

NGUYỄN TIẾN TRUNG

GIÁO TRÌNH

**Cơ Sở Lý Thuyết Tập Hợp
Và Logic Toán**

Ebook.moet.gov.vn, 2008

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Giám đốc ĐINH NGỌC BẢO

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổng biên tập LÊ A

Biên tập nội dung:

NGUYỄN TIẾN TRUNG

Thiết kế sách và Biên tập mỹ thuật:

VIỆT QUANG

Trình bày bìa:

PHẠM VIỆT QUANG

LỜI NÓI ĐẦU

Để góp phần đổi mới công tác đào tạo và bồi dưỡng giáo viên tiểu học, Dự án phát triển giáo viên tiểu học đã tổ chức biên soạn các môđun đào tạo và bồi dưỡng giáo viên theo chương trình Cao đẳng Sư phạm và chương trình liên thông từ Trung học Sư phạm lên Cao đẳng Sư phạm. Việc biên soạn các môđun nhằm nâng cao năng lực chuyên môn, nghiệp vụ, cập nhật những đổi mới về nội dung, phương pháp dạy học và kiểm tra, đánh giá kết quả giáo dục tiểu học theo chương trình, SGK tiểu học mới

Điểm mới của tài liệu viết theo môđun là việc thiết kế các hoạt động, nhằm tích cực hoá các hoạt động của người học, kích thích óc sáng tạo và khả năng giải quyết vấn đề, tự giám sát và đánh giá kết quả học tập của người học; chú trọng sử dụng nhiều phương tiện truyền đạt khác nhau (tài liệu in, băng hình,...) giúp cho người học dễ học, dễ hiểu và gây được hứng thú học tập.

Môđun Cơ sở lí thuyết tập hợp và lôgic toán do nhóm tác giả trường Đại học Sư phạm Hà Nội biên soạn.

Môđun Cơ sở lí thuyết tập hợp và lôgic toán có thời lượng bằng 2 đơn vị học trình, bao gồm 2 chủ đề:

Chủ đề 1: Cơ sở của lí thuyết tập hợp

Chủ đề 2: Cơ sở của lôgic toán

Lần đầu tiên, tài liệu được biên soạn theo chương trình và phương pháp mới, chắc chắn không tránh khỏi những thiếu sót nhất định. Ban điều phối Dự án rất mong nhận được những ý kiến đóng góp chân thành của bạn đọc,

đặc biệt là đội ngũ giảng viên, sinh viên các trường Sư phạm, giáo viên tiểu học trong cả nước.

Xin trân trọng cảm ơn!

DỰ ÁN PHÁT TRIỂN GIÁO VIÊN TIỂU HỌC

CHỦ ĐỀ 1

Cơ sở lí thuyết tập hợp

I. Mục tiêu

Kiến thức : Người học

- Hiểu các khái niệm về tập hợp, quan hệ, ánh xạ và biết xây dựng các ví dụ minh họa cho mỗi khái niệm đó.
- Nắm được định nghĩa của các phép toán trên tập hợp và ánh xạ. Phát biểu và chứng minh các tính chất của chúng

Kỹ năng :

Hình thành và rèn cho người học các kỹ năng

- Thiết lập các phép toán trên tập hợp và ánh xạ
- Vận dụng các kiến thức về tập hợp và ánh xạ trong toán học
- Các quan hệ tương đương và thứ tự

Thái độ:

- Chủ động tìm tòi, phát hiện và khám phá các ứng dụng của lí tập hợp toán dạy và học toán

II. Giới thiệu chủ đề :

STT	Tên tiểu chủ đề	Trang
1	Tập hợp	
2	Các phép toán trên tập hợp	
3	Quan hệ	
4	Quan hệ tương đương	
5	Quan hệ thứ tự	
6	Ánh xạ	
7	Đơn ánh, toàn ánh, song ánh và ánh xạ ngược	
8	ánh và tạo ảnh qua một ánh xạ	

III. Điều kiện cần thiết để thực hiện môđun

Kiến thức:

Nắm được kiến thức toán học trong chương trình toán PTTH

Đồ dùng dạy học:

Một số thiết bị sử dụng trong khi tổ chức các hoạt động dạy học: máy chiếu projector, máy chiếu đa năng, bảng phoóc mi ca...

Tài liệu tham khảo:

Các tài liệu trong thư mục của giáo trình

IV. Nội dung (Xem các tiêu chủ đề 1.1 – 1.8)

Formatted: Heading02

Tài liệu tham khảo

Formatted: Heading01

- [1] Phan Hữu Chân – Nguyễn Tiến Tài: Số học và logic toán – NXB Giáo dục – 1996.
- [2] Trần Diên Hiền : Các bài toán về suy luận logic – NXB Giáo dục – 2001.
- [3] Trần Diên Hiền : Logic giải trí – NXB Khoa học và kỹ thuật – 1993.
- [4] Đỗ Đình Hoan và tập thể tác giả : Toán 1 – NXB giáo dục – 2004.
- [5] Đỗ Đình Hoan và tập thể tác giả : Toán 2 – NXB Giáo dục – 2004.
- [6] Đỗ Đình Hoan và tập thể tác giả : Toán 3 – NXB Giáo dục – 2004
- [7] Đỗ Đình Hoan và tập thể tác giả : Toán 4 – NXB Giáo dục – 2005.
- [8] Đỗ Đình Hoan và tập thể tác giả : Toán 5 – NXB Giáo dục – 2004.
- [9] Xavier Roegiers : Guide Mathématique de base Pari – 1993.

TIÊU CHỦ ĐỀ 1.1. TẬP HỢP

Thông tin cơ bản

1. Khái niệm tập hợp – Tập con – các tập hợp bằng nhau

1.1. Khái niệm tập hợp

Tập hợp là một trong các khái niệm cơ bản của Toán học. Khái niệm tập hợp không được định nghĩa mà chỉ được mô tả qua các ví dụ: Tập hợp các học sinh của một lớp học, tập hợp các cầu thủ của một đội bóng, tập hợp các cuốn sách trên một giá sách, tập hợp các số tự nhiên,...

Mụn toán học nghiên cứu các tính chất chung của tập hợp, không phụ thuộc vào tính chất của các đối tượng cấu thành nên tập hợp được xem là cơ sở của Toán học hiện đại, và được gọi là lí thuyết tập hợp. Khác với nhiều ngành Toán học khác mà sự phát triển là kết quả có được từ những cố gắng không mệt mỏi của nhiều tài năng toán học, cuộc đấu tranh với “vô cực” và tiếp theo đó, sự sáng tạo nên lí thuyết tập hợp là công trình của chỉ một người: Gioócgior – Căngtơ (Georg Cantor 1845 – 1918), nhà toán học Đức gốc Do Thái.

Các đối tượng cấu thành một tập hợp được gọi là các phần tử của tập hợp đó. Người ta thường kí hiệu các tập hợp bởi các chữ A, B, C, X, Y, Z,... và các phần tử của tập hợp bởi các chữ a, b, c, x, y, z, ...

Nếu a là một phần tử của tập hợp A thì ta viết $a \in A$ (đọc là a thuộc tập hợp A).

Nếu a không phải là một phần tử của tập hợp A thì ta viết $a \notin A$ (đọc là a không thuộc tập hợp A).

Có hai cách xác định một tập hợp:

- Cách thứ nhất là liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp. Tập hợp A gồm bốn số tự nhiên 1, 3, 5, 7 được viết là:

$$A = \{1, 3, 5, 7\}.$$

Tập hợp B gồm ba phần tử là các chữ a, b, c được viết là:

$$B = \{a, b, c\}.$$

- Cách thứ hai là nêu lên một tính chất chung của các phần tử của tập hợp, nhờ đó có thể nhận biết được các phần tử của tập hợp và các đối tượng không phải là những phần tử của nó. Chẳng hạn,

Ví dụ 1.1 :

Cho tập hợp C các ước số của 8. Khi đó, các số 1, 2, 4, 8 là những phần tử của C, còn các số 3, 5, 6, 13 không phải là những phần tử của C. Người ta thường viết:

$$C = \{x : x \text{ là ước số của } 8\},$$

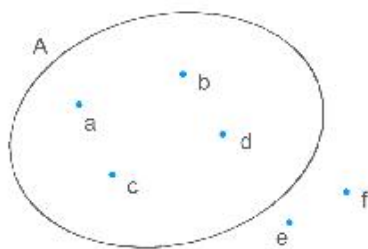
đọc là C là tập hợp các phân tử x sao cho x là ước số của 8 : x biểu thị mỗi phân tử của tập hợp C.

Ví dụ 1.2 :

Nếu D là tập hợp các nước thuộc châu á thì Việt Nam, Trung Quốc, Lào là những phân tử của tập hợp D, còn Pháp, Angiêri, Canada không phải là những phân tử của D. Ta viết:

$$D = \{x : x \text{ là nước thuộc châu á}\}$$

Người ta thường biểu thị tập hợp A bởi một đường cong kín gọi là lược đồ ven (Venn).



Hình 1

Nếu chẳng hạn tập hợp A có 4 phần tử a, b, c, d thì trên lược đồ đó mỗi phân tử đã được biểu diễn bởi một điểm nằm trong đường cong kín.

Các điểm e và f biểu diễn những đối tượng không phải là phân tử của tập hợp A.

Các tập hợp trong các ví dụ đã nêu chỉ có một số hữu hạn phân tử. Ta gọi chúng là những tập hợp hữu hạn.

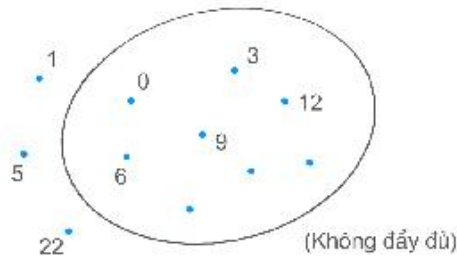
Tập hợp có vô số phân tử được gọi là tập hợp vô hạn.

Chẳng hạn, tập hợp các hình chữ nhật có các kích thước tùy ý là một tập hợp vô hạn, vì ta không thể liệt kê tất cả các phân tử của nó. Tương tự, tập hợp A các số tự nhiên bội của 3 cũng là một tập hợp vô hạn.

Tập hợp A được biểu diễn bởi lược đồ Ven trong Hình 2. Vì không thể biểu diễn tất cả các phân tử của A, ta chỉ đưa vào hình một số điểm có tên và một số điểm khác không có tên. Ngoài ra còn ghi chú thêm rằng sự biểu diễn tập hợp là không đầy đủ.

Người ta cũng viết:

$$A = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$$



Hình 2

Hiển nhiên mỗi phần tử tiếp sau được xác định một cách dễ dàng.

Tập hợp không có phần tử nào được gọi là *tập hợp rỗng*, kí hiệu là ϕ .

Chẳng hạn, tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x^2 + 2 = 0$ là *tập hợp rỗng*. Ta viết:

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 = 0\} = \phi.$$

(\mathbb{R} là tập hợp các số thực).

Tập hợp các số (tự nhiên) chẵn là ước số của 15 là tập hợp rỗng:

$$\{x \in \mathbb{N} : x \text{ là ước số chẵn của } 15\} = \phi.$$

Tập hợp chỉ có một phần tử gọi là *tập một phần tử*. Chẳng hạn, tập hợp các thủ đô của một nước là tập một phần tử.

Tập hợp chỉ có một phần tử a được kí hiệu là $\{a\}$.

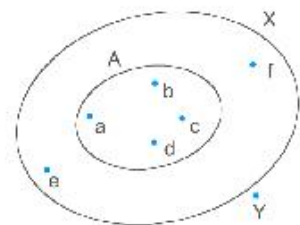
Như vậy tập hợp E các nghiệm thực của phương trình $3x - 21 = 0$ là tập một phần tử: $E = \{7\}$. Tập hợp T các tỉ số của độ dài mỗi đường tròn và đường kính của nó là tập một phần tử: $T = \{\pi\}$.

1.2. Tập con của một tập hợp. Các tập hợp bằng nhau

a) Tập hợp A được gọi là một tập con của tập hợp X nếu mọi phần tử của A đều là những phần tử của X.

Formatted: Heading04

Formatted: Font: Times New Roman



Hình 3

Ví dụ 1.3 :

Tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$ là tập hợp con của tập hợp $X = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Khi đó ta viết:

(1) $A \subset X$ (đọc là A chứa trong X),

hoặc

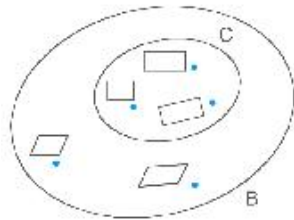
(2) $X \supset A$ (đọc là X chứa A).

Ký hiệu \subset được gọi là dấu bao hàm. Hệ thức (1) hoặc (2) gọi là một bao hàm thức.

Ví dụ 1.4 :

Tập hợp C các hình chữ nhật là một tập con của tập hợp B các hình bình hành vì mỗi hình chữ nhật là một hình bình hành:

$C \subset B$ (C chứa trong B).



Hình 4

Ví dụ 1.5 ;

Tập hợp N các số tự nhiên là một tập con của tập hợp Z các số nguyên: $N \subset Z$.

Tập hợp Q các số hữu tỉ là một tập con của tập hợp R các số thực (vì mỗi số hữu tỉ là một số thực): $Q \subset R$.

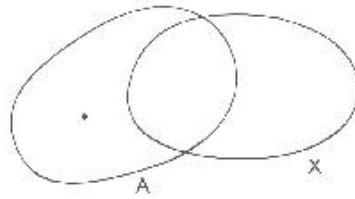
Hiển nhiên tập hợp X là một tập hợp con của X. Nếu A là một tập con của X và $A \neq X$ thì A gọi là một tập con thực sự của X. Trong ví dụ 3, A là một tập con thực sự của X. Trong Ví dụ 4, C là một tập thực sự của B.

Tập hợp A không phải là một tập hợp con của tập hợp X nếu có ít nhất một phần tử của A không thuộc X.

Khi đó, ta viết:

$$A \subset X \text{ (hoặc } X \supset A)$$

và biểu thị quan hệ này bằng lược đồ trong Hình 5.



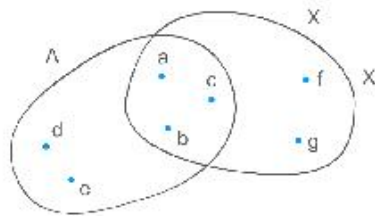
Hình 5

Vi dụ 1.6 :

Nếu $A = \{a, b, c, d, e\}$

và $X = \{a, b, c, f, g\}$

thì $A \not\subset X$.



Hình 6

Vi dụ 1.7 :

Tập hợp C các hình chữ nhật không phải là một tập con của tập hợp T các hình thoi: $C \not\subset T$.

Thật vậy, hình chữ nhật có chiều dài khác chiều rộng không phải là một hình thoi.

b) Hai tập hợp A và B được gọi là bằng nhau nếu mỗi phần tử của A là một phần tử của B và mỗi phần tử của B là một phần tử của A. Khi đó ta viết $A = B$.

Vi dụ 1.8 :

Tập hợp các nghiệm thực của phương trình $x^2 - 1 = 0$ bằng tập hợp gồm hai số -1 và 1:

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}.$$

Ví dụ 1.9 :

Nếu A là tập hợp các số nguyên chia hết cho 2 và 3 và B là tập hợp các số nguyên chia hết cho 6 thì $A = B$. Thật vậy, một số nguyên chia hết đồng thời cho 2 và 3 khi và chỉ khi nó chia hết cho 6. Như vậy một số nguyên là một phần tử của A khi và chỉ khi nó là một phần tử của B . Do đó A và B có cùng các phần tử.

Từ định nghĩa tập con và các tập hợp bằng nhau dễ dàng suy ra:

c) Với các tập hợp bất kì A, B, C , ta có:

(i) $\phi \subset A$,

(ii) $A \subset A$,

(iii) Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$,

(iv) Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì $A = B$,

(v) Nếu $A \neq B$ thì $A \not\subset B$ hoặc $B \not\subset A$.

(ii) gọi là tính phản xạ, (iii) gọi là tính bắc cầu, (iv) gọi là tính phản đối xứng).

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh (iv) và (v).

(iv) Giả sử $A \subset B$ và $B \subset A$. Khi đó mỗi phần tử của A là một phần tử của B và mỗi phần tử của B là một phần tử của A . Theo định nghĩa của hai tập hợp bằng nhau, từ đó suy ra $A = B$.

(v) Ta chứng minh (v) suy ra từ (iv) bằng phản chứng. Thật vậy, nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì $A = B$. Điều này trái với giả thiết.

1.3. Tập hợp những tập hợp

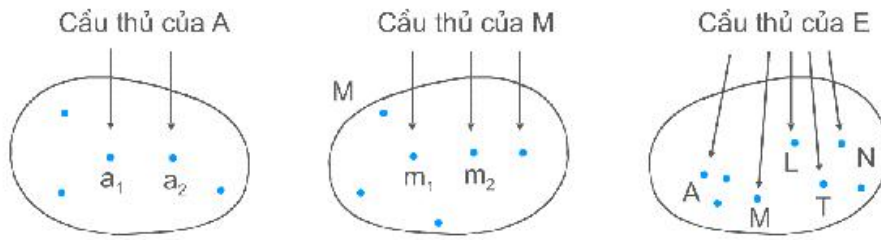
Formatted: Heading04

Ta xem một đội bóng của một câu lạc bộ bóng đá Anh, kí hiệu bởi A , là một tập hợp cầu thủ. Các phần tử của tập hợp này là những cầu thủ:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

Ta cũng có thể xét tập hợp E các đội bóng của các câu lạc bộ bóng đá Anh. Các phần tử của tập hợp này là những đội bóng: Arsenal (Manchester United), Chelsea, ..., Newcastle (Newcastle), Liverpool (Liverpool).

$$E = \{A, M, T, \dots, N, L\}$$



Hình 7

Tập hợp E vừa nêu là một tập hợp những tập hợp vì các phần của của E là những tập hợp.

Ta có:

$a_i \in A$: a_i là một cầu thủ của đội bóng A,

$A \in E$: đội bóng A thuộc tập hợp các đội bóng của các câu lạc bộ bóng đá Anh.

Không thể viết $a_i \in E$ vì mỗi phần tử của E là một đội bóng chứ không phải là một cầu thủ.

Ta xét một ví dụ khác:

Trường trung học phổ thông Nguyễn Trãi có 5 lớp 10: 10A, 10B, 10C, 10D và 10E.

Ta xem lớp 10A, kí hiệu bởi A, là một tập hợp học sinh. Các phần tử của tập hợp này là những học sinh. Ta viết:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

Ta cũng có thể nói đến tập hợp E các lớp khối 10 của trường. Các phần tử của tập hợp này là các lớp khối 10 của trường.

$$E = \{A, B, C, D, E\}.$$

Tập hợp các lớp khối 10 của trường là một tập hợp những tập hợp.

1.4. Số tập con của một tập hợp hữu hạn

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Nếu A là một tập hợp có n phần tử thì A có cả thảy bao nhiêu tập con? Ta chỉ xét trường hợp: $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

a) Với $n = 0$, ta có $A = \phi$.

Hiển nhiên ϕ chỉ có một tập con; đó là chính nó, tập hợp ϕ . Vậy tập hợp không có phần tử nào có một tập con.

b) $n = 1$.

Giả sử A là tập hợp một phần tử: $A = \{a\}$ (a là phần tử duy nhất của A). Khi đó, các tập hợp ϕ và $\{a\}$ là tất cả các tập con của A.

Vậy A có cả thảy 2 tập con.

Nếu kí hiệu $P(A)$ là tập hợp tất cả các tập con của tập hợp A thì ta có:

$$P(\phi) = \{\phi\} \text{ và } P(\{a\}) = \{\phi, \{a\}\}.$$

c) $n = 2$.

Giả sử tập hợp A có 2 phần tử a và b: $A = \{a, b\}$. Khi đó A có các tập con sau:

$$\phi, \{a\}, \{b\} \text{ và } \{a, b\}.$$

Đó là tất cả các tập con của A:

$$P(\{a, b\}) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}.$$

Vậy A có cả thảy 4 tập con.

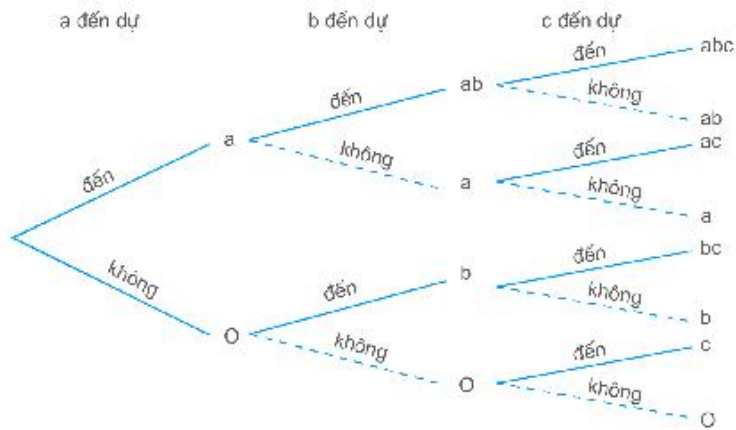
d) $n = 3$.

Để dễ hình dung, ta xét bài toán sau:

Giả sử có ba người a, b và c của một tập hợp A được mời dự khai mạc một cuộc triển lãm (ba người được mời độc lập với nhau).

Hỏi có thể có bao nhiêu sự kết hợp khác nhau về sự có mặt của mỗi người trong ngày khai mạc triển lãm?

Ta hãy xét mọi khả năng (a đến hoặc không, b đến hoặc không, c đến hoặc không) và biểu diễn chúng trên một cây chẽ đôi, tức là một cây mà mọi sự phân cành đều có được từ cặp “đến, không”.



Hình 8

Trên Hình 8, ta thấy có cả thảy 8 khả năng, mỗi khả năng tương ứng với một tập con của $A = \{a, b, c\}$, kể cả tập con là ϕ .

Tập hợp tất cả các tập con của A là:

$$P(\{a, b, c\}) = \{\{a, b, c\}; \{a, b\}; \{a, c\}; \{b, c\}; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \phi\}.$$

Vậy tập hợp $A = \{a, b, c\}$ có cả thảy 8 tập con.

e) $n = 4$.

Giả sử tập hợp B có bốn phần tử a, b, c, d : $B = \{a, b, c, d\}$. Có thể nghĩ đến một người thứ tư, d, cũng được mời đến dự khai mạc triển lãm. Khi đó, từ mỗi trường hợp trong 8 trường hợp vừa nêu trong d), sẽ có hai khả năng, tùy thuộc vào việc d đến hay không đến dự khai mạc. Do đó tập hợp tất cả các tập con của tập hợp B là:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(\{a, b, c, d\}) \\ &= \{\{a, b, c\}; \{a, b\}; \{a, c\}; \{b, c\}; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \phi; \\ &\quad \{a, b, c, d\}; \{a, b, d\}; \{a, c, d\}; \{b, c, d\}; \{a, d\}; \{b, d\}; \{c, d\}; \\ &\quad \{d\}\}. \end{aligned}$$

Vậy tập hợp $B = \{a, b, c, d\}$ có cả thảy 16 tập con.

Đó là 8 tập con của tập hợp $A = \{a, b, c\}$ và 8 tập hợp mới, nhận được bằng cách thêm d vào mỗi tập hợp con của A.

Như vậy,

Tập hợp ϕ có cả thảy $1 = 2^0$ tập con.

Tập hợp có 1 phần tử có cả thảy $2 = 2^1$ tập con.

Tập hợp có 2 phần tử có cả thảy $4 = 2^2$ tập con.

Tập hợp có 3 phần tử có cả thảy $8 = 2^3$ tập con.

Tập hợp có 4 phần tử có cả thảy $16 = 2^4$ tập hợp con, ...

Bằng phương pháp quy nạp, có thể chứng minh được rằng tập hợp có n phần tử có cả thảy 2^n tập hợp con.

Hoạt động 1.1. tìm hiểu các khái niệm cơ bản của tập hợp

Sinh viên tự đọc thông tin nguồn để thực hiện các nhiệm vụ dưới đây:

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1: Tìm hiểu về:

- Khái niệm tập hợp, các phần tử của một tập hợp.
- Hai cách xác định một tập hợp:
 - Liệt kê các phần tử của tập hợp.
 - Nêu lên được một tính chất đặc trưng của các phần tử của tập hợp.
- Tập hợp \emptyset (cho các ví dụ về tập hợp \emptyset).
- Cách biểu diễn một tập hợp (hữu hạn và vô hạn) bằng lược đồ Ven.

Nhiệm vụ 2

Thảo luận để có thể giải thích được các nội dung sau:

- Định nghĩa tập con của một tập hợp và các tập hợp bằng nhau. (Phân biệt được các phần tử và các tập con của một tập hợp cho trước).
- Cách biểu diễn tập con của một tập hợp bằng lược đồ Ven.
- Một vài tính chất của quan hệ bao hàm. (Nêu và chứng minh được các tính chất đó).

Nhiệm vụ 3:

- Hiểu được thế nào là tập hợp của một số tập hợp. (Hãy cho một vài ví dụ về tập hợp những tập hợp).
- Liệt kê được tất cả các tập con của một tập hợp có n phần tử với $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
- Biết cách tính số các tập hợp con của một tập hợp hữu hạn.

Đánh giá hoạt động 1.1

1. Hãy liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

- a) A là tập hợp các bội tự nhiên của 3 lớn hơn 20 và nhỏ hơn 40;
- b) B là tập hợp các số nguyên tố lớn hơn 30 và nhỏ hơn 50;
- c) C là tập hợp các ước tự nhiên của 36.

2. Hãy liệt kê các phần tử của các tập hợp sau:

- a) $A = \{x \in \mathbb{N} : 2x^2 - 15x + 13 < 0\}$;
- b) $B = \{x \in \mathbb{R} : 2x^3 + 5x^2 + 3x = 0\}$;
- c) $C = \{x \in \mathbb{Z} : 6x^2 + x - 1 = 0\}$.

3. Cho các tập hợp

$$A = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27\};$$

$$B = \{17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\};$$

$$C = \left\{1, \frac{5}{11}, \frac{8}{11}, \frac{35}{11}\right\}$$

Hãy nêu một tính chất đặc trưng của các phần tử của mỗi tập hợp đã cho (tức là tính chất, nhờ đó nhận biết được một đối tượng là phần tử hay không phải là phần tử của tập hợp đã cho).

4. Cho các tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - 4 < 0\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} : 2x^2 - x < 10\};$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 20 < 11\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 + 1)(2x - 1) > 0\}.$$

Chứng minh rằng:

$$A \subset B \text{ và } C \subset D.$$

5. Cho A là tập hợp các ước tự nhiên của 30 và

$$B = \{x \in \mathbb{N} : 4x^2 - 4x > 3\}.$$

Đúng ghi Đ, sai ghi S vào ô trống:

$$\pm A \subset B; \quad \pm B \subset A; \quad \pm A \not\subset B; \quad \pm B \subset A$$

6. Gọi C là tập hợp các tam giác cân, D là tập hợp các tam giác đều và V là tập hợp các tam giác vuông. Đúng ghi Đ, sai ghi S vào ô trống.

$$\begin{array}{llll} \pm V \subset C; & \pm C \subset V; & \pm V \not\subset C; & \pm C \subset V \\ \pm D \subset C; & \pm C \subset D; & \pm D \not\subset V; & \pm V \subset D \end{array}$$

7. Gọi A là tập hợp các chữ số $\overline{135x}$ sao cho số tự nhiên chia hết cho 4 và B là tập hợp các chữ số $\overline{137y}$ sao cho số tự nhiên chia hết cho 2. Chứng minh rằng: $A = B$

8. Cho tập hợp $A = \{a, b, c\}$. Đúng ghi Đ, sai ghi S vào ô trống:

$$\begin{array}{llll} \pm a \in A & \pm \{a\} \in A & \pm \{a\} \in A & \pm \{a, b\} \in A \\ \pm \{a, b\} \subset A & \pm b \subset \{b, c\} & \pm \{b\} \subset \{b, c\} & \pm \{b\} \subset \{b, c\} \end{array}$$

9. Cho tập hợp $A = \{a, a, a\}$. Gọi $P(A)$ là tập hợp tất cả các tập hợp con của tập hợp A.

a) Hãy liệt kê tất cả các phần tử của $P(A)$.

b) $P(A)$ có bao nhiêu phần tử?

10. Cho tập hợp $B = \{a, a, a, a\}$. Gọi $P(B)$ là tập hợp tất cả các tập hợp con của tập hợp Aa) Hãy liệt kê tất cả các phần tử của $P(B)$.

b) $P(B)$ có bao nhiêu phần tử?

11. Cho các tập hợp $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b, c, d\}$. Trong hai cách viết sau đây, cái nào đúng, cái nào sai?

a) $P(A) \in P(B)$; b) $P(A) \subseteq P(B)$.

12. Bằng phương pháp quy nạp, hãy chứng minh rằng nếu tập hợp A có n phần tử thì nó có cả thảy 2^n tập con.

TIÊU CHỦ ĐỀ 1.2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN CÁC TẬP HỢP

Thông tin cơ bản

2.1. Giao của các tập hợp

Formatted: Heading03

a) Giao của hai tập hợp A và B là tập hợp tạo nên bởi các phần tử chung của hai tập hợp đó, kí hiệu là:

$$A \cap B \text{ (đọc là A giao B)}$$

Từ định nghĩa của $A \cap B$ suy ra rằng $x \in A \cap B$ khi và chỉ khi $x \in A$ và $x \in B$. Ta viết:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in B.$$

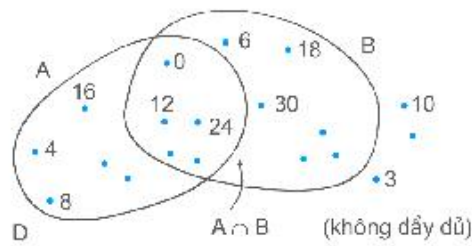
Ví dụ 2.1 :

Nếu A là tập hợp các bội tự nhiên của 4 và B là tập hợp các bội tự nhiên của 6:

$$A = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, \dots\}; B = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, \dots\}$$

thì $A \cap B$ là tập hợp các bội tự nhiên của 12:

$$A \cap B = \{0, 12, 24, 36, \dots\}$$



Hình 9

Ví dụ 2.2 :

Cho tập hợp

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 2x - 1 < 0\}.$$

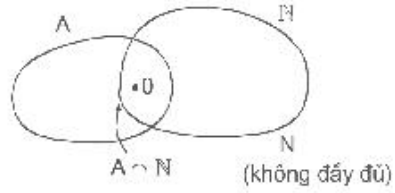
Tìm $A \cap \mathbb{N}$ (\mathbb{N} là tập hợp các số tự nhiên).

Ta có:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x < \frac{1}{2}\}$$

Do đó:

$$A \cap \mathbb{N} = \{0\}.$$



Hình 10

Hai tập hợp A và B gọi là không giao nhau hoặc rời nhau nếu $A \cap B = \emptyset$.

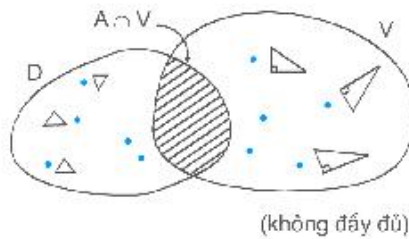
Vi dụ 2.3 :

Nếu D là tập hợp các tam giác đều và V là tập hợp các tam giác vuông thì D và V là hai tập hợp rời nhau.

Thật vậy, một tam giác không thể vừa đều vừa vuông.

Do đó: $D \cap V = \emptyset$

Phần có các đường gạch chéo trong Hình 11 biểu thị tập hợp \emptyset .

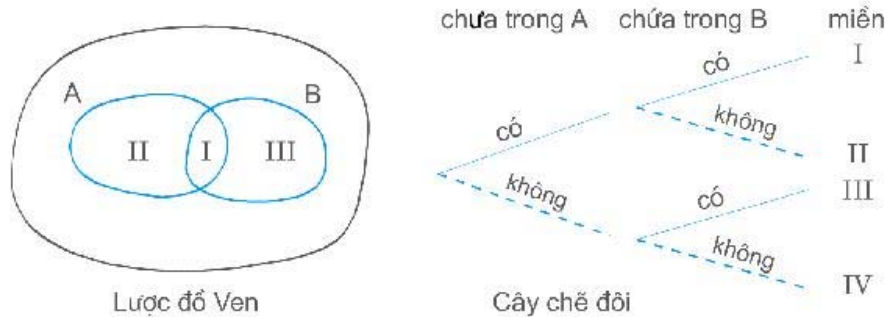


Hình 11

Từ định nghĩa giao của hai tập hợp suy ra rằng:

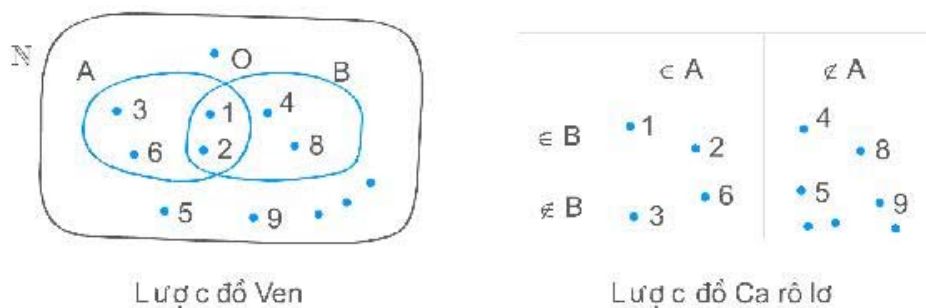
$$x \notin A \vee x \notin B \iff x \notin A \cap B$$

b) Đối với hai tập hợp A và B bất kì, ta có lược đồ Ven dưới đây. Lược đồ chỉ ra bốn miền được đánh số I, II, III, IV. Các miền này được làm rõ bởi một cây chẻ đôi.



Hình 12

Người ta cũng biểu diễn bốn miền này trong một bảng của hai tập hợp A, B. Bảng này được gọi là lược đồ Carôlơ (Caroll).



Hình 13

Ví dụ 2.4 :

Gọi A là tập hợp các ước tự nhiên của 6 và B là tập hợp các ước tự nhiên của 8. Các miền I, II, III, IV được cho trong lược đồ Ven là lược đồ Carôlơ trong Hình 13.

Một số tính chất của phép lấy giao các tập hợp

Từ định nghĩa giao của hai tập hợp, dễ dàng chứng minh được các đẳng thức sau:

c) Với các tập hợp bất kì A, B, C, ta có:

- (i) $A \cap B = B \cap A,$
- (ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$

(iii) $\phi \cap A = \phi$,

(iv) $A \cap A = A$

Đẳng thức (ii) cho phép, khi lấy giao của một số hữu hạn tập hợp, bỏ các dấu ngoặc hoặc chỉ thứ tự phép lấy giao.

Quan hệ giữa bao hàm thức và giao của các tập hợp được cho trong định lí sau:

d) Với các tập hợp bất kì A, B, C, D , ta có:

(i) $A \cap B \subset A, A \cap B \subset B$,

(ii) Nếu $A \subset B$ và $A \subset C$ thì $A \subset B \cap C$,

(iii) Nếu $A \cap B$ và $C \cap D$ thì $A \cap C \subset B \cap D$,

(iv) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Chứng minh:

(ii) giả sử $A \subset B, A \subset C$ và x là một phần tử bất kì của A . Khi đó, $x \in B$ và $x \in C$; do đó $x \in B \cap C$.

(iv) (\Rightarrow) Giả sử $A \subset B$. Khi đó, nếu $x \in A$ thì $x \in B$, do đó $x \in A \cap B$. Từ đó ta có $A \subset A \cap B$. Mặt khác, theo (i), $A \cap B \subset A$. Từ hai bao hàm thức trên suy ra $A \cap B = A$.

(\Leftarrow) giả sử $A \cap B = A$. Khi đó, nếu $x \in A$ thì $x \in A \cap B$; do đó $x \in B$. Vậy $A \subset B$.

e) Các mảnh logic Diênétxơ (Diénès)

Đó là một bộ gồm 48 mảnh gỗ, đôi một được phân biệt bởi ít nhất là một thuộc tính (tiêu chuẩn) và nhiều nhất là bốn thuộc tính.

Mỗi mảnh gỗ được xác định bởi bốn thuộc tính:

1.^o Màu sắc

2.^o Hình dạng

3.^o Độ lớn

4.^o Độ dày

1.^o Có ba màu: Đỏ, xanh và Nâu, đ-ợc kí hiệu bởi các chữ:

Đ X N

Có 16 mảnh cùng màu.

2.^o Có bốn hình dạng: Hình vuông, hình chữ nhật, tam giác và hình tròn, kí hiệu bởi các chữ.

V C T H

Có 12 mảnh cùng hình dạng.

3.^o Có hai độ lớn: Lớn và Bé, kí hiệu bởi các chữ:

L B

Có 24 mảnh cùng độ lớn.






















4.^o Có hai độ dày: Dày và Mỏng, kí hiệu bởi các chữ:

D M







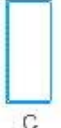












































Có 24 mảnh cùng độ dày.

Mỗi mảnh đ-ợc xác định bởi bốn chữ tượng trưng cho bốn thuộc tính, nhờ đó phân biệt đ-ợc nó với các mảnh khác. Bốn thuộc tính đ-ợc nhắc đến theo thứ tự sau:

Hình dạng – Độ lớn – Màu sắc – Độ dày.

		● Đ	● X	● N			
		 D	 M	 D	 M	 D	 M
 V	 B						
							

Hình 14

		● Đ	● X	● N			
		 D	 M	 D	 M	 D	 M
 C	 B						
							
 T	 B						
							
 H	 B						
							

Hình 14

Chẳng hạn,

VLDD hay CBXM

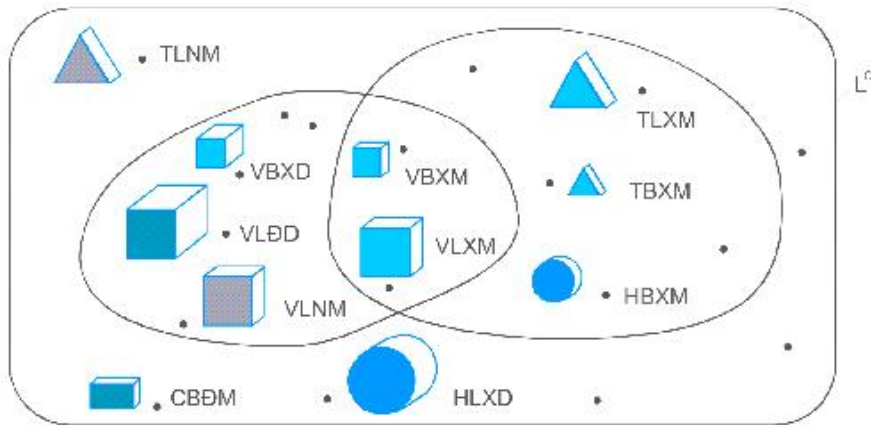
Hình vuông lớn đỏ dày Hình chữ nhật bé xanh mỏng.

Tập hợp tất cả các mảnh logic Điênétxơ được kí hiệu là L^0

Các tập con những mảnh logic được kí hiệu bởi một, hai hoặc ba chữ.

Chẳng hạn, V là tập hợp các mảnh hình vuông và XM là tập hợp các mảnh xanh mỏng. Lược đồ Ven của hai tập hợp này được cho trong Hình 15. Để thấy.

$$\begin{aligned}
 V \cap XM &= \{x : x \text{ là một mảnh vuông xanh mỏng}\} \\
 &= \{VBXM, VLXM\}
 \end{aligned}$$



Hình 15

2.2. Hợp của các tập hợp

Formatted: Heading3

a) Hợp của hai tập hợp A và B là tập hợp tạo nên bởi các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp đó, kí hiệu là $A \cup B$ (đọc là A hợp B).

Từ định nghĩa của $A \cup B$ suy ra rằng:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ hoặc } x \in B.$$

Ví dụ 2.5 :

Nếu $A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{b, e, f, g\}$ thì

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

Ví dụ 2.6 :

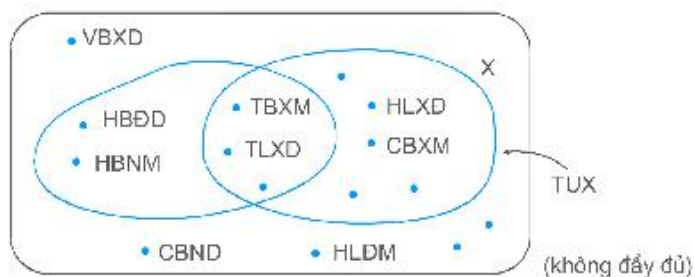
Hợp của tập hợp các số hữu tỉ và tập hợp các số vô tỉ là tập hợp các số thực.
Hợp của tập hợp Z các số nguyên và tập hợp Q các số hữu tỉ là tập hợp Q :
 $Z \cup Q = Q$.

Từ định nghĩa hợp của hai tập hợp suy ra rằng:

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ và } x \notin B.$$

Ví dụ 2.7 :

Xét tập hợp T các mảnh tam giác và tập hợp X các mảnh có màu xanh trong bộ các mảnh Logic Điênétơ. Khi đó $T \cup X$ là tập hợp các phần tử thuộc T hoặc thuộc X . Đó là tập hợp các mảnh hình tam giác hoặc có màu xanh.



Hình 16

TUX là tập hợp các mảnh tam giác hoặc xanh.

Một số tính chất của phép lấy hợp các tập hợp

Từ định nghĩa của hợp các tập hợp dễ dàng suy ra:

b) Với các tập hợp bất kì A, B, C,

- (i) $A \cup B = B \cup A$,
- (ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
- (iii) $\phi \cup A = A$,
- (iv) $A \cup A = A$.

Đẳng thứ (ii) cho phép, khi lấy hợp của một số hữu hạn tập hợp, bỏ các dấu ngoặc chỉ thứ tự các phép lấy hợp.

Quan hệ giữa bao hàm thức và phép lấy hợp được cho trong định lí sau:

c) Với các tập hợp bất kì A, B, C, D,

- (i) $A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$,
- (ii) Nếu $A \subset C$ và $B \subset C$ thì $A \cup B \subset C$,
- (iii) Nếu $A \subset C$ và $B \subset D$ thì $A \cup B \subset C \cup D$,
- (iv) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Chứng minh

(ii) giả sử $A \subset C$ và $B \subset C$. Khi đó, nếu $x \in A \cup B$ thì $x \in A$ hoặc $x \in B$. Do đó $x \in C$. Vậy $A \cup B \subset C$.

(iv) (\Rightarrow) Giả sử $A \subset B$. Khi đó, nếu $x \in A \cup B$ thì $x \in B$ hoặc $x \in A \setminus B$, do đó $x \in B$. Vậy $A \cup B \subset B$. Mặt khác, theo (i), ta có $B \subset A \cup B$. Từ hai bao hàm thức vừa nêu suy ra $A \cup B = B$.

(\Leftarrow) Giả sử $A \cup B = B$. Khi đó, theo (i), ta có:

$$A \subset A \cup B = B.$$

Định lí sau nêu lên quan hệ giữa hai phép lấy hợp và giao của các tập hợp.

d) Với các tập hợp bất kì A, B, C ,

(i) $A \cap (A \cup B) = A$,

(ii) $(A \cap B) \cup B = B$,

(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

(iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Chứng minh

(i) Vì $A \subset A \cup B$ nên $A \cap (A \cup B) = A$ (theo (iv) trong 1.d)).

(ii) Vì $A \cap B \subset B$ nên $(A \cap B) \cup B = B$ (theo (iv) trong c)

(iii) Giả sử $x \in A \cap (B \cup C)$. Khi đó $x \in A$ và $x \in B \cup C$.

Do đó $x \in A$ và $x \in B$ hoặc $x \in C$. Nếu $x \in A$ và $x \in B$ thì $x \in A \cap B$. Do đó $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Tương tự, nếu $x \in A$ và $x \in C$ thì $x \in A \cap C$. Do đó $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Vậy:

$$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (1)$$

Đảo lại, nếu $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ thì $x \in A \cap B$ hoặc $x \in A \cap C$.

Nếu $x \in A \cap B$ thì $x \in A$ và $x \in B \subset B \cup C$; do đó $x \in A \cap (B \cup C)$.

Nếu $x \in A \cap C$ thì, chứng minh tương tự, ta cũng được $x \in A \cap (B \cup C)$.

Vậy:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \quad (2)$$

Từ hai bao hàm thức (1) và (2) suy ra đẳng thức trong (iii) cần chứng minh:

(iv) được chứng minh tương tự

Công thức (iii) cho thấy phép hợp có tính phân phối đối với phép giao; công thức (iv) cho thấy phép giao có tính phân phối đối với phép hợp.

2.3. Hiệu của hai tập hợp

a) Hiệu của hai tập hợp A và B là tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B , kí hiệu là $A \setminus B$ (đọc là A trừ B).

Từ định nghĩa của $A \setminus B$ suy ra:

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \notin B.$$

Vi dụ 2.8 : Cho hai tập hợp:

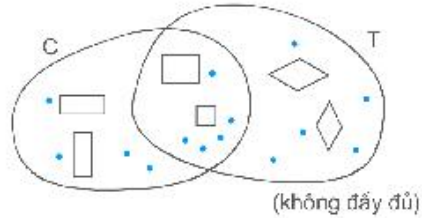
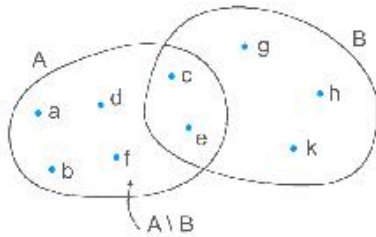
$$A = \{a, b, c, d, e, f\}, B = \{c, e, g, h, k\}.$$

Khi đó:

$$A \setminus B = \{a, b, d, f\}$$

Vi dụ 2.9 :

Gọi C là tập hợp các hình chữ nhật, T là tập hợp các hình thoi. Khi đó, $C \setminus T$ là tập hợp các hình chữ nhật mà không phải là hình thoi (Hình 18).



Hình 17

Hình 18

Đó cũng chính là tập hợp các hình chữ nhật mà không phải là hình vuông.

Vi dụ 2.10 :

Hiệu của tập hợp các số thực và tập hợp các số hữu tỉ là tập hợp các số vô tỉ. Hiệu của tập hợp N các số tự nhiên và tập hợp Z là tập hợp rỗng: $N \setminus Z = \emptyset$.

Từ định nghĩa hiệu hai tập hợp suy ra rằng:

$$x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \notin A \text{ hoặc } x \in B.$$

Một số tính chất của phép trừ

Quan hệ giữa bao hàm thức và phép lấy hiệu hai tập hợp được cho trong định lí sau:

b) Với các tập hợp bất kì A, B, C, D, ta có:

- (i) $A \setminus B \subset A$,
- (ii) Nếu $A \subset B$ và $C \subset D$ thì $A \setminus D \subset B \setminus C$,
- (iii) Nếu $C \subset D$ thì $A \setminus D \subset A \setminus C$,
- (iv) $A \subset B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.

Chứng minh:

(ii) Nếu $x \in A \setminus D$ thì $x \in A$ và $x \notin D$. Vì $A \subset B$ và $x \in A$ nên $x \in B$. Vì $C \subset D$ và $x \notin D$ nên $x \notin C$. Như vậy, ta có $x \in B$ và $x \notin C$; do đó $x \in B \setminus C$. Vậy $A \setminus D \subset B \setminus C$.

(iii) Vì $A \subset A$ nên trong (ii), thay B bởi A , ta được (iii).

(iv) suy ra từ định nghĩa hiệu của hai tập hợp.

Quan hệ giữa phép trừ với hai phép hợp và giao các tập hợp được nêu trong định lí sau:

c) Với các tập hợp bất kì A, B, C , ta có:

(i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

(ii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(i) và (ii) được gọi là các công thức Moocgăng (Morgan).

Chứng minh:

(i) $x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ và $x \notin B \cup C$.

$$x \notin B \cup C \Leftrightarrow x \notin B \text{ và } x \notin C.$$

Do đó:

$$x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \notin B \text{ và } x \notin C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \setminus B \text{ và } x \in A \setminus C.$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Từ đó ta có đẳng thức (i).

(ii) được chứng minh tương tự.

2.4. Không gian. Phần bù của một tập hợp

Formatted: Heading03

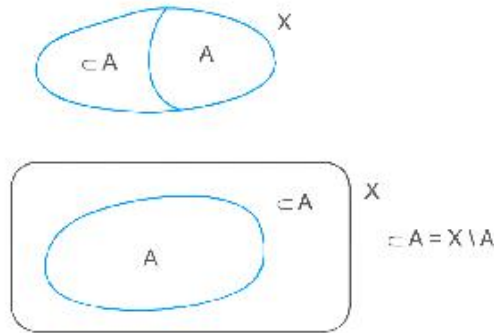
a) Trong các ứng dụng của lí thuyết tập hợp, các tập hợp được xét thường là các tập con của một tập hợp X cho trước. Tập hợp X được gọi là không gian.

Chẳng hạn, trong số học, người ta chỉ xét các tập con của tập hợp N các số tự nhiên. Khi đó, ta có không gian N . Trong giải tích, tập hợp \mathbb{R} các số thực được xem là không gian và trong hình học, tập hợp các điểm của không gian Oclit được xem là không gian.

Khi nghiên cứu các tập con của một không gian X , người ta thường đồng nhất một tập hợp con A của X với một tính chất đặc trưng T của các phần tử của A : Chỉ các phần tử của A có tính chất T , các phần tử khác của X không có tính chất đó. Khi đó, thay cho $x \in A$, ta nói x có tính chất T . Chẳng hạn, tập hợp P các số nguyên tố là một tập hợp con của không gian N các số tự nhiên. Thay cho $x \in P$, ta nói rằng x là một số nguyên tố. Tương

tự, tập hợp N các nghiệm thực của phương trình $(x^2 - 2)(x^2 + x - 6) = 0$ là một tập hợp con của không gian \mathbb{R} các số thực. Thay cho $x \in N$, là nói rằng x là một nghiệm thực của phương trình vừa xét.

b) Giả sử X là một không gian và A là một tập con của X . Tập hợp $X \setminus A$ được gọi là phần bù của A và được kí hiệu là CA .



Hình 19

Chú ý rằng phần bù của một tập hợp phụ thuộc vào không gian chứa nó. Chẳng hạn, tập hợp $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ có phần bù trong không gian N các số tự nhiên là tập hợp các số tự nhiên lớn hơn 4, nhưng trong không gian Z các số nguyên, phần bù của A là tập hợp gồm các số nguyên âm và các số nguyên lớn hơn 4.

Từ định nghĩa phần bù của một tập hợp suy ra rằng:

Nếu X là một không gian và $A \subset X$ thì với mọi $x \in X$,

$$x \in CA \Leftrightarrow x \notin A.$$

Một số tính chất của phần bù của tập hợp

Từ định nghĩa của phần bù một tập hợp, dễ dàng chứng minh được rằng:

c) Với các tập con bất kì A, B của không gian X , ta có:

- (i) $X \cap A = A$,
- (ii) $X \cup A = X$,
- (iii) $CA \cap X = CA$,
- (iv) $C\emptyset = X$,
- (v) $CCA = A$,

$$(vi) \quad A \subset B \Leftrightarrow CB \subset CA.$$

Chứng minh

(v) Nếu $x \in C(CA)$ thì $x \notin CA$; do đó $x \in A$.

Vậy $CCA \subset A$. Đảo lại, nếu $x \in A$ thì $x \notin CA$, do đó $x \in C(CA)$. Vậy $A \subset CCA$. Từ hai bao hàm thức vừa nêu suy ra đẳng thức cần chứng minh.

Quan hệ giữa một tập hợp bất kì với phần bù của nó trong không gian.

d) Với mọi tập con A của không gian X , ta có:

$$(i) \quad A \cup CA = X,$$

$$(ii) \quad A \cap CA = \phi.$$

Chứng minh

(i) Nếu $x \in X$ thì $x \in A$ hoặc $x \notin A$, do đó x thuộc ít nhất một trong hai tập hợp A và CA , tức là $x \in A \cup CA$. Đảo lại, nếu $x \in A \cup CA$ thì x thuộc ít nhất một trong hai tập hợp A và CA . Vì cả hai tập hợp này đều là những tập hợp con của X nên $x \in X$. Từ đó ta có đẳng thức (i).

(ii) Nếu $x \in A \cap CA$ thì $x \in A$ và $x \in CA$, tức là $x \in A$ và $x \notin A$, điều này là vô lí. Vậy tập hợp $A \cap CA$ không có phần tử nào, tức là $A \cap CA = \phi$.

Từ định lí 3 c) và định nghĩa phần bù của tập hợp suy ra rằng:

e) Với hai tập hợp con bất kì A, B của không gian X , ta có:

$$(i) \quad C(A \cup B) = (CA \cap CB),$$

$$(ii) \quad C(A \cap B) = CA \cup CB.$$

Như vậy, phần bù của tập hợp hai tập hợp bằng giao các phần bù của chúng và phần bù của giao hai tập hợp bằng hợp các phần bù của chúng.

(i) và (ii) gọi là các công thức Moóc-găng.

Quan hệ giữa hiệu của hai tập hợp con bất kì của một không gian với các phép lấy phần bù, hợp và giao được nêu trong định lí sau:

f) Với hai tập hợp con bất kì A, B của không gian X , ta có:

$$(i) \quad A \setminus B = A \cap [B],$$

$$(ii) \quad A \setminus B = C(CA \cup B).$$

Chứng minh

$$(i) \quad x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \text{ và } x \in [B] \Leftrightarrow x \in A \cap [B].$$

Do đó ta có đẳng thức trong (i).

(ii) Theo (v) trong c), ta có:

$$A \setminus B = C(A \cap B).$$

Từ (i) và (ii) trong e) suy ra:

$$[(A \setminus B) \cap B] \cup [A \cap B] = [A \cup B] \cap [B \cup A] = [A \cup B]$$

$$\text{Do đó: } A \setminus B = C(A \cap B)$$

Định lí sau thường được sử dụng trong thực hành:

g) Với hai tập hợp con bất kì A, B của không gian X,

$$(i) \quad A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A,$$

$$(ii) \quad A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

Chứng minh

(i) Ta biết rằng $A \subset B$ khi và chỉ khi $A \cap B = A$. Mặt khác, ta có $A \setminus B = A \cap B^c$ (xem (i) trong f)). Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh:

(ii) Theo (i), chỉ cần chứng minh

$$A \cap B^c = \emptyset \Leftrightarrow A \cup B = B.$$

Thật vậy, các điều kiện sau là tương đương:

$$A \cap B^c = \emptyset,$$

$$C(A \cap B^c) = X,$$

$$A \cup B = X \text{ (suy ra từ công thức Đơ-Mooc-găng)}$$

$$A \cup B = B$$

b. hoạt động.

Sinh viên tự đọc thông tin cơ bản, sau đó thảo luận theo nhóm 2, 3 người để thực hiện các nhiệm vụ dưới đây. Mỗi nhóm cử đại diện trình bày để giáo viên tổng kết:

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1:

- Nắm vững định nghĩa giao của hai tập hợp và có kỹ năng thành thạo trong việc tìm giao của hai tập hợp cho trước.
- Lập được lược đồ Ven và lược đồ Carôlơ đối với hai tập hợp A và B cho trước.
- Nắm vững các tính chất của phép lấy giao các tập hợp.

Nhiệm vụ 2:

Formatted: Heading03

Formatted: Heading03

- Nắm vững định nghĩa hợp của hai tập hợp và có kĩ năng thành thạo trong việc tìm hợp của hai tập hợp cho trước.
- Lập được lược đồ Ven của hợp hai tập hợp.
- Nắm vững các tính chất của phép lấy hợp các tập hợp.
- Nắm vững quan hệ giữa phép lấy hợp và lấy giao các tập hợp.

Nhiệm vụ 3:

Formatted: Heading03

- Nắm vững định nghĩa hiệu của hai tập hợp và có kĩ năng thành thạo trong việc tìm hiệu của hai tập hợp cho trước.
- Lập được lược đồ Ven của hiệu của hai tập hợp.
- Nắm vững các tính chất của phép trừ tập hợp:
 - Quan hệ giữa phép trừ và bao hàm thức.
 - Quan hệ giữa phép trừ và phép lấy hợp và giao các tập hợp.

Nhiệm vụ 4:

Formatted: Heading03

- Nắm vững khái niệm không gian và định nghĩa phần bù của một tập hợp và có kĩ năng thành thạo trong việc tìm phần bù của một tập hợp cho trước.
- Nắm vững một số tính chất của phần bù của tập hợp:
 - Quan hệ giữa một tập hợp con của một không gian với phần bù của nó.
 - Phép lấy phần bù của hợp và giao của hai tập hợp (các công thức Moócgăng).
 - Quan hệ giữa phần bù của tập hợp và bao hàm thức.
 - Quan hệ giữa phần bù của tập hợp với phép trừ các tập hợp.

Đánh giá hoạt động 1. 2

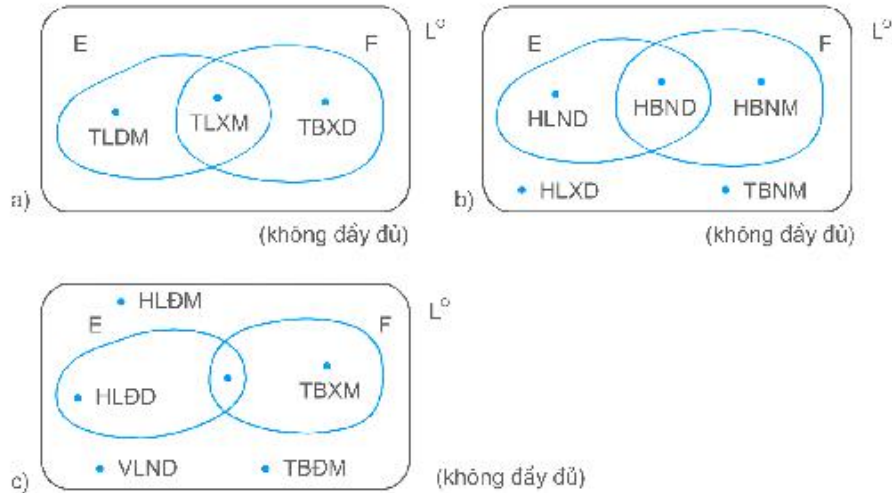
Formatted: Heading02

- Gọi A là tập hợp các số lẻ giữa 10 và 40 (lớn hơn 10 và nhỏ hơn 40) và B là tập hợp các số nguyên tố giữa 10 và 40.
 - Tìm các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ và $B \setminus A$.
 - Lập lược đồ Ven đối với hai tập hợp A và B.
- Gọi A là tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 2 và B là tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 5.
 - Tìm các tập hợp $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ và $B \setminus A$.
 - Lập sơ đồ Ven đối với A và B.
- Gọi V là tập hợp các tam giác vuông và C là tập hợp các tam giác cân.
 - Tìm các tập hợp $V \cap C$, $V \cup C$, $V \setminus C$ và $C \setminus V$.
 - Lập lược đồ Ven đối với hai tập hợp V và C.

4. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 5\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x < 0\}$

Tìm các tập hợp $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ và $B \setminus A$.

