

Lấy 2 điểm A, B và xem 2 cung nối chúng là C_1, C_2 như hình 4.1



(Hình 4.1)

Ta có C= C1 + (-C2). Trong miền D, ta có: $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ thỏa (ĐK iii) của Định lý 1

Nhưng: $2\pi = \int_C = \int_{C_1} - \int_{C_2}$

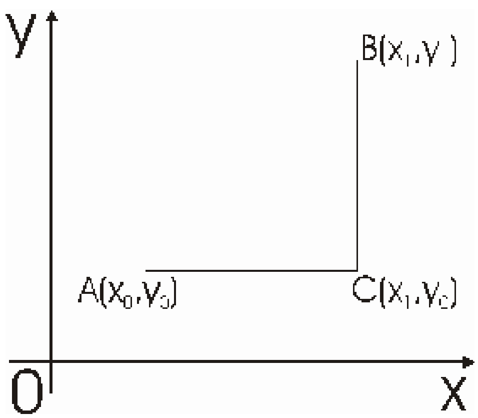
$$\Rightarrow \int_{C_1} = 2\pi + \int_{C_2}$$

Có nghĩa là tích phân phụ thuộc vào đường lấy tích phân.

2. Cách tính tích phân của □ịnh lý 1

a). Giả sử P(x,y), Q(x,y) thỏa định lý 1, vậy tích phân $\int\limits_{AB} pdx + Qdy$ chỉ phụ thuộc A, và B nên có thể viết nó dưới dạng : $\int\limits_{A}^{B} pdx + Qdy$

Giả sử $A(x_0,y_0)$ $B(x_1,y_1)$. Khi đó có thể tính tích phân đường loại 2 theo đường đơn giản nhất nối 2 điểm A,B là các đường gấp khúc song song với các trục tọa độ, thí dụ lấy $C(x_1,y_0)$ và lấy theo đường AC, CB.



(Hình 4.2)

Khi đó:

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} pdx + Qdy = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}$$
$$= \int\limits_{x_0}^{x_1} p(x,y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)\,dy$$

<u>Thí dụ 1</u>: Tính $\int\limits_{(0,1)}^{(3,4)} xdy + ydx$

Ta có P=y, Q=x ➔ $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial P}{\partial y}$ trong toàn mặt phẳng xy. Theo gợi ý trên ta có :

$$I = \int\limits_{0}^{3} 1dx + \int\limits_{1}^{4} 3dy = 12$$

-

Thí dụ 2: Tính $\int_{(1,1)}^{(3,2)} \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$

Theo đường không cắt đường thẳng x+y =0 , ta có:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{(x+y)^2}\right) = \frac{-2y}{(x+y)^3} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{(x+2y)}{(x+y)^2} = \frac{\partial p}{\partial y}$$

Vậy theo gợi ý trên ta có: $I = \int_1^3 \frac{x+2}{(x+1)^2}dx + \int_1^2 \frac{ydy}{(y+3)^2} =$

b). Nếu P, Q thoả định lý 1, và nếu tìm được hàm U thỏa dU = Pdx + Qdy thì ta có :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = U(B) - U(A)$$

Thật vậy , giả sử cung AB có phương trình : x=x(t), y=y(t), a≤ t ≤ b. Khi ấy ta có:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy = \int_a^b \left[P(x(t)), y(t))x'(t) + Q(x(t)), y(t))y'(t)\right]dt$$
$$= \int_a^b \left(\frac{dx}{dt}\right)dt = U(b) - U(a) = U(B) - U(A)$$

Thí dụ 3: Tính $I = \int_{(1,2)}^{(3,1)} xdy + ydx$

Ta nhận thấy : xdy + ydx = dxy. Vậy theo nhận xét trên ta có:

$$I = xy\Big|_{(1,2)}^{(3,1)} = 3 - 2 = 1$$

Thí dụ 4: Tính $I = \int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$

Ta có :

$$\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}d\ln(x^2+y^2) = d\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

Vậy:

$$I = \ln\sqrt{x^2+y^2}\Big|_{(3,4)}^{(5,12)} = \ln\sqrt{25+144} - \ln\sqrt{9+16} = \ln\frac{13}{5}$$

3. Tích phân đường loại 2 trong không gian

Trong không gian, tương tự định lý 1 ta có :

3.1 Định Lý 2 :

Cho các hàm P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) và các đạo hàm riêng cấp một của chúng liên tục trong một miền mở đơn liên D. Các mệnh đề sau là tương đương :

i) Tích phân $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$ không phụ thuộc đường trơn từng khúc trong D nối A,B

ii) Tồn tại 1 hàm U(x,y,z) sao cho biểu thức P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz là vi phân toàn phần của U, nghĩa là :

dU = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz

iii) Trong D ta có

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

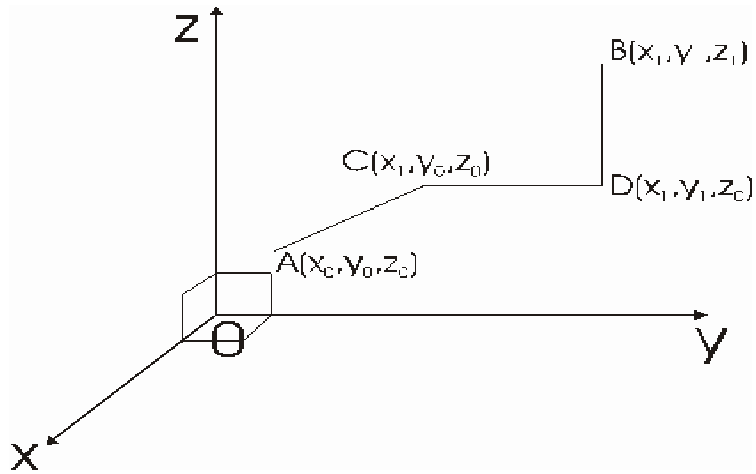
vi) $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = 0$ với mọi chu tuyến kín trơn từng khúc trong D

<u>Chú ý :</u>

Khi P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) thỏa định lý 2 và tìm được U thỏa trong điều kiện iii, thì khi đó ta có :

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = U(B) - U(A)$$

Nếu chưa biết hàm U(x,y,z) thì tích phân đường có thể tính theo các đường gấp khúc song song các trục tọa độ. Giả sử, có điểm $A(x_0,y_0,z_0)$, $B(x_1,y_1,z_1)$ thì lấy thêm 2 điểm $C(x_1,y_0,z_0)$, $D(x_1,y_1,z_0)$



(hình 4.3)

và khi đó ta có :

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)} Pdx + Qdy + Rdz$$
$$= \int_{x_0}^{x_1} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z_1} R(x_1,y_1,z)dz$$

Thí dụ 5: Tính $\int_{(0,1,2)}^{(2,4,5)} yzdx + xzdy + xydz$

Ta có : yzdx + xzdy + xydz = d(xyz)

Vậy : $I = xyz\Big|_{(0,1,2)}^{(2,4,5)} = 2.4.5 - 0.1.2 = 40$

Thí dụ 6: Tính $\int_{(0,0,0)}^{(-1,\frac{\pi}{2},2)} (e^x\cos y + yz)dx + (xz - e^x\sin y)dy + (xy + z)dz$

Ta có : các hàm P = excosy + yx, Q = yz - exsiny, R = xy+z thỏa điều kiện iii) của Định lý 2 vì:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1 = \frac{\partial p}{\partial y};\qquad \frac{\partial R}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial z},\qquad \frac{\partial P}{\partial z} = 1 = \frac{\partial R}{\partial x}$$

Như thế áp dụng định lý 2, tồn tại hàm U sao cho:

$U'_x = y$, $U'_y = x$, $U'_z = 4$

Từ $U'_x = y \rightarrow U(x,y,z) = yx + f(y,z)$

Cùng với $U'_y = x$ có : $U'_y = x + f'y = x \rightarrow f'_y = 0$

→ f không phụ thuộc vào y -> $f = h(z) \rightarrow U(x,y,z) = yz+h(z)$

→ cùng với $U'_z = 4$ → $h'(z) = 4$ → $h(z) = 4z + C$

Vậy $U(x,y,z) = yx + 4z + C$

Và nghiệm U phải thỏa : $dU = 0$

→ $yx + 4z = C'$

V. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 1

1. Định nghĩa

Cho hàm số f(x,y,z) xác định trên mặt S. Chia S thành n mặt con $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ không chồng lên nhau và diện tích tương ứng của các mặt con cũng ký hiệu là $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$. Trong mỗi mặt ΔS_i lấy một điểm $M_i(x_i, y_i, z_i)$ bất kỳ. Lập tổng tích phân:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\Delta S_i$$

Khi cho max {d(Δ Si) } -> 0 (d(Δ Si) : đường kính của mặt Δ Si), nếu tổng tích phân Sn tiến tới 1 giá trị hữu hạn không phụ thuộc cách chia mặt S và cách lấy các điểm Mi thì giới hạn đó gọi là tích phân mặt loại 1 (còn gọi là tích phân mặt theo diện tích của hàm f(x,y,z) trên mặt S) và ký hiệu :

$$\iint_S f(x,y,z)\,ds$$

Khi đó ta nói f khả tích trên S.

Mặt S được gọi là mặt trơn nếu hàm vectơ pháp tuyến $\vec{n}(x,y,z)$ liên tục và khác 0 trên S. Đã chứng minh được rằng : nếu f(x,y,z) liên tục trên mặt cong trơn S thì tích phân mặt loại 1 của f(x,y,z) trên S tồn tại.

2. Tính chất

Từ định nghĩa ta có các tính chất sau:

- Nếu f, g khả tích trên S, thì kf+g cũng khả tích trên S và :

$$\iint_S [kf(x,y,z)+g]ds = k\iint_S f(x,y,z)ds + \iint_S g ds$$

- Nếu S được thành 2 phần S= S_1+S_2 thì :

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_{S_1} f(x,y,z)ds + \iint_{S_2} f(x,y,z)ds$$

- Diện tích mặt S được tính là : $\iint_S ds = S$

3. Cách tính tích phân mặt loại 1

Giả sử mặt S có phương trình z= z(x,y), với hàm z(x,y) liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong miền mở chứa hình chiếu D của S xuống mặt phẳng xy. Ta tính gần đúng Δ Si bằng mảnh phẳng tiếp xúc tương ứng (chương 1) ta có :

$$\Delta_i S_i = \sqrt{1+z'^2_x(x_i,y_i,z_i)+z'^2_y(x_i,y_i,z_i)}\,\Delta D_i$$

Trong đó Δ Di là diện t ích hình chiếu của Δ Si xuống mặt phẳng xy. Như vậy ta có tổng tích phân mặt loại 1 là :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z(x_i,y_i))\sqrt{1+z'^2_x(x_i,y_i,z_i)+z'^2_y(x_i,y_i,z_i)}\,\Delta D_i$$

Vế phải là tổng tích phân kép, khi qua giới hạn ta có:

$$S = \iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,dxdy$$

Như vậy tích phân mặt loại 1 được biểu diễn ở dạng tích phân kép trên hình chiếu. Khi lấy f =1 ta lại có công thức tính diện tích mặt cong ở chương 1

<u>Thí dụ 1</u>: Tính $I = \iint_S (x^2+y^2)ds$ S là mặt biên vật thể Ω : $x^2+y^2 \le z \le 1$

Vật thể Ω là hình nón, nên S bao gồm 2 mặt S = S1 + S2, trong đó S1 = mặt nón , S2 : mặt đáy của hình nón, tuy nhiên S1, S2 cùng có hình chiếu là mặt tròn : $x^2 + y^2 \le 1$. Vì thế ta có :

$$I = \iint_S (x^2+y^2)ds = \iint_{S1} (x^2+y^2)ds + \iint_{S2} (x^2+y^2)ds$$

Với mặt nón S1 : z = $\sqrt{x^2+y^2}$

$\rightarrow \quad ds = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy$

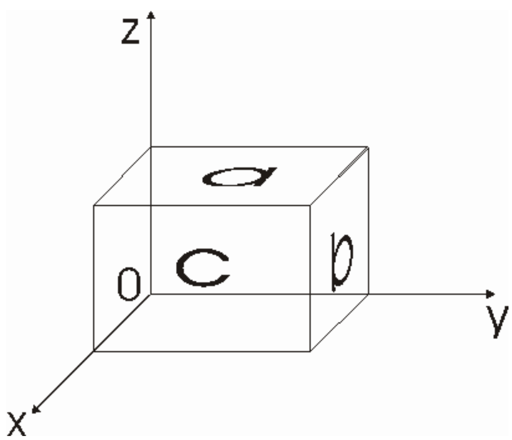
$\rightarrow \quad \iint_{S1} (x^2 + y^2) ds = \sqrt{2} \iint_{D} (x^2 + y^2) dxdy = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{2}$

