HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

=====📖=====

SÁCH HƯỚNG DẪN HỌC TẬP

TOÁN CHUYÊN NGÀNH

(Dùng cho sinh viên ngành ĐT-VT hệ đào tạo đại học từ xa)

Lưu hành nội bộ

HÀ NỘI - 2006

SÁCH HƯỚNG DẪN HỌC TẬP

TOÁN CHUYÊN NGÀNH

Biên soạn : Ts. LÊ BÁ LONG

LỜI NÓI ĐẦU

Tiếp theo chương trình toán học đại cương bao gồm giải tích 1, 2 và toán đại số. Sinh viên chuyên ngành điện tử-viễn thông còn cần trang bị thêm công cụ toán xác suất thống kê và toán kỹ thuật.

Để đáp ứng nhu cầu học tập của sinh viên chuyên ngành điện tử viễn thông của Học viện, chúng tôi đã biên soạn tập bài giảng Toán kỹ thuật từ năm 2000 theo đề cương chi tiết môn học của Học viện. Qua quá trình giảng dạy chúng tôi thấy rằng cần hiệu chỉnh và bổ sung thêm để cung cấp cho sinh viên những công cụ toán học tốt hơn. Trong lần tái bản lần thứ hai tập bài giảng được nâng lên thành giáo trình, nội dung bám sát hơn nữa những đặc thù của chuyên ngành viễn thông. Chẳng hạn trong nội dung của phép biến đổi Fourier chúng tôi sử dụng miền tần số f thay cho miền ω. Dựa vào tính duy nhất của khai triển Laurent chúng tôi giới thiệu phép biến đổi Z để biểu diễn các tín hiệu rời rạc bằng các hàm giải tích. Tuy nhiên do đặc thù của phương thức đào tạo từ xa nên chúng tôi biên soạn lại cho phù hợp với loại hình đào tạo này.

Tập giáo trình bao gồm 7 chương. Mỗi chương chứa đựng các nội dung thiết yếu và được coi là các công cụ toán học đắc lực, hiệu quả cho sinh viên, cho kỹ sư đi sâu vào lĩnh vực viễn thông. Nội dung giáo trình đáp ứng đầy đủ những yêu cầu của đề cương chi tiết môn học đã được Học viện duyệt. Trong từng chương chúng tôi cố gắng trình bày một cách tổng quan để đi đến các khái niệm và các kết quả. Chỉ chứng minh các định lý đòi hỏi những công cụ vừa phải không quá sâu xa hoặc chứng minh các định lý mà trong quá trình chứng minh giúp người đọc hiểu sâu hơn bản chất của định lý và giúp người đọc dễ dàng hơn khi vận dụng định lý. Các định lý khó chứng minh sẽ được chỉ dẫn đến các tài liệu tham khảo khác. Sau mỗi kết quả đều có ví dụ minh hoạ. Cuối cùng từng phần thường có những nhận xét bình luận về việc mở rộng kết quả hoặc khả năng ứng dụng chúng. Tuy nhiên chúng tôi không đi quá sâu vào các ví dụ minh hoạ mang tính chuyên sâu về viễn thông vì sự hạn chế của chúng tôi về lãnh vực này và cũng vì vượt ra khỏi mục đích của cuốn tài liệu.

Thứ tự của từng Ví dụ, Định lý, Định nghĩa, được đánh số theo từng loại và chương. Chẳng hạn Ví dụ 3.2, Định nghĩa 3.1 là ví dụ thứ hai và định nghĩa đầu tiên của chương 3… Nếu cần tham khảo đến ví dụ, định lý, định nghĩa hay công thức nào đó thì chúng tôi chỉ rõ số thứ tự của ví dụ, định lý, định nghĩa tương ứng. Các công thức được đánh số thứ tự theo từng chương.

Hệ thống câu hỏi ôn tập và bài tập của từng chương có hai loại. Loại trắc nghiệm đúng sai nhằm kiểm tra trực tiếp mức độ hiểu bài của học viên còn loại bài tập tổng hợp giúp học viên vận dụng kiến thức một cách sâu sắc hơn.

Vì nhận thức của chúng tôi về chuyên ngành Điện tử Viễn thông còn hạn chế nên không tránh khỏi nhiều thiếu sót trong việc biên soạn tài liệu này, cũng như chưa đưa ra hết các công cụ toán học cần thiết cần trang bị cho các cán bộ nghiên cứu về chuyên ngành điện tử viễn thông. Chúng tôi rất mong sự đóng góp của các nhà chuyên môn để chúng tôi hoàn thiện tốt hơn tập tài liệu này.

Tác giả xin bày tỏ lời cám ơn tới PGS.TS. Lê Trọng Vinh, TS Tô Văn Ban, đã đọc bản thảo và cho những ý kiến phản biện quý giá và đặc biệt tới KS Nguyễn Chí Thành người đã giúp tôi biên tập hoàn chỉnh cuốn tài liệu.

Cuối cùng, tác giả xin bày tỏ sự cám ơn đối với Ban Giám đốc Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông, Trung tâm Đào tạo Bưu Chính Viễn Thông 1 và bạn bè đồng nghiệp đã khuyến khích, động viên, tạo nhiều điều kiện thuận lợi để chúng tôi hoàn thành tập tài liệu này.

Hà Nội 5/2006

Tác giả

CHƯƠNG I: HÀM BIẾN SỐ PHỨC

PHẦN GIỚI THIỆU

Giải tích phức là một bộ phận của toán học hiện đại có nhiều ứng dụng trong kỹ thuật. Nhiều hiện tượng vật lý và tự nhiên đòi hỏi phải sử dụng số phức mới mô tả được. Trong chương này chúng ta tìm hiểu những vấn đề cơ bản của giải tích phức: Lân cận, giới hạn, hàm phức liên tục, giải tích, tích phân phức, chuỗi số phức, chuỗi lũy thừa, chuỗi Laurent… Để nghiên cứu các vấn đề này chúng ta thường liên hệ với những kết quả ta đã đạt được đối với hàm biến thực. Mỗi hàm biến phức $w = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ tương ứng với hai hàm thực hai biến $u(x,y)$, $v(x,y)$. Hàm phức $f(z)$ liên tục khi và chỉ khi $u(x,y)$, $v(x,y)$ liên tục. $f(z)$ khả vi khi và chỉ khi $u(x,y)$, $v(x,y)$ có đạo hàm riêng cấp 1 thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann. Tích phân phức tương ứng với hai tích phân đường loại 2 …Mỗi chuỗi số phức tương ứng với hai chuỗi số thực có số hạng tổng quát là phần thực và phần ảo của số hạng tổng quát của chuỗi số phức đã cho. Sự hội tụ hay phân kỳ được xác định bởi sự hội tụ hay phân kỳ của hai chuỗi số thực này.

Từ những tính chất đặc thù của hàm biến phức chúng ta có các công thức tích phân Cauchy. Đó là công thức liên hệ giữa giá trị của hàm phức tại một điểm với tích phân dọc theo đường cong kín bao quanh điểm này. Trên cơ sở công thức tích phân Cauchy ta có thể chứng minh được các kết quả: Mọi hàm phức giải tích thì có đạo hàm mọi cấp, có thể khai triển hàm phức giải tích thành chuỗi Taylor, hàm giải tích trong hình vành khăn được khai triển thành chuỗi Laurent.

Bằng cách tính thặng dư của hàm số tại điểm bất thường cô lập ta có thể áp dụng để tính các tích phân phức và tích phân thực, tính các hệ số trong khai triển Laurent và phép biến đổi Z ngược.

Dựa vào tính duy nhất của khai triển Laurent ta có thể xây dựng phép biến đổi Z.Phép biến đổi Z cho phép biểu diễn dãy tín hiệu số rời rạc bằng hàm giải tích.

Để học tốt chương này học viên cần xem lại các kết quả của giải tích thực.

NỘI DUNG

1.1. SỐ PHỨC

1.1.1. Dạng tổng quát của số phức

Số phức có dạng tổng quát $z = x + iy$, trong đó x, y là các số thực; $i^2 = -1$.

x là phần thực của z, ký hiệu $\operatorname{Re} z$. y là phần ảo của z, ký hiệu $\operatorname{Im} z$.

Khi $y = 0$ thì $z = x$ là số thực; khi $x = 0$ thì $z = iy$ gọi là số thuần ảo.

Số phức $x - iy$, ký hiệu $\overline{z}$, được gọi là số phức liên hợp với số phức $z = x + iy$.

Hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$ bằng nhau khi và chỉ khi phần thực và phần ảo của chúng bằng nhau.

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2;\quad z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

Tập hợp tất cả các số phức ký hiệu $\mathbb{C}$.

1.1.2. Các phép toán

Cho hai số phức $z_1 = x_1 + iy_1$ và $z_2 = x_2 + iy_2$, ta định nghĩa:

a) Phép cộng: Số phức $z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ được gọi là tổng của hai số phức z_1 và z_2, ký hiệu $z = z_1 + z_2$.

b) Phép trừ: Ta gọi số phức $-z = -x - iy$ là số phức đối của $z = x + iy$.