5. Tìm hai tập hợp E và F những mảnh logic Đêniétxơ ($E, F \in L^\circ$) trong mỗi lược đồ dưới đây biết rằng mỗi tập hợp được xác định bởi hai thuộc tính và giao $E \cap F$ là tập một điểm:

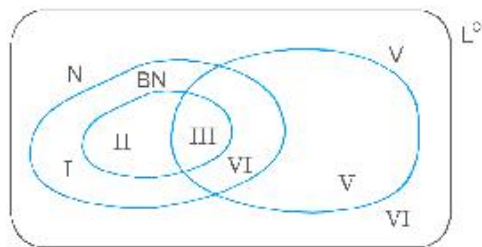


Hình 20

6. Trong tập hợp L° các mảnh logic Đêniétxơ, gọi N là tập hợp các mảnh nâu, BN là tập hợp các mảnh bé nâu và V là tập hợp các hình vuông.

a) Xác định các miền II, IV và V bằng cách nêu một tính chất đặc trưng của các phần tử của mỗi miền.

b) Tính số phần tử của mỗi miền.



Hình 21

7. Chứng minh rằng với các tập hợp bất kì A, B, ta có:

a) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; b) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$;

c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

8. Chứng minh rằng với ba tập hợp A, B, C bất kì, ta có:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$;

b) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;

c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

9. Chứng minh rằng với hai tập hợp con bất kì A, B của không gian X,

nếu $[A \cup [B = [A$ và $B \subset A$ thì $A = B$.

10. Chứng minh rằng với hai tập hợp con A và B bất kì của không gian X,

$$A \subset B \Leftrightarrow [A \cap [B = [B.$$

11. Hiệu đối xứng của hai tập hợp A và B, kí hiệu là $A \Delta B$, là tập hợp các phần tử thuộc A hoặc thuộc B nhưng không thuộc đồng thời cả hai tập hợp đó:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Chứng minh rằng:

a) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$,

b) $A \Delta B = B \Delta A$,

c) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$,

d) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$,

e) $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$,

f) $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$.

12. Chứng minh rằng với ba tập hợp A, B, C bất kì,

$$A \Delta B = C \Rightarrow B = A \Delta C.$$

13. Với hai tập hợp con bất kì A, B của không gian X, ta định nghĩa hợp và giao của hai tập hợp đó dựa vào quan hệ bao hàm như sau:

$A \ B$ là tập con nhỏ nhất của X chứa A và B,

$A \ B$ là tập con lớn nhất của X chứa trong A và trong B.

a) Chứng minh các định nghĩa này tương đương với các định nghĩa đã biết.

b) áp dụng các định nghĩa vừa nêu, hãy chứng minh các khẳng định sau:

(i) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$,

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

(iii) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

A, B, C là những tập con bất kì của không gian X.

14. Cho không gian (tập hợp X). Tập hợp các tập con A_1, A_2, \dots, A_m gọi là một phép phân hoạch của X nếu các điều kiện sau được thoả mãn.

(i) $A_i \neq \emptyset$ với $i = 1, 2, \dots, m$,

(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$ với $i \neq j$ (tức là các tập hợp A_1, A_2, \dots, A_m đôi một rời nhau),

(iii) $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = X$.

Chứng minh rằng mỗi tập các tập con sau đây của L^0 là một phép phân hoạch của L^0 :

a) $\{\emptyset, X, N\}$;

b) $\{C, V, T, H\}$;

c) $\{LM, BM, LD, BD\}$;

d) $\{B\emptyset, LX, BX, L\emptyset, N\}$.

15. Gọi A là tập hợp các bội tự nhiên của 3, B là tập hợp các số tự nhiên n sao cho $n - 1$ là một bội tự nhiên của 3 và C là tập hợp các số tự nhiên n sao cho $n - 2$ là một bội tự nhiên của 3. Chứng minh rằng:

$\{A, B, C\}$ là một phép phân hoạch của không gian N.

16. Với một tập hợp hữu hạn A bất kì, kí hiệu $N(A)$ chỉ số phần tử của A. Chứng minh rằng với hai tập hợp hữu hạn A, B bất kì, ta có:

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B).$$

17. Cho ba tập hợp hữu hạn A, B, C. Chứng minh rằng:

$$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) + N(A \cap B \cap C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C).$$

18. Trong một lớp học ngoại ngữ, tập hợp A các học viên nữ có 4 phần tử, tập hợp B các học viên từ 20 tuổi trở lên có 5 phần tử. Có 3 học viên nữ từ 20 tuổi trở lên. Tìm số phần tử của tập hợp $A \cup B$.

19. Trên một bãi đỗ xe, có 42 xe gồm taxi và xe buýt. Có 14 xe màu vàng và 37 xe buýt hoặc xe không có màu vàng. Hỏi trên bãi đỗ xe có bao nhiêu xe buýt vàng?

20. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 15 em học khá môn Toán, 16 em học khá môn Văn và 17 em học khá môn Tiếng Anh. Có 5 em học khá cả hai môn Văn và Toán, 8 em học khá cả hai môn Toán và Anh, 6 em học khá cả hai môn Văn và Anh, và 2 em học khá cả ba môn.

Hỏi có bao nhiêu học sinh chỉ học khá môn Toán? Chỉ học khá môn Văn? Chỉ học khá môn Anh? Không học khá môn nào?

Formatted: Heading01

TIÊU CHỦ ĐỀ 1.3. QUAN HỆ

Thông tin cơ bản

3.1. Quan hệ hai ngôi

3.1.1. Tích Đều các của các tập hợp

a) Cặp thứ tự

Ta biết rằng tập hợp gồm hai phần tử a và b được kí hiệu là $\{a, b\}$. Kí hiệu $\{b, a\}$ cũng chỉ tập hợp đó, tức là $\{a, b\} = \{b, a\}$. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp người ta quan tâm đến thứ tự của hai phần tử: a đứng trước, b đứng sau hay b đứng trước, a đứng sau. Khi đó người ta được hai dãy được sắp theo thứ tự khác nhau: Dãy a, b và dãy b, a . Đó là hai dãy khác nhau, trừ phi $a = b$. Mỗi dãy được gọi là một cặp thứ tự của hai phần tử. Như vậy,

Dãy gồm hai đối tượng a và b , được sắp theo thứ tự a đứng trước, b đứng sau gọi là một cặp thứ tự, kí hiệu là (a, b) ; a gọi là phần tử đứng trước, b là phần tử đứng sau.

Nếu $a \neq b$ thì (a, b) và (b, a) là hai cặp thứ tự khác nhau.

Hai cặp thứ tự (a, b) và (c, d) là bằng nhau khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d$.

Cặp thứ tự (a, b) được biểu diễn bởi một mũi tên đi từ phần tử đứng trước a đến phần tử đứng sau b .



Hình 1

Nếu $a = b$ thì mũi tên trở thành một vòng.

Ví dụ 3.1 :

Kết quả của một trận bóng đá là: $(3; 1)$, $(1; 3)$; $(2; 0)$. Cặp thứ tự $(3; 1)$ được hiểu là trên sân nhà, đội chủ nhà đã thắng đội khách: Đội chủ nhà đã ghi được 3 bàn còn đội khách chỉ ghi được 1 bàn. Cặp thứ tự $(1; 3)$ cho biết đội chủ nhà đã thua đội khách: Trong trận đấu, đội chủ nhà chỉ ghi được 1 bàn, trong khi đội khách ghi được 3 bàn.

Ví dụ 3.2 :

Diện tích của các nước trên thế giới (tính trên một ngàn km^2) cũng được ghi bằng các cặp thứ tự, chẳng hạn:

(Tây Ban Nha; 500), (Italia; 300), (Việt Nam, 330)

Formatted: Heading03

Formatted: Heading04

Vi dụ 3.3 :

Mỗi số phức là một cặp thứ tự (a, b) của hai số thực. Ta biết rằng hai số thực a và b khác nhau thì (a, b) và (b, a) là hai số phức khác nhau; Hai số phức (a, b) và (c, d) bằng nhau khi và chỉ khi chúng có phần thực bằng nhau và phần ảo bằng nhau, tức là $a = c$ và $b = d$.

b) Tích Đềcác của hai tập hợp.

Cho hai tập hợp X và Y . Tập hợp tất cả các cặp thứ tự (x, y) trong đó $x \in X, y \in Y$ gọi là tích Đềcác của hai tập hợp X, Y và được kí hiệu là $X \times Y$.

Như vậy,

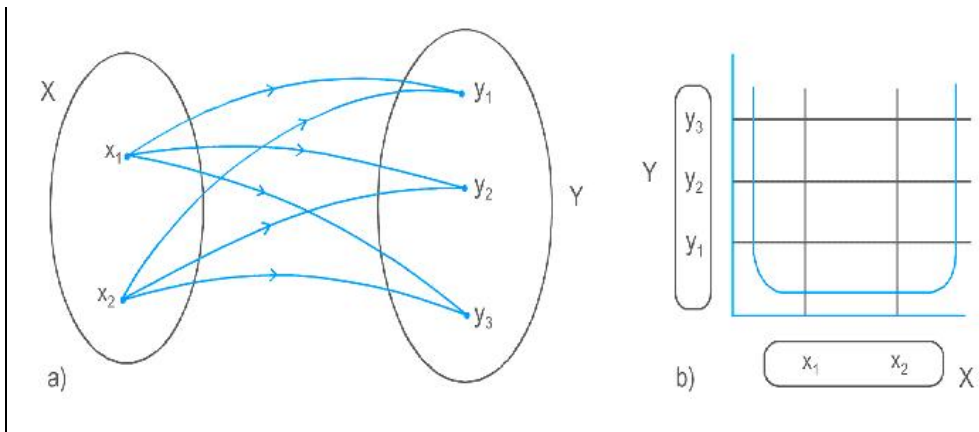
$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Vi dụ 3.4:

Cho hai tập hợp $X = \{x_1, x_2\}$ và $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Khi đó

$$X \times Y = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_2, y_3)\}$$



Hình 2

Trong Hình 2 a), mỗi phần tử của $X \times Y$ được biểu diễn bởi một mũi tên đi từ tập hợp X vào tập hợp Y . Người ta gọi đó là lược đồ hình tên. Trong hình 2 b), các phần tử của $X \times Y$ được biểu diễn bởi các điểm của một lưới xác định bởi hai tập hợp X và Y . Người ta gọi đó là lược đồ Đềcác.

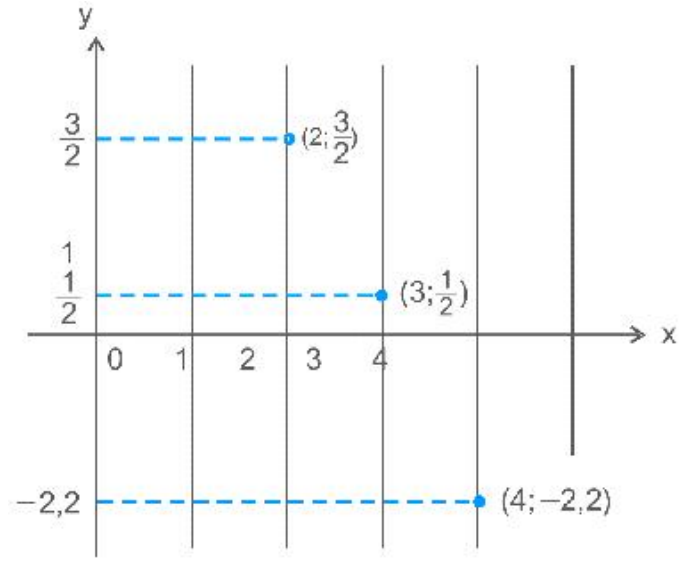
Trong trường hợp tập hợp X hoặc tập hợp Y có vô số phần tử, ta chỉ có thể sử dụng lược đồ Đềcác.

Vi dụ 3.5 :

Tích Đêc các của tập hợp \mathbb{N} các số tự nhiên và tập hợp \mathbb{R} các số thực là tập hợp.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}\}.$$

Trong mặt phẳng toạ độ, $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ đợc biểu diễn bởi tập hợp các điểm của các đường thẳng $x = 0, x = 1, x = 2, \dots$



Hình 3

Điểm $(2, \frac{3}{2})$ nằm trên đường thẳng $x = 2$, các điểm $(3, \frac{1}{2})$ và $(4, -2,2)$, theo thứ tự, nằm trên các đường thẳng $x = 3$ và $x = 4$.

Nếu $Y = X$ thì tập hợp $X \times X$ còn đợc kí hiệu là X^2 . Như vậy,

$$X^2 = \{(x, y) : x \in X, y \in X\}.$$

Vi dụ 3.6 :

Cho tập hợp $X = \{a, b\}$. Tìm tập hợp X^2 .

Ta có:

$$X^2 = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}.$$

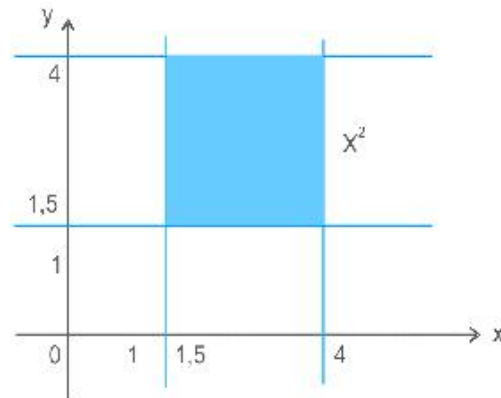
Vi dụ 3.7 :

Cho tập hợp $X = [1,5; 4] = \{x \in \mathbb{R} : 1,5 \leq x \leq 4\}$. Tìm X^2 .

Ta có:

$$X^2 = [1,5; 4] \times (1,5; 4]$$

$$= \{(x, y) : 1,5 \leq x < 4; 1,5 \leq y \leq 4\}.$$



Hình 4

Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp X^2 được biểu diễn bởi tập hợp các điểm của hình vuông giới hạn bởi các đường thẳng $x = 1,5$, $x = 4$, $y = 1,5$ và $y = 4$ (Hình 4).

c) Ta mở rộng định nghĩa tích Đêcác cho một số hữu hạn tập hợp.

Cho m tập hợp X_1, X_2, \dots, X_m . Tập hợp các dãy m phần tử (x_1, x_2, \dots, x_m) , trong đó $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \dots, x_m \in X_m$ gọi là tích Đêcác của m tập hợp X_1, X_2, \dots, X_m và được kí hiệu là $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$.

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) : x_1 \in X_1, \dots, x_m \in X_m\}.$$

Nếu $X_1 = X_2 = \dots = X_m$ thì tập hợp $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ được kí hiệu là X^m . Như vậy X^m là tập hợp các dãy m phần tử (x_1, x_2, \dots, x_m) , trong đó $x_1, \dots, x_m \in X$.

Ví dụ 3.8 :

Tích Đêcác R^3 , trong đó R là tập hợp các số thực là không gian Ôclit ba chiều, tích Đêcác R^m là không gian Ôclit m chiều.

Ví dụ 3.9 :

Tìm các ước số của 4312.

Ta có: $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$.

Mọi ước số của 4312 có dạng $2^a \times 7^b \times 11^c$, với $a = 0, 1, 2$ hoặc 3 , $b = 0, 1$ hoặc 2 , $c = 0$ hoặc 1 .

Đặt $X = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3\}$, $Y = \{7^0, 7^1, 7^2\}$, $Z = \{11^0, 11^1\}$. Khi đó, với mọi $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$, tích xyz là một ước của 4312.

3.2. Định nghĩa quan hệ hai ngôi

Formatted: Heading04

Ta đã biết có thể đồng nhất một tập hợp con A của một không gian X với một tính chất T nào đó của các phần tử của không gian X : Chỉ các phần tử của A có tính chất T , các phần tử của X không thuộc A không có tính chất đó. Nói một cách khác,

$$x \text{ có tính chất } T \Leftrightarrow x \in A$$

(xem mục 4, hoạt động 2, chủ đề 1).

Trong toán học người ta thường quan tâm đến các tính chất của các cặp thứ tự, tức là các tính chất của các phần tử của tích Đêcác. Các tính chất đó được gọi là những quan hệ hai ngôi, gọi tắt là quan hệ. Theo nhận xét vừa nêu ở trên, có thể xem các quan hệ hai ngôi là các tập hợp con của các tích Đêcác. Điều này sẽ được làm sáng tỏ qua các ví dụ.

Vi dụ 3.10 :

Ta kí hiệu $P = P(\mathbb{R})$ là tập hợp tất cả các tập con của tập hợp số thực \mathbb{R} . Giữa số thực và tập hợp số thực $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ có quan hệ “phần tử thuộc tập hợp”, tức là quan hệ $\in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Một cách tổng quát, có quan hệ này giữa một số thực x và một tập con A của \mathbb{R} khi và chỉ khi $x \in A$. Quan hệ vừa nêu là một tính chất của các cặp thứ tự (x, A) , trong đó $x \in \mathbb{R}, A \in P$. Cặp thứ tự (x, A) trong đó $x \in \mathbb{R}, A \in P$ có tính chất này khi và chỉ khi $x \in A$. Vì vậy có thể xem quan hệ được xét là một tập con của tích Đêcác $\mathbb{R} \times P$; tập con này được tạo nên bởi các cặp thứ tự (x, A) , trong đó $x \in A$.

Vi dụ 3.11:

Ta nói rằng giữa các số nguyên dương 2 và 8, hoặc 3 và 15, hoặc 7 và 14 có quan hệ chia hết : 2 chia hết 8, 3 chia hết 15 và 7 chia hết 14. Một cách tổng quát, có quan hệ chia hết giữa hai số nguyên dương x và y khi và chỉ khi x chia hết y . Quan hệ chia hết là một tính chất của các cặp thứ tự (x, y) , trong đó $x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*$. Cặp thứ tự (x, y) , trong đó $x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{N}^*$ có tính chất này khi và chỉ khi x chia hết y . Vì vậy, có thể xem quan hệ chia hết là một tập con của tích Đêcác $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = (\mathbb{N}^*)^2$. Tập con này được tạo nên bởi các cặp thứ tự (x, y) , trong đó x và y là hai số nguyên dương sao cho x chia hết y .

Một cách tổng quát, ta có:

Định nghĩa:

Cho hai tập hợp X và Y . Tập con R của tích Đêcác $X \times Y$ gọi là một quan hệ hai ngôi trên $X \times Y$.

Nếu R là một tập con của tích Đêcác $X \times X$ thì ta nói rằng R là một quan hệ hai ngôi trên X (thay cho “ R là một quan hệ hai ngôi trên $X \times X$ ”).

Nếu R là một quan hệ hai ngôi trên $X \times Y$ và $(x, y) \in R$ thì ta viết $x R y$ và đọc là x có quan hệ R với y .

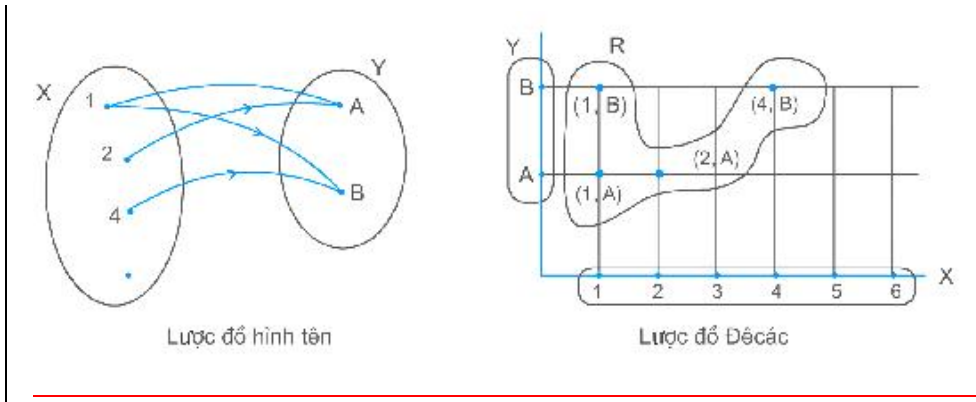
Nếu $(x, y) \notin R$ thì ta viết $x \not R y$ và đọc là x không có quan hệ R với y . Quan hệ hai ngôi thường được gọi tắt là quan hệ.

Vi dụ 3.12 :

Cho $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 4\}$ và $Y = \{A, B\}$. Gọi R là quan hệ “phần tử thuộc tập hợp” trên $X \times Y$. Theo định nghĩa quan hệ hai ngôi, ta có:

$$R = \{(1, A), (1, B), (2, A), (4, B)\}.$$

Các phần tử của R , tức là các cặp thứ tự, được biểu diễn trong hai lược đồ sau:



Hình 5

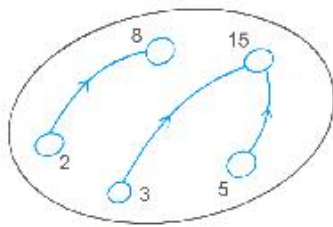
Vi dụ 3.13 :

Cho tập hợp $X = \{2, 3, 5, 8, 15\}$. Hãy tìm quan hệ chia hết R trên X .

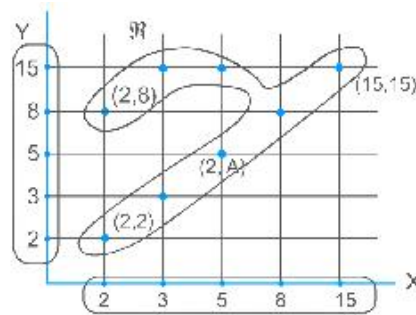
Ta hiểu R là quan hệ hai ngôi trên $X \times X$.

Theo định nghĩa quan hệ hai ngôi, ta có:

$R = \{(2, 2), (2, 8), (3, 3), (3, 15), (5, 5), (5, 15), (8, 8), (15, 15)\}$. Các phần tử của R được biểu diễn trong hai lược đồ sau:



Lược đồ hình lên



Lược đồ Đêcác

Hình 6

Giả sử R là một quan hệ hai ngôi trên $X \times Y$.

Tập hợp các phần tử đứng trước của các cặp thứ tự (x, y) thuộc quan hệ R gọi là tập xác định của quan hệ R , kí hiệu là $D(R)$.

Như vậy, phần tử $x \in X$ thuộc $D(R)$ khi và chỉ khi tồn tại một phần tử $y \in Y$ sao cho $x R y$:

$$x \in D(R) \Leftrightarrow \text{tồn tại } y \in Y \text{ sao cho } x R y.$$

hay $D(R) = \{x \in X: \text{Tồn tại } y \in Y \text{ sao cho } x R y\}$.

Tập hợp các phần tử đứng sau của các cặp thứ tự (x, y) thuộc quan hệ R gọi là tập ảnh (gọi tắt là ảnh) của quan hệ R , kí hiệu là $D^*(R)$.

Như vậy, phần tử $y \in Y$ thuộc $D^*(R)$ khi và chỉ khi tồn tại một phần tử $x \in X$ sao cho $x R y$:

$$y \in D^*(R) \Leftrightarrow \text{tồn tại } x \in X \text{ sao cho } x R y,$$

hay $D^*(R) = \{y \in Y: \text{Tồn tại } x \in X \text{ sao cho } x R y\}$.

Chẳng hạn, với quan hệ hai ngôi R trong ví dụ 12, ta có:

$$D^*(R) = \{1, 2, 4\}, D^*(R) = \{A, B\} = Y.$$

Ví dụ 3.14 :

Cho tập hợp $X = \{2, 3, 5\}$ và $Y = \mathbb{N}$. Gọi R là quan hệ chia hết trên $X \times \mathbb{N}$, tức là $x R y$ khi và chỉ khi x là ước số của y . Khi đó.

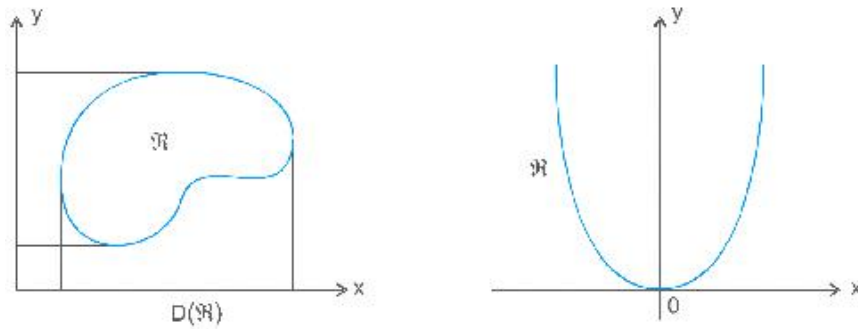
$$D^*(R) = X = \{2, 3, 5\},$$

và $D^*(R)$ tập hợp tất cả các số tự nhiên chia hết cho 2, 3 hoặc 5:

$$D^*(R) = \{2m : m \in \mathbb{N}\} \cup \{3n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{5k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Có thể biểu diễn quan hệ hai ngôi R trên tập hợp \mathbb{R} các số thực bởi lược đồ Đêcác. Quan hệ R được biểu diễn bởi một tập con của mặt phẳng tọa độ Oxy. Tập xác định $D(R)$ của quan hệ R được biểu diễn bởi hình chiếu của

R trên trục hoành Ox; tập ảnh $D^*(R)$ của quan hệ \mathfrak{R} được biểu diễn bởi hình chiếu của R trên trục tung Oy (Hình 7).



Hình 7

Hình 8

Trong Hình 8, ta có lược đồ biểu diễn quan hệ hai ngôi R trên $|R$ ($R = |R^2$) xác định như sau: Với mọi $(x, y) \in |R^2$, $x R y$ khi và chỉ khi $x^2 = y$. Dễ dàng thấy rằng:

$$D(R) = |R \text{ và } D^*(R) = [0, +\infty) = \{x : x \geq 0\}$$

3.3. Một số tính chất thường gặp của quan hệ hai ngôi

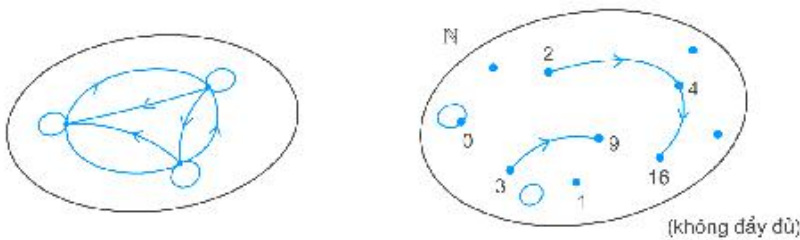
Formatted: Heading04

a) Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X gọi là phản xạ nếu với mọi $x \in X$, ta đều có $x R x$.

Ví dụ 3.15 :

Quan hệ chia hết trên tập hợp số nguyên dương \mathbb{N}^* là phản xạ vì với mọi số nguyên dương x, x chia hết x.

- Quan hệ \leq (nhỏ hơn hoặc bằng) trên tập hợp các số thực $|R$ là phản xạ vì với mọi $x \in |R$, $x \leq x$.
- Giả sử A là một tập hợp các mệnh đề logic ($A \subset L^0$). Quan hệ RA “có cùng màu với” (mệnh x có cùng màu với mệnh y) hiển nhiên là phản xạ (Hình 9).



Hình 9

Hình 10

Nếu R là một quan hệ phản xạ trên A thì lược đồ hình tên của nó có một vòng tại mỗi điểm của A (Hình 9).

- Quan hệ “là bình phương của” trên N không phải là một quan hệ phản xạ vì chỉ có hệ số 0 và 1 là bình phương của chính nó (Hình 10).

Nếu quan hệ hai ngôi R trên X không phải là phản xạ thì lược đồ hình tên của nó có ít nhất một điểm tại đó không có vòng.

Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X gọi là *đối phản xạ* nếu với mọi $x \in X$, x đều không có quan hệ R với x , tức là không xảy ra $x R x$.

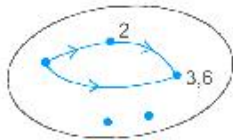
Nói một cách khác, R là đối phản xạ nếu

$$(x, x) \notin R \text{ với mọi } x \in X.$$

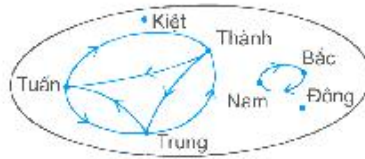
Ví dụ 3.16 :

Quan hệ “<” trên \mathbb{R} là đối phản xạ vì với mọi $x \in \mathbb{R}$, đều không có $x < x$.

Nếu quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X là đối phản xạ thì lược đồ tên của nó không có một vòng nào (Hình 11).



Hình 11



Hình 12

- Quan hệ “vuông góc với” trên tập hợp các đường thẳng của một mặt phẳng là đối phản xạ vì mọi đường thẳng đều không vuông góc với chính nó.

- Quan hệ “là bố của” trên một tập hợp người cho trước là đối phản xạ.

b) Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X gọi là *đối xứng* nếu với mọi $x, y \in X$, $x R y \Rightarrow y R x$.

Ví dụ 3.17 :

Giả sử X là một tập hợp khác . Tập hợp:

$$R = \{(x, x) : x \in X\} \subset X^2$$

gọi là quan hệ đồng nhất trên X .

Như vậy, với mọi $x, y \in X$,

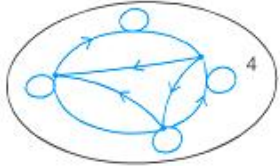
$$x R y \Leftrightarrow x = y.$$

Dễ thấy quan hệ đồng nhất trên X là đối xứng.

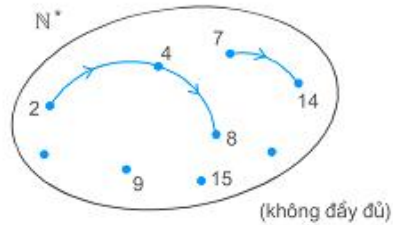
- Quan hệ “vuông góc với” trên tập hợp các đường thẳng của một mặt phẳng là đối xứng.
- Quan hệ “là anh hoặc em trai của” trên một tập hợp trẻ em là đối xứng (Hình 12).

Nếu quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X là đối xứng thì trong lược đồ hình tên của nó, sẽ có một mũi tên đi từ x đến y , ắt có một mũi tên đi từ y đến x . Chú ý rằng giữa hai điểm x và y có thể không có mũi tên nào, nhưng nếu đã có thì tất phải có hai mũi tên đi ngược hướng nhau.

- Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quan hệ “nhỏ hơn hoặc bằng” (\leq) trên A không phải là một quan hệ đối xứng (Hình 13).



Hình 13



Hình 14

Nếu quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X không phải là một quan hệ đối xứng thì trên lược đồ tên của R có ít nhất một mũi tên đi từ x đến y mà không có mũi tên ngược từ y đến x .

Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X gọi là *phi đối xứng* nếu với mọi $x, y \in X$,

$$x R y \Rightarrow y R x.$$

Nói một cách khác, R là phi đối xứng nếu với mọi $x, y \in X$

$$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R.$$

Ví dụ 3.18 :

- Quan hệ hai ngôi “ $<$ ” (nhỏ hơn) trên tập hợp các số thực \mathbb{R} là phi đối xứng vì với hai số thực bất kì x, y , các điều kiện $x < y$ và $y < x$ loại trừ nhau.
- Gọi R là quan hệ hai ngôi xác định trên tập hợp các số nguyên dương \mathbb{N}^* xác định bởi: $x R y$ khi và chỉ khi $x = 2y$. R là một quan hệ phi đối xứng vì với mọi $x, y \in \mathbb{N}^*$ không thể đồng thời xảy ra $x = 2y$ và $y = 2x$ (Hình 14).

Nếu R là một quan hệ phi đối xứng trên tập hợp X thì trên lược đồ hình tên của R , giữa hai điểm khác nhau $x, y \in X$, hoặc không có mũi tên nào, hoặc chỉ có một mũi tên (không có mũi tên ngược) (Hình 14).

Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X gọi là *phản đối xứng* nếu với mọi $x, y \in X$,

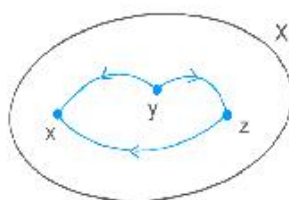
$$x R y \text{ và } y R x \Rightarrow x = y.$$

Vi dụ 3.19 :

- Quan hệ hai ngôi “=” trên tập hợp \mathbb{R} là phản đối xứng vì với hai số thực bất kì x, y , hai điều kiện $x = y$ và $y = x$ kéo theo $x = y$.
- Quan hệ hai ngôi “vuông góc với” trên tập hợp các đường thẳng của một mặt phẳng không phải là một quan hệ phản đối xứng.

c) *Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X gọi là **bắc cầu** nếu với mọi $x, y, z \in X$,*

$$x R y \text{ và } y R z \Rightarrow x R z.$$



Hình 15

Trên lược đồ hình tên của quan hệ bắc cầu R , nếu có một mũi tên đi từ x đến y và một mũi tên đi từ y đến z thì có một mũi tên đi từ x đến z . (Hình 15).

Vi dụ 3.20 :

- Quan hệ hai ngôi “chia hết” trên tập hợp các số tự nhiên là bắc cầu vì với mọi $x, y, z \in \mathbb{N}$, nếu x là một ước số của y và y là một ước số của z thì x là một ước số của z .
- Quan hệ hai ngôi “<” trên tập hợp \mathbb{R} là bắc cầu.
- Quan hệ hai ngôi “vuông góc với” trên tập hợp các đường thẳng của một mặt phẳng không phải là một quan hệ bắc cầu.

3.4. Quan hệ ngược – Hợp của hai quan hệ

a) *Quan hệ ngược của một quan hệ cho trước*

Cho hai tập hợp X, Y và quan hệ hai ngôi R trên $X \times Y$. Quan hệ ngược của quan hệ R , kí hiệu là R^{-1} , là quan hệ hai ngôi trên $Y \times X$ xác định như sau: Với mọi $y \in Y, x \in X, y R^{-1} x \Leftrightarrow x R y$.

(tức là $(y, x) R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$).

Ví dụ 3.21:

Gọi X là tập hợp năm thành phố

$X = \{\text{Hà Nội, Cần Thơ, Bắc Kinh, Viên Chăn, Nam Kinh}\} = \{h, c, b, v, n\}$,

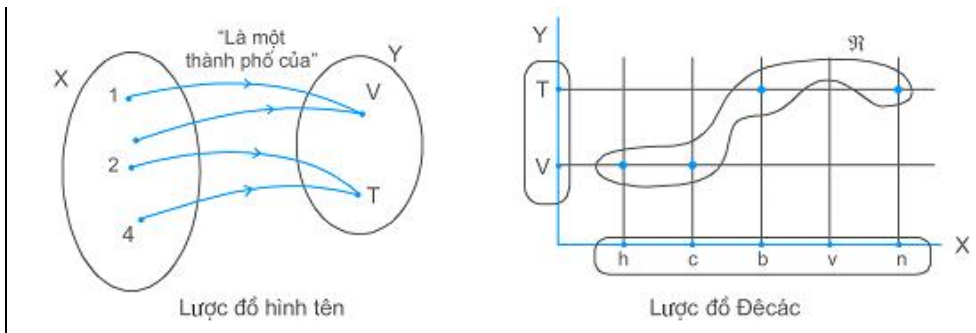
Y là tập hợp hai nước.

$Y = \{\text{Việt Nam, Trung Quốc}\} = \{V, T\}$,

và R là quan hệ “là một Thành phố của”

R là quan hệ hai ngôi trên $X \times Y$:

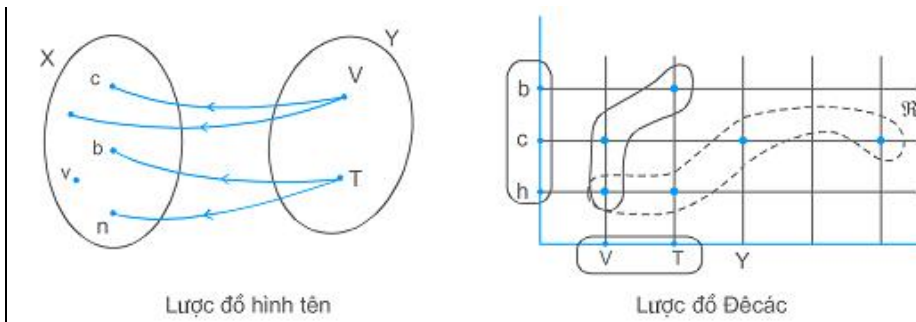
$R = \{(h, V), (c, V), (b, T), (n, T)\}$.



Hình 16

Quan hệ ngược R^{-1} của R là quan hệ hai ngôi trên $Y \times X$.

$R^{-1} = \{(V, h), (V, c), (T, b), (T, n)\}$.



Hình 17

Các điểm biểu diễn các cặp thứ tự của R^{-1} đối xứng với các điểm biểu diễn các cặp thứ tự của R qua đường phân giác thứ nhất.

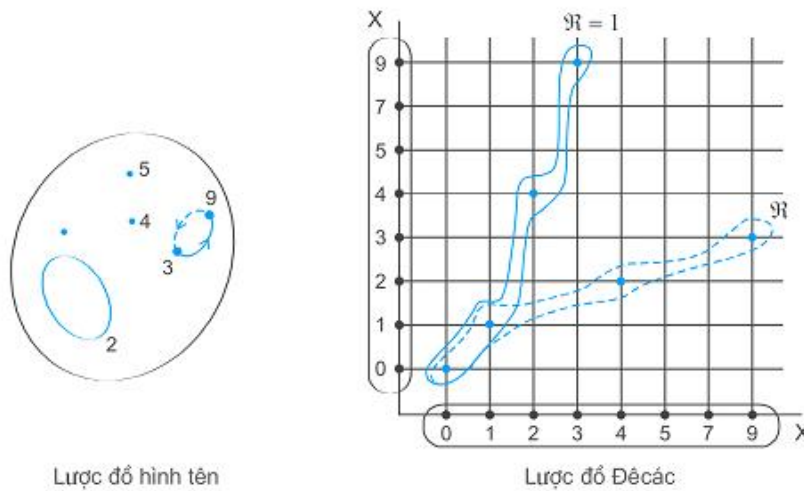
Ví dụ 3.22 :

Cho tập hợp $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$ và quan hệ hai ngôi R “là bình phương của” trên X :

$$R = \{(0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3)\}.$$

Quan hệ ngược của R là quan hệ R^{-1} “là căn bậc hai của” trên X :

$$R^{-1} = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}.$$



Hình 18

b) Hợp của hai quan hệ

Cho ba tập hợp X, Y, Z , quan hệ R_1 trên $X \times Y$ và quan hệ R_2 trên $Y \times Z$. Quan hệ R trên $X \times Z$ gồm các cặp thứ tự $(x, z) \in X \times Z$ thoả mãn điều kiện sau:

Tồn tại một phần tử $y \in Y$ sao cho $x R_1 y$ và $y R_2 z$ gọi là hợp của hai quan hệ R_1 và R_2 , kí hiệu là $R_2 \circ R_1$.

Như vậy,

$$R = R_2 \circ R_1 = \{(x, z) \in X \times Z : \text{Tồn tại } y \in Y \text{ sao cho } x R_1 y \text{ và } y R_2 z\}.$$

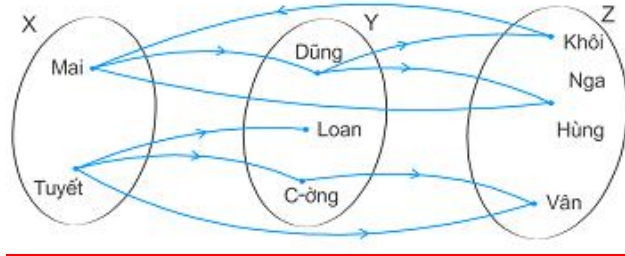
Ví dụ 3.23 : Cho ba tập hợp

Tập hợp các bà $X = \{\text{Mai, Tuyết}\}$ (thế hệ thứ nhất), tập hợp các anh chị $Y = \{\text{Dungx, Loan, Cường}\}$ (thế hệ thứ hai), tập hợp các cháu $Z = \{\text{Khôi, Nga, Hùng, Vân}\}$ (thế hệ thứ ba), và hai quan hệ:

Quan hệ R_1 “là mẹ của” trên $X \times Y$:

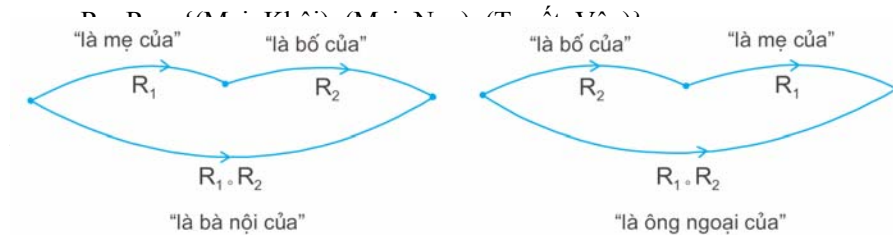
$R_1 = \{(Mai, Dũng), (Tuyết, Loan), (Tuyết, Cường)\}$, quan hệ R_2 “là bố của” trên $Y \times Z$:

$R_2 = \{(Dũng, Khôi), (Dũng, Nga), (Cường, Vân)\}$.



Hình 18

Quan hệ hợp $R_2 \circ R_1$ của hai quan hệ R_1 và R_2 là quan hệ “là bà nội của” trên $X \times Z$;



Hình 19

Ví dụ 3.24 :

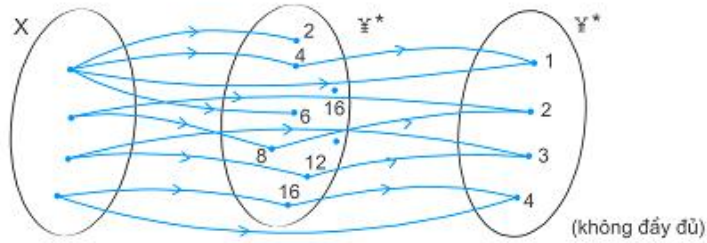
Cho quan hệ R_1 “là một nửa của” trên tập hợp N^* các số nguyên dương và quan hệ R_2 “gấp bốn lần” trên N^* .

Tìm $R_2 \circ R_1$

Ta có:

$R_1 = \{(1; 2), (2; 4), (3; 6), (4; 8), (5; 10), \dots\}$

$R_2 = \{(4; 1), (8; 2), (12; 3), (16; 4), (20; 5), \dots\}$



Hình 20

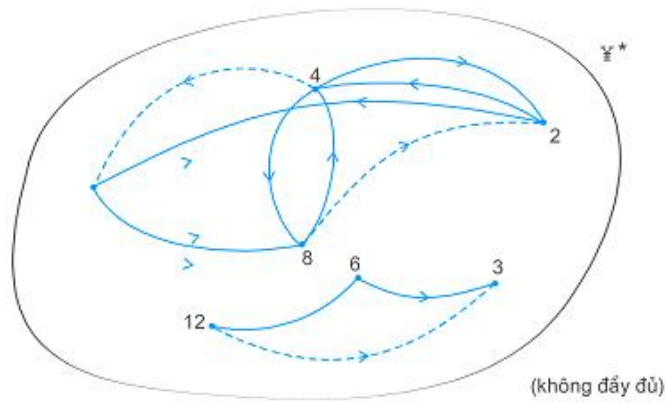
$R_2 \circ R_1$ là một quan hệ trên N^* :

$$R_2 \circ R_1 = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), \dots\}.$$

$R_2 \circ R_1$ là quan hệ “gấp đôi” trên N^* .

Có thể biểu diễn tập hợp N^* chỉ bởi một đường cong kín.

Khi đó, để khỏi lẫn, phải phân biệt các mũi tên biểu diễn các cặp thứ tự của R_1 , R_2 và $R_1 \circ R_2$.



Hình 21

Trong hình các cặp thứ tự của các quan hệ $R_1 \circ R_2$ và $R_2 \circ R_1$, theo thứ tự, được biểu diễn bởi các mũi tên xanh, mũi tên có nét gạch và mũi tên đỏ.

B. Hoạt động. tìm hiểu khái niệm tính đề các và quan hệ hai ngôi.

Nhiệm vụ:

Nhiệm vụ 1:

Formatted: Heading04

- Nắm vững định nghĩa tích Đêcác của hai tập hợp và của một số hữu hạn tập hợp.
- Biết biểu diễn tích Đêcác của hai tập hợp bằng lược đồ hình tên và lược đồ Đêcác.

Nhiệm vụ 2:

Formatted: Heading04

- Nắm vững định nghĩa quan hệ hai ngôi trên $X \times Y$ và trên X .
- Có kỹ năng thành thạo trong việc xác định các cặp thứ tự của một quan hệ hai ngôi trong các tình huống khác nhau.
- Biểu diễn được quan hệ hai ngôi bằng lược đồ hình tên và lược đồ Đêcác.

Nhiệm vụ 3

Formatted: Heading04

- Nắm vững các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu của quan hệ hai ngôi.
- Có kỹ năng nhận biết một quan hệ hai ngôi cho trước có các tính chất đó hay không?
- Có kỹ năng biểu diễn các quan hệ hai ngôi có các tính chất đã nêu bằng lược đồ hình tên.

Nhiệm vụ 4:

Formatted: Heading04

- Nắm vững các định nghĩa của quan hệ ngược của một quan hệ hai ngôi cho trước và quan hệ hợp của hai quan hệ hai ngôi cho trước.
- Có kỹ năng thành thạo trong việc xác định quan hệ ngược và quan hệ hợp.
- Biểu diễn thành thạo các cặp thứ tự của quan hệ ngược và quan hệ hợp bằng lược đồ hình tên.

Đánh giá hoạt động 3.1

Formatted: Heading02

1. Cho ba tập hợp X, Y, Z . Chứng minh các đẳng thức sau:

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
- $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$,
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
- $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$,
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$,
- $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$.

2. Cho ba tập hợp A, B và $C \neq \emptyset$. Chứng minh rằng:

- $A \subset B \Leftrightarrow A \times C \subset B \times C$,
- $A \subset B \Leftrightarrow C \times A \subset C \times B$.

3. Giả sử tập hợp X có m phần tử và tập hợp Y có n phần tử. Chứng minh rằng tập hợp $X \times Y$ có mn phần tử.

4. Giả sử tập hợp X_k có n_k phần tử, $k = 1, 2, \dots, m$.

Chứng minh rằng tập hợp $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ có $n_1 n_2 \dots n_m$ phần tử.

5. Cho hai tập hợp $A = \{2, 4, 7, 9\}$ và $B = \{1, 3, 4, 5, 12, 14\}$.

Tìm quan hệ “chia hết” R trên $A \times B$ và biểu diễn quan hệ R bằng lược đồ hình tên.

6. Cho tập hợp $X = \{1, 2, 7, 8\}$. Tìm quan hệ “chia hết” R trên X và biểu hiện quan hệ R bằng lược đồ hình tên.

7. Cho tập hợp $X = \{1, 2, 6, 7, 8\}$. Tìm quan hệ “chia hết cho” R trên X và biểu diễn R bằng lược đồ hình tên.

8. Tìm quan hệ “chia hết cho” R trên tập hợp các số nguyên dương N^* và biểu hiện R bằng lược đồ hình tên.

9. Cho các tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $A = \{1, 2, 9\}$, $B = \{4, 9\}$, $C = \{6, 7, 8\}$ và $Y = \{A, B, C\}$. Tìm quan hệ R “phần tử thuộc tập hợp” trên $X \times Y$. Biểu diễn quan hệ này bằng lược đồ hình tên.

10. Cho các tập hợp $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 5, 7\}$, $C = \{1, 2, 5, 7, 8\}$ và

$X = \{A, B, C\}$. Tìm quan hệ bao hàm “chứa trong” R trên X .

(Quan hệ bao hàm “chứa trong” \mathfrak{R} được cho bởi $A \mathfrak{R} B$ khi và chỉ khi $A \subset B$).

11. Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 5, 7\}$. Tìm quan hệ “nhỏ hơn” ($<$) trên X (quan hệ “nhỏ hơn” được hiểu theo nghĩa thông thường).

12. Gọi R_1 là quan hệ “ $<$ ” trên $|R$ và R_2 là quan hệ “ \neq ” trên $|R$. Hãy biểu diễn R_1 và R_2 bằng lược đồ Đêcác.

13. Chứng minh rằng nếu tập hợp X có m phần tử và tập hợp Y có n phần tử thì có 2^{mn} quan hệ hai ngôi trên $X \times Y$.

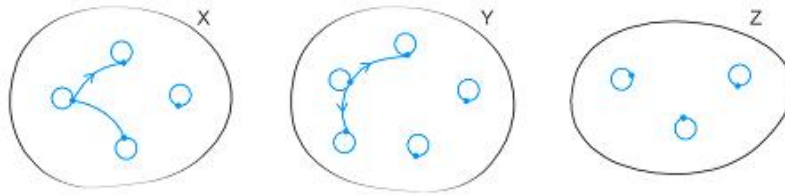
14. Quan hệ “song song hoặc trùng nhau với” trên tập hợp tất cả các đường thẳng của một mặt phẳng có phải là một quan hệ phản xạ, đối xứng, bắc cầu hay không?

15. Trong một mặt phẳng cho một điểm O cố định. Gọi X là tập hợp các điểm của mặt phẳng và R là quan hệ hai ngôi trên X xác định bởi: $x R y$ khi và chỉ khi x là điểm đối xứng của điểm y qua điểm O .

Hãy nêu các tính chất (phản xạ, đối xứng, bắc cầu) của R .

16. Nêu các tính chất (phản xạ, đối xứng, bắc cầu) của quan hệ “chia hết cho” trên tập hợp N^* các số nguyên dương.

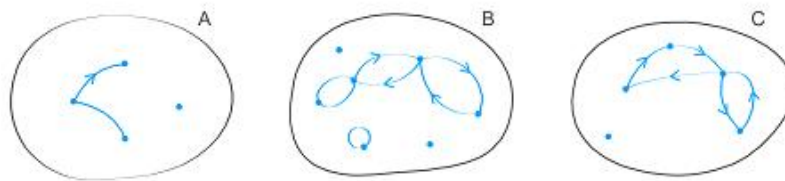
17. Quan hệ R_1 trên tập hợp X , quan hệ R_2 trên tập hợp Y và quan hệ R_3 trên tập hợp Z được biểu diễn bởi các lược đồ hình tên sau đây:



Hình 22

Trong ba quan hệ đó, quan hệ nào là phản xạ.

18. Quan hệ R_1 trên tập hợp A , quan hệ R_2 trên tập hợp B là quan hệ R_3 trên tập hợp C được biểu diễn bởi các lược đồ hình tên sau đây:



Hình 23

Quan hệ nào trong ba quan hệ đó là đối xứng? bắc cầu?

19. Chứng minh rằng nếu quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X là đối phản xạ và bắc cầu thì nó là phi đối xứng.

20. Gọi R là quan hệ hai ngôi “gấp 7 lần” trên tập hợp N^* các số nguyên dương: Với mọi $x, y \in N^*$, $x R y \Leftrightarrow x = 7y$.

Tìm quan hệ ngược R^{-1} của R .

21. Chứng minh rằng nếu quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X là phản xạ, đối xứng, bắc cầu thì quan hệ ngược R^{-1} của nó cũng là phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

22. Cho hai quan hệ hai ngôi R_1, R_2 trên tập hợp N^* xác định bởi:

$$x R_1 y \Leftrightarrow x = 3y,$$

$$x R_2 y \Leftrightarrow y = x + 5.$$

Tìm các quan hệ hợp $R_2 \circ R_1$ và $R_1 \circ R_2$.

TIÊU CHỦ ĐỀ 1.4. QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Thông tin cơ bản

4.1. Định nghĩa:

Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X gọi là quan hệ tương đương trên X nếu nó là phản xạ, đối xứng và bắc cầu, tức là:

- Với mọi $x \in X$, $x R x$,
- Với mọi $x, y \in X$, $x R y \Rightarrow y R x$,
- Với mọi $x, y, z \in X$, $x R y$ và $y R z \Rightarrow x R z$.

Quan hệ tương đương thường được kí hiệu là \sim . Khi đó $x R y$ được kí hiệu là $x \sim y$ đọc là x tương đương với y .

Ví dụ 4.1 :

Gọi \sim là quan hệ hai ngôi trên \mathbb{Z} xác định bởi $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Trong đó \mathbb{Z} là tập hợp các số nguyên.

Quan hệ \sim là quan hệ tương đương trên \mathbb{Z} . Thật vậy, với mọi $x \in \mathbb{Z}$, ta có $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$; do đó \sim là phản xạ. Với mọi $x, y \in \mathbb{Z}$, nếu $x \sim y$ thì $x - y \in \mathbb{Z}$; do đó $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$; Vậy \sim là đối xứng. Cuối cùng, với mọi $x, y, z \in \mathbb{Z}$, nếu $x \sim y$ và $y \sim z$, tức là $x - y \in \mathbb{Z}$ và $y - z \in \mathbb{Z}$ thì $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z}$; do đó \sim là bắc cầu.

Ví dụ 4.2 :

Gọi X là tập hợp các vectơ thuộc trong mặt phẳng \mathbb{R}^2 (A, B là hai điểm của mặt phẳng). Nếu (x_A, y_A) và (x_B, y_B) là các toạ độ của hai điểm A và B thì các hiệu $x_B - x_A$ và $y_B - y_A$ gọi là các thành phần của vectơ. Gọi \sim là quan hệ hai ngôi trên X xác định bởi:

$$\sim \Leftrightarrow x_B - x_A = x_D - x_C \text{ và } y_B - y_A = y_D - y_C .$$

Dễ dàng thấy rằng \sim là một quan hệ tương đương trên X .

Ví dụ 4.3 :

Giả sử \mathcal{D} là tập hợp các đường thẳng trong mặt phẳng \mathbb{R}^2 . Gọi \sim là quan hệ hai ngôi trên \mathcal{D} xác định như sau: Với mọi $a, b \in \mathcal{D}$, $a \sim b \Leftrightarrow a \parallel b$ hoặc a trùng với b .

Dễ thấy \sim là một quan hệ tương đương trên \mathcal{D} .

Ví dụ 4.4 :

Chia một số tự nhiên bất kì cho 3, số dư của phép chia là 0 hoặc 1 hoặc 2. Quan hệ “có cùng số dư với... trong phép chia cho 3” trên \mathbb{N} hiển nhiên là

phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Do đó nó là một quan hệ tương đương trên N .

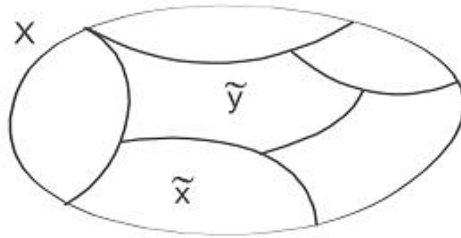
4.2. Các lớp tương đương và tập thương

Formatted: Heading03

a) Giả sử X là một tập hợp khác \emptyset và \sim là một quan hệ tương đương trên X . Với mỗi phần tử $x \in X$, ta kí hiệu $[x]$ là tập hợp các phần tử $y \in X$ sao cho $x \sim y$:

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}.$$

Tập hợp $[x]$ gọi là lớp tương đương của quan hệ \sim trên X cú đại diện là phần tử x . Tập hợp chia lớp tương đương của quan hệ trên X được gọi là tập thương, kí hiệu là X/\sim .



Hình 24

Các tính chất cơ bản của các lớp tương đương của quan hệ \sim được cho trong định lí sau:

b) *Định lí:* Giả sử \sim là một quan hệ tương đương trên tập hợp $X \neq \emptyset$. Khi đó:

- (i) Với mọi $x \in X$, $x \in [x]$,
- (ii) Với mọi $x_1, x_2 \in X$, $[x_1] = [x_2] \Leftrightarrow x_1 \sim x_2$,
- (iii) Với mọi $x_1, x_2 \in X$, nếu $[x_1] \cap [x_2] \neq \emptyset$ thì $[x_1] = [x_2]$.

Chứng minh:

- (i) Vì quan hệ \sim là phản xạ nên với mọi $x \in X$, $x \sim x$. Do đó $x \in [x]$.
- (ii) Giả sử $[x_1] = [x_2]$. Theo (i), ta có $x_1 \in [x_1]$; do đó $x_1 \in [x_2]$. Vậy $x_1 \sim x_2$. Đảo lại, giả sử $x_1 \sim x_2$. Khi đó nếu $x \in [x_1]$; thì $x \sim x_1$, do đó $x \sim x_2$ vì quan hệ \sim là bắc cầu. Vậy $[x_1] \subset [x_2]$. Tương tự, ta có $[x_2] \subset [x_1]$. Từ hai bao hàm thức trên suy ra $[x_1] = [x_2]$.
- (iii) Giả sử $[x_1] \cap [x_2] \neq \emptyset$. Khi đó, tồn tại $x \in X$ sao cho $x \in [x_1]$ và $x \in [x_2]$. Do đó $x_1 \sim x$ và $x_2 \sim x$. Từ đó, ta có $x_1 \sim x$ và $x \sim x_2$. Do đó $x_1 \sim x_2$. Theo (ii), từ đó suy ra $[x_1] = [x_2]$.

Từ định lí trên suy ra định lí sau gọi là nguyên lí đồng nhất các phần tử tương đương.

c) *Định lí:* Quan hệ tương đương \sim trên tập hợp $X \neq \emptyset$ chia X thành các tập con khác đôi một rời nhau (các tập hợp con đó là các lớp tương đương của quan hệ \sim) sao cho hai phần tử x, y của tập hợp X thuộc cùng một tập con khi và chỉ khi chúng tương đương với nhau.

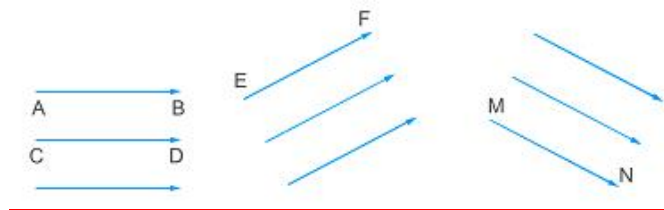
Tập thương X / \sim là một phép phân hoạch tập hợp X . (Xem bài tập 14 trong Hoạt động 2, Chủ đề 1).

d) *Ví dụ về tập thương.*

Ta trở lại bốn ví dụ đã nêu.

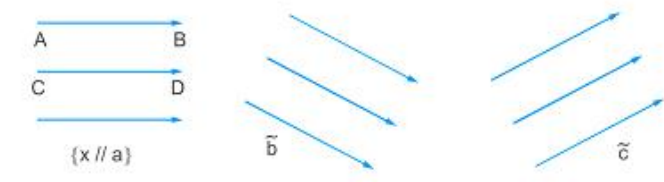
- Trong Ví dụ 1, quan hệ tương đương \sim trên \mathbb{Z} chia tập hợp \mathbb{Z} thành các lớp tương đương. Dễ dàng nhận thấy rằng tất cả các số nguyên thuộc cùng một lớp tương đương và ngoài các số nguyên không có một số thực nào thuộc lớp tương đương đó.

- Trong Ví dụ 2, quan hệ tương đương \sim trên X chia tập hợp các Vector buộc trong mặt phẳng \mathbb{R}^2 thành các lớp tương đương. Mỗi lớp tương đương được gọi là một vectơ tự do: Đó là tập hợp tất cả các vector buộc tương đương với một vectơ buộc cho trước. (Trong sách giáo khoa toán ở trường phổ thông hai vector tương đương được gọi là bằng nhau; đó là hai vector cùng hướng có độ dài bằng nhau, xem hình 25).



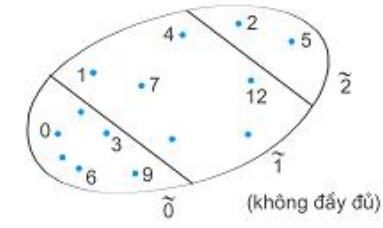
Hình 25

- Trong ví dụ 3, quan hệ tương đương \sim trên D chia tập hợp các đường thẳng trong mặt phẳng \mathbb{R}^2 thành các lớp tương đương. Mỗi lớp tương đương được gọi là một phương. Đó là tập hợp tất cả các đường thẳng trong mặt phẳng \mathbb{R}^2 song song hoặc trùng với một đường thẳng cho trước trong mặt phẳng này



Hình 26

- Trong Ví dụ 4, quan hệ “có cùng số dư với... trong phép chia cho 3” chia tập hợp N thành ba lớp tương đương: . Mọi số tự nhiên chia hết cho 3 đều thuộc lớp . Mọi số tự nhiên có số dư là 1 trong phép chia cho 3 đều thuộc lớp . Mọi số tự nhiên có số dư là 2 trong phép chia cho 3 đều thuộc lớp . Ta lấy thêm một ví dụ.