Với mặt đáy S2 : z = 1, ds = dxdy, cho nên

$$\iint_{S2} (x^2 + y^2) ds = \iint_{D} (x^2 + y^2) dxdy = \frac{\pi}{2}$$

Vậy: I = $\frac{\pi}{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)$

Thí dụ 2: Tính $I = \iint_S xyzs$ S là các mặt hình lập phương:0≤ x ≤ 1, 0≤ y ≤ 1, 0≤ z ≤ 1



(Hình 5.1)

Do S là 6 mặt của hình lập phương, nhưng xyz =0 trên 3 mặt nằm trên 3 mặt phẳng tọa độ (xy, xz, yz), nên ta chỉ cần tích phân trên các mặt a), b), c) trên (hình 5.1) :

$$\iint_S xyzds = \iint_a xyzds + \iint_b xyzds + \iint_c xyzds$$

Mặt a) : z=1, D: hình vuông : 0≤ x,y ≤ 1 trong mặt xy, nên :

$$\iint_a xyzds = \iint_D xydxdy = \int_0^1\int_0^1 xydxdy = \frac{1}{4}$$

Tương tự ta có : $\iint_b = \iint_c = \frac{1}{4}$

Vậy I = $\frac{1}{4}$

4. Ứng dụng của tích phân mặt loại 1

Cho mặt S có khối lượng riêng theo diện tích là δ (x,y,z) tại điểm (x,y,z). Khi đó :

Khối lượng của mặt S là : $M = \iint_S \delta(x,y,z)\,ds$

Moment tĩnh đối với các mặt tọa độ của mặt S là:

$$M_{yz} = \iint_S x\delta(x,y,z)\,ds$$
$$M_{xz} = \iint_S y\delta(x,y,z)\,ds$$
$$M_{xy} = \iint_S z\delta(x,y,z)\,ds$$

Tâm khối lượng của mặt S là điểm có tọa độ :

$$\bar{x} = \frac{M_{yx}}{M}$$
$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}$$
$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

Moment quán tính đối với trục Ox, Oy, Oz , với góc O và đường thẳng Δ là :

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\delta(x,y,z)\,ds$$
$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\delta(x,y,z)\,ds$$
$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\delta(x,y,z)\,ds$$
$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\delta(x,y,z)\,ds$$
$$I_\Delta = \iint_S r^2(x,y,z)\delta(x,y,z)\,ds$$

Trong đó r(x,y,z) là khoảng cách từ điểm M(x,y,z) tới đường thẳng Δ .

Thí dụ 3: Tìm trọng tâm của nửa mặt cầu tâm O(0.0,0) bán kính a, với khối lượng riêng δ = hằng số.

$$I_x = \iint_S (y^2 + z^2)\delta(x,y,z)ds$$

$$I_y = \iint_S (x^2 + z^2)\delta(x,y,z)ds$$

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\delta(x,y,z)ds$$

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\delta(x,y,z)ds$$

$$I_\Delta = \iint_S r^2(x,y,z)\delta(x,y,z)ds$$

Gọi M(x,y,z) là trọng tâm của nửa mặt cầu tâm O(0.0,0) bán kính a. Khi đó có phương trình mặt cầu là S : x2 + y2 + z2 = a2, z ≥ 0. Do tính đối xứng nên x = 0, y =0. ta chỉ cần tính z theo công thức

$$\bar{z} = \frac{Mxy}{M} = \frac{\iint_S z\delta ds}{\iint_S \delta ds} = \frac{\delta \iint_S zds}{\delta S}$$

S là diện tích nửa mặt cầu bán kính a: S=2π a^2, và D là hình tròn bán kính a, hình chiếu của mặt cầu trên mặt phẳng xy

$$ds = \sqrt{1 + z'x^2 + z'y^2}\,dxdy = \frac{a}{z}dxdy$$

$$\Rightarrow \iint_S zds = \iint_S z.\frac{a}{z}dxdy = a\iint_D dxdy = a.S_D$$

$$= a.\pi a^2$$

$$= \pi a^3$$

$$\Rightarrow \bar{z} = \frac{\pi a^3}{2\pi a^2} = \frac{a}{2}$$

→ Trọng tâm có tọa độ: ($0,0,\frac{a}{2})$

VI. TÍCH PHÂN MẶT LOẠI 2

1. Định nghĩa mặt ịnh hướng

Xem mặt cong S là tập hợp các điểm M(x,y,z) thỏa phương trình : F(x,y,z) =0

Mặt S gọi là mặt trơn khi và chỉ khi hàm F(x,y,z) có các đạo hàm riêng F'_x, F'_y, F'_z liên tục và không đồng thời bằng không, hay nói khác là vectơ Gradien ∇ F(x,y,z) = (F'_x, F'_y, F'_z) liên tục và khác 0 trên mặt S.

Trong trường hợp mặt S có phương trình tham số :

$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$

Xét vectơ : $r = r(u,v) = x(u,v)\, i + y(u,v)\, j + z(u,v)\, k$

Khi đó mặt S gọi là trơn nếu hàm $r(u,v)$ khả vi liên tục (tức là tồn tại các đạo hàm riêng r'_u, r'_v liên tục) và tích $r'_u \wedge r'_v \neq 0$

Để ý rằng mặt cong S thường cho bởi phương trình: $z= f(x,y)$

Đây là trường hợp riêng của dạng $F(x,y,z) = f(x,y) – z = 0$ có $\nabla F(x,y,z) = (f'_x, f'_y, -1)$

Hoặc cũng có thể xem là trường hợp riêng của phương trình tham số :

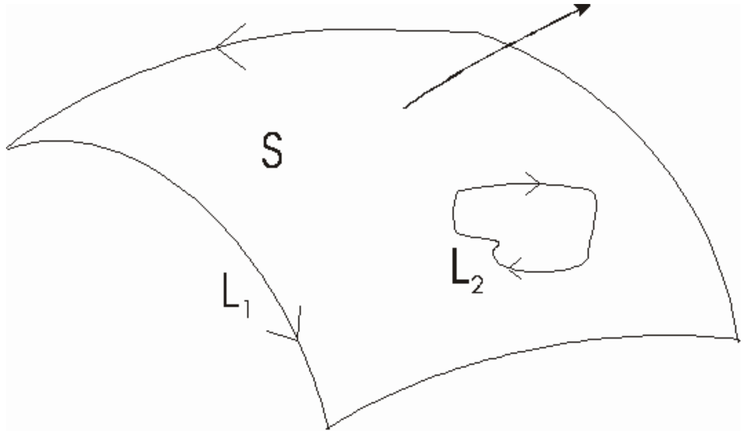
$x= x$, $y=y$, $z= f(x,y)$ có $r'_x = (1,0,f'_x)$, $r'_y = (0,1,f'_y)$ và $r'_x \wedge r'_y = (-f'_x, -f'_y , 1)$

Và khi đó mặt S là mặt trơn khi và chỉ khi các đạo hàm riêng f’x, f’y liên tục (vì các vectơ $\nabla F(x,y,z)$, $r'_x \wedge r'_y$ luôn khác 0)

Mặt trơn S gọi là mặt định hướng được hay là mặt hai phía, nếu tại mỗi điểm M của S xác định được một vectơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}(M)$, và hàm vectơ $\vec{n}(M)$ là liên tục trên S. Lưu ý rằng vectơ pháp tuyến đơn vị có thể là $\vec{n}(M)$, $-\vec{n}(M)$, vì thế khi đã chọn 1 vectơ xác định, thí dụ chọn $\vec{n}(M)$ thì ta nói đã định hướng mặt S. Mặt S với vectơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}(M)$ đã chọn được gọi là mặt định hướng, và $\vec{n}(M)$ gọi là vectơ pháp tuyến dương. Ứng với $\vec{n}(M)$ đã chọn, ta có phía dương tương ứng của mặt S là phía mà khi đứng ở đó , vectơ $\vec{n}(M)$ hướng từ chân tới đầu. Phía ngược lại gọi là phía âm.

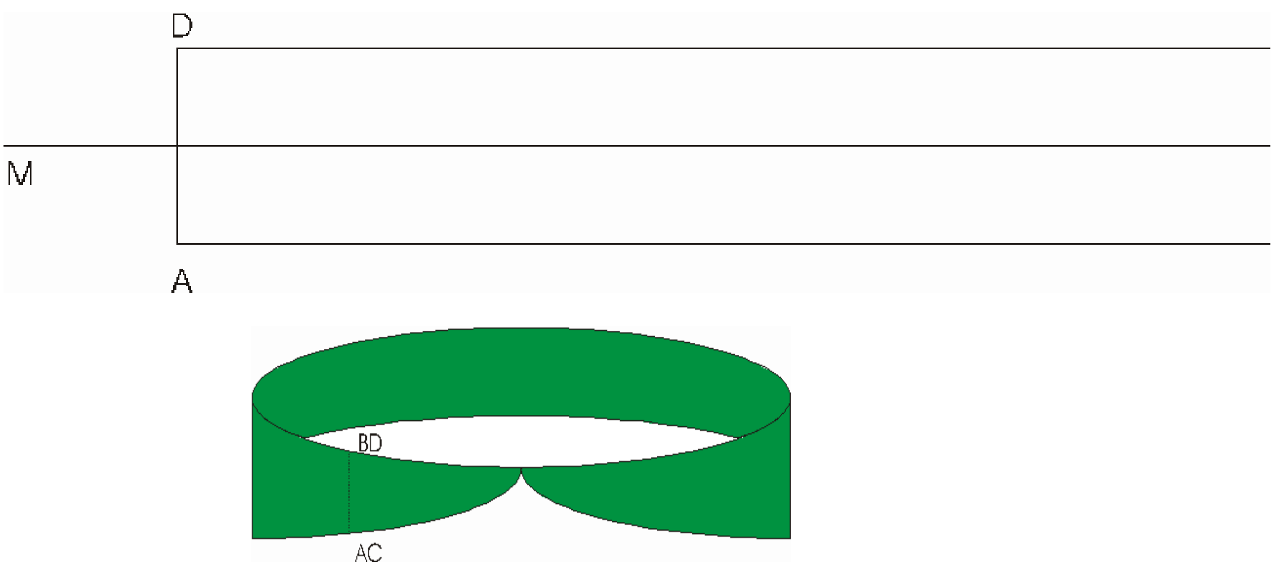
Như vậy một mặt định hướng là mặt trơn đã xác định trường vectơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}(M)$, và nó luôn có 2 phía. Khi không nói rõ thì hiểu là đề cập tới phía dương của mặt. Khi mặt S không kín, để nói đến hướng đã chọn của mặt ta sẽ nói phía trên (hướng dương) và phía dưới (hướng âm). Khi mặt S kín, để nói đến hướng đã chọn của mặt ta sẽ nói phía trong (hướng dương) và phía ngoài (hướng âm).

Một mặt S định hướng thì cũng xác định được luôn hướng các đường cong biên của nó. Đó là hướng mà khi ta đướng ở phía dương của mặt và đi theo đường cong thì S luôn ở bên trái. Hình 6.1 cho thấy mặt S định hướng có hai đường biên L1, L2 với hướng được xác định.



(Hình 6.1)

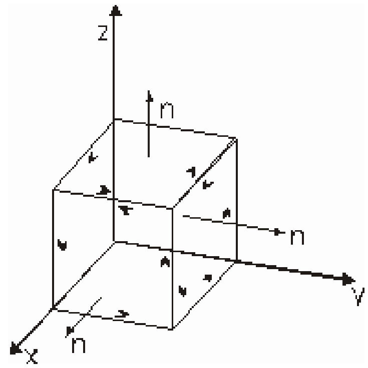
Cũng lưu ý có những mặt không thể định hướng được, thí dụ lá Mobius. Lá Mobius có thể tạo ra bằng cách lấy một hình chữ nhật ABCD (bằng giấy) sau đó vặn cong hình chữ nhật để 2 cạnh AD giáp với cạnh CB (A giáp C, D giáp B). Khi đó nếu lấy 1 vectơ pháp tuyến n(M) tại 1 điểm M trên mặt lá và cho nó di chuyển theo lá, không qua biên, đi một vòng và quay về điểm M ban đầu thì $\vec{n}(M)$ có hướng ngược với lúc bắt đầu di chuyển. Với mặt định hướng thì tại 1 điểm không thể có 2 vectơ pháp tuyến ngược hướng. Vì thế lá Mobius không thể là mặt định hướng mà chỉ là mặt một phía.



(Hình 6.2)

Ta có thể mở rộng khái niệm mặt định hướng ra trường hợp S trơn từng khúc.

Mặt trơn từng khúc gọi là mặt định hướng được nếu cứ 2 thành phần trơn của S nối với nhau dọc đường biên C thì đề có định hướng biên C ngược nhau. Khi đó các vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ ở hai thành phần liên nhau sẽ chỉ cùng về 1 phía của mặt S. Thí dụ hình lập phương gồm 6 mặt trơn nối theo các cạnh. Mặt được định hướng dướng là mặt ngoài nếu n và các cạnh định hướng theo từng mặt



(Hình 6.3)

2. Định nghĩa tích phân mặt loại 2

Cho các hàm P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) xác định trên mặt định hướng S có vectơ pháp tuyến đơn vị $\vec{n}$ (cos α , cosβ , cos γ).