Số phức $z = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ được gọi là hiệu của hai số phức z_1 và z_2, ký hiệu $z = z_1 - z_2$.

c) Phép nhân: Tích của hai số phức z_1 và z_2 là số phức được ký hiệu và định nghĩa bởi biểu thức:

$$z = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \tag{1.2}$$

d) Phép chia: Nghịch đảo của số phức $z = x + iy \neq 0$ là số phức ký hiệu $\frac{1}{z}$ hay z^{-1}, thỏa mãn điều kiện $zz^{-1} = 1$. Vậy nếu $z^{-1} = x' + iy'$ thì

$$\begin{cases} xx' - yy' = 1 \\ yx' + xy' = 0 \end{cases} \Rightarrow x' = \frac{x}{x^2 + y^2},\ y' = \frac{-y}{x^2 + y^2}. \tag{1.3}$$

Số phức $z = z_1 z_2^{-1} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ được gọi là thương của hai số phức z_1 và z_2, ký hiệu $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ ($z_2 \neq 0$).

Ví dụ 1.1: Cho $z = x + iy$, tính z^2, $z\bar{z}$.

Giải: $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$, $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

Ví dụ 1.2: Tìm các số thực x, y là nghiệm của phương trình

$$5(x + y)(1 + i) - (x + 2i)(3 + i) = 3 - 11i.$$

Giải: Khai triển và đồng nhất phần thực, phần ảo hai vế ta được

$$\begin{cases} 2x + 5y + 2 = 3 \\ 4x + 5y - 6 = -11 \end{cases} \Rightarrow x = -3,\ y = \frac{7}{5}.$$

Ví dụ 1.3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} z + iw = 1 \\ 2z + w = 1 + i \end{cases}$.

Giải: Nhân i vào phương trình thứ nhất và cộng vào phương trình thứ hai ta được

$$(2+i)z = 1 + 2i \;\Rightarrow\; z = \frac{1+2i}{2+i} = \frac{(1+2i)(2-i)}{5} = \frac{4+3i}{5},$$

$$\Rightarrow\; w = i(z-1) = i\left(\frac{-1+3i}{5}\right) = -\frac{3+i}{5}.$$

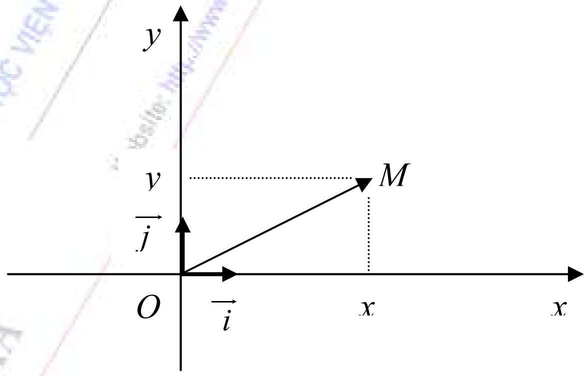
Ví dụ 1.4: Giải phương trình $z^2 + 2z + 5 = 0$.

Giải: $z^2 + 2z + 5 = (z+1)^2 + 4 = (z+1)^2 - (2i)^2 = (z+1-2i)(z+1+2i)$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = -1 - 2i$.

1.1.3. Biểu diễn hình học của số phức, mặt phẳng phức

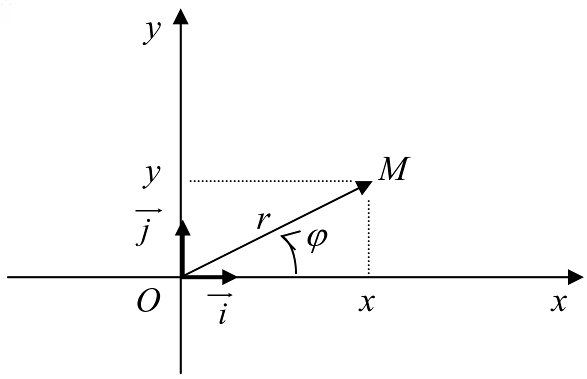
Xét mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, có véc tơ đơn vị trên hai trục tương ứng là $\vec{i}$ và $\vec{j}$. Mỗi điểm M trong mặt phẳng này hoàn toàn được xác định bởi tọa độ $(x;y)$ của nó thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.



Số phức $z = x + iy$ cũng hoàn toàn được xác định bởi phần thực x và phần ảo y của nó. Vì vậy người ta đồng nhất mỗi điểm có tọa độ $(x;y)$ với số phức $z = x + iy$, lúc đó mặt phẳng này được gọi là mặt phẳng phức.

1.1.4. Dạng lượng giác của số phức

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, nếu ta chọn $\overrightarrow{Ox}$ làm trục cực thì điểm $M(x;y)$ có tọa độ cực $(r;\varphi)$ xác định bởi $r = OM$, $\varphi = \left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}\right)$



thỏa mãn $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

Ta ký hiệu và gọi

$$|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.4}$$

$$\text{Arg}z = \varphi + k2\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{1.5}$$

là *mô đun và argument của số phức* $z = x + iy$.

Góc φ của số phức $z = x + iy \neq 0$ được xác định theo công thức sau

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\varphi = y/x \\ \cos\varphi = x/\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \tag{1.6}$$

Giá trị của Argz nằm giữa $-\pi$ và π được gọi là *argument chính*, ký hiệu $\arg z$. Vậy

$$-\pi < \arg z \leq \pi .$$

Từ công thức (1.4) ta có

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.7}$$

gọi là *dạng lượng giác của số phức*.

Sử dụng khai triển Maclaurin có thể chứng minh được *công thức Euler*

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \tag{1.8}$$

Do đó $$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{1.9}$$

Từ (1.7)-(1.8) ta có thể viết *số phức dưới dạng mũ*

$$z = |z| e^{i\varphi} \tag{1.10}$$

Các tính chất của số phức

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$; $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. **(1.11)**

- $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$. **(1.12)**

- $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg z_1 = \arg z_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + k2\pi \end{cases}$ **(1.13)**

- $z\overline{z} = |z|^2$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$. **(1.14)**

- $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. **(1.15)**

- $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$, $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$ **(1.16)**

- $z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} |x| \leq |z| \\ |y| \leq |z| \end{cases}$ và $|z| \leq |x| + |y|$ **(1.17)**

Ví dụ 1.5: a) Tập các số phức z thỏa mãn $|z-2|=3$ tương ứng với tập các điểm có khoảng cách đến $I(2;0)$ bằng 3, tập hợp này là đường tròn tâm I bán kính 3.

b) Tập các số phức z thỏa mãn $|z-2|=|z+4|$ tương ứng với tập các điểm cách đều $A(2;0)$ và $B(-4;0)$ đó là đường trung trực của đoạn AB có phương trình $x=-1$.

1.1.5. Phép nâng lũy thừa, công thức Moivre

Lũy thừa bậc n của số phức z là số phức $z^n = \underbrace{zz\cdots z}_{n \text{ lần}}$

Từ công thức (1.15)-(1.16) ta có *công thức Moivre:*

$$z^n = |z|^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right), \quad \mathrm{Arg}z = \varphi + k2\pi . \qquad \mathbf{(1.18)}$$

Đặc biệt, khi $|z|=1$ ta có

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right) \qquad \mathbf{(1.18)'}$$

Ví dụ 1.6: Tính $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}$.

Giải: $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3}\right)$

$$= 2^{10}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2^{10}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2^9 + i\sqrt{3}2^9 .$$

1.1.6. Phép khai căn

Số phức ω được gọi là căn bậc n của z, ký hiệu $\omega = \sqrt[n]{z}$, nếu $\omega^n = z$.

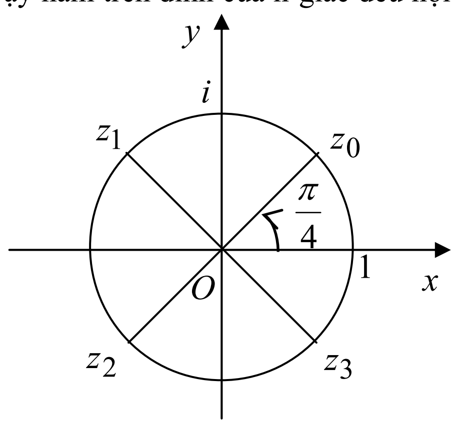
Nếu viết dưới dạng lượng giác: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ thì

$$z = \omega^n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \varphi + k2\pi , \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta = \dfrac{\varphi + k2\pi}{n} \cdot \end{cases} \qquad \mathbf{(1.19)}$$

Vì Argument của một số phức xác định sai khác một bội số nguyên của 2π nên với mỗi số phức $z \neq 0$ có đúng n căn bậc n. Các căn bậc n này có cùng mô đun là $\sqrt[n]{r}$, Argument nhận các giá trị $\theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{k2\pi}{n}$ ứng với $k = 0, 1, ..., n-1$, vì vậy nằm trên đỉnh của n-giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính $\sqrt[n]{r}$.