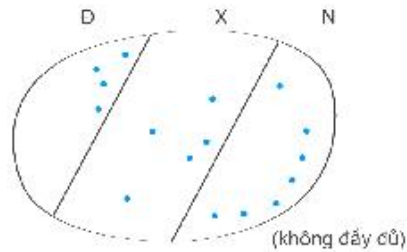
Hình 27

Ví dụ 4.5 :

Xét quan hệ hai ngôi “cùng màu với” trên tập hợp L^0 các mảnh lôgic Điênétxơ.

Đễ dàng thấy rằng đó là một quan hệ tương đương trên L^0 . Quan hệ này chia L^0 thành ba lớp tương đương: Đ, X, N.

Đ là tập hợp các mảnh màu đỏ, X là tập hợp các mảnh màu xanh và N là tập hợp các mảnh màu nâu. Mỗi lớp tương đương có 16 mảnh với hình dạng, độ lớn và độ dày khác nhau



Hình 28

4.3. ứng dụng của nguyên lí đồng nhất các phần tử tương đương

a) Xây dựng tập hợp các số nguyên

Ta nhắc lại rằng kí hiệu N chỉ tập hợp các số tự nhiên và $N^2 = N \times N$ chỉ tập hợp tất cả các cặp thứ tự (m, n) , trong đó m và n là những số tự nhiên.

Gọi \sim là quan hệ hai ngôi trên $N \times N$ xác định bởi $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)$ khi và chỉ khi $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$.

Quan hệ \sim là một quan hệ tương đương trên $N \times N$.

Thật vậy, vì với mọi $(m, n) \in N \times N$, ta có $m + n = m + n$, nên $(m, n) \sim (m, n)$. Do đó quan hệ \sim là phản xạ. Để rằng thấy rằng quan hệ \sim là đối xứng. Cuối cùng nếu $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)$ và $(m_2, n_2) \sim (m_3, n_3)$ thì $m_1 + n_2 = m_2 + n_1$ và $m_2 + n_3 = m_3 + n_2$. Do đó $m_1 + n_2 + m_2 + n_3 = m_2 + n_1 + m_3 + n_2 \Leftrightarrow m_1 + n_3 = m_3 + n_1$, tức là (m_1, n_1) tương đương (m_3, n_3) . Vậy quan hệ \sim là bắc cầu.

Quan hệ tương đương \sim trên $N \times N$ chia tập hợp $N \times N$ thành các lớp tương đương đôi một rời nhau.

Các lớp tương đương của quan hệ \sim trên tập hợp $N \times N$ được gọi là các số nguyên.

Để dàng thấy rằng:

- $(0, 0) \sim (1, 1) \sim (2, 2), (3, 3), \dots$

Lớp tương đương $(0, 0)^{\sim}$ có đại diện là phân tử $(0, 0)$ gọi là số nguyên 0.

- Các lớp tương đương $(m, n)^{\sim}$ có đại diện là phân tử (m, n) trong đó $m > n$ và $m = n + k, k = 1, 2, \dots$ xác định các số nguyên dương $k = 1, 2, \dots$
- Các lớp tương đương $(m, n)^{\sim}$ có đại diện là phân tử (m, n) trong đó $m < n$ và $n = m + k, k = 1, 2, \dots$ xác định các số nguyên âm $-k = -1, -2, -3, \dots$

Phép cộng và phép nhân trong tập hợp các số nguyên, tức là trong tập thương $N \times N / \sim$ được định nghĩa như sau:

$$(m_1, n_1)^{\sim} + (m_2, n_2)^{\sim} = (m_1 + m_2, n_1 + n_2)^{\sim}$$

$$(m_1, n_1)^{\sim} \cdot (m_2, n_2)^{\sim} = (m_1 m_2 + n_1 n_2, m_1 n_2 + n_1 m_2)^{\sim}$$

Người ta chứng minh được rằng các phép toán được xác định như trên không phụ thuộc vào việc chọn các phân tử đại diện của các lớp tương đương, các phép toán đó thoả mãn các quy tắc về số học đã biết trong tập hợp các số tự nhiên N ; hơn nữa, trong tập hợp các số nguyên, có thể thực hiện phép trừ đối với hai số bất kì.

b) Xây dựng tập hợp các số hữu tỉ

Ta kí hiệu Z là tập hợp các số nguyên, Z^* là tập hợp các số nguyên khác 0. Tích Đề các $Z \times Z^*$ là tập hợp các cặp thứ tự (m, n) , trong đó m là một số nguyên và n là một số nguyên khác 0.

Gọi \sim là quan hệ hai ngôi trên tập hợp $Z \times Z^*$ xác định như sau:

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \text{ khi và chỉ khi } m_1 n_2 = m_2 n_1.$$

(Chẳng hạn, ta có $(2, 3) \sim (4, 6), (3, 5) \sim (18, 30)$,

$$(-3, 7) \sim (-12, 28), (-3, 7) \sim (6, -14)$$

Ta chứng minh \sim là một quan hệ tương đương trên $Z \times Z^*$.

Thật vậy, dễ thấy quan hệ \sim là phản xạ và đối xứng.

Nếu $(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2)$ và $(m_2, n_2) \sim (m_3, n_3)$ thì

$$m_1 n_2 = m_2 n_1 \text{ và } m_2 n_3 = m_3 n_2 \quad (1)$$

Do đó:

$m_1 n_2 m_3 = m_2 n_1 m_3 \Leftrightarrow m_1 m_2 n_3 = m_2 n_1 m_3$, vì $n_2 \neq 0$. Từ đó suy ra rằng nếu m_2 khác 0 thì $m_1 n_3 = m_3 n_1$; do đó $(m_1, n_1) \sim (m_3, n_3)$. Nếu $m_2 = 0$ thì từ hai đẳng thức trong (1) suy ra $m_1 = 0$ và $m_3 = 0$. Do đó ta cũng có $m_1 n_3 = m_3 n_1$, tức là $(m_1, n_1) \sim (m_3, n_3)$. Vậy quan hệ \sim là bắc cầu.

Quan hệ tương đương \sim trên $Z \times Z^*$ chia tập hợp $Z \times Z^*$ thành các lớp tương đương đôi một rời nhau.

Các lớp tương đương của quan hệ tương đương \sim trên $Z \times Z^*$ gọi là các số hữu tỉ.

Lớp tương đương $(m, n) \sim$ có đại diện là phân tử (m, n) xác định số hữu tỉ, kí hiệu là $\frac{m}{n}$. Hai cặp thứ tự (m_1, n_1) và (m_2, n_2) thuộc cùng một lớp tương đương, tức là $m_1 n_2 = m_2 n_1$, xác định cùng một số hữu tỉ. Như vậy, hai số hữu tỉ là bằng nhau.

Phép cộng và phép nhân trong tập hợp các số hữu tỉ, tức là trong tập thương $Z \times Z^* / \sim$ được định nghĩa như sau:

$$(m_1, n_1) \sim + (m_2, n_2) \sim = (m_1 n_2 + n_1 m_2, n_1 n_2) \sim,$$

$$(m_1, n_1) \sim \cdot (m_2, n_2) \sim = (m_1 m_2, n_1 n_2) \sim$$

Người ta chứng minh được rằng hai phép toán được xác định như trên không phụ thuộc vào việc chọn các phân tử đại diện của các lớp tương đương, các phép toán đó thoả mãn các quy tắc về số học trong tập hợp các số nguyên; hơn nữa, trong tập hợp các số hữu tỉ phép chia cho một số khác không bao giờ cũng thực hiện được.

Hoạt động 4.1. Tìm hiểu về quan hệ tương đương

Nhiệm vụ:

Nhiệm vụ 1: Đọc các thông tin cơ bản để có được các kiến thức về:

- Định nghĩa quan hệ tương đương.
- Định nghĩa lớp tương đương, tập thương.

– Một số ví dụ về quan hệ tương đương, tập thương.

Nhiệm vụ 2:

Trình bày và thấy được tầm quan trọng của nguyên lý đồng nhất các phần tử tương đương:

- Quan hệ tương đương trên một tập hợp chia tập hợp đó thành các lớp tương đương đôi một rời nhau.
- Biết vận dụng một cách sinh động nguyên lý này trong các ví dụ và ứng dụng khác nhau.

Đánh giá hoạt động 4.1

1. Gọi \sim_1 , \sim_2 và \sim_3 , theo thứ tự, là quan hệ hai ngôi “có cùng hình dạng với”, “có cùng độ lớn với” và “có cùng độ dày với” trên tập hợp L° các mảnh logic.

a) Chứng minh rằng chúng là những quan hệ tương đương trên L° .

b) Mỗi quan hệ đó chia tập hợp L° thành mấy lớp tương đương?

2. Gọi R là quan hệ hai ngôi “có cùng số dư với... trong phép chia cho 4” trên tập hợp \mathbb{N} .

a) Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên tập hợp \mathbb{N} .

b) Quan hệ tương đương R trên \mathbb{N} chia tập hợp \mathbb{N} thành mấy lớp tương đương? Hãy vẽ sơ đồ Ven biểu diễn các lớp tương đương của quan hệ R .

3. Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $P = P(X)$ là tập hợp các tập con của X . Gọi \sim là quan hệ hai ngôi trên P xác định bởi: $A \sim B$ khi và chỉ khi $N(A) = N(B)$

Trong đó $N(C)$ là số phần tử của tập hợp $C \subset X$.

a) Chứng minh rằng \sim là một quan hệ tương đương trên P .

b) Tìm lớp tương đương của quan hệ \sim trên P , có đại diện là phần tử $\{1, 3\}$ của P .

4. Gọi $X = \mathbb{R}^2$ là tập hợp các điểm của mặt phẳng và \sim là quan hệ hai ngôi trên tập hợp \mathbb{R}^2 xác định bởi:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ khi và chỉ khi } x_1 - y_1 = x_2 - y_2.$$

a) Chứng minh rằng \sim là một quan hệ tương đương trên \mathbb{R}^2 .

b) Tìm tập thương \mathbb{R}^2 / \sim .

5. Cho một tập hợp $X \neq \emptyset$. Chứng minh rằng quan hệ đồng nhất R trên X là một quan hệ tương đương trên X và tìm tập thương X/R .

6. Gọi D là tập hợp các đường thẳng trong một mặt phẳng và a là một đường thẳng cho trước trong mặt phẳng đó. Gọi R là quan hệ hai ngôi trên

D xác định như sau: Với mọi $x, y \in D$, $x R y$ khi và chỉ khi $x \cap a \neq \phi$ và $y \cap a \neq \phi$.

R có phải là một quan hệ tương đương trên D hay không?

7. Cho các tập con của \mathbb{R} : $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 7\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$ và $C = \{x \in \mathbb{R} : 5 < x \leq 10\}$. Tồn tại hay không một quan hệ tương đương R trên tập hợp \mathbb{R} sao cho các tập hợp A, B, C là những lớp tương đương của quan hệ R

8. Giả sử X là một tập hợp khác ϕ , A_1, A_2, \dots, A_m là những tập con khác rỗng đôi một rời nhau của X và $\bigcup_{k=1}^m A_k = X$. Gọi \sim là quan hệ hai ngôi trên X xác định như sau:

Với mọi $x, y \in X$, $x \sim y$ khi và chỉ khi tồn tại một số nguyên $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ sao cho $x \in A_k$ và $y \in A_k$.

Chứng minh rằng \sim là một quan hệ tương đương trên tập hợp X và tìm các lớp tương đương của quan hệ \sim trên X.

9. Cho một tập hợp $X \neq \phi$ và một phần tử $a \in X$. Gọi $P = \mathcal{P}(X)$ là tập hợp các tập con của X và \sim là quan hệ hai ngôi trên P xác định như sau:

Với mọi $A, B \in P$, $A \sim B$ khi và chỉ khi $A = B$ hoặc $a \notin A \cup B$.

a) Chứng minh rằng \sim là một quan hệ tương đương trên tập hợp P.

b) Tìm tập thương P/\sim .

10. Ký hiệu C^* chỉ tập hợp các số phức có phần thực khác 0. Gọi R là quan hệ hai ngôi trên C^* xác định bởi $(a + bi) R (c + di)$ khi và chỉ khi $ac > 0$.

a) Chứng minh rằng R là một quan hệ tương đương trên C^* .

b) Minh hoạ hình học các lớp tương đương của quan hệ R.

Tiểu chủ đề 1.5. Quan hệ thứ tự

Thông tin cơ bản

5.1. Định nghĩa:

Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp X được gọi là *quan hệ thứ tự* nếu nó là phản xạ, bắc cầu và phản đối xứng, tức là nếu R thoả mãn các điều kiện sau:

a) Với mọi $x \in X$, $x R x$,

b) Với mọi $x, y, z \in X$, $(x R y \text{ và } y R z) \Rightarrow x R z$,

c) Với mọi $x, y \in X$, $(x R y \text{ và } y R x) \Rightarrow x = y$.

Người ta thường kí hiệu quan hệ thứ tự là " \leq ". Như vậy $x R y$ được viết là $x \leq y$, đọc là x nhỏ hơn hoặc bằng y, hay y lớn hơn hoặc bằng x.

Formatted: Heading03, Space
Before: 0 pt

Formatted: Heading04

Nếu \leq là một quan hệ thứ tự trên tập hợp X thì cặp (X, \leq) gọi là một tập hợp sắp thứ tự. Người ta cũng gọi X là một tập hợp sắp thứ tự khi chỉ nói tới một quan hệ thứ tự nào đó trên X .

Ví dụ 5.1:

Quan hệ hai ngôi “chia hết” trên tập hợp \mathbb{N}^* là một quan hệ thứ tự trên \mathbb{N}^* vì:

Với mọi số nguyên dương n , ta có n / n (n chia hết n),

Với mọi $m, n, k \in \mathbb{N}^*$, (m / n và n / k) $\Rightarrow m / k$,

Với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$, (m / n và n / m) $\Rightarrow m = n$,

Ví dụ 5.2:

Cho tập hợp $X \neq \emptyset$ và tập hợp Q những tập con của X ($Q \subset P(X)$), $Q \neq \emptyset$. Quan hệ hai ngôi “chứa trong” trên Q là một quan hệ thứ tự vì:

Với mọi $A \in Q$, $A \subset A$,

Với mọi $A, B, C \in Q$, ($A \subset B$ và $B \subset C$) $\Rightarrow A \subset C$,

Với mọi $A, B \in Q$, ($A \subset B$ và $B \subset A$) $\Rightarrow A = B$.

Ví dụ 5.3:

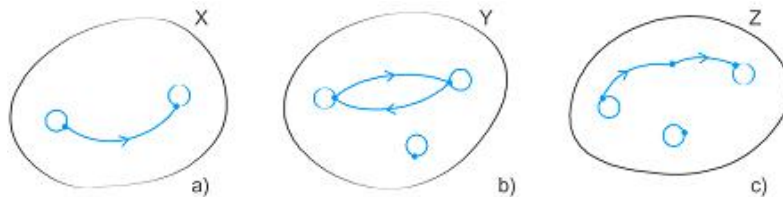
Nếu X là một tập con khác \emptyset của tập hợp các số thực thì quan hệ hai ngôi “ \leq ” trên X là một quan hệ thứ tự vì với mọi $x, y, z \in X$, ta có:

$x \leq x$, ($x \leq y$ và $y \leq z$) $\Rightarrow x \leq z$, ($x \leq y$ và $y \leq x$) $\Rightarrow x = y$.

Để phân biệt quan hệ thứ tự \leq trên một tập hợp X tùy ý với quan hệ \leq trên \mathbb{R} , ta gọi quan hệ sau là quan hệ thứ tự thông thường trên \mathbb{R} .

Ví dụ 5.4:

Xét các quan hệ hai ngôi trên các tập hợp X, Y, Z được biểu diễn bởi các lược đồ hình tên trong hình 29



Hình 29

Trong lược đồ hình tên 29 a), quan hệ hai ngôi R trên tập hợp $X = \{a, b\}$ được xác định bởi: $a R a, b R b, a R b$.

Dễ dàng thấy rằng R là một quan hệ thứ tự trên X .

• Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp $Y = \{a, b, c\}$ được biểu diễn bởi lược đồ hình tên 29 b) không phải là một quan hệ thứ tự trên tập hợp Y vì nó không phải là quan hệ phản đối xứng: $a R b, b R a$ và $a \neq b$.

Quan hệ hai ngôi R trên tập hợp $Z = \{a, b, c, d\}$ được biểu diễn bởi lược đồ hình tên 29 c) không phải là một quan hệ thứ tự trên Z vì nó không phải là quan hệ bắc cầu: $a R b$ và $b R c$ nhưng không có $a R c$.

5.2. Quan hệ thứ tự nghiêm ngặt

Formatted: Heading04

a) *Định nghĩa:* Quan hệ hai ngôi \mathfrak{R} trên tập hợp X gọi là *quan hệ thứ tự nghiêm ngặt* nếu nó là đối phản xạ và bắc cầu, tức là nếu R thoả mãn các điều kiện sau:

a) Với mọi $x \in X$, không có $x R x$, tức là $(x, x) \notin R$,

b) Với mọi $x, y, z \in X$, $(x R y$ và $y R z) \Rightarrow x R z$.

Quan hệ thứ tự nghiêm ngặt R thường được kí hiệu là “ $<$ ”. Như vậy, $x R y$ được viết là $x < y$, đọc là x đứng trước y .

Ví dụ 5.5:

Dễ dàng thấy rằng quan hệ hai ngôi “lớn hơn” (theo nghĩa thông thường) ($>$) trên tập hợp \mathbb{R} là một quan hệ thứ tự nghiêm ngặt.

Quan hệ hai ngôi “đắt hơn” trên một tập hợp các mặt hàng cũng là một quan hệ thứ tự nghiêm ngặt.

Chú ý rằng quan hệ thứ tự nghiêm ngặt không phải là một quan hệ thứ tự.

Mối liên hệ giữa quan hệ thứ tự và quan hệ thứ tự nghiêm ngặt được cho trong hai định lí sau.

b) *Định lí*

Nếu $<$ là một quan hệ thứ tự trên tập hợp X thì quan hệ hai ngôi $<$ trên X xác định bởi $x < y$ khi và chỉ khi $x \leq y$ và $x \neq y$, là một quan hệ thứ tự nghiêm ngặt trên X .

Chứng minh :

Từ định nghĩa của quan hệ $<$ suy ra rằng $<$ không phải là một quan hệ đối phản xạ. Ta chứng minh $<$ là bắc cầu. Thật vậy, giả sử $x < y$ và $y < z$. Khi đó, $x \leq y$, $y \leq z$, $x \leq y$ và $y \neq z$. Vì $<$ là một quan hệ bắc cầu nên từ đó suy ra $x \leq z$. Nếu $x = z$ thì ta có $z \leq y$ và $y \leq z$. Do đó $y = z$ (suy ra từ tính phản đối xứng của quan hệ \leq); điều này mâu thuẫn với $y < z$. Vậy $x \leq z$. Như vậy, ta có $x \leq z$ và $x \neq z$, tức là $x < z$.

Đảo lại, ta có:

c) Định lí

Nếu $<$ là một quan hệ thứ tự nghiêm ngặt trên tập hợp X thì quan hệ hai ngôi \leq trên X xác định bởi: $x \leq y$ khi và chỉ khi $x < y$ hoặc $x = y$, là một quan hệ thứ tự trên X .

Chứng minh :

Từ định nghĩa của quan hệ \leq suy ra rằng \leq là một quan hệ phản xạ. Ta chứng minh \leq là quan hệ bắc cầu.

Thật vậy, giả sử $x \leq y$ và $y \leq z$. Khi đó, $x < y$ hoặc $x = y$ và $y < z$ hoặc $y = z$. Nếu $x < y$ và $y < z$ thì $x < z$; do đó $x \leq z$. Nếu $x < y$ và $y = z$ thì $x < z$; do đó $x \leq z$. Nếu $x = y$ và $y < z$ thì $x < z$; do đó $x \leq z$. Cuối cùng nếu $x = y$ và $y = z$ thì $x = z$, do đó $x \leq z$.

\leq là quan hệ phản đối xứng.

Thật vậy, giả sử $x \leq y$ và $y \leq x$. Khi đó, $x < y$ hoặc $x = y$ và $y < x$ hoặc $y = x$. Hai điều kiện $x < y$ và $y < x$ loại trừ nhau vì nếu xảy ra đồng thời hai điều kiện này thì ta có $x < x$ điều này không thể vì $<$ là quan hệ đối phản xạ. Hai điều kiện $x < y$ và $y = x$ loại trừ lẫn nhau. Hai điều kiện $x = y$ và $y < x$ cũng loại trừ nhau. Do đó chỉ có thể xảy ra một trường hợp $x = y$ và $y = x$. Như vậy các điều kiện $x \leq y$ và $y \leq x$ kéo theo $x = y$.

Giả sử \leq là một quan hệ thứ tự trên tập hợp X và x, y là hai phần tử của X . Ta nói rằng x đứng trước y nếu $x \leq y$ và $x \neq y$. Khi đó, ta viết $x < y$ ($<$ là quan hệ thứ tự nghiêm ngặt trên X nói trong Định lí b).

5.3. Quan hệ thứ tự toàn phần và quan hệ thứ tự bộ phận.

Formatted: Heading04

Quan hệ thứ tự \leq trên tập hợp X gọi là *toàn phần* nếu với hai phần tử bất kì x, y của X , ta có $x \leq y$ hoặc $y \leq x$.

Trong lược đồ hình tên của quan hệ thứ tự toàn phần trên tập hợp X , các phần tử của X đôi một được nối với nhau bởi ít nhất một mũi tên.

Nếu tồn tại ít nhất hai phần tử x, y của X sao cho cả hai điều kiện $x \leq y$ và $y \leq x$ đều không xảy ra thì \leq gọi là quan hệ thứ tự *bộ phận*.

Ví dụ 5.6:

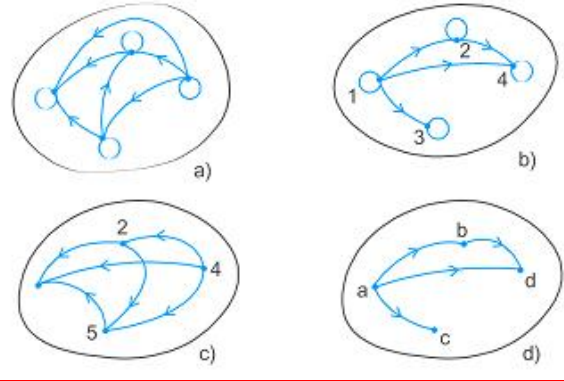
Quan hệ thứ tự “ \leq ” (theo nghĩa thông thường) trên tập hợp \mathbb{R} là toàn phần. Quan hệ “chia hết” trên tập hợp \mathbb{N}^* là quan hệ thứ tự bộ phận vì chẳng hạn số nguyên 3 và 7 là không so sánh được”. Ta không có $3 / 7$, cũng không có $7 / 3$.

Quan hệ thứ tự nghiêm ngặt $<$ trên tập hợp X được gọi là *toàn phần* nếu với hai phần tử khác nhau bất kì x, y của X , ta có $x < y$ hoặc $y < x$.

Nếu tồn tại ít nhất hai phần tử khác nhau x, y của X sao cho cả hai điều kiện $x < y$ và $y < x$ đều không xảy ra thì quan hệ $<$ được gọi là *bộ phận*.

Ví dụ 5.7 :

Xét các quan hệ thứ tự và quan hệ thứ tự nghiêm ngặt biểu diễn bởi các lược đồ hình tên trong hình 29 dưới đây.



Hình 30

Quan hệ thứ tự trên tập hợp A được biểu diễn bởi lược đồ hình tên 30 a) là toàn phần. Quan hệ thứ tự trên tập hợp B trong Hình 30 b) là bộ phận. Quan hệ thứ tự nghiêm ngặt trên tập hợp C trong Hình 30 c) là toàn phần. Lược đồ hình tên trong Hình 30 c) biểu diễn quan hệ thứ tự nghiêm ngặt bộ phận trên tập hợp D.

5.4. Các phần tử tối đại, tối tiểu

Formatted: Heading04

a) Giả sử (X, \leq) là một tập hợp sắp thứ tự. Phần tử $x_0 \in X$ được gọi là tối đại nếu nó không đứng trước bất kì một phần tử nào của X , tức là không tồn tại $x \in X$ sao cho $x_0 < x$.

Nói một cách khác, $x_0 \in X$ là phần tử tối đại nếu không tồn tại $x \in X$ sao cho $x_0 \in x$ và $x_0 \neq x$.

Điều kiện này tương đương với điều kiện sau:

Với mọi $x \in X$, nếu $x_0 \in x$ thì $x = x_0$.

Ví dụ 5.8:

Cho tập hợp $X \neq \emptyset$. Gọi $P = P(X)$ là tập tất cả các tập con của X . Ta biết rằng quan hệ hai ngôi “ \subset ” trên P là một quan hệ thứ tự. Do đó (P, \subset) là một tập hợp sắp thứ tự. Ta chứng minh X là phần tử tối đại của P .

Thật vậy, giả sử $A \neq X$ và $X \neq A$. Khi đó, ta có $A \subset X$ và $X \subset A$. Do đó $A = X$.
 Vậy X là phần tử tối đại. Mọi tập hợp $A \in P$ khác X đều không phải là phần tử tối đại vì $A \subset X$. Như vậy X là phần tử tối đại duy nhất.

Vi dụ 5.9 :

Gọi X là tập hợp các số nguyên lớn hơn 1 và \leq là quan hệ trên X xác định như sau: Với mọi $m, n \in X$, $m \leq n$ khi và chỉ khi m chia hết cho n .

Dễ dàng thấy rằng \leq là một quan hệ thứ tự trên X . Ta chứng minh rằng mỗi số nguyên tố đều là một phần tử tối đại. Thật vậy, nếu p là một số nguyên tố và $n \in X$, $p \leq n$ thì $n = p$. Do đó p là một phần tử tối đại. Như vậy tập hợp sắp thứ tự X có vô số phần tử tối đại.

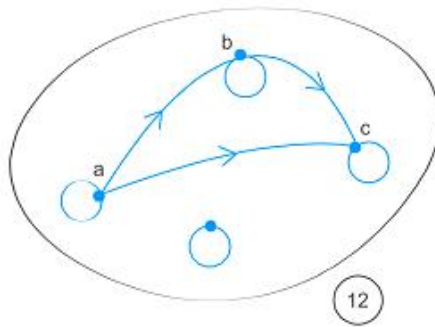
Vi dụ 5.10 :

Kí hiệu \leq là quan hệ “chia hết” trên tập hợp N^* : Với m, n nguyên dương, $m \leq n$ khi và chỉ khi $m \mid n$.

Tập hợp sắp thứ tự N^* không có phần tử tối đại vì với mọi $n \in N^*$, ta có $n \leq 2n$ và $2n \neq n$, tức là $n \leq 2n$ và $2n \neq n$.

Các ví dụ trên cho thấy một tập hợp sắp thứ tự có thể có một hoặc nhiều phần tử tối đại, cũng có thể không có phần tử tối đại nào.

Trong lược đồ hình tên biểu diễn quan hệ thứ tự trên một tập hợp, phần tử tối đại được biểu diễn bởi một điểm mà từ đó không có một mũi tên nào đi đến các điểm khác. Trong hình 31, c và d là hai phần tử tối đại của tập hợp sắp thứ tự X .



Hình 31

b) Giả sử (X, \leq) là một tập hợp sắp thứ tự. Phần tử $x_0 \in X$ gọi là tối tiểu nếu không có một phần tử nào của X đứng trước nó, tức là không tồn tại $x \in X$, $x \neq x_0$ sao cho $x \leq x_0$.

Trong lược đồ hình tên biểu diễn quan hệ thứ tự trên một tập hợp, phần tử tối tiểu được biểu diễn bởi một điểm mà không có bất kì một mũi tên nào đi từ các điểm khác đến điểm đó. Trong Hình 30, a và d và hai điểm tối tiểu của tập hợp sắp thứ tự X . Chú ý rằng d cũng là điểm tối đại của X .

Vi dụ 5.11 :

Giả sử P là tập hợp tất cả các tập con của tập hợp $X \neq \emptyset$. Khi đó, tập hợp sắp thứ tự (P, \subset) có một phần tử tối tiểu duy nhất, đó là tập hợp \emptyset . Thật vậy, với mọi $A \in P$ mà $A \subset \emptyset$, ta có $A = \emptyset$. Do đó \emptyset là phần tử tối tiểu. Ngoài ra, với mọi $A \in P$ mà $A \neq \emptyset$, ta có $\emptyset \subset A$. Do đó A không phải là phần tử tối tiểu.

Vi dụ 5.12 :

Giả sử X là tập hợp các số nguyên lớn hơn 1. Ta biết rằng (X, \mid) là một tập hợp sắp thứ tự (kí hiệu \mid chỉ quan hệ “chia hết” trên X). Nếu p là một số nguyên tố thì với mọi $n \in X$, mà $n \mid p$, ta có $n = p$. Do đó p là một phần tử tối tiểu của tập hợp sắp thứ tự X . Như vậy, X có vô số phần tử tối tiểu, đó là tất cả các số nguyên tố.

Vi dụ 5.13 :

Gọi X là tập hợp các số nguyên lớn hơn 1 và \leq là quan hệ “chia hết cho” trên X (Xem ví dụ 9). Tập hợp sắp thứ tự (X, \leq) không có phần tử tối tiểu vì với mọi $n \in X$, ta có $2n$ chia hết cho n và $2n \neq n$, tức là $2n \leq n$ và $2n \neq n$.

Các ví dụ trên cho thấy một tập hợp sắp thứ tự có thể có một hoặc nhiều phần tử tối tiểu và cũng có thể không có phần tử tối tiểu nào.

5.5. Các phần tử lớn nhất, nhỏ nhất

Formatted: Heading04

a) Giả sử (X, \leq) là một tập hợp sắp thứ tự. Phần tử $x_0 \in X$ gọi là lớn nhất nếu: $x \leq x_0$ với mọi $x \in X$.

b) Định lí: Tập hợp sắp thứ tự (X, \leq) có nhiều nhất là một phần tử lớn nhất. Phần tử lớn nhất là tối đại.

Chứng minh

Giả sử x_0 và x_1 là những phần tử lớn nhất trong tập hợp sắp thứ tự X . Khi đó:

$$x \leq x_0 \text{ với mọi } x \in X$$

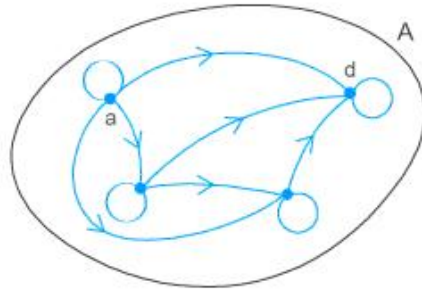
và

$$x \leq x_1 \text{ với mọi } x \in X.$$

Do đó $x_1 \leq x_0$ và $x_0 \leq x_1$. Vì quan hệ \leq là phản đối xứng nên từ đó suy ra $x_1 = x_0$. Vậy phần tử lớn nhất, nếu có, là duy nhất.

Giả sử x_0 là phần tử lớn nhất trong (X, \leq) . Khi đó, với mọi $x \in X$, nếu $x_0 \leq x$ thì vì ta cũng có $x \leq x_0$ (suy ra từ định nghĩa của x_0) nên $x = x_0$. Vậy x_0 là phần tử tối đại

Trong lược đồ hình tên biểu diễn quan hệ thứ tự trên một tập hợp, phần tử lớn nhất được biểu diễn bởi một điểm mà tại mỗi điểm của tập hợp đều có một mũi tên đi từ đó đến điểm đã nêu.



Hình 32

Trong Hình 32, d là phần lớn nhất của tập hợp sắp thứ tự A .

Ví dụ 5.14 :

Trong tập hợp sắp thứ tự (P, \subset) ($P = P(X)$ là tập hợp tất cả các tập con của tập $X \neq \emptyset$), tập hợp X là phần tử lớn nhất.

- Tập hợp sắp thứ tự (\mathbb{N}^*, \leq) không có phần tử tối đại. Do đó, theo Định lý b), tập hợp \mathbb{N}^* không có phần tử lớn nhất.

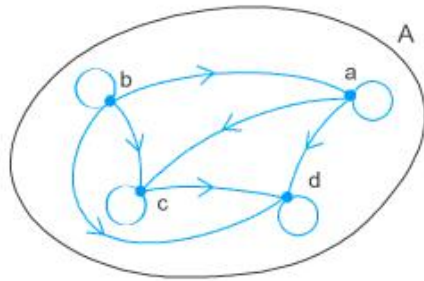
- Xét tập hợp sắp thứ tự (X, \leq) , trong đó X là tập hợp các số nguyên lớn hơn 1 và \leq là quan hệ “chia hết cho” trên X . Trong tập hợp này không có phần tử lớn nhất vì với mỗi $n \in X$, số $n + 1$ không chia hết cho n . Để ý rằng trong (X, \leq) có vô số phần tử tối đại (xem Ví dụ 9).

c) Giả sử (X, \leq) là một tập hợp sắp thứ tự. Phần tử $x_0 \in X$ gọi là nhỏ nhất nếu

$x_0 \leq x$ với mọi $x \in X$. Tương tự như trong Định lý b), dễ dàng chứng minh được rằng.

d) Tập hợp sắp thứ tự (X, \leq) có nhiều nhất là một phần tử nhỏ nhất. Phần tử nhỏ nhất là tối tiểu.

Trong lược đồ hình tên biểu diễn quan hệ thứ tự trên một tập hợp, phần tử nhỏ nhất được biểu diễn bởi một điểm mà từ đó có các mũi tên đi đến mọi điểm Hình 33 khác của tập hợp.



Hình 33

Hình 33, a là phần tử nhỏ nhất của tập hợp sắp thứ tự A.

Ví dụ 5.15:

- Trong tập hợp sắp thứ tự (P, \subset) , trong đó P là tập hợp tất cả các tập con của tập hợp $X \neq \emptyset$, \emptyset là phần tử nhỏ nhất duy nhất.
- Xét tập hợp sắp thứ tự (X, \leq) , trong đó x là tập hợp các số nguyên lớn hơn 1 và \leq là quan hệ “chia hết cho” trên X. Trong Ví dụ 13, ta biết rằng trong X không có phần tử tối tiểu. Do đó, theo Định lí d), tập hợp sắp thứ tự X không có phần tử nhỏ nhất.
- Tập hợp sắp thứ tự (X, \preceq) , trong đó X là tập hợp các số nguyên lớn hơn 1 và \preceq là quan hệ “chia hết” trên X, không có phần tử nhỏ nhất vì với mọi $n \in X$, n không chia hết $n + 1$. Đề ý rằng tập hợp sắp thứ tự này có vô số phần tử tối tiểu (xem Ví dụ 12).

5.6. Các tập con của một tập sắp thứ tự. Bổ đề Doóc–no (Zorn).

Formatted: Heading04

a) Giả sử (X, \leq) là một tập hợp sắp thứ tự và A là một tập con của X. Gọi \leq_A là quan hệ hai ngôi xác định trên tập hợp A như sau: Với mọi $x, y \in A$, $x \leq_A y$ khi và chỉ khi $x \leq y$.

Dễ dàng thấy rằng \leq_A là một quan hệ thứ tự trên A. Tập hợp sắp thứ tự (A, \leq_A) gọi là tập con sắp thứ tự của tập hợp sắp thứ tự (X, \leq) .

Thay cho (A, \leq_A) người ta viết (A, \leq) . Khi nói A là một tập con của tập hợp sắp thứ tự (X, \leq) mà không giải thích gì thêm thì ta hiểu A là tập hợp sắp thứ tự (A, \leq) .

b) Giả sử (X, \leq) là một tập hợp sắp thứ tự. Tập con A của X gọi là *dãy xích* nếu với mọi $x, y \in X$, $x \leq y$ hoặc $y \leq x$.

Nói một cách khác, A là một dãy xích nếu quan hệ thứ tự \leq_x trên A là toàn phần.

Ví dụ 5.16:

- Tập con $A = \{5, 15, 60\}$ là một dãy xích trong tập hợp sắp thứ tự (\mathbb{N}^*, \leq) .
- Tập con $B = \{3, 6, 12, 18\}$ không phải là một dãy xích trong tập hợp sắp thứ tự (\mathbb{N}^*, \leq) , trong đó \leq là quan hệ “chia hết cho” trên \mathbb{N} vì 18 không chia hết cho 12.

c) *Phần tử chặn trên, chặn dưới*

Giả sử (X, \leq) là một tập hợp sắp thứ tự và A là một tập hợp con của X .

- $x_0 \in X$ gọi là phần tử chặn trên của A nếu $x \leq x_0$ với mọi $x \in A$.
- $x_0 \in X$ gọi là phần tử chặn dưới của A nếu $x_0 \leq x$ với mọi $x \in A$.

Vi dụ 5.17 :

Xét tập hợp sắp thứ tự (\mathbb{N}^*, \leq) và tập con $A = \{10, 15, 20\}$.

Để dàng thấy rằng các số 60, 120, 180, ... là những phần tử chặn trên của A và các số 1, 5 là các phần tử chặn dưới của A .

Vi dụ 5.18 :

Xét hai tập con Z (là tập các số nguyên) và $X = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 3\}$ của tập hợp sắp thứ tự (\mathbb{R}, \leq) (\leq là quan hệ thứ tự thông thường trên \mathbb{R}).

Để dàng thấy rằng trong \mathbb{R} không có phần tử chặn trên cũng không có phần tử chặn dưới của Z , mỗi số thực lớn hơn hoặc bằng 3 đều là một phần tử chặn trên của A và mỗi số thực nhỏ hơn hoặc bằng -1 là một phần tử chặn dưới của A .

Như vậy, một tập con của một tập hợp sắp thứ tự có thể có một hoặc nhiều, cũng có thể không có phần tử chặn trên, chặn dưới.

Bổ đề mà ta thừa nhận sau đây là một định lí quan trọng được áp dụng ở? chứng minh nhiều định lí.

d) **Bổ đề Zooc-nơ.** Giả sử (X, \leq) là một tập hợp sắp thứ tự. Nếu trong X mỗi dãy xích đều có một phần tử chặn trên thì trong X có phần tử tối đại.

Hoạt động. Tìm hiểu về quan hệ thứ tự

Nhiệm vụ:

Sinh viên đọc thông tin cơ bản để thực hiện các nhiệm vụ sau

Nhiệm vụ 1

Trình bày các khái niệm quan hệ thứ tự và quan hệ thứ tự nghiêm ngặt, quan hệ thứ tự toàn phần và bộ phận.

Formatted: Heading02

Deleted:

Formatted: Heading03, Space
Before: 0 pt

Formatted: Heading04

Lí giải một số quan hệ thứ tự thường gặp như quan hệ “chia hết”, quan hệ “chia hết cho” trên tập hợp \mathbb{N}^* , quan hệ “bao hàm” trên một tập hợp những tập hợp, quan hệ (nhỏ hơn hoặc bằng theo nghĩa thông thường) trên tập hợp \mathbb{R} .

Nhận biết một quan hệ cho trước trên một tập hợp có phải là một quan hệ thứ tự hay không, biết cho các ví dụ về quan hệ thứ tự.

– Biểu diễn một số quan hệ thứ tự và quan hệ thứ tự nghiêm ngặt bằng lược đồ hình tên.

Nhiệm vụ 2

Formatted: Heading04

Trình bày các khái niệm phần tử tối đại, tối tiểu, phần tử lớn nhất, nhỏ nhất, phần tử chặn trên, chặn dưới, dây xích trong một tập hợp sắp thứ tự.

Tìm các phần tử đó nêu trong một tập hợp sắp thứ tự cho trước.

– Biểu diễn được các phần tử này trong một số quan hệ thứ tự bằng lược đồ hình tên.

Đánh giá hoạt động 5.1

Formatted: Heading02

1. Cho tập hợp $X = \{1, 3, 9, 18, 36\}$. Gọi \leq là quan hệ “chia hết” trên X .

a) Chứng minh \leq là một quan hệ thứ tự trên X .

b) Quan hệ thứ tự \leq trên X có phải là toàn phần không?

2. Cho tập hợp $A = \{3, 6, 12, 36, 48\}$. Quan hệ “chia hết cho” trên A có phải là một quan hệ thứ tự không? Nếu có, nó có phải là một quan hệ toàn phần không?

3. Cho R là quan hệ hai ngôi trên tập hợp C các số phức xác định như sau: Với mọi $a + bi, c + di \in C$, $(a + bi) \mathcal{R} (c + di)$ khi và chỉ khi $a \leq c$ và $b \leq d$.

a) Chứng minh rằng \mathcal{R} là một quan hệ thứ tự trên C .

b) R có phải là toàn phần không?

4. Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ và quan hệ hai ngôi R xác định trên X như sau: Với mọi $x, y \in X$, $x R y$ khi và chỉ khi $x \leq y$ và $2 \mid (x - y)$.

a) Chứng minh rằng R là một quan hệ thứ tự trên X .

b) R có phải là toàn phần không?

c) Biểu diễn quan hệ R bằng lược đồ hình tên.

5. Giả sử X là tập hợp tất cả các dãy số thực và R là quan hệ hai ngôi trên X xác định như sau: Với mọi dãy số thực (x_n) và (y_n) , $(x_n) R (y_n)$ khi và chỉ khi tồn tại một số nguyên dương m sao cho $x_n \leq y_n$ với mọi $n > m$.

a) Chứng minh quan hệ R là phản xạ và bắc cầu.

b) R có phải là quan hệ thứ tự hay không?

6. Có thể xác định được bao nhiêu quan hệ thứ tự.

Trên một tập hợp có hai phần tử?

7. Cho tập hợp sắp thứ tự (X, \leq) , trong đó

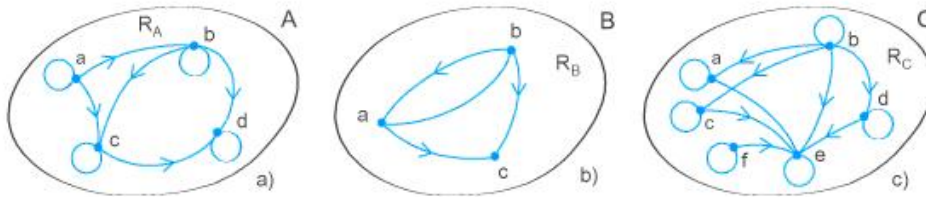
$X = \{2, 5, 8, 10, 20, 40\}$ và \leq là quan hệ “chia hết” trên X .

a) Tìm các phần tử tối đại và tối tiểu của X .

b) Tìm phần tử lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của X .

8. Cho tập hợp sắp thứ tự (X, \leq) với $X = \{3^5, 3^6, 3^7, 3^8, 3^9\}$ và \leq là quan hệ “chia hết cho” trên X . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của X .

9. Các lược đồ hình tên trong Hình 34 dưới đây biểu diễn các quan hệ hai ngôi R_A, R_B, R_C , theo thứ tự, trên các tập hợp A, B, C . Quan hệ nào trong ba quan hệ đó là quan hệ thứ tự?

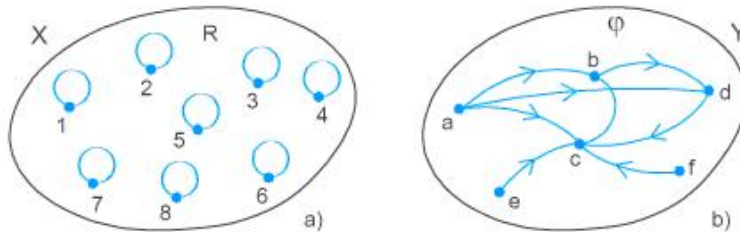


Hình 34

10. Hai lược đồ hình tên trong Hình 35 dưới đây biểu diễn quan hệ hai ngôi R và φ , theo thứ tự, trên tập hợp X và Y .

a) Chứng minh rằng R là quan hệ thứ tự trên X và φ là quan hệ thứ tự trên Y .

b) Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu và phần tử lớn nhất, nhỏ nhất của mỗi tập hợp X và Y .



Hình 35

11. Cho ví dụ về một tập hợp sắp thứ tự có m phần tử vừa là tối đại vừa là tối tiểu.

Hướng dẫn. Xem lược đồ trong Hình 35a)

12. Cho ví dụ về một tập hợp sắp thứ tự có

a) $m + 1$ phần tử, trong đó có k phần tử tối đại và một phần tử tối tiểu,

b) $m + 1$ phần tử, trong đó có k phần tử tối tiểu và một phần tử tối đại.

13. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho bốn hình tròn D_1, D_2, D_3, D_4 : D_1 và D_2 đều có tâm là điểm gốc $(0, 0)$ và có bán kính theo thứ tự, là 1 và 2, D_3 có tâm là điểm $(2, 0)$ và bán kính là 1, D_4 có tâm là điểm $(-2, 0)$ và bán kính là 4. Gọi X là tập hợp 4 hình tròn đã cho: $X = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$ và \subset là quan hệ “chứa trong” trên X .

a) Hãy biểu diễn quan hệ \subset bằng lược đồ hình tên.

b) Tìm các phần tử tối đại, tối tiểu và phần tử lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của tập hợp sắp thứ tự X .

14. Cho hai tập con $A = \{9, 18, 36, 72, 216\}$ và $B = \{7, 14, 28, 56, 84\}$ của tập hợp N^* . A và B có phải là dây xích trong tập hợp sắp thứ tự N^* với quan hệ “chia hết” hay không?

15. Tìm các phần tử chặn trên và chặn dưới (nếu có) của mỗi tập con $A = \{7, 11\}$ và $B = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ trong tập hợp sắp thứ tự $\{N^*, \leq\}$, trong đó \leq là quan hệ “chia hết” trên tập hợp N^* .

16. Tìm các phần tử chặn trên và chặn dưới (nếu có) của mỗi tập con $A = \{6, 9, 15\}$ và $B = \{3^5, 3^6, 3^7, \dots\}$ trong tập hợp sắp thứ tự $\{N^*, \leq\}$, trong đó \leq là quan hệ “chia hết cho” trên tập hợp N^* .

17. Giả sử $\{R, \leq\}$ là tập hợp sắp thứ tự, trong đó \leq là quan hệ “nhỏ hơn hoặc bằng” (thông thường) trên tập hợp các số thực \leq .

a) Tìm các phần tử chặn trên và các phần tử chặn dưới của tập hợp $A = [-7, 3) = \{x \in R : -7 \leq x < 3\}$ trong R .

b) Tìm các phần tử chặn trên và chặn dưới (nếu có) của tập hợp N các số tự nhiên.

18. Chứng minh rằng trong mỗi tập con hữu hạn khác rỗng A của tập hợp sắp thứ tự (X, \leq) luôn tồn tại phần tử tối đại và phần tử tối tiểu. Nếu ngoài ra, A là một dây xích thì tồn tại phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất của A .

|

← Formatted: Heading01

TIÊU CHỦ ĐỀ 1.6. ẢNH XẠ

Thông tin cơ bản

ánh xạ và hàm số, một trường hợp đặc biệt của ánh xạ, là những khái niệm quen thuộc với chúng ta đã từ lâu. Đây là những khái niệm quan trọng, thường gặp không chỉ trong mọi bộ môn toán học mà cả trong vật lí, hoá học,... cũng như trong các ngành khoa học, kĩ thuật khác. Chủ đề này dành riêng cho việc giới thiệu định nghĩa, các khái niệm cơ bản về ánh xạ và một số tính chất chung của ánh xạ.

6.1. Định nghĩa ánh xạ

Ta xét một số ví dụ

Ví dụ 6.1 :

Giả sử X là tập hợp gồm 7 em học sinh của một trường trung học phổ thông, trong đó 5 em Cường, Luân, Thái, Mai, Hạnh là học sinh khối 10, hai em Nguyệt, Việt là học sinh khối 11:

$$X = \{c, l, t, m, h, n, v\},$$

Y là tập hợp gồm 5 lớp 10A, 10B, 10C, 10D, 10E của trường

$$Y = \{A, B, C, D, E\},$$

và R là quan hệ hai ngôi “là học sinh của lớp” trên $X \times Y$, xác định bởi:

$$R = \{(c, A), (l, B), (t, B), (m, C), (h, D)\}.$$

$((c, A) \in R$ hay $c R A$ được hiểu “Cường là học sinh lớp 10A”).

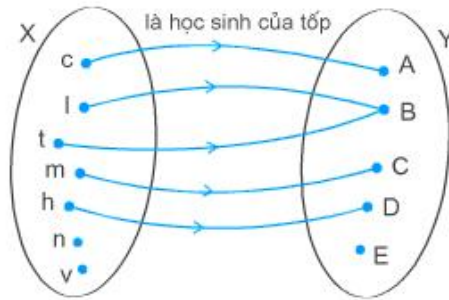
Lược đồ hình tên biểu diễn quan hệ R được cho trong Hình 1 dưới đây.

Ta thấy 5 phần tử c, l, t, m, h của tập hợp X có quan hệ R với những phần tử trong tập hợp Y , còn hai phần tử n, v không có quan hệ R với bất cứ một phần tử nào của Y . Như vậy, ta có $D(R) \neq X$,

$D(R)$ là tập xác định của quan hệ R : $D(R) = \{c, l, t, m, h\}$.

“là học sinh của lớp”

Formatted: Heading3



Hình 1

Trên lược đồ hình tên biểu diễn quan hệ R ta thấy từ mỗi điểm c, l, t, m, h có một mũi tên đi ra và không có mũi tên nào đi từ hai điểm n và v .

Ví dụ 6.2 :

Giả sử X là tập hợp gồm 5 ông: Hùng, Cung, San, Việt, Tuấn ở trong một nhà của khu tập thể:

$$X = \{h, s, c, v, t\},$$

Y là tập hợp gồm 6 em: Dũng, Anh, Loan, Đào, Mạnh, Kiệt, ở nhà đó:

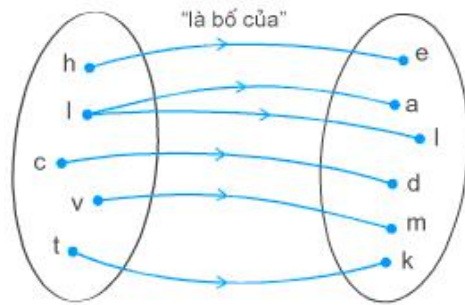
$$Y = \{d, a, l, đ, m, k\},$$

và φ là quan hệ hai ngôi “là bố của” trên $X \times Y$ xác định bởi:

$$\varphi = \{(h, d), (s, a), (s, l), (c, đ), (v, m), (t, k)\}.$$

$((h, d) \in \varphi$ hay $h \varphi d$ có nghĩa “Ông Hùng là bố của em Dũng”).

Khác với Ví dụ 1, ở đây mỗi phần tử của tập hợp X đều có quan hệ φ với một phần tử nào đó của Y , tức là $D(\varphi) = X$. Trên lược đồ hình tên biểu diễn quan hệ φ (Hình 2), ta thấy từ mỗi điểm của tập hợp X đều có mũi tên đi ra. Ngoài ra, phần tử s của X có quan hệ φ với hai phần tử a và l của Y . Trên lược đồ hình tên, ta thấy có hai mũi tên từ điểm s đi ra.



Hình 2

Ví dụ 6.3 :

Giả sử X là tập hợp gồm 7 học sinh: Dũng, Mai, Hạnh, Tuấn, Cường, Quỳnh, Việt:

$$X = \{d, m, h, t, c, q, v\},$$

Y là tập hợp gồm một số họ: Nguyễn, Lê, Trần, Đặng, Huỳnh, Vũ:

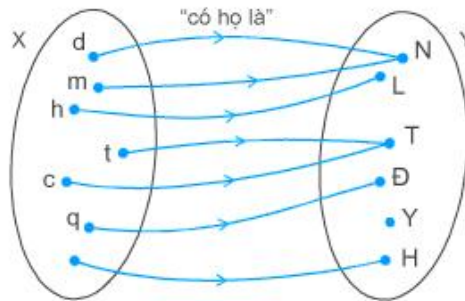
$$Y = \{N, L, T, Đ, H, V\},$$

và ρ là quan hệ “có họ là” trên $X \times Y$ xác định bởi

$$\rho = \{(d, N), (m, N), (h, L), (t, T), (c, T), (q, Đ), (v, H)\}.$$

$((d, N) \in \rho$ hay $d \rho N$ có nghĩa “Dũng có họ là Nguyễn”).

Trong ví dụ này, mỗi phần tử của tập hợp X đều có quan hệ với một phần tử nào đó của tập hợp Y, tức là $D(\rho) = X$. Ngoài ra, mỗi phần tử của X chỉ có quan hệ ρ với một phần tử *duy nhất* của Y.



Hình 3

Trên lược đồ hình tên biểu diễn quan hệ ρ , ta thấy từ mỗi điểm của tập hợp X đều có một mũi tên đi ra. Hơn nữa, không có điểm nào của X mà từ đó có quá một mũi tên đi ra.

Tóm lại, quan hệ hai ngôi ρ trên $X \times Y$ thoả mãn điều kiện sau:

Với mỗi phần tử x của tập hợp X, tồn tại một phần tử duy nhất y của tập hợp Y sao cho $x \rho y$.

Quan hệ ρ được gọi là một ánh xạ. Một cách tổng quát, ta có:

Định nghĩa: Giả sử X và Y là hai tập hợp. Quan hệ hai ngôi f trên $X \times Y$ gọi là một ánh xạ từ X vào Y nếu với *mỗi* phần tử $x \in X$, tồn tại một phần tử *duy nhất* $y \in Y$ sao cho $x f y$.

ánh xạ f từ tập hợp X vào tập hợp Y được kí hiệu là:

$$f : X \rightarrow Y.$$

Nếu x là một phần tử của tập hợp X thì phần tử y của tập hợp Y sao cho $x f y$ được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f và được kí hiệu là $f(x)$.

Hiển nhiên ánh xạ f được xác định nếu ảnh $f(x)$ của mỗi phần tử $x \in X$ đều được xác định. Vì vậy người ta còn dùng kí hiệu $x \rightarrow f(x)$, $x \in X$ hoặc $x, y, x \in X$ để chỉ ánh xạ f .

Trong trường hợp X là một tập hợp hữu hạn, người ta thường cho ánh xạ dưới dạng một bảng gồm hai hàng. Các phần tử của tập hợp X được ghi ở hàng trên. ảnh tương ứng chúng (những phần tử của tập hợp Y) được ghi ở hàng dưới. Chẳng hạn, ánh xạ $\rho : X \rightarrow Y$ trong Ví dụ 3 được cho ở bảng sau:

x	d	m	h	t	c	q	v
$\rho(x)$	N	N	L	T	T	Đ	H

Trước kia ta nói “d có quan hệ ρ với N” và viết $d \rho N$. Bây giờ ta nói “N là ảnh của d qua ánh xạ ρ ” và viết: $N = \rho(d)$.

Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ từ tập hợp X vào tập hợp Y.

Khi đó, X được gọi là *tập xác định* của ánh xạ f . Tập hợp các ảnh $f(x)$ của tất cả các phần tử x của tập hợp X được gọi là *ảnh* của ánh xạ f , kí hiệu là $f(X)$.

Như vậy, với mọi $y \in Y$,

$y \in f(X)$ khi và chỉ khi tồn tại $x \in X$ sao cho $y = f(x)$, tức là:

$$f(X) = \{y \in Y : \text{tồn tại } x \in X \text{ sao cho } y = f(x)\}.$$

Hiển nhiên $f(X)$ là một tập con của Y . Tập hợp Y chứa ảnh của ánh xạ f được gọi là *tập đến* (hoặc *tập đích*) của f .

Trở lại các ví dụ đã xét, ta thấy quan hệ \mathfrak{R} trong Ví dụ 1 là quan hệ ρ trong Ví dụ 2 không phải là những ánh xạ. Hiển nhiên quan hệ ρ trong Ví dụ 3 là một ánh xạ như đã nêu. Tập xác định của ánh xạ ρ là X .

$$\rho(d) = N, \rho(m) = N, \rho(h) = L, \dots, \rho(v) = H.$$

ảnh của ánh xạ là:

$$\rho(X) = \{N, L, T, Đ, H\} \subset Y.$$

Không có phần tử nào của tập hợp X có quan hệ \mathfrak{R} với phần tử $V \in Y$, tức là V không phải là ảnh của bất kì một phần tử nào của X . Như vậy $\rho(X)$ là một tập con thực sự của Y , tức là $\rho(X) \subset Y$ và $\rho(X) \neq Y$.

Ví dụ 6.4 :

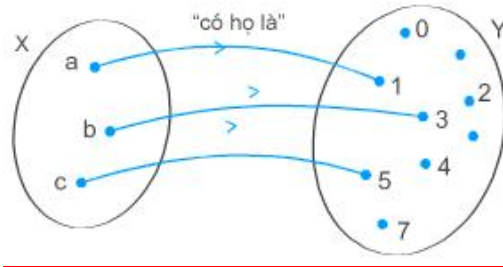
Cho tập hợp $X = \{a, b, c\}$ và ánh xạ $f: X \rightarrow N$ xác định bởi bảng sau:

x	a	b	c
$f(x)$	1	3	5

a) Biểu diễn ánh xạ f bằng lược đồ hình tên.

b) Tìm ảnh của f .

a) Lược đồ hình tên của ánh xạ f được cho trong Hình 4 dưới đây:



Hình 4

b) ảnh của ánh xạ f là :

$$f(X) = \{1, 3, 5\}.$$

$f(X)$ là một tập con thực sự của N .

ánh xạ mà tập xác định và tập đến đều là những tập hợp số (như \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} hoặc các tập con của chúng) thường được cho bởi một công thức. Chẳng hạn, khi cho hàm số :

$$f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

xác định bởi công thức : $x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$,

ta hiểu rằng mỗi số thực $x \neq 0$ nhận một phần tử duy nhất $y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ làm ảnh của nó qua ánh xạ f .

(Kí hiệu \mathbb{R}^* chỉ tập hợp các số thực khác không : $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Ví dụ 6.5 :

ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $x \rightarrow f(x) = \sin x$ là một ánh xạ từ tập hợp các số thực \mathbb{R} vào \mathbb{R} .

Tập xác định của hàm số f là \mathbb{R} . Tập đến của f cũng là \mathbb{R} . Ảnh của ánh xạ là tập hợp: $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\}$,

vì với mọi số thực y , $y \in f(\mathbb{R})$ khi và chỉ khi $y = f(x) = \sin x$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $-1 \leq y \leq 1$

Ví dụ 6.6 :

ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $x \rightarrow f(x) = x^2 + 1$ là một ánh xạ từ tập hợp các số thực \mathbb{R} vào \mathbb{R} .

Tập xác định của ánh xạ này là \mathbb{R} . Tập đến của f cũng là \mathbb{R} . Ảnh của ánh xạ: $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$,

vì với mọi số thực y , $y \in f(\mathbb{R})$ khi và chỉ khi $y = f(x) = x^2 + 1$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $y \geq 1$.

Ví dụ 6.7 :

Giả sử X là một tập hợp cho trước tùy ý. ánh xạ $I: X \rightarrow X$ xác định bởi $x \rightarrow I(x) = x$ là một ánh xạ từ X vào X .

Tập xác định của ánh xạ I là X . Tập đến của I cũng là X . Hiển nhiên ảnh của ánh xạ I là $I(X) = X$.