Tích phân mặt loại 1

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

được gọi là tích phân mặt loại 2 của các hàm P,Q,R trên mặt định hướng S. Tích phân trên được ký hiệu :

$$\iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

3. Cách tính tích phân mặt loại 2: ưa về tích phân kép

Giả sử cần tính tích phân $\iint_S Rdxdy = \iint_S R\cos\gamma ds$ (1)

Trong đó S là mặt cong có phương trình z=z(x,y) (trơn hoặc trơn từng khúc) với vectơ pháp tuyến định hướng phía trên (phía trên mặt cong tạo với hướng dương trục Oz 1 góc nhọn)

Do vế phải của (1) là giới hạn của tổng tích phân mặt loại 1

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \cos\gamma_i . \Delta S_i \quad (2)$$

Ta cũng biết (chương 1) $\cos\gamma_i . \Delta S_i \approx \Delta D_i$ (3)

Với Δ Si : diện tích mảnh cong Δ Si , Δ Di là diện tích hình chiếu mảnh cong Δ Si xuống mặt phẳng xy, thì vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ tạo với trục Oz góc nhọn nên $\cos\gamma_i > 0$ và Δ Di lấy dấu dương. Thay (3) vào (2) và qua giới hạn ta được:

$$\iint_D R dxdy = +\iint_D R(x, y, z(x, y))\, dxdy$$

Trong đó D là hình chiếu của S xuống mặt phẳng xy.

Nếu đổi hướng mặt S tức $\cos\gamma_i < 0$ và Δ Di lấy dấu âm thì :

$$\iint_D R dxdy = -\iint_D R(x, y, z(x, y))\, dxdy$$

Tương tự ta có:

$$\iint_S P dydz = \pm\iint_{D_1} P(x(y,z), y, z) dydz$$

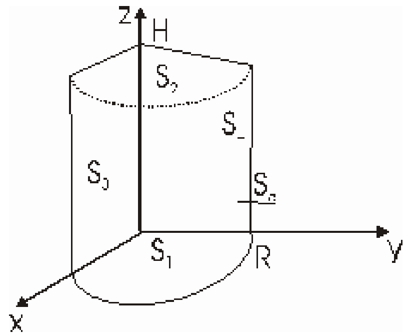
$$\iint_S P dydz = \pm\iint_{D_2} Q(x, y(x,z), z) dxdz$$

Trong đó D_1, D_2 là các hình chiếu của S xuống các mặt phẳng yz, xz tương ứng, chọn dấu + hay dấu – tùy theo góc α và β là góc nhọn hay góc tù.

<u>Lưu ý:</u> Từ công thức (2) thấy rằng nếu mặt S là 1 phần mặt trụ có các đường sinh song song trục Oz thì do $\cos\gamma_i = 0$, dẫn tới

$$\iint_S R dxdy = 0$$

<u>Thí dụ 1</u>: Tính $\iint_S yzdxdy = 0$ với S : mặt phía ngoài giới hạn vật thể $x^2 + y^2 \le R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le b$



(Hình 6.4)

Mặt S được hia thành 5 mặt : hai đáy S1, S2 , hai mặt bên S3,S4 nằm trong các mặt phẳng xz (y=0) , yz (x=0) tương ứng và mặt trụ cong S5

Ta có : $I = \iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} + \iint_{S_4} + \iint_{S_5}$

Ba tích phân cuối cùng = 0 vì là các mặt trụ có đường sinh song song trục Oz.

Trên mặt S_1 , do z= 0, nên : $\iint_{S_1} = 0$

Trên mặt S_2 , do z=h, nên :

$$\iint_{S_2} yzdxdy = h \iint_{\substack{x^2+y^2 \\ x,y>0}} ydxdy = h\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi \int_0^h r^2 dr = \frac{hR^2}{3}$$

Vậy I = $\frac{hR^2}{3}$

-

<u>Thí dụ 2</u>: Tính $\iint_S x^2 dydz + y^2 dxdy + z^2 dxdy$ với S : mặt phía ngoài của nửa mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$

Ta có :

$$I_3 = \iint_S z^2 dx\,dy = \iint_{x^2+y^2\le R} (R^2 - x^2 - y^2) dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi a^4}{2}$$

$$I_2 = \iint_S y^2 dx\,dz = \iint_{S_1} y^2 dx\,dz + \iint_{S_2} y^2 dx\,dz$$

Trong đó : $S = S_1 + S_2$ và S_1 là phần ứng với $y \ge 0$, S_2 là phần ứng với $y \le 0$. Lưu ý rằng khi chuyển về tích phân kép theo nửa hình tròn trong mặt phẳng xz thì tích phân :

$\iint_{S_1} y^2 dx\,dz$ lấy dấu dương, và $\iint_{S_2} y^2 dx\,dz$ lấy dấu âm, hàm dưới dấu tích phân lại là hàm chẵn nên $\iint_{S_1} y^2 dx\,dz = -\iint_{S_2} y^2 dxdz \Rightarrow I_2 = 0$

Tương tự ta có : $I_2 = \iint_S x^2 dy\,dz$

Vậy I = $\frac{\pi a^2}{2}$

-

<u>Thí dụ 3</u>: Tính $I = \iint_S z\,dx\,dy$ với S : mặt phía ngoài của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Gọi S_1 , S_2 là các nửa mặt cầu ứng với $z \ge 0$ và $z \le 0$.

Trên S_1 ta có:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$
$$I_1 = \iint_1 zdxdy = \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$$
$$D : x^2 + y^2 \le R^2$$

Trên S_2 ta có : $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ và khi đưa về tích phân kép thì lấy dấu âm (do vectơ pháp tuyến hướng xuống dưới), nên :

$$I_2 = \iint_{S_2} z\,dxdy = -\iint_D \left(-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right) dxdy$$
$$= \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\; dxdy$$

Vậy: $$I = 2\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\; dxdy = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\sqrt{R^2 - r^2}\,dr = \frac{4}{3}\pi a^3$$

VII. LIÊN HỆ GIỮA TÍCH PHÂN KÉP VÀ TÍCH PHÂN ĐƯỜNG LOẠI HAI: ĐỊNH LÝ STOKES

Công thức Green cho ta mối liên hệ giữa tích phân kép và tích phân đường loại hai trên đường biên của miền lấy tích phân. Công thức Stokes dưới đây là sự mở rộng công thức Green cho trường hợp miền là mặt cong trong không gian.

1. Định lý Stokes

Cho mặt định hướng S trơn từng khúc với biên là chu tuyến C trơn từng khúc và không tự cắt (chu tuyến đơn giản). Giả sử P, Q, R là các hàm có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong một miền mở chứa S. Khi đó ta có:

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$
$$= \int_C P dx + Q dy + R dz$$

Trong đó hướng của chu tuyến C được lấy theo hướng dương ứng với mặt định hướng S.

<u>**Chú ý**</u>**:** Công thức Stokes thường dùng ở dạng liên hệ giữa tích phân đường loại hai và tích phân mặt loại một.

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = \xi$$
$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right] ds$$

với $\vec{n} = (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$: vectơ pháp tuyến đơn vị ứng với giá của mặt cong S

2. Thí dụ

Tính tích phân $I = \int_C ydx + zdy + xdz$ với C là đường tròn mặt cầu : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ và mặt phẳng x + y + z = 0 theo hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ hướng dương của trục Ox

Gọi S là hình tròn với biên là đường tròn C. Theo định lý Stokes ta có :

$$I = -\iint_S dydz + dzdx + dxdy = -\iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)ds$$

cos α , cosβ , cos γ : là các cosin chỉ hướng của vectơ pháp tuyến n của mặt phẳng x + y + z = 0. Ta có : $\overline{n} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$

Vậy I = $-\sqrt{3}\iint_S ds = -\sqrt{3}\pi R^2$

VIII. CÔNG THỨC CHUYỂN TÍCH PHÂN BỘI BA VỀ TÍCH PHÂN MẶT THEO BIÊN : ĐỊNH LÝ GAUSS – OSTROGRATSKI

Định lý sau đây cho ta công thức chuyển tích phân bội ba về tích phân mặt theo mặt biên. Công thức này có nhiều ứng dụng trong thực tiễn tính toán.

1. Định lý Gauss – Ostrogratski

Cho Ω là miền đóng, bị chặn trong không gian, với biên là mặt S trơn từng khúc (S có thể chia thành hữu hạn mặt trơn). Cho P,Q,R có các đạo hàm riêng cấp một liên tục trong miền mở chứa Ω . Khi đó ta có công thức Gauss-Ostrogratski:

$$\iint_S Pdydz + Qdxdy + Rdxdy = \iiint\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

Lưu ý: Nhờ công thức Gauss – Ostrogratski, ta có thể tính thể tính bằng cách tính tích phân mặt nếu lấy P = x, Q = y, R =z. Khi đó công thức trên trở thành :

$$\iiint_\Omega 3dxdydz = \iint_S zdydz + ydxdz + zdxdy$$

Vậy : $\Rightarrow\ v(\Omega) = \frac{1}{3}\iint_S zdydz + ydxdz + zdxdy$

Với S là mặt bên của Ω lấy theo phía ngoài

2. Thí dụ

Tính tích phân $I = \iint_S x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy$ Trong đó S là phía ngoài mặt cầu : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Theo định lý Gauss – Ostrogratski, ta có :

$$I = 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

Chuyển qua tọa độ cầu, ta được :

$$I = 3\int_0^{\pi} \sin d \int_0^{2\pi} d\varphi \, . \int_0^{R} S^4 dS = \frac{12}{5}\pi R^5$$

BÀI TẬP CHƯƠNG 3

I. Tích phân □ường loại 1

Tính các tích phân đường loại1:

1) $\int_C xydl$ $\quad C: \frac{1}{4}$ elip $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ở góc I

2) $\int_C (x - y) dl$ $\quad C: x^2 + y^2 = 2ax$

3) $\int_C ydl$ C : cung của $y^2 = 2x$ nối (0,0) và $(1, \sqrt{2})$

4) $\int_C (x + y) dl,$ $\quad C: \overline{r} = t\overline{i} + (1 - t)\overline{t}, \quad 0 \le t \le 1$

5) $\int_{AB} (x - y + z - 2) dl,$ $\quad \widehat{AB}: \bar{r} = t\bar{i} + (1 - t)\bar{j} + \bar{k}, \quad 0 \le t \le 1$

6) Tính tích phân đường của f(x,y,z) = x+$\sqrt{y}$ -z^2 theo cung nối 2 điểm (0,0,0) và (1,1,1) theo các đường sau:

a) $C_1: \bar{r} = t\bar{k}, \quad 0 \le t \le 1$

b) $C_2: \bar{r} = t\bar{j} + \bar{k}, \quad 0 \le t \le 1$

c) $C_2: \overline{r} = t\overline{i} + \overline{j} + \overline{k}, \quad 0 \le t \le 1$

7) Tính : $\int_C \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, $C:\ t\vec{i}+t\vec{j}+t\vec{k},\ 1\le t\le\infty$

8) Cho $C: \vec{r} = (t^2-1)\vec{j}+2t\vec{k},\ 0\le t\le 1,\ \varphi = \frac{3}{2}t$ Hãy tính khối lượng cung C

9) Cho cung $C: \vec{r} = (t^2-1)\vec{j}+2t\vec{k}\quad -1\le t\le 1,\qquad \varphi = 15\sqrt{y+2}$

Tìmtrọng tâm.

10) Cho $C: \vec{r} = \sqrt{2}\,t\,\vec{i}+\sqrt{2}\,t\,\vec{j}+(4-t^2)\vec{k},\ 0\le t\le 1,\qquad \varphi = 3t$

Tìmtrọng tâm

11) Cho C: $x^2+y^2 = a^2$ trong mặt phẳng xy, φ = const. Tìm mômen quán tính đối với Oz

12) Cho $C: \vec{r} = t\vec{j}+(2-2t)\vec{k},\quad 0\le t\le 1,$ trong mặt phẳng yz, φ = const. Tìm mômen quán tính đối với các trục tọa độ.

13) Tìm độ dài cung : x = aet cos t , y = aet sint, z = aet từ A(0,0,0) đến B(a,0,a)

(Hướng dẫn: A ứng với $t_1 = -\infty$, B với $t_2 = 0$)

14) Tìm trọng tâm của cung x = a(t-sint), y = a(1-cost) $0 \le t \le \pi$, φ = const

II. Tích phân đường loại 2

Tính các tích phân đường loại 2 sau đây:

1) $\int_{\overset{\frown}{AB}} (x^2+y^2)dx + xydy,$ theo đường thẳng nối A(1,1) đến B(3,4)

2) $\int_{\gamma} (x-y)^2dx + (x+y)^2dy,$ γ : đường gấp khúc nối O(0,0), A(2,0), B(4,2).