Ví dụ 1.7: Giải phương trình $z^4 + 1 = 0$

Giải: Nghiệm của phương trình là căn bậc 4 của $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ tương ứng là:

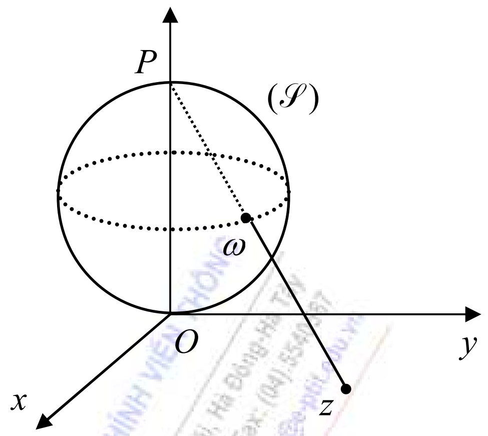


$$z_0 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

$$z_1 = iz_0 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},$$

$$z_2 = -z_0 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}},$$

$$z_3 = -iz_0 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$



1.1.7. Các khái niệm cơ bản của giải tích phức

1.1.7.1. Mặt cầu phức

Trong 1.1.3 ta đã có một biểu diễn hình học của tập các số phức $\mathbb{C}$ bằng cách đồng nhất mỗi số phức $z = x + iy$ với điểm M có tọa độ $(x; y)$ trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Mặt khác nếu ta dựng mặt cầu $(\mathscr{S})$ có cực nam tiếp xúc với mặt phẳng Oxy tại O, khi đó mỗi điểm z thuộc mặt phẳng Oxy sẽ tương ứng duy nhất với điểm ω là giao điểm của tia Pz và mặt cầu $(\mathscr{S})$, P là điểm cực bắc của $(\mathscr{S})$.

Vậy mỗi điểm trên mặt phẳng Oxy được xác định bởi một điểm trên mặt cầu $(\mathscr{S})$ ngoại trừ điểm cực bắc P.

Ta gán cho điểm cực bắc này số phức vô cùng ∞. Tập hợp số phức $\mathbb{C}$ thêm số phức vô cùng được gọi là tập số phức mở rộng $\overline{\mathbb{C}}$. Như vậy toàn bộ mặt cầu $(\mathscr{S})$ là một biểu diễn hình học của tập số phức mở rộng.

Quy ước: $\frac{z}{0} = \infty \ (z \neq 0)$, $z\infty = \infty \ (z \neq 0)$, $z + \infty = \infty$, $\infty - z = \infty$.

1.1.7.2. Lân cận, miền

a. Lân cận

Khái niệm $\varepsilon-$lân cận của $z_0 \in \mathbb{C}$ được định nghĩa hoàn toàn tương tự với $\varepsilon-$lân cận trong $\mathbb{R}^2$, đó là hình tròn có tâm tại điểm này và bán kính bằng ε.

$$B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\} \quad \textbf{(1.23)}$$

$N-$lân cận $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$: $\quad B_N(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > N\} \cup \{\infty\}$ **(1.23)’**

b. Điểm trong, tập mở

Giả sử E là một tập các điểm của mặt phẳng phức hoặc mặt cầu phức. Điểm z_0 được gọi là *điểm trong* của E nếu tồn tại một lân cận của z_0 nằm hoàn toàn trong E.

Tập chỉ gồm các điểm trong được gọi là *tập mở.*

c. Điểm biên

Điểm z_1, có thể thuộc hoặc không thuộc E, được gọi là *điểm biên* của E nếu mọi lân cận của z_1 đều có chứa các điểm thuộc E và các điểm không thuộc E.

Tập hợp các điểm biên của E được gọi là biên E, ký hiệu ∂E.

Hình tròn mở $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ và phần bù của hình tròn mở $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| > r\}$ là các tập mở có biên lần lượt là $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$ và $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\} \cup \{\infty\}$.

Hình tròn đóng $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \le r\}$ không phải là tập mở vì các điểm biên $|z - z_0| = r$ không phải là điểm trong.

d. Tập liên thông, miền

Tập con D của mặt phẳng phức hay mặt cầu phức được gọi là *tập liên thông* nếu với bất kỳ 2 điểm nào của D cũng có thể nối chúng bằng một đường cong liên tục nằm hoàn toàn trong D.

Một tập mở và liên thông được *gọi là miền*.

Miền D cùng biên ∂D của nó được gọi là miền đóng, ký hiệu $\overline{D} = D \cup \partial D$. Miền chỉ có một biên được gọi là *miền đơn liên*, trường hợp ngược lại gọi là *miền đa liên*.

Ta qui ước *hướng dương trên biên của miền* là hướng mà khi ta đi trên biên theo hướng đó thì miền D ở bên tay trái.

Miền D được gọi là bị chặn nếu tồn tại $R > 0$ sao cho $|z| \le R$, $\forall z \in D$.

1.2. HÀM BIẾN PHỨC

1.2.1. Định nghĩa hàm biến phức

Định nghĩa 1.1: *Một hàm biến phức xác định trên tập con D của $\mathbb{C}$ hoặc $\overline{\mathbb{C}}$ là một quy luật cho tương ứng mỗi số phức $z \in D$ với một hoặc nhiều số phức w, ký hiệu $w = f(z), z \in D$.*

Nếu với mỗi z chỉ cho tương ứng duy nhất một giá trị w thì $f(z)$ được gọi là hàm đơn trị. Trường hợp ngược lại f được gọi là hàm đa trị.

Hàm số $w = f(z) = z^2 + 3$ là một hàm đơn trị, còn hàm số $w = f(z) = \sqrt{z}$ là một hàm đa trị.

Tập D trong định nghĩa trên được gọi là tập xác định. Ta chỉ xét tập xác định D là một miền, vì vậy D được gọi là miền xác định.

Thông thường người ta cho hàm phức bằng công thức xác định ảnh $f(z)$, khi đó miền xác định D là tập các số phức z mà $f(z)$ có nghĩa.

Hàm số $w = f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$ có miền xác định là $D = \{z \mid z \neq \pm i\}$.

Ta có thể biểu diễn một hàm phức bởi hai hàm thực của hai biến (x, y) như sau:

$$z = x + iy \text{ và } w = f(z) = u + iv \quad \text{thì} \begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \tag{1.24}$$

Gọi $u(x, y)$ là phần thực, $v(x, y)$ là phần ảo của hàm $f(z)$.

Hàm số $w = z^2 + 3 = (x + iy)^2 + 3 = (x^2 - y^2 + 3) + i2xy$ có $\begin{cases} u = x^2 - y^2 + 3 \\ v = 2xy \end{cases}$.

Trường hợp miền xác định $D \subset \mathbb{R}$ thì ta có hàm phức biến số thực, ta ký hiệu $w = f(t)$ có biến số là t thay cho z.

Trường hợp miền xác định D là tập số tự nhiên $\mathbb{N}$ thì ta có dãy số phức $z_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, ta thường ký hiệu dãy số là $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hay $(z_n)_{n=1}^{\infty}$.

1.2.2. Giới hạn

Định nghĩa 1.2: *Dãy số $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ hội tụ về $z_0 = x_0 + y_0$, ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, nếu*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : n \ge N \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon \tag{1.25}$$

Dãy số $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn là ∞, ký hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, nếu

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : n \ge N \Rightarrow |z_n| > \varepsilon \tag{1.26}$$

Từ (1.17) suy ra rằng

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0 \end{cases} \tag{1.27}$$

Định nghĩa 1.3: *Ta nói hàm phức $w = f(z)$ xác định trong một lân cận của z_0 có giới hạn là L khi z tiến đến z_0, ký hiệu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = L$, nếu với mọi lân cận $B_\varepsilon(L)$ tồn tại lân cận $B_\delta(z_0)$ sao cho với mọi $z \in B_\delta(z_0)$, $z \ne z_0$ thì $f(z) \in B_\varepsilon(L)$.*

Trường hợp z_0, $L \in \mathbb{C}$ định nghĩa trên được viết dưới dạng cụ thể sau:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall z, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon \tag{1.28}$$

Từ (1.17), (1.24), tương tự (1.27) ta có:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v_0 \end{cases} \tag{1.29}$$

trong đó $z_0 = x_0 + iy_0$, $L = u_0 + iv_0$.

1.2.3. Liên tục

Định nghĩa 1.4: *Hàm phức $w=f(z)$ xác định trong miền chứa điểm z_0 được gọi là liên tục tại z_0 nếu $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. Hàm phức $w=f(z)$ liên tục tại mọi điểm của miền D được gọi là liên tục trong D.*

Từ (1.29) suy ra rằng một hàm phức liên tục khi và chỉ khi hai hàm thực hai biến (phần thực, phần ảo) xác định bởi (1.24) là liên tục. Do đó ta có thể áp dụng các tính chất liên tục của hàm thực hai biến cho hàm phức.

1.2.4. Hàm khả vi, điều kiện Cauchy-Riemann

Định nghĩa 1.5: *Giả sử $z=x+iy$ là một điểm thuộc miền xác định D của hàm phức đơn trị $w=f(z)$. Nếu tồn tại giới hạn*

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \qquad \textbf{(1.33)}$$

thì ta nói hàm $w=f(z)$ khả vi (hay có đạo hàm) tại z, còn giới hạn đó được gọi là đạo hàm tại z, ký hiệu $f'(z)$ hoặc $w'(z)$.

Ví dụ 1.8: Cho $w=z^2$, tính $w'(z)$.

Giải: $\Delta w=(z+\Delta z)^2-z^2=2z\Delta z+\Delta z^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{\Delta w}{\Delta z}=2z+\Delta z$,

Do đó $w'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z$.