I được gọi là ánh xạ đồng nhất trên tập hợp X . Khi có nhiều tập hợp X, Y, \dots được đồng thời đề cập đến, để phân biệt, người ta dùng các kí hiệu I_X, I_Y, \dots để chỉ các ánh xạ đồng nhất trên các tập hợp X, Y, \dots

Ví dụ 6.8 :

Phép cộng trên tập hợp các số thực \mathbb{R} là một ánh xạ từ tập hợp $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vào tập hợp \mathbb{R} :

ánh xạ $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi: $(x, y) \rightarrow f(x, y) = x + y$ là một ánh xạ từ tập hợp $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vào tập hợp \mathbb{R} .

(ảnh của phần tử $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qua ánh xạ f được kí hiệu là $f(x, y)$ thay cho $f((x, y))$).

Tập xác định của ánh xạ f là $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tập đến của f là \mathbb{R} . Dễ dàng thấy rằng ảnh của f là $f(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Tương tự, phép trừ và phép nhân trên tập hợp \mathbb{R} cũng là những ánh xạ từ tập hợp $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vào tập hợp \mathbb{R} .

Ví dụ 6.9 :

Ký hiệu \mathbb{R}^* chỉ tập hợp các số thực khác 0: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Phép chia trên \mathbb{R} là f một ánh xạ từ tập hợp $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ vào tập hợp \mathbb{R} :

ánh xạ $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $(x, y) \rightarrow f(x, y) =$

là một ánh xạ từ tập hợp $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ vào tập hợp \mathbb{R} .

Tập xác định của f là $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. Tập đến của f là \mathbb{R} . Dễ dàng thấy rằng ảnh của f là tập hợp $f(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) = \mathbb{R}$.

6.2. ánh xạ bằng nhau

Formatted: Heading3

Giả sử X và Y là hai tập hợp, f và g là hai ánh xạ từ X vào Y . Ta nói rằng hai ánh xạ f và g là bằng nhau, và viết $f = g$, nếu $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$.

Chẳng hạn, ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = x^3 - 1$$

và ánh xạ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow g(x) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

là hai ánh xạ bằng nhau.

6.3. Thu hẹp và thác triển ánh xạ

Formatted: Heading3

a) Giả sử $f: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ từ tập hợp X vào tập hợp Y và A là một tập con của X .

ánh xạ $g: A \rightarrow Y$ xác định bởi $g(x) = f(x)$ với mọi $x \in A$,

Gọi là ánh xạ *thu hẹp* (gọi tắt là *thu hẹp*) của ánh xạ f trên tập hợp A và được kí hiệu là f/A .

Như vậy, $f/A: A \rightarrow Y$ là ánh xạ xác định bởi:

$$x \rightarrow f/A(x) = f(x).$$

Ví dụ 6.10 :

Giả sử $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{với } x \geq 0, \\ \frac{1}{x} & \text{với } x < 0, \end{cases}$$

A và B là hai tập con của \mathbb{R} với :

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \text{ và } B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}.$$

Khi đó, ánh xạ thu hẹp của f trên A là:

$$f/A: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f/A(x) = \sqrt{x},$$

và ánh xạ thu hẹp của f trên B là: $f/B: B \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f/B(x) = \frac{1}{x}.$$

b) Giả sử X, Y là hai tập hợp, A là một tập con của X, $f: A \rightarrow Y$ và $F: X \rightarrow Y$ là những ánh xạ. Nếu $F/A = f$, tức là $F(x) = f(x)$ với mọi $x \in A$ thì ánh xạ F được gọi là *ánh xạ thác triển* (gọi tắt là thác triển) của ánh xạ f lên tập hợp X.

Ví dụ 6.11 :

Giả sử $f: \mathbb{Q} \rightarrow \{0, 1\}$ là ánh xạ từ tập hợp các số hữu tỉ \mathbb{Q} vào tập hợp $\{0, 1\}$ xác định bởi:

$$f(x) = 1, \text{ với mọi } x \in \mathbb{Q},$$

và $D: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{với } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{với } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Khi đó, ánh xạ D là thác triển của ánh xạ f (từ tập con \mathbb{Q} của \mathbb{R}) lên tập hợp \mathbb{R} . ánh xạ D được gọi là hàm số Dirichlet (Dirichlet).

(Dirichlet Peter Gustav Lejeune, 1805 – 1859) là nhà toán học Đức).

6.4. Hợp của các ánh xạ

a) Cho hai ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ và $g: Y \rightarrow Z$. ánh xạ

$h: X \rightarrow Z$ xác định bởi

$$x \rightarrow h(x) = g[f(x)]$$

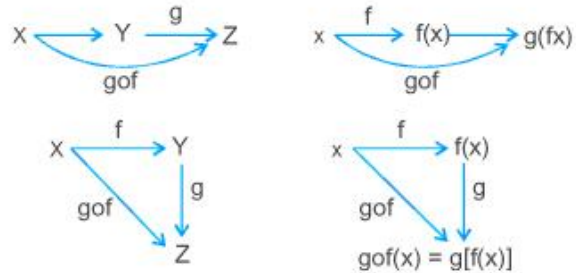
gọi là *ánh xạ hợp* của hai ánh xạ f và g, kí hiệu là $g \circ f$.

Như vậy, $\text{gof}: X \rightarrow Z$ là ánh xạ xác định bởi:

$$(\text{gof})(x) = g[f(x)], x \in X.$$

(Trong kí hiệu ánh xạ hợp “gof” của ánh xạ f và g , hãy chú ý đến thứ tự của hai ánh xạ: g được viết trước f).

Lược đồ sau giúp ta nhớ định nghĩa ánh xạ hợp dễ hơn.



Hình 5

Ví dụ 6.12 :

(i) cho hai ánh xạ.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = 2x -$$

và

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \sin x.$$

Khi đó, ánh xạ hợp của f và g là:

$$\text{gof}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow (\text{gof})(x) = \sin(2x -).$$

(ii) cho hai ánh xạ

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) =$$

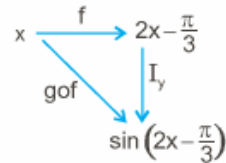
(Ký hiệu \mathbb{R}^+ chỉ tập hợp các số thực không âm), và

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow g(x) = \cos x.$$

Khi đó, ánh xạ hợp của f và g là:

$$\text{gof}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$



$$x \rightarrow (f \circ g)(x) = 2 \sin x - .$$

Như vậy $f \circ g \neq g \circ f$.

Người ta nói rằng phép hợp các ánh xạ không có tính giao hoán.

Vi dụ 6.12 :

Cho hai ánh xạ

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = |x|$$

và

$$g : \mathbb{R}^+ \rightarrow P(\mathbb{R})$$

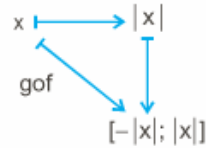
$$x \rightarrow g(x) = [-x, x] = \{\xi \in \mathbb{R} : -x \leq \xi \leq x\}$$

($P(\mathbb{R})$) là tập hợp các tập con của \mathbb{R} .

ánh xạ hợp của f và g là:

$$g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow P(\mathbb{R})$$

$$x \rightarrow (g \circ f)(x) = [-|x|, |x|]$$



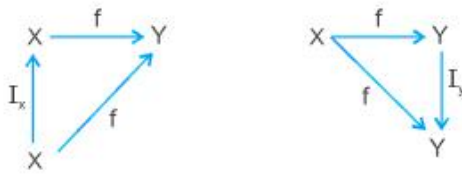
Vi dụ 6.13 :

Để dàng thấy rằng với mọi ánh xạ $f : X \rightarrow Y$,

$$f \circ I_X = f \text{ và } I_Y \circ f = f,$$

trong đó I_X và I_Y , theo thứ tự, là ánh xạ đồng nhất trên X và Y .

Khi đó, ta nói rằng các lược đồ sau là giao hoán.



Hình 6

Định lí sau đây cho thấy phép hợp các ánh xạ có tính kết hợp.

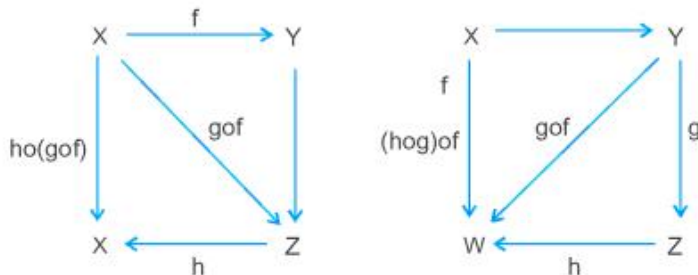
c) Định lí

Với mọi ánh xạ $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ và $h : Z \rightarrow V$,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Chứng minh

Dễ thấy $ho(gof)$ và $(hog)of$ đều là những ánh xạ từ X đến Z



Hình 7

Ta chứng minh:

$$(1) \quad [ho(gof)](x) = [(hog)of](x) \text{ với mọi } x \in X.$$

Thật vậy, với mọi $x \in X$, ta có

$$(2) \quad [ho(gof)](x) = h((gof)(x)) = h(g(f(x)))$$

và

$$(3) \quad [(hog)of](x) = (hog)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Từ hai đẳng thức (2) và (3) suy ra đẳng thức (1) cần chứng minh.

6.5. Hàm số – Dãy và dãy số.

Formatted: Heading3

Giả sử $f: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ. Nếu tập đến Y của f là tập hợp số thực thì $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một hàm số thực.

Nếu $Y = \mathbb{C}$ thì ánh xạ $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ được gọi là một hàm số phức.

Nếu tập xác định X của f là tập hợp các số nguyên dương \mathbb{N}^* (hoặc tập hợp các số tự nhiên \mathbb{N}) thì ánh xạ $f: \mathbb{N}^* \rightarrow Y$

(hoặc $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$) được gọi là một dãy vô hạn (gọi tắt là dãy) phần tử của Y .

Giả sử $f: \mathbb{N}^* \rightarrow Y$ là một dãy phần tử của Y . Với mỗi số nguyên dương n , đặt $y_n = f(n)$; y_n là ảnh của n qua ánh xạ f . Người ta thường dùng kí hiệu $(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ hoặc (y_n) để chỉ dãy f (vì một ánh xạ được xác định bởi ảnh của các phần tử của nó).

Đặc biệt, nếu $X = \mathbb{N}^*$ (hoặc \mathbb{N}) và $Y = \mathbb{R}$ thì ánh xạ $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là một dãy số thực. ánh xạ $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ (hoặc $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$) được gọi là một dãy số phức.

Nếu $X = \{1, 2, \dots, m\}$ thì ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ được gọi là một dãy (hữu hạn) m phần tử của Y . Đặt $y_k = f(k)$, $k = 1, \dots, m$. Dãy m phần tử của Y thường được kí hiệu là (y_1, y_2, \dots, y_m) .

Khi xét các hàm số thực $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ hoặc hàm số phức $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, người ta gọi ảnh $f(x)$ của phần tử x qua ánh xạ f là giá trị của hàm số f tại điểm x và gọi ảnh $f(X)$ của f là tập các giá trị của hàm số f .

Chẳng hạn, với hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sin x$, giá trị của hàm số tại điểm $x = 0$ là $f(0) = \sin 0 = 0$ và tập các giá trị của hàm số là $f(\mathbb{R}) = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\}$.

Trong một số trường hợp người ta cho hàm số thực f xác định trên một tập con X nào đó của \mathbb{R} bởi một công thức mà không cho trước tập hợp X . Khi đó, ta hiểu tập xác định X của hàm số f là tập hợp tất cả các số thực x sao cho $f(x)$ có nghĩa. Chẳng hạn, tập xác định của hàm số thực $f(x) = \sqrt{x}$ là tập hợp:

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

B. Hoạt động 6.1. Tìm hiểu các khái niệm cơ bản về ánh xạ

Nhiệm vụ:

Sinh viên thảo luận theo nhóm 3 – 4 người để thực hiện các nhiệm vụ sau rồi cử đại diện nhóm trình bày

Nhiệm vụ 1

- Cho ba ví dụ về quan hệ hai ngôi không phải là ánh xạ và biểu diễn quan hệ đó bằng lược đồ hình tên.
- Cho ba ví dụ về ánh xạ mà tập xác định và tập đến đều không phải là những hàm số, biểu diễn ánh xạ đó bằng lược đồ hình tên và tìm ảnh của chúng.
- Cho bốn ví dụ về ánh xạ mà tập xác định là $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ hoặc tập con của chúng và chỉ ra tập xác định và ảnh của các ánh xạ đó.
- Cho ví dụ về ánh xạ có tập xác định là tập hợp số thực $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ và ảnh là tập hợp $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$.

Nhiệm vụ 2

- Cho ba ví dụ về hai ánh xạ bằng nhau.
- Hai ánh xạ.

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) =$$

và

$$g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = x - 1$$

Formatted: Heading02

Deleted:

Formatted: Heading03

Formatted: Heading04

Formatted: Heading04

Có phải là hai ánh xạ bằng nhau hay không?

Nhiệm vụ 3

Formatted: Heading04

- Cho hai ví dụ về ánh xạ thu hẹp và ánh xạ thác triển của một ánh xạ cho trước.
- Cho hai ví dụ về một cặp ánh xạ $f, g : X \rightarrow Y$ khác nhau nhưng $f|_A = g|_A$, A là một tập con của X .
- Cho ba tập hợp A, B, X , trong đó $A \subset B \subset X$. Tìm quan hệ giữa các ánh xạ.

$f|_A, (f|_B)|_A$ và $f|_{A \cap B}$.

Nhiệm vụ 4

Formatted: Heading04

- Cho hai ví dụ về các ánh xạ f và g sao cho ánh xạ hợp $g \circ f$ tồn tại nhưng không tồn tại ánh xạ hợp $f \circ g$.
- Cho hai ví dụ về các ánh xạ f và g sao cho $g \circ f$ và $f \circ g$ đều tồn tại nhưng $g \circ f \neq f \circ g$.
- Cho hai ví dụ về các ánh xạ f và g sao cho $g \circ f$ và $f \circ g$ đều tồn tại, hơn nữa $g \circ f = f \circ g$.

Đánh giá hoạt động 6.1

Deleted:

Formatted: Heading02

1. Cho hai tập hợp $X = \{a, b, c, d, e\}$,

$Y = \{0, 1, 2, 5, 7, 9\}$ và quan hệ hai ngôi R trên $X \times Y$ xác định bởi:

$R = \{(a, 0), (b, 1), (c, 2), (e, 9)\}$.

a) Biểu diễn quan hệ R bằng lược đồ hình tên.

b) R có phải là một ánh xạ không?

2. Cho hai tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ và quan hệ hai ngôi R trên $A \times B$ xác định bởi:

$R = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, d), (5, e), (3, c)\}$.

a) Biểu diễn quan hệ R bằng lược đồ hình tên.

b) R có phải là một ánh xạ không?

3. Cho hai tập hợp $X = \{3, 5, 7, 12\}$, $Y = \{1, 6, 13, 17, 35, 36\}$ và quan hệ hai ngôi “chia hết” φ trên $X \times Y$.

(Với mọi $x \in X, y \in Y, x \varphi y$ khi và chỉ khi x chia hết y)

a) Tìm quan hệ φ .

b) Biểu diễn quan hệ φ bằng lược đồ hình tên.

c) φ có phải là một ánh xạ không?

4. Cho hai tập hợp $A = \{2, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{11, 13, 18, 35, 101\}$ và quan hệ hai ngôi “chia hết” f trên $A \times B$.

a) Tìm quan hệ f và biểu diễn f bằng lược đồ hình tên.

b) f có phải là một ánh xạ không? Tìm tập xác định và ảnh của f (nếu f là ánh xạ).

5. Lớp 12A của một trường trung học phổ thông có 40 học sinh. Một số em ở độ tuổi 18, số còn lại ở độ tuổi 17. Gọi X là tập hợp các học sinh lớp 12A, $Y = \{17, 18\}$ và R là quan hệ hai ngôi trên $X \times Y$ xác định như sau:

Với mọi $x \in X$, $y \in Y$, $x R y$ khi và chỉ khi y là tuổi của học sinh x .

a) R có phải là một ánh xạ không?

b) Tìm tập xác định và ảnh của R (nếu R là một ánh xạ).

6. Tập hợp X có n phần tử, tập hợp Y có một phần tử. Hỏi có bao nhiêu ánh xạ từ X vào Y ?

7. Tập hợp X có một phần tử, tập hợp Y có m phần tử. Hỏi có bao nhiêu ánh xạ từ X vào Y ?

8. Hai tập hợp X và Y đều có hai phần tử. Hỏi có bao nhiêu ánh xạ từ X vào Y .

9. Chứng minh rằng nếu tập hợp X có n phần tử và tập hợp Y có m phần tử thì có mn ánh xạ từ X vào Y .

Hướng dẫn:

Giả sử m là một số nguyên dương tùy ý và $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Ta chứng minh điều khẳng định bằng phương pháp quy nạp theo n . Giả sử $n = 1$ và $X = \{x_1\}$. Khi đó có $m^1 = m$ ánh xạ từ X vào Y ; các ánh xạ đó được xác định như sau: $f_1(x_1) = y_1, f_2(x_1) = y_2, \dots, f_m(x_1) = y_m$. Giả sử điều khẳng định đúng cho n , tức là có mn ánh xạ từ tập hợp $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (có n phần tử) vào tập hợp Y . Ta chứng minh có $m(n+1)$ ánh xạ từ tập hợp $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ vào tập hợp Y . Chia tập hợp tất cả các ánh xạ từ X vào Y thành m tập con đôi một rời nhau như sau: Tập con thứ nhất gồm tất cả các ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ sao cho $f(x_{n+1}) = y_1$, tập con thứ hai gồm tất cả các ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ sao cho $f(x_{n+1}) = y_2, \dots$, tập con thứ m gồm tất cả các ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ sao cho $f(x_{n+1}) = y_m$. Hãy chỉ ra rằng mỗi tập con đó có mn phần tử.

10. Ký hiệu $P = P(|R)$ chỉ tập hợp tất cả các tập con của tập hợp các số thực $|R$. Cho ánh xạ $f: |R \rightarrow P$ xác định bởi công thức:

$$f(x) = \{y \in |R : y \leq x\}$$

Tìm $f(-2)$, $f(0)$ và $f(x_2)$.

11. Cho tập hợp $X = \{x \in |R : 0 \leq x \leq 2\}$ và ánh xạ $f: X \rightarrow |R$ xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{với } 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x} & \text{với } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Tìm ảnh $f(X)$ của ánh xạ f .

12. Hai ánh xạ $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{x + 1} & \text{với } x \neq -1, \\ 3 & \text{với } x = -1, \end{cases}$$

và

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + x}{x} & \text{với } x \neq 0, \\ 1 & \text{với } x = 0, \end{cases}$$

$g(x) =$

có phải là những ánh xạ bằng nhau hay không?

13. Cùng câu hỏi của bài tập 12 đối với hai ánh xạ $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$u(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{với } x \neq 3, \\ 4 & \text{với } x = 3, \end{cases}$$

và $v(x) =$

14. Tìm các ánh xạ hợp $g \circ f$ và $f \circ g$ (nếu có) của mỗi cặp hàm số sau đây. Nếu không tồn tại $g \circ f$ hoặc $f \circ g$ thì giải thích lí do:

a) $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ và $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = \ln x \quad x \rightarrow g(x) = e^x$$

(là tập hợp các số thực dương: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$);

b) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = \ln |x| \quad x \rightarrow g(x) = \frac{1}{x};$$

c) $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ và $g: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = \ln x \quad x \rightarrow g(x) = \cos x.$$

15. Cho hai ánh xạ $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)(x^2+3x+2)}{x^2+x-2} & \text{với } x \neq 1 \text{ và } x \neq 2, \\ 0 & \text{với } x = -2, \\ -1 & \text{với } x = 1, \end{cases}$$

và $g(x) = x + 1$.

a) ảnh của ánh xạ $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ phải thoả mãn điều kiện nào để có $foh = goh$?

b) Tìm ba hàm số $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mà ảnh $h(\mathbb{R})$ là một tập hợp vô hạn (tức là tập hợp có vô số phần tử) sao cho $foh = goh$.

16. Cho hai hàm số $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x) = x \quad \text{và} \quad g(x) = -2x^2 + 33.$$

Tìm tập con X của \mathbb{R} sao cho:

$$f|_X = g|_X.$$

17. Cùng câu hỏi của bài tập 16 đối với hai hàm số $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$f(x) = x, \quad g(x) = 3 - x^2.$$

18. Giả sử A là một tập con của tập hợp X . ánh xạ

$$j_A: A \rightarrow X \text{ xác định bởi}$$

$$x \rightarrow j_A(x) = x$$

gọi là phép nhúng tập con A vào tập hợp X .

Chứng minh rằng với mọi ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ và với mọi $A \subset X$, ta đều có:

$$f|_A = fo j_A.$$

19. Tìm tập xác định và tập các giá trị của hàm số

$$f(x) =$$

20. Chứng minh rằng nếu Y là một tập hợp có m phần tử thì tồn tại m phân tử của Y .

Hướng dẫn. áp dụng bài tập 9.

21. Giả sử X và Y là hai tập hợp bất kì. Ký hiệu YX chỉ tập hợp tất cả các ánh xạ $f: X \rightarrow Y$.

Giả sử X, Y, Z là ba tập hợp và $f: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ cho trước.

ánh xạ

$$df: ZY \rightarrow ZX$$

xác định bởi

$$\varphi \rightarrow df(\varphi) = \varphi \circ f \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\varphi} Z$$

gọi là ánh xạ cảm ứng bởi ánh xạ f .

Cho bốn tập hợp X, Y, Z, W và $\varphi, f \in ZX$

hai ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ và $g: Y \rightarrow Z$.

Gọi $df: WY \rightarrow WX$, $dg: WZ \rightarrow WY$ và $dgof: WZ \rightarrow WX$, theo thứ tự, là ánh xạ cảm ứng bởi f, g và gof . Chứng minh rằng

$$dgof = df \circ dg.$$

22. Ký hiệu $|R|^R$ chỉ tập hợp tất cả các ánh xạ từ tập R vào chính nó (xem bài tập 21). Gọi \leq là quan hệ hai ngôi trên RR xác định như sau:

Với mọi $f, g \in |R|^R$,

$f \leq g$ khi và chỉ khi $f(x) \leq g(x)$ với mọi $x \in |R$.

a) Chứng minh rằng \leq là một quan hệ thứ tự trên $|R|^R$.

b) Chứng minh rằng trong tập hợp sắp thứ tự $|R|^R$ không có phần tử tối đại và phần tử tối tiểu.

23. Giả sử R là một quan hệ tương đương trên tập hợp X .

ánh xạ: $\pi: X \rightarrow X/R$

$$x \rightarrow (x) =$$

trong đó (x) là lớp tương đương chứa phần tử $x \in X$ gọi là, ánh xạ thương.

Giả sử RX và RY , theo thứ tự, là hai quan hệ tương đương trên hai tập hợp X, Y và $f: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ sao cho với mọi $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 R x_2 \Rightarrow f(x_1) R f(x_2).$$

Chứng minh rằng tồn tại ánh xạ $F : X / R_X \rightarrow Y / R_Y$ sao cho lược đồ sau giao hoán.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X/R_X & \xrightarrow{F} & Y/R_Y \end{array}$$

Ngoài ra, nếu $f(X) = Y$ thì $F(X/R_X) = Y/R_Y$.

(π_X và π_Y là hai ánh xạ thương).

Formatted: Heading01, Line spacing: single

Tiểu chủ đề 1.7. Đơn ánh, toàn ánh, song ánh và ánh xạ ngược

Thông tin cơ bản

7.1. Đơn ánh

Ta xét các ánh xạ trong ví dụ sau:

Ví dụ 7.1: Cho hai tập hợp $X = \{a, b, c, d, e\}$,

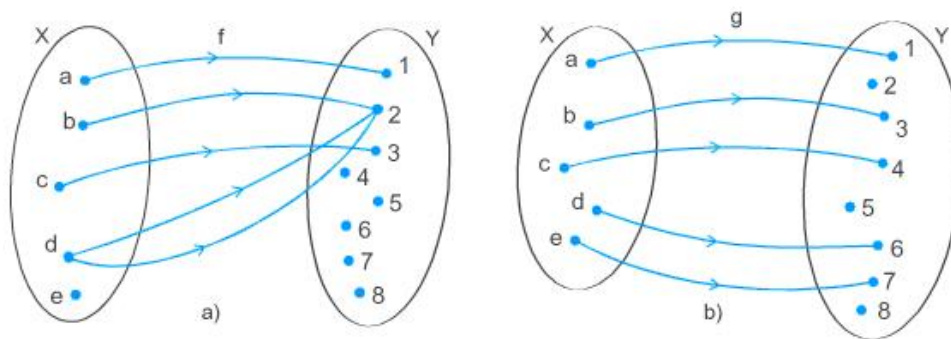
$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và hai ánh xạ $f: X \rightarrow Y$,

$g: X \rightarrow Y$ xác định bởi các bảng sau đây:

x	a	b	c	d	e
f(x)	1	2	3	2	2

x	a	b	c	d	e
g(x)	1	3	4	6	7

Hai ánh xạ f và g được biểu diễn bởi hai lược đồ hình tên trong Hình 8 dưới đây.



Hình 2

Ta thấy ba phần tử b, d, e của tập hợp X đều có ảnh qua ánh xạ f là phần tử 2 của tập hợp Y . Trong lược đồ 8a), ba mũi tên từ ba điểm b, d, e của X đều đi đến điểm 2 của Y . Điều này không xảy ra với ánh xạ g . Các phần tử a, b, c, d, e của tập hợp X có các ảnh qua ánh xạ g là những phần tử đôi một khác nhau của tập hợp Y . Trong lược đồ 8 b), các mũi tên từ hai điểm khác nhau của X đi đến hai điểm khác nhau của Y . Nói một cách khác, hai phần

Deleted:

Formatted: Heading2, Space
Before: 0 pt

Formatted: Heading3

từ khác nhau bất kì của tập hợp X có ảnh qua ánh xạ g là hai phần tử khác nhau của tập hợp Y . Ánh xạ g được gọi là một đơn ánh.

Một cách tổng quát, ta có:

Định nghĩa: ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ gọi là một *đơn ánh* nếu hai phần tử khác nhau bất kì của tập X có ảnh qua f là hai phần tử khác nhau của tập hợp Y , tức là với mọi $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Hiển nhiên, điều kiện trên tương đương với điều kiện sau: Với mọi $x_1, x_2 \in X$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Theo định nghĩa vừa nêu, hiển nhiên ánh xạ f trong Ví dụ 1 không phải là một đơn ánh.

Ví dụ 7.2 :

(i) Ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2$ không phải là một đơn ánh vì chẳng hạn, $f(-1) = f(1) = 1$.

(ii) Ánh xạ $g: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ xác định bởi $g(n) = \frac{1}{n}$ là một đơn ánh vì với hai số nguyên dương m, n

$\frac{1}{m} = \frac{1}{n}$ bất kì, nếu $m \neq n$ thì $\frac{1}{m} \neq \frac{1}{n}$.

(iii) Ánh xạ $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $\varphi(x) = \sin x$ không phải là một đơn ánh vì chẳng hạn, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Tuy nhiên, nếu đặt $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \pi\}$ thì ánh xạ $\varphi/A: A \rightarrow \mathbb{R}$, thu hẹp của φ trên tập con A của \mathbb{R} là một đơn ánh.

Tương tự, ánh xạ $\psi(x) = \cos x$ không phải là một đơn ánh. Tuy nhiên, nếu đặt $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \pi\}$ thì ánh xạ $\psi/B: B \rightarrow \mathbb{R}$, thu hẹp của ψ trên tập con B của \mathbb{R} là một đơn ánh.

ánh xạ $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $h(x) = |x|$ không phải là một đơn ánh nhưng ánh xạ $h/\mathbb{R}^+: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, thu hẹp của h trên tập hợp \mathbb{R}^+ các số nguyên không âm \mathbb{R}^+ là một đơn ánh.

(iv) Hiển nhiên, nếu ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ là một đơn ánh và A là một tập con của tập hợp X thì ánh xạ $f/A: A \rightarrow Y$, thu hẹp của f trên A , là một đơn ánh.

7.2. Toàn ánh

Formatted: Heading03

Ta trở lại xét hai ánh xạ f và g trong Ví dụ 2.1.

ảnh của ánh xạ f là $f(X) = \{1, 2, 3\}$. Mỗi phần tử 4, 5, 6, 7, 8 của Y không phải là ảnh của bất kì một phần tử nào của X qua ánh xạ f ; $f(X)$ là một tập con thực sự của Y , tức là $f(X) \subset Y$ và $f(X) \neq Y$. Tương tự, ảnh của ánh xạ g là $g(X) = \{1, 3, 4, 6, 7\}$. Mỗi phần tử 2, 5, 8 của Y không nhận một phần tử nào của X làm ảnh của nó qua ánh xạ g . $g(X)$ cũng là một tập con thực sự của Y .

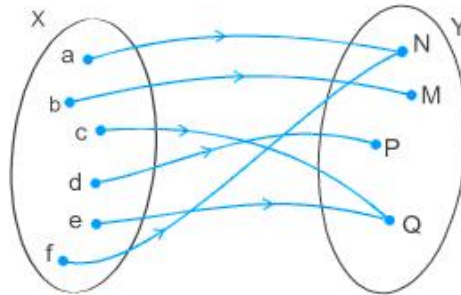
Ta xét một ví dụ khác.

Vi dụ 7.3 :

Cho hai tập hợp $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ và $Y = \{M, N, P, Q\}$. Xét ánh xạ $\varphi : X \rightarrow Y$ cho bởi bảng sau:

x	a	b	c	d	e	f
$\varphi(x)$	N	M	Q	P	Q	N

ánh xạ φ được biểu diễn bởi lược đồ hình tên trong hình 9



Hình 9

Khác với hai ánh xạ f và g trong Ví dụ 1, ở đây ảnh của φ là $\varphi(X) = \{M, N, P, Q\} = Y$. Như vậy mỗi phần tử của Y đều là ảnh của một phần tử nào đó của X qua ánh xạ φ . Người ta gọi ánh xạ φ là một toàn ánh.

Một cách tổng quát, ta có:

Định nghĩa

ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là một *toàn ánh* nếu ảnh của ánh xạ f bằng tập đến của ánh xạ, tức là: $f(X) = Y$.

Từ định nghĩa của toàn ánh suy ra rằng $f : X \rightarrow Y$ là một toàn ánh khi và chỉ khi với mỗi $y \in Y$, tồn tại ít nhất một phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

Hiển nhiên các ánh xạ f và g trong Ví dụ 1 không phải là những toàn ánh.

Vi dụ 7.4:

(i) Đặt $A = \{x \in \mathbb{R} : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$. Ánh xạ $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = \tan x$ là một toàn ánh vì với mọi $y \in \mathbb{R}$, tồn tại $x \in A$ sao cho $f(x) = \tan x = y$.

(ii) ánh xạ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = |x|$ không phải là một toàn ánh vì ảnh của ánh xạ là tập hợp $g(\mathbb{R}) = \{|x| : x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^+$; đó là một tập con thực sự của \mathbb{R} . Tuy nhiên ánh xạ $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ xác định bởi $\varphi(x) = |x|$ là một toàn ánh vì $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

(iii) ánh xạ $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $h(x) = \sin x$ không phải là một toàn ánh vì $h(\mathbb{R}) = \{\sin x : x \in \mathbb{R}\} = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\} \neq \mathbb{R}$.

Tuy nhiên, nếu đặt $A = \{-1 \leq y \leq 1\}$ thì ánh xạ $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow A$ xác định bởi $\varphi(x) = \sin x$ là một toàn ánh.

Toàn ánh $f : X \rightarrow Y$ còn được gọi là ánh xạ từ X lên Y . Chẳng hạn, người ta gọi toàn ánh $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ $x \rightarrow \varphi(x) = |x|$ là ánh xạ từ \mathbb{R} lên \mathbb{R}^+ hoặc toàn ánh từ X lên Y .

Hiển nhiên, nếu ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ không phải là một toàn ánh thì thay tập đến Y bởi ảnh $f(X)$ của f , ta được toàn ánh $\varphi : X \rightarrow f(X)$, $x \rightarrow \varphi(x) = f(x)$ từ X lên $f(X)$.

7.3. Song ánh

Formatted: Heading03

Định nghĩa: ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ gọi là một song ánh nếu nó vừa là một đơn ánh vừa là một toàn ánh.

f là một toàn ánh khi và chỉ khi $f(X) = Y$, tức là với mỗi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Nếu x' là một phần tử của X sao cho $f(x') = y$ thì $f(x') = f(x)$. Vì f là một đơn ánh nên từ đó suy ra $x' = x$. Do đó

ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ là một song ánh khi và chỉ khi với mỗi phần tử $y \in Y$, tồn tại một phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

Ví dụ 7.5:

(i) Dễ dàng thấy rằng ánh xạ $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ xác định bởi $f(x) = x^2$ là một toàn ánh. Vì với hai số thực x_1, x_2 không âm bất kì, nếu $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) = x_1^2 \neq x_2^2 = f(x_2)$ nên f cũng là một đơn ánh. Do đó f là một song ánh từ \mathbb{R}^+ lên \mathbb{R}^+ .

(ii) ánh xạ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = \ln x$ là một song ánh từ \mathbb{R}^+ lên \mathbb{R} vì với mỗi số thực y , tồn tại một số dương duy nhất x sao cho $\ln x = y$. (là tập hợp các số thực dương: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$).

(iii) ánh xạ $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $h(x) = e^x$ là một song ánh với mỗi số thực y , tồn tại một số thực duy nhất x sao cho $f(x) = e^x = y$.

(iv) ánh xạ $\varphi : |\mathbb{R}^+ \rightarrow |\mathbb{R}^+$ xác định bởi $f(x) =$ là một song ánh vì với mỗi số thực không âm y , tồn tại một thực không âm duy nhất x sao cho $\varphi(x) = y$.

(v) Đặt $A = \{x \in |\mathbb{R}: 0 < x < \pi\}$. ánh xạ $\psi : A \rightarrow |\mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = \cotgx$ là một song ánh từ A lên $|\mathbb{R}$ vì với mỗi số thực y , tồn tại một phần tử duy nhất $x \in A$ sao cho $\psi(x) = \cotgx = y$.

7.4. ánh xạ ngược

Formatted: Heading03

Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một song ánh từ tập hợp X lên tập hợp Y . Khi đó, với mỗi phần tử $y \in Y$, tồn tại một phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

a) *Định nghĩa:* Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một song ánh từ tập hợp X lên tập hợp Y . ánh xạ:

$$g : Y \rightarrow X$$

xác định bởi: $y \rightarrow g(y) = x$,

trong đó x là phần tử duy nhất của X sao cho $f(x) = y$, gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f . ánh xạ ngược của song ánh $f : X \rightarrow Y$ được kí hiệu là f^{-1} .

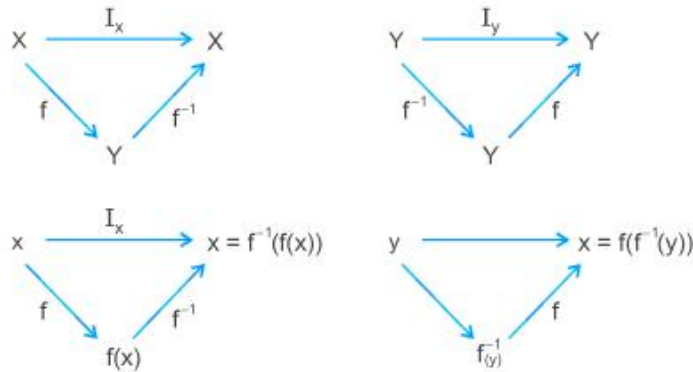
Tính chất đặc trưng của ánh xạ ngược được cho trong định lí sau:

b) *Định lí:* Nếu $f : X \rightarrow Y$ là một song ánh và $f^{-1} : Y \rightarrow X$ là ánh xạ ngược của f thì với mọi $x \in X, y \in Y$,

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ và } f(f^{-1}(y)) = y, \quad (1)$$

tức là: $f \circ f^{-1} = I_Y$ và $f^{-1} \circ f = I_X$, trong đó I_X và I_Y , theo thứ tự, là ánh xạ đồng nhất trên tập hợp X và tập hợp Y .

Nói một cách khác, hai lược đồ sau là giao hoán.



Hình 10

Chứng minh: Giả sử y là một phần tử bất kì của Y . Khi đó $f^{-1}(y) = x$, trong đó x là phần tử duy nhất của X sao cho $f(x) = y$. Do đó $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$. Ta đã chứng minh hệ thức thứ hai trong (1). Nếu x là một phần tử bất kì của X thì $y = f(x) \in Y$. Vì f là một đơn ánh nên x là phần tử duy nhất có ảnh qua ánh xạ f là y . Do đó $f^{-1}(y) = x$ và ta có $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$.

Ta sẽ thấy f^{-1} là ánh xạ duy nhất thoả mãn đồng thời hai hệ thức trong (1). Đó là hệ quả của định lí sau:

c) *Định lí.* Giả sử hai ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow X$ thoả mãn các hệ thức sau:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x \text{ với mọi } x \in X \text{ và } f(g(y)) = y \text{ với mọi } y \in Y \\ (2) \end{aligned}$$

Khi đó

- (i) f và g là những song ánh.
- (ii) g là ánh xạ ngược của f .

Chứng minh :

Trước hết ta chứng minh f là một song ánh. Với mỗi $y \in Y$, $x = g(y)$ là một phần tử của X . Theo giả thiết, ta có $f(x) = f(g(y)) = y$. Do đó f là một toàn ánh.

Với hai phần tử bất kì $x_1, x_2 \in X$, nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Do đó, từ hệ thức thứ nhất trong (2) suy ra $x_1 = x_2$. Vậy f là một đơn ánh. f vừa là toàn ánh vừa là đơn ánh nên nó là một song ánh. Tương tự, g cũng là một song ánh.

Bây giờ ta chứng minh g là ánh xạ ngược của f , tức là $g(y) = f^{-1}(y)$ với mọi $y \in Y$. Thật vậy, giả sử y là một phần tử bất kì của Y và $g(y) = x$. Từ hệ thức thứ hai trong (2) suy ra $f(x) = f(g(y)) = y$. Vì f là một đơn ánh nên x là phần tử duy nhất của X có ảnh là y qua ánh xạ f . Do đó $f^{-1}(y) = x = g(y)$.

Từ định lí trên suy ra rằng:

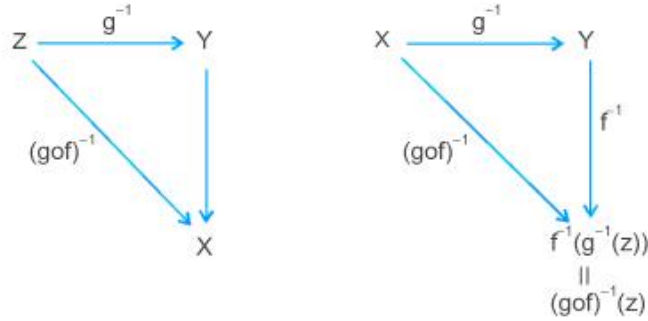
d) Nếu $g : Y \rightarrow X$ là ánh xạ ngược của ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ thì f là ánh xạ ngược của g . Do đó: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Quan hệ giữa các ánh xạ ngược f và g^{-1} của hai song ánh $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$ với ánh xạ ngược $(g \circ f)^{-1}$ của ánh xạ hợp $g \circ f : X \rightarrow Z$ được cho trong định lí sau.

e) *Định lí* Cho hai ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$. Khi đó

- (i) Nếu f và g là những đơn ánh thì ánh xạ hợp $g \circ f$ là một đơn ánh.
- (ii) Nếu f và g là những toàn ánh thì $g \circ f$ là một toàn ánh.
- (iii) Nếu f và g là những song ánh thì $g \circ f$ là một song ánh, và $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$,

tức là lược đồ sau là giao hoán.



Hình 11

Chứng minh

Đặt $h = gof$.

(i) Với mọi $x_1, x_2 \in X$, nếu $x_1 \neq x_2$ thì do f là một đơn ánh nên $f(x_1) \neq f(x_2)$. Vì g là một đơn ánh nên $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, tức là $h(x_1) \neq h(x_2)$. Vậy $h = gof$ là một đơn ánh.

(ii) Giả sử z là một phần tử bất kì của Z . Vì $g : Y \rightarrow Z$ là một toàn ánh nên tồn tại $y \in Y$ sao cho $g(y) = z$. Lại vì $f : X \rightarrow Y$ là một toàn ánh nên tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) = y$. Do đó $g(f(x)) = g(y) = z$, tức là $h(x) = z$. Vậy h là một toàn ánh.

(iii) Nếu f và g là những song ánh thì f và g vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh. Do đó từ (i) và (ii) suy ra rằng $h = gof$ cũng vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh, tức là gof là một song ánh. Do đó tồn tại các ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \rightarrow X$, $g^{-1} : Z \rightarrow Y$ và $(gof)^{-1} : Z \rightarrow X$. Ta chứng minh:

$$(gof)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z)) \text{ với mọi } z \in Z.$$

Thật vậy, giả sử z là một phần tử bất kì của Z . Vì g là một song ánh nên tồn tại một phần tử duy nhất $y \in Y$ sao cho: $g(y) = z$ (1)

Vì f là một song ánh nên tồn tại một phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho: $f(x) = y$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $g(f(x)) = g(y) = z$, tức là: $h(x) = z$ (3)

Vì g, f, h là những song ánh nên từ (1), (2), (3) suy ra:

$$g^{-1}(z) = y, f^{-1}(y) = x \text{ và } h^{-1}(z) = x. \text{ Do đó:}$$

$$f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(y) = x = h^{-1}(z).$$

f) Hoán vị của một tập hợp

Giả sử X là một tập hợp cho trước. Mỗi song ánh $f : X \rightarrow X$ từ tập hợp X lên X gọi là một hoán vị của tập hợp X .

Hiển nhiên ánh xạ đồng nhất IX trên tập hợp X là một hoán vị của tập hợp X .

Từ định lí e) suy ra rằng ánh xạ hợp của hai hoán vị của tập hợp X là một hoán vị của tập hợp X .

Nếu X là một tập hợp hữu hạn, chẳng hạn X có n phần tử thì định nghĩa của hoán vị nêu trên tương đương với định nghĩa hoán vị của một tập hợp n phần tử mà ta đã biết trong sách giáo khoa toán ở bậc phổ thông trung học.

Hoạt động 7.1. Tìm hiểu đơn ánh, toàn ánh và song ánh

Sinh viên đọc thông tin cơ bản rồi thảo luận theo nhóm 2 người để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1 :

- Cho ba ví dụ về ánh xạ không phải là đơn ánh cũng không phải là toàn ánh.
- Cho ba ví dụ về đơn ánh không phải là toàn ánh.
- Cho ba ví dụ về toàn ánh không phải là đơn ánh.
- Cho ba ví dụ về ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ không phải là đơn ánh nhưng thu hẹp $f|_A$ của nó trên một tập con A của X là một đơn ánh.
- Cho n ánh xạ $f_1 : X_1 \rightarrow X_2, f_2 : X_2 \rightarrow X_3, \dots, f_{n-1} : X_{n-1} \rightarrow X_n$ và đặt $h = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 : X \rightarrow X_n$.
- Nếu h_1, \dots, h_n là những đơn ánh thì h có phải là một đơn ánh hay không?
- Nếu h_1, \dots, h_n là những toàn ánh thì h có phải là một toàn ánh hay không?
- Nếu h_1, \dots, h_n là những song ánh thì h có phải là một song ánh hay không?

Nhiệm vụ 2 :

- Tập hợp X có m phần tử, tập hợp Y có n phần tử cho $m < n$. Tồn tại hay không một toàn ánh từ X lên Y ?
- Tập hợp X có m phần tử, tập hợp Y có n phần tử. Giả sử $m > n$. Tồn tại hay không một đơn ánh từ X vào Y ?
- Cho hai ví dụ về ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ không phải là song ánh nhưng ánh xạ thu hẹp $h = f|_A$ của f trên một tập hợp con A của X là một song ánh. Tìm ánh xạ ngược của h .
- Tìm hai cặp ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$ sao cho f không phải là một toàn ánh nhưng ánh xạ hợp $g \circ f$ là một toàn ánh.

Đánh giá hoạt động 7.1

Formatted: Heading03

Formatted: Heading04

1. Cho hai tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và hai ánh xạ $f: A \rightarrow B$, $g: A \rightarrow B$ xác định bởi hai bảng sau:

x	a	b	c	d
f(x)	1	2	3	2

x	a	b	c	d
g(x)	2	1	4	3

a) Biểu diễn các ánh xạ f và g bởi lược đồ hình tên.

b) f và g có phải là đơn ánh không?

2. Cho hai tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $Y = \{a, b, c, d, e, f\}$ và hai ánh xạ $f, g: X \rightarrow Y$ xác định bởi các bảng sau:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	a	b	c	b	c	d	e	d

x	1	2	3	4	5	6	7	8
g(x)	b	a	c	a	b	d	e	f

x	a	b	c	d	e
f(x)	5	1	3	2	4

ánh xạ $f, g: X$

x	a	b	c	d	e
g(x)	2	3	4	5	1

a) Biểu diễn f và g bởi lược đồ hình tên.

b) Chứng minh rằng f và g là những song ánh và tìm ánh xạ ngược của f và g .

4. Cho hai số thực a, b , $a \neq 0$. Chứng minh rằng ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = ax + b$ là một song ánh và tìm ánh xạ ngược của f .

5. Chứng minh rằng các ánh xạ sau đây là những song ánh và tìm ánh xạ ngược của mỗi ánh xạ đó:

a) $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ xác định bởi $f(x) = \dots$,

b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = x^3$,

c) $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, x \rightarrow h(x) = ,$

d) $u : A \rightarrow A, x \rightarrow u(x) = ,$ trong đó $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

6. Giả sử C là tập hợp các điểm của đường tròn đường kính AB và D là tập hợp các điểm của tiếp tuyến với đường tròn tại điểm B . Với mỗi điểm $M \in D$, gọi N là giao điểm của đường thẳng AM với đường tròn.

a) ánh xạ $f : D \rightarrow C$ xác định bởi $f(M) = N$ có phải là một đơn ánh hay không?

b) f có phải là một song ánh hay không?

7. Cho tập hợp số thực $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ và hai ánh xạ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow A$ xác định bởi

$$f(x) = \sin 2x, g(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \in \mathbb{R} \setminus A, \\ x & \text{với } x \in A. \end{cases}$$

Chứng minh rằng ánh xạ hợp $g \circ f$ là một toàn ánh.

8. Giả sử $f : X \rightarrow X$ là một toàn ánh từ tập hợp X lên X . Chứng minh rằng nếu $f \circ f = f$ thì f là ánh xạ đồng nhất trên tập hợp X .

9. Cho ba ánh xạ $f, g : X \rightarrow Y$ và $h : Y \rightarrow Z$. Chứng minh rằng nếu h là một đơn ánh và $h \circ f = h \circ g$ thì $f = g$.

10. Cho ba tập hợp X, Y, Z và ánh xạ $f : Y \rightarrow Z$ có tính chất sau: Với mọi ánh xạ $u, v : X \rightarrow Y$, $f \circ u = f \circ v \Rightarrow u = v$.

Chứng minh rằng f là một đơn ánh.

11. Cho hai ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$. Chứng minh rằng:

a) Nếu ánh xạ hợp $h = g \circ f$ là một đơn ánh thì f là một đơn ánh,

b) Nếu h là đơn ánh và f là toàn ánh thì g là đơn ánh,

c) Nếu h là toàn ánh và g là đơn ánh thì g và f là những toàn ánh.

12. Giả sử $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow X$ là hai toàn ánh thoả mãn đẳng thức $g \circ f = \text{IX}$.

Chứng minh rằng g là ánh xạ ngược của f .

13. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và hai hoán vị $f : A \rightarrow A$ và $g : A \rightarrow A$ của tập hợp A xác định bởi:

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	6	5	4	3	2	1

x	1	2	3	4	5	6
g(x)	3	4	5	6	1	2

Tim các hoán vị hợp gof và fog.

14. Giả sử X và Y là hai tập hợp có n phần tử ($N(X) = n$ và $N(Y) = n$). Chứng minh rằng có tất cả $n!$ song ánh từ tập hợp X lên tập hợp Y.

Từ đó suy ra rằng số hoán vị của một tập hợp n phần tử là $n!$

Hướng dẫn :

Điều khẳng định đúng với $n = 1$. Thật vậy, giả sử $X = \{a_1\}$ và $Y = \{b_1\}$. Chỉ có một song ánh từ X lên Y : đó là ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ xác định bởi $f(a_1) = b_1$. Như vậy, nếu X và Y là những tập hợp có một phần tử thì có $1 = 1!$ song ánh từ X lên Y.

Giả sử điều khẳng định đúng với n, tức là có $n!$ song ánh từ tập hợp X lên tập hợp Y, nếu X và Y đều có n phần tử. Ta chứng minh điều khẳng định đúng cho $n + 1$. Thật vậy, giả sử $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ và $Y = \{b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}\}$. Phải chứng minh có cả thảy $(n + 1)!$ song ánh từ X lên Y. Ta chia tập hợp tất cả các song ánh từ X lên Y thành $n + 1$ tập con như sau:

Tập con thứ nhất A_1 gồm tất cả các song ánh $f : X \rightarrow Y$ sao cho $f(a_{n+1}) = b_1$. Tập con thứ hai A_2 gồm tất cả các song ánh $f : X \rightarrow Y$ sao cho $f(a_{n+1}) = b_2, \dots$. Tập con thứ $n + 1$ A_{n+1} gồm tất cả các song ánh $f : X \rightarrow Y$ sao cho $f(a_{n+1}) = b_{n+1}$. Các tập con A_1, \dots, A_{n+1} đôi một rời nhau. Hãy chứng minh rằng mỗi tập hợp A_k có $n!$ phần tử, $k = 1, 2, \dots, n + 1$.

15. Giả sử tập hợp X có k phần tử, tập hợp Y có n phần tử, $k \leq n$. Chứng minh rằng có cả thảy $n(n - 1) \dots (n - k + 1)$ đơn ánh từ X vào Y.

Hướng dẫn :

Ta chứng minh điều khẳng định bằng phép quy nạp theo k. Điều khẳng định đúng với $k = 1$. Giả sử $X = \{x_1\}$ và $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, n là một số nguyên dương bất kì, $n > 1$. Khi đó, có cả thảy n đơn ánh từ X vào Y: Đó là các ánh xạ $f_1 : X \rightarrow Y, x_1 \rightarrow f_1(x_1) = y_1$, ánh xạ $f_2 : X \rightarrow Y, x_1 \rightarrow f_2(x_1) = y_2, \dots$, ánh xạ $f_n : X \rightarrow Y, x_1 \rightarrow f_n(x_1) = y_n$. Giả sử điều khẳng định đúng cho k, tức là nếu X có k phần tử và Y có n phần tử, k n thì có cả thảy $n(n - 1)$

... $(n - k + 1)$ đơn ánh từ X vào Y . Ta chứng minh điều khẳng định đúng cho $k + 1$, tức là nếu tập hợp X có $k + 1$ phần tử và tập hợp Y có n phần tử, $k + 1 \leq n$ thì có cả thảy $n(n - 1) \dots (n - (k + 1) + 1)$ đơn ánh từ X vào Y . Thật vậy, giả sử $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Chia tập hợp tất cả các đơn ánh từ X vào Y thành n tập con như sau: Tập con A_1 gồm tất cả các đơn ánh $f : X \rightarrow Y$ sao cho $f(x_{k+1}) = y_1$, tập con A_2 gồm tất cả các đơn ánh $f : X \rightarrow Y$ sao cho $f(x_{k+1}) = y_2, \dots$, tập con A_n gồm tất cả các đơn ánh $f : X \rightarrow Y$ sao cho $f(x_{k+1}) = y_n$. Các tập con A_1, \dots, A_n đôi một rời nhau. Hãy chứng minh rằng mỗi tập con A_k có $(n - 1)(n - 2) \dots ((n - 1) - k + 1)$.

Formatted: Heading01

TIÊU CHỦ ĐỀ 1.8. ẢNH VÀ TẠO ẢNH QUA MỘT ẢNH XA

Thông tin cơ bản

8.1. ảnh của một tập hợp qua một ánh xạ

Formatted: Heading03

a) *Định nghĩa:* Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ và A là một tập con của X . Tập hợp các ảnh của tất cả các phần tử của A qua ánh xạ f gọi là *ảnh của tập hợp A qua ánh xạ f* , kí hiệu là $f(A)$.

Như vậy, với mọi $x \in Y$, $y \in f(A)$ khi và chỉ khi tồn tại $x \in A$ sao cho $y = f(x)$.

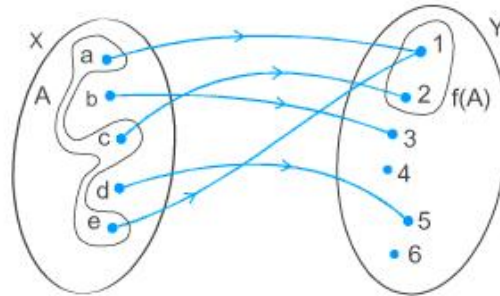
Do đó: $f(A) = \{y \in Y : \text{Tồn tại } x \in A \text{ sao cho } y = f(x)\}$.

Ví dụ 8.1 :

Cho hai tập hợp $X = \{a, b, c, d, e\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ xác định bởi bảng sau:

x	a	b	c	d	e
$f(x)$	1	3	2	5	1

ánh xạ f được biểu diễn bởi lược đồ hình tên trong Hình 1 dưới đây.



Hình 1

Cho hai tập con A và B của X : $A = \{a, c, e\}$; $B = \{a, d\}$. ảnh của A và B qua ánh xạ f là: $f(A) = \{1, 2\}$; $f(B) = \{1, 5\}$.

Ví dụ 8.2 :

(i) Giả sử $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi $f(x) = x^2$, $A = \{, 3, 7\}$ và \mathbb{R}^- là tập hợp các số thực không dương, $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$. Khi đó:

$f(A) = \{2, 9, 49\}$ và $f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+$.

(ii) Giả sử $D : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ là ánh xạ xác định bởi:

$$1 \text{ với } x \in \mathbb{Q},$$

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(D là hàm số Dirichlet). Tìm ảnh của các tập hợp

$A = \{1, -1, 0, 5, 1, 118\}$, $B = \{, , e\}$, $C = \{, 100\}$ qua ánh xạ D.

Ta có:

$$f(A) = \{1\}; f(B) = \{0\}; f(C) = \{0, 1\}.$$

(iii) Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = -3x$ và các tập hợp số thực $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x < -1\}$.

ảnh của A và B qua ánh xạ f là:

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} : -15 \leq y \leq -6\} \text{ và } f(B) = \{y \in \mathbb{R} : y > 3\}.$$

Một vài tính chất của ảnh

b) Định lí

Cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ và các tập con A, B của X. Khi đó:

- (i) Nếu $A \subset B$ thì $f(A) \subset f(B)$,
- (ii) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
- (iii) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Chứng minh

(i) Nếu $y \in f(A)$ thì tồn tại $x \in A$ sao cho $y = f(x)$. Vì $A \subset B$ nên từ đó suy ra $x \in B$ và $y = f(x)$. Do đó $y \in f(B)$. Vậy $f(A) \subset f(B)$.

(ii) Vì $A \subset A \cup B$ nên, theo (i), ta có $f(A) \subset f(A \cup B)$.

Tương tự, $f(B) \subset f(A \cup B)$. Do đó

$$(1) \quad f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$$

Ta chứng minh bao hàm thức ngược

$$(2) \quad f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B).$$

Giả sử y là một điểm bất kì của $f(A \cup B)$. Khi đó, tồn tại $x \in A \cup B$ sao cho $y = f(x)$. Vì $x \in A \cup B$ nên $x \in A$ hoặc $x \in B$. Nếu $x \in A$ thì $y = f(x) \in f(A)$, do đó $y \in f(A) \cup f(B)$. Nếu $x \in B$ thì $y \in f(B)$; do đó $y \in f(A) \cup f(B)$. Ta đã chứng minh (2). Từ (1) và (2) suy ra đẳng thức (ii) cần chứng minh.

(iii) Vì $A \cap B \subset A$ nên, theo (i), ta có $f(A \cap B) \subset f(A)$,

Tương tự, $f(A \cap B) \subset f(B)$. Do đó $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Chú ý:

Trong (iii), không thể thay dấu bởi dấu =. Chẳng hạn, xét ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2$ và các tập số thực $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Khi đó $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^- = \{0\}$; $f(\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-) = f(\{0\}) = \{0\}$; $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$, $f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+$ và $f(\mathbb{R}^+) \cap f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+$. Như vậy, $f(\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-)$ là một tập con thực sự của $f(\mathbb{R}^+) \cap f(\mathbb{R}^-)$.

Tuy nhiên, nếu $f: X \rightarrow Y$ là một đơn ánh thì bao hàm thức (iii) trở thành đẳng thức.

c) Định lí

Nếu ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ là một đơn ánh thì với hai tập con A, B bất kì của X , ta đều có:

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Chứng minh

Theo định lí b), (iii), ta có $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Ta chứng minh:

$$(1) \quad f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B).$$

Giả sử $y \in f(A) \cap f(B)$. Khi đó $y \in f(A)$ và $y \in f(B)$. Do đó, tồn tại $x_1 \in A$ sao cho $y = f(x_1)$ và tồn tại $x_2 \in B$ sao cho $y = f(x_2)$. Từ đó ta có $f(x_1) = f(x_2)$. Vì f là một đơn ánh nên đẳng thức vừa nêu kéo theo $x_1 = x_2$. Như vậy, ta có $x_1 \in A$, $x_1 \in B$ và $y = f(x_1)$, tức là $x_1 \in A \cap B$ và $y = f(x_1)$. Do đó $y \in f(A \cap B)$. Từ đó có đẳng thức (1) cần chứng minh.

d) Định lí

Nếu $f: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ thì với hai tập con bất kì của X , ta có:

$$f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B).$$

Chứng minh

Giả sử $y \in f(A) \setminus f(B)$. Khi đó $y \in f(A)$ và $y \notin f(B)$. Do đó, tồn tại $x_1 \in A$ sao cho $f(x_1) = y$. Hiển nhiên $x_1 \notin B$ (vì nếu $x_1 \in B$ thì $y = f(x_1) \in f(B)$). Như vậy, ta có $x_1 \in A$, $x_1 \notin B$ và $y = f(x_1)$, tức là $x_1 \in A \setminus B$ và $y = f(x_1)$. Do đó $y \in f(A \setminus B)$. Từ đó ta có bao hàm thức cần chứng minh.

Chú ý

Trong bao hàm thức của định lí không thể thay dấu \subset bởi dấu $=$.

Ta lấy lại ví dụ vừa xét: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi $f(x) = x^2$, \mathbb{R}^+ và \mathbb{R}^- là hai tập con của \mathbb{R} . Khi đó, $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$, $f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+$, $f(\mathbb{R}^+) \setminus f(\mathbb{R}^-) = \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+ = \emptyset$, $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^- = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} = \mathbb{R}^+$, $f(\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^-) = f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$.

Ta thấy $f(\mathbb{R}^+) \setminus f(\mathbb{R}^-)$ là tập con của $f(\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^-)$ và $f(\mathbb{R}^+) \setminus f(\mathbb{R}^-) \neq f(\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^-)$.

Trong phần câu hỏi và bài tập, ta sẽ chứng minh rằng nếu $f : X \rightarrow Y$ là một đơn ánh thì bao hàm thức trong Định lí d) trở thành đẳng thức.

8.2. Tạo ảnh của một tập hợp qua một ánh xạ

a) Định nghĩa:

Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ và C là một tập con của Y . Tập hợp tất cả các phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) \in C$ gọi là *tạo ảnh của tập hợp C qua ánh xạ f* , kí hiệu là $f^{-1}(C)$.