3) $\int_\gamma ydz - (y + x^2)dy$, γ – phần parabol $y = 2x - x^2$ nằm trên trục Ox và theo chiều kim đồng hồ

4) $\int_\gamma x^2ydx + x^2dy$, γ : Chu tuyến giới hạn bởi $y^2 = x$, $x^2 = y$, Theo chiều ngược chiều kim đồng hồ

5) $\int_\gamma (x+y)dx - (x^2+y^2)dy$, γ : cung nối A(1,0) và B(-1,0) theo các đường sau:

- Nửa trên vòng tròn $x^2 + y^2 = 1$
- Đường thẳng nối A,B
- Đường gấp khúc từ A, qua C(0,-1) đến B

6) $\int_\gamma xydx + ydy - yzdz$, $\gamma: \vec{r} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t\vec{k},\ 0 \le t \le 1$

7) $\int_\gamma 6zdx + y^2dy + 12xdz$, $\gamma: \vec{r} = (\sin t)\vec{i} + (\cos t)\vec{j} + \left(\frac{t}{6}\right)\vec{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

8) $\int_\gamma xydx + ydy - yzdz$, γ : giao của $y = x^2$ và $z = x$ từ điểm (0,0,0) đến (1,1,1)

9) $\int_\gamma \frac{dy}{x} - \frac{dx}{y}$, γ – cung của vòng tròn tâm O, bán kính r nằm ở góc I, ngược chiều kim đồng hồ.

III. Tính công sinh ra bởi lực $\overline{F}$ dọc theo đường γ có phương trình $\overline{r} = \overline{r}(t)$

1) $\overline{F} = -y\,\overline{i} + x\,\overline{j} + 2\,\overline{k}$

$\overline{r} = (\cos t)\,\overline{i} + (\sin t)\,\overline{k}$

2) $\overline{F} = x^2\,\overline{i} + yz\,\overline{j} + y^2\,\overline{k}$

$\overline{r} = 3t\,\overline{j} + 4t\,\overline{k}$

3) $\overline{F} = -y\,\overline{i} + x\,\overline{j} + 2\,\overline{k}$

$\overline{r} = (-2\cos t)\,\overline{i} + (2\sin t)\,\overline{j} + 2t\,\overline{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

4) $\overline{F} = x\overline{i} + y\overline{j}$, $\overline{r} = (\cos t)\overline{i} + (4\sin t)\overline{j}$, $0 \le t \le 2\pi$

IV. Công thức Green

Tính các tích phân

1) $\int_C y^2dx + x^2dy$, C : là biên tam giác xác định bởi x = 0, y = 0, x + y = 1

2) $\int_C (6y + x)dx + (y + 2x)dy$, $C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

3) $\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$, $C: x^2 + y^2 = R^2$

4) $\int_C \frac{dx - dy}{x+y}$, C: là biên tứ giác với 4 đỉnh A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,1)

5) $\int_C 2x(y-1)dx + x^2dy$, C: biên miền giới hạn $y = x^2$ và y= 9

6) Cho f(x,y) có các đạo hàm riêng liên tục và : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Chứng minh $\int_C \frac{\partial f}{\partial y}dx - \frac{\partial f}{\partial x}dy = 0$ với mọi chu tuyến C sử dụng được công thức Green

V. Ứng dụng Công thức Green tính diện tích miền phẳng

1) $D: 0 \le y \le 1 - x^2$

2) D giới hạn bởi y = x , $y = x^2$ ở góc I

3) D: giới hạn bởi y = x, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{x}{4}$

4) Cho S là diện tích miền D, $\overline{x}$ là hoành độ trọng tâm miền D giới hạn bởi đường cong đơn giản trơn từng khúc C. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2}\int_C x^2dy = -\int_C xydx = \frac{1}{3}\int_C x^2dy - xydx = S\overline{x}$$

5) Cho Iy – mômen quán tính đối với trục Oy của miền D trong bài 4. Chứng minh:

$$\frac{1}{3}\int_C x^3dy = -\int_C x^2ydx = \frac{1}{4}\int_C x^3dy - x^2ydx = I_y$$

VI. Tích phân không phụ thuộc đường lấy tích phân

Tính các tích phân đường loại 2 sau đây :

1) $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(1,2)} 3x^2dx + \frac{2}{y}dy$

2) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(3,3)} 2xdx - y^2dy$

3) $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xydx + (x^2 - z^2)dy - 2yzdz$

4) $\displaystyle\int_{(0,2,1)}^{(1,\frac{\pi}{2},3)} 2\cos ydx + (\frac{1}{y} - 2x\sin y)dy + \frac{1}{z}dz$

5) $\displaystyle\int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x\ln y - yz)dx + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)dy - xydz$

6) $\displaystyle\int_C x^2dx + yzdy + \frac{y^2}{2}dz$

Tính dọc theo đoạn thẳng nối (0,0,0) và (0,3,4)

7) $\displaystyle\int_{(0,0,1)}^{(1,\frac{\pi}{4},2)} 2xyz^2dx + (x^2z^2 + z\cos yz)dy + (2x^2yz + y\cos yz)dz$

8) Kiểm tra các biểu thức sau có phải là vi phân toàn phần ? Nếu đúng là vi phân toàn phần của hàm U thì hãy tìm U

a) $ye^{z}dy + ze^{y}dz$

b) $4x^{3}ydx + x^{4}dy$

c) $e^{xyz}(yzdx + xzdy + xydz)$

d) $\frac{y}{z}dx + \frac{x}{z}dy - \frac{xy}{z^{2}}dz$

e) $x^{-2}(y+z)dx - x^{-1}(dy+dz)$

f) $2xydx + (x^{2} - 2yz)dy - y^{2}dz$

g) $\sin zdy - y\cos zdx$

VII. Tích phân mặt loại 1

1) Tính diện tích mặt parabôlôit $x^2 + y^2 - z = 0$ cắt bởi $z = 2$

2) Tính diện tích phần mặt phẳng $x + 2y + 2z = 5$ cắt bởi $x = y^2$ và $x = 2 - y^2$

3) Tính diện tích phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ cắt bởi nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

4) Tính diện tích phần mặt parabôlôit $x^2 + y + x^2 = t$ cắt bởi mặt phẳng $y = 0$

5) Tính $\iint_S (x + y + z)ds$, S : mặt biên của lập phương $0 \le x,y,z \le a$

6) Tính $\iint_S xyzds$, S : mặt biên của hình hộp: $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$

7) Tính $\iint_S (x + y + z)ds$, S : phần mặt phẳng $2x+2y+z = 2$ nằm ở góc phần tám thứ nhất

8) Tính $\iint_S x\sqrt{y^2 + 1}ds$, S : phần mặt parabôlôit $y^2 + 4z = 16$ cắt bởi mặt phẳng $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$

9) Tìm trọng tâm của mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ nằm ở góc I

10) Tìm trọng tâm của phần mặt $y^2 + z^2 = 9$, $z \ge 0$ cắt bởi $x = 0$, $x = 3$

11) Tìm trọng tâm và mômen quán tính đối với trục Oz của mặt $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ cắt bởi $z = 1$, $z = 2$

12) Tìm mômen quán tính Iz của mặt: $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$, $z \ge 0$ cắt bởi $x^2 + y^2 = 2x$

VIII. Tích phân mặt loại 2

1) Tính $\iint\limits_S z\,dxdy$, S : mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ở góc phần tư thứ I (phía ngoài)

2) Tính $\iint\limits_S ydydz - xdxdz + dxdy$, S : giống bài 1

3) Tính $\iint\limits_S zxdydz + 7ydxdz + z^2dxdy$, S:giống bài 1

4) Tính $\iint\limits_S z^2dydz + dxdz - 3zdxdy$, S : phần mặt $z = 4 - y^2$ giới hạn bởi $x = 0, x = 1, z = 0$ (phía trong)

5) Tính $\iint\limits_S 2xydydz + 2yzdxdz + 2xzdxdy$, S : mặt ngoài hình lập phương cho bởi $0 \leq x, y, z \leq a$.

6) Tính $\iint\limits_{S_1} xzdydz + yzdxdz + dxdy$, S : phía ngoài của mặt chỏm cầu $x^2+y^2+z^2 \leq 25$ cắt bởi $z = 3$. (phần $z \geq 3$)

IX. Định lý Stokes

1) Tính $\int\limits_C x^2y^3dx + dy + zdz$, C: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ Nhìn từ gốc C theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

2) Tính $\int\limits_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$,

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Nhìn từ hướng dương trục Ox ngược chiều kim đồng hồ

3) Tính $\int\limits_C (x+z)dx + (x-y)dy + xdz$,

C: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \ z = 0$

Nhìn từ hướng dương trục Oz ngược chiều kim đồng hồ.

4) Tính $\int_C y^2dx + x^2dz,$ C : đường biên của tam giác với các đỉnh (1,0,0), (0,1,0),(0,0,1) – nhìn từ gốc 0 ngược chiều kim đồng hồ.

5) Tính $\int_C zdx + xdy + ydz,$ C : như bài 4

6) Tính $\int_C -3ydx + 3dy + zdz,$ C : $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ Nhìn từ gốc O ngược chiều kim đồng hồ.

7) Tính $\int_C 4zdx - 2xdy + 2xdz,$ C: $x^2 + y^2 = 1$, $z = y+1$ nhìn từ gốc O ngược chiều kim đồng hồ

8) Tính $\int_C 2ydx + zdy + 3ydz,$ $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$, $z = x - 3$ nhìn từ gốc O ngược chiều kim đồng hồ

9) Tính $\int_C (x + y)dx + (2x - z)dy + ydz,$ C : biên của tam giác với các đỉnh (2,0,0), (0,3,0), (0,0,6) nhìn từ gốc O ngược chiều kim đồng hồ.

10) Tính $\int_C x^2dx + y^2dy + z^2dz,$ C: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z = y^2$ nhìn từ gốc O ngược chiều kim đồng hồ.

11) Tính $\int_C ydx + zxdy + xydz,$ C: $x^2 + y^2 = 1$, $z = y^2$ Nhìn từ gốc O ngược chiều kim đồng hồ.

X. Công thức Gauss – Ostrogratski

Tính các tích phân mặt loại 2 sau:

1) $\int\int_S (y - x)dydz + (z - y)dxdz + (y - x)dydx,$ S : phía ngoài mặt biên hình lập phương $-1 \le x, y, z \le 1$

2) $\int\int_S ydydz + xydxdz - zdxdy,$ S : Phía ngoài của mặt biên của Ω : $x^2 + y^2 \le 4$, $0 \le z \le x^2 + y^2$

3) $\int\int_S x^2dydz - 2xydxdz + 3xzdxdy$, S : phần mặt cầu tâm O, bán kính 2, ở góc I, phía ngoài.

4) $\int\int_S (6x^2 + 2xy)dydz + (2y + x^2z)dxdz + 4x^2y^3dxdy,$ S - biên của miền Ω nằm ở góc I giới hạn bởi $x^2+y^2 = 4$, $z = 3$, phía ngoài.

5) $\int\int_S \frac{x}{\rho}dydz + \frac{y}{\rho}dxdz + \frac{z}{\rho}dxdy, \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ S : biên của Ω : $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2$, phía ngoài

6) $\int\int_S x\rho dydz + y\rho dxdz + z\rho dxdy, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ S : biên của Ω : $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$, phía ngoài

7) $\int\int_S \frac{x}{\rho^3}dydz + \frac{y}{\rho^3}dxdz + \frac{z}{\rho^3}dxdy, \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ S : biên của Ω : $1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$, phía ngoài

8) $\int\int_S 7xdydz - zdxdy, \quad S: x^2+y^2+z^2 = 4$, phía ngoài, tính bằng công thức Gauss-Ostrogratski và bằng cách tính trực tiếp.

CHƯƠNG IV: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

I. KHÁI NIỆM VỀ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

1. Khái niệm

Trong toán học, phương trình vi phân là một chuyên ngành phát triển, có tầm quan trọng và có nhiều ứng dụng thực tế trong các lãnh vực khoa học kỹ thuật, kinh tế. Để làm quen với khái niệm phương trình vi phân ta xem một số bài toán dẫn tới việc thiết lập phương trình vi phân dưới đây.

2. Một số bài toán dẫn tới phương trình vi phân

Thí dụ 1: Cho một vật khối lượng m rơi tự do trong không khí. Giả sử sức cản không khí tỉ lệ với vận tốc rơi là v(t) vào thời thời điểm t với hệ số tỉ lệ là k > 0. Tìm v(t).

Ta có khi vật rơi thì lực tác dụng lên vật gồm có : lực hút của trái đất là mg và lực cản của không khí là kv(t). Do đó theo định luật Newton, ta có: ma = F

với a là gia tốc của vật rơi. Nghĩa là ta có phương trình :

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

hay $mv' = mg - kv$

Đây là phương trình vi phân để tìm hàm v(t).