Định lý 1.1: Nếu hàm phức $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ khả vi tại $z=x+iy$ thì phần thực $u(x,y)$ và phần ảo $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng tại (x,y) và thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\end{cases} \qquad \textbf{(1.34)}$$

Ngược lại, nếu phần thực $u(x,y)$, phần ảo $v(x,y)$ khả vi tại (x,y) và thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann thì $w=f(z)$ khả vi tại $z=x+iy$ và

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)-i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y). \qquad \textbf{(1.35)}$$

Ví dụ 1.8: Hàm $w=z^2=x^2-y^2+i2xy$ ở Ví dụ 1.7 có $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$, do đó hàm khả vi tại mọi điểm và $w'(z)=2x+i2y=2z$.

Ví dụ 1.9: Hàm $w = \bar{z} = x - iy$ có $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = -1$ không thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann, do đó hàm không khả vi tại bất kỳ điểm nào.

1.2.5. Hàm giải tích

Định nghĩa 1.6: *Hàm đơn trị $w = f(z)$ khả vi trong một lân cận của z được gọi là giải tích tại z. Nếu $f(z)$ khả vi tại mọi điểm của D thì ta nói $f(z)$ giải tích trong D. $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$ nếu nó giải tích trong một miền chứa $\overline{D}$.*

Khái niệm khả vi và đạo hàm của hàm phức được định nghĩa tương tự như trường hợp hàm thực. Vì vậy các tính chất và quy tắc tính đạo hàm đã biết đối với hàm thực vẫn còn đúng đối với hàm phức.

$$\big(f(z) \pm g(z)\big)' = f'(z) \pm g'(z).$$

$$\big(f(z)g(z)\big)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z). \tag{1.38}$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\big(g(z)\big)^2}, \quad g(z) \neq 0.$$

$$\big(f(u(z))\big)' = f'(u).u'(z).$$

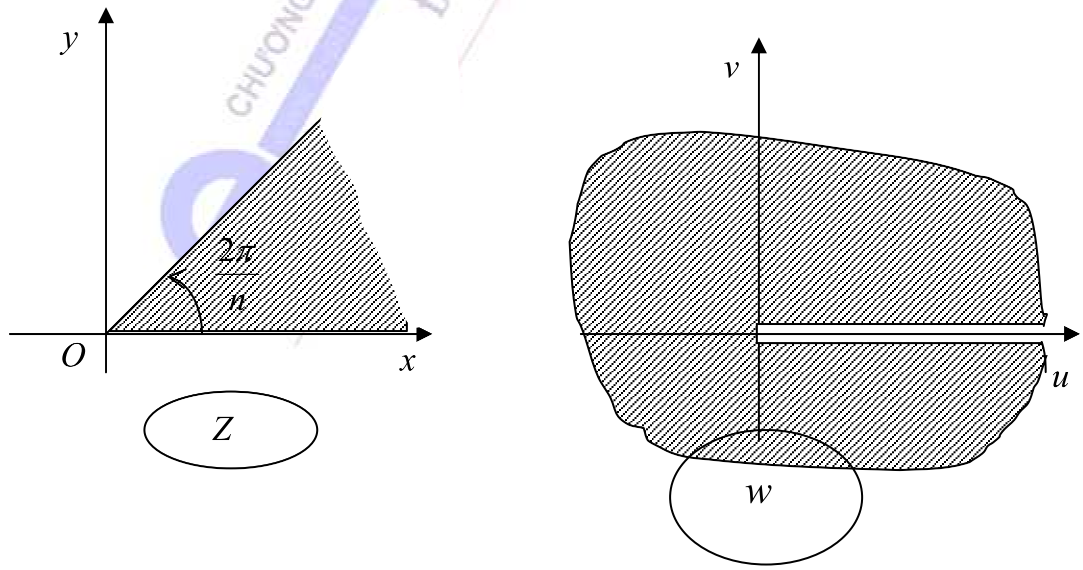
1.2.6. Các hàm phức sơ cấp cơ bản

1.2.6.1. Hàm lũy thừa $w = z^n$, n nguyên dương ≥ 2.

Hàm số xác định và giải tích với mọi z, đạo hàm $w = nz^{n-1}$.

Nếu $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì $w = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Vậy ảnh của đường tròn $|z| = R$ là đường tròn $|w| = R^n$. Ảnh của tia $\operatorname{Arg} z = \varphi + k2\pi$ là tia $\operatorname{Arg} w = n\varphi + k'2\pi$. Ảnh của hình quạt $0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{n}$ là mặt phẳng w bỏ đi trục thực dương.



1.2.6.2. Hàm căn $w=\sqrt[n]{z}$

Hàm căn bậc n: $w=\sqrt[n]{z}$ là hàm ngược của hàm lũy thừa bậc n.

Mọi số phức khác 0 đều có đúng n căn bậc n, vì vậy hàm căn là một hàm đa trị.

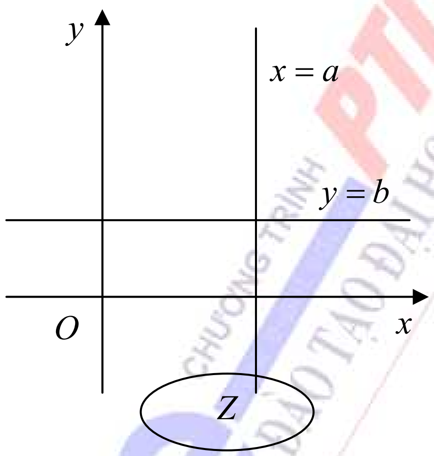
1.2.6.3. Hàm mũ $w=e^z$

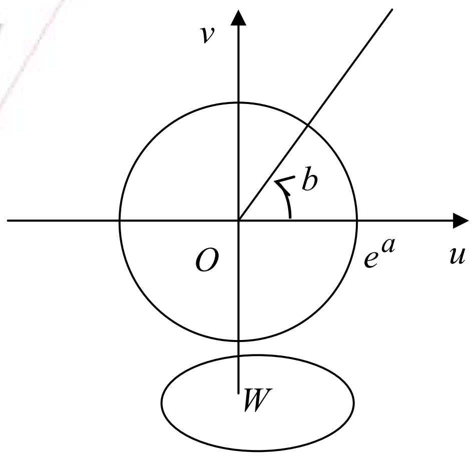
Mở rộng công thức Euler (1.12) ta có định nghĩa của hàm mũ

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^x\left(\cos y+i\sin y\right) \quad \textbf{(1.39)}$$

- $|w|=e^x$, $\operatorname{Arg} w=y+k2\pi$.
- Hàm mũ giải tích tại mọi điểm và $\left(e^z\right)'=e^z$
- $e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$, $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}=e^{z_1-z_2}$, $\left(e^z\right)^n=e^{nz}$, $e^{z+ik2\pi}=e^z$. **(1.40)**
- $e^0=1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{i\pi}=-1$.
- Qua phép biến hình $w=e^z$, ảnh của đường thẳng $x=a$ là đường tròn $|w|=e^a$, ảnh của đường thẳng $y=b$ là tia $\operatorname{Arg}w=b+k2\pi$.

Ảnh của băng $0<y<2\pi$ là mặt phẳng w bỏ đi nửa trục thực dương.





1.2.6.4. Hàm lôgarit

Hàm ngược của hàm mũ được gọi là hàm lôgarit. $w=\operatorname{Ln} z \Leftrightarrow z=e^w$

$$w=\operatorname{Ln} z=u+iv \Leftrightarrow z=e^w=e^{u+iv}=e^u\left(\cos v+i\sin v\right)$$

Vậy
$$w=\operatorname{Ln}z \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{Re} w=\ln|z| \\ \operatorname{Im} w=\arg z+k2\pi\end{cases} \quad \textbf{(1.41)}$$

Điều này chứng tỏ hàm lôgarit phức là hàm đa trị. Ứng với mỗi z có vô số giá trị của w, những giá trị này có phần thực bằng nhau còn phần ảo hơn kém nhau bội số nguyên của 2π. Với mỗi $k = k_0$ cố định ta được một nhánh đơn ta trị của hàm $w = \mathrm{Ln}\, z$.

$$w = \ln|z| + i(\arg z + k_0 2\pi)$$

Nhánh đơn trị ứng với $k = 0$ được gọi là nhánh đơn trị chính và được ký hiệu $\ln z$.

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

trong đó $\ln$ ở vế trái là hàm biến phức, còn ở vế phải là hàm biến thực.

Một số tính chất của hàm lôgarit.

- $\mathrm{Ln}(-1) = \ln|-1| + i(\arg(-1) + k2\pi) = (2k+1)\pi i \;\Rightarrow\; \ln(-1) = i\pi$
- $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}(z_1) + \mathrm{Ln}(z_2)$, $\mathrm{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}(z_1) - \mathrm{Ln}(z_2)$, $\mathrm{Ln}\, z^n = n\mathrm{Ln}\, z$.

Các nhánh đơn trị của hàm lôgarit giải tích trên nửa mặt phẳng phức Z bỏ đi nửa trục thực âm $(x < 0)$.

1.2.6.5. Các hàm lượng giác phức

Mở rộng công thức (1.12) cho các đối số phức ta được các hàm lượng giác phức

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \;,\quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} ;\quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1.42}$$

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z},\; z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2};\quad \mathrm{cotg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z};\quad z \neq k\pi .$$

Các hàm lượng giác phức còn giữ được nhiều tính chất của hàm lượng giác thực.