Như vậy, với mọi $x \in X$,

$x \in f^{-1}(C)$ khi và chỉ khi $f(x) \in C$.

$f^{-1}(C) = \{x \in X : f(x) \in C\}$.

Chú ý rằng trong kí hiệu $f^{-1}(C)$, f^{-1} không phải là ánh xạ ngược của f . Với mọi ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ và với mọi tập con C của Y , tạo ảnh $f^{-1}(C)$ của C luôn tồn tại, trong khi chỉ song ánh f mới có ánh xạ ngược.

Hiển nhiên $f^{-1}(f(X)) = X$.

Ví dụ 8.3 :

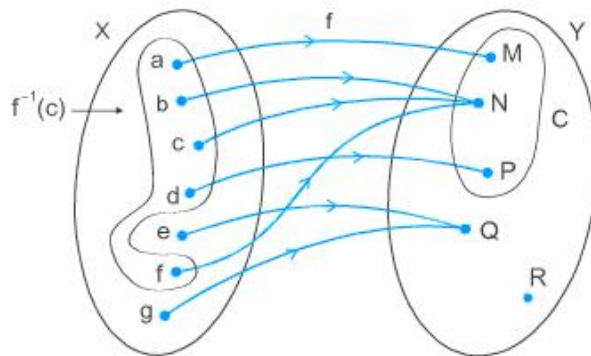
Cho hai tập hợp $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $Y = \{M, N, P, Q, R\}$ và ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ xác định bởi bảng sau:

x	a	b	c	d	e	f	g
$f(x)$	M	N	N	P	Q	N	Q

(i) Biểu diễn ánh xạ f bởi lược đồ hình tên.

(ii) Tìm tạo ảnh của các tập hợp $C = \{M, N, P\}$ và $D = \{P, Q, R\}$ qua ánh xạ f .

(i) ánh xạ f được biểu diễn bởi lược đồ hình tên trong Hình 2.



Hình 2

(ii) Tạo ảnh của các tập hợp C và D qua ánh xạ f là $f^1(C) = \{a, b, c, d, f\}$; $f^1(D) = \{d, e, g\}$.

Ví dụ 8.4 :

(i) Giả sử $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi $f(x) = |x|$, $C = \{y \mid \mathbb{R} : 1 \leq y \leq 3\}$. Khi đó: $f^1(C) = \{1 \leq x \leq 3\} \cup \{-3 \leq x \leq -1\}$.

(ii) Cho ánh xạ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $g(x) = \sin x$, $C = \{-1, 1\}$, $D = \{0\}$. Khi đó: $g^1(C) = \{+k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; $g^1(D) = \{k : k \in \mathbb{Z}\}$.

(iii) Với ánh xạ $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{với } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{với } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

$C = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y < 1\}$, $D = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 1\}$, $E = \{y \in \mathbb{R} : y > 3\}$.

Ta có: $f^1(C) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; $h^1(D) = \mathbb{Q}$; $h^1(E) = \emptyset$.

Một vài tính chất của tạo ảnh

b) Định lí

Giả sử $f: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ, C và D là những tập con của Y. Khi đó:

- (i) Nếu $C \subset D$ thì $f^1(C) \subset f^1(D)$,
- (ii) $f^1(C \cup D) = f^1(C) \cup f^1(D)$,
- (iii) $f^1(C \cap D) = f^1(C) \cap f^1(D)$,
- (iv) $f^1(C \setminus D) = f^1(C) \setminus f^1(D)$.

Chứng minh

(i) Giả sử $C \subset D$. Nếu $x \in f^1(C)$ thì $f(x) \in C$. Vì $C \subset D$ nên $f(x) \in D$; do đó $x \in f^1(D)$.

(ii) Vì $C \subset C \cup D$ nên, theo (i), ta có $f^1(C) \subset f^1(C \cup D)$.

Tương tự, ta có $f^1(D) \subset f^1(C \cup D)$. Do đó:

$$(1) \quad f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cup D).$$

Ta chứng minh bao hàm thức ngược

$$(2) \quad f^{-1}(C \cup D) \subset f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D).$$

Thật vậy, nếu $x \in f^{-1}(C \cup D)$ thì $f(x) \in C \cup D$. Do đó $f(x) \in C$ hoặc $f(x) \in D$. Nếu $f(x) \in C$ thì $x \in f^{-1}(C)$; do đó $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Nếu $f(x) \in D$ thì $x \in f^{-1}(D)$, do đó $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Từ đó ta có bao hàm thức (2). Từ (1) và (2) suy ra đẳng thức (ii) cần chứng minh.

(iii) Vì $C \cap D \subset C$ nên $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C)$. Tương tự,

ta có $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(D)$. Do đó

$$(3) \quad f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D).$$

Ta chứng minh:

$$(4) \quad f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \subset f^{-1}(C \cap D).$$

Thật vậy, nếu $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ thì $x \in f^{-1}(C)$ và $x \in f^{-1}(D)$.

Do đó $f(x) \in C$ và $f(x) \in D$. Từ đó suy ra $f(x) \in C \cap D$; do đó $x \in f^{-1}(C \cap D)$. Ta đã chứng minh (4). Từ (3) và (4) suy ra đẳng thức (iii).

(iv) Các điều kiện sau là tương đương:

$$x \in f^{-1}(C \setminus D),$$

$$f(x) \in C \setminus D,$$

$$f(x) \in C \text{ và } f(x) \notin D,$$

$$x \in f^{-1}(C) \text{ và } x \notin f^{-1}(D),$$

$$x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D).$$

Do đó ta có đẳng thức (iv).

Quan hệ giữa ảnh và tạo ảnh được cho trong định lý sau:

c) Định lý

Giả sử $f: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ từ tập hợp X vào tập hợp Y . Khi đó:

(i) Với mọi tập con C của Y , ta có:

$$(1) \quad f(f^{-1}(C)) \subset C,$$

(ii) Với mọi tập con A của X , ta có:

$$(2) \quad A \subset f^{-1}(f(A)).$$

Chứng minh

(i) Nếu $y \in f(f^{-1}(C))$ thì tồn tại $x \in f^{-1}(C)$ sao cho $y = f(x)$.

Vì $x \in f^{-1}(C)$ nên $f(x) \in C$, tức là $y \in C$. Do đó $f(f^{-1}(C)) \subset C$.

(ii) Nếu $x \in A$ thì $f(x) \in f(A)$. Do đó x thuộc tạo ảnh của tập hợp $f(A)$ qua ánh xạ f , tức là $x \in f^{-1}(f(A))$. Vậy $A \subset f^{-1}(f(A))$.

Chú ý:

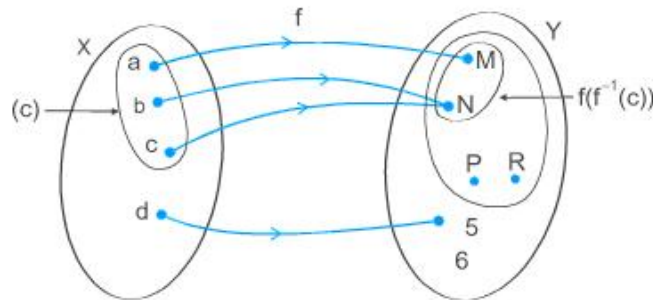
(i) Trong bao hàm thức (1) không thể thay dấu \subset bởi dấu $=$. Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 8.5 :

Cho hai tập hợp $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{M, N, P, Q, R\}$ và ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ xác định bởi bảng sau:

x	a	b	c	d
$f(x)$	M	N	N	Q

ánh xạ f được biểu diễn bởi lược đồ hình tên trong Hình 3.



Hình 3

Với tập con $C = \{M, N, P, R\}$ của tập hợp Y , ta có: $f^{-1}(C) = \{a, b, c\}$, $f(f^{-1}(C)) = \{M, N\}$.

Ta thấy $f(f^{-1}(C))$ là một tập con thực sự của C , tức là $f(f^{-1}(C)) \subsetneq C$.

Một ví dụ khác: Giả sử $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ là ánh xạ xác định bởi $g(x) = x^2$ và $C = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$ là một tập con của \mathbb{R} . Khi đó, ta có $g^{-1}(C) = \mathbb{R}$ và $g(g^{-1}(C)) = \mathbb{R}^+$.

ở đây, ta lại thấy $g(g^{-1}(C))$ là một tập con thực sự của C .

Trong phần câu hỏi và bài tập ta sẽ chứng minh rằng nếu $C \subset f(X)$ thì bao hàm thức (1) trong Định lí c) trở thành đẳng thức.

(ii) Trong bao hàm thức (2), không thể thay dấu \subset bởi dấu $=$.

Ta xét ví dụ sau:

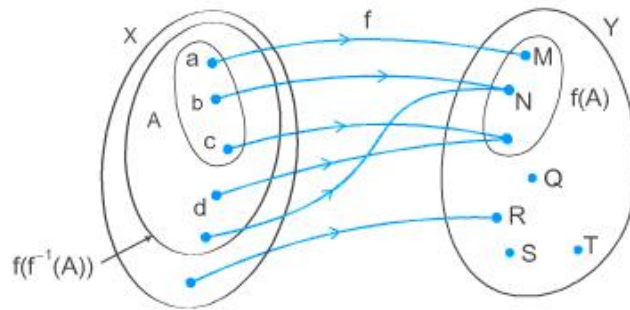
Ví dụ 8.6 :

Cho hai tập hợp $X = \{a, b, c, d, e, f\}$,

$Y = \{M, N, P, Q, R, S, T\}$ và ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ xác định bởi bảng sau:

x	a	b	c	d	e	f
$f(x)$	M	N	P	P	N	R

ánh xạ được biểu diễn bởi lược đồ hình tên trong Hình 4.



Hình 4

Với tập con $A = \{a, b, c\}$ của tập hợp X , ta có: $f(A) = \{M, N, P\}$ và $f^{-1}(f(A)) = \{a, b, c, d, e\}$.

Ta thấy A là một tập con thực sự của tập hợp $f^{-1}(f(A))$.

Ta xét một ví dụ khác: cho ánh xạ $D : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ xác định bởi:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{với } x \in Q, \\ 0 & \text{với } x \in \mathbb{R} \setminus Q. \end{cases}$$

(D là hàm số Dirichlet).

Với tập con $A = \{1\}$ của \mathbb{R} , ta có:

$$D(A) = \{1\} \text{ và } D^{-1}(D(A)) = D^{-1}(\{1\}) = Q.$$

A là một tập con thực sự của $D^{-1}(D(A))$.

Trong phần câu hỏi và bài tập, ta sẽ chứng minh rằng nếu ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ là một đơn ánh thì bao hàm thức (2) trong Định lý c) trở thành đẳng thức.

d) Quan hệ giữa tạo ảnh của một tập hợp qua một song ánh và ảnh của tập hợp đó qua ánh xạ ngược của song ánh.

Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một song ánh từ tập hợp X lên tập hợp Y . Khi đó f có ánh xạ ngược $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$. Ta sẽ chỉ ra rằng nếu C là một tập con của Y thì tạo ảnh $f^{-1}(C)$ của tập hợp C qua ánh xạ f và ảnh $g(C)$ của tập hợp C qua ánh xạ $g = f^{-1}$ là hai tập hợp bằng nhau: $g(C) = f^{-1}(C)$.

Thật vậy, với mọi $x \in X$, các điều kiện sau là tương đương:

$$\begin{aligned} & x \in g(C), \\ \Leftrightarrow & \text{Tồn tại } y \in C \text{ sao cho } g(y) = x, \\ & f(x) = y \text{ và } y \in C \\ \Leftrightarrow & x \in f^{-1}(C). \end{aligned}$$

Vậy $g(C) = f^{-1}(C)$.

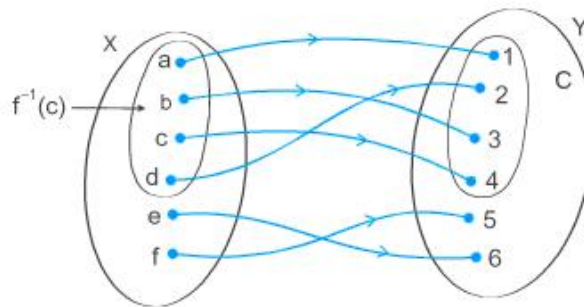
Ta minh hoạ điều khẳng định vừa nêu qua một ví dụ.

Ví dụ 8.7 :

Cho hai tập hợp $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và song ánh $f : X \rightarrow Y$ xác định bởi bảng sau:

x	a	b	c	d	e	f
$f(x)$	1	3	4	2	6	5

ánh xạ f được biểu diễn bởi lược đồ hình tên trong Hình 5



Hình 5

ánh xạ ngược $g = f^{-1} : Y \rightarrow X$ của f được cho trong bảng sau:

y	1	2	3	4	5	6
$g(y)$	a	d	b	c	f	e

Với tập con $C = \{1, 2, 3, 4\}$ của tập hợp Y :

Tạo ảnh của tập hợp C qua ánh xạ f là:

$$f^{-1}(C) = \{a, b, c, d\}$$

ảnh của tập hợp C qua ánh xạ ngược $g = f^{-1}$ của C là

$$g(C) = \{a, d, b, c\}.$$

Ta thấy $g(C) = f^{-1}(C)$.

Như vậy,

- Nếu ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ không phải là một song ánh và C là một tập con của Y thì kí hiệu $f^{-1}(C)$ chỉ tạo ảnh của tập hợp C qua ánh xạ f . (Trong trường hợp này f không có ánh xạ ngược).
- Nếu ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ là một song ánh và C là một tập con của Y thì ảnh $(f^{-1})(C)$ của C qua ánh xạ ngược $f^{-1} : Y \rightarrow X$ của f cũng là tạo ảnh $f^{-1}(C)$ của C qua ánh xạ f .

Hoạt động 8.1. Thực hành xác định ảnh và tạo ảnh của tập hợp qua ánh xạ

Nhiệm vụ:

Sinh viên tự đọc thông tin cơ bản sau đó thảo luận theo nhóm 2, 3 người để thực hiện các nhiệm vụ sau:

Nhiệm vụ 1:

- Cho ba ví dụ về ảnh của một tập hợp qua một ánh xạ. Biểu diễn các ánh xạ bởi những lược đồ hình tên và ảnh của tập hợp bởi lược đồ Ven
- Cho ba ví dụ về tạo ảnh của một tập hợp qua một ánh xạ. Biểu diễn các ánh xạ đó bởi những lược đồ hình tên và tạo ảnh bởi lược đồ Ven

Nhiệm vụ 2:

- Cho hai ví dụ chứng tỏ trong bao hàm thức (iii) của định lí 1b, 1d), không thể thay dấu bởi dấu $=$.

Nhiệm vụ 3:

- Cho hai ví dụ chứng tỏ trong bao hàm thức (1) của Định lí 2c), không thể thay dấu bởi dấu $=$.
- Cho hai ví dụ chứng tỏ trong bao hàm thức (2) của Định lí 2c), không thể thay dấu bởi dấu $=$.

Đánh giá hoạt động 8.1

1. Cho hai tập hợp $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$;

$$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ xác định bởi bảng sau

Formatted: Heading03

Formatted: Heading04

Formatted: Heading04

Formatted: Heading04

x	a	b	c	d	e	f	g	h
f(x)	1	2	4	2	7	4	7	8

và hai tập con A, B của X : $A = \{a, b, c\}$; $B = \{c, d, h\}$

a) Biểu diễn ánh xạ f bởi lược đồ hình tên và các tập hợp A, B bởi lược đồ Ven

b) Tìm $f(A), f(B), f(A \cup B), f(A) \cup f(B), A \cap B, f(A) \cap f(B)$ và $f(A \cap B)$

c) Nếu mối quan hệ giữa hai tập hợp $f(A \cap B)$ và $f(A) \cap f(B)$

2. Cho hai tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, Y = \{m, n, p, q, r, s, t\}$

ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ xác định bởi bảng

x	1	2	3	4	5	6
f(x)	p	p	r	q	r	t

và hai tập con $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{4, 5, 6\}$ của X

a) Biểu diễn ánh xạ f bởi lược đồ hình tên và các tập hợp A, B bởi lược đồ Ven

b) Tìm $f(A), f(B), f(A) \setminus f(B), A \setminus B$ và $f(A \setminus B)$

c) Nêu mối quan hệ giữa hai tập hợp $f(A \setminus B)$ và $f(A) \setminus f(B)$

3. Chứng minh rằng nếu ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ là một đơn ánh thì với hai tập con bất kì A và B của X , ta có:

$$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$$

4. Cho hai tập hợp $X = \{a, b, c, d, e, f\}, Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ xác định bởi bảng

x	a	b	c	d	e	f
f(x)	1	3	2	3	6	6

và tập con $C = \{1, 2, 3, 7, 8\}$ của X

a) Biểu diễn ánh xạ f bởi lược đồ hình tên và tập hợp C bởi lược đồ Ven

b) Tìm các tập hợp $f^{-1}(C)$ và $f(f^{-1}(C))$

c) Nếu mối quan hệ giữa hai tập hợp C và $f(f^{-1}(C))$.

5. Cho ánh xạ f . Chứng minh rằng với mọi tập con C của $f(X)$ ta có $f(f^{-1}(C)) = C$

6. Cho hai tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $Y = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ xác định bởi bảng

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	a	b	b	c	c	d	d	c

và tập con $A = \{3, 4, 5\}$ của tập hợp X

a) Biểu diễn ánh xạ f bởi lược đồ hình tên và tập hợp A bởi lược đồ Ven

b) Tìm các tập hợp A và $f^{-1}(f(A))$

c) Nêu mối quan hệ giữa hai tập hợp $f(A)$ và $f^{-1}(f(A))$

7. Chứng minh rằng nếu ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ là một đơn ánh thì với mọi tập con A của X ta có: $f^{-1}(f(A)) = A$

8. Cho ánh xạ $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ và hai tập hợp A, B , $A \subset X$, $B \subset \mathbb{R}$. Tìm ảnh $f(A)$ và tạo ảnh $f^{-1}(B)$ trong mỗi trường hợp sau

a) $f(x) = \sin 2x$; $X = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 6\pi\}$,

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \pi\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2\pi \leq x \leq 3\pi\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 0\}$$

b) $f(x) = |x^2 - 4|$, $X = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : 2 \leq y \leq 4\}$

c) $f(x) = |x^2 - 2x|$, $X = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}$

9. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = |x + 1|$ và tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$ Tìm $f(A)$ và $f^{-1}(f(A))$

10. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(x) = x^2 + x + 1$, $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}$. Tìm ảnh $f(A)$ và tạo ảnh $f^{-1}(B)$

11. Giả sử $\mathbb{R}[x]$ là tập hợp các đa thức với các hệ số thực và $\mathbb{R}_n[x]$ là tập hợp các đa thức có bậc nhỏ hơn hoặc bằng n , với các hệ số thực và $g: \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ là ánh xạ xác định bởi $g(P) = P(x^2 + 1)$

a) Tìm ảnh của tập hợp các đa thức có bậc ≤ 1

b) Tìm tạo ảnh của tập hợp các đa thức có bậc 0 và tạo ảnh của tập hợp chỉ có một phần tử là đa thức $x^2 + 1$

12. Cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$, $A \rightarrow X$, $B \rightarrow Y$

Chứng minh rằng: $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

13. Giả sử $f: X \rightarrow Y$ là một ánh xạ, A là một tập con của X , B là một tập con của Y và $g = f|_A$. Chứng minh rằng $g^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)$

14. Chứng minh rằng toàn ánh $f: X \rightarrow Y$ từ tập hợp X lên tập hợp Y là một song ánh khi và chỉ khi tạo ảnh của mỗi tập con một phần tử của Y là một tập con một phần tử của X

15. Cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ và $g: Y \rightarrow W$. Gọi $h: X \times Y \rightarrow V \times W$ là ánh xạ xác định bởi $(x, y) \mapsto h(x, y) = (f(x), g(y))$

Chứng minh rằng nếu $M \subset V, N \subset W$ thì $h^{-1}(M \times N) = f^{-1}(M) \times g^{-1}(N)$

(ánh xạ h được gọi là tích của hai ánh xạ f và g , và được kí hiệu là $f \times g$)

16. Cho hai ánh xạ $f: X \rightarrow Y$ và $g: X \rightarrow Z$. Gọi $h: X \rightarrow Y \times Z$ là ánh xạ xác định bởi $x \mapsto h(x) = (f(x), g(x))$.

Chứng minh rằng nếu $B \subset Y, C \subset Z$ thì $h^{-1}(B \times C) = f^{-1}(B) \cap g^{-1}(C)$ (ánh xạ h được gọi là ánh xạ phức)

Thông tin phản hồi cho chủ đề 1

Formatted: Heading01

CƠ SỞ CỦA LÝ THUYẾT TẬP HỢP

TIÊU CHỦ ĐỀ 1.2. TẬP HỢP

Hoạt động 1.1

Formatted: Heading02

Khái niệm Tập hợp. Tập con. Các tập hợp bằng nhau.

1. a) $A = [21, 24, 27, 30, 33, 36, 39]$
b) $B = \{31, 37, 41, 43, 47\}$
c) $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$
2. a) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $B = \{0, -1, -\};$ c) $C = \phi.$
3. a) A là tập hợp bảng số hạng đầu của cấp số cộng có số hạng đầu là 3 và công sai là 4
b) B là tập hợp các số nguyên tố lớn hơn 16 và nhỏ hơn 50;
c) C là tập hợp bảng số hạng đầu của cấp số nhân có số hạng đầu là 1 và công bội là .
5. S, S, Đ, Đ.
6. S, S, Đ, Đ.
7. Đ, S, Đ, Đ.
8. Đ, S, Đ, S.
Đ, Đ, S, Đ.
9. $(A) = \{\phi, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\}\}.$
b) P(A) có 8 phần tử.
10. a) $B = \{\phi, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3\},$
 $a_1, \{a_1, a_4\}, \{a_2, a_4\}, \{a_3, a_4\},$
 $\{a_1, a_2, a_4\}, \{a_1, a_3, a_4\}, \{a_2, a_3, a_4\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}\}.$
b) P(B) có 16 phần tử.
11. a) Sai; b) Đúng.
12. Hiển nhiên điều khẳng định đúng với $n = 0$. Giả sử điều khẳng định đúng với n , tức là tập hợp $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ có 2^n tập con. Ta chứng minh tập hợp $B = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$ có 2^{n+1} tập con. Chia các tập con của B làm hai loại:
(i) Các tập con của B không chứa a_{n+1} ,
(ii) Các tập con của B chứa a_{n+1}
Để thấy mỗi loại đều có 2^n phần tử.

Hoạt động 2.1

Formatted: Heading02

Các phép toán trên các tập hợp

1. Vì $B \subset A$ nên:

$$A \cup B = A, A \cap B = B, B \setminus A = \emptyset.$$

$$A \setminus B = \{15, 21, 25, 27, 33, 35, 39\}.$$

2. a) $A \cup B$ là tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 5:

$$A \cup B = \{0, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, \dots\}.$$

$A \cup B$ là tập hợp các số tự nhiên có một trong các dạng sau:

$10n, 10n + 2, 10n + 4, 10n + 5, 10n + 6, 10n + 8, n \in \mathbb{N}$. $A \cap B$ là tập hợp các bội tự nhiên của 10:

$$A \cap B = \{0, 10, 20, 30, 40, \dots\} = \{10n : n \in \mathbb{N}\}.$$

$A \setminus B$ là tập hợp các số chẵn không phải là bội của 5:

$$A \setminus B = \{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, 22, 24, 26, 28, \dots\}.$$

$A \setminus B$ là tập hợp các số tự nhiên có một trong các dạng sau:

$$10n + 2, 10n + 4, 10n + 6, 10n + 8, n \in \mathbb{N}.$$

$B \setminus A$ là tập hợp các số lẻ bội của 5:

$$B \setminus A = \{5, 15, 25, 35, \dots\} = \{10n + 5 : n \in \mathbb{N}\}.$$

3. a) $V \cap C$ là tập hợp các tam giác vuông cân.

$V \cup C$ là tập hợp các tam giác vuông hoặc cân.

$V \setminus C$ là tập hợp các tam giác vuông nhưng không cân.

$C \setminus V$ là tập hợp các tam giác cân nhưng không vuông.

4. $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$; $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq -5\}$;

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} : x < -6\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}; B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} : -5 < x < 0\}.$$

5. a) $E = LM$; $F = TX$; b) $E = ND$, $F = HB$;

c) $E = HD$; $F = BX$.

6. a) Miền II chứa các mảnh bé màu nâu, không phải là hình vuông.

Miền IV chứa các mảnh hình vuông lớn màu nâu.

Miền V chứa các mảnh hình vuông màu đỏ và xanh.

b) Miền II chứa 6 mảnh.

Miền IV chứa 2 mảnh.

Miền V chứa 8 mảnh.

18. Tập hợp $A \cup B$ có 6 phần tử.

19. Gọi A là tập hợp các xe (taxi và buýt) có màu khác màu vàng.

Tập hợp A có: $42 - 14 = 18$ phần tử.

Gọi B là tập hợp các xe buýt

Tập hợp $A \cup B$ có 37 phần tử.

$B \setminus A$ là tập hợp các xe buýt vàng. Ta có: $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, trong đó $B \setminus A$ và A là hai tập hợp không giao nhau. Từ đó dễ dàng tính được có 9 xe buýt vàng.

20. 4 học sinh chỉ học khá môn Toán, 7 em chỉ học khá môn Văn, 5 em chỉ học khá môn Anh; 9 em không học khá môn nào.

TIÊU CHỦ ĐỀ 1.3. QUAN HỆ

Hoạt động 3.1

Formatted: Heading02

Quan hệ hai ngôi

$$5. R = \{(2, 4), (2, 12), (2, 14), (4, 4), (4, 12), (7, 14)\}.$$

$$6. R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 7), (1, 8), (2, 2), (2, 8), (7, 7), (8, 8)\}.$$

$$7. R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (6, 1), (6, 2), (6, 6), (7, 1), (7, 7), (8, 1), (8, 2), (8, 8)\}.$$

$$8. R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 4), \dots\}.$$

$$9. R = \{(1, A), (2, A), (4, B), (7, C)\}.$$

$$10. R = \{(A, A), (A, C), (B, B), (B, C), (C, C)\}.$$

$$11. R = \{(1, 2), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7), (5, 7)\}.$$

12. Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp R_1 được biểu diễn bởi tập hợp các điểm của nửa mặt phẳng nằm phía trên đường phân giác thứ nhất $y = x$, tập hợp R_2 được biểu diễn bởi tập hợp các điểm của mặt phẳng không nằm trên đường phân giác thứ nhất.

14. Đó là quan hệ phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

15. R là một quan hệ đối xứng nhưng không phản xạ và không bắc cầu.

16. Đó là quan hệ phản xạ, bắc cầu nhưng không đối xứng.

17. Quan hệ R_2 trên Y là phản xạ; R_1 và R_2 không phải là những quan hệ phản xạ.

18. Quan hệ R_2 trên Y là đối xứng. Không có quan hệ nào là bắc cầu.

$$20. R^{-1} = \{(7, 1), (14, 2), (21, 3), (28, 4), \dots\}$$

$$= \{(7n, n) : n \in \mathbb{N}^*\}.$$

$$22. R_2 \cdot R_1 = \{(3, 6), (6, 7), (9, 8), (12, 9), (15, 10), \dots\}$$

$$= \{(3n, n+5) : n \in \mathbb{N}^*\}.$$

$$R_1 \cdot R_2 = \{(1, 2), (4, 3), (7, 4), (10, 5), \dots\}$$

$$= \{(3n-2, n+1) : n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Hoạt động 4.1

Formatted: Heading02

Quan hệ tương đương

1. \sim_1 chia L^0 thành 4 lớp tương đương.
 \sim_2 chia L^0 thành 2 lớp tương đương.
 \sim_3 chia L^0 thành 2 lớp tương đương với.
2. b) Quan hệ tương đương R trên \mathbb{N} chia \mathbb{N} thành bốn lớp tương đương.
3. b) $\{1, 3\}^2 = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}.$
4. b) Tập thương \mathbb{R}^2/\sim là tập [hop](#) các đường tròn trong mặt phẳng có tâm là điểm gốc và điểm gốc.
5. $X/R = \{\{x\} : x \in X\}.$
6. R không phải là một quan hệ phản xạ.
7. Không tồn tại một quan hệ tương đương R thoả mãn điều kiện đã nêu vì $A \cap C \neq \emptyset.$
8. $X/\sim = \{A, A_2, \dots, A_m\}.$
9. Với mỗi tập con A chứa a của X , $\hat{A} = \{A\}$ (lớp tương đương chứa A là tập hợp một phần tử). Mọi tập hợp con của X không chứa a đều tương đương với nhau, chúng tạo nên một lớp tương đương của quan hệ \sim . Vậy $P/\sim = \{\{A\}; a \in A \subset X\} \cup,$
trong đó B là một tập con của X không chứa a , là tập hợp tất cả các tập con của X không chứa a .
10. Tập thương C^*/R có hai phần tử: Tập hợp các điểm của hai nửa mặt phẳng bên phải và bên trái của trục tung tạo nên hai lớp tương đương của quan hệ R .

Hoạt động 5.1

Formatted: Heading02

Quan hệ thứ tự

1. $B) \leq$ là quan hệ toàn phần.
2. Đó không phải là một quan hệ toàn phần.
3. b) Không.

4. b) Không.
5. R không phản đối xứng.
6. Ba quan hệ thứ tự.
7. a) 40 là phần tử tối đại; 2 và 5 là những phần tử tối tiểu.
b) 40 là phần tử lớn nhất của X; X không có phần tử nhỏ nhất.
8. 3^5 là giá trị lớn nhất của X; 3^0 là giá trị nhỏ nhất của x.
9. RC là quan hệ thứ tự trên C.
10. b) Mỗi phần tử của X đều là một phần tử tối đại, đồng thời là phần tử tối tiểu. Tập hợp sắp thứ tự X không có phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất.
a, e, f là các phần tử tối tiểu của Y; c là phần tử tối đại, cũng là phần tử lớn nhất của Y.
13. b) D_1 là phần tử tối tiểu; D_2 là phần tử tối tiểu, cũng là phần tử tối đại. D_3 là phần tử tối đại. Tập sắp thứ tự X không có phần tử nhỏ nhất và không có phần tử lớn nhất.
14. A là dây xích, B không phải là dây xích.
15. 1 là phần tử chặn dưới của A;
Các số $77n, n \in \mathbb{N}^*$ là các phần tử chặn trên của A.
1 và 3 là các phần tử chặn dưới của B; B không có phần tử chặn trên.
16. 1 và 3 là các phần tử chặn trên của A. Các số $90n, n \in \mathbb{N}^*$ là các phần tử chặn dưới của A.
Các số 1, 3, $3^2, 3^3, 3^4, 3^5$ là các phần tử chặn trên của B. Không có phần tử chặn dưới của B trong $\{\mathbb{N}^*, \leq\}$.
17. a) Mỗi số thực nhỏ hơn hoặc bằng -7 đều là một phần tử chặn dưới của A; mỗi số thực lớn hơn hoặc bằng 3 đều là một phần tử chặn trên của A.
b) Số không và các số thực âm là các phần tử chặn dưới của N. Không có phần tử chặn trên của N trong R.

TIÊU CHỦ ĐỀ 1.6. ÁNH XẠ

Hoạt động 6. 1

Định nghĩa và các khái niệm cơ bản về ánh xạ

1. b) R không phải là một ánh xạ.
2. b) R không phải là một ánh xạ.
3. c) φ không phải là một ánh xạ.

Formatted: Heading01

Formatted: Heading02

4. b) f là một ánh xạ. Tập xác định của f là A ;
 $f(A) = \{18, 35\}$.
5. a) R là một ánh xạ.
- b) Tập xác định của ánh xạ R là X ; ảnh của ánh xạ là $R(X) = \{17, 18\}$
6. Có một ánh xạ từ X vào Y .
7. Có m ánh xạ từ X vào Y .
8. 4 ánh xạ.
10. $f(-2) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}$; $f(0) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$;
 $f(x^2) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq x^2\}$.
11. $f(X) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leq \}$.
12. f và g là hai ánh xạ bằng nhau.
13. u và v là hai ánh xạ bằng nhau.
14. a) $\text{gof}(x) = x, x > 0$; $(\text{fog})(x) = x, x \in \mathbb{R}$.
b) gof không tồn tại; $(\text{fog})(x) = -\ln x, x \in \mathbb{R}^*$.
- c) gof không tồn tại; $(\text{fog})(x) = \ln(\cos x), x \in \mathbb{R}$.
15. a) $h(\mathbb{R})$ không chứa hai số thực -2 và 1 .
b) áp dụng a).
16. $X = \{3, \}$ hoặc X là một tập con của tập hợp $\{3, \}$.
17. $X = \{-1, 1\}$ hoặc X là một tập con của tập hợp $\{-1, 1\}$.
19. Tập xác định của f là: $X = \mathbb{R}$.
 $f(X) = \{0\}$.

Hoạt động 7.1

Đơn ánh, toàn ánh, song ánh và ánh xạ ngược

1. b) f không phải là một đơn ánh; g là một đơn ánh.
2. b) f không phải là một toàn ánh; g là một toàn ánh.
3. b) ánh xạ ngược của f và g được cho trong hai bảng sau:

y	1	2	3	4	5
$f^{-1}(y)$	b	d	c	e	a

y	1	2	3	4	5
$g^{-1}(y)$	e	a	b	c	d

4. $f^{-1}(y) = -y, y \in \mathbb{R}$.
5. a) $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, y \rightarrow f^{-1}(y) = y^2$.
 b) $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \rightarrow g^{-1}(y) = \sqrt{y}$.
 c) $h^{-1} : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, y \rightarrow h^{-1}(y) = \frac{1}{y}$.
 d) $u^{-1} : A \rightarrow A, y \rightarrow u^{-1}(y) = y$.

6. a) f là một đơn ánh.
 b) f không phải là một song ánh.
- 13.

x	1	2	3	4	5	6
$(g \circ f)(x)$	2	1	6	5	4	3

x	1	2	3	4	5	6
$(f \circ g)(x)$	4	3	2	1	6	5

Hoạt động 8.1

Formatted: Heading02

ảnh và tạo của một tập hợp qua một ánh xạ

1. b) $f(A) = \{1, 2, 4\}; f(B) = \{4, 2, 8\}; f(A \cup B) = \{1, 2, 4, 8\}, A \cap B = \{c\};$
 $f(A) \cap f(B) = \{2, 4\}; f(A \cap B) = \{4\}.$
 c) $f(A \cap B)$ là một tập con thực sự của $f(A) \cap f(B).$

2. b) $f(A) = \{p, r, q\}$; $f(B) = \{q, r, t\}$; $f(A) \setminus f(B) = \{p\}$;

$A \setminus B = \{1, 2, 3\}$; $f(A \setminus B) = \{p, r\}$.

c) $f(A) \setminus f(B)$ là một tập con thực sự của $f(A \setminus B)$.

4. b) $f^{-1}(C) = \{a, b, c\}$; $f(f^{-1}(C)) = \{1, 2, 3\}$.

c) $f(f^{-1}(C))$ là một tập con thực sự của C .

6. b) $f(A) = \{b, c\}$; $f^{-1}(f(A)) = \{2, 3, 4, 5\}$.

c) A là một tập con thực sự của $f^{-1}(f(A))$.

8. a) $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}$;

$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \pi\} \cup \{x \in \mathbb{R} : \pi \leq x \leq 2\pi\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2\pi \leq x \leq 3\pi\}$

b) $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : 3 \leq y \leq 4\}$;

$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 4\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq -1\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$

c) $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : 1 \leq y \leq 3\}$;

$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 3\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 2 \leq x \leq 4\}$.

9. $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : 2 \leq y \leq 3\}$;

$f^{-1}(f(A)) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -4 \leq x \leq -3\}$.

10. $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : 1 \leq y \leq 273\}$; $f^{-1}(B) = \{0\}$.

11. a) ảnh của tập hợp các đa thức có bậc ≤ 1 là tập hợp các đa thức có bậc 0 và các đa thức bậc hai có dạng $P(x) = ax^2 + b$.

b) Tạo ảnh của tập hợp các đa thức có bậc 0 là tập hợp các đa thức có bậc 0. Tạo ảnh của tập hợp chỉ có một phần tử là đa thức $x^2 + 1$ là tập hợp chỉ có một phần tử là đa thức $Q(x) = x$.

CHỦ ĐỀ 2

CƠ SỞ LÔGIC TOÁN

I. Mục tiêu

- Kiến thức : Người học nắm được những kiến thức về :
- ~ Cơ sở của logic mệnh đề
 - ~ Các phép suy luận thường gặp
 - ~ Các phép chứng minh thường gặp
 - ~ Vận dụng các phép suy luận và chứng minh trong dạy và học toán
- Kỹ năng : Hình thành và rèn luyện cho người học các kỹ năng :
- ~ Phân tích cấu trúc của các mệnh đề: phủ định, hội, tuyển, tương đương thường gặp và xác định giá trị chân lí của chúng
 - ~ Vận dụng các phép tương đương logic thường gặp trong toán học
 - ~ Phân tích các phép suy luận và chứng minh trong dạy học toán ở tiểu học
- Thái độ :
- Chủ động tìm tòi, phát hiện và khám phá các ứng dụng của logic mệnh đề trong dạy và học toán

II. Giới thiệu tiểu mô đun

STT	Tên tiểu chủ đề	Trang
1	Mệnh đề và các phép logic	
2	Các bài toán về suy luận đơn giản	
3	Công thức	
4	Quy tắc suy luận	
5	Hàm mệnh đề - Mệnh đề tổng quát và mệnh đề tồn tại	
6	Suy luận và chứng minh	
7	Suy luận và chứng minh trong dạy học toán ở tiểu học	

III. Điều kiện cần thiết để thực hiện môđun

- * Kiến thức
 - ~ Nắm được kiến thức toán học ở trường phổ thông
 - ~ Nắm được kiến thức của chương trình Trung học Sơ phạm.
- * Đồ dùng dạy học
 - ~ Một số thiết bị dạy học sử dụng trong khi tổ chức các hoạt động: máy chiếu projector, máy chiếu đa năng, tranh ảnh....
 - ~ Giấy trong, bút dạ, bảng photoemica
- * Tài liệu tham khảo

IV. Nội dung

TIỂU CHỦ ĐỀ 2.1. MỆNH ĐỀ VÀ CÁC PHÉP LÔGIC

Thông tin cơ bản

1.1. Mệnh đề

Trong môn tiếng Việt ở trường phổ thông, chúng ta đã làm quen với khái niệm về câu. Các câu thường gặp có thể chia thành hai loại : loại thứ nhất gồm những câu phản ánh tính đúng hoặc sai một thực tế khách quan. Mỗi câu như thế được hiểu là một mệnh đề. Loại thứ hai gồm những câu không phản ánh tính đúng hoặc sai một thực tế khách quan nào

Để kí hiệu các mệnh đề ta dùng các chữ cái a, b, c.... Trong lôgic ta không quan tâm đến cấu trúc ngữ pháp của các mệnh đề mà chỉ quan tâm đến tính “đúng” hoặc “sai” của chúng. Nếu a là mệnh đề đúng thì ta nói nó có giá trị chân lí bằng 1, kí hiệu là $G(a) = 1$, nếu a là mệnh đề sai thì ta nói nó có giá trị chân lí bằng 0, kí hiệu là $G(a) = 0$

Chẳng hạn, các câu

- + “Hà Nội là thủ đô của nước Việt Nam” là mệnh đề đúng
- + “Nước Pháp nằm ở Châu Phi” là mệnh đề sai
- + “Tháng Giêng có 30 ngày” là mệnh đề sai
- + “15 là số lẻ” là mệnh đề đúng
- + “Số 35 chia hết cho 3” là mệnh đề sai
- + “12 lớn hơn 20” là mệnh đề sai
- + “Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình vuông” là mệnh đề sai

Các câu

- + “2 nhân 2 bằng mấy?”
- + “Anh tốt nghiệp phổ thông năm nào?”
- + “Bộ phim này hay quá!”
- + “Tất cả chúng ta hãy đi học đúng giờ!”

đều không phải là mệnh đề. Nội dung, những câu nghi vấn, câu mệnh lệnh và câu cảm thán đều không phải là mệnh đề

Chú ý

1. Trong thực tế ta gặp những mệnh đề mở là những mệnh đề mà giá trị đúng, sai của nó phụ thuộc vào những điều kiện nhất định (thời gian, địa điểm,...) Nó đúng ở thời gian, địa điểm này nhưng lại sai ở thời gian, địa điểm khác. Song ở bất kì thời điểm nào, địa điểm nào nó cũng luôn có giá trị chân lí đúng hoặc sai. Chẳng hạn:

- + Sinh viên năm thứ nhất đang tập quân sự
- + Trời nắng nóng
- + Năng suất lúa năm nay cao hơn năm ngoái
- + 12 giờ trưa hôm nay tôi đang ở Hà Nội

2. Để kí hiệu a là mệnh đề “ $2 + 2 = 5$ ” ta viết
 $a = “2 + 2 = 5”$

3. Ta thừa nhận các luật sau đây của lôgic mệnh đề

a) *Luật bài trung*: Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai, không có mệnh đề nào không đúng cũng không sai

b) *Luật mâu thuẫn (hay còn gọi là luật phi mâu thuẫn)*: không có mệnh đề nào vừa đúng lại vừa sai

1.2. Các phép lôgic

Khi có hai số a và b, dùng các phép toán cộng, trừ, nhân, chia tác động vào hai số đó ta sẽ có những số mới (gọi là tổng hiệu, tích, thương của hai số đó)

Khi có hai mệnh đề a và b, người ta cũng xây dựng các phép toán tác động vào hai mệnh đề đó để nhận được những mệnh đề mới. Dưới đây ta lần lượt xây dựng các phép toán đó

1.2.1. Phép phủ định

mệnh đề a = “Nhôm là một kim loại” ta thiết lập được mệnh đề

a = “Nhôm không phải là kim loại”

a = “Không phải nhôm là kim loại”

Từ mệnh đề b = “Số 30 chia hết cho 4” ta thiết lập được mệnh đề

b = “Số 30 không chia hết cho 4”

hoặc b = “Không phải 30 chia hết cho 4”

Mệnh đề a (hoặc b) là mệnh đề phủ định của mệnh đề a (hoặc b)

Rõ ràng, a là mệnh đề đúng còn mệnh đề a là mệnh đề sai; mệnh đề b sai còn mệnh đề b là đúng

Vậy phủ định của mệnh đề a là một mệnh đề, kí hiệu là \bar{a} , đúng khi a sai và sai khi a đúng. Bảng chân lí của phép phủ định được cho bởi bảng sau

a	\bar{a}
1	0
0	1

Ví dụ 1.1 :

P phủ định của mệnh đề “Tháng Ba có 31 ngày” là mệnh đề “Tháng Ba không có 31 ngày” hoặc “Không phải tháng Ba có 31 ngày”

Ví dụ 1.2 :

P phủ định của mệnh đề “8 lớn hơn 12” là mệnh đề “8 không lớn hơn 12” hoặc “8 nhỏ hơn hoặc bằng 12”

Chú ý :

P phủ định của một mệnh đề có nhiều cách diễn đạt khác nhau, chẳng hạn:

“Nhôm không phải là kim loại”

“Không phải nhôm là kim loại”

“Nhôm đâu có phải là kim loại”

“Nói nhôm là kim loại không đúng”

hoặc

“25 không lớn hơn 10”

“25 nhỏ hơn hoặc bằng 10”

“Không phải 25 lớn hơn 10”

“25 đâu có lớn hơn 10”

“Nói 25 lớn hơn 10 là sai”

.....

1.1.2. Phép hội

Từ hai mệnh đề

a = “Mỗi năm có 12 tháng”

b = “Mỗi năm có bốn mùa”

Ta thiết lập mệnh đề

$c =$ “Mỗi năm có 12 tháng và bốn mùa”

Hoặc từ hai mệnh đề

$a =$ “36 là số chẵn”

$b =$ “36 chia hết cho 9”

Ta thiết lập mệnh đề

$c =$ “36 là số chẵn chia hết cho 9”

Trong mỗi ví dụ trên đây, mệnh đề c là hội của hai mệnh đề a và b đã cho

Vậy hội của hai mệnh đề a ; b là một mệnh đề c , đọc là a và b , kí hiệu là $c = a \wedge b$, đúng khi cả hai mệnh đề a , b cùng đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

Giá trị chân lí của phép hội được xác định bởi bảng sau

a	b	$a \wedge b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Chú ý : Để thiết lập mệnh đề hội của hai mệnh đề a , b ta ghép hai mệnh đề đó bởi liên từ “và” hay một liên từ khác cùng loại. Những liên từ đó là: mà, nhưng, song, song le, đồng thời, vẫn, cùng.... hoặc dùng dấu phẩy hoặc không dùng liên từ gì

Ví dụ 1.3 :

“Thành phố Hà Nội là thủ đô nhưng không phải là thành phố lớn nhất của cả nước” là hội của hai mệnh đề $a =$ “thành phố Hà Nội là thủ đô của cả nước” và $b =$ “thành phố Hà Nội không phải là thành phố lớn nhất cả nước”

Rõ ràng $G(a) = G(b) = 1$ nên $G(a \wedge b) = 1$

Ví dụ 1.4 :

“Lúc 12 giờ trưa nay Hương có mặt ở Hà Nội và ở Bắc Ninh” là hội của hai mệnh đề $a =$ “Lúc 12 giờ trưa nay Hương có mặt ở Hà Nội” và $b =$ “Lúc 12 giờ trưa nay Hương có mặt ở Bắc Ninh”

Rõ ràng hai mệnh đề này không thể cùng đúng nên $G(a \wedge b) = 0$

Ví dụ 1.5 :

“36 là số chẵn chia hết cho 5” là hội của hai mệnh đề $a =$ “36 là số chẵn” và $b =$ “36 chia hết cho 5”

ở đây $G(a) = 1$ và $G(b) = 0$ nên $G(a \wedge b) = 0$

Ví dụ 1.6 :

“Số e lớn hơn 2 nhưng nhỏ hơn 3” là hội của hai mệnh đề $a =$ “ $e > 2$ ” và $b =$ “ $e < 3$ ”.

ở đây $G(a) = G(b) = 1$ nên $G(a \wedge b) = 1$

Ví dụ 1.7 :

Anh Hùng nói thạo tiếng Anh mà không biết tiếng Đức

Ví dụ 1.8 :

Cường vừa trẻ, đẹp trai, học giỏi mà lại có nhiều tài lẻ

Chú ý: Đôi khi trong mệnh đề có liên từ “và” nhưng lại không có nghĩa của mệnh đề hội.

Chẳng hạn: “Tập số âm và tập số dương là hai tập con rời nhau của tập số thực”
“Nhà Thanh nuôi được 15 con gà và vịt”

1.1.3. Phép tuyển

Từ hai mệnh đề

a = “Mỗi năm có 12 tháng”

b = “Mỗi năm có 52 tuần”

Ta thiết lập mệnh đề

c = “Mỗi năm có 12 tháng hoặc 52 tuần”

Hoặc từ hai mệnh đề

a = “50 là số nguyên tố”

b = “50 chia hết cho 5”

Ta thiết lập mệnh đề

c = “50 là số nguyên tố hoặc chia hết cho 5”

Trong mỗi ví dụ trên đây, mệnh đề c là tuyển của hai mệnh đề đã cho

Vậy tuyển của hai mệnh đề a, b là một mệnh đề c, đọc là a hoặc b, kí hiệu $c = a \vee b$, đúng khi ít nhất một trong hai mệnh đề a, b là đúng và sai khi cả hai mệnh đề a, b cùng sai

Giá trị chân lí của phép tuyển được xác định bởi bảng sau

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ví dụ 1.9 :

“Mỗi năm có bốn mùa hoặc mỗi tuần có bảy ngày” là tuyển của hai mệnh đề a =

“Mỗi năm có bốn mùa” và b = “Mỗi tuần có bảy ngày”

ở đây $G(a) = G(b) = 1$ nên $G(a \vee b) = 1$

Ví dụ 1.10 :

“20 là số tròn chục hoặc chia hết cho 3” là tuyển của hai mệnh đề

a = “20 là số tròn chục” và b = “20 chia hết cho 3”

ở đây $G(a) = 1$ và $G(b) = 0$ nên $G(a \vee b) = 1$

Ví dụ 1.11 :

“Tháng Hai có 31 ngày hoặc $3 + 3 = 1$ ” là tuyển của hai mệnh đề

a = “tháng Hai có 31 ngày” và b = “ $3 + 3 = 1$ ”

ở đây $G(a) = G(b) = 0$ nên $G(a \vee b) = 0$

Ví dụ 1.12 :

“Cô An chưa có gia đình hay là đã tốt nghiệp đại học”

Chú ý :

1. Để thiết lập mệnh đề tuyển của hai mệnh đề a, b ta ghép hai mệnh đề đó bởi liên từ “hoặc” (hay một liên từ khác cùng loại)
2. Khi thiết lập mệnh đề tuyển của nhiều mệnh đề, ta dùng dấu chấm phẩy thay cho liên từ “hoặc”

Chẳng hạn: “Số có tận cùng bằng 0 ; 2 ; 4 ; 6 hoặc 8 thì chia hết cho 2”

3. Liên từ “hoặc” trong thực tế thường được dùng với hai nghĩa: loại trừ và không loại trừ. Phép tuyển “hoặc a hoặc b” là phép tuyển loại trừ để chỉ a hoặc b nhưng không thể cả a lẫn b

Phép tuyển “a hoặc b” là phép tuyển không loại trừ để chỉ a hoặc b và có thể cả a lẫn b

Chẳng hạn: “Hôm nay là hoặc Chủ nhật hoặc thứ Bảy” là phép tuyển loại trừ

“24 là số chẵn hoặc chia hết cho 3”

“Hôm nay là Chủ nhật hoặc ngày lễ” là những phép tuyển không loại trừ

Dưới đây, nếu không nói gì thêm, ta sẽ chỉ xét các phép tuyển không loại trừ

1.1.4. Phép kéo theo

Từ hai mệnh đề

a = “Số tự nhiên a có tổng các chữ số chia hết cho 3”

và b = “Số tự nhiên a chia hết cho 3”

Ta thiết lập mệnh đề

c = “Nếu số tự nhiên a có tổng các chữ số chia hết cho 3 thì nó chia hết cho 3”

Hoặc từ hai mệnh đề:

a = “Trời vừa mưa rào”

b = “Đường phố bị ướt”

Ta thiết lập mệnh đề

c = “Nếu trời vừa mưa rào thì đường phố bị ướt”

Trong mỗi ví dụ trên đây, mệnh đề c là mệnh đề kéo theo thiết lập từ hai mệnh đề a và b

Vậy mệnh đề a kéo theo b là một mệnh đề, kí hiệu là $a \rightarrow b$, sai khi a đúng mà b sai và đúng trong các trường hợp còn lại

Giá trị chân lí của mệnh đề $a \rightarrow b$ được xác định bởi bảng sau:

a	b	$a \rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

Chú ý

1. Mệnh đề “a kéo theo b” thường được diễn đạt dưới nhiều hình thức khác nhau, chẳng hạn:

“nếu a thì b”

“a suy ra b”

“có a thì có b”

.....

2. Ta có thể minh họa bằng giá trị chân lí trên qua ví dụ sau:

“Nếu trời mưa rào thì đường phố bị ướt”

a □ b

Mệnh đề này sai, nếu trời mưa rào (a đúng) mà đường phố không ướt (b sai). Mệnh đề này đúng trong các trường hợp còn lại

~ Trời vừa mưa rào (a đúng) và đường phố bị ướt (b đúng)

~ Trời không mưa rào (a sai) và đường phố không bị ướt (b đúng)

~ Trời không mưa rào (a sai) và đường phố bị ướt (b sai) (có thể do nước máy chảy tràn ra đường,...)

Ví dụ 1.13 :

“Số 45 có tận cùng bằng 5 nên nó chia hết cho 5”. Mệnh đề này đúng

Ví dụ 1.14 :

“Nếu dây tóc bóng đèn có dòng điện chạy qua thì bóng đèn sáng” là mệnh đề đúng

Ví dụ 1.15 :

“Nếu mỗi năm có 10 tháng thì mỗi tuần có 10 ngày” là mệnh đề đúng

Ví dụ 1.16 :

“Nếu mỗi năm có 12 tháng thì $2 + 2 = 5$ ” là mệnh đề sai

Ví dụ 1.17 :

“Số 243 có tổng các chữ số chia hết cho 9 suy ra nó chia hết cho 5” là mệnh đề sai

Ví dụ 1.18 :

“Nếu mặt trời quay quanh trái đất thì Việt Nam nằm ở châu Mỹ” là mệnh đề đúng, vì ở đây cả hai mệnh đề a và b đều sai

Chú ý

1. Trong logic, khi xét giá trị chân lý của mệnh đề $a \square b$ người ta không quan tâm đến mối quan hệ về nội dung của hai mệnh đề đó. Không phân biệt trường hợp a có phải là nguyên nhân để có b hay không, mà chỉ quan tâm đến tính đúng, sai của chúng

2. Trong văn học, mệnh đề kéo theo còn được diễn đạt bằng nhiều hình thức phong phú. Chẳng hạn:

“Bao giờ bánh đúc có xương

Bấy giờ dì ghè mới thương con chồng”

hoặc

“Chuồn chuồn bay thấp thì mưa,

Bay cao thì nắng, bay vừa thì râm”

1.1.5. Phép tương đương

Từ hai mệnh đề

a = “Hình chữ nhật có một góc nhọn”

và b = “ 200 là số nguyên tố”

ta thiết lập mệnh đề

c = “Hình chữ nhật có một góc nhọn khi và chỉ khi 200 là số nguyên tố”

Hoặc từ hai mệnh đề

a = “Số 45 có tận cùng bằng 5”

và b = “Số 45 chia hết cho 5”

ta thiết lập mệnh đề

c = “Số 45 có tận cùng bằng 5 khi và chỉ khi nó chia hết cho 5”

Trong mỗi ví dụ nêu trên, mệnh đề c là mệnh đề tương đương được thiết lập từ hai mệnh đề đã cho

Vậy mệnh đề a tương đương b là một mệnh đề, kí hiệu là $a \leftrightarrow b$, đúng khi cả hai mệnh đề a, b cùng đúng hoặc cùng sai và sai trong các trường hợp còn lại
 Giá trị chân lí của mệnh đề tương đương được xác định bởi bảng sau

a	b	$a \leftrightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Chú ý

Trong thực tế mệnh đề “ a tương đương b ” còn được diễn đạt dưới nhiều hình thức khác nhau. Chẳng hạn:

- “ a khi và chỉ khi b ”
- “ a nếu và chỉ nếu b ”

.....
 Ví dụ 1.19 :

“Tháng 12 có 31 ngày khi và chỉ khi trái đất quay xung quanh mặt trời” là mệnh đề đúng

Ví dụ 1.20 :

“ $3 < 7$ khi và chỉ khi 70 chia hết cho 3” là mệnh đề sai

Ví dụ 1.21 :

“Tổng các góc trong một tam giác bằng 900 nếu và chỉ nếu 13 là số nguyên tố” là mệnh đề sai

Ví dụ 1.22 :

“Tháng Hai có 31 ngày khi và chỉ khi $2 \times 2 = 11$ ” là mệnh đề đúng

Hoạt động : Tìm hiểu khái niệm mệnh đề

Nhiệm vụ :

Sinh viên tự đọc thông tin cơ bản sau đó thảo luận theo nhóm 3, 4 người để thực hiện các nhiệm vụ nêu trong các hoạt động 1.1 đến 1.6 dưới đây :

Nhiệm vụ 1 :

Xây dựng haiví dụ về mệnh đề đúng trong mỗi lĩnh vực số học,hình học và đời sống, xã hội.

Nhiệm vụ 2 :

Xây dựng hai ví dụ về mệnh đề sai trong mỗi lĩnh vực số học,hình học và đời sống, xã hội.

Nhiệm vụ 3 :

Viết bốn câu không phải là mệnh đề

Nhiệm vụ 4 :

Xây dựng ba ví dụ về mệnh đề mở (hoặc mệnh đề chưa xác định)

Nhiệm vụ 5 :

Phát biểu luật bài trung và luật mâu thuẫn của logic mệnh đề

Đánh giá

1. Đánh dấu x vào ô trống đặt sau câu là mệnh đề

a, Bạn An học năm thứ mấy?

- b, $2 \times 5 = 11$
- c, 23 là số nguyên tố
- d, 17 có phải là số nguyên tố không?
- e, Đội tuyển Việt Nam hôm nay đá hay quá!
- f, Tổng các góc trong một tứ giác lồi bằng 3600
- g, Hãy nêu một ví dụ về mệnh đề !
- h, ở Hà Nội sáng nay có mưa rào
- i, Bạn nào có thể cho biết mệnh đề là gì?
2. Viết giá trị chân lí của các mệnh đề sau vào ô trống
- a, “3 không lớn hơn 7”
- b, “Số hữu tỉ không phải là số vô tỉ”
- c, “Hai đường chéo của hình thang có độ dài bằng nhau”
3. Đúng ghi Đ, sai ghi S vào ô trống
- a, Có mệnh đề vừa đúng lại vừa sai
- b, Có mệnh đề không đúng cũng không sai

Hoạt động 1.2. Tìm hiểu phép phủ định

Nhiệm vụ :

Nhiệm vụ 1 : Lập bảng chân lí của mệnh đề phủ định

Nhiệm vụ 2 :

Xây dựng bốn ví dụ về phép phủ định mệnh đề trong số học trong hình học, trong đời sống, xã hội

Sau đó tìm giá trị chân lí của chúng và diễn đạt mỗi mệnh đề phủ định bằng các cách khác nhau

Đánh giá

1. Thiết lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau

- a, $5 \times 7 = 35$
- b, 24 không chia hết cho 5
- c, Hình vuông có bốn cạnh bằng nhau
- d, Trời mưa
- e, An cao hơn Thọ
- f, $40 < 30$

Sau đó tìm giá trị chân lí của chúng

2. Tìm mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau

- a, “15 lớn hơn hoặc bằng 20”
 “15 không nhỏ hơn 20”
 “Không phải 15 nhỏ hơn 20”
 “Nói 15 nhỏ hơn 20 là không đúng”
- b, “Hình bình hành không có hai đường chéo cắt nhau ở trung điểm của mỗi đường”
 “Hai đường chéo của hình bình hành không cắt nhau ở trung điểm của mỗi đường”
 “Không phải hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau ở trung điểm của mỗi đường”
 “Nói hai đường chéo của hình bình hành cắt nhau ở trung điểm của mỗi đường là không đúng”

e = “Tứ giác ABCD có hai góc đối diện bằng nhau”

Sau đó tìm giá trị chân lí của nó trong trường hợp :

a, ABCD là hình bình hành

b, ABCD là hình thang

Hoạt động 1.4. Tìm hiểu phép tuyển

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1: Lập bảng chân lí của mệnh đề tuyển

Nhiệm vụ 2: Xây dựng hai ví dụ về phép tuyển

~ Trong số học

~ Trong hình học

~ Trong đời sống xã hội

Sau đó tìm giá trị chân lí của chúng

Đánh giá

1. Mệnh đề đúng ghi Đ, sai ghi S vào ô trống

a, “3 nhỏ hơn hoặc bằng 3”

b, “3 nhỏ hơn hoặc bằng 7”

c, “7 nhỏ hơn hoặc bằng 3”

d, “4 nhỏ hơn 2 hoặc 3”

e, “4 nhỏ hơn 2 hoặc nhỏ hơn 3”

2. Cho các mệnh đề

a = “44 chia hết cho 2”

b = “44 chia hết cho 3”

Hãy phát biểu thành lời các mệnh đề sau :

a, a b

b, a b

c, a b

d, a b

e, a b

f, a b

g, a b

h, a b

Sau đó tìm giá trị chân lí của chúng

3. Đánh dấu x vào ô trống, nếu là phép tuyển loại trừ

a, Nhà toán học Galoa chết năm 20 hoặc 21 tuổi

b, Tiểu sử của nhà toán học Galoa có thể tìm đọc trong báo “Toán học và tuổi trẻ” hoặc cuốn “Chuyện kể về các nhà toán học”

c, Số tự nhiên a chia hết cho 2 hoặc 3

d, Số tự nhiên a là số chẵn hoặc lẻ

e, Số tự nhiên a có tận cùng bằng 0 ; 2 ; 4 ; 6 hoặc 8

f, Số tự nhiên a chia hết cho 2 thì có tận cùng bằng 0 ; 2 ; 4 ; 6 hoặc 8

Hoạt động 1.5. Tìm hiểu phép kéo theo

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1: Lập bảng chân lí của mệnh đề kéo theo

Nhiệm vụ 2: Xây dựng hai ví dụ về phép kéo theo

~ Trong số học

~ Trong hình học

3. Cho biết $G(a \square b) = 1$, $G() = 0$

Tìm giá trị chân lí của ; a ; b

4. Cho biết $G() = 1$. Có thể nói gì về giá trị chân lí của , ,
và

Tiểu chủ đề 2.2.