Thí dụ 2: Cho một thanh kim loại được nung nóng đến nhiệt độ 300^o, và được đặt trong 1 môi trường đủ rộng với nhiệt độ không đổi là 30^o (và nhiệt độ tỏa ra từ thanh kim loại không làm thay đổi nhiệt độ môi trường). Tìm T(t) là nhiệt độ thanh kim loại tại thời điểm t.

Theo quy luật Newton tốc độ giảm nhiệt của thanh kim loại ($\frac{dT}{dt}$) tỉ lệ với hiệu nhiệt độ của vật thể T(t) và nhiệt độ môi trường 30^o. Do đó ta có: T’(t) = -k(T(t) – 30o)

Đây là phương trình vi phân để tìm hàm T(t), trong đó k >0 là hệ số tỉ lệ và T(0) = 300 là điều kiện ban đầu của bài toán.

Thí dụ 3: Tìm phương trình y = f(x) của một đường cong biết rằng tiếp tuyến tại mỗi điểm sẽ cắt trục tung tại điểm khác có tung độ bằng hai lần tung độ tiếp điểm.

Biết rằng phương trình tiếp tuyến với đường cong y= f(x) tại điểm Mo(xo, yo) tại có dạng: y- yo = f ’(xo)(x - xo)

Giao điểm của tiếp tuyến với trục tung (x= 0) có tung độ là :

y_1 = yo - f’(xo)(xo)

Theo giả thiết có : y_1 = 2 yo, từ đó có phương trình: yo = f’(xo)(xo)

Với điểm Mo(xo, yo) là bất kỳ, nên ta có phương trình vi phân : $y' = \frac{y}{x}$

3. Định nghĩa phương trình vi phân – Nghiệm, nghiệm tổng quát, nghiệm riêng, nghiệm kỳ dị của phương trình.

3.1 Định nghĩa cơ bản phương trình vi phân

Phương trình vi phân thường (gọi tắt phương trình vi phân) là biểu thức liên hệ giữa một biến độc lập, hàm phải tìm và các đạo hàm của nó.

Nếu phương trình chứa nhiều biến độc lập cùng với hàm của các biến này cần phải tìm và các đạo hàm riêng của hàm theo các biến thì ta gọi đó là phương trình vi phân đạo hàm riêng (gọi tắt phương trình đạo hàm riêng).

Trong chương này ta chỉ xét các phương trình vi phần (thường). Cấp (hay bậc) của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có trong phương trình. Thí dụ các phương trình trong các bài toán ở các thí dụ I.2 là các phương trình vi phân cấp một. Tổng quát phương trình vi phân cấp một có dạng :

F(x,y,y’) = 0

hay y’ = f(x,y)

Trong đó F là hàm độc lập theo 3 biến, và f là hàm độc lập theo 2 biến.

Một cách tổng quát, phương trình vi phân cấp n có dạng :

$F(x,y,y',\ldots\ldots, y^{(n)})=0$

hoặc $y^{(n)} = f(x,y,y',\ldots\ldots,y^{(n-1)})$

<u>Thí dụ 4</u>:

a) Các phương trình sau là phương trình vi phân cấp 1: $xy'^2 + \sin y = 0$

$$\sin(y') + x^2 + \sqrt{y-1} = 0$$

b) Các phương trình sau là phương trình vi phân cấp 2 y’’= 3y’ + 2xy + sinx

$$\sqrt{x^2-1}\cos y' = \sin(y'')$$

3.2. Nghiệm - nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

3.2.1. Nghiệm:

Nghiệm của phương trình vi phân là một hàm y= φ (x) (hoặc dạng Φ (x,y) = 0) mà khi thay vào phương trình vi phân ta có một đồng nhất thức. Khi đó đồ thị của y = φ (x) trong mặt phẳng được gọi là đường cong tích phân của phương trình vi phân

Thí dụ 5: Hàm số y=2x là nghiệm của phương trình $y' = \frac{y}{x}$

Ngoài ra , y = Cx, với hằng số C bất kỳ, cũng là nghiệm của phương trình vi phân nói trên. Tuy nhiên nếu đặt thêm điều kiện nghiệm y(xo) = yo (gọi là điều kiện đầu) thì chỉ có 1 nghiệm thỏa là y = Cox với $C_o = \frac{y_o}{x_o}$, tức là chỉ có 1 đường cong tích phân đi qua điểm Mo(xo,yo)

3.2.2. Nghiệm tổng quát – nghiệm riêng – nghiệm kỳ dị

Qua thí dụ 5 ở trên ta thấy nghiệm của một phương trình vi phân có thể có dạng y = φ (x,C) , với C là hằng số, và ta gọi đó là nghiệm tổng quát.

Với mỗi Co ta có một nghiệm là y = φ (x,Co), và gọi là một nghiệm riêng. Nghiệm riêng của phương trình vi phân là nghiệm nhận từ nghiệm tổng quát khi cho hằng số C một giá trị cụ thể.

Tuy nhiên có thể có những nghiệm của phương trình mà nó không nhận được từ nghiệm tổng quát, và ta gọi đó là nghiệm kỳ dị.

Thí dụ 6: phương trình $y' = \sqrt{1-y^2}$ có nghiệm tổng quát là y = sin(x+C), nhưng y=1 vẫn là 1 nghiệm của phương trình nhưng không nhận được nghiệm tổng quát.

Về mặt hình học, một nghiệm tổng quát cho ta một họ các đồ thị của nó trong mặt phẳng, và ta gọi là họ các đường cong tích phân.

4. Bài toán Cauchy - Định lý tồn tại duy nhất nghiệm

Hai thí dụ sau đây cho thấy một phương trình vi phân có thể không có nghiệm, hoặc không có nghiệm tổng quát.

Thí dụ 7: Phương trình : $y'^2 = -1$ không có nghiệm thực.

Phương trình : $|y'| + |y| = 0$ không có nghiệm tổng quát vì chỉ có duy nhất là y = 0

Tuy nhiên với bài toán điều kiện đầu, còn gọi là bài toán Cauchy, thì ta có định lý sau về sự tồn tại duy nhất nghiệm.

4.1. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm (Định lý Picard)

Nếu f(x,y) liên tục trong một miền hình chữ nhật D: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ và Mo(xo,yo) là 1 điểm trong của D. Khi đó bài toán Cauchy :

tìm y thỏa : y’ = f(x,y) thỏa điều kiện yo = xo có ít nhất một nghiệm y = φ (x) khả vi liên tục trên một khoảng mở chứa xo.

Ngoài ra nếu fy’ cũng liên tục trên D (có thể trên một khoảng mở chứa xo. nhỏ hơn) thì nghiệm đó là duy nhất

Thí dụ 8: Xem bài toán Cauchy : $y' = y^{\frac{4}{5}}$, $y(0) = 0$

Có hai nghiệm là : y = 0 và $y = \left(\frac{x}{5}\right)^5$ (thực ra có nhiều nghiệm), như vậy không thỏa tính duy nhất , vì $f'_y = \frac{4}{5} y^{-1/5}$ không liên tục trong lân cận điểm (0,0)

Thí dụ 9: Xem bài toán Cauchy : $y' = \frac{y}{x}$, $y(x_0) = x_0$

Với xo ≠ 0 có 1 nghiệm duy nhất là y = Cox , $C_0 = \frac{y_0}{x_0}$

Với xo = 0, yo ≠ 0 không có nghiệm vì đường cong tích phân y = Cx không thể đi qua (0, yo) với yo ≠ 0 . Khi đó hàm $f(x,y) = \frac{y}{x}$ không liên tục tại (0, yo). Còn tại (0,0) thì bài toán lại có vô số nghiệm, vì tất cả các đường cong tích phân đều đi qua (0,0)

II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1

1. Phương trình tách biến (hay biến phân ly)

a) Là phương trình vi phân có dạng : $f_1(x) + f_2(y).y' = 0$ hay $f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$ (1)

b) Cách giải : Lấy tích phân phương trình (1) thì có :

$$\int f_1(x)\,dx + f_2(y)\,y'\,dx = C \quad \text{hay} \quad \int f_1(x)\,dx + f_2(y)\,dy = C$$

Thí dụ 1 : Giải phương trình vi phân : y ‘ = (1 + y^2). ex

Phương trình được đưa về dạng :

$$\frac{dy}{1+y^2} = e^x dx$$
$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int e^x dx + C$$
$$\Rightarrow arctg\, y = e^x + C$$
$$\Rightarrow y = tg(e^x + C)$$

c) Lưu ý:

Phương trình : $f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y).\, dy = 0$ (2)

- Nếu $g_1(y)f_2(x) \neq 0$ thì có thể đưa phương trình trên về dạng phương trình tách biến bằng cách chia 2 vế cho $g_1(y)g_2(x)$ ta được :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0 \quad (3)$$

- Nếu $g_1(y) = 0$ thì y = b là nghiệm của (2). Nếu $f_2(x) = 0$ thì x = a là nghiệm của (2). Các nghiệm đặc biệt này không chứa trong nghiệm tổng quát của phương trình (3)

Thí dụ 2: Giải phương trình vi phân: $(y^2 - 1)\, dx - (x^2 + 1)\, y\, dy = 0$

Với $y^2 - 1 \neq 0$ ta có :

$$\frac{dx}{x^2+1} = \frac{ydy}{y^2-1} \Rightarrow$$
$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{ydy}{y^2-1} \Rightarrow$$
$$\operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| + C$$

Ngoài nghiệm tổng quát này ta nhận thấy còn có 2 nghiệm: y =1 và y = -1

2. Phương trình đẳng cấp cấp 1

a). Là phương trình vi phân có dạng : $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (4)

Từ (4) có : y = xu --> y' = u + xu'.

Thế vào (4) có: u + xu' = f(u)

có thể đưa về dạng phương trình tách biến :

$$\frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \quad (5)$$

<u>Lưu ý:</u> Khi giải phương trình (5) ta nhận được nghiệm tổng quát khi f(u) – u ≠ 0. Nếu f(u) – u = 0 tại u = a thì có thêm nghiệm y = ax.

<u>Thí dụ 3</u>: Giải phương trình vi phân: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$

Đặt y = xu, ta có phương trình :

$$xu' + u = u + \operatorname{tg}u \Rightarrow \frac{\cos u}{\sin u}du = \frac{dx}{x}$$
$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln C, \quad \text{hay} \quad \sin u = Cx$$
$$\text{hay} \quad \sin\frac{y}{x} = Cx$$

Ngoài ra do f(u) = u ⇔ tg u = 0 ⇔ u = kπ x, nên ta còn có thêm các nghiệm : y = kπ x, với k= 0, ± 1, ± 2, …….

-

<u>Thí dụ 4</u>: Giải phương trình vi phân: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, \ y(1) = 1$

Chia cả tử và mẫu của vế phải cho x^2 ta được :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Đặt y = xu ta có: $\frac{dx}{x} + \frac{2u\,du}{1+3u^2} = 0$

Lấy tích phân ta có :

$$\ln|x| + \frac{1}{3}\ln\left(1+3u^2\right) = C \Rightarrow x^3\left(1+3u^2\right) = \pm e^{3C} = C_1$$

thế $u = \frac{y}{x}$, ta được : $x^3\left(1 + 3\frac{y^2}{x^2}\right) = C_1 \Rightarrow x^3 + 3xy^2 = C_1$

Với điều kiện đầu : x = 1, y = 1, ta được nghiệm riêng: $x^3 + 3xy^2 = 4$

b). <u>Chú ý</u>: phương trình: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ (6)

có thể đưa về dạng phương trình đẳng cấp như sau:

b1) Nếu 2 đường thẳng $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ cắt nhau tại (x_1, y_1), thì đặt $X = x - x_1$, $Y = y - y_1$, thì phương trình (6) được đưa về dạng :

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) = F\left(\frac{Y}{X}\right)$$

b2) Nếu 2 đường thẳng $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, và $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ song song nhau, khi đó có : $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ nên phương trình (6) được đưa về dạng :

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y) \quad (7)$$

khi đó đặt u = $a_1x + b_1y$, phương trình (7) trở thành phương trình tách biến.

<u>Thí dụ 5</u>: Giải phương trình vi phân : $\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y + 3}$

Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y + 3 = 0 \end{cases}$

ta có : $x_1=1$, $y_1=2$

Đặt X = x - 1, Y = y - 2 , thì có :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y} = \frac{1 - \frac{Y}{X}}{1 + \frac{Y}{X}}$$

Đặt u = $u = \frac{y}{x}$, ta có :

$$u + X\frac{du}{dX} = \frac{1-u}{1+u} \Rightarrow \frac{(1+u)\,du}{1-2u-u^2} = \frac{dX}{X}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|1-2u-u^2\right| = \ln|X| - \frac{1}{2}\ln C$$

$$\Rightarrow (1-2u+u^2)X^2 = C, \quad X^2 - 2XY - Y^2 = C$$

hay là: $x^2 + 2xy - y^2 + 2x + 6y = C$

3. Phương trình vi phân toàn phần

a). Là phương trình vi phân có dạng :

P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0 (8)

Nếu vế trái là vi phân toàn phần của một hàm số U(x,y), nghĩa là : dU(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy

(theo chương 3, IV.1., thì điều kiện cần và đủ là: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$)

Khi đó từ (8) , (9) ta có : dU(x,y) = 0

Vì thế nếu y(x) là nghiệm của (8) thì do dU(x,y(x)) = 0 cho ta :U(x,y(x)) = C (9)

Ngược lại nếu hàm y(x) thỏa (9) thì bằng cách lấy đạo hàm (9) ta có (8).