- Hàm $\cos z$, $\sin z$ tuần hoàn chu kỳ 2π, hàm $\mathrm{tg}\, z$, $\mathrm{cotg}\, z$ tuần hoàn chu kỳ π.
- Các hàm lượng giác phức giải tích trong miền xác định

$$(\sin z)' = \cos z\,,\; (\cos z)' = -\sin z\,,\; (\mathrm{tg}\, z)' = \frac{1}{\cos^2 z}\,,\; (\mathrm{cotg}\, z)' = \frac{-1}{\sin^2 z} .$$

- $\cos^2 z + \sin^2 z = 1;\;\; \forall z \in \mathbb{C}$
- Các công thức cộng góc, hạ bậc, tổng thành tích, tích thành tổng vẫn còn đúng.

Tuy nhiên có những tính chất của hàm lượng giác thực không còn đúng đối với hàm lượng giác phức. Chẳng hạn hàm lượng giác thực bị chặn nhưng hàm lượng giác phức không bị chặn (ta có thể chứng minh điều này bằng cách áp dụng định lý Louville):

$$|\cos x| \le 1,\; |\sin x| \le 1 \;,\; \forall x \in \mathbb{R} \text{ nhưng } \cos ni = \frac{e^{-n} + e^n}{2} > 1,\; |\sin ni| = \left|\frac{e^{-n} - e^n}{2i}\right| > 1 .$$

1.2.6.6. Các hàm lượng giác hyperbolic phức

$$\operatorname{ch} z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2},\ \operatorname{sh} z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2},\ \operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ \operatorname{coth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} \qquad \textbf{(1.43)}$$

- Các hàm lượng giác hyperbolic phức giải tích trong miền xác định

$$(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z,\ (\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z,\ (\operatorname{th} z)'=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 z},\ (\operatorname{coth} z)'=\frac{-1}{\operatorname{sh}^2 z}.$$

- $\operatorname{ch} z+\operatorname{sh} z=e^{z}$, $\operatorname{ch} z-\operatorname{sh} z=e^{-z}$, $\sin iz=i\operatorname{sh} z$, $\cos iz=\operatorname{ch} z$.
- $\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1$, $\operatorname{sh} 2z=2\operatorname{ch} z\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} 2z=\operatorname{ch}^2 z+\operatorname{sh}^2 z$.

1.3. PHÉP BIẾN HÌNH BẢO GIÁC

Nhiều vấn đề trong khoa học và thực tiễn (ví dụ bài toàn nổ mìn, bài toán thiết kế cánh máy bay…) đưa đến bài toán: Tìm phép biến hình bảo giác biến miền D thành miền Δ nào đó mà ta đã biết hoặc dễ dàng khảo sát hơn. Trong mục này ta đưa ra vài nguyên lý và phương pháp tìm phép biến hình trong những trường hợp đơn giản.

1.3.1. Định nghĩa phép biến hình bảo giác

Định nghĩa 1.7: *Phép biến hình $w=f(z)$ được gọi là bảo giác tại z nếu thoả mãn hai điều kiện sau:*

i. *Bảo toàn góc giữa hai đường cong bất kỳ qua điểm z (kể cả độ lớn và hướng).*

ii. *Có hệ số co dãn không đổi tại z, nghĩa là mọi đường cong đi qua điểm này đều có hệ số co dãn như nhau qua phép biến hình.*

Phép biến hình $w=f(z)$ được gọi là bảo giác trong miền D nếu nó bảo giác tại mọi điểm của miền này.

Định lý sau đây cho điều kiện đủ của phép biến hình bảo giác.

Định lý 1.2: Nếu hàm $w=f(z)$ khả vi tại z và $f'(z)\neq 0$ thì phép biến hình thực hiện bởi hàm $w=f(z)$ bảo giác tại điểm z, đồng thời $\arg f'(z)$ là góc quay và $|f'(z)|$ là hệ số co giãn tại điểm z của phép biến hình đó.

Từ định lý này ta suy ra rằng nếu $w=f(z)$ giải tích trong D và $f'(z)\neq 0,\ \forall z\in D$ thì nó là một phép biến hình bảo giác trong D.

1.3.2. Phép biến hình tuyến tính $w=az+b,\ a\neq 0$

Phép biến hình này bảo giác trong toàn miền $\mathbb{C}$ vì $w'(z)=a\neq 0,\ \forall z$.

Nếu $a=|a|e^{i\varphi}$ thì $w=|a|e^{i\varphi}z+b$. Điều này chứng tỏ phép biến hình tuyến tính là hợp của ba phép biến hình sau:

- Phép vị tự tâm O tỷ số $k=|a|$,
- Phép quay tâm O, góc quay φ,

- Phép tịnh tiến theo véc tơ b.

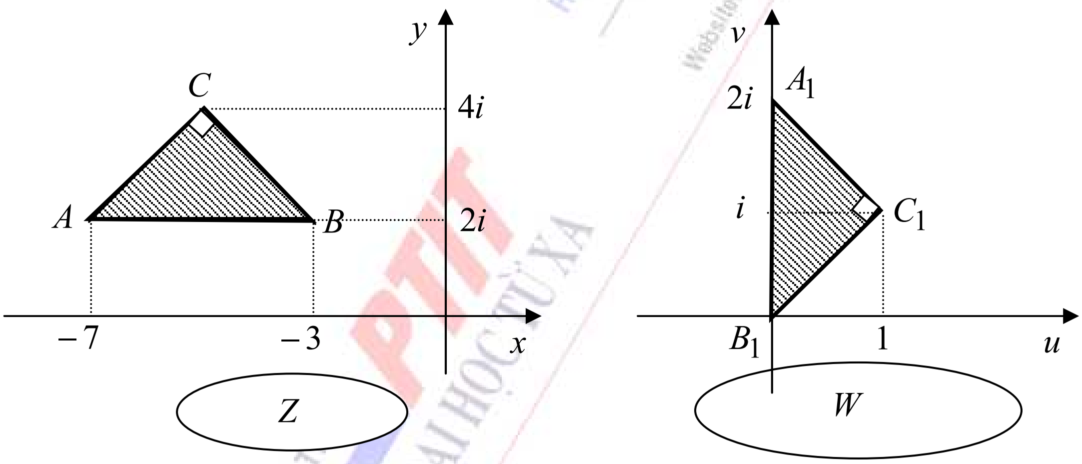
Vậy phép biến hình tuyến tính là một phép biến hình đồng dạng (hợp của một phép vị tự, phép quay, phép tịnh tiến). Nó biến một hình bất kỳ thành một hình đồng dạng với nó. Đặc biệt biến một đường tròn thành một đường tròn, biến một đường thẳng thành một đường thẳng, một đa giác thành một đa giác đồng dạng.

Ví dụ 1.10: Tìm phép biến hình bảo giác biến tam giác vuông cân có các đỉnh $A(-7+2i)$, $B(-3+2i)$, $C(-5+4i)$ thành tam giác vuông cân có các đỉnh $A_1(2i)$, $B_1(0)$, $C_1(1+i)$.

Giải: Hai tam giác vuông cân bất kỳ đều đồng dạng với nhau nên tồn tại một phép đồng dạng $w=az+b$, $a\neq 0$ biến ΔABC thành $\Delta A_1B_1C_1$. Phép biến hình này biến A thành A_1, biến B thành B_1, do đó a, b thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} 2i = a(-7+2i)+b \\ 0 = a(-3+2i)+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{i}{2} \\ b = -1-\dfrac{3}{2}i \end{cases} \Rightarrow w = -\frac{i}{2}z - 1 - \frac{3}{2}i.$$

Thay $z=-5+4i$ ta có $w = -\dfrac{i}{2}(-5+4i) - 1 - \dfrac{3}{2}i = 1+i$.



1.3.3. Phép nghịch đảo $w=\dfrac{1}{z}$

Phép biến hình $w=\dfrac{1}{z}$ có thể mở rộng lên mặt phẳng phức mở rộng $\overline{\mathbb{C}}$ bằng cách cho ảnh của $z=0$ là ∞ và ảnh của $z=\infty$ là $w=0$.

Đạo hàm $w'(z)=\dfrac{-1}{z^2}\neq 0,\ \forall z\neq 0, \infty$ nên phép biến hình bảo giác tại mọi điểm $z\neq 0, \infty$.

Hai điểm A, B nằm trên một tia xuất phát từ tâm I của đường tròn $(\mathscr{C})$ bán kính R được gọi là liên hợp hay đối xứng qua $(\mathscr{C})$ nếu $\mathrm{IA.IB}=\mathrm{R}^2$.