Các bài toán về suy luận đơn giản

Thông tin cơ bản

Suy luận đơn giản là những phép suy luận không dùng những công cụ của logic mệnh đề (phép phủ định, phép hội, phép tuyển...). Các bài toán về suy luận đơn giản là những bài toán khi giải chỉ cần vận dụng những phép suy luận đơn giản. Khi giải các bài toán về suy luận đơn giản, đòi hỏi chúng ta phải biết vận dụng một cách sáng tạo những kiến thức toán học đơn giản, những hiểu biết về thiên nhiên, xã hội và phong tục tập quán trong đời sống sinh hoạt hàng ngày.

Dưới đây ta lần lượt nghiên cứu các phương pháp thường sử dụng khi giải các bài toán dạng này

2.1. Phương pháp lập bảng

Các bài toán giải bằng phương pháp lập bảng thường xuất hiện hai nhóm đối tượng (chẳng hạn tên người và nghề nghiệp, hoặc vận động viên và giải thưởng, hoặc tên sách và màu bìa...). Khi giải ta thiết lập một bảng gồm các hàng và các cột. Các cột ta liệt kê các đối tượng thuộc nhóm thứ nhất, còn các hàng ta liệt kê các đối tượng nhóm thứ hai.

Dựa vào điều kiện trong đề bài, ta loại bỏ dần (ghi số 0) các ô (là giao của mỗi hàng và mỗi cột). Những ô còn lại (không bị loại bỏ) là kết quả của bài toán.

Ví dụ 2.1 :

Ba người thợ hàn, thợ tiện và thợ điện đang ngồi trò chuyện trong giờ nghỉ giải lao.

Người thợ hàn nhận xét:

~ Ba chúng ta làm nghề trùng với tên của ba chúng ta, nhưng không ai làm nghề trùng với tên mình cả

~ Bác Điện hưởng ứng:

~ Bác nói đúng

Bạn hãy cho biết tên và nghề nghiệp của mỗi người

Giải Ta thiết lập bảng sau

Màu bìa \ Tên sách	Văn	Toán	Địa lý
xanh	X 1	2	0 3
đỏ	0 4	X 5	0 6
vàng	7	8	X 9

Theo đề bài, không ai có tên trùng với nghề của mình, cho nên ta ghi số 0 vào các ô 1 ; 5 và 9. Bác Điện hưởng ứng nhận xét của bác thợ hàn nên bác Điện không làm nghề hàn. Ta ghi số 0 vào ô số 7

- ~ Nhìn cột 2 ta thấy bác thợ hàn không tên là Hàn, không tên là Điện. Vậy bác thợ hàn tên là Tiện. Ta đánh dấu X vào ô số 4
 - ~ Nhìn hàng 4 ta thấy bác Điện không làm nghề hàn cũng không làm nghề điện. Vậy bác làm nghề tiện. Ta đánh dấu X vào ô số 8
 - ~ Nhìn hàng 2 và ô 8 ta thấy bác Hàn không làm nghề hàn, cũng không làm nghề tiện. Vậy bác làm nghề điện. Đánh dấu X vào ô số 3
- Kết luận: Bác Hàn làm thợ điện. Bác Tiện là thợ hàn. Bác Điện làm thợ tiện

Ví dụ 2.2 :

Trên bàn là ba cuốn sách giáo khoa: Văn, Toán và Địa lí được bọc ba màu khác nhau: xanh, đỏ, vàng. Cho biết cuốn bọc bìa màu đỏ đặt giữa hai cuốn Văn và Địa lí, cuốn Địa lí và cuốn màu xanh mua cùng một ngày. Bạn hãy xác định mỗi cuốn sách đã bọc bìa màu gì?

Giải: Ta có bảng sau

Màu bìa \ Tên sách	Văn	Toán	Địa lí
xanh	X 1	2	0 3
đỏ	0 4	X 5	0 6
vàng	7	8	X 9

Theo đề bài “cuốn bọc bìa màu đỏ đặt giữa hai cuốn Văn và Địa lí”. Vậy cuốn sách Văn và Địa lí đều không bọc màu đỏ cho nên cuốn Toán phải bọc màu đỏ. Ta ghi số 0 vào ô 4 và 6, đánh dấu X vào ô 5

Mặt khác, “cuốn Địa lí và cuốn bọc bìa màu xanh mua cùng ngày”. Điều đó có nghĩa là cuốn Địa lí không bọc màu xanh. Ta ghi số 0 vào ô 3

- ~ Nhìn cột thứ tư, ta thấy cuốn Địa lí không bọc màu xanh cũng không bọc màu đỏ. Vậy cuốn Địa lí bọc màu vàng. Ta đánh dấu X vào ô 9

- ~ Nhìn vào cột 2 và ô 9 ta thấy cuốn Văn không bọc màu đỏ, cũng không bọc màu vàng. Vậy cuốn Văn bọc màu xanh. Ta đánh dấu X vào ô 1

Kết luận : Cuốn Văn bọc màu xanh, cuốn Toán bọc màu đỏ, cuốn Địa lí bọc màu vàng

Ví dụ 2.3 :

Trên bàn có bốn hộp kín được đánh số thứ tự 1 ; 2 ; 3 và 4. Trong mỗi hộp đựng một trong bốn loại quả: đào, mận, bưởi hoặc cam. Ba bạn Lộc, Đạt và Thanh tham gia trò chơi như sau: Mỗi bạn lần lượt đoán trong mỗi hộp đựng quả gì, nếu ai đoán đúng ít nhất một hộp thì sẽ được phần thưởng.

Lộc đoán trước :

- ~ Hộp thứ nhất đựng cam, hộp thứ hai đựng mận, hộp thứ ba đựng bưởi và hộp thứ tư đựng đào

Đạt đoán tiếp :

- ~ Hộp thứ nhất đựng đào, hộp thứ hai đựng bưởi, hộp thứ ba đựng cam và hộp thứ tư đựng mận

Cuối cùng Thanh đoán

- ~ Hộp thứ nhất đựng mận, hộp thứ hai đựng cam, hộp thứ ba đựng đào và hộp thứ tư đựng bưởi

Kết thúc cuộc chơi, ban giám khảo công bố cả ba bạn đều không đạt phần thưởng

Bạn hãy cho biết trong mỗi hộp đựng quả gì?

Giải : ta thiết lập bảng và ghi vào bảng theo lập luận sau

Theo đề bài ta có:

– Lộc không được phần thưởng. Vậy hộp thứ nhất không đựng cam, hộp thứ hai không đựng mận, hộp thứ ba không đựng bưởi và hộp thứ tư không đựng đào. Ta ghi số 0 vào các ô 4 ; 6 ; 11 và 13

– Đạt không được phần thưởng. Vậy hộp thứ nhất không đựng đào, hộp thứ hai không đựng bưởi, hộp thứ ba không đựng cam và hộp thứ tư không đựng mận. Ta ghi tiếp số 0 vào các ô 1 ; 7 ; 12 và 14

– Thanh cũng không được phần thưởng, cũng lập luận như trên rồi ta ghi tiếp số 0 vào các ô 2; 8 ; 9 và 15

Hộp \ Quả	đào	mận	b-ởi	cam
1	0	0	X	0
	1	2	3	4
2	X	0	0	0
	5	6	7	8
3	0	X	0	0
	9	10	11	12
4	0	0	0	X
	13	14	15	16

Nhìn hàng thứ hai ta thấy hộp thứ nhất không đựng đào, không đựng mận, cũng không đựng cam. Vậy nó đựng bưởi. Ta đánh dấu X vào ô 3

Tương tự ta được : hộp thứ hai đựng đào (đánh dấu X vào ô 5), hộp thứ ba đựng mận (đánh dấu X vào ô 10) và hộp thứ tư đựng cam (đánh dấu X vào ô 16)

Ví dụ 2.4 :

Giờ Văn cô giáo trả bài kiểm tra. Bốn bạn Tuấn, Hùng, Lan, Quân ngồi cùng bàn đều đạt điểm 8 trở lên. Giờ ra chơi Phương hỏi điểm của bốn bạn. Tuấn trả lời:

~ Lan không đạt điểm 10, mình và Quân không đạt điểm 9 còn Hùng không đạt điểm 8

Hùng thì nói :

~ Mình không đạt điểm 10, Lan không đạt điểm 9 còn Tuấn và Quân đều không đạt điểm 8

Bạn hãy cho biết mỗi người đã đạt điểm mấy?

Giải: Ta lập bảng và ghi bảng theo lập luận ở dưới

Điểm \ Tên	Tuấn	Hùng	Lan	Quân
10	X	0	0	X
	1	2	3	4
9	0	X	0	0
	5	6	7	8
8	0	0	X	0
	9	10	11	12

Theo Tuấn ta ghi số 0 vào các ô 3 ; 5 ; 8 và 10

Theo Hùng ta ghi số 0 vào các ô 2 ; 7 ; 9 và 12

Vì bốn bạn đều đạt điểm 8 trở lên, nên nhìn vào cột 2, ta kết luận Tuấn đạt điểm 10. Tương tự với các cột 3 ; 4 và 5 ta kết luận Hùng đạt điểm 9, Lan đạt điểm 8 còn Quân điểm 10

Ví dụ 2.5 :

Năm người thợ tên là Da, Điện, Hàn, Tiện và Sơn làm năm nghề khác nhau trùng với tên của năm người đó, nhưng không ai có tên trùng với nghề của mình. Bác thợ da lấy em gái của bác Da. Tên của bác thợ da trùng với nghề của anh vợ mình và vợ bác chỉ có hai anh em. Bác Tiện không làm thợ sơn mà lại là em rể của bác thợ hàn. Bác thợ sơn và bác Da là hai anh em cùng họ

Bạn hãy cho biết bác Da và bác Tiện làm nghề gì

Tên người \ Nghề nghiệp	Da	Điện	Hàn	Tiện	Sơn
da	0	2	3	0	5
điện	0	0	8	X	10
hàn	X	12	13	0	15
tiện	16	17	18	0	20
sơn	0	22	23	0	0
	21	22	23	24	25

Vì không ai làm nghề trùng với tên của mình nên ta ghi số 0 vào các ô 1; 7 ; 13 ; 19 và 25

Bác Tiện không làm thợ sơn nên ta ghi số 0 vào ô 24. Mặt khác bác Tiện làm em rể của bác thợ hàn nên bác Tiện không phải là thợ hàn. Ta ghi số 0 vào ô 14. Nhìn cột 5 ta thấy bác Tiện chỉ có thể là thợ da hoặc thợ điện

Nếu bác Tiện là thợ da thì theo đề bài, bác Da là thợ tiện. Như vậy bác Tiện vừa là em rể của bác thợ tiện vừa là em rể của bác thợ hàn, mà vợ bác Tiện chỉ có hai anh em. Điều này vô lí.

Vậy bác Tiện là thợ điện. Ta ghi số 0 vào ô 4 và dấu X vào ô 9

Bác Tiện là thợ điện nên bác Da không phải là thợ điện. Ta ghi số 0 vào ô 6. Bác thợ sơn và bác Da là hai anh em cùng họ nên bác Da không là thợ sơn. Ta ghi số 0 vào ô 21

Theo lập luận phân trên thì bác Da không phải là thợ tiện. Vậy bác Da là thợ hàn. Ta đánh dấu X vào ô 11

2.2. Phương pháp suy luận đơn giản

Suy luận đơn giản là phép suy luận không dùng công cụ của logic mệnh đề. Dưới đây ta xét một số ví dụ minh họa cho phương pháp giải này

Ví dụ 2.6 :

Một viên quan nước Lỗ đi sứ sang Tề, bị vua Tề xử phạt tội chết và bị hành quyết: hoặc chém đầu hoặc treo cổ. Trước khi hành quyết nhà vua cho sứ giả được nói một câu và giao hẹn nếu nói đúng thì chém đầu, nếu nói sai thì treo cổ. Sứ giả mỉm cười và nói một câu mà nhờ đó đã thoát chết

Bạn hãy cho biết câu nói đó của sứ giả như thế nào?

Phân tích : Điều kiện của nhà vua đặt ra là nếu nói đúng thì chém đầu, nếu nói sai thì treo cổ. Vì nhà vua cho rằng một câu nói chỉ có thể đúng hoặc sai, như thế vị sứ giả chắc chắn sẽ bị chết. Nhưng nhà vua không tính đến khả năng vị sứ giả sẽ nghĩ ra câu nói mà đem chém đầu thì sứ giả nói sai (cho nên sứ giả không bị chém đầu) còn nếu đem treo cổ thì sứ giả nói đúng (nên không bị treo cổ). Câu nói đó là : “Tôi sẽ bị treo cổ”

Giải : Câu nói của sứ giả là: “Tôi sẽ bị treo cổ”

~ Nếu nhà vua đem sứ giả đi chém đầu thì sứ giả nói sai. Mà nói sai thì phải xử treo cổ chứ không thể chém đầu sứ giả

~ Nếu nhà vua đem treo cổ sứ giả thì sứ giả nói đúng. Mà nói đúng thì phải đem chém đầu chứ không thể treo cổ

Sứ giả không bị chém đầu, không bị treo cổ cho nên đã thoát chết

Ví dụ 2.7 :

Người ta đồn rằng ở một ngôi đền nọ rất thiêng do ba vị thần ngự trị: thần Thật Thà (luôn luôn nói thật), thần Dối Trá (luôn luôn nói dối) và thần Khôn Ngoan (khi nói thật, khi nói dối). Các vị thần đều ngự ở trên bệ thờ và sẵn sàng trả lời câu hỏi khi có người thỉnh cầu. Nhưng vì hình dạng của ba vị thần giống hệt nhau nên người ta không biết vị thần nào để tin hay không tin

Một hôm, một học giả từ phương xa đến ngôi đền gặp các thần để xin lời thỉnh cầu.

Bước vào đền, học giả hỏi thần ngồi bên phải :

~ Ai ngồi cạnh ngài?

~ Đó là thần Dối Trá

~ Tiếp đó hỏi thần ngồi giữa

~ Ngài là thần gì?

~ Tôi là thần Khôn Ngoan

~ Cuối cùng ông ta quay sang hỏi thần ngồi bên trái

~ Ai ngồi cạnh ngài?

~ Đó là thần Thật Thà

Nghe xong học giả khẳng định được mỗi vị là thần gì. Bạn hãy cho biết học giả đó đã suy luận như thế nào?

Phân tích

Ta nhận xét, cả ba câu hỏi của vị học giả đều nhằm xác định một thông tin là thần ngồi giữa là thần gì? Kết quả nhận được các câu trả lời như sau

Thần bên phải : Đó là thần Dối Trá

Thần ở giữa : Tôi là thần Khôn Ngoan

Thần bên trái : Đó là thần Thật Thà

Dựa vào các câu trả lời, vị học giả trước hết đã suy luận để xác định ai là thần Thật Thà. Tiếp theo dựa vào câu trả lời của vị thần Thật Thà thì xác định được vị thần thứ hai, rồi thứ ba

Ngoài ra còn có thể giải bằng cách khác: suy luận để xác định ai là thần Dối Trá (hoặc Khôn Ngoan) trước, sau đó xác định hai vị thần còn lại

Giải

Cách 1 : Ta nhận xét

~ Thần ngồi bên trái không phải là thần Thật Thà, vì ngài nói thần ngồi giữa là thần Thật Thà

~ Thần ngồi giữa cũng không phải là thần Thật Thà, vì ngài nói: “Tôi là thần Khôn Ngoan.”

Vậy thần ngồi bên phải là thần Thật Thà. Theo câu trả lời của ngài thì ngồi giữa là thần Dối Trá. Cuối cùng, thần bên trái là thần Khôn Ngoan

Cách 2 : Ta nhận xét:

~ Nếu thần ngồi bên trái là thần Dối Trá thì thần bên phải là thần Thật Thà hoặc Khôn Ngoan. Nếu ngồi bên phải là thần Thật Thà thì ngồi giữa là thần Dối Trá. Điều ngài vô lí, vì bên trái cũng là thần Dối Trá. Nên bên phải là thần Khôn Ngoan thì ngồi giữa là thần Thật Thà. Điều này vô lí, vì ngài nói : “Tôi là thần Khôn Ngoan”

Vậy bên trái không phải là thần Dối Trá

~ Nếu bên phải là thần Dối Trá thì ngồi giữa là thần Thật Thà hoặc Khôn Ngoan.

Nhưng ngài không phải là thần Thật Thà, vì ngài nói: “Tôi là thần Khôn Ngoan”.

Nếu ngồi giữa là thần Khôn Ngoan thì bên trái là thần Thật Thà. Điều này vô lí, vì ngài nói: “Ngồi giữa là thần Thật Thà”

Vậy bên phải cũng không phải là thần Dối Trá. Vậy, ta suy ra ngồi giữa là thần Dối Trá. Như vậy bên trái không phải là thần Thật Thà, vì ngài nói: “Ngồi giữa là thần Thật Thà”. Thế thì bên trái là thần Khôn Ngoan. Cuối cùng, bên phải là thần Thật Thà.

Cách 3: Tương tự, ta có thể suy luận để xác định ai là thần Khôn Ngoan trước. Sau đó xác định hai vị thần còn lại

Ví dụ 2.8 :

ở một xã X có hai làng : dân làng A chuyên nói thật, còn dân làng B chuyên nói dối. Dân hai làng thường qua lại thăm nhau. Một chàng thanh niên nọ về thăm bạn ở làng A. Vừa bước vào xã X, đang ngỡ ngác chưa biết đây là làng nào, chàng thanh niên gặp ngay một cô gái và anh ta hỏi người này một câu. Sau khi nghe trả lời chàng thanh niên bèn quay ra (vì biết chắc mình đang ở làng B) và sang tìm bạn ở làng bên cạnh.

Bạn hãy cho biết câu hỏi đó thế nào và câu trả lời đó ra sao mà chàng thanh niên lại khẳng định chắc chắn như vậy

Phân tích: Để nghe xong câu trả lời người thanh niên đó có thể khẳng định được mình đang đứng trong làng A hay làng B thì anh ta phải nghĩ ra một câu hỏi sao cho câu trả lời của cô gái chỉ phụ thuộc vào họ đang đứng trong làng nào mà không phụ thuộc cô gái ấy là người làng nào. Cụ thể hơn : cần đặt câu hỏi để cô gái trả lời là “phải”, nếu họ đang đứng trong làng A và “không phải”, nếu họ đang đứng trong làng B

Giải: Câu hỏi của người thanh niên đó là : “Có phải chị là người làng này không?”

Trường hợp 1 : Họ đang đứng trong làng A : nếu cô gái là người làng A thì câu trả lời là :”Phải”; nếu cô gái là người làng B thì câu trả lời cũng là “Phải” (vì dân làng B chuyên nói dối)

Trường hợp 2 : Họ đang đứng ở trong làng B. Nếu cô gái là người làng A thì câu trả lời là: “Không phải”; nếu cô gái là người làng B thì câu trả lời cũng là : “Không phải”

Như vậy, nếu họ đang đứng trong làng A thì câu trả lời chỉ có thể là “Phải”, còn nếu họ đang đứng trong làng B thì câu trả lời chỉ có thể là “Không phải”

Người thanh niên quyết định quay ra, vì anh đã nghe câu trả lời là “Không phải”

Ví dụ 2.9 :

Một hôm anh Quang lấy quyển album ra giới thiệu với mọi người. Cường chỉ vào người đàn ông trong ảnh và hỏi anh Quang : “Người đàn ông này có quan hệ thế nào với anh?” Anh Quang bèn trả lời : “Bà nội của chị gái vợ anh ấy là chị gái của bà nội vợ tôi”

Bạn hãy cho biết anh Quang và người đàn ông ấy quan hệ với nhau thế nào?

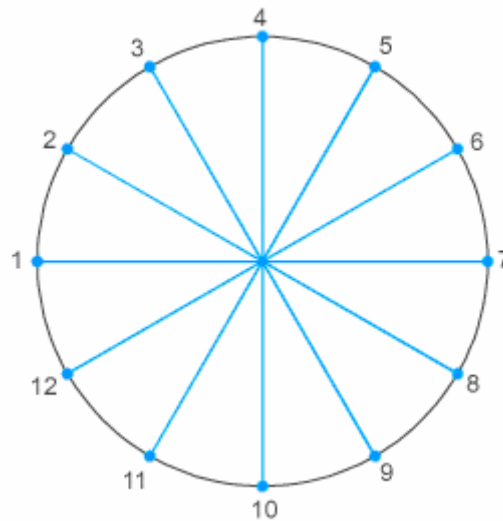
Giải : Bà nội của chị gái vợ anh ấy cũng chính là bà nội của vợ anh ấy. Bà nội của vợ anh ấy là chị gái của bà nội vợ anh Quang. Vậy vợ anh ấy và vợ anh Quang là hai chị em con dì con già. Suy ra anh Quang và người đàn ông ấy là hai anh em rể họ

Ví dụ 2.10 :

Trong giờ ngoại khóa, thầy giáo gọi 6 em nam và 6 em nữ ra sân và giao cho lớp trưởng nhiệm vụ tập hợp các bạn đứng thành vòng tròn sao cho không có hai bạn nữ nào đứng cạnh nhau và đối diện với một bạn nữ qua tâm vòng tròn là một bạn nam. Suy nghĩ một lát, lớp trưởng trả lời: “Thưa thầy, không thể xếp được như vậy!”. Bạn lớp phó học tập tiếp luôn: “Nhưng nếu bớt đi một bạn nam và một bạn nữ hoặc thêm một bạn nam và một bạn nữ thì xếp được thưa thầy!”

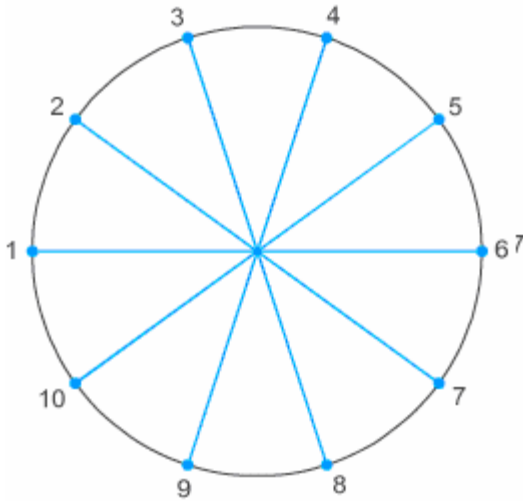
Bạn hãy cho biết hai bạn nói đúng hay sai, giải thích tại sao?

Giải : Ta chia đường tròn thành 12 phần đều nhau như hình vẽ. Ta đánh số các điểm chia theo thứ tự từ 1 đến 12



Để hai bạn nữ không đứng cạnh nhau thì ta phải xếp các bạn nữ vào đứng ở các điểm ghi số lẻ, các bạn nam đứng ở các điểm ghi số chẵn (hoặc ngược lại)

Nhìn trên hình vẽ ta thấy đối diện với một bạn mang số lẻ qua tâm đường tròn cũng là một bạn mang số chẵn và đối diện với một bạn mang số chẵn qua tâm đường tròn là một bạn mang số lẻ. Như vậy đối diện với một bạn nữ qua tâm đường tròn là một bạn nữ (chứ không thể là bạn nam)



Giả sử bớt đi một bạn nam và một bạn nữ

Ta chia vòng tròn thành 10 phần bằng nhau như hình vẽ. Ta đánh số các điểm chia theo thứ tự từ 1 đến 10. Ta xếp các bạn nữ vào các điểm chia mang số lẻ và các bạn nam vào các điểm chia mang số chẵn (hoặc ngược lại). Nhìn trên hình vẽ ta thấy đối diện với một bạn mang số lẻ trên đường tròn là một bạn mang số chẵn. Như vậy đối diện với một bạn nữ qua tâm vòng tròn là một bạn nam và không có hai bạn nữ nào đứng cạnh nhau

Tương tự trường hợp thêm một nam và một nữ

Vậy hai bạn đã nói đúng

Ví dụ 2.11 :

Một đoàn du khách trên đường đi thăm rừng Cúc Phương. Đến một ngã ba đường họ đang không biết rẽ lối nào thì nhìn thấy hai chú bé đang chặn trâu bên cạnh đường. Họ được nghe mọi người lưu ý từ trước rằng, trong hai cậu có một cậu chuyên nói thật còn cậu thứ hai chuyên nói dối. Khi được hỏi, các cậu chỉ trả lời: “Đúng” hoặc “Không”. Nhưng mọi người không biết cậu nào nói thật còn cậu nào nói dối.

a, Một người lại gần và đặt hai câu hỏi cho một trong hai cậu bé. Sau khi nghe trả lời ông ta xác định được đường nào đi rừng Cúc Phương

b, Lát sau, một cô gái khác chỉ hỏi một trong hai cậu bé một câu. Sau khi nghe trả lời cô cũng biết lối nào đi rừng Cúc Phương

Bạn hãy cho biết các câu hỏi đó thế nào?

Phân tích :

a, Để bằng hai câu hỏi cho một cậu bé người đó xác định được lối nào đi rừng Cúc Phương thì người đó dùng câu hỏi thứ nhất để xác định em đó là nói thật hay nói dối. Dựa vào đó dùng câu hỏi thứ hai để xác định lối nào đi rừng Cúc Phương

b, Để bằng một câu hỏi cho một cậu bé, cô gái xác định được lối nào đi rừng Cúc Phương thì câu hỏi về một trong hai con đường có đi rừng Cúc Phương hay không và câu trả lời nhận được không phụ thuộc vào cậu bé đó nói thật hay nói dối

Giải :

a, Trước hết người đó chỉ vào con trâu và hỏi một trong hai cậu bé: “Đây là con trâu có phải không?”

Trường hợp 1 : Cậu bé trả lời “Đúng” thì cậu nói thật. Khi đó du khách chỉ vào một trong hai con đường và hỏi tiếp : “Có phải lối này đi rừng Cúc Phương hay không?”. Nếu cậu bé trả lời là “Đúng” thì lối đó đi rừng Cúc Phương, nếu cậu bé trả lời là “Không” thì lối thứ hai đi rừng Cúc Phương

Trường hợp 2 : Cậu bé trả lời là “Không” thì cậu đó nói dối. Sau đó đặt tiếp câu hỏi như trên. Trong trường hợp này, nếu cậu bé trả lời là “Đúng” thì lối thứ hai đi rừng Cúc Phương và ngược lại

b, Cô gái chỉ vào một con đường và hỏi một trong hai cậu bé: “Nếu tôi hỏi bạn cậu lối này có đi rừng Cúc Phương không thì bạn cậu trả lời thế nào?”

Trường hợp 1 : Lối đó đi rừng Cúc Phương. Nếu cậu bé được hỏi là người nói thật (cậu thứ hai là người nói dối) thì cậu trả lời là “Không”. Nếu cậu bé được hỏi là người nói dối (cậu thứ hai là người nói thật) thì cậu trả lời cũng là “Không”

Trường hợp 2 : Lối đó không đi rừng Cúc Phương. Lập luận như trong trường hợp 1 ta nhận được câu trả lời luôn là “Đúng” (cho dù cậu bé được hỏi là người nói thật hay nói dối)

Qua phân tích trên đây ta thấy : nếu câu trả lời luôn là “Không” thì lối đó đi rừng Cúc Phương. Ngược lại, nếu câu trả lời là “Đúng” thì lối đó không đi rừng Cúc Phương.

2.3. Phương pháp lựa chọn tình huống

Ví dụ 2.12:

Tổ Toán của một trường trung học phổ thông có năm người : thầy Hùng, thầy Quân, cô Vân, cô Hạnh và cô Cúc. Kỳ nghỉ hè cả tổ được hai phiếu đi nghỉ mát. Mọi người đều nhường nhau, thầy hiệu trưởng đề nghị mỗi người đề xuất một ý kiến. Kết quả như sau:

1. Thầy Hùng và thầy Quân đi.
2. Thầy Hùng và cô Vân đi.
3. Thầy Quân và cô Hạnh đi
4. Cô Cúc và cô Hạnh đi
5. Thầy Hùng và cô Hạnh đi

Cuối cùng thầy hiệu trưởng quyết định chọn đề nghị của cô Cúc, vì theo đề nghị đó thì mỗi đề nghị đều thoả mãn một phần và bác bỏ một phần

Bạn hãy cho biết ai đã đi nghỉ mát trong kì nghỉ hè đó?

Phân tích : Để chọn được đề nghị thoả mãn yêu cầu của đề bài ta lần lượt xét đề nghị của từng người. Sẽ có hai khả năng xảy ra

~ Có một trong bốn đề nghị còn lại bác bỏ hoàn toàn. Trường hợp này ta loại bỏ đề nghị đó

~ Không có đề nghị nào trong bốn đề nghị còn lại bị bác bỏ hoàn toàn. Trường hợp này ta chọn đề nghị đó

Giải: Ta nhận xét

~ Nếu chọn đề nghị thứ nhất thì đề nghị thứ tư bị bác bỏ hoàn toàn. Vậy không thể chọn đề nghị thứ nhất và thứ tư

~ Nếu chọn đề nghị thứ hai thì đề nghị thứ ba bị bác bỏ hoàn toàn. Vậy không thể chọn đề nghị thứ hai và thứ ba

~ Nếu chọn đề nghị thứ năm thì mỗi đề nghị trong bốn đề nghị còn lại đều thoả mãn một phần và bác bỏ một phần

Vậy kì nghỉ hè năm đó thầy Hùng và cô Hạnh đi nghỉ mát

Ví dụ 2.13 :

Sau giờ tập luyện buổi sáng đội tuyển thể thao rủ nhau vào quán ăn trưa. Thực đơn của quán có tám món: gà luộc, nem rán, chim quay, đậu rán, bò xào, cá rán, ốc xào măng và canh chua. Toàn đội thống nhất sẽ gọi ba món trong thực đơn cho bữa ăn.

Nguyên vọng của các cầu thủ chia ra thành năm nhóm như sau

Nhóm 1 : Gà luộc, nem rán và chim quay

Nhóm 2 : Đậu rán, bò xào và cá rán

Nhóm 3 : Bò xào, cá rán và ốc xào măng

Nhóm 4 : Nem rán, ốc xào măng và canh chua

Nhóm 5 : Gà luộc, bò xào và canh chua

Cuối cùng toàn đội đồng ý với thực đơn của đội trưởng đã chọn, vì theo thực đơn đó mỗi nhóm đều có ít nhất một món mà mình ưa thích

Hỏi toàn đội hôm đó đã ăn những món gì?

Giải : Ta nhận xét

~ Nếu chọn thực đơn của nhóm một thì cả nhóm hai và ba đều không có món nào mà mình ưa thích. Vậy không thể chọn thực đơn của ba nhóm đầu

~ Nếu chọn thực đơn của nhóm bốn thì nhóm hai không có món nào mà mình ưa thích. Vậy không thể chọn thực đơn của nhóm bốn

~ Nếu chọn thực đơn của nhóm năm thì mỗi nhóm trong bốn nhóm còn lại đều có ít nhất một món mà mình ưa thích

Vậy bữa trưa hôm đó toàn đội đã chọn thực đơn gồm ba món: gà luộc, bò xào và canh chua

Ví dụ 2.14 :

Năm bạn Anh, Bình, Cúc, Doan, An quê ở năm tỉnh: Bắc Ninh, Hà Tây, Cần Thơ, Nghệ An, Tiền Giang. Khi được hỏi quê ở tỉnh nào, các bạn trả lời như sau:

Anh : Tôi quê ở Bắc Ninh, còn Doan ở Nghệ An

Bình : Tôi cũng quê ở Bắc Ninh, còn Cúc ở Tiền Giang

Cúc : Tôi cũng quê ở Bắc Ninh, còn Doan ở Hà Tây

Doan : Tôi quê ở Cần Thơ, còn Anh ở Hà Tây

Nếu không bạn nào trả lời sai hoàn toàn thì quê của mỗi bạn ở tỉnh nào?

Phân tích

~ Trước hết ta cần hiểu “không bạn nào trả lời sai hoàn toàn” nghĩa là gì?

Mỗi câu trả lời đều nói về quê quán của hai người. Nếu câu trả lời sai hoàn toàn thì có nghĩa là quê của cả hai người đó đều không ở hai tỉnh đó. Vậy câu trả lời không sai hoàn toàn có nghĩa là một trong hai người hoặc cả hai người có quê ở hai tỉnh đó. Chẳng hạn, câu trả lời của Anh không sai hoàn toàn, có nghĩa là: hoặc Anh quê ở Bắc Ninh còn quê của Doan không ở Nghệ An hoặc quê của Anh không ở Bắc Ninh còn Doan quê ở Nghệ An hoặc Anh quê ở Bắc Ninh và Doan quê ở Nghệ An

~ Để xác định quê quán của mỗi bạn, ta lần lượt xét câu trả lời của mỗi người. Mỗi câu trả lời nói về quê quán của hai người. Ta lần lượt xét các trường hợp sau
+ Quê của người thứ nhất trong câu trả lời là đúng. Bằng suy luận ta xét các câu trả lời của bốn người còn lại. Nếu không có câu nào sai hoàn toàn thì ta xác định được quê của người đó. Tiếp đó ta xác định quê của bốn người còn lại. Nếu có một câu trả lời (trong bốn câu còn lại) bị sai hoàn toàn thì quê của người thứ nhất trong câu trả lời không ở tỉnh đó. Vậy quê của người thứ hai trong câu trả lời là đúng. Tiếp đó ta tìm quê của bốn người còn lại

+ Quê của người thứ nhất trong câu trả lời là sai. Vậy quê của người thứ hai trong câu trả lời là đúng. Ta xác định được quê của người này. Tiếp đó ta xác định quê của bốn người còn lại

Giải : Giả sử Anh quê ở Bắc Ninh thế thì quê của Bình và Cúc đều không ở Bắc Ninh. Vậy theo Bình thì Cúc quê ở Tiền Giang và theo Cúc thì Doan quê ở Hà Tây. Vì Anh quê ở Bắc Ninh nên quê của Anh không ở Hà Tây. Vậy theo An thì An quê ở Cần Thơ. Cuối cùng còn Bình quê ở Nghệ An (vì bốn bạn kia quê ở bốn tỉnh còn lại rồi)

Ví dụ 2.15 :

Cúp Tiger 98 có 4 đội lọt vào vòng bán kết: Việt nam, Singapor, Thái Lan và Indônêxia. Trước khi vào đấu vòng bán kết ba bạn Dũng, Quang, Tuấn dự đoán như sau:

Dũng : Singapor nhì, còn Thái Lan ba

Quang : Việt Nam nhì, còn Thái Lan thứ tư

Tuấn : Singapor nhất và Indônêxia nhì

Kết quả mỗi bạn dự đoán đúng một đội và sai một đội

Hỏi mỗi đội đã đạt giải mấy?

Giải :

~ Nếu Singapor đạt giải nhì thì Singapor không đạt giải nhất. Vậy (theo Tuấn) thì Indônêxia đạt giải nhì. Điều này vô lí vì có hai đội đều đạt giải nhì

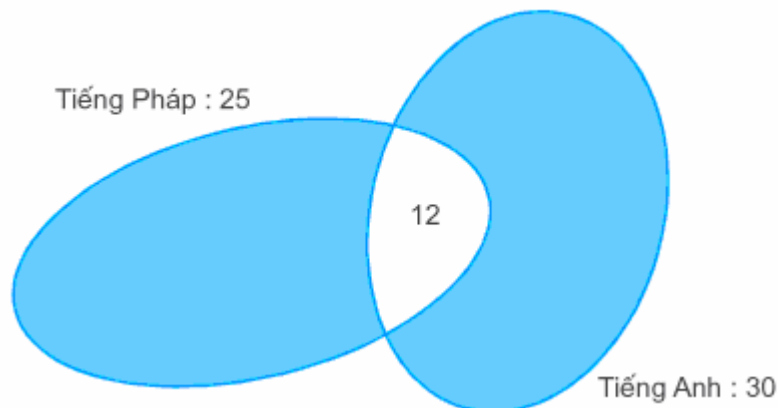
~ Nếu Singapor không đạt giải nhì thì theo Dũng, Thái Lan đạt giải ba. Như vậy, Thái Lan không đạt giải tư. Theo Quang, Việt Nam đạt giải nhì. Thế thì Indônêxia không đạt giải nhì. Vậy theo Tuấn, Singapor đạt giải nhất, cuối cùng còn đội Indônêxia đạt giải tư

Kết luận : Thứ tự giải của các đội trong Cúp Tiger 98 là :

Nhất : Singapor Nhì : Việt Nam Ba : Thái Lan Tư : Indônêxia

2.4. Phương pháp biểu đồ Ven

Trong khi giải một số bài toán, người ta thường dùng những đường cong kín để mô tả mối quan hệ giữa các đại lượng trong bài toán. Nhờ sự mô tả này ta đi đến lời giải một cách tường minh và thuận lợi. Những đường cong như thế ta sẽ gọi là Biểu đồ ven. Phương pháp giải dùng biểu đồ Ven ta gọi là phương pháp biểu đồ Ven.



Ví dụ 2.16 :

Để phục vụ cho hội nghị quốc tế, Ban tổ chức đã huy động 30 cán bộ phiên dịch tiếng Anh và 25 cán bộ phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 12 cán bộ phiên dịch được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp. Hỏi :

a) Ban tổ chức đã huy động tất cả bao nhiêu cán bộ phiên dịch cho hội nghị đó?

b) Có bao nhiêu cán bộ chỉ dịch được tiếng Anh? Chỉ dịch được tiếng Pháp?

Giải : Số lượng cán bộ phiên dịch được Ban tổ chức huy động cho hội nghị có thể mô tả bởi biểu đồ Ven ở hình 3.

Nhìn vào sơ đồ ta có :

Số cán bộ chỉ phiên dịch được tiếng Anh là :

$$30 - 12 = 18 \text{ (người).}$$

Số cán bộ chỉ phiên dịch được tiếng Pháp là :

$$25 - 12 = 13 \text{ (người).}$$

Số cán bộ phiên dịch được Ban tổ chức huy động cho hội nghị là :

$$30 + 13 = 43 \text{ (người).}$$

Trả lời : Ban tổ chức đã huy động tất cả 43 cán bộ phiên dịch cho hội nghị, trong đó có 18 người chỉ dịch được tiếng Anh và 13 người chỉ dịch được tiếng Pháp.

Ví dụ 2.17 :

Có bao nhiêu số có ba chữ số là số chẵn hoặc chia hết cho 3 ?

Giải : Số các số chẵn có ba chữ số là :

$$(998 - 100) : 2 + 1 = 450 \text{ (số).}$$

Số các số có ba chữ số chia hết cho 3 là :

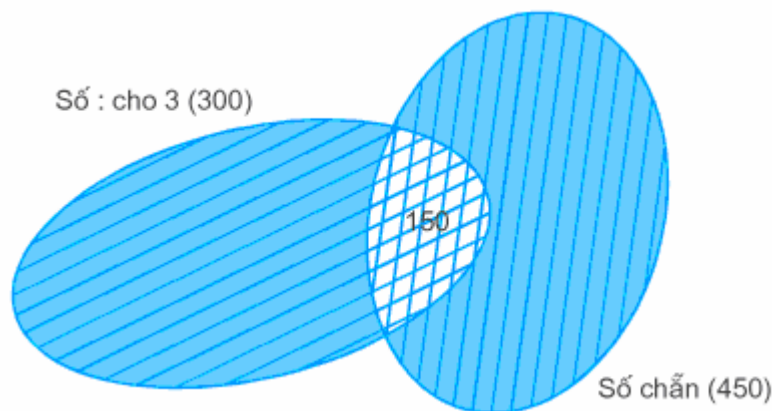
$$(999 - 102) : 3 + 1 = 300 \text{ (số).}$$

Dãy các số chia hết cho 3 có ba chữ số là :

$$102, 105, 108, 111, \dots, 996, 999.$$

Trong dãy trên có một nửa là số lẻ, một nửa là số chẵn. Vậy có 150 số có ba chữ số chia hết cho 3 là số chẵn.

Bây giờ ta mô tả bài toán bằng biểu đồ Ven như hình 4.



Nhìn vào sơ đồ ta có:

Số các số chẵn có ba chữ số không chia hết cho 3 là:

$$450 - 150 = 300 \text{ (số).}$$

Số các số có ba chữ số là số chẵn hoặc chia hết cho 3 là:

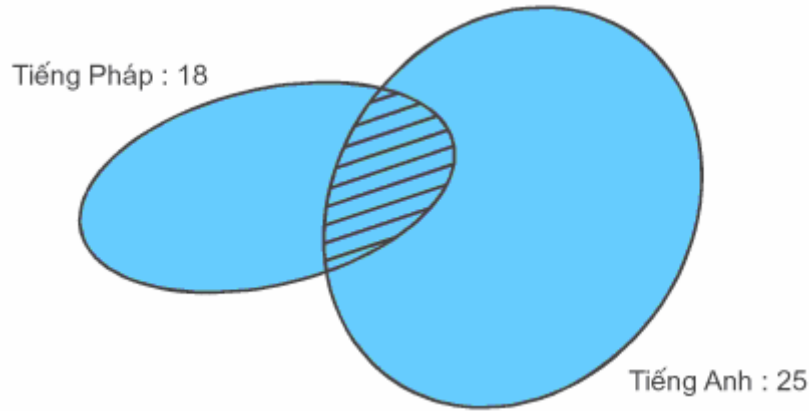
$$300 + 300 = 600 \text{ (số).}$$

Trả lời : Có tất cả 600 số là số chẵn hoặc chia hết cho 3.

Ví dụ 2.18 :

Lớp 9A có 30 em tham gia dạ hội tiếng Anh và tiếng Trung, trong đó có 25 em nói được tiếng Anh và 18 em nói được tiếng Trung. Hỏi có bao nhiêu bạn nói được cả hai thứ tiếng ?

Giải : Các em học sinh lớp 9A tham gia dạ hội có thể được mô tả bằng biểu đồ Ven ở hình 5.



Số học sinh chỉ nói được tiếng Trung là :

$$30 - 25 = 5 \text{ (em).}$$

Số học sinh chỉ nói được tiếng Anh là :

$$30 - 18 = 12 \text{ (em).}$$

Số em nói được cả hai thứ tiếng là:

$$30 - (5 + 12) = 13 \text{ (em).}$$

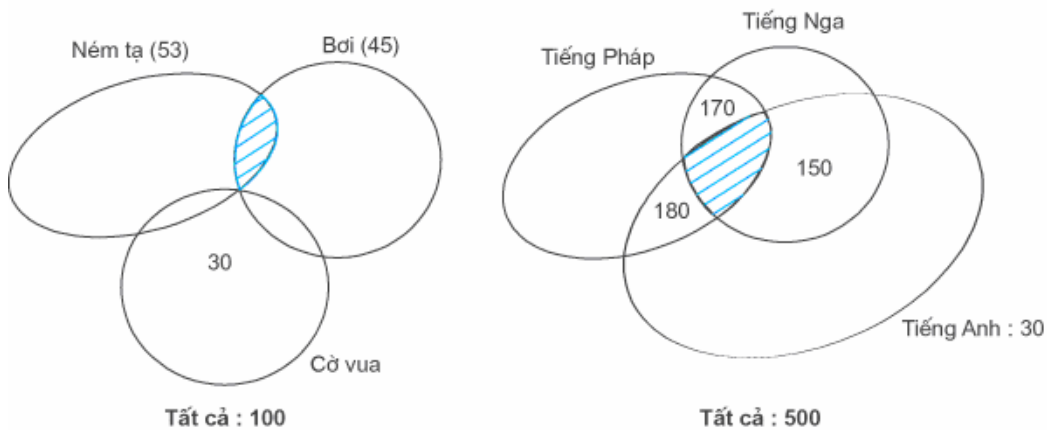
Trả lời: Có 13 em nói được cả tiếng Anh và tiếng Trung.

Ví dụ 2.19 :

Trong hội khoẻ Phù Đổng có 100 vận động viên đăng kí dự thi. Mỗi vận động viên được đăng kí dự thi một hoặc hai trong ba môn: ném tạ, bơi lội hoặc đấu cờ vua. Kết quả có 30 vận động viên chỉ thi đấu cờ vua, 53 người đăng kí thi ném tạ và 45 người đăng kí thi bơi.

Hỏi có bao nhiêu người đăng kí thi đấu cả hai môn: ném tạ và bơi lội?

Giải: Các vận động viên đăng kí thi đấu có thể được mô tả bởi hình 6.



Số vận động viên đăng kí thi ném tạ hoặc bơi lội là:

$$100 - 30 = 70 \text{ (người)}$$

Số vận động viên đăng kí cả hai môn ném tạ và bơi lội là:

$$(45 + 53) - 70 = 28 \text{ (người).}$$

Trả lời: Có 28 vận động viên đăng kí thi đấu cả hai môn ném tạ và bơi lội.

Ví dụ 2.20 :

Trong một hội nghị có 500 đại biểu tham dự, mỗi đại biểu có thể sử dụng một trong ba thứ tiếng : Nga, Anh, hoặc Pháp. Theo thống kê của Ban tổ chức, có 60 đại biểu chỉ nói được một trong ba thứ tiếng, 180 đại biểu chỉ nói được hai thứ tiếng Anh và Pháp, 150 đại biểu nói được cả tiếng Anh và tiếng Nga, 170 đại biểu nói được cả tiếng Nga và tiếng Pháp.

Hỏi có bao nhiêu đại biểu nói được cả ba thứ tiếng?

Giải : Số đại biểu nói được cả hai thứ tiếng Nga và Pháp hoặc Nga và Anh là:

$$500 - (60 + 180) = 260 \text{ (người)}$$

Số đại biểu nói được cả ba thứ tiếng là :

$$(170 + 150) - 260 = 60 \text{ (người).}$$

Trả lời: Có 60 đại biểu nói được cả ba thứ tiếng.

Ví dụ 2.21 :

Hai trăm học sinh trường phổ thông chuyên ngữ tham gia dạ hội tiếng Nga, tiếng Trung và tiếng Anh. Có 60 bạn chỉ nói được tiếng Anh, 80 bạn nói được tiếng Nga và 90 bạn nói được tiếng Trung và 20 bạn chỉ nói được hai thứ tiếng Nga và Trung.

Hỏi có bao nhiêu bạn nói được cả ba thứ tiếng ?

Giải : Số học sinh nói được tiếng Nga hoặc tiếng Trung là :

$$200 - 60 = 140 \text{ (bạn).}$$

Số học sinh nói được cả hai thứ tiếng Nga và Trung là :

$$(90 + 80) - 140 = 30 \text{ (bạn).}$$

Số học sinh nói được cả ba thứ tiếng là :

$$30 - 20 = 10 \text{ (bạn).}$$

Trả lời : Có 10 bạn nói được cả ba thứ tiếng.

Hoạt động

Sinh viên tự đọc thông tin cơ bản ở nhà sau đó thực hiện các nhiệm vụ nêu trong các hoạt động 2.1 đến 2.4 dưới đây. Trên lớp đại diện sinh viên sẽ trình bày minh họa kết quả thực hiện dưới sự tổ chức của giáo viên.

Hoạt động 2.1. Thực hành giải toán bằng phương pháp lập bảng

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1: Trình bày khái niệm về phương pháp lập bảng

Nhiệm vụ 2: Xây dựng ba ví dụ về giải toán suy luận bằng phương pháp lập bảng

Đánh giá

1. Trong giờ học nữ công các bạn Cúc, Đào, Hồng làm ba bông hoa cúc, đào, hồng. Bạn làm hoa hồng quay sang nói với Cúc : “Thế là trong ba chúng mình chẳng có ai làm hoa trùng với tên của mình cả!”. Hỏi ai làm bông hoa nào?
2. Tại một trại hè thiếu nhi quốc tế có một nhóm gồm ba thiếu niên: một người Anh, một người Pháp và một người Nga. Mỗi người trong số ba bạn này đang học một trong ba ngoại ngữ: tiếng Anh, tiếng Pháp hoặc tiếng Nga. Biết rằng bạn học tiếng Anh lớn hơn bạn người Pháp 1 tuổi. Hãy xác định mỗi bạn đang học ngoại ngữ gì ?
3. Ba cô giáo dạy tiếng Nga, Anh, Pháp được giao phụ trách đêm dạ hội ngoại ngữ. Một cô nói với các em: “Ba cô dạy ba thứ tiếng trùng với tên của các cô, nhưng chỉ

có một cô có tên trùng với thứ tiếng mình dạy”. Cô dạy tiếng Pháp hưởng ứng : “Cô nói đúng!”. Rồi chỉ vào cô vừa nói, tiếp lời: “Rất tiếc cô tên là Nga mà lại không dạy tiếng Nga”.

Bạn hãy cho biết mỗi cô dạy thứ tiếng gì?

4. Các bạn Hùng, Lan, Phượng đến nhà Cúc chơi thấy trên bàn có bốn gói giấy màu xanh, đỏ, tím, vàng bèn hỏi bạn: “Gói gì vậy?” Cúc trả lời : “Mình có bốn viên bi xanh, đỏ, tím, vàng đựng trong bốn gói này. Đề nghị các bạn thử đoán xem mỗi viên bi ở trong gói nào?”.

Hùng nhanh nhẩu nói :

~ Theo mình thì bi xanh không ở trong gói đỏ, bi đỏ không ở trong gói tím, bi tím không ở trong gói vàng còn bi vàng không ở trong gói xanh.

Lan lắc đầu:

~ Bi xanh không ở trong gói tím, bi đỏ không ở trong gói vàng, bi tím không ở trong gói xanh còn bi vàng không ở trong gói đỏ.

Phượng chậm rãi nói :

~ Theo mình thì bi xanh không ở trong gói vàng, bi đỏ không ở trong gói xanh, bi tím không ở trong gói đỏ còn bi vàng không ở trong gói tím.

Cúc gật đầu khen: “Cả ba bạn đoán đều đúng cả!”.

Bạn hãy cho biết trong mỗi gói đựng viên bi màu gì ?

5. Giờ toán hôm nay thầy giáo trả bài kiểm tra, bốn bạn Minh; Hùng, Thông, Thái ngồi cùng bàn đều đạt điểm 6 trở lên. Giờ ra chơi Trung hỏi điểm của bốn bạn. Minh trả lời:

Minh và Hùng không đạt điểm 6, Thông không đạt điểm 7 và Thái không đạt điểm 8.

Hùng thì nói :

~ Minh, Minh và Thông đều không đạt điểm 8 còn Thái thì không đạt điểm 7.

Thông tiếp lời :

~ Minh và Thái không đạt điểm 9, còn Minh và Hùng lại không đạt điểm 7.

Cuối cùng, Thái khẳng định :

~ Minh và Thông không đạt điểm 6 còn Minh và Hùng không đạt điểm 9.

Bạn hãy cho biết mỗi người đã đạt điểm mấy ?

6. Ba nghệ sĩ Vàng, Bạch, Hồng rủ nhau đi quán uống cà phê. Ngồi trong quán, người đội mũ trắng nhận xét: “Ba ta đội mũ có màu trùng với tên của chúng ta, nhưng không ai có màu mũ trùng với tên của mình cả”. Nghệ sĩ Vàng hưởng ứng: “Anh nói đúng”.

Bạn hãy cho biết mỗi nghệ sĩ đội mũ màu gì?

7. Cô Phượng đưa ba bạn Lan, Hồng, Phượng đi dự hội thi “Tiếng hát hoa phượng đỏ”. Về đến trường các bạn đến hỏi thăm, cô trả lời: “Mỗi bạn đều đạt một trong các giải nhất, nhì, ba hoặc đặc biệt”. Cô đề nghị các bạn thử đoán xem.

Hà đoán ngay:

~ Theo em thì Phượng đạt giải nhất, Hồng giải nhì còn Lan đạt giải ba.

Bích cho là:

~ Lan đạt giải nhất, Phượng giải nhì còn Hồng đạt giải ba.

Bạn Ngọc lại đoán:

~ Hồng giải nhất, Lan giải nhì còn Phượng giải ba.

Nghe xong cô Phương lắc đầu nói không bạn nào đạt giải như các em dự đoán. Bạn hãy cho biết mỗi người đã đạt giải gì?

8. Điểm thi học kì môn tiếng Việt của ba bạn An, Bình, Huệ đều đạt từ khá trở lên.

Khi hỏi điểm của ba bạn, Hà nhận được câu trả lời như sau:

1) Huệ không đạt điểm 7, An không đạt điểm 8 còn Bình không đạt điểm 9.

2) Bình và Huệ không đạt điểm 8 còn An không đạt điểm 9.

3) An và Bình không đạt điểm 7 còn Huệ không đạt điểm 9.

Bạn hãy cho biết mỗi người đã đạt điểm mấy?

9. Ba thầy giáo Văn, Sử, Hoá dạy ba môn văn, sử, hoá, trong đó chỉ có một thầy có tên trùng với môn mình dạy. Hỏi mỗi thầy dạy môn gì, biết rằng thầy dạy môn hoá ít tuổi hơn thầy Văn và thầy Sử.

10. Năm người thợ sơn, hàn, tiện, điện và mộc tên là Sơn, Hàn, Tiện, Điện và Mộc, nhưng không ai có tên trùng với nghề của mình. Mỗi người mượn và cho nhau mượn một cuốn sách. Bác Sơn mượn sách của bác thợ sơn. Nghề của bác Sơn trùng với tên của người có sách cho bác mượn. Bác thợ tiện không tên là Mộc nhưng lại đang mượn cuốn sách của bác Hàn. Còn bác Mộc và bác thợ sơn là hai người cùng phố.

Bạn hãy cho biết bác thợ tiện và thợ sơn tên là gì?

11. Giáo sư Thông nổi tiếng là thông minh nhưng lại hay đãng trí. Ông có một tủ sách, trong đó từ điển xếp vào ngăn trên, sách xếp vào ngăn giữa còn tạp chí xếp vào ngăn dưới cùng. Một lần ông cần tìm cuốn “Từ điển Anh – Việt”, cuốn sách “Cơ sở logic toán” và tạp chí “Thế giới mới”. Sau một hồi tìm kiếm đồng tài liệu bề bộn để trên bàn làm việc, giáo sư khẳng định rằng thư kí đã xếp cuốn từ điển vào ngăn sách, cuốn sách và tạp chí vào ngăn tạp chí. Cô thư kí thanh minh rằng chắc chắn là giáo sư đã bỏ cả ba tài liệu đó vào ngăn từ điển. Còn bà giáo sư lại cho là cuốn từ điển lẫn trong ngăn để tạp chí, cuốn sách và tạp chí thì xếp cả trong ngăn sách. Người nào cũng cho rằng mình là đúng, thế là một cuộc to tiếng xảy ra. Vừa lúc đó cô con gái giáo sư bước vào phòng vừa cười vừa nói: “Mọi người sai cả rồi”.

Nếu cô con gái nói đúng thì ba tài liệu trên lúc đó đang nằm ở đâu?

12. ở bốn góc vườn trồng cây cảnh của ông nội trồng bốn khóm hoa cúc, huệ, hồng và đơn. Biết rằng hai góc vườn phía tây và phía bắc không trồng huệ, khóm huệ trồng giữa khóm cúc và góc vườn phía nam, còn khóm đơn trồng giữa khóm hồng và góc vườn phía bắc.

Bạn hãy cho biết mỗi góc vườn ông nội đã trồng hoa gì ?

13. Giáo sư Châu gửi cho mỗi đồng nghiệp của mình (ở bảy nước khác nhau) một bức thư kèm theo một bài khảo luận viết bằng tiếng mẹ đẻ của họ. Nhưng do cô thư kí sơ ý nên đã dẫn đến hậu quả: không một ai trong số bảy đồng nghiệp nhận được bức thư và bài khảo luận mà giáo sư Châu định gửi cho mình, cũng không một ai nhận được thư và bài khảo luận viết bằng cùng một thứ tiếng. Giáo sư người Nga là chuyên gia về địa chất thì lại nhận được bức thư viết bằng tiếng Ba Lan và bài khảo luận về sao Hoả mà lẽ ra phải gửi cho giáo sư người Pháp. Trong khi đó giáo sư người Pháp lại nhận được bức thư bằng tiếng Italia cùng bài khảo luận về vi sinh mà lẽ ra phải gửi cho giáo sư người Hà Lan. Giáo sư người Hà Lan nhận được bức thư viết bằng tiếng Tây Ban Nha cùng bài khảo luận về môi trường đáng lẽ phải gửi cho giáo sư Ba Lan. Giáo sư Ba Lan lại nhận được bài khảo luận về địa chất. Giáo sư

Italia là chuyên gia về chăn nuôi lại nhận được bức thư bằng tiếng Đức, còn giáo sư người Đức là chuyên gia về hạt nhân lại nhận được bức thư bằng tiếng Pháp.

Bạn hãy cho biết các giáo sư người Đức, Italia và Tây Ban Nha đã nhận được bài khảo luận viết bằng tiếng gì? Giáo sư Tây Ban Nha đã nhận được bức thư viết bằng tiếng gì?

14. Thầy Vinh vừa đưa bốn bạn An, Cường, Bình và Đông đi thi học sinh giỏi về trường, mọi người đến hỏi thăm, thầy trả lời : “Mỗi bạn đều đạt một trong các giải: đặc biệt, nhất, nhì, ba hoặc khuyến khích”. Thầy đề nghị mọi người thử đoán xem.

Phan nhanh nhẩu nói :

~ Theo em thì An, Bình giải nhì, còn Cường và Đông giải khuyến khích.

Thanh lắc đầu :

~ Không phải, mà An, Cường, Đông đều giải nhất, chỉ có Bình giải ba.

Thịnh thì cho là chỉ có Bình giải nhất còn ba bạn đều đạt giải ba. Toàn lại nhận định: “Chỉ có Cường và Đông giải nhì còn An và Bình đạt giải khuyến khích”.

Nghe xong thầy mỉm cười : “Các em đoán sai cả rồi”.

Bạn hãy cho biết mỗi người đã đạt giải gì?

15. Chiều thứ bảy Tùng nghe ba bạn Mạnh, Cường và Lân hẹn nhau sáng chủ nhật đến nhà nhau chơi hoặc cùng nhau đi chơi công viên. Lúc 9 giờ sáng chủ nhật Tùng gọi điện đến gia đình ba bạn. Mẹ Mạnh cho biết :

~ Mạnh và Lân không có ở nhà bác, còn Cường thì không ở nhà Lân.

~ Em gái Cường khẳng định :

~ Cả ba anh không có ở nhà em.

Bà Lân thì bảo:

~ Lân và Mạnh không có ở nhà bà, Cường không có ở nhà Mạnh.

Bạn hãy cho biết ba bạn lúc ấy đang ở đâu?