Như vậy U(x,y) = C là nghiệm của phương trình (8)

b). Cách giải thứ nhất :

Giả sử P, Q trong (8) thỏa $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, ta có U thỏa:

dU(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy

→ $P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}$

Lấy tích phân biểu thức $P = \frac{\partial U}{\partial x}$, thì do y được xem là hằng số nên ta có :

$$U(x, y) = \int P(x, y)dx + C(y) \quad (10)$$

trong đó C(y) là hàm bất kỳ theo biến y. Lấy đạo hàm biểu thức (10) theo biến y và do $Q = \frac{\partial U}{\partial y}$, ta được :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x, y)dx\right) + + C'(y) = Q(x, y)$$

từ phương trình vi phân này tìm C(y)

-

<u>Thí dụ 6</u>: Giải phương trình: $(x^2 + y^2)\,dx + (2xy + \cos y)\,dy = 0$

Ta có: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2\right) = 2y$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + \cos y\right) = 2y$$

➔ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, vậy sẽ có hàm U(x,y) thỏa:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x^2 + y^2, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + \cos y$$

Lấy tích phân hệ thức thứ nhất theo x, ta có:

$$U(x, y) = \frac{x^3}{3} + y^2 x + C(y)$$

Lấy đạo hàm biểu thức này theo y, và nhớ $\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy + \cos y$ thì có : 2yx + C'(y) = 2xy + cos y

C'(y) = cos y

C(y) = sin y + C

Vậy có nghiệm của phương trình là: $\frac{x^3}{3} + y^2x + \sin y = C$

c). Cách giải thứ hai (dùng tích phân đường loại 2):

Vì dU(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy

(theo theo chương 3, IV.1., thì điều kiện cần và đủ là : $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$)

Nên : $U(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$

$$= \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy \quad (11)$$

Thí dụ 7:

Giải phương trình: (x + y + 1) dx + (x – y^2 + 3) dy = 0

Ta có : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x + y + 1) = 1$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - y^2 + 3) = 1$$

➔ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, vậy sẽ có hàm U(x,y) thỏa:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + y + 1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = x - y^2 + 3$$

Sử dụng công thức (10) (với xo = 0, yo=0), có :

$$U(x,y) = \int_0^x (x+1)\,dx + \int_0^y (x - y^2 + 3)\,dy$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y$$

Vậy ta có nghiệm của phương trình vi phân :

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C$$

4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

a). Là phương trình vi phân có dạng: y’ + p(x) y = f(x) (11)

trong đó p(x), f(x) là các hàm liên tục.

Nếu f(x)=0, ta có: y’ + p(x) y = 0 (12)

Phương trình (12) gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất.

b). Cách giải:

Với phương trình (12), có

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$
$$\Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln C_1,\ C_1$$
$$\Rightarrow y = Ce^{-\int p(x)dx},\quad C \neq 0 \qquad (13)$$

Với phương trình (11), có thể giải bằng phương pháp biến thiên hằng số tức là tìm nghiệm của nó ở dạng (13) nhưng coi C là hàm số, dạng :

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \qquad (14)$$

Lấy đạo hàm (14), thay vào (11), có :

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

hay : $\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}$

từ đó , có: $C(x) = \int f(x)e^{-\int p(x)dx}dx \quad C_1$

Vậy : $y = e^{-\int p(x)dx}[\int p(x)e^{-\int p(x)dx} + C_1]$ (15)

Công thức (15) nói chung khó nhớ, nên tốt nhất là cần nhớ các bước tính toán của phương pháp biến thiên hằng số để lặp lại.

-

<u>Thí dụ 8</u>: Giải phương trình: y’ – y.cotg x = 2x.sinx

Phương trình thuần nhất có nghiệm: $y = Ce^{\int \cot gxdx} = C\sin x$

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất ở dạng: $y = C(x).\sin x$

Thế vào phương trình ban đầu, ta được :

$$C'(x)\sin x + C(x)\cos x - C(x)\cos x = 2x\sin x$$

$$C'(x) = 2x \Rightarrow C(x) = x^2 + C$$

Vậy : $y = x^2 \sin x + C\sin x$

Thí dụ 9: Giải phương trình: $xy' - 3y = x^2$

Đưa về dạng chuẩn : $y' - \frac{3y}{x} = x$

Nghiệm tổng quát phương trình thuần nhất :

$$y = Ce^{3\int\frac{dx}{x}} = Ce^{3\ln|x|} = Cx^3$$

Tìm nghiệm ở dạng $y = C(x)\,x^3$. Thế vào phương trình ban đầu ta có : $C'(x)x^3 + 3C(x)\,x^2 - 3C(x)\,x^2 = x$

$$C'(x) = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow C(x) = 1\frac{1}{x} + C$$

Vậy : $y = \left(-\frac{1}{x} + C\right)x^3 = x^3 - x^2$

Chú ý: Nếu coi x là hàm số theo biến y thì phương trình tuyến tính đối với hàm số x có dạng : $\frac{dx1}{dy} + p(y)x = f(y)$

Thí dụ 10: Giải phương trình: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$

Phương trình này không tuyến tính. Tuy nhiên nếu coi x là hàm, y là biến ta có :

$$\frac{dx}{dy} = x\cos y + \sin 2y$$

$$\frac{dx}{dy} - x\cos y = \sin 2y$$

Đây lại là phương trình vi phân tuyến tính đối với hàm x. Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng :

$$x = Ce^{\int \cos y\, dy} = Ce^{\sin y}$$

Tìm nghiệm của phương trình không thuần nhất dạng : $x = C(y)e^{\sin y}$, đưa vào phương trình ban đầu, có :

$$C'(y)e^{\sin y} + C(y)e^{\sin y}.\cos y - C(y)e^{\sin y}.\cos y = \sin 2y$$
$$C'(y) = e^{-\sin y}\sin 2y$$
$$C(y) = \int e^{-\sin y}\sin 2y\, dy = 2\int e^{-\sin y}\sin y\, d\sin y$$
$$C(y) = -2e^{-\sin y}(\sin y + 1) + C$$

Vậy : x = C esiny – 2siny – 2

5. Phương trình Bernoulli

a). Là phương trình vi phân có dạng : y’ + p(x) y = f(x) yα , α ≠ 1 (16)

b). Cách giải : Đưa về dạng : $y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = f(x)$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$, ta được $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$, nên phương trình (16) có dạng tuyến tính :

$$\frac{1}{1-\alpha}z' + p(x)z = f(x)$$

hay là : z’ + (1 - α)P(x) z = (1-α)f(x)

Thí dụ 11: Giải phương trình: $y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}$

Đây là phương trình Bernoulli với α = ½ . Chia 2 vế cho $\sqrt{y}$ ta được :

Thí dụ 12: Giải phương trình: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\cos y + \sin 2y}$

Phương trình này không tuyến tính. Tuy nhiên nếu coi x là hàm, y là biến ta có :

$$y^{-\frac{1}{2}}y' - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x$$

Đặt $z = \sqrt{y} \Rightarrow z' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}$, thế vào phương trình trên, ta có: $2z' - \frac{4}{x}z = x, \quad z' - \frac{2}{x}y = \frac{x}{2}$

Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng bằng :

$$z = Ce^{\int \frac{2dx}{x}} = Ce^{2\ln|x|} = Cx^2$$

Tìm nghiệm phương trình không thuần nhất dạng : z = C(x). x^2

Thế vào ta có :

$$C'(x)x^2 + 2x\,C(x) - \frac{2}{x}C(x)x^2 = \frac{x}{2}$$
$$C'(x) = \frac{1}{2x} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$
$$\Rightarrow z = Cx^2 + \frac{x^2}{2}\ln|x| = \sqrt{y}$$

III. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP HAI GIẢM CẤP ĐƯỢC

1. Các khái niệm cơ bản về phương trình cấp hai

1.1. Phương trình vi phân cấp hai có dạng :

F(x,y,y',y'') = 0 hay y''=f(x,y,y')

Bài toán Cauchy của phương trình vi phân cấp hai là tìm nghiệm của phương trình trên thỏa điều kiện đầu : y(xo) = yo ,
y'(xo) = y'_o

Thí dụ 1: Giải phương trình :

y'' = x + cosx, biết y(0) = 1 , y'(0) = 3

Ta có:

$$y' = \frac{x^2}{2} + \sin x + C_1$$
$$y = \frac{x^3}{6} - \cos x + C_1x + C_2$$

Cho x =0 , y =1 => C_2 =1. Cho y'(0) = 3, ta có C_1 = 3. Vậy nghiệm bài toán là :

$$y = \frac{x^3}{6} - \cos x + 3x + 1$$

Thí dụ 1 trên cho thấy phương trình vi phân cấp thường phụ thuộc vào hai tham số C_1, C_2, và chúng được xác định nhờ hai
điều kiện đầu.

1.2. Định lý tồn tại và duy nhất nghiệm bài toán Cauchy

Bài toán: y''= f(x,y,y') (1)

y(xo) = yo , y'(xo) = y'_o (2)

Nếu f(x,y,y') (theo 3 biến x, y, y') và các đạo hàm $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ liên tục trong miền 3 chiều Ω , và (xo,yo, y'_o) là một điểm trong Ω . Khi đó bài toán Cauchy có duy nhất một nghiệm y = φ (x) xác định liên tục, hai lần khả vi trên một khoảng (a,b) chứa xo

Hàm số phụ thuộc hai hằng số y = φ (x,C_1, C_2) gọi là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân cấp hai (trong miền Ω) nếu nó thỏa phương trình vi phân cấp hai với mọi hằng số C_1, C_2 (thuộc một tập hợp nào đó) và ngược lại với mọi điểm (xo,yo, y'_o) trong Ω đều tại tại duy nhất Co_1, Co_2 sao cho y = φ (x, Co_1, Co_2) là nghiệm của bài toán Cauchy với điều kiện đầu.

Như vậy từ nghiệm tổng quát y = φ (x,C_1, C_2) cho các giá trị cụ thể C_1=C_1', C_2=C_2' ta có nghiệm riêng: y = φ (x,C_1', C_2')

Lưu ý: Nếu nghiệm tổng quát tìm ra ở dạng ẩn Φ (x,y,C_1,C_2) = 0 thì nghiệm riêng cũng ở dạng ẩn Φ (x,y,C_1', C_2') = 0

2. Phương trình cấp hai giảm cấp □ược

Phương trình có dạng : y'' = f(x)

Dễ dàng tìm được nghiệm của phương trình này sau hai lần lấy tích phân

$$y' = \int f(x)dx + C_1$$
$$y = \int\left[\int f(x)dx\right] + C_1x + C_2$$

Thí dụ 2: Giải phương trình vi phân: y''= sin x cos x + ex

Ta có :

$$y' = \int \sin x \cos x dx + \int e^x dx + C_1$$
$$= \frac{\sin^2 x}{2} + e^x + C_1$$
$$y = \int \frac{\sin^2 x}{2} dx + \int e^x dx + \int C_1 dx + C_2$$
$$= \int \frac{1-\cos^2 x}{2} dx + e^x + C_1x + C_2$$
$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{8} + e^x + C_1x + C_2$$

3. Phương trình khuyết y

Phương trình có dạng : F(x,y’,y’’) = 0

Cách giải : Đặt p =y’ ta có phương vi phân cấp một F(x,p,p’) = 0, giải ra tìm p = φ (x,C1) và khi đó :

$$y = \int y' dx \quad \int \varphi(x, C_1) dx \quad + C_2$$

Thí dụ 3: Giải phương trình: $xy'' + y' = x^2$

Đặt p = y’ → p’=y’’, ta có : $xp' + p = x^2\ ,\ p' + \frac{1}{x} p = x$

đây là phương trình vi phân tuyến tính. Giải ra ta được : $p = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}$

Qua đó, ta có: $y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x} \rightarrow$
$y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2$

4. Phương trình khuyết x

Phương trình có dạng : F(y,y’,y’’) = 0

Cách giải : Đặt p =y’, và coi y là biến, và p là hàm số theo biến y. Ta có :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

Như vậy ta có phương trình dạng cấp 1: $F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$

Thí dụ 4: Giải bài toán Cauchy:

$yy'' + y'^2 = 0$, y(1) =2 , y’(1) = ½

Đặt $y' = p,\ \ y'' = p\frac{dp}{dy}$, ta được :

$$y\left(p\frac{dp}{dy}\right)+p^2=0$$

$$p\left(y\frac{dp}{dy}+p\right)=0$$

Từ đây có 2 trường hợp:

- $p = 0$, nghĩa là $y' = 0$. Nghiệm này không thỏa điều kiện đầu, bỏ
- $y\frac{dp}{dy}+p=0 \rightarrow ydp+pdy=0$ $d(py) = 0 \rightarrow yp = C_1$

Vậy $ydx = C_1$

Khi $x = 1$, $y = 2$, $y' = ½$ cho nên : $2\frac{1}{2}=C_1 \rightarrow C_1=1$

Ta có: $y\frac{dy}{dx}=1 \rightarrow \frac{1}{2}y^2=x+C_2$

Cho $x = 1$, $y = 2$ ta được $C_2 = 1$.