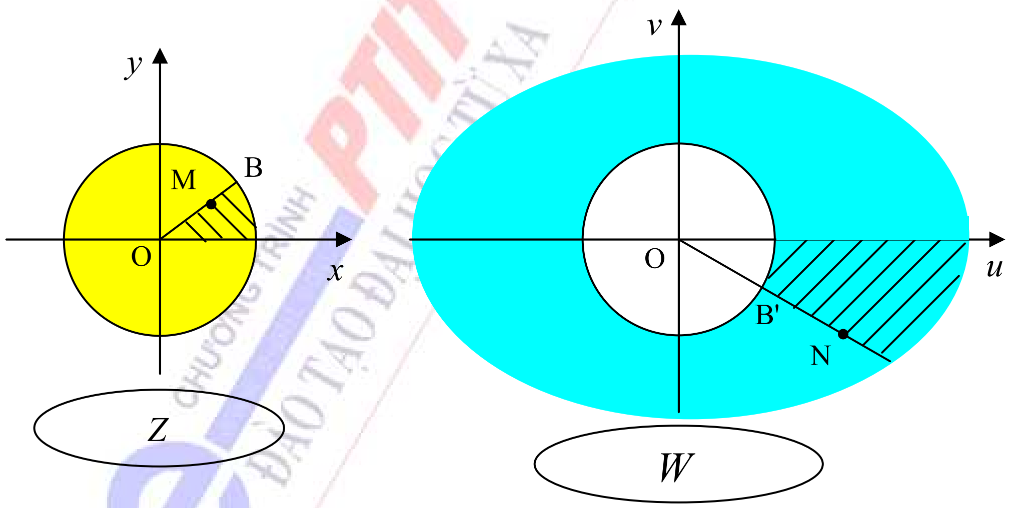
Vì $\operatorname{Arg}\frac{1}{\overline{z}} = -\operatorname{Arg}\overline{z} = \operatorname{Arg} z$ nên z và $\overline{w} = \frac{1}{\overline{z}}$ cùng nằm trên một tia xuất phát từ O. Ngoài ra $|z|.\frac{1}{|\overline{z}|} = 1$, do đó z và $\overline{w} = \frac{1}{\overline{z}}$ đối xứng nhau qua đường tròn đơn vị.

Vậy phép biến hình nghịch đảo $w = \frac{1}{z}$ là hợp của phép đối xứng qua đường tròn đơn vị và phép đối xứng qua trục thực. Phép biến hình này biến:

- Một đường tròn đi qua O thành một đường thẳng.
- Một đường tròn không đi qua O thành một đường tròn.
- Một đường thẳng đi qua O thành một đường thẳng qua O.
- Một đường thẳng không đi qua O thành một đường tròn đi qua O.

Nếu ta xem đường thẳng là một đường tròn (có bán kính vô hạn) thì phép biến hình $w = \frac{1}{z}$ biến một đường tròn thành một đường tròn.

Ảnh của đường tròn $|z| = \mathrm{R}$ là đường tròn $|w| = \frac{1}{\mathrm{R}}$, ảnh của hình tròn $|z| < \mathrm{R}$ là phần ngoài của hình tròn $|w| > \frac{1}{\mathrm{R}}$. Ảnh của M trên tia OB là N trên tia OB', B' là đối xứng của B qua trục thực và $\mathrm{OM.ON} = 1$.



3.4. Phép biến hình phân tuyến tính $w = \frac{az+b}{cz+d}$; $c \neq 0$, $ad - bc \neq 0$

Ta có thể mở rộng hàm phân tuyến tính $w = \frac{az+b}{cz+d}$ lên mặt phẳng phức mở rộng $\overline{\mathbb{C}}$ bằng cách cho ảnh của $z = -\frac{d}{c}$ là ∞ và ảnh của $z = \infty$ là $w = \frac{a}{c}$.

Đạo hàm $w'(z)=\dfrac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0,\ \forall z\neq -\dfrac{d}{c},\infty$ nên phép biến hình bảo giác tại mọi điểm $z\neq -\dfrac{d}{c},\infty$.

$$w=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{acz+bc}{c(cz+d)}=\frac{a(cz+d)+bc-ad}{c(cz+d)}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d}.$$

Do đó phép biến hình phân tuyến tính là hợp của 3 phép biến hình:

- Phép biến hình tuyến tính: $z\mapsto cz+d$,
- Phép nghịch đảo: $cz+d\mapsto \dfrac{1}{cz+d}$,
- Phép biến hình tuyến tính: $\dfrac{1}{cz+d}\mapsto \dfrac{bc-ad}{c}\cdot\dfrac{1}{cz+d}+\dfrac{a}{c}$.

Vì các phép biến hình tuyến tính và nghịch đảo biến một đường tròn thành một đường tròn và bảo toàn tính đối xứng của 2 điểm đối xứng qua đường tròn, nên phép biến hình phân tuyến tính cũng có tính chất đó.

Phép biến hình $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $c\neq 0$ có thể viết lại

$$w=\frac{\frac{a}{c}z+\frac{b}{c}}{z+\frac{d}{c}}=\frac{a_1z+b_1}{z+d_1}\ \text{ hoặc }\ w=k\frac{z+b_2}{z+d_2} \tag{1.44}$$

vì vậy chỉ phụ thuộc 3 tham số. Do đó một hàm phân tuyến tính hoàn toàn được xác định khi biết ảnh w_1, w_2, w_3 của 3 điểm khác nhau bất kỳ z_1, z_2, z_3. Để xác định 3 tham số a_1, b_1, d_1 ta giải hệ phương trình sau đây.

$$w_1=\frac{a_1z_1+b_1}{z_1+d_1},\ w_2=\frac{a_1z_2+b_1}{z_2+d_1},\ w_3=\frac{a_1z_3+b_1}{z_3+d_1} \tag{1.45}$$

Hoặc hàm phải tìm có thể xác định bởi phương trình

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_1}{w_2-w_3}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3} \tag{1.46}$$

Đặc biệt nếu $w(z_0)=0$ và $w(z_1)=\infty$, theo (1.44) ta có

$$w=k\frac{z-z_0}{z-z_1} \tag{1.47}$$

1.3.5. Các nguyên lý tổng quát của phép biến hình bảo giác

a. Sự tồn tại của phép biến hình

Định lý 1.3 (Định lý Riemann): Nếu D và Δ là hai miền đơn liên (không phải là mặt phẳng phức mở rộng hay mặt phẳng phức mở rộng bỏ đi một điểm) thì tồn tại phép biến hình $w = f(z)$ giải tích, bảo giác đơn trị hai chiều biến D thành Δ.

Hơn nữa nếu cho trước $z_0 \in \mathrm{D}, w_0 \in \Delta$ và $\theta_0 \in \mathbb{R}$ thì chỉ có duy nhất $w = f(z)$ thoả mãn $w_0 = f(z_0)$, $\operatorname{Arg} f'(z_0) = \theta_0$.

Định lý Riemann chỉ cho ta biết sự tồn tại của phép biến hình chứ không cho ta cách tìm cụ thể phép biến hình này. Trong thực hành, để tìm phép biến hình biến miền D thành miền Δ người ta tìm phép biến hình biến D, Δ về hình tròn đơn vị $|z| < 1$ hay nửa mặt phẳng trên. (Các phép biến hình này có thể tìm trong các sổ tay toán học).

- ♦ Nếu $\zeta = f(z)$ biến hình đơn trị hai chiều biến D lên hình tròn $|\zeta| < 1$,
- ♦ Nếu $\zeta = g(w)$ biến hình đơn trị hai chiều biến Δ lên hình tròn $|\zeta| < 1$,

thì $w = g^{-1} \circ f(z)$ biến D thành Δ.

b. Sự tương ứng biên

Định lý 1.4: Cho hai miền đơn liên D và Δ có biên là $\partial\mathrm{D}, \partial\Delta$. Giả sử $\partial\mathrm{D}, \partial\Delta$ là đường trơn từng khúc, Δ bị chặn. Nếu $w = f(z)$ giải tích trong D và liên tục trong $\overline{\mathrm{D}}$, biến hình 1-1 $\partial\mathrm{D}$ lên $\partial\Delta$ sao cho khi z chạy trên $\partial\mathrm{D}$ theo chiều dương, tương ứng w chạy trên $\partial\Delta$ cũng theo chiều dương, thì hàm $w = f(z)$ biến hình bảo giác đơn trị hai chiều từ D lên Δ.

c. Sự bảo toàn miền

Định lý 1.5: Nếu hàm $w = f(z)$ giải tích, khác hằng số trên miền D thì ảnh $\Delta = f(\mathrm{D})$ cũng là một miền.

Một vài chú ý khi tìm phép biến hình bảo giác trong các trường hợp thường gặp sau:

1. Đối với hai miền đồng dạng ta dùng phép biến hình tuyến tính $w = az + b$, $a \neq 0$.
2. Biến một cung tròn thành một cung tròn hay đường thẳng ta dùng hàm phân tuyến tính $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$; $c \neq 0, ad - bc \neq 0$.
3. Biến một góc thành nửa mặt phẳng, ta xét $w = z^n$.
4. Biến một băng song song với trục thực lên nửa mặt phẳng ta dùng $w = e^z$.

Ví dụ 1.11: Tìm phép biến hình bảo giác $w = f(z)$ biến nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im} z > 0$ thành hình tròn $|w| < 1$ sao cho $w(z_0) = 0$, với $\operatorname{Im} z_0 > 0$.

Giải: Vì $\overline{z_0}$ đối xứng với z_0 qua Ox, ∞ đối xứng với 0 qua $|w|=1$, do đó theo nguyên lý tương ứng biên ta chỉ cần tìm hàm phân tuyến tính biến trục thực $\operatorname{Im} z=0$ lên $|w|=1$ và bảo toàn chiều.

Hai miền đã cho không đồng dạng nên $c \neq 0$. Mặt khác $w(z_0)=0$ và tính chất bảo toàn tính đối xứng nên $w(\overline{z_0})=\infty$, do đó theo (1.47) ta có thể xét hàm phân tuyến tính dạng $w=k\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$. Khi $z=x\in\mathbb{R}$ thì $|w(x)|=1 \Rightarrow \left|k\dfrac{x-z_0}{x-\overline{z_0}}\right|=|k|\left|\dfrac{x-z_0}{x-\overline{z_0}}\right|=1 \Rightarrow |k|=1$.