Hoạt động 2.2.

Thực hành giải toán bằng phương pháp suy luận đơn giản

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ: Xây dựng ba ví dụ về giải toán bằng phương pháp suy luận đơn giản

Đánh giá

1. Trước vành móng ngựa là ba người đàn ông, họ là người bản xứ hoặc tên thực dân. Quan toà được biết khi được hỏi, người bản xứ bao giờ cũng nói thật, còn tên thực dân bao giờ cũng nói dối, nhưng quan toà không biết trong bọn họ ai là người bản xứ, ai là thực dân. Quan toà hỏi người thứ nhất : “Anh là ai?”. Nhưng anh ta nói ngọng nên quan toà không hiểu câu trả lời. Quan toà bèn quay sang hỏi người thứ hai, rồi người thứ ba : “Người thứ nhất trả lời thế nào?”. Người thứ hai trả lời : “Anh ta nói anh ta là người bản xứ”. Còn người thứ ba lại nói : “Anh ta nói anh ta là thực dân”.

Bạn hãy cho biết người thứ hai và thứ ba là thực dân hay bản xứ? (Ta giả thiết rằng ba người này khi nghe nhau nói họ hiểu nhau nói gì).

2. Trên một hòn đảo nọ chỉ có hai bộ lạc sinh sống: Cabonhắc chuyên nói thật và Prasin chuyên nói dối. Một du khách đi chơi trên đảo gặp một người dân bản xứ bèn thuê làm người giúp việc. Đi được một quãng, trông thấy một người đàn ông khác. Du khách bảo người giúp việc ra hỏi xem người đó thuộc dân tộc nào. Chàng giúp việc đi về và trả lời : “Anh ta nói rằng anh ta là người Prasin”. Nghe xong du khách

khẳng định người giúp việc của mình là không thật thà bèn đuổi đi mà không thuê nữa.

Bạn hãy cho biết khẳng định của du khách là đúng hay sai? Tại sao?

3. Ba bạn Quân, Hùng và Mạnh vừa đạt giải nhất, nhì và ba trong kì thi toán quốc tế. Biết rằng:

a, Không có học sinh trường chuyên nào đạt giải cao hơn Quân.

b, Nếu Quân đạt giải thấp hơn một bạn nào đó thì Quân không phải là học sinh trường chuyên.

c, Chỉ có đúng một bạn không phải là học trường chuyên.

d, Nếu Hùng và Minh đạt giải nhì thì Mạnh đạt giải cao hơn bạn quê ở Hải Phòng.

Bạn hãy cho biết mỗi bạn đã đạt giải nào? Bạn nào không học trường chuyên và bạn nào quê ở Hải Phòng.

4. Thầy Nghiêm được nhà trường cử đưa bốn học sinh Lê, Huy, Hoàng, Tiến đi thi đấu điền kinh. Kết quả có ba em đạt các giải nhất, nhì, ba và một em không đạt giải. Khi về trường mọi người hỏi kết quả, các em trả lời như sau:

Lê: Minh đạt giải nhì hoặc ba.

Huy: Minh đã đạt giải.

Hoàng: Minh đạt giải nhất.

Tiến: Minh không đạt giải.

Nghe xong thầy Nghiêm mỉm cười và nói : “Chỉ có ba bạn nói thật, còn một bạn đã nói đùa”.

Bạn hãy cho biết học sinh nào đã nói đùa, ai đạt giải nhất và ai không đạt giải?

5. Trong giờ ngoại khoá các bạn tham gia một trò chơi như sau: Mỗi bạn chọn 20 hoặc 22 quân cờ (trong đó có một số quân màu đỏ và một số quân màu trắng). Sau đó mỗi bạn xếp số quân cờ đó thành vòng tròn sao cho không có hai quân cùng màu đứng cạnh nhau và đối diện với quân đỏ qua tâm đường tròn cũng là quân đỏ.

Ba bạn Lan, Tuấn và Dung vào cuộc chơi : Lan chọn 10 quân trắng và 10 quân đỏ; Tuấn chọn 11 quân trắng và 11 quân đỏ còn Dung thì chọn 12 quân đỏ và 10 quân trắng.

Bạn Minh đứng ở ngoài nhìn thấy thế bèn nói “Chỉ có Tuấn có thể xếp được còn Lan và Dung đều không thể xếp được thoả mãn yêu cầu của cuộc chơi”. Bạn giải thích tại sao?

6. Năm vận động viên Tuấn, Tú, Kỳ, Anh, Hợp chạy thi. Kết quả không có hai bạn nào về đích cùng một lúc. Tuấn về đích trước Tú nhưng sau Hợp. Còn Hợp và Kỳ không về đích kề liền nhau. Anh không về đích kề liền với Hợp, Tuấn và Kỳ.

Bạn hãy xác định thứ tự về đích của năm vận động viên nói trên.

7. Một du khách muốn tham quan bằng ô tô bốn khu di tích lịch sử A, B, C, D trong huyện nọ. Theo bản đồ chỉ dẫn thì giữa hai khu di tích bất kì đều có đường ô tô nối liền nhau và nếu đi bằng con đường qua khu B không qua khu D thì hoặc qua cả hai khu A, C hoặc không qua cả hai khu đó. Vì trong huyện có những đoạn đường đang sửa chữa cho nên những con đường qua C, kể cả những con đường qua D lúc đó đều không thể qua cả A và B.

Bạn xem có cách nào đi một vòng (có nghĩa là không đi đường nào hai lần) qua được cả bốn khu trên không. Nếu không thì nên chọn đường đi như thế nào để tham quan được nhiều nhất?

8. Sau khi vụ trộm xảy ra, cơ quan điều tra thẩm vấn năm nhân vật bị tình nghi là can án và thu được các thông tin sau :

- 1) Nếu có mặt A thì có mặt hoặc B hoặc C. Ngoài ra chưa khẳng định chắc chắn được còn có một ai nữa trong số năm nhân vật nói trên.
- 2) D hoặc cùng có mặt với B và C hoặc cả ba đều không có mặt trên hiện trường lúc xảy ra vụ án.
- 3) Nếu có mặt D mà không có mặt B và C thì có mặt E.
- 4) Qua xét nghiệm vân tay thấy chắc chắn có mặt A lúc xảy ra vụ án.

Với thông tin trên liệu có ai trong số năm nhân vật này có thể chứng tỏ được trước cơ quan điều tra rằng lúc vụ án xảy ra mình không có mặt ở đó?

9. Hoàng đế nước nọ mở cuộc thi tài để kén phò mã. Giai đoạn cuối của cuộc thi, hoàng đế chọn được ba chàng trai đều thông minh. Nhà vua đang phân vân không biết chọn ai thì công chúa đưa ra một sáng kiến: lấy 5 chiếc mũ, 3 chiếc màu đỏ và 2 chiếc màu vàng để ở trên bàn rồi giao hẹn : “Bây giờ cả ba chàng đều bịt mắt lại, tôi đội lên đầu mỗi người một chiếc mũ và hai mũ còn lại tôi sẽ cất đi. Khi bỏ băng bịt mắt ra, ai là người đầu tiên nói đúng mình đang đội mũ gì thì sẽ được kén làm phò mã”.

Vừa bỏ băng bịt mắt, ba chàng trai im lặng quan sát lẫn nhau, lát sau hoàng tử nước Bỉ nói to lên rằng : “Tôi đội mũ màu đỏ”. Thế là chàng được công chúa kén làm chồng. Bạn hãy cho biết hoàng tử nước Bỉ đã suy luận như thế nào?

10. Lớp 12A cử bạn Hạnh, Đức, Vinh đi thi học sinh giỏi sáu môn Văn, Toán, Lý, Hoá, Sinh vật và Ngoại ngữ cấp Thành phố, mỗi bạn dự thi hai môn. Nhà trường cho biết về các em như sau:

- (1) Hai bạn thi Văn và Sinh vật là người cùng phố.
- (2) Hạnh là học sinh trẻ nhất trong đội tuyển.
- (3) Bạn Đức, bạn dự thi môn Lý và bạn thi Sinh vật thường học nhóm với nhau.
- (4) Bạn dự thi môn Lý nhiều tuổi hơn bạn thi môn Toán.
- (5) Bạn thi Ngoại ngữ, bạn thi Toán và Hạnh thường đạt kết quả cao trong các vòng thi tuyển.

Bạn hãy xác định mỗi học sinh đã được cử đi dự thi những môn gì?

11. ở một doanh nghiệp nọ người ta cần chọn bốn người vào Hội đồng quản trị (HĐQT) với các chức vụ: chủ tịch, phó chủ tịch, kế toán và thủ quỹ. Sáu người được đề cử lựa chọn vào các chức vụ trên là : Đốc, Sửu, Hùng, Vinh, Mạnh và Đức.

Khi tìm hiểu, các đề cử viên có những nguyện vọng sau :

- (1) Đốc không muốn vào HĐQT nếu không có Sửu. Nhưng dù có Sửu anh cũng không muốn làm phó chủ tịch.
- (2) Sửu không muốn nhận chức phó chủ tịch và thư kí.
- (3) Hùng không muốn công tác với Sửu, nếu Đức không tham gia.
- (4) Nếu trong HĐQT có Vinh hoặc Đức thì Mạnh kiên quyết không tham gia HĐQT.
- (5) Vinh cũng từ chối, nếu HĐQT có mặt cả Đốc và Đức.

(6) Chỉ có Đức đồng ý làm chủ tịch với điều kiện Hùng không làm phó chủ tịch.

Người ta phải chọn những ai trong số sáu đề cử viên để thoả mãn nguyện vọng riêng của các đề cử viên.

12. Buổi chiều chủ nhật hai mẹ con đi dạo chơi trong công viên. Nhìn thấy người quen, mẹ nói với Lan: “Con xem kìa, trước mặt chúng ta là hai người bố và hai

người con cùng đi dạo công viên”. Lan đếm thì chỉ thấy có ba người. Bạn hãy giải thích vì sao?

13. Một hôm cô Thu đến nhà cô Kim chơi. Cô Thu chỉ vào một người trong ảnh và hỏi : “Người đàn ông này là ai vậy?”. Cô Kim trả lời: “Em trai của bố ông ấy là bố của em trai tôi”. Bạn hãy cho biết người trong ảnh có quan hệ thế nào với cô Kim?

14. Hôm đến nhà cô Yến chơi, lúc xem ảnh của gia đình, Nguyệt chỉ vào một người phụ nữ trong ảnh và hỏi : “Người phụ nữ này có quan hệ thế nào với chị?”. Cô Yến trả lời: “Ông nội của em chồng cô ấy là em của ông nội chồng tôi”. Bạn hãy cho biết người phụ nữ ấy có quan hệ thế nào với cô Yến.

15. Bà A đi cùng một cụ già đến gặp ông B. Ông B hỏi bà A: “Bà với cụ già này có quan hệ với nhau thế nào?”. Bà A trả lời : “Mẹ chồng tôi có hai chị em mà em vợ ông ấy là cậu chồng tôi”.

Bạn hãy cho biết bà A và cụ già ấy có quan hệ thế nào với nhau?

16. Trong một buổi sinh hoạt nhóm yêu Toán, ba bạn Thái, Thúy, Bình được phân công đóng ba vai: vai đội mũ đỏ luôn nói thật, vai đội mũ xanh luôn nói dối còn vai đội mũ vàng thì hay nói đùa (lúc nói thật, lúc nói dối). Bạn Hoài không biết ai đóng vai gì bèn đến hỏi từng bạn rằng: “Bạn Thúy sẽ đội mũ gì?”.

Thái trả lời: “Thúy đội mũ đỏ”.

Bình lại nói: “Thúy đội mũ xanh”.

Còn Thúy thì khẳng định: “Tôi sẽ đội mũ vàng”.

Hỏi bạn Hoài đã suy luận thế nào để biết ai đội mũ gì ?

17. Một công chúa của vương quốc nọ nổi tiếng là thông minh. Khi kén chồng nàng ra điều kiện: Trong thời gian ba ngày, ai ra được câu hỏi mà nàng không trả lời được thì công chúa sẽ kén làm chồng. Nhiều chàng trai đến thử tài và đều chịu thua trước sự hiểu biết uyên bác của công chúa. Cuối ngày thứ ba, một nhà toán học trẻ tuổi đến xin thử tài. Chàng đặt câu hỏi cho công chúa:

Xin công chúa hãy cho biết tôi phải hỏi câu gì để công chúa không trả lời được ?
Hãy xem xét với câu hỏi này nhà toán học có được kết duyên cùng công chúa hay không ?

18. ở một xã kia có hai làng: làng Thực và làng Trạng. Dân làng Thực luôn nói thật còn dân làng Trạng thì luôn nói dối. Một hôm nhà toán học đi vào một làng trong xã đó, nhưng không rõ là làng nào. Nhà toán học bèn hỏi một người dân trong xã đó (mà không biết người đó là dân làng nào) : “Bác có phải người làng này không ạ?”.

Hãy xét xem nhà toán học đang ở trong làng nào, nếu câu trả lời là :

a) Phải !

b) Không !

Hãy xét trường hợp tương tự khi nhà toán học đặt câu hỏi: “Bác có phải người làng khác đến làng này chơi không ạ?”.

19. Nhân ngày rằm Trung Thu, bà chia cho ba cháu Dương, Kiên, Hiền mỗi cháu một thứ đồ chơi mà mình thích: đèn ông sao, bóng bay và trống ếch. Dương không thích chơi trống, Kiên không nhận bóng bay còn Hiền thì không thích chơi đèn và trống.

Hỏi mỗi cháu đã được bà cho món quà gì.

20. Trong kì thi học sinh giỏi, bốn bạn Giang, Dương, Linh, Thúy đạt bốn giải:

Nhất, nhì, ba và khuyến khích. Biết rằng :

a) Linh không đạt giải nhất mà cũng không đạt giải khuyến khích.

b) Dương đạt giải nhì còn Giang không đạt giải khuyến khích. Hỏi các bạn Giang, Linh, Thuý đã đạt giải gì?

21. Trong cuộc chạy thi ngày hội khỏe Phù Đổng, bốn bạn An, Bình, Cường, Dũng đạt bốn giải nhất, nhì, ba và tư. Khi được hỏi “Bạn đã đạt giải mấy?” thì bốn bạn trả lời như sau :

An : “Tôi giải nhì, còn Bình giải nhất”.

Bình : “Tôi cũng giải nhì còn Dũng giải ba”.

Cường : “Tôi mới là người đạt giải nhì, còn Dũng giải tư”.

Dũng : “Ba bạn đều thích nói đùa nhưng trong mỗi câu trả lời đều có một phần đúng còn một phần sai”.

Nếu Dũng là người nói thật thì mỗi bạn đã đạt giải mấy?

22. Ba bạn Dương, Nhung, Linh mặc ba chiếc áo màu trắng, xanh, tím và ba chiếc quần cũng màu trắng, xanh, tím. Biết rằng chỉ có Dương mặc quần áo cùng màu, còn áo và quần của Nhung đều không màu trắng, Linh mặc quần màu xanh.

Hãy xác định màu áo và màu quần của mỗi bạn.

23. Nhân ngày 20-11, ba cô Châu, Loan, Thuý là giáo viên của ba trường Đoàn Kết, Nguyễn Trãi và Thăng Long dạy thao giảng ba môn Toán, Tiếng Việt và Mỹ thuật.

Biết rằng :

a) Cô Châu không phải giáo viên trường Đoàn Kết, cô Thủy không phải giáo viên trường Nguyễn Trãi.

b) Cô giáo trường Đoàn Kết không dạy môn Mỹ thuật.

c) Cô giáo trường Nguyễn Trãi dạy Toán.

d) Cô Loan dạy Tiếng Việt.

Hỏi mỗi cô là giáo viên của trường nào và dạy môn gì?

24. Trong đại hội cháu ngoan Bác Hồ của tỉnh Thái Nguyên, bốn bạn Phương, Dung, Hiếu, Nhung quê ở bốn huyện khác nhau. Khi hỏi : “Các bạn quê ở đâu?” thì bạn Cúc nhận được câu trả lời như sau :

Phương : “Dung quê ở Phổ Yên, còn tôi ở Đồng Hỷ”.

Dung : “Tôi quê ở Đồng Hỷ, còn Hiếu quê ở Phổ Yên”.

Hiếu : “Tôi quê ở Đại Từ còn Nhung ở Võ Nhai”.

Xưa nay Nhung vốn là người thật thà không thích nói đùa đã nói với Cúc: “Trong câu trả lời của mỗi bạn chỉ có một phần đúng và một phần sai”.

Hỏi mỗi bạn quê ở huyện nào?

25. Trong một trận thi đấu điền kinh, các vận động viên mang áo số 1, 2, 3, 4 đạt được bốn giải đầu tiên, nhưng không vận động viên nào đạt giải trùng với số áo của mình cả. Biết rằng vận động viên mang áo số 3 không đạt giải nhất, vận động viên đạt giải tư có số áo trùng với giải của vận động viên mang áo số 2 mà vận động viên mang áo số 2 thì không đạt giải ba.

Hỏi mỗi người đã đạt giải mấy?

26. Trong buổi sinh hoạt Đội, anh phụ trách gọi bốn bạn nam và bốn bạn nữ ra sân chơi và giao cho đội trưởng tập hợp các bạn đứng thành vòng tròn sao cho không có hai bạn nữ nào đứng cạnh nhau và đối diện với một bạn nữ qua tâm đường tròn phải là một bạn nam. Suy nghĩ một lát, đội trưởng trả lời : “Thưa anh, không thể xếp được như vậy”. Bạn đội phó tiếp luôn: “Nhưng nếu thêm một bạn nam và một bạn nữ thì xếp được, thưa anh”.

Bạn nào đã nói đúng? Giải thích tại sao?

Hoạt động 2.3:

Thực hành giải toán bằng phương pháp lựa chọn tình huống

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ: Xây dựng ba ví dụ về giải toán bằng phương pháp lựa chọn tình huống

Đánh giá

1. Ba bạn Tùng, Trang, Linh thi chạy đạt ba giải nhất, nhì và ba. Sau khi nghe các bạn đoán:

- ~ Tùng đạt giải ba
- ~ Trang không đạt giải ba.
- ~ Linh không đạt giải nhì.

Tùng bèn trả lời: “Chỉ có một người đoán đúng”.

Bạn hãy xác định mỗi bạn đã đạt giải mấy?

2. Lớp 6A có năm bạn đạt học sinh giỏi xuất sắc nhưng chỉ được cử hai bạn đi dự Đại hội cháu ngoan Bác Hồ. Khi cô giáo hỏi ý kiến thì các bạn đều nhường nhau. Cô đề nghị mỗi em giới thiệu hai trong số năm bạn học sinh giỏi xuất sắc để đi dự đại hội. Kết quả các bạn giới thiệu như sau:

1. Bạn Thông và bạn Minh.
2. Bạn Thái và bạn Tú.
3. Bạn Thái và bạn Học.
4. Bạn Thông và bạn Tú.
5. Bạn Thông và bạn Thái.

Cô quyết định chọn đề nghị của Tú, vì theo đề nghị đó, mỗi đề nghị của bốn người còn lại đều được thoả mãn một phần và bị bác bỏ một phần.

Bạn hãy cho biết bạn nào đã được chọn đi dự đại hội cháu ngoan Bác Hồ?

3. Bốn bạn Lan, Hà, Đức, Văn được nhà trường cử đi dự thi bốn môn: bóng bàn, đá cầu, cờ vua và nhảy cao tại Hội khoẻ Phù Đổng. Khi được hỏi mỗi bạn thi đấu môn gì, các bạn trả lời như sau:

Lan : Mình thi đá cầu hoặc đấu cờ vua.

Hà : Mình không thi nhảy cao.

Đức : Mình thi đấu bóng bàn.

Văn : Mình thi nhảy cao.

Nếu chỉ có ba bạn trả lời đúng, còn một bạn đã trả lời sai thì hai bạn Hà và Văn đã tham gia thi môn gì ?

4. ở một trại hè thiếu nhi quốc tế có ba bạn : một người Việt, một người Lào và một người Thái đang đứng cạnh nhau bên bờ biển. Các bạn đội mũ ba màu khác nhau và mặc áo ba màu cũng khác nhau. Cho biết :

- (1) Bạn người Lào đội mũ màu đỏ.
- (2) Bạn người Thái mặc áo màu trắng.
- (3) Bạn người Việt đứng giữa hai bạn.
- (4) Bạn người Việt đứng cạnh bạn đội mũ xanh.
- (5) Bạn mặc áo hồng không đứng cạnh bạn đội mũ vàng.

Hỏi bạn mặc áo hồng người nước nào? Bạn đội mũ vàng là người nước nào ?

5. Ba người mang quốc tịch Anh, Pháp và Đức ở ba nhà liền nhau trên một đường phố. Mỗi nhà sơn màu khác nhau và mỗi người làm nghề khác nhau. Cho biết :

(1) Người Pháp ở nhà màu đỏ.

(2) Người Đức là nhạc sĩ.

(3) Nhà người Anh ở giữa.

(4) Nhà màu đỏ ở cạnh nhà màu xanh.

(5) Nhà văn ở nhà thứ nhất bên trái.

Hỏi nhà văn có quốc tịch gì? Ai ở nhà màu vàng ?

6. Cup Euro 96 có 4 đội lọt vào vòng bán kết : Đức, Cộng hoà Séc, Anh và Pháp.

Trước khi thi đấu ba bạn Hùng, Trung và Mạnh dự đoán như sau:

Hùng : Đức nhất và Pháp nhì.

Trung : Đức nhì và Anh thứ ba.

Mạnh : Cộng hoà Séc nhì và Anh thứ tư.

Kết quả mỗi bạn dự đoán một đội đúng, một đội sai. Hỏi mỗi đội đã đạt giải mấy ?

7. Nhà trường cử sáu bạn : Hùng, Hà, Lê, Lan, Huy và Văn đi thi đấu cờ vua. Các bạn trong trường có những dự đoán sau :

1. Hùng và Lê sẽ đạt giải.

2. Hà và Huy sẽ đạt giải.

3. Văn và Hùng sẽ đạt giải.

4. Hà và Văn sẽ đạt giải.

5. Lan và Hùng sẽ đạt giải.

Kết quả chỉ có hai người đạt giải và trong năm dự đoán trên chỉ có một dự đoán sai hoàn toàn, bốn dự đoán còn lại chỉ đúng một bạn. Vậy ai đã đạt giải.

8. Ba bạn Hương, Hạnh, Hà là học sinh của ba trường : Nguyễn Trãi, Kim Liên và Hoàn Kiếm được chọn vào đội tuyển của Thành phố đi dự thi học sinh giỏi cấp quốc gia. Mỗi bạn dự thi một trong ba môn: Văn, Toán hoặc Anh văn. Cho biết :

1. Hà không thi Toán.

2. Hương không thi Anh văn.

3. Bạn thi Anh văn là học sinh trường Nguyễn Trãi.

4. Bạn học sinh trường Kim Liên không thi Toán.

5. Hương không phải học sinh trường Hoàn Kiếm.

Hãy xác định mỗi bạn là học sinh trường nào và dự thi môn gì?

9. Ngày chủ nhật, trường PTCS Hùng Vương tổ chức cho học sinh khối 9 đi tham quan tám danh thắng nổi tiếng của thủ đô Hà Nội : Lăng Bác, Văn Miếu, Vườn thú Thủ Lệ, công viên Lê nin, Hồ Hoàn Kiếm, chùa Một Cột, cầu Thăng Long và bảo tàng Lịch sử. Nhưng do điều kiện thời gian nên Ban tổ chức quyết định chỉ đi tham quan bốn trong số tám địa danh đó. Khi được hỏi ý kiến, các lớp đề đạt nguyện vọng như sau:

9A : Thăm Lăng Bác, Văn Miếu, vườn thú Thủ Lệ và công viên Lênin.

9B : Thăm Lăng Bác, hồ Hoàn Kiếm, chùa Một Cột và cầu Thăng Long.

9C : Thăm Văn Miếu, hồ Hoàn Kiếm, chùa Một Cột và bảo tàng Lịch sử.

9D : Thăm Lăng Bác, vườn thú Thủ Lệ, hồ Hoàn Kiếm và Bảo tàng lịch sử.

Hỏi phải chọn nguyện vọng của lớp nào để ba lớp còn lại được thoả mãn nguyện vọng nhiều nhất.

10. Gia đình Nam có năm người: ông nội, bố, mẹ, Nam và em Hùng. Khi hỏi chiều chủ nhật tuần trước gia đình Nam có những ai xem TV, Nam trả lời:

1. Bố và mẹ bao giờ cũng cùng ngồi xem TV.

2. Hôm đó mẹ và Nam không cùng ngồi xem.

3. Ông không xem khi không có Nam cùng xem.
 4. Chiều hôm đó ông và Hùng chỉ có một người không xem TV.
 5. Khi Hùng xem thì cả bố và Nam cùng xem.
- Với thông tin trên, bạn hãy cho biết chiều chủ nhật trước trong gia đình Nam có những ai xem TV?
11. Ba cặp vợ chồng trẻ tổ chức bữa cơm thân mật, mọi người nói chuyện vui về:
- Anh ánh : Trong chúng ta, chồng đều hơn vợ 5 tuổi.
 Cô Loan : Nhưng em là người trẻ nhất trong hội.
 Anh Toàn : Tuổi tôi và cô Nga cộng lại là 52
 Anh Minh : Tuổi của sáu chúng ta cộng lại bằng 151.
 Cô Nga : Tuổi tôi và chú Minh cộng lại là 48.
 Cô Thu : Thế thì người chẳng quen biết gì chúng ta nghe vậy cũng biết được ai là vợ, là chồng của ai mà biết tuổi của mỗi người rồi.
 Bạn hãy chứng tỏ nhận xét của cô Thu là đúng.

Hoạt động 2.4.

Thực hành giải toán bằng phương pháp biểu đồ Ven

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1: Trình bày khái niệm về phương pháp biểu đồ Ven

Nhiệm vụ 2: Xây dựng ba ví dụ về giải toán bằng phương pháp biểu đồ Ven

Đánh giá

1. Hỏi bạn Yến cần ít nhất bao nhiêu chiếc quần và bao nhiêu chiếc áo để mỗi ngày trong tuần bạn có thể đến trường với một kiểu trang phục khác nhau ?
2. Đội tuyển thi đá cầu và thi đấu cờ vua của trường Ngô Sĩ Liên có 15 em, trong đó có 12 em đá cầu và 8 em đấu cờ vua. Hỏi có bao nhiêu em thi cả hai môn ?
3. Lớp 6A có 18 bạn đăng kí học ngoại khoá môn Văn, 15 bạn đăng kí học ngoại khoá môn Toán, trong đó có 5 bạn đăng kí học cả hai môn Văn và Toán. Hỏi :
 - a) Có bao nhiêu bạn chỉ đăng kí học Văn ? Chỉ đăng kí học Toán ?
 - b) Có bao nhiêu bạn đăng kí học Văn hoặc Toán ?
4. Trong một kì thi, các thí sinh được đánh số báo danh từ 1 đến 1000. Hỏi có bao nhiêu thí sinh mang số báo danh là số lẻ hoặc chia hết cho 9 ?
5. Bạn An ra Hà Nội thăm nhà người quen ở phố X. Bạn chỉ nhớ số nhà của người quen là một số lẻ có hai chữ số chia hết cho 3 nhưng không nhớ là số nào. Bạn bèn đi hỏi từng số nhà là số lẻ có hai chữ số chia hết cho 3. Nếu số nhà cuối cùng của dãy lẻ ở phố đó là 121 thì bạn An phải gõ cửa nhiều nhất bao nhiêu nhà để tìm được nhà người quen ?
6. Trong các đại biểu đến dự Festival thanh niên quốc tế tại Bình Nhưỡng có một đoàn cần phiên dịch tiếng Hà Lan mà trước đó Ban tổ chức chưa tính đến. Ban tổ chức gọi điện sang trung tâm giới thiệu phiên dịch thì cô thư kí cho biết mọi người đều đi vắng, chỉ mình cô ngồi trực ở cơ quan. Sau một hồi tìm kiếm cô lấy được bản danh sách 20 người có thể phiên dịch được tiếng Pháp hoặc tiếng Hà Lan, trong số đó có 8 người dịch được tiếng Pháp, 15 người chỉ dịch được một trong hai thứ tiếng nói trên.
 Bạn hãy tính giúp cô thư kí : Có bao nhiêu người dịch được tiếng Hà Lan.

7. Đội tuyển thi học sinh giỏi của tỉnh X có 25 em thi Văn và 27 em thi Toán, trong đó có 18 em vừa thi Văn vừa thi Toán. Hỏi đội tuyển học sinh giỏi hai môn Văn và Toán của tỉnh X có bao nhiêu em?
8. Để phục vụ cho một hội nghị quốc tế, Ban tổ chức đã huy động 100 phiên dịch. Mỗi phiên dịch có thể dịch được một hoặc hai trong ba thứ tiếng Nga, Anh hoặc Pháp. Có 39 người chỉ dịch được tiếng Anh, 35 người dịch được tiếng Pháp, 8 người dịch được cả tiếng Anh và tiếng Nga. Hỏi có bao nhiêu người chỉ dịch được tiếng Nga ?
9. Trên một hội thảo quốc tế có 30 đại biểu nói được tiếng Trung, 40 đại biểu nói được tiếng Pháp và 45 đại biểu nói được tiếng Anh. Trong đó có 20 đại biểu nói được cả tiếng Pháp và tiếng Anh, 16 đại biểu nói được tiếng Trung và tiếng Pháp, 12 đại biểu nói được tiếng Trung và tiếng Anh và 5 đại biểu nói được cả ba thứ tiếng. Hỏi có bao nhiêu đại biểu chỉ nói được một thứ tiếng ? Có tất cả bao nhiêu đại biểu tham dự hội nghị ?
10. Trong một kì thi vào một trường đại học có 5000 thí sinh đăng kí dự thi vào ba ngành I, II, III. Mỗi thí sinh được đăng kí một hoặc hai trong số ba ngành đó. Có 1300 thí sinh chỉ đăng kí dự thi ngành I, 1400 thí sinh chỉ đăng kí dự thi ngành II và 100 thí sinh đăng kí dự thi ngành I và III. Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ dự thi ngành III ?
11. Theo danh sách đăng kí phụ đạo ba môn Văn, Toán, Ngoại ngữ của học sinh khối 9: Có 40 em đăng kí phụ đạo Văn, 50 em đăng kí phụ đạo Toán, trong đó có 15 em đăng kí phụ đạo cả hai môn Văn và Toán, trong đó có 15 em đăng kí phụ đạo cả hai môn Văn và Toán, có 35 em chỉ đăng kí phụ đạo môn Ngoại ngữ. Hỏi có bao nhiêu em đăng kí phụ đạo ?
12. 40 em học sinh của trường X dự thi ba môn: ném tạ, chạy và đá cầu. Trong đội có 8 em chỉ thi ném tạ, 20 em thi chạy và 18 em thi đá cầu. Hỏi có bao nhiêu em vừa thi chạy vừa thi đá cầu?
13. Bạn hãy chứng tỏ rằng nếu lấy tổng số các nghị sĩ trừ đi các nghị sĩ không phải là binh sĩ ta được kết quả giống như lấy tổng số binh sĩ trừ đi binh sĩ không phải là nghị sĩ.
14. Hội thảo quốc tế về tin học có e đại biểu tham dự. Mỗi đại biểu sử dụng được ít nhất một trong ba thứ tiếng Nga, Anh hoặc Pháp nhưng không ai sử dụng được cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Có a đại biểu nói được tiếng Anh, b đại biểu nói được tiếng Pháp và c đại biểu nói được tiếng Nga, d đại biểu chỉ nói được một trong ba thứ tiếng nói trên.
Cho biết $a + b = c + d$.
Bạn hãy cho biết có bao nhiêu đại biểu chỉ nói được tiếng Nga và bao nhiêu đại biểu cần phiên dịch khi nghe các báo cáo bằng tiếng Nga ?
15. Trong một nhà máy thực phẩm xuất khẩu, đồ hộp chiếm hai phần ba tổng số sản phẩm xuất khẩu. Khi kiểm tra chất lượng sản phẩm người ta phát hiện hai phần ba số sản phẩm trong kho không đạt tiêu chuẩn vệ sinh. Với số liệu trên đây bạn có thể khẳng định được ít nhất và nhiều nhất bao nhiêu phần trăm số đồ hộp không đạt tiêu chuẩn vệ sinh hay không?
16. ở một xí nghiệp sản xuất dép nhựa có 10 phân xưởng. Theo quy định, mỗi đôi dép nhựa có khối lượng là 200 gam. Khi nghiệm thu sản phẩm của 10 phân xưởng giao nộp, cán bộ OTK được chỉ có 9 phân xưởng sản xuất đúng quy cách còn một

phân xưởng sản xuất mỗi đôi chỉ có 190 gam nhưng không biết phân xưởng nào. Người cán bộ OTK đã bằng một mã cân phát hiện được phân xưởng nào làm sai quy cách.

Bạn hãy cho biết người đó đã cân như thế nào ?

17. Năm chàng trai câu được 5 con cá trong 5 phút. Hỏi cũng với tốc độ câu như vậy thì 100 chàng trai câu được 100 con cá bao nhiêu lâu?

18. Một người vào cửa hàng hỏi mua một chiếc áo khoác. Bà bán hàng vui tính trả lời: “Tôi chỉ tính bà tiền cúc của chiếc áo này thôi nhé : Chiếc thứ nhất bà cho tôi 1 nghìn, chiếc thứ hai 2 nghìn và mỗi cúc sau bà lại trả cho tôi gấp đôi chiếc trước đó, còn áo thì tôi biếu không bà đây”. Người mua hàng đếm thì thấy chiếc áo có 6 chiếc cúc ở hàng phía trước, 2 chiếc ở ống tay, 2 chiếc ở túi áo ngực và một chiếc dự trữ.

Bạn hãy cho biết bà khách hàng phải trả bao nhiêu tiền ?

TIÊU CHỦ ĐỀ 2.3. CÔNG THỨC

Thông tin cơ bản

3.1. Khái niệm về công thức

Trong toán học ta đã làm quen với biểu thức toán học (là dãy kí hiệu chỉ rõ các phép toán và thứ tự thực hiện các phép toán trên các số hoặc các chữ nhận giá trị từ một trường số)

Trong logic mệnh đề, người ta xây dựng khái niệm công thức tương tự biểu thức toán học trong toán học

Trong chủ đề 1.1 ta đã làm quen với mệnh đề (xác định) và mệnh đề mở (chưa xác định). Ta sẽ gọi chung là các biến mệnh đề

Cho các biến mệnh đề p, q, r, \dots khi dùng các phép logic tác động vào chúng, ta sẽ nhận được các biến mệnh đề ngày càng phức tạp hơn. Mỗi mệnh đề như thế và cả những mệnh đề xuất phát ta gọi là công thức. Hay nói cách khác

a, Mỗi biến mệnh đề là một công thức

b, Nếu P, Q là những công thức thì $P \wedge Q, P \vee Q, P \rightarrow Q$, cũng đều là công thức

c, Mọi dãy kí hiệu không xác định theo các quy tắc trên đây đều không phải là công thức

Ví dụ 3.1 :

Từ các biến mệnh đề p, q, r ta thiết lập được công thức:

$$(p \wedge q) \wedge r$$

$$(p \wedge q) \vee r$$

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

3.2. Giá trị chân lí của công thức

Cho công thức $P = "p \wedge q"$

Ta gán cho các biến mệnh đề p, q những giá trị chân lí xác định, chẳng hạn

~ $G(p) = 1$ và $G(q) = 0$ thì $p \wedge q$ là mệnh đề sai. Suy ra $p \wedge q$ là mệnh đề đúng, hay $G(p \wedge q) = 1$

~ $G(p) = G(q) = 1$ thì $p \wedge q$ là mệnh đề đúng. Suy ra $p \wedge q$ là mệnh đề sai, hay $G(p \wedge q) = 0$

Như vậy khi gán cho mỗi biến mệnh đề có mặt trong công thức P một giá trị chân lí xác định thì công thức P sẽ trở thành một mệnh đề (đúng hoặc sai). Nếu P là mệnh đề đúng (hoặc sai) thì ta nói công thức P có giá trị chân lí bằng 1 (hoặc 0) ứng với hệ chân lí vừa gán cho các biến mệnh đề có mặt trong công thức đó

Ví dụ 3.2 :

$p \wedge q$ là công thức luôn có giá trị chân lí bằng 0 với mọi biến mệnh đề p

Ví dụ 3.3 :

là công thức luôn có giá trị chân lí bằng 1 với mọi biến mệnh đề p, q

Ví dụ 3.4 :

Lập bảng giá trị chân lí của công thức

$$P = "(p \wedge q) \vee (q \wedge p)"$$

Giải :

p	q	$q \wedge p$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	P
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	0	1	1

Dựa vào bảng chân lí trên ta có thể khẳng định:

~ Nếu p đúng, q đúng thì P đúng

~ Nếu p sai, q đúng thì P sai

Ví dụ 3.5 :

Lập bảng giá trị chân lí của công thức “ $(p \square q) \square r$ ” = Q

Giải

p	q	r	$p \vee q$	Q
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

3.3. Sự tương đương logic và đẳng thức

Cho P và Q là hai công thức. Ta nói rằng hai công thức P và Q *tương đương logic* với nhau, kí hiệu là $P \equiv Q$, nếu với mọi hệ chân lí gán cho các biến mệnh đề có mặt trong hai công thức đó thì chúng luôn nhận giá trị chân lí như nhau

Đặc biệt, hai mệnh đề a, b gọi là *tương đương logic* với nhau, kí hiệu $a \equiv b$, nếu chúng cùng đúng hoặc cùng sai

Chú ý

1. Trong logic không có khái niệm hai mệnh đề bằng nhau mà chỉ có khái niệm hai mệnh đề tương đương logic với nhau

Hai mệnh đề tương đương logic có thể về nội dung chúng hoàn toàn không liên quan với nhau. Chẳng hạn

“Tháng Hai có 30 ngày $\square 2 \times 2 = 10$ ”

2. $P \equiv Q$ ta gọi là một đẳng thức

3. Để chứng minh hai công thức tương đương logic với nhau ta thường dùng phương pháp lập bảng giá trị chân lí. Chẳng hạn

Chứng minh đẳng thức sau : $p \square q \square q \square p$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Nhìn vào bảng trên ta thấy hai công thức $p \square q$ và $q \square p$ luôn cùng đúng hoặc cùng sai. Vậy ta có $p \square q \square q \square p$

Dưới đây là một số phép tương đương logic thường gặp

Phủ định của phủ định

(1) $p \square p$

Luật Đờ Moóc Găng

$$(2) \quad \overline{(p \wedge q)} \equiv (\bar{q} \vee \bar{p})$$

$$(3) \quad \overline{(p \vee q)} \equiv (\bar{p} \wedge \bar{q})$$

Tính chất kết hợp của các phép logic

$$(4) \quad (p \square q) \square r \equiv p \square (q \square r)$$

$$(5) \quad (p \sqcap q) \sqcap r \equiv p \sqcap (q \sqcap r)$$

Tính chất giao hoán của các phép logic

$$(6) \quad p \square q \equiv q \square p$$

$$(7) \quad p \sqcap q \equiv q \sqcap p$$

$$(8) \quad p \sqcup q \equiv q \sqcup p$$

Tính chất phân phối

$$(9) \quad p \square (q \square r) \equiv (p \square q) \square (p \square r)$$

$$(10) \quad p \sqcap (q \sqcap r) \equiv (p \sqcap q) \sqcap (p \sqcap r)$$

Tính lũy đẳng

$$(11) \quad p \square p \equiv p$$

$$(12) \quad p \sqcap p \equiv p$$

Biểu diễn phép kéo theo qua các phép logic khác

$$(13) \quad p \square q \equiv \bar{p} \sqcup q$$

$$(14) \quad p \sqcap q \equiv p \square \bar{q}$$

$$(15) \quad p \sqcup q \equiv \bar{p} \sqcap \bar{q}$$

Biểu diễn phép tương đương qua các phép logic khác

$$(16) \quad p \square q \equiv (p \square q) \sqcap (q \square p)$$

$$(17) \quad p \sqcap q \equiv p \sqcup \bar{q}$$

Ta dùng kí hiệu 1 (hoặc 0) để chỉ biến mệnh đề luôn đúng (hoặc luôn sai). Ta có các đẳng thức sau về 0 và 1

$$(18) \quad p \square 0 \equiv 0$$

$$(19) \quad p \sqcap 1 \equiv p$$

$$(20) \quad p \square 0 \equiv p$$

$$(21) \quad p \sqcap 1 \equiv 1$$

$$(22) \quad p \square p \equiv 1 \text{ (luật bài trung)}$$

$$(23) \quad p \sqcap p \equiv 0 \text{ (luật mâu thuẫn)}$$

3.4. Phép biến đổi công thức

Khái niệm *công thức* trong logic mệnh đề tương tự như khái niệm *biểu thức toán học* trong toán học; khái niệm *đẳng thức* tương tự như khái niệm *hằng đẳng thức* trong toán học.

Dựa vào các đẳng thức, ta có thể thực hiện phép biến đổi đồng nhất để chứng minh một đẳng thức hoặc đưa một công thức về dạng đơn giản hơn.

Để cho tiện, ta quy ước :

1. Các phép logic trong một công thức được thực hiện theo thứ tự \square ; \sqcup ; \sqcap

Với quy ước này, chẳng hạn ta sẽ viết:

$$p \wedge q \square r$$

thay cho $(p \wedge q) \square r$

$$p \vee q \wedge r \square u$$

thay cho $[p \vee (q \wedge r)] \square u$

2. Không viết dấu ngoặc ở ngoài đối với mỗi công thức.

Với quy ước này, chẳng hạn, ta sẽ viết :

$$p \wedge q \vee r$$

Thay cho $[(p \wedge q) \vee r]$

3. Nếu có dấu phủ định trên một công thức nào đó thì ta bỏ dấu ngoặc ở hai đầu công thức đó.

Chẳng hạn, ta sẽ viết

$$\neg r$$

Thay cho $\neg r$.

Ví dụ 3.6 :

Chứng minh rằng

$$(\neg q \wedge r) \vee (\neg r) \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge r.$$

Biến đổi lần lượt ta có:

$$\begin{aligned} & (\neg q \wedge r) \vee (\neg r) \vee (q \wedge r) \\ & \equiv [(\neg q) \vee (\neg r)] \wedge r \vee (q \wedge r) \\ & \equiv [\neg(q \vee r)] \wedge r \vee (q \wedge r) \\ & \equiv (\neg 1) \wedge r \vee (q \wedge r) \\ & \equiv (\neg r) \vee (q \wedge r) \\ & \equiv (\neg r \vee q) \wedge r \\ & \equiv (p \vee q) \wedge r \end{aligned}$$

Ví dụ 3.7 :

Rút gọn công thức :

$$(\neg p \vee q) \wedge q$$

Ta có :

$$\begin{aligned} & (\neg p \vee q) \wedge q \equiv [\neg [\neg (p \vee q)]] \wedge q \\ & \equiv [\neg [(p \vee q) \vee (p \vee q)]] \wedge q \\ & \equiv \neg (p \vee q) \wedge q \\ & \equiv \neg q. \end{aligned}$$

3.5. Mệnh đề liên hợp, điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ

3.5.a Mệnh đề liên hợp

Từ mệnh đề “Nếu một số chia hết cho 4 thì nó chia hết cho 2” (1) ta có thể thiết lập được các mệnh đề

“Nếu một số chia hết cho 2 thì nó chia hết cho 4” (2)

“Nếu một số chia hết cho 4 thì nó không chia hết cho 2” (3)

“Nếu một số không chia hết cho 2 thì nó không chia hết cho 4” (4)

Các mệnh đề (1) ; (2) ; (3) ; (4) gọi là những mệnh đề liên hợp

Một cách tổng quát, ta định nghĩa

Nếu ta gọi $p \equiv q$ (1) là mệnh đề thuận thì

$q \equiv p$ (2) là mệnh đề đảo của (1)

$p \equiv \neg q$ (3) là mệnh đề phản của (1)

$q \equiv \neg p$ (4) là mệnh đề phản đảo của (1)

Các mệnh đề thuận, đảo, phản và phản đảo ta gọi là những mệnh đề liên hợp

áp dụng đẳng thức (15) ta có

$$p \equiv q \equiv q \equiv p$$

$$\text{và } p \equiv \neg q \equiv \neg q \equiv p$$

Hay \sim Mệnh đề thuận tương đương logic với mệnh đề phản đảo
 \sim Mệnh đề phản tương đương logic với mệnh đề đảo

Ví dụ 3.8 :

Thiết lập các mệnh đề liên hợp với mệnh đề sau: “Nếu một số chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3”

Sau đó tìm giá trị chân lí của chúng

Các mệnh đề liên hợp của nó là

- Nếu một số chia hết cho 3 thì nó chia hết cho 6
- Nếu một số không chia hết cho 6 thì nó không chia hết cho 3
- Nếu một số không chia hết cho 3 thì nó không chia hết cho 6

Đễ dàng thấy rằng mệnh đề thuận và phản đảo là các mệnh đề đúng còn mệnh đề đảo và phản là các mệnh đề sai

Ví dụ 3.9 :

Thiết lập các mệnh đề liên hợp với mệnh đề sau: “Nếu tam giác ABC vuông ở A thì $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ”

Sau đó tìm giá trị chân lí của chúng

Các mệnh đề liên hợp của nó là

- Nếu tam giác ABC thoả mãn hệ thức $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì nó vuông ở A
- Nếu tam giác ABC không vuông ở A thì $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$
- Nếu tam giác ABC không thoả mãn hệ thức $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì nó không vuông ở A

Từ môn hình ở trường phổ thông ta thấy cả bốn mệnh đề trên đều có giá trị chân lí bằng 1

3.5.b. Điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần đủ

Trong toán học, nếu ta chứng minh được $p \Rightarrow q$ là mệnh đề đúng thì ta nói rằng

- p là điều kiện đủ để có q
- q là điều kiện cần để có p

Trong trường hợp này, mệnh đề $p \Rightarrow q$ có thể diễn đạt bằng nhiều cách khác nhau, chẳng hạn:

- Nếu có p thì có q
- p là điều kiện đủ để có q
- q là điều kiện cần để có p
- Có p ắt có q
- Muốn có p phải có q
- Có q khi có p

.....

Trong toán học, nếu ta chứng minh được đồng thời cả hai mệnh đề $p \Rightarrow q$ và $q \Rightarrow p$ đều đúng thì ta nói rằng :

- p là điều kiện cần và đủ để có q
- q là điều kiện cần và đủ để có p

Theo phép tương đương (16) ta có

$$p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Trong trường hợp này, mệnh đề $p \Leftrightarrow q$ có thể diễn đạt bằng nhiều cách khác nhau, chẳng hạn:

- Điều kiện cần và đủ để có p là q

- Để có p, điều kiện cần và đủ là q
- Điều kiện ắt có và đủ để có p là q
- Có p khi và chỉ khi có q

.....
 Trong toán học, mỗi định lý được phát biểu dưới dạng một mệnh đề đúng $p \rightarrow q$, trong đó, p gọi là giả thiết, q gọi là kết luận của định lý.

Ta thiết lập mệnh đề đảo $q \rightarrow p$ của định lý đó. Nếu $q \rightarrow p$ cũng là mệnh đề đúng thì ta nói định lý đã cho có định lý đảo. Ngược lại, ta nói định lý đã cho không có định lý đảo.

Trong trường hợp định lý có định lý đảo, ta thường phát biểu kết hợp cả định lý thuận và đảo dưới dạng điều kiện cần và đủ $p \leftrightarrow q$.

Ví dụ 3.10 :

Hãy xét xem định lý sau có định lý đảo hay không : “Nếu tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau ở trung điểm của mỗi đường thì nó là hình bình hành”

Nếu có, hãy phát biểu chúng dưới dạng điều kiện cần và đủ

Mệnh đề đảo của định lý đã cho là : “Nếu tứ giác ABCD có hai đường chéo cắt nhau ở trung điểm của mỗi đường thì nó là hình bình hành”

Từ môn hình học ở trường phổ thông ta đã biết đây là mệnh đề đúng. Vậy định lý đã cho có định lý đảo

Kết hợp giữa định lý thuận và đảo được phát biểu như sau: “Điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD là hình bình hành là hai đường chéo của nó cắt nhau ở trung điểm của mỗi đường.”

Ví dụ 3.11 :

Cũng hỏi như ví dụ 3.10 đối với định lý : “Nếu số tự nhiên a có chữ số hàng đơn vị bằng 0 hoặc 5 thì nó chia hết cho 5”

Mệnh đề đảo của định lý đã cho là : “Nếu số tự nhiên a chia hết cho 5 thì nó có chữ số hàng đơn vị bằng 0 hoặc bằng 5”

Từ trường phổ thông ta đã biết mệnh đề đảo là mệnh đề đúng. Vậy định lý trên có định lý đảo.

Kết hợp giữa định lý thuận và đảo ta có :

“Số tự nhiên a chia hết cho 5 khi và chỉ khi chữ số hàng đơn vị của nó bằng 0 hoặc 5” hoặc “Điều kiện ắt có và đủ để số tự nhiên a chia hết cho 5 là chữ số hàng đơn vị của nó bằng 0 hoặc 5”

3.6. Luật của logic mệnh đề

Cho A là một công thức. Ta gọi :

a, A là công thức hằng đúng, nếu nó luôn nhận giá trị chân lý bằng 1 với mọi hệ chân lý gán cho các biến mệnh đề có mặt trong công thức đó

b, A là công thức hằng sai, nếu nó luôn nhận giá trị chân lý bằng 0 với mọi hệ chân lý gán cho các biến mệnh đề có mặt trong công thức đó

Mỗi công thức hằng đúng A ta gọi là một luật của logic mệnh đề và kí hiệu là: A

Mỗi công thức hằng sai ta gọi là một mâu thuẫn.

Ví dụ 3.12 :

a) Công thức $p \vee \neg p$ là hằng đúng. Ta có luật

$p \wedge \neg p$

b) Công thức $p \wedge \neg p$ là hằng sai.

c) Chứng minh rằng

$$p \wedge q \vee$$

Ta có bảng chân lí

p	q	$p \wedge q$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$p \wedge q \leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Nhìn vào bảng trên ta có đpcm.

Hoạt động

Sinh viên tự đọc ở nhà thông tin cơ bản

– Trên lớp chia thành 4 nhóm, mỗi nhóm thảo luận một hoạt động để thực hiện các nhiệm vụ rồi trình bày kết quả thảo luận. Sau đó giáo viên tổng kết theo từng hoạt động dưới đây:

Hoạt động 3.1. Tìm hiểu khái niệm công thức

Nhiệm vụ:

Nhiệm vụ 1:

Phát biểu định nghĩa khái niệm công thức của lôgic mệnh đề. Minh họa các ví dụ về công thức.

Nhiệm vụ 2: Xây dựng các ví dụ về xác định giá trị chân lí của công thức.

Đánh giá

1. Lập bảng chân lí của các công thức sau:

a) $p \wedge q \square (q \wedge r)$

b) $(p \vee r) \vee (q \wedge r)$

c) $(p \square) \wedge (p \square q) \vee (\square)$

2. Đúng ghi Đ, sai ghi S vào ô trống:

a) Công thức $(p \square q) \wedge (q \square p)$ (p q) luôn có giá trị chân lí bằng 1

b) Công thức $p \vee (q \wedge r)$ $p \vee q \vee p \vee r$ luôn có giá trị chân lí bằng 1

c) Công thức $(p \square q) \wedge (p \square r)$ luôn có giá trị chân lí bằng 0.

Hoạt động 3.2.

Thực hành chứng minh các đẳng thức trong lôgic mệnh đề.

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1 : Phát biểu định nghĩa:

– Hai công thức tương đương lôgic.

– Hai mệnh đề tương đương lôgic.

Minh họa các khái niệm đó thông qua các ví dụ.

Nhiệm vụ 2 : Lập bảng chân lí để chứng minh các đẳng thức (1) – (5).

Sau đó xây dựng các ví dụ minh họa về vận dụng mỗi đẳng thức đó trong toán học.

Nhiệm vụ 3 : Thực hành biến đổi công thức.

– Nêu các quy ước về sử dụng kí hiệu khi biến đổi các công thức.

– Xây dựng hai ví dụ về thực hành biến đổi công thức.

Đánh giá

1. Đúng ghi Đ, sai ghi S vào ô trống :

a) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

b) $p \wedge q \Leftrightarrow p \vee q$

c) $\neg q \Leftrightarrow \neg p$

e) $p \wedge q \Leftrightarrow p \vee q$

f) $p \wedge q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

g) $\neg q \Leftrightarrow \neg p$

2. Chứng minh các đẳng thức (9) (17). Sau đó minh họa bằng các ví dụ về vận dụng mỗi đẳng thức đó trong toán học.

3. Hãy biến đổi các công thức sau về dạng đơn giản nhất:

a) $(\neg p \vee q) \wedge q$.

b) $p \wedge q \wedge (p \vee \neg q)$

a) $(p \vee \neg q) \wedge q$

Hoạt động 3.3. Tìm hiểu về mệnh đề liên hợp

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1 :

Trình bày khái niệm về mệnh đề liên hợp. Nêu mối quan hệ giữa các mệnh đề thuận, đảo, phản và phản đảo.

Nhiệm vụ 2 :

Xây dựng một ví dụ trong số học và một ví dụ trong hình học về thiết lập mệnh đề liên hợp của mệnh đề đã cho.

Nhiệm vụ 3 :

Trình bày khái niệm điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ.

~ Xây dựng một ví dụ trong số học và một ví dụ trong hình học về diễn đạt điều kiện cần (điều kiện đủ) bằng 5 cách khác nhau.

~ Cũng yêu cầu như trên đối với điều kiện cần và đủ.

Nhiệm vụ 4 : Trình bày khái niệm định lý đảo của một định lý.

~ Xây dựng một ví dụ trong số học và một ví dụ trong hình học về phát biểu kết hợp giữa định lý thuận và định lý đảo của một định lý.

Đánh giá

1. Thiết lập mệnh đề liên hợp của các mệnh đề sau :

a) Nếu một số chia hết cho 15 thì nó chia hết cho 5 .

b) Nếu một số chia hết cho 15 thì nó chia hết cho 3 và 5.

c) Nếu hai góc đối đỉnh thì chúng bằng nhau.

d) Nếu một tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau thì nó là hình thoi.

Sau đó tìm giá trị chân lý của chúng.

Đối với những mệnh đề đúng, hãy diễn đạt bằng ba cách khác nhau dưới dạng điều kiện cần (đủ).

2. Hãy phát biểu các dấu hiệu chia hết cho 2, 3, 5 và 9 ở tiểu học dưới dạng mệnh đề kéo theo.

Sau đó hãy thiết lập các mệnh đề liên hợp của chúng.

3. Thiết lập định lý đảo của định lý sau :

a) Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

b) Nếu tích của hai thừa số chia hết cho 7 thì một trong hai thừa số đó phải chia hết cho 7.

Hoạt động 3.4. Tìm hiểu luật của logic mệnh đề

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1: Phát biểu định nghĩa các khái niệm

~ Công thức hằng đúng

~ Công thức hằng sai

Nhiệm vụ 2: Xây dựng hai ví dụ minh họa về cách chứng minh một luật

Đánh giá

1. Chứng minh các công thức sau là công thức hằng đúng, sau đó viết chúng thành những luật

a, $p \vee (\neg p \wedge q)$

b, $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

c, $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$

TIÊU CHỦ ĐỀ 2.4. QUY TẮC SUY LUẬN

Thông tin cơ bản

Phân tích mỗi chứng minh toán học ta thấy nó bao gồm một số hữu hạn bước suy luận đơn giản. Trong mỗi bước suy luận đơn giản ta đã vận dụng những quy tắc nhất định để từ những mệnh đề đã được thừa nhận là đúng có thể rút ra một mệnh đề mới. Dưới đây ta trình bày những quy tắc thường dùng trong các bước suy luận như thế.

Định nghĩa

Cho A, B, C là những công thức. Nếu tất cả các hệ chân lý của các biến mệnh đề có mặt trong các công thức đó làm cho A, B nhận giá trị chân lý bằng 1 cũng làm cho C nhận giá trị chân lý bằng 1 thì ta nói có một quy tắc suy luận từ các tiên đề A, B dẫn tới hệ quả logic C của chúng.

Ta kí hiệu là $A, B \Rightarrow C$ hoặc $A, B = C$

Từ định nghĩa ta dễ dàng thấy rằng để chứng minh $A, B \Rightarrow C$ là một quy tắc suy luận ta chỉ cần lập bảng giá trị chân lý đối với các công thức A, B, C. Trong đó chỉ ra rằng mỗi khi A, B nhận giá trị chân lý bằng 1 thì C cũng nhận giá trị chân lý bằng 1.

Ví dụ 4.1 :

Chứng minh rằng ta có quy tắc suy luận

$$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$

Sau đó nêu ví dụ minh họa về vận dụng quy tắc đó trong suy luận toán học
Ta có bảng chân lí

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1

Nhìn vào bảng trên ta thấy mỗi khi $p \square q$ và $q \square r$ nhận giá trị chân lí bằng 1 thì $p \square r$ cũng nhận giá trị chân lí bằng 1
Vậy ta có quy tắc suy luận

$$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$

là quy tắc suy luận bắc cầu

Nếu ta chọn

- ~ “ $p \square q$ ” là mệnh đề “Nếu a chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3”
- ~ “ $q \square r$ ” là mệnh đề “Nếu a chia hết cho 3 thì tổng các chữ số của nó chia hết cho 3”

áp dụng quy tắc suy luận bắc cầu ta có: “Nếu a chia hết cho 6 thì tổng các chữ số của nó chia hết cho 3”

Hoạt động

Sinh viên tự đọc các thông tin cơ bản ở nhà.

- ~ Trong lớp sinh viên thảo luận theo nhóm 3, 4 người. Sau đó đại diện mỗi nhóm trình bày kết quả thảo luận với những nhiệm vụ được phân công ;
- ~ Giáo viên tổng kết theo từng hoạt động dưới đây :

Hoạt động 4.1.

Thực hành vận dụng các quy tắc suy luận trong suy luận toán học

Nhiệm vụ

- Nhiệm vụ 1 : Phát biểu định nghĩa
- ~ Quy tắc suy luận
- ~ Tiền đề của quy tắc
- ~ Hệ quả logic của quy tắc
- Nhiệm vụ 2 :

Xây dựng hai ví dụ về chứng minh một quy tắc suy luận và vận dụng quy tắc suy luận đó trong suy luận toán học

Đánh giá

Chứng minh các quy tắc suy luận 1, 4 - 20

~ Sau đó xây dựng các ví dụ về vận dụng mỗi quy tắc suy luận đó :

~ Trong số học

~ Trong hình học

~ Trong toán cao cấp

Ví dụ 4.2 :

Chứng minh rằng ta có quy tắc suy luận sau :

$$\frac{p \rightarrow q, q}{p}$$

Nêu ứng dụng của nó trong suy luận toán học.

Ta có bảng giá trị chân lí sau:

p	q	\bar{q}	$p \rightarrow q$	\bar{p}
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1

Từ bảng trên ta suy ra quy tắc suy luận

Ta đã biết “nếu a chia hết cho 3 thì tổng các chữ số của nó chia hết cho 3”

Số 146 có tổng các chữ số không chia hết cho 3 nên số 146 không chia hết cho 3.