Tóm lại nghiệm phải tìm là: $\frac{1}{2}y^2=x+1$

IV. PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH CẤP HAI

1. Khái niệm chung

1.1. Phương trình tuyến tính cấp hai có dạng :

$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (1)

với các hàm số $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng (a,b). Khi ấy với mọi $x_o \in (a,b)$ và mọi giá trị y_o, y'_o ta có bài toán Cauchy điều kiện đầu : $y(x_o) = y_o$, $y'(x_o) = y'_o$

có nghiệm duy nhất trên (a,b)

Phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (2)

Được gọi là phương trình thuần nhất tương ứng của phương trình (1)

1.2. Định lý 1: (Về nghiệm tổng quát của Phương trình không thuần nhất)

Nghiệm tổng quát của phương trình không thuần nhất (1) có dạng : y = yo + yr

trong đó yo là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (2) và yr là 1 nghiệm riêng nào đó của phương trình (1)

2. Phương trình thuần nhất, nghiệm tổng quát

2.1. Định lý 2:

Nếu $y_1(x)$, $y_2(x)$ là nghiệm của phương trình thuần nhất (2) thì $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ cũng là nghiệm của phương trình (2)

Chứng minh: Thật vậy, ta có :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = [C_1y_1'' + C_2y_2''] + p(x)\,[C_1y_1' + C_2y_2']y1' + q(x)\,[C_1y_1 + C_2y_2]$$

$$= C_1[y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1] + C_2[y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2] = 0 + 0 = 0$$

(do $y_1(x)$, $y_2(x)$ là nghiệm của (2) nên biểu thức trong [] của biểu thức cuối bằng 0)

Vậy $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ là 1 nghiệm của (2)

2.2. Định nghĩa:

Các hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$ được gọi là độc lập tuyến tính trên khoảng (a,b) nếu không tồn tại các hằng số α_1, α_2 không đồng thời bằng 0 sao cho :

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0 \text{ trên } (a,b)$$

(Điều này tương đương với : $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$ trên (a,b))

Thí dụ 1:

+ Các hàm $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ là độc lập tuyến tính

+ Các hàm $y_1(x)$= ex, $y_2(x)$= 3 ex là phụ thuộc tuyến tính

2.3. Định lý 3:

Xem các hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$ là các nghiệm của phương trình thuần nhất (2). Khi đó chúng độc lập tuyến tính với nhau khi và chỉ khi định thức sau khác không :

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$$

(định thức trên gọi là định thức Vronski)

2.4. Định lý 4: (Cấu trúc nghiệm của phương trình thuần nhất)

Nếu các hàm $y_1(x)$, $y_2(x)$ là các nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình thuần nhất (2), thì:

$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ với các hằng số bất kỳ C_1, C_2 sẽ là nghiệm tổng quát của phương trình đó.

Thí dụ 2: Chứng tỏ rằng phương trình $y'' - 4y = 0$ có nghiệm tổng quát $y = C_1e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

Thật vậy, kiểm tra trực tiếp dễ thấy rằng $y_1 = e^{2x}$ và $y_2 = e^{-2x}$ là các nghiệm của phương trình trên. Mặt khác, $\frac{y_1}{y_2} = e^{4x} \neq const$ nên chúng độc lập tuyến tính. Vậy: $y = C_1e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

là nghiệm tổng quát của phương trình trên.

2.5. Biết một nghiệm của (2), tìm nghiệm thứ hai độc lập tuyến tính với nó

Giả sử $y_1(x)$, là một nghiệm của phương trình thuần nhất (2). Khi đó có thể tìm nghiệm thứ 2 độc lập tuyến tính với $y_1(x)$ ở dạng : $y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$, trong đó $u(x) \neq$ const .

Thí dụ 3: Biết phương trình $y'' - 2y' + y = 0$ có 1 nghiệm $y_1 = ex$. Tìm nghiệm thứ hai độc lập tuyến tính với $y_1(x)$.

Việc kiểm tra lại $y_1 = ex$ là 1 nghiệm là dễ dàng. Tìm $y_2(x) = u(x)\, ex$

$\rightarrow y'_2 = ex\, u + ex\, u'$, $y''_2 = ex\, u + 2ex\, u' + 2ex\, u''$

Thay vào phương trình đã cho, có :

$ex\,(u'' + 2u' + u) - 2ex\,(u + u') + ex\, u = 0$

$\rightarrow 2ex\, u'' = 0$, $u'' = 0$, $u = C_1x + C_2$

Vì cần $u \neq$ const, nên có thể lấy $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, nghĩa là $u = x$, $y_2 = x\, ex$

Nghiệm tổng quát có dạng : $y = C_1ex + C_2x\ ex$

3. Phương pháp biến thiên hằng số tìm nghiệm riêng

Để giải phương trình không thuần nhất cần phải biết nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất mà ta vừa tìm hiểu ở mục 2. Ngoài ra còn cần tìm 1 nghiệm riêng của nó và có thể tìm ở dạng giống như nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, tức là ở dạng: $y = C_1y_1(x) + C_2\, y_2(x)$ (3)

trong đó $y_1(x)$, $y_2(x)$ độc lập tuyến tính, nhưng xem C_1, C_2 là các hàm số $C_1(x)$, $C_2(x)$.

Để dễ tìm $C_1(x)$, $C_2(x)$ ta đưa thêm điều kiện :

$C'_1(x)\, y_1(x) + C'_2(x)\, y_2(x) = 0$ (4)

Với điều kiện (4), lấy đạo hàm (3), ta được:

$y' = C_1y'_1(x) + C_2\, y'_2(x)$ (5)

$y'' = C_1y_1''(x) + C_2\, y_2''(x) + C'_1y'_1(x) + C'_2\, y'_2(x)$ (6)

Thay (3), (5),(6) vào (1), có :

$C_1y_1''(x) + C_2\, y_2''(x) + C'_1y'_1(x) + C'_2\, y'_2(x) + p[C_1y'_1(x) + C_2\, y'_2(x)] +$
$q[C_1y_1(x) + C_2\, y_2(x)] = f(x)$

Hay:

$C_1[\, y_1''(x) + pC_1y'_1(x) + qC_1y_1(x)\,]\, C_2[\, y_2''(x) + py'_2(x) + q\, y_2(x)\,] +$
$C'_1y'_1(x) + C'_2\, y'_2(x) = f(x)$

Do y_1, y_2 là nghiệm của (1) nên suy ra:

$C'_1y'_1(x) + C'_2\, y'_2(x) = f(x)$ (7)

Như vậy C'_1 , C'_2 thỏa hệ :

$$\begin{cases} C'_1y'_1 + C'_2y'_2 = f(x) \\ C'_1y_1 + C'_2y_2 = 0 \end{cases}$$

-

<u>Thí dụ 4</u>: Giải phương trình $x^2y'' + xy' - y = x^2$

Đưa về dạng chính tắc : $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 1$

Trước hết xét phương trình thuần nhất tương ứng:

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$$

Có thể tìm được 1 nghiệm của nó là $y_1 = x$. Nghiệm thứ hai độc lập tuyến tính với nó có dạng : $y_2 = xu(x)$

$\rightarrow y'_2 = u + xu'$, $y''_2 = 2u' + xu''$

thế vào phương trình thuần nhất, được :

$$2u' + xu'' + \frac{1}{x}(u + xu') - \frac{1}{x^2}xu = 0$$
$$\rightarrow xu'' + 3u' = 0$$

Đây là phương trình cấp hai giảm cấp được bằng cách đặt $p = u'$ ta được :

$$xp' + 3p = 0 \;, \quad p' + \frac{3}{x}p = 0$$
$$p = Ce^{-\int\frac{3dx}{x}} = \frac{C}{x^3}$$

Cho nên : $u' = \frac{C}{x^3} \;; \quad u = \frac{C_1}{x^2}$

Do $u \neq const$ và chỉ cần 1 nghiệm nên chọn $C_1=1$, nên $u = \frac{1}{x^2}, y_2 = \frac{1}{x}$. Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất có dạng : $y = C_1x + C_2\frac{1}{x}$

Việc còn lại là cần tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất bằng phương pháp biên thiên hằng số, dạng :

$$y = C_1(x)x + C_2(x)\frac{1}{x}$$

Với C_1, C_2 thỏa :

$$\begin{cases} C_1' + C_2'\left(-\frac{1}{x}\right) = 1 \\ C_1'x + C_2'\frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

$$C_1' = \frac{x}{2} \qquad C_2' = -\frac{x^3}{2}$$

$$\rightarrow \quad C_1 = \frac{x^2}{4} + c_1 \,, \quad C_2 = -\frac{x^4}{8} + c_2$$

Vì chỉ cần chọn 1 nghiệm riêng, nên có thể chọn cụ thể $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. vậy

$C_1 = \frac{x^2}{4} \,, C_2 = -\frac{x^4}{8}$, cho nên :

$$y_r = \frac{x^2}{4}x - \frac{x^4}{8}\frac{1}{x} = \frac{x^3}{8}$$

và như vậy nghiệm tổng quát của phương trình ban đầu là :

$$y = \frac{x^3}{8} + C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$$

Lưu ý: Nếu vế phải của phương trình vi phân có dạng tổng của 2 hàm số $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, thì khi đó có thể giải phương trình với riêng vế phải là từng hàm $f_1(x)$, $f_2(x)$ để tìm nghiệm riêng là yr_1, yr_2. Cuối cùng dễ kiểm lại là: nghiệm riêng của phương trình ban đầu là $yr = yr_1$, yr_2 (theo nguyên lý chồng chất nghiệm).

V. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ HẰNG

1. Khái niệm chung

$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + \ldots\ldots + any = f(x)$ (1)

trong đó a_1, a_2,…….., an là các hằng số

Trong phần sau ta trình bày kỹ phương trình cấp hai.

2. Phương trình cấp hai thuần nhất

Xét phương trình : y’’ + py’ + qy = f(x) (2)

trong đó p, q là hằng số

Ta tìm nghiệm của nó ở dạng : y = ekx (3)

Thế (3) vào (2) ta có: $(k^2 + pk + q)$ ekx = 0

→ $(k^2 + pk + q) = 0$ (4)

Phương trình (4) gọi là phương trình đặc trưng của phương trình (2), và cũng từ (4) cho thấy y = ekx là nghiệm của (2) khi và chỉ khi k là nghiệm của (4). Do đó dựa vào việc giải phương trình bậc 2 này, ta có các khả năng sau:

a). Phương trình đặc trưng (4) có 2 nghiệm phân biệt k_1,k_2 ($\Delta > 0$): Khi đó 2 nghiệm

$y_1 = ek^{1x}$, $y_2 = ek^{2x}$ là 2 nghiệm riêng của (2), và $\frac{y_1}{y_2} = e^{(k_1-k_2)x} \neq const$ nên 2 nghiệm riêng này độc lập tuyến tính. Vậy khi đó nghiệm tổng quát của (2) sẽ là: $y = C_1ek^{1x} + C_2ek^{2x}$

b). Phương trình đặc trưng (4) có 1 nghiệm kép k ($\Delta = 0$). Khi đó nghiệm y_1 = ekx là 1 nghiệm riêng của (2), và nghiệm riêng thứ hai độc lập tuyến tính với nó có dạng $y = u(x).y_1 {}^{=} u(x).ekx$

$y_2' = k.ekx \,.\, u(x) + u'(x).ekx$

$y_2'' = k^2.ekx.u(x) + 2ku'(x).ekx + ekx.u(x)''$

Thế vào phương trình (2) ta có :

$(k^2.u + 2ku' + u'')\ ekx + p(ku + u')\ ekx + q\ ekxu = 0$

$\rightarrow u'' + (2k + p)u' + (k^2 + pk + q)u = 0$

Do k là nghiệm kép của (4) nên :

$k = -p/2 \rightarrow 2k + p = 0$ và $(k^2 + pk + q) = 0$

từ đó : $u'' = 0 \rightarrow u = C_1x + C_2$

Do chỉ cần chọn 1 nghiệm nên lấy $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, và như thế có : $y_2 = x$ ekx

Và nghiệm tổng quát của (2) là: $y = (C_1 + C_2x)$ ekx

c). Phương trình đặc trưng (4) có 2 nghiệm phức liên hiệp $k_{1,2} = \alpha \pm \beta$, $\beta \neq 0$ ($\Delta < 0$). Khi đó 2 nghiệm của (2) có dạng :

$$\overline{y}_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$\overline{y}_2 = e^{(\alpha i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$$

Khi đó :

$$y_1 = \frac{\overline{y}_1 + \overline{y}_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad ; \quad y_2 = \frac{\overline{y}_1 + \overline{y}_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

cũng là 2 nghiệm của (2) và $\frac{y_1}{y_2} = \cot g\beta \neq const$ nên chúng độc lập tuyến tính.