$\Rightarrow \ k=e^{i\varphi}$. Vậy $w=e^{i\varphi}\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$.

Ví dụ 1.12: Tìm phép biến hình bảo giác $w=f(z)$ biến hình tròn $|z|<1$ thành hình tròn $|w|<1$ sao cho $w(z_0)=0$, với $0<|z_0|<1$.

Giải: Vì z_0 đối xứng với $\dfrac{1}{\overline{z_0}}$ qua $|z|=1$, do đó ảnh của z_0 là 0 thì ảnh của $\dfrac{1}{\overline{z_0}}$ là ∞ vì $0,\infty$ đối xứng nhau qua $|w|=1$. Tương tự ví dụ 1.11 và công thức (1.47) ta có thể xét hàm phân tuyến tính dạng $w=k\dfrac{z-z_0}{z-\dfrac{1}{\overline{z_0}}}=\overline{z_0}k\dfrac{z-z_0}{\overline{z_0}z-1}$.

Vì ảnh của $|z|=1$ là $|w|=1$ và $|z|=1 \Rightarrow \overline{z}=\dfrac{1}{z}$.

$$\Rightarrow \ 1=|w|=\left|\overline{z_0}k\frac{z-z_0}{\overline{z_0}z-1}\right|=\left|\overline{z_0}k\right|\left|\frac{z-z_0}{\dfrac{\overline{z_0}}{\overline{z}}-1}\right|=\left|\overline{z_0}k\right|\frac{|z-z_0||\overline{z}|}{\left|\overline{z_0}-\overline{z}\right|}=\left|\overline{z_0}k\right| \ \Rightarrow \ \overline{z_0}k=e^{i\varphi}.$$

Vậy $w=e^{i\varphi}\dfrac{z-z_0}{\overline{z_0}z-1}$.

Ví dụ 1.13: Tìm phép biến hình bảo giác $w=f(z)$ biến hình quạt $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ thành hình tròn $|w|<1$ sao cho $w\left(e^{i\pi/6}\right)=0$ và $w(0)=i$.

Giải: Phép biến hình $\xi=z^3$ biến hình quạt $0<\arg z<\dfrac{\pi}{3}$ thành nửa mặt phẳng trên $\operatorname{Im}\xi>0$ và $\xi\left(e^{i\pi/6}\right)=e^{i\pi/2}=i$, $\xi(0)=0$. Theo Ví dụ 1.11, phép biến hình $w=e^{i\varphi}\dfrac{\xi-i}{\xi+i}$ biến $\operatorname{Im}\xi>0$ thành $|w|<1$ thỏa mãn $w(i)=0$, $w(-i)=\infty$.

Nếu ta thêm điều kiện $w(0)=i$ thì $i=e^{i\varphi}\dfrac{0-i}{0+i} \Rightarrow e^{i\varphi}=-i$.

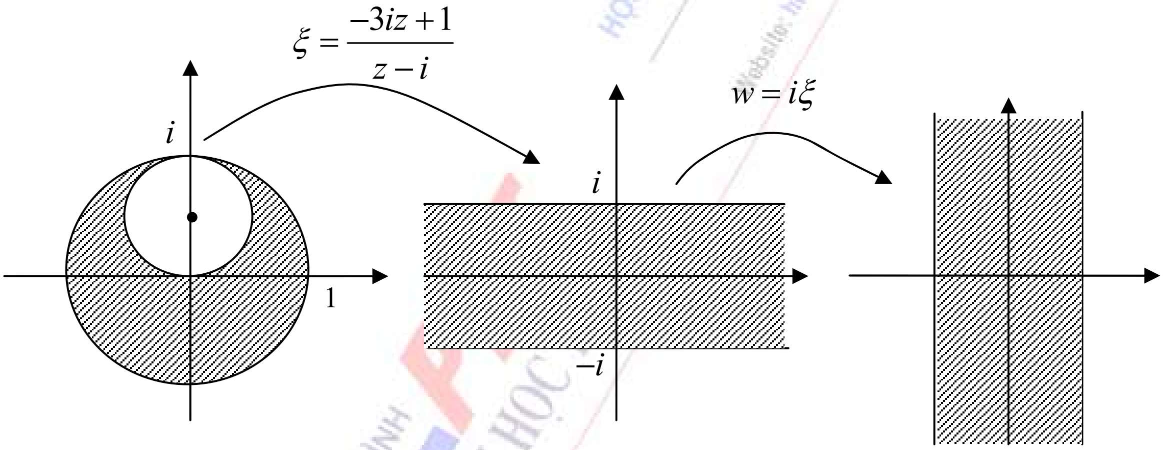
Vậy phép biến hình cần tìm là $w=-i\dfrac{z^3-i}{z^3+i}$.

Ví dụ 1.14: *Tìm phép biến hình bảo giác* $w=f(z)$ *biến miền* D : $\begin{cases} |z|<1 \\ \left|z-\dfrac{i}{2}\right|>\dfrac{1}{2} \end{cases}$ *thành băng* $-1<\operatorname{Re} w<1$.

Giải: Phép biến hình phân tuyến tính $\xi=\dfrac{az+b}{z-i}$ biến $i,\,0,-i$ lần lượt thành $\infty,\,i,-i$, do đó ξ biến miền D thành băng $-1<\operatorname{Im}\xi<1$.

Phép quay $w=i\xi$ biến băng $-1<\operatorname{Im}\xi<1$ thành băng $-1<\operatorname{Re} w<1$.

Vậy phép biến hình cần tìm là $w=i\dfrac{-3iz+1}{z-i}=\dfrac{3z+i}{z-i}$.



1.4. TÍCH PHÂN PHỨC, CÔNG THỨC TÍCH PHÂN CAUCHY

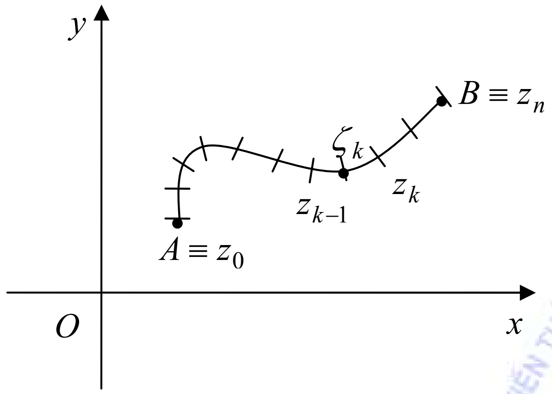
Trong mục này ta nghiên cứu các tính chất và các biểu diễn của hàm phức giải tích, vì vậy ta chỉ xét các hàm đơn trị.

1.4.1. Định nghĩa và các tính chất của tích phân phức

Khái niệm tích phân phức dọc theo một đường cong được định nghĩa tương tự tích phân đường loại 2.

Giả sử $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ xác định đơn trị trong miền D. L là đường cong (có thể đóng kín) nằm trong D có điểm mút đầu là A mút cuối là B.

Chia L thành n đoạn bởi các điểm $A\equiv z_0,\, z_1,\, z_2,\, ...,z_n\equiv B$ nằm trên L theo thứ tự tăng dần của các chỉ số.



Chọn trên mỗi cung con $\overset{\frown}{z_{k-1}, z_k}$ của đường cong L một điểm bất kỳ $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$.

Đặt $z_k = x_k + iy_k$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$; $k = 1, 2, ..., n$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{1.48}$$

được gọi là tổng tích phân của hàm $f(z)$ trên L ứng với phân hoạch và cách chọn các điểm đại diện trên. Tổng này nói chung phụ thuộc vào hàm $f(z)$, đường L, cách chia L bởi các điểm z_k và cách chọn các điểm ζ_k.

Nếu khi $\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k| \to 0$ tổng S_n tiến tới giới hạn $I \in \mathbb{C}$ không phụ thuộc cách chia đường L và chọn các điểm ζ_k thì I được gọi là tích phân của hàm $f(z)$ dọc theo đường cong L từ A đến B, ký hiệu $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz$. Vậy

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \lim_{\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \tag{1.49}$$

Tổng tích phân (1.48) có thể phân tích thành tổng của 2 tổng tích phân đường loại 2.

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k) + iv(\xi_k,\eta_k)\right](\Delta x_k + i\Delta y_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] + i\sum_{k=1}^{n}\left[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] \tag{1.50}$$

Tương tự (1.27), áp dụng (1.17) ta có

$$\max_{1\le k\le n}|\Delta z_k| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \max\limits_{1\le k\le n}|\Delta x_k| \to 0 \\ \max\limits_{1\le k\le n}|\Delta y_k| \to 0 \end{cases}$$

Vì vậy tích phân phức (1.49) tồn tại khi và chỉ khi hai tích phân đường loại 2 có tổng tích phân (1.50) tồn tại và có đẳng thức

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} udx - vdy + i\int_{\overset{\frown}{AB}} vdx + udy \qquad \textbf{(1.51)}$$

Nếu hàm $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ liên tục trên D và cung $\overset{\frown}{AB}$ trơn từng khúc thì tồn tại hai tích phân đường loại 2 ở vế phải của (1.51) do đó tồn tại tích phân phức tương ứng.

Đẳng thức (1.51) suy ra rằng tích phân phức có các tính chất như các tính chất của tích phân đường loại 2.