Dưới đây là các quy tắc suy luận thường được vận dụng trong suy luận toán học:

1. $\frac{p \rightarrow q, p}{q}$ (Quy tắc suy luận Modus ponens)
2. $\frac{p \rightarrow q, \bar{q}}{\bar{p}}$ (Quy tắc kết luận ng-ợc Modus Tollens)
3. $\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$ (Quy tắc suy luận bắc cầu)
4. $\frac{p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow p}{p \leftrightarrow q}$
5. $\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow p}{p \rightarrow q}$
6. $\frac{p \vee q, \bar{p}}{q}$
7. $\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \vee q \rightarrow r}$

$$8. \quad \frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{r \rightarrow q \wedge r}$$

$$9. \quad \frac{p \leftrightarrow q, r \leftrightarrow s}{p \wedge r \rightarrow q \wedge s}$$

$$10. \quad \frac{p \leftrightarrow q, r \leftrightarrow s}{p \vee r \rightarrow q \vee s}$$

$$11. \quad \frac{p \rightarrow q, r \rightarrow s}{p \wedge r \rightarrow q \wedge s}$$

$$12. \quad \frac{p \rightarrow q, r \rightarrow s}{p \vee r \rightarrow q \vee s}$$

$$13. \quad \frac{p \rightarrow q}{\bar{q} \rightarrow \bar{p}} \quad (\text{Quy tắc phản đảo})$$

$$14. \quad \frac{p \wedge q}{p \rightarrow q}, \frac{p \wedge q}{q \rightarrow p}$$

$$15. \quad \frac{p \vee q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$

$$16. \quad \frac{\bar{p} \wedge q, \bar{p} \rightarrow \bar{q}}{p} \quad (\text{quy tắc chứng minh phản chứng})$$

$$17. \quad \frac{\bar{p} \rightarrow q, \bar{q}}{p}$$

$$18. \quad \frac{p \wedge \bar{q} \rightarrow r \wedge \bar{r}}{p \rightarrow q}$$

$$19. \quad \frac{p \wedge \bar{q} \rightarrow \bar{p}}{p \rightarrow q}$$

$$20. \quad \frac{\bar{q} \rightarrow \bar{p}}{p \rightarrow q}$$

TIÊU CHŨ ĐỀ 2.5.

Hàm mệnh đề - Mệnh đề tổng quát và tồn tại

Thông tin cơ bản

5.1 Khái niệm về hàm mệnh đề

Ta xét các ví dụ sau :

1. “Số tự nhiên n chia hết cho 3”

về phương diện ngôn ngữ thì đây là một câu. Nhưng câu này chưa phản ánh tính đúng hoặc sai một thực tế khách quan nào, cho nên nó chưa phải là mệnh đề. Song nếu ta thay n bởi một số tự nhiên cụ thể. Chẳng hạn

~ Thay $n = 45$ ta được mệnh đề đúng: “45 chia hết cho 3”

~ thay $n = 103$ ta được mệnh đề sai: “103 chia hết cho 3”

2. “ $2x + 3 > 17$ ”

Tương tự trong ví dụ 1, “ $2x + 3 > 17$ ” chưa phải là mệnh đề, song nếu ta thay x bởi một số thực cụ thể, chẳng hạn

~ Thay $x = 10$ ta có mệnh đề đúng “ $2 \cdot 10 + 3 > 17$ ”

~ Thay $x = 1$ ta có mệnh đề sai “ $2 \cdot 1 + 3 > 17$ ”

3. Câu “Ông A là nhà vật lý vĩ đại” cũng chưa phải là mệnh đề. Nếu ta chọn “Ông A” là

Niu-ton ta được mệnh đề đúng “Niu ton là nhà vật lý vĩ đại”. Nếu ta chọn Ông A” là “Tổ Hữu” ta được mệnh đề sai. “Tổ Hữu là nhà vật lý vĩ đại”

4. Câu “Tứ giác ABCD là hình chữ nhật” chưa phải là mệnh đề. Nếu ta chọn ABCD là tứ giác trong hình (a) ta được mệnh đề sai, hình (b) ta được mệnh đề đúng

hình vẽ

Từ các ví dụ trên ta đi đến định nghĩa sau:

Những câu có chứa các biến mà bản thân nó chưa phải là mệnh đề nhưng khi thay các biến đó bởi những phần tử xác định thuộc tập X thì nó trở thành mệnh đề (đúng hoặc sai) ta sẽ gọi là *hàm mệnh đề*

Tập X gọi là *miền xác định*; tập các phần tử thuộc X khi thay vào ta được mệnh đề đúng gọi là *miền đúng*; thay vào ta được mệnh đề sai gọi là *miền sai* của hàm mệnh đề đó

Ta dùng kí hiệu $T(n)$, $F(x)$, $G(y)$, để chỉ các hàm mệnh đề

~ Chẳng hạn:

Hàm mệnh đề $T(n) =$ “Số tự nhiên n chia hết cho 3” có miền xác định là tập các số tự nhiên. Tập các số tự nhiên chia hết cho 3 là miền đúng của $T(n)$. Tập các số tự nhiên không chia hết cho 3 là miền sai của $T(n)$

~ Hàm mệnh đề “Tứ giác ABCD là hình chữ nhật” có miền xác định là tập các hình tứ giác, miền đúng là tập các hình chữ nhật

5.2. Các phép toán trên hàm mệnh đề

Dựa vào các phép toán trên mệnh đề (phủ định, hội, tuyển.....) ta xây dựng các phép toán tương tự trên các hàm mệnh đề

a) Phép phủ định

Cho $F(x)$ là hàm mệnh đề xác định trên miền X . Ta gọi phủ định của hàm mệnh đề $F(x)$ là một hàm mệnh đề, kí hiệu là $\neg F(x)$, sao cho đối với mỗi $a \in X$, $\neg F(a)$ là mệnh đề phủ định của mệnh đề $F(a)$

~ Chẳng hạn, phủ định của hàm mệnh đề

~ $T(n) = \text{“số tự nhiên } n \text{ chia hết cho } 3\text{”}$ là hàm mệnh đề $T(n) = \text{“số tự nhiên } n \text{ không chia hết cho } 3\text{”}$

~ $F(x) = \text{“}2x + 3 > 17\text{”}$ là hàm mệnh đề $\neg F(x) = \text{“}2x + 3 \leq 17\text{”}$

b) Phép hội

Cho $F(x)$ và $G(x)$ là hai hàm mệnh đề xác định trên tập X . Ta gọi hội của hai hàm mệnh đề $F(x)$ và $G(x)$ là một hàm mệnh đề $H(x)$, kí hiệu là $H(x) = F(x) \wedge G(x)$, xác định trên miền X sao cho với mọi $a \in X$ ta có mệnh đề $H(a)$ là hội của hai mệnh đề $F(a)$ và $G(a)$

Chẳng hạn, hội của hai hàm mệnh đề

$F(n) = \text{“Số tự nhiên } n \text{ chia hết cho } 3\text{”}$

và $G(n) = \text{“Số tự nhiên } n \text{ chia hết cho } 5\text{”}$

là hàm mệnh đề

$H(n) = \text{“Số tự nhiên } n \text{ chia hết cho } 3 \text{ và } 5\text{”}$

Cũng tương tự như trên ta định nghĩa các phép tuyển, phép kéo theo và phép tương đương trên các hàm mệnh đề

5.3. Mệnh đề tổng quát

Ta đặt vào trước hàm mệnh đề $F(x) = \text{“}2x + 3 > 17\text{”}$ cụm từ “với mọi $x \in \mathbb{R}$ ” ta được mệnh đề sai:

“Với mọi $x \in \mathbb{R}$, $2x + 3 > 17$ ”

Một cách tổng quát, cho $T(x)$ là hàm mệnh đề xác định trên miền X . Ta gọi mệnh đề dạng

“Với mọi $x \in X$ ta có $T(x)$ ”

hoặc “Với mọi $x \in X$, $T(x)$ ” là mệnh đề tổng quát (hoặc toàn thể, phổ biến, phổ cập,...). Kí hiệu là

$\forall x \in X, T(x)$ hoặc $(\forall x \in X) T(x)$ hoặc $T(x) \forall x \in X$

Kí hiệu gọi là lượng từ tổng quát (hoặc toàn thể, phổ biến, phổ cập,)

Ví dụ 5.1 :

~ “ $n \in \mathbb{N}$, n là số nguyên tố” là mệnh đề sai

~ “ $n \in \mathbb{N}$, $2n$ là số chẵn” là mệnh đề đúng

~ “ $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 1 > 0$ ” là mệnh đề đúng

~ “ $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 = 0$ ” là mệnh đề sai

Chú ý

Mệnh đề tổng quát trong thực tế được diễn đạt dưới nhiều hình thức khác nhau.

~ Chẳng hạn

~ Tất cả người Việt nam đều nói thạo tiếng Anh

~ Mọi người Việt nam đều nói thạo tiếng Anh

~ Người Việt nam nào chẳng nói thạo tiếng Anh

~ Đã là người Việt nam thì ai chẳng nói thạo tiếng Anh

5.4 Mệnh đề tồn tại

Ta đặt trước hàm mệnh đề $F(x) = \text{“}2x + 3 > 17\text{”}$ cụm từ “Tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho....” ta được mệnh đề đúng

“Tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $2x + 3 > 17$ ”

Một cách tổng quát, cho $T(x)$ là hàm mệnh đề xác định trên miền X . Ta gọi mệnh đề dạng “Tồn tại $x \in X$ sao cho $T(x)$ ” là mệnh đề tồn tại. Kí hiệu là

$\exists x \in X : T(x)$ hoặc $T(x)$

Ký hiệu gọi là lượng từ tồn tại

Ví dụ 5.2 :

~ “Tồn tại số tự nhiên n sao cho n là số nguyên tố” là mệnh đề đúng

~ “Tồn tại số thực x sao cho $x^2 - 1 = 0$ ” là mệnh đề đúng

~ “Tồn tại số thực x sao cho $x^2 + 1 = 0$ ” là mệnh đề sai

Chú ý

1. Trong thực tế, mệnh đề tồn tại còn được diễn đạt dưới những dạng khác nhau, chẳng hạn:

~ Tồn tại ít nhất một người Việt nam nói thạo tiếng Anh

~ Có một người Việt nam nói thạo tiếng Anh

~ ít ra cũng có một người Việt nam nói thạo tiếng Anh

~ Có nhiều người Việt nam nói thạo tiếng Anh

.....
2. Ta dùng kí hiệu “ $\exists x \in X : T(x)$ ” với nghĩa tồn tại duy nhất một $x \in X$ sao cho $T(x)$ ”

5.5. Phủ định của mệnh đề tồn tại và tổng quát

Phủ định các mệnh đề tổng quát và tồn tại được thiết lập theo quy tắc dưới đây

$$\overline{\forall x \in X, T(x)} \equiv \exists x \in X : \overline{T(x)}$$

$$\overline{\exists x \in X : T(x)} \equiv \forall x \in X, \overline{T(x)}$$

Ví dụ 5.3 :

~ Mọi tam giác đều đều là tam giác cân \square Có một tam giác đều không phải là tam giác cân

~ Người Việt nam nào chẳng nói thạo tiếng Anh \square Có ít nhất một người Việt nam nói không thạo tiếng Anh

~ Có một số tự nhiên chia hết cho 3 \square Mọi số tự nhiên đều chia hết cho 3

~ Có ít nhất một số thực x là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 4 = 0$ \square Mọi số thực x đều không phải là nghiệm của phương trình $x^2 - 3x - 4 = 0$ \square Phương trình $x^2 - 3x - 4 = 0$ không có nghiệm thực

Hoạt động.

Sinh viên tự đọc thông tin nguồn và tài liệu tham khảo ở nhà. Trên lớp sinh viên thảo luận theo nhóm 2, 3 người để thực hiện các nhiệm vụ sau nằm trong các hoạt động 5.1 và 5.2. Sau đó đại diện các nhóm trình bày và giáo viên tổng kết

Hoạt động 5.1: Tìm hiểu khái niệm hàm mệnh đề

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1 : Định nghĩa

~ Hàm mệnh đề

~ Miền xác định, miền đúng, miền sai của hàm mệnh đề

Nhiệm vụ 2 :

Xây dựng ba ví dụ về hàm mệnh đề. Chỉ rõ miền xác định, miền đúng và miền sai của mỗi hàm mệnh đề đó

Nhiệm vụ 3 :

Định nghĩa phép phủ định, phép hội, phép tuyển, phép kéo theo và phép tương đương giữa hai hàm mệnh đề

Nhiệm vụ 4 :

Xây dựng ví dụ minh họa cho mỗi phép toán nêu trên

Đánh giá

1. Tìm miền đúng của các hàm mệnh đề xác định trên tập số tự nhiên

a) a chia hết cho 5

b) a chia cho 5 dư 4

c) a là số nguyên tố

d) $a^2 - 5a + 6 = 0$

2. Tìm miền đúng của các hàm mệnh đề xác định trên tập các số thực

a, $x^2 - 7 < 0$

b, $3x^2 - 7x - 10 = 0$

c, $\sin 2x + \cos 2x = 1$

d, $|\bar{x} - 5| < 6$

3. Xây dựng hai ví dụ về

~ Phép phủ định

~ Phép hội

~ Phép tuyển

~ Phép kéo theo

~ Phép tương đương

Trên các hàm mệnh đề

Hoạt động 5.2. Tìm hiểu mệnh đề tổng quát và mệnh đề tồn tại

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1 : Trình bày khái niệm mệnh đề tổng quát và mệnh đề tồn tại

Nhiệm vụ 2 : Phát biểu quy tắc phủ định mệnh đề tổng quát và mệnh đề tồn tại

Nhiệm vụ 3 : Xây dựng hai ví dụ về

~ Phủ định mệnh đề tổng quát

~ Phủ định mệnh đề tồn tại

Đánh giá

1. Hãy diễn đạt các mệnh đề sau bằng lời :

a) $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} : x + y^2 > 1$

b) $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} : x^2 - y^2 = 0$

c) $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} : n + m$ chia hết cho 3

d) $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} : n, m$ là phân số tối giản

e) Sau đó hãy lập mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề đó

2. Hãy chứng tỏ nhận định sau là sai “Mọi hình tứ giác có một đường tròn ngoại tiếp nó”

3. Hãy chứng tỏ nhận định sau là sai :

a) Có một số tự nhiên mà mọi số chẵn đều nhỏ hơn nó

- b) Mọi người đàn ông đều có một người đàn bà là vợ của người ấy
- c) Mỗi tháng đều có ba ngày chủ nhật là ngày lễ

TIÊU CHỦ ĐỀ 2.6. SUY LUẬN VÀ CHỨNG MINH

Thông tin cơ bản

6.1. Suy luận

Suy luận là rút ra một mệnh đề mới từ một hay nhiều mệnh đề đã biết. Những mệnh đề đã có gọi là *tiền đề*, một mệnh đề nói được rút ra gọi là *kết luận* của suy luận.

Hai kiểu suy luận thường gặp là: *suy luận diễn dịch* (hay còn gọi là suy diễn) và *suy luận nghe có lí* (hay suy luận có lí).

a) Suy luận diễn dịch :

Suy luận diễn dịch (hay còn gọi là suy diễn) là suy luận theo những quy tắc suy luận tổng quát (của logic mệnh đề). Trong suy luận diễn dịch, nếu các tiền đề đúng thì kết luận rút ra cũng phải đúng.

Trong logic vị từ, ngoài những quy tắc suy luận của logic mệnh đề ta thường gặp và vận dụng hai quy tắc suy luận dưới đây:

$$1) \frac{(\forall x \in X) P(x), a \in X}{P(a)}$$

Có nghĩa là nếu $P(x)$ đúng với mọi $x \in X$ và $a \in X$ thì $P(a)$ là mệnh đề đúng

$$2) \frac{(\forall x \in X) P(x) \rightarrow Q(x)}{P(a)}$$

Có nghĩa là :

Nếu $P(x) \rightarrow Q(x)$ đúng với mọi $x \in X$ và $P(a)$ đúng thì $Q(a)$ cũng là mệnh đề đúng.

Ví dụ 6.1 :

~ Mọi số tự nhiên có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì nó chia hết cho 9.

~ Số 432135 có tổng các chữ số chia hết cho 9.

Vậy 432135 chia hết cho 9.

Ví dụ 6.2 :

~ Nếu tứ giác là hình thoi thì hai đường chéo của nó vuông góc với nhau.

~ Tứ giác ABCD là hình thoi.

Vậy $AC \perp BD$.

Ví dụ 6.3 :

~ Với mọi $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

~ $\square \mathbb{R}$

Vậy

Trong ba ví dụ nêu trên, các tiền đề đều đúng, ta đã vận dụng các quy tắc suy luận 1, 2 vừa nêu trên. Vì vậy các kết luận của chúng phải đúng.

Ví dụ 6.4 :

~ 672 chia hết cho 3.

~ 672 chia hết cho 4

Vậy 672 chia hết cho 3 và 4.

Trong ví dụ này, các tiên đề đều đúng, ta đã vận dụng quy tắc suy luận:

Ví dụ 6.5 :

Từ các tiên đề

- ~ Nếu a chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 3.
 - ~ Nếu a chia hết cho 3 thì tổng các chữ số của nó chia hết cho 3.
- Ta rút ra kết luận : “Nếu a chia hết cho 6 thì tổng các chữ số của nó chia hết cho 3”.
ở đây các tiên đề đều là những định lý đã được chứng minh trong toán học. Ta đã vận dụng quy tắc suy luận bắc cầu :

b) Suy luận nghe có lí:

Suy luận nghe có lí (hay còn gọi là suy luận có lí) là suy luận không theo một quy tắc suy luận tổng quát nào. Nó chỉ xuất phát từ những tiên đề đúng để rút ra một kết luận. Kết luận này có thể đúng mà cũng có thể sai.

Mặc dầu suy luận nghe có lí có hạn chế nêu trên nhưng nó có ý nghĩa rất quan trọng trong khoa học và đời sống : giúp chúng ta từ những quan sát cụ thể có thể rút ra những giả thuyết, phán đoán để rồi sau đó tìm cách chứng minh chặt chẽ giả thuyết đó. Nó đặt cơ sở cho nhiều phát minh trong khoa học.

Trong toán học, hai kiểu suy luận nghe có lí thường sử dụng là :

- ~ Phép quy nạp không hoàn toàn.
- ~ Phép tương tự.

Ví dụ 6.6 :

Từ các tiên đề :

- ~ $4 + 3 = 3 + 4$
- ~ $15 + 48 = 48 + 15$
- ~ $243 + 358 = 358 + 243$

Ta rút ra kết luận: Tổng của hai số tự nhiên không thay đổi khi ta thay đổi thứ tự của các số hạng trong tổng đó.

Đây là phép quy nạp không hoàn toàn. Trong phép suy luận này, các tiên đề đúng và kết luận rút ra cũng đúng.

Ví dụ 6.7 :

Từ các tiên đề:

- ~ 42 chia hết cho 3
- ~ 72 chia hết cho 3
- ~ 132 chia hết cho 3

Ta rút ra kết luận: Những số có chữ số hàng đơn vị bằng 2 thì nó chia hết cho 3.

Đây là phép quy nạp không hoàn toàn. Trong phép suy luận này, xuất phát từ những tiên đề đúng mà kết luận rút ra lại sai.

Ví dụ 6.8 :

Từ định lý trong hình học phẳng “nếu hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau”.

Ta đưa ra một giả thuyết “Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau”.

Đây là phép suy luận tương tự. Giả thuyết nêu ra ở đây là đúng.

Ví dụ 6.9 :

Cũng từ định lí nêu trên trong ví dụ trên ta đưa ra giả thuyết “Hai mặt phẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau”.

Giả thuyết nêu ở đây là sai.

6.2. Chứng minh

Trong suy luận diễn dịch, từ các tiền đề A, B ta rút ra kết luận C bằng cách vận dụng các quy tắc suy luận tổng quát. Ta gọi phép suy luận dạng này là *suy luận hợp logic*. ở đây chúng ta chỉ quan tâm đến hình thức hay cấu trúc của suy luận mà không quan tâm đến nội dung, ý nghĩa của các mệnh đề trong suy luận đó.

Trong toán học, nếu các tiền đề A, B của suy luận đều đúng (là những định nghĩa, tiên đề hoặc định lí đã được chứng minh trước đó) ta rút ra kết luận C thì ta nói C là một kết luận chứng minh, còn suy luận đó là một chứng minh.

Vậy chứng minh một mệnh đề X là vạch rõ rằng X là kết luận logic của các tiền đề đúng.

Mỗi chứng minh toán học bao gồm một số hữu hạn bước, trong đó mỗi bước là một suy luận diễn dịch, trong đó ta đã vận dụng một quy tắc suy luận tổng quát.

Trong trường hợp chứng minh chỉ gồm một bước thì đó chính là một phép suy luận diễn dịch với các tiền đề đúng.

Một phép chứng minh gồm ba phần:

1. *Luận đề* là mệnh đề ta phải chứng minh.
2. *Luận cứ* là những mệnh đề mà tính đúng đắn của nó đã được khẳng định (thường là các định nghĩa, tiên đề hoặc định lí đã được chứng minh trước đó...) dùng làm tiền đề trong mỗi bước suy luận.
3. *Luận chứng* là những quy tắc suy luận tổng quát được sử dụng trong mỗi bước suy luận của chứng minh đó.

Như vậy chứng minh từ tiền đề A dẫn đến kết luận B ($A \square B$) là:

- ~ Thiết lập một dãy các bước suy luận diễn dịch.
- ~ Trong mỗi bước ta chỉ rõ tiền đề, kết luận và quy tắc suy luận tổng quát được áp dụng.

Chẳng hạn:

- ~ Mỗi suy luận trong các ví dụ 6.1- 6.5 là một chứng minh (vì các tiền đề trong mỗi suy luận đều đúng và ta đều áp dụng những quy tắc suy luận tổng quát của logic mệnh đề).

- ~ Xét các suy luận sau :

Từ hai tiền đề:

+ Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$, nếu $a^2 = b^2$ thì $a = b$

+ $52 = (5)^2$

Rút ra kết luận $5 = 5$!

Từ hai tiền đề :

+ Nếu tổng các chữ số của một số chia hết cho 3 thì nó chia hết cho 3.

+ 125 có tổng các chữ số chia hết cho 3.

Rút ra kết luận 125 chia hết cho 3.

Trong cả hai suy luận này, rõ ràng kết luận rút ra đều sai (vì tiền đề 1 của suy luận thứ nhất và tiền đề 2 của suy luận thứ hai đều sai). Vậy chúng là suy luận hợp logic nhưng *không phải là một chứng minh*.

6.3. Các phương pháp chứng minh toán học thường gặp

Có nhiều phương pháp chứng minh, dưới đây ta trình bày một số phương pháp chứng minh thông dụng nhất.

a) Phương pháp chứng minh trực tiếp

Cơ sở của phương pháp chứng minh trực tiếp là quy tắc suy luận bắc cầu.

Khi chứng minh từ tiền đề A đến kết luận B bằng phương pháp chứng minh trực tiếp, ta tiến hành theo sơ đồ sau:

A \square A1

A1 \square A2

An-1 An

An B.

áp dụng quy tắc suy luận bắc cầu ta nhận được điều phải chứng minh.

Ví dụ 6.10 :

Ta phân tích chứng minh định lí “Hình bình hành có hai đường chéo cắt nhau ở trung điểm của mỗi đường”.

Định lí được tóm tắt như sau (Luận đề) :

Giả thiết ABCD là hình bình hành

AC cắt BD tại O.

Kết luận OA = OC và OB = OD

<p><i>Suy luận 1:</i> $A \rightarrow A_1$</p> <ul style="list-style-type: none"> Hình bình hành có các cặp cạnh đối song song (định nghĩa) ABCD là hình bình hành 	<p>Luận chứng</p> $\frac{p \rightarrow q, p}{q}$
<p>$AB \parallel CD; AD \parallel BC$</p> <p><i>Suy luận 2:</i> $A_1 \rightarrow A_2$</p> <ul style="list-style-type: none"> Hai góc so le trong của hai đường song song bị cắt bởi một cát tuyến thì bằng nhau (định lý) $AB \parallel CD$ và BD cắt AB, CD; $AD \parallel BC$ và BD cắt AD, BC; AC cắt AD, BC 	$\frac{p \rightarrow q, p}{q}$
<p>$\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ và $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$</p> <p><i>Suy luận 3:</i> $A_2 \rightarrow A_3$</p> <ul style="list-style-type: none"> Hai đa giác có một cặp cạnh bằng nhau và các góc kề cạnh đó bằng nhau đôi một thì bằng nhau (định lý) BD chung, $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ và $\hat{B}_2 = \hat{D}_2$ 	$\frac{p \rightarrow q, p}{q}$
<p>$\Delta ABD = \Delta CDB$</p> <p><i>Suy luận 4:</i> $A_3 \rightarrow A_4$</p> <ul style="list-style-type: none"> Hai tam giác bằng nhau có các cặp cạnh t-ong ứng bằng nhau (định lý) $\Delta ABD = \Delta CDB$ 	$\frac{p \rightarrow q, p}{q}$
<p>$AB = CD; AD = CB$</p> <p><i>Suy luận 5:</i> $A_4 \rightarrow A_5$</p> <ul style="list-style-type: none"> Hai tam giác có một cặp cạnh bằng nhau và các cặp góc kề cạnh đó bằng nhau thì bằng nhau (định lý). $AB = CD, \hat{A}_1 = \hat{C}_1$ và $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ 	$\frac{p \rightarrow q, p}{q}$
<p>$\Delta AOB = \Delta COD$</p> <p><i>Suy luận 6:</i> $A_5 \rightarrow A_6$</p> <ul style="list-style-type: none"> Hai tam giác bằng nhau có các cặp cạnh t-ong ứng bằng nhau. $\Delta AOB = \Delta COD$ 	$\frac{p \rightarrow q, p}{q}$
<p>$OA = OC$ và $OB = OD$</p> <p><i>Suy luận 7:</i> $A_6 \rightarrow B$</p> <p>$A \rightarrow A_1$</p> <p>$A_1 \rightarrow A_2$</p> <hr/> <p>$A_6 \rightarrow B$</p>	$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$
<p>$A \rightarrow B$</p>	

- ~ Qua phân tích trên đây ta thấy:
- ~ Giả thiết và kết luận của định lí là luận đề của chứng minh.
- ~ Chứng minh của định lí trên có bảy bước, trong mỗi bước đều dùng các định nghĩa hoặc định lí đã được chứng minh làm luận cứ và ngầm sử dụng một suy luận tổng quát làm luận chứng.
- ~ ở phổ thông, trong các chứng minh toán học người ta thường bỏ đi nhiều tiền đề trong mỗi bước suy luận. Vì vậy chứng minh được thực hiện theo sơ đồ thu gọn:

$$A \square A1 \square A2 \square \dots \square An - 1 \square An \square B.$$
- ~ Trong phép chứng minh này (và nhiều phép chứng minh trực tiếp khác) ta thường sử dụng quy tắc suy luận kết luận và suy luận bắc cầu. Vì vậy hai phép suy luận này có vai trò đặc biệt quan trọng trong chứng minh trực tiếp.

b) Phương pháp chứng minh phản chứng

Trong trường hợp tổng quát, muốn chứng minh từ tiền đề A dẫn đến kết luận B bằng phương pháp phản chứng ta tiến hành theo sơ đồ sau:

- ~ Giả sử A đúng mà B sai ($G(A \wedge \bar{B}) = 1$)
- ~ $A \wedge \bar{B}$
- ~ áp dụng quy tắc suy luận

$$\frac{A \wedge \bar{B} \rightarrow C \wedge \bar{C}}{A \rightarrow B}$$

Ta rút ra kết luận $A \square B$ là đúng.

- ~ Đôi khi sơ đồ trên được thu gọn như sau:
- ~ Giả sử A đúng mà B sai (tức đúng)
- ~

- ~ áp dụng quy tắc suy luận:

$$\frac{\bar{B} \rightarrow \bar{A}}{A \rightarrow B}$$

Ta rút ra kết luận $A \square B$ là đúng.

Ví dụ 6.11 :

Ta phân tích chứng minh định lí trong hình học phẳng “Nếu hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau”.

Định lí được tóm tắt như sau (luận đề).

Giả thiết	$a \perp c$ và $b \perp c$ ($a \neq b$)
Kết luận	$a // b$

Giả sử a không song song với b. Suy ra a cắt b tại M. Như vậy từ M ta kẻ được hai đường vuông góc với đường thẳng C.

Mệnh đề này sai, vì nó mâu thuẫn với mệnh đề đúng đã biết trước “Từ một điểm ở ngoài một đường thẳng ta chỉ kẻ được một và chỉ một đường vuông góc tới đường thẳng đó”.

Vậy mệnh đề “Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì cắt nhau” là sai. Điều đó chứng tỏ rằng mệnh đề phải chứng minh là đúng.

Ví dụ 6.12 :

Chứng minh rằng phương trình bậc nhất:

$$ax + b = 0 \quad (1)$$

có không quá một nghiệm.

Giả sử phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Theo định nghĩa ta có:

$$ax_1 + b = 0$$

$$\text{và } ax_2 + b = 0$$

áp dụng tính chất bắc cầu ta có:

$$ax_1 + b = ax_2 + b$$

áp dụng luật giảm ước đối với phép cộng ta có:

$$ax_1 = ax_2, a \neq 0$$

áp dụng luật giảm ước đối với phép nhân ta có:

$$x_1 = x_2$$

Như vậy x_1 vừa khác lại vừa bằng x_2 . Điều này trái với luật mâu thuẫn. Vậy ta có điều phải chứng minh.

c) Phương pháp chứng minh quy nạp hoàn toàn.

Giả sử tập hữu hạn $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

và $T(x)$ là hàm mệnh đề xác định trong tập X .

Ta phải chứng minh mệnh đề:

$$x \in X, T(x)$$

là đúng bằng phương pháp quy nạp hoàn toàn. Ta cần chứng tỏ rằng $T(a_1), T(a_2), \dots, T(a_n)$ đều là những mệnh đề đúng. Từ đó kết luận mệnh đề trên là đúng.

ở đây ta áp dụng quy tắc suy luận tổng quát:

$$\frac{T(a_1), T(a_2), \dots, T(a_n)}{\forall x \in X, T(x)}$$

Ví dụ 6.13 :

Chứng minh rằng tích của năm số tự nhiên liên tiếp thì chia hết cho 5.

Giả sử n là số tự nhiên và $T = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$. Gọi D là tập các số dư của phép chia n cho 5. Vậy $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- ~ Nếu số dư bằng 0 thì $n \equiv 0 \pmod{5}$. Suy ra $T \equiv 0 \pmod{5}$
- ~ Nếu số dư bằng 1 thì $(n+4) \equiv 0 \pmod{5}$. Suy ra $T \equiv 0 \pmod{5}$
- ~ Nếu số dư bằng 2 thì $(n+3) \equiv 0 \pmod{5}$. Suy ra $T \equiv 0 \pmod{5}$
- ~ Nếu số dư bằng 3 thì $(n+2) \equiv 0 \pmod{5}$. Suy ra $T \equiv 0 \pmod{5}$
- ~ Nếu số dư bằng 4 thì $(n+1) \equiv 0 \pmod{5}$. Suy ra $T \equiv 0 \pmod{5}$

Vậy T chia hết cho 5 với mọi số tự nhiên.

d) Phương pháp chứng minh quy nạp toán học

Để chứng minh tính chất $T(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n (hoặc với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$) tức là phải chứng minh mệnh đề tổng quát.

$n \in \mathbb{N}, T(n)$ (hoặc $n \geq n_0, T(n)$) đúng.

Ta tiến hành theo các bước dưới đây:

Bước 1: Chứng minh $G(T(0)) = 1$ (hoặc $G(T(n_0)) = 1$) hay tính chất $T(n)$ đúng với $n = 0$ (hoặc $n = n_0$).

Bước 2: Giả sử $G(T(k)) = 1$ hay tính chất $T(n)$ đúng với $n = k$. Ta chứng minh $G(T(k+1)) = 1$ hay tính chất $T(n)$ cũng đúng với $n = k + 1$.

Từ đó ta rút ra kết luận: tính chất $T(n)$ đúng với mọi số tự nhiên n (hoặc với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$) hay

$n \in \mathbb{N}, T(n)$ (hoặc $n \geq n_0, T(n)$) là mệnh đề đúng

Cơ sở logic của phương pháp chứng minh này là quy tắc suy luận tổng quát sau:

$$\frac{T(0), \forall k \in \mathbb{N}, (T(k) \rightarrow T(k+1))}{\forall n \in \mathbb{N}, T(n)}$$

Ví dụ 6.14 :

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}, \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Với $n = 2$ ta có:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$$

Vậy công thức trên đúng với $n = 2$.

Giả sử công thức trên đúng với $n = k \geq 2$, tức là :

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k \times (k+1)} = \frac{k}{k+1}, \text{ với } k \geq 2$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k \times (k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k \times (k+2) + 1}{(k+1) \times (k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

Vậy công thức trên đúng với $n = k + 1$

Từ đó suy ra công thức trên đúng với mọi $n \geq 2$

Ví dụ 6.15 :

Cho n điểm trong mặt phẳng ($n \geq 2$). Hỏi khi nối n điểm đó với nhau ta sẽ được bao nhiêu đoạn thẳng?

Ta chứng minh số đoạn thẳng đếm được khi nối n điểm đó với nhau là:

$$S = \frac{(n-1) \times n}{2}$$

Với $n = 2$ nối hai điểm cho trước ta được một đoạn thẳng. Ta có:

$$1 = \frac{(2-1) \times 2}{2}$$

Vậy công thức trên đúng với $n = 2$.

Giả sử công thức trên đúng với $n = k$. Tức là khi nối k điểm cho trước trong mặt phẳng ta được đoạn thẳng.

Giả sử trong mặt phẳng cho trước $k + 1$ điểm, khi nối k điểm đầu với nhau (theo giả thiết ở phần trên) ta được:

$$\frac{(k-1) \times k}{2}$$

đoạn thẳng. Bây giờ ta nối điểm thứ $k + 1$ với k điểm còn lại ta được thêm $k + 1$ đoạn thẳng nữa. Vậy số đoạn thẳng đếm được khi nối $k + 1$ điểm đó với nhau là:

$$\frac{(k-1) \times k}{2} + (k+1) = \frac{k \times (k+1)}{2} \text{ (đoạn)}$$

Vậy công thức trên đúng với $n = k + 1$.

Từ đó suy ra: Nếu cho trước n điểm phân biệt trong mặt phẳng thì nối chúng với nhau ta sẽ được: đoạn thẳng.

Hoạt động

Sinh viên tự đọc tài liệu và thông tin nguồn ở nhà. Trên lớp nghe giáo viên giảng để thực hiện các nhiệm vụ nêu trong các hoạt động 6.1 và 6.2:

Hoạt động 6.1. Tìm hiểu các phép suy luận.

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1 : Trình bày các khái niệm

- ~ Suy luận.
- ~ Suy luận diễn dịch.
- ~ Suy luận nghe có lí (phép quy nạp và phép tương tự).
- ~ Nhiệm vụ 2 : Xây dựng ví dụ về suy luận diễn dịch trong
 - ~ Số học
 - ~ Hình học
 - ~ Đại số

Trong mỗi suy luận hãy chỉ rõ đã vận dụng những quy tắc suy luận tổng quát nào

- ~ Nhiệm vụ 3: Xây dựng hai ví dụ về suy luận quy nạp không hoàn toàn
 - ~ Trong đó các tiền đề đều đúng mà kết luận rút ra cũng đúng.
 - ~ Trong đó các tiền đề trên đều đúng mà kết luận rút ra lại sai.

- ~ Nhiệm vụ 4 : Xây dựng hai ví dụ về suy luận tương tự, trong đó
 - ~ Một giả thuyết đúng.
 - ~ Một giả thuyết không đúng.

Đánh giá

1. Điền d vào ô trống, nếu là suy luận diễn dịch; q vào ô trống nếu là suy luận quy nạp và vào ô trống, nếu là suy luận tương tự.

a) Với mọi số tự nhiên a, b, c ta có:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

áp dụng:

$$4 \times (25 + 15) = 4 \times 25 + 4 \times 15 \quad \square$$

b) Ta có:

$a \times (b + c)$	$a \times b + a \times c$
$3 \times (6 + 4) = 30$	$3 \times 6 + 3 \times 4 = 30$
$15 \times (23 + 27) = 750$	$15 \times 23 + 15 \times 27 = 750$
$140 \times (16 + 44) = 8400$	$140 \times 16 + 140 \times 44 = 8400$

Vậy $a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad \square$

c) Từ hệ thức $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ta đưa ra giả thuyết “ $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cotg}^2 x = 1$ ” \square

d) Từ định lí trong hình học phẳng “Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau ta đưa ra giả thuyết trong hình học không gian. “Hai đường thẳng trong không gian vuông góc với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau” \square

2. Xây dựng ba ví dụ về suy luận diễn dịch trong số học. Chỉ rõ những quy tắc suy luận tổng quát đã vận dụng trong suy luận đó.

3. Cũng hỏi như bài 2 trong hình học.

4. Cũng hỏi như bài 2 trong đại số.

5. Xây dựng hai ví dụ về suy luận quy nạp trong số học (một ví dụ với các tiền đề đúng và kết luận rút ra cũng đúng, một ví dụ với các tiền đề đúng mà kết luận rút ra lại sai).

6. Cũng hỏi như bài 5 trong hình học.

7. Cũng hỏi như bài 5 trong đại số.

8. Xây dựng hai phép suy luận tương tự (một phép đưa ra giả thuyết đúng và một phép đưa ra giả thuyết sai).

Hoạt động 6.2. Tìm hiểu các phép chứng minh.

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1 : Trình bày:

- ~ Khái niệm về chứng minh toán học.
- ~ Phân biệt giữa suy luận và chứng minh.

Nhiệm vụ 2 :

Xác định cấu trúc của một chứng minh toán học. Xây dựng một ví dụ về chứng minh để làm rõ cấu trúc nêu trên trong chứng minh đó.

Nhiệm vụ 3 : Tìm hiểu phương pháp chứng minh trực tiếp:

- ~ Nêu cơ sở của phương pháp chứng minh trực tiếp.
- ~ Phân tích sơ đồ của phương pháp chứng minh trực tiếp.
- ~ Xây dựng ví dụ về phương pháp chứng minh trực tiếp trong: số học, hình học và đại số.

Nhiệm vụ 4 : Tìm hiểu phép chứng minh phản chứng.

- ~ Nêu của logic của phép chứng minh phản chứng.
- ~ Trình bày sơ đồ thực hiện một phương pháp chứng minh bằng phản chứng.
- ~ Xây dựng ví dụ về phương pháp chứng minh phản chứng trong số học, hình học và đại số.
- ~ Nhiệm vụ 5 : Tìm hiểu phương pháp chứng minh quy nạp hoàn toàn.
- ~ Nêu cơ sở của phép chứng minh quy nạp hoàn toàn.
- ~ Trình bày phương pháp chứng minh một luận đề bằng phép chứng minh quy nạp hoàn toàn.
- ~ Xây dựng ví dụ về phép chứng minh quy nạp hoàn toàn.
- ~ Nhiệm vụ 6 : Tìm hiểu phương pháp chứng minh quy nạp toán học:
- ~ Nêu của logic của phương pháp chứng minh quy nạp toán học.
- ~ Nêu các bước chứng minh bằng quy nạp toán học.
- ~ Xây dựng ví dụ về chứng minh bằng quy nạp toán học trong số học và hình học.

Đánh giá

1. Hãy phân tích cấu trúc của chứng minh định lí sau trong sách giáo khoa toán 9 “Số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn”.
Cho biết chứng minh đó thuộc loại nào?
2. Chứng minh rằng tích của ba số tự nhiên liên tiếp thì chia hết cho 3.
Cho biết chứng minh trên thuộc loại nào?
3. Xây dựng ba ví dụ về chứng minh quy nạp toán học trong số học, đại số.
4. Chứng minh rằng mỗi phép chia các số tự nhiên có không quá một thương.
Cho biết chứng minh thuộc loại nào?

TIÊU CHỦ ĐỀ 2.7.

SUY LUẬN VÀ CHỨNG MINH TRONG DẠY HỌC TOÁN Ở TIỂU HỌC

Thông tin cơ bản

7.1. Suy luận và chứng minh trong dạy học mạch số học

Trong dạy học mạch số học ở tiểu học ta vận dụng các phép suy luận quy nạp (hoàn toàn và không hoàn toàn), suy diễn và phép tương tự. Dưới đây ta trình bày các phép suy luận này.

7.1.1. Suy luận quy nạp :

Suy luận quy nạp được sử dụng thường xuyên và rộng rãi trong quá trình dạy hình thành các tính chất, quy tắc thực hành bốn phép tính, các dấu hiệu chia hết và trong giải toán số học

Ví dụ 7.1 :

Khi dạy tính chất giao hoán của phép cộng, thông qua ví dụ so sánh giá trị của biểu thức $a + b$ và $b + a$ trong bảng sau

a	20	250	1208
b	30	350	2764
a + b	20 + 30 = 50	250 + 350 = 600	1208 + 2764 = 3972
b + a	30 + 20 = 50	350 + 250 = 600	2764 + 1208 = 3972

Từ bảng trên học sinh rút ra nhận xét “giá trị của $a + b$ và $b + a$ luôn bằng nhau” Rồi rút ra tính chất giao hoán của phép cộng: khi đổi chỗ các số hạng trong một tổng thì tổng đó không thay đổi

$$a + b = b + a$$

Quá trình phân tích tổng hợp để rút ra kết luận trên đây ta vận dụng phép suy luận quy nạp không hoàn toàn mà trong đó tiền đề là các ví dụ trong bảng còn kết luận là tính chất giao hoán nêu trên

Tương tự như trên, suy luận quy nạp cũng được vận dụng để dạy quy tắc nhân một số với một tổng

Ví dụ 7.2 :

Thông qua ví dụ so sánh giá trị của biểu thức $a \times (b + c)$ và $a \times b$ và $a \times c$ trong bảng sau

b	15	14
c	12	37
$a \times (b + c)$	$7 \times (15 + 12) = 189$	$23 \times (14 + 37) = 1173$
$a \times b + a \times c$	$7 \times 15 + 7 \times 12 = 189$	$23 \times 14 + 23 \times 37 = 1173$

học sinh rút ra nhận xét “giá trị của $a \times (b + c)$ và $a \times b + a \times c$ luôn bằng nhau” rồi rút ra quy tắc nhân một số với một tổng: Khi nhân một số với một tổng, ta có thể nhân số đó với từng số hạng của tổng rồi cộng kết quả lại $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Ví dụ 7.3 :

Khi dạy quy tắc so sánh các số tự nhiên trong phạm vi 10000 (xem [])

a) Thông qua các ví dụ

$$999 < 1000$$

$$10000 > 9999$$

cho học sinh nhận xét rồi rút ra quy tắc

Trong hai số tự nhiên

~ Số nào ít chữ số hơn thì bé hơn

~ Số nào nhiều chữ số hơn thì lớn hơn

b) Thông qua các ví dụ

$$9000 > 8999$$

$$6579 < 6580$$

cho học sinh nhận xét rồi rút ra quy tắc

~ Nếu hai số có cùng số chữ số thì so sánh từng cặp chữ số ở cùng một hàng, kể từ trái sang phải, số nào có chữ số đầu tiên lớn hơn thì lớn hơn.

c) Thông qua các ví dụ:

$$2345 = 2345$$

$$469 = 469$$

cho học sinh phân tích rồi rút ra kết luận:

~ Nếu hai số có cùng số chữ số và từng cặp chữ số ở cùng một hàng đều giống nhau thì hai số đó bằng nhau

Trong mỗi bước trên đây, chúng ta đã vận dụng suy luận quy nạp không hoàn toàn, trong đó tiền đề là các ví dụ được xét và kết luận là quy tắc so sánh được rút ra

Ví dụ 7.4 :

Khi dạy quy tắc tìm thành phần chưa biết của phép cộng (xem []): Cho học sinh quan sát hình vẽ rồi điền số vào chỗ chấm trong các phép tính sau

$$6 + 4 = \dots\dots\dots$$

$$x + 4 = 10$$

$$6 + x = 1$$

$$6 = 10 \dots\dots\dots$$

$$x = 10 \dots\dots\dots$$

$$x = 10 \dots\dots\dots$$

$$4 = 10 \dots\dots\dots$$

$$x = \dots\dots\dots$$

$$x = \dots\dots\dots$$

Từ các ví dụ trên rút ra nhận xét:

~ Muốn tìm số hạng thứ nhất, ta lấy tổng trừ đi số hạng thứ hai

~ Muốn tìm số hạng thứ hai, ta lấy tổng trừ đi số hạng thứ nhất

Từ hai nhận xét trên, hướng dẫn học sinh rút ra quy tắc: Muốn tìm số hạng chưa biết, ta lấy tổng trừ đi số hạng kia

Quy trình suy luận trên đây ta đã vận dụng phép quy nạp không hoàn toàn, trong đó tiền đề là các ví dụ được xét và kết luận là quy tắc nêu trên.

Ví dụ 7.5 :

Khi dạy dấu hiệu chia hết cho 5, ta tiến hành như sau (xem [])

a) Trong bảng chia cho 5, các số bị chia đều chia hết cho 5.

Đó là: 5 ; 15 ; 25 ; 35 ; 45 ; 10 ; 20 ; 30 ; 40 ; 50

Các số này có tận cùng bằng 0 hoặc 5

b) Lấy bất kì số nào có tận cùng bằng 0 hoặc 5 ta thấy số đó chia hết cho 5

Ví dụ: $1990 : 5 = 398$; $1995 : 5 = 399$

c) Vậy: Các số có tận cùng bằng 0 hoặc 5 thì chia hết cho 5

ở đây tiền đề là các ví dụ xét ở mục a và b và kết luận là dấu hiệu chia hết cho 5

Phép suy luận quy nạp còn gặp trong quá trình giải toán số học. Chẳng hạn:

Ví dụ 7.6 :

Viết tiếp hai số hạng của dãy số sau:

1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8.....

Ta nhận xét

~ Số hạng thứ ba là $3 = 1 + 2$

~ Số hạng thứ tư là $5 = 2 + 3$

~ Số hạng thứ năm là $8 = 3 + 5$

Vậy quy luật của dãy số đã cho là: Kể từ số hạng thứ ba, mỗi số hạng bằng tổng của hai số hạng đứng liền trước nó

áp dụng quy luật trên ta có:

~ Số hạng thứ sáu là: $5 + 8 = 13$

~ Số hạng thứ bảy là: $8 + 13 = 21$

Vậy dãy số cần tìm là: 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21

ở đây ta đã dùng *quy nạp không hoàn toàn* để tìm ra quy luật của dãy số (với tiền đề là các nhận xét phân tích ở trên)

Ví dụ 7.7 :

Thay a bởi chữ số thích hợp để nhận được số tự nhiên chia hết cho 3

Vì n chia hết cho 3 nên $2 + 7 + a = 9 + a$ chia hết cho 3. Bằng phương pháp thử chọn ta tìm được $a = 0 ; 3 ; 6 ; 9$

Vậy các số cần tìm là 270 ; 273 ; 276 và 279

Trong ví dụ này ta đã dùng phép *quy nạp hoàn toàn* để tìm ra các giá trị thích hợp của a

7.1.2. Suy diễn

Phép suy diễn được sử dụng trong các tiết luyện tập: vận dụng một quy tắc đã được thiết lập để giải bài tập

Cấu trúc của các phép suy luận ở đây thường là:

Tiền đề 1 : Là quy tắc hoặc tính chất,... đã được thiết lập

Tiền đề 2 : Một tình huống cụ thể phù hợp với quy tắc trên

Kết luận : Vận dụng quy tắc trên để xử lí tình huống của bài toán

Ví dụ 7.8 :

Tính giá trị biểu thức bằng cách thuận tiện nhất

$$47 \times 234 + 234 \times 53$$

$$= 234 \times 47 + 234 \times 53$$

$$= 234 \times (47 + 53)$$

$$= 234 \times 100 = 23400$$

ở đây ta đã hai lần áp dụng phép suy diễn:

~ Vận dụng tính chất giao hoán của phép nhân

~ Vận dụng quy tắc nhân một số với một tổng

Ví dụ 7.9 :

Tìm x

$$x : 25 + 12 = 60$$

$$x : 25 = 60 - 12$$

$$x : 25 = 48$$

$$x = 48 \times 25$$

$$x = 1200$$

ở đây ta đã hai lần áp dụng phép suy diễn :

- ~ Vận dụng quy tắc tìm một số hạng trong phép cộng
- ~ Vận dụng quy tắc tìm số bị chia

Ví dụ 7.10 :

Khoanh tròn vào chữ đặt trước số chia hết cho 5

- A. 13450
- B. 13408
- C. 7945
- D. 7954

ở đây ta vận dụng phép suy diễn, trong đó tiền đề là dấu hiệu chia hết cho 5 và tiền đề 2 là mỗi số trong đề bài

7.1.3. Phép tương tự

- ~ Phép tương tự được sử dụng thường xuyên trong dạy học mạch số học. Chẳng hạn:
 - ~ Từ quy tắc cộng các số có hai chữ số, dùng phép tương tự ta xây dựng quy tắc cộng các số có ba, bốn và nhiều chữ số
 - ~ Cũng tương tự đối với các phép tính
 - ~ Từ quy tắc so sánh các số có bốn chữ số, dùng phép tương tự ta xây dựng quy tắc so sánh các số có nhiều chữ số
 - ~ Từ quy tắc tìm số hạng trong phép cộng, dùng phép tương tự ta xây dựng quy tắc tìm thừa số trong phép nhân

7.2. Suy luận và chứng minh trong dạy học mạch yếu tố hình học

Cũng tương tự mạch số học, trong dạy học các yếu tố hình học ta thường vận dụng các phép suy luận quy nạp (hoàn toàn và không hoàn toàn), suy diễn và phép tương tự. Dưới đây ta trình bày các phép suy luận này

7.2.1. Suy luận quy nạp

Suy luận quy nạp được sử dụng rộng rãi trong quá trình dạy học xây dựng công thức tính chu vi, diện tích và thể tích các hình ở tiểu học. Trong giải toán có nội dung hình học đôi khi ta cũng sử dụng phép quy nạp

Ví dụ 7.11 :

Khi dạy xây dựng công thức tính chu vi hình chữ nhật, thông qua bài toán “Tính chu vi hình chữ nhật ABCD có chiều dài 4dm và chiều rộng 3dm. Bằng cách quan sát trên hình vẽ và một số phép biến đổi, học sinh tính được chu vi hình chữ nhật là $(4 + 3) \times 2 = 14$ (dm)

Từ đó rút ra quy tắc: Muốn tính chu vi hình chữ nhật, ta lấy chiều dài cộng với chiều rộng rồi nhân 2”

$$P = (a + b) \times 2$$

ở đây ta sử dụng phép quy nạp không hoàn toàn

Tiền đề 1 : Hình chữ nhật có chiều dài bằng 4dm và chiều rộng 3dm thì có chu vi bằng $(4 + 3) \times 2 (= 14\text{dm})$

Kết luận: Hình chữ nhật có chiều dài a và chiều rộng b có chu vi là $(a + b) \times 2$

Ví dụ 7.12 :

Khi dạy xây dựng công thức tính diện tích hình chữ nhật, thông qua bài toán “Tính diện tích hình chữ nhật ABCD có chiều dài 4 cm và chiều rộng 3cm”.

Bằng cách quan sát và phân tích trên hình vẽ, học sinh tính được diện tích của hình chữ nhật bằng 12cm^2 . Từ nhận xét $12 = 4 \times 3$

Từ đó rút ra quy tắc: “Muốn tính diện tích hình chữ nhật, ta lấy chiều dài nhân với chiều rộng (với cùng một đơn vị đo)

$$S = a \times b$$

ở đây ta sử dụng phép quy nạp không hoàn toàn

Tiền đề 1 : Hình chữ nhật có chiều dài 4 cm và chiều rộng 3cm thì có diện tích bằng:

$$4 \times 3 (= 12 \text{ cm}^2)$$

Kết luận : Hình chữ nhật có chiều dài a và chiều rộng b thì có diện tích là a x b

Ví dụ 7.13 :

Cho 9 điểm phân biệt. Khi nối tất cả các điểm với nhau ta được bao nhiêu đoạn thẳng ?

Ta nhận xét :

~ Khi có 2 điểm, nối lại ta sẽ được 1 đoạn thẳng :

$$1 = 0 + 1$$

~ Khi có 3 điểm, nối lại ta sẽ được 3 đoạn thẳng :

$$2 = 0 + 1 + 2$$

~ Khi có 4 điểm, nối lại ta sẽ được 6 đoạn thẳng :

$$6 = 0 + 1 + 2 + 3$$

Vậy khi có n điểm, nối lại ta sẽ được số đoạn thẳng là :

$$s = 0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1)$$

$$s = nx(n - 1) : 2.$$

áp dụng : Khi có 9 điểm, nối lại ta sẽ được số đoạn thẳng là:

$$9 \times (9 - 1) : 2 = 36 \text{ (đoạn thẳng)}$$

Nhận xét. ở đây ta đã hai lần sử dụng phép suy luận quy nạp không hoàn toàn :

~ Lần thứ nhất ta rút ra được kết luận khi có n điểm, nối lại ta được số đoạn thẳng là $0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1)$;

~ Lần thứ hai ta rút ra được tổng trên bằng $nx(n - 1) : 2$.

7.2.2. Suy diễn

Suy diễn được sử dụng rộng rãi trong quá trình giải các bài tập hình học. Chẳng hạn khi giải toán về tính chu vi và diện tích, thể tích các hình.

Ví dụ 7.14 : (Bài 2, trang 87 SGK Toán 3)

Một mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài 35m, chiều rộng 20m. Tính chu vi mảnh đất đó.

Giải : Chu vi mảnh đất đó là

$$(35 + 20) \times 2 = 110(\text{m})$$

Đáp số : 110m

ở đây ta đã dùng phép suy diễn :

Tiền đề 1 : Hình chữ nhật có chiều dài bằng a, chiều rộng bằng b thì có chu vi bằng $(a + b) \times 2$.

Tiền đề 2 : Mảnh đất hình chữ nhật có chiều dài bằng 35m, chiều rộng bằng 20m.

Kết luận : Chu vi của mảnh đất đó bằng $(35 + 20) \times 2(\text{m})$.

Hoạt động

Sinh viên ôn lại tiểu chủ đề 2.6, tự đọc SGK toán lớp 3, 4, 5 và thông tin nguồn tiểu chủ đề 2.7 để thực hiện các nhiệm vụ nêu trong các hoạt động dưới đây :

Hoạt động 7.1.

Tìm hiểu các phép suy luận trong dạy học số học ở tiểu học

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1 : Nêu các phép suy luận thường dùng trong dạy học số học ở tiểu học.

Nhiệm vụ 2 :

Xây dựng 2 ví dụ minh họa về vận dụng suy luận quy nạp, suy luận tương tự và suy diễn trong mỗi trường hợp sau :

- ~ Dạy học các quy tắc thực hành 4 phép tính ;
- ~ Dạy học quy tắc so sánh các số tự nhiên ;
- ~ Tính giá trị biểu thức số.

Hoạt động 7.2. Tìm hiểu các phép suy luận trong dạy học hình học ở tiểu học.

Nhiệm vụ

Nhiệm vụ 1 :

Nêu các phép suy luận thường dùng trong dạy học hình học ở tiểu học.

Nhiệm vụ 2 :

Xây dựng 2 ví dụ minh họa về vận dụng suy luận quy nạp, suy luận tương tự và suy diễn trong mỗi trường hợp sau :

- ~ Trong dạy học hình thành các công thức tính chu vi của các hình ;
- ~ Dạy học hình thành công thức tính diện tích các hình ;
- ~ Dạy học hình thành công thức tính thể tích các hình ;
- ~ Dạy giải toán có nội dung hình học.

Thông tin phản hồi

Tiểu chủ đề 2.1. Mệnh đề và các phép lôgic

Hoạt động 1.1

1. b ; c ; f ; h
2. a, 1 b, 1 c, 0
3. a, s b, s

Hoạt động 1.2

1. a, $5 \times 7 \square 35$ (s)
b, 24 chia hết cho 5 (đ)
c, Hình vuông không có bốn cạnh bằng nhau (s)
d, Trời không mưa
e, An không cao hơn Thọ
f, $40 \square 30$ (đ)
2. a, “15 nhỏ hơn 20” (đ)
“15 lớn hơn hoặc bằng 20” (s)

Hoạt động 1.5

- a, Đ b, Đ c, S d, Đ e, Đ
- a, Nếu 42 chia hết cho 6 thì nó chia hết cho 2 và 3 (Đ)
b, Nếu 42 chia hết cho 6 thì nó không chia hết cho 2 hoặc 3 (S)
c, d, e, f, g, h tương tự
- a, $G(a) = G(b) = 1$ hoặc $G(a) = 0, G(b) = 1$

Tiểu chủ đề 2.3. Công thức

Hoạt động 3.1

- Xem bài giảng
- a, Đ b, S c, S

Hoạt động 3.2

- a, Đ b, S
c, d, e, f, g tương tự
- a, $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q \rightarrow q$
b, $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p) \rightarrow p \rightarrow p$
c, $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow q$

Hoạt động 3.3

- a, + Nếu một số chia hết cho 5 thì nó chia hết cho 15 (S)
+ Nếu một số không chia hết cho 15 thì nó không chia hết cho 5 (S)
+ Nếu một số không chia hết cho 5 thì nó không chia hết cho 15 (Đ)
b, + Nếu một số chia hết cho 3 và 5 thì nó chia hết cho 15 (Đ)
+ Nếu một số không chia hết cho 15 thì nó không chia hết cho 3 hoặc 5 (Đ)
+ Nếu một số không chia hết cho 3 hoặc 5 thì nó không chia hết cho 15 (Đ)

Ta diễn đạt mệnh đề trên dưới dạng kiện cần và đủ

- ~ Một số chia hết cho 15 khi và chỉ khi nó chia hết cho 3 và 5
~ Để một số chia hết cho 15, điều kiện cần và đủ là nó chia hết cho 3 và 5
~ Điều kiện cần và đủ để một số chia hết cho 15 là nó chia hết cho 3 và 5
c, d tương tự

- a, Nếu một tứ giác là hình chữ nhật thì hai đường chéo của nó bằng nhau
b, Tương tự

Hoạt động 3.4

- Gợi ý: lập bảng giá trị chân lí của mỗi công thức đó

Tiểu chủ đề 2.4. Quy tắc suy luận

Hoạt động 4.1

Xem ví dụ 4.1 và 4.2

Tiểu chủ đề 2.5. Hàm mệnh đề - mệnh đề tổng quát và mệnh đề tồn tại

Hoạt động 5.1

1. a, Miền đúng của hàm mệnh đề này là tập các số tự nhiên có chữ số hàng đơn vị bằng 0 hoặc 5
b, Miền đúng của hàm mệnh đề này là tập các số tự nhiên có chữ số hàng đơn vị bằng 4 hoặc 9
c, d tương tự
2. a, $MĐ = (-;)$
b, $MĐ = -1 ;$
c, $MĐ = R$
d, $MĐ = (-1 ; 11)$

Hoạt động 5.2

1. a, Tồn tại số thực x sao cho với mọi số thực y ta có:
 $x + y^2 > 1$

Mệnh đề phủ định: Với mọi số thực x tồn tại số thực y sao cho $x + y^2 \leq 1$

b, c, d tương tự

2. Chẳng hạn hình bình hành

3. a, Ta chỉ ra mệnh đề phủ định: Mọi số tự nhiên tồn tại một số chẵn lớn hơn nó

Thật vậy, với số tự nhiên ta chọn $2n$ là số chẵn lớn hơn nó

b, c tương tự

Tiểu chủ đề 2.6. Suy luận và chứng minh

Hoạt động 6.1

- 1 a, d b, q c, d,

Hoạt động 6.2

1. Gợi ý: xem ví dụ 6.10
2. Xem ví dụ 6.13
4. Xem ví dụ 6.12