Từ đó ta có nghiệm tổng quát của (2) là : $y = (C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)e^{\alpha x}$

<u>Thí dụ 1</u>: Giải phương trình : $y'' + 3y' - 4y = 0$

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng :

$k^2 + 3k - 4 = 0 \rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = -4$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là : $y = C_1e^x + C_2e^{-4x}$

-

<u>Thí dụ 2</u>: Giải phương trình : $y'' + 4y' + 4y = 0$

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng :

$k^2 + 4k + 4 = 0 \rightarrow k_{1,2} = 2$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là : $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$

-

<u>Thí dụ 3</u>: Giải phương trình : $y'' + 6y' + 13y = 0$

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng :

$k^2 + 6k + 13 = 0 \rightarrow k_{1,2} = -3 \pm 2i$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất là:

$y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-3x}$

3. Phương trình cấp hai không thuần nhất vế phải có dạng ặc biệt

Xét phương trình vi phân cấp hai hệ số hằng không thuần nhất :

$y'' + py' + qy = f(x)$ (5)

Qua việc trình bày tìm nghiệm tổng quát của phương trình cấp hai thuần nhất tương ứng, và dựa vào định lý 2, mục II.1 ?? thì để có nghiệm tổng quát của (5) ta cần tìm được 1 nghiệm riêng của (5).

Ngoài phương pháp biến thiên hằng số đã trình bày, dưới đây trình bày phương pháp hệ số bất định để tìm một nghiệm riêng cho (5) khi vế phải có dạng đặc biệt thường gặp.

3.1 Vế phải $f(x) = e\alpha^{x} Pn(x)$

trong đó Pn(x) là đa thức cấp n, α là một số thực.

Khi đó ta tìm nghiệm riêng của (5) ở dạng: yr = u(x) Qn(x) (6)

với Qn(x) là đa thức cấp n có (n+1) hệ số được xác định bằng cách thay (6) vào (5) và đồng nhất 2 vế ta có (n+1) phương trình đại số tuyến tính để tìm (n+1) hệ số. Hàm u(x) có dạng cụ thể là :

a). Nếu α là nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (4), $u(x) = xe\alpha^{x}$ và khi đó: $yr = xe\alpha^{x} Qn(x)$

b). Nếu α là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (4), $u(x) = x^2e\alpha^{x}$ và khi đó: $yr = x^2e\alpha^{x} Qn(x)$

c). Nếu α không là nghiệm của phương trình đặc trưng (4), $u(x) = e\alpha^{x}$ và khi đó: $yr = e\alpha^{x} Qn(x)$

<u>Thí dụ 4</u>: Giải phương trình : $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng :

$k^2 - 4k + 3 = 0$ có nghiệm $k_1 = 1$, $k_2 = 3$

nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là: $y = C_1ex + C_2e^{3x}$

Mặt khác số α = 2 không là nghiệm của phương trình đặc trưng, nên nghiệm riêng tìm ở dạng $yr = Ae^{2x}$ (do Pn(x) =3 đa thức bậc 0), thay vào phương trình đã cho có:

$4Ae^{2x} - 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = 3e^{2x} \rightarrow A = -3$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là :

$y = C_1ex + C_2e^{3x} - 3e^{2x}$

-

<u>Thí dụ 5</u>: Giải phương trình : $y'' + y = xex + 3e^{-x}$

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng :

$k^2 + 1 = 0 \rightarrow k_{1,2} = \pm i^2$

nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là: $yo = C_1\cos x\ C_2 \sin x$

Do vế phải là tổng của 2 hàm $f_1 = xex$, $f_2 = 2e^{-x}$ nên ta lần lượt tìm nghiệm riêng của phương trình lần lượt ứng với vế phải là f_1, và f_2 :

+ Với f_1 = xex thì α = 1 không là nghiệm của phương trình đặc trưng , Pn(x) = x nên nghiệm riêng có dạng : yr_1 = (Ax+B)ex

+ Với $f_2 = 2e^{-x}$ thì α = -1 cũng không là nghiệm của phương trình đặc trưng , Pn(x) = 2 nên nghiệm riêng có dạng : $yr_2 = Ce^{-x}$

Theo nguyên lý xếp chồng, nghiệm riêng của phương trình đã cho được tìm ở dạng : yr = (Ax+B)ex + Ce^{-x}

→ yr ’ = (Ax+B)ex - Ce^{-x} + Aex

→ yr’’ = (Ax+B)ex + Ce^{-x} + 2Aex

Thế vào phương trình đã cho, có :

2Axex + (2A+2B)ex + $2Ce^{-x}$ = xex + $2e^{-x}$

Từ đó, ta có : 2A =1, 2A + 2B = 0 , 2C =2

→ $A = \frac{1}{2}\ ,\ B = -\frac{1}{2}\ ,\quad C = 1$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình là :

$$y = \frac{1}{2}(x-1)e^{x} + e^{-x} + C_1\cos x + C_2\sin x$$

3.2. Vế phải f(x) = eα ^{x} [Pn(x) cos β x +Qm(x) sin β x]

Trong đó Pn(x), Qm(x) là đa thức bậc n, m tương ứng, α , β là các số thực.

Khi đó ta tìm nghiệm riêng của (5) ở dạng:

yr = u(x) [Rs(x) cos β x + Hs(x) sin β x] (7)

(β = 0 sẽ tương ứng trường hợp đã nêu ở trên), với s = max {m,n}, Rs(x), Hs(x) là đa thức bậc s với 2(s+1) được xác định bằng cách thay (7) vào (5) và đồng nhất 2 vế ta có các phương trình đại số tuyến tính để tìm các hệ số. Hàm u(x) có dạng cụ thể là :

a). Nếu α ± β là nghiệm của phương trình đặc trưng tương ứng, u(x) = eα ^{x} và khi đó yr = eα ^{x} [Rs(x) cos β x + Hs(x) sin β x]

b). Nếu α ± β không là nghiệm của phương trình đặc trưng tương ứng, u(x) = xeα ^{x} và khi đó :

yr = eα ^{x} [Rs(x) cos β x + Hs(x) sin β x]

Thí dụ 6: Giải phương trình : y’’ + y = sin x

Phương trình đặc trưng tương ứng có dạng :

$k^2 + 1 = 0$ có nghiệm $k_{1,2} = \pm i^2$

nên nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng là: $yo = C_1 \cos x \; C_2 \sin x$

Ở đây $\alpha = 0$, $\beta = 1$, nên $\alpha \pm i\beta = \pm i$ là nghiệm của phương trình đặc trưng. Mặt khác, do n =m=0, cho nên s = 0. Vậy nghiệm tổng quát được tìm ở dạng: yr = x(Acosx+Bsinx)

→ yr' = x(-Asinx + Bcosx) + (Acosx+Bsinx)

→ yr'' = 2(-Asinx + Bcosx) + x(-Acosx - Bsinx)

→ yr' + yr = -2Asinx + 2Bcosx = sinx

→ -2A = 1, 2B =0 → A= -1/2 , B = 0

Vậy nghiệm riêng là : $y_r = -\frac{x}{2}\cos x$

Và nghiệm tổng quát là : $y = -\frac{x}{2}\cos x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$

BÀI TẬP CHƯƠNG 4

I. Chứng tỏ rằng hàm số y = f(x) là nghiệm của phương trình vi phân tương ứng

1) $xy'' - y' = 0$ $\quad y = x^2$; $y = 1$; $y = c_1x^2 + c_2$

2) $y' + \frac{1}{x}y = 1$

a) $y = \frac{x}{2}$; b) $y\frac{1}{x} + \frac{x}{2}$; c) $y = \frac{c}{x} + \frac{x}{2}$

3) $x^2y' + xy = ex$, $y = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$

4) $yy'' = 2(y')^2 - 2y'$

a) $y = 1$;

b) b) $y = tgx$

II. Giải các phương trình vi phân sau:

1. $x(y^2 - 1)dx - (x^2 + 1)ydx = 0$

2. $(x^2 - xy)dx - (y^2 + x^2)dy = 0$

3. $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$

4. $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$

5. $y = xy' + y'\ln y$

6. $y' - xy = -y^3e^{-x^1}$

7. $xy' = 2(x - \sqrt{xy})$

8. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$

9. $y' = 2^{x-y}$, $y(-3) = (-5)$

10. $y' = ex^{+y} + ex^{-y}$, $y(0) = 0$

11. $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

12. $y'\cos^2x + y = tgx$

13. $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$

14. $y'\cos x + y = 1 - \sin x$

15. $(2xy + 3)dy - y^2dx = 0$ (coi x là hàm số)

16. $(y^4 + 2x)y' = y$ (coi x là hàm số)

17. $y' - \frac{y}{x-1} = \frac{y^2}{x-1}$

18. $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0$ (coi x là hàm số)

III. Giải các phương trình vi phân cấp 2 sau:

1) $y'' + y' = 0$

2) $y'' + yy' = 0$

3) $y'' = (y')^2$

4) $2(y')^2 = (y - 1)y''$

5) $y''^2 = 1 + y'^2$

6) $y'' = y'ey$

7) $(y + y')y'' + y'^2 = 0$

8) $3y'^2 = 4yy'' + y'^2$

9) $yy'' - y'^2 = y^2\ln y$

IV. Giải các bài toán Cauchy sau:

1) $xy'' + y' = 0$, $y(1) = -3$, $y'(1) = 2$

2) $2y'' + y'^2 = -1$, $y(-1) = 2$, $y'(1) = 0$

3) $y''(x^2 + 1) = 2xy'$, $y(0) = 1$. $y'(0) = 3$

4) $yy'' - y'^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

5) y’’ + $\frac{1}{y^2}e^{y^2}y'-2yy'^2=0$

6) $(-\frac{1}{2e})=1,\qquad y'(-\frac{1}{2e})=e$

7) Cho phương trình $m\frac{d^2r}{dt^2}=-\gamma\frac{Mm}{r^2}$, r(0) = R, r’(0) = vo

Xác định vo để khi t --> ∞ thì r --> ∞

(bài toán tìm vận tốc vũ trụ cấp hai)

V. Phương trình tuyến tính cấp hai

1)Các hàm sau có độc lập tuyến tính hay không:

a) (x + 1) và (x^2 – 1)

b) x và (2x + 1)

c) lnx và $\ln x^2$

2) Giải phương trình khi biết một nghiệm là y_1

a) y’’ + y = 0 , biết y_1 = cosx

b) x^2y’’ – 2y = 0, biết $y_1 = x^2$

c) y’’ – y’ – 2y = 0, biết $y_1 = e^{-x}$

d) $4x^2$y’’ + y = 0, x > 0, biết $y_1 = \sqrt{x}$

e) x^2y’’ - 5xy’ + 9y = 0, biết $y_1 = x^3$

f) (1-x^2)y’’ – 2xy’ + 2y = 0, biết y_1 = x

3) Tìm nghiệm tổng quát phương trình :

xy’’ – (2x + 1)y’ + (x + 1)y = 0

4) Giải phương trình: xy’’ + y’ = x^2

5) Giải phương trình: y’’ + $\frac{2}{x}y'+y=\frac{\cot gx}{x}$

Biết một nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng là : $y_1 = \frac{\sin x}{x}$

VI. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Giải các phương trình sau:

1) y’’ - 2y’ – 3y = 0

2) y’’ + 25y = 0

3) y’’ – 2y’ +10y = 0, $y(\frac{\pi}{6}) = 0, y'(\frac{\pi}{6}) = e^{\frac{\pi}{6}}$

4) y’’ + y’ = 0, y(0) = 1, y’$(\pi/3) = 0$

5) y’’ - 10y’ + 25y = 0, y(0) = 0, y’(0) = 1

6) y’’ -2y’ -3y = e^{4x}

7) y’’ + y’ -2y = cosx – 3sinx

8) y’’ – 6y’ + 8y = $3x^2$ +2x +1

9) y’’ + 4y = sin2x + 1 , y(0) = $\frac{1}{4}, y'(0) = 0$

10) y’’ – y = x.$\cos^2$x

11) y’’ – 2y’ + 2y = exsinx

12) y’’ + y = tgx

13) y’’ + 4y = cos2x, y(0) = y $(\frac{\pi}{4}) = 0$

14) y’’ + 5y’ + 6y = $\frac{1}{1+e^{2x}}$