- $\int_{\overset{\frown}{AB}} \big(f(z)+g(z)\big)dz = \int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz + \int_{\overset{\frown}{AB}} g(z)dz$.
- $\int_{\overset{\frown}{AB}} kf(z)dz = k\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz$; $k - const$.
- $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(z)dz = -\int_{\overset{\frown}{BA}} f(z)dz$.
- $\left|\int_L f(z)dz\right| \le \int_L |f(z)|ds$,

vế phải của bất đẳng thức là tích phân đường loại 1 trên cung L có vi phân cung là $ds = |dz| = \sqrt{dx^2+dy^2}$. Đặc biệt, nếu $|f(z)| \le M$, $\forall z \in$ L và $\boldsymbol{l}$ là độ dài của đường cong L thì

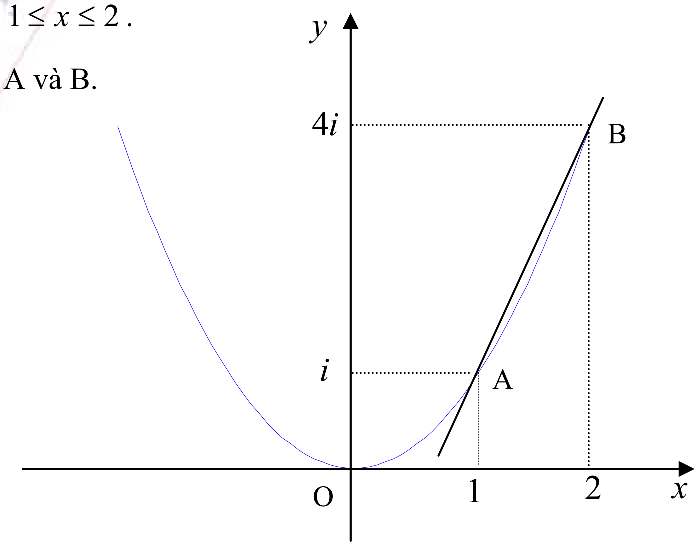
$$\left|\int_L f(z)dz\right| \le Ml. \qquad \textbf{(1.52)}$$

Khi A trùng với B thì L là đường cong kín (ta chỉ xét các đường cong kín không tự cắt, gọi là đường Jordan). Tích phân trên đường cong kín L được quy ước lấy theo chiều dương, ký hiệu là $\oint_L f(z)dz$.

Ví dụ 1.15: Tính tích phân $I = \int_{\overset{\frown}{AB}} z^2dz$; $A = 1+i$, $B = 2+4i$

1. Dọc theo parabol $y = x^2$, $1 \le x \le 2$.
2. Dọc theo đường thẳng nối A và B.

Giải:



$$I=\int_{\overset{\frown}{AB}} z^2dz=\int_{\overset{\frown}{AB}}(x+iy)^2(dx+idy)=\int_{\overset{\frown}{AB}}\left(x^2-y^2\right)dx-2xydy+i\int_{\overset{\frown}{AB}}2xydx+\left(x^2-y^2\right)dy$$

1. Nếu lấy tích phân dọc theo $y=x^2$ thì $dy=2xdx$

$$\Rightarrow\ I=\int_1^2\left[\left(x^2-x^4\right)-4x^4\right]dx+i\int_1^2\left[2x^3+\left(x^2-x^4\right)2x\right]dx=\frac{-86}{3}-6i\,.$$

2. Nếu lấy tích phân dọc theo đường thẳng nối từ A đến B thì $y=3x-2$, $dy=3dx$

$$I=\int_1^2\left[x^2-(3x-2)^2-2x(3x-2)3\right]dx+i\int_1^2\left[2x(3x-2)+3\left(x^2-(3x-2)^2\right)\right]dx=\frac{-86}{3}-6i.$$

Qua ví dụ trên ta nhận thấy giá trị của tích phân không phụ thuộc vào đường lấy tích phân từ A đến B. Các định lý sau cho điều kiện cần và đủ để tích phân phức không phụ thuộc vào đường lấy tích phân nối hai đầu mút của đường.

1.4.2. Định lý tích phân Cauchy

Định lý 1.6: Điều kiện cần và đủ để tích phân của hàm $f(z)$ trong miền D không phụ thuộc vào đường lấy tích phân là tích phân của $f(z)$ dọc theo mọi đường cong kín bất kỳ (không tự cắt nhau) trong D phải bằng 0.

Định lý 1.7: Nếu hàm phức $w=f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D thì tích phân của $f(z)$ dọc theo mọi đường cong kín L bất kỳ trong D đều bằng 0.

Chứng minh: Áp dụng định lý Green để đưa tích phân đường loại 2 về tích phân kép và công thức (1.51) ta có

$$\oint_L f(z)dz=\oint_L udx-vdy+i\oint_L vdx+udy=\iint_\Delta\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy+i\iint_\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

trong đó Δ là hình phẳng giới hạn bởi đường cong kín L nằm trong D.

Vì $w=f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D nên các hàm dưới dấu tích phân trong hai tích phân kép ở trên đều bằng 0 do thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann. Vậy $\oint_L f(z)dz=0$.

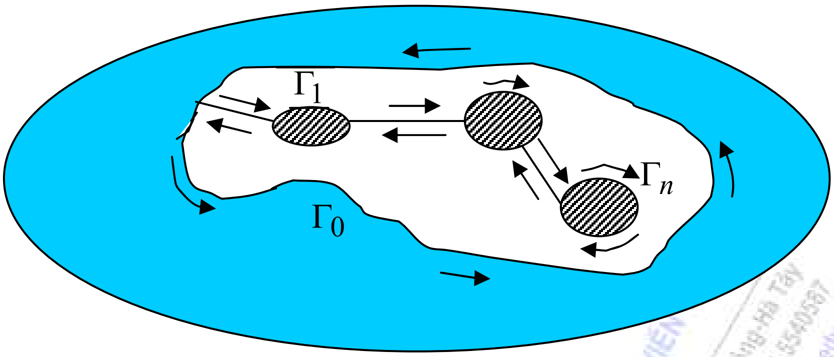
Hệ quả 1: Nếu $w=f(z)$ giải tích trong miền kín, đơn liên $\overline{D}$ thì. $\oint_{\partial D} f(z)dz=0$.

Chứng minh: Tồn tại miền đơn liên $G\supset\overline{D}$ và $f(z)$ giải tích trong G. Áp dụng định lý 1.9 cho hàm $f(z)$ trong G và tích phân lấy trên đường cong kín $\partial D\subset G$.

Hệ quả 2: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong miền kín đa liên $\overline{D}$ có biên ngoài là Γ_0 và biên trong là $\Gamma_1,...,\Gamma_n$ thì

$$\oint_{\Gamma_0} f(z)dz=\sum_{k=1}^{n}\oint_{\Gamma_k} f(z)dz \tag{1.53}$$

Chứng minh:



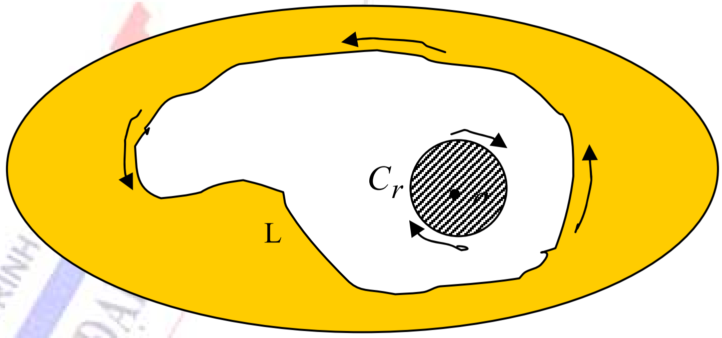
Cắt $\overline{D}$ theo các lát cắt nối Γ_0 với $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ thì ta được một miền đơn liên. Tích phân trên biên của miền này bằng 0 và chú ý rằng lúc đó tích phân trên đường nối Γ_0 với $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$ được lấy hai lần ngược chiều nhau vì vậy tích phân trên biên bằng $\oint\limits_{\Gamma_0} f(z)dz - \sum\limits_{k=1}^{n} \oint\limits_{\Gamma_k} f(z)dz = 0$.

Có thể chứng minh được rằng hệ quả 1 và hệ quả 2 còn đúng khi $f(z)$ giải tích trong D và liên tục trong $\overline{D}$.

Ví dụ 1.16: Tính tích phân $I_n = \oint\limits_L \frac{dz}{(z-a)^n}$; $n \in \mathbb{Z}$ trong đó L là đường cong kín bất kỳ không đi qua a.

Giải:

Gọi D là miền được giới hạn bởi L.



- Nếu $a \notin$ D thì $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$ giải tích trong D nên $I_n = 0$.

- Nếu $a \in$ D. Gọi $C_r = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z-a| = r\}$ là đường tròn tâm a bán kính r. Chọn r đủ bé để $C_r \subset$ D. Xét D' là miền nhị liên có được bằng cách lấy miền D bỏ đi hình tròn tâm a bán kính r. D' có biên ngoài là L, biên trong là C_r. $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$ giải tích trong D'. Theo hệ quả 2 ta có:

$$I_n = \oint\limits_L \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint\limits_{C_r} \frac{dz}{(z-a)^n}.$$

Phương trình tham số của $C_r : z = a + re^{it}$; $0 \le t \le 2\pi$. Do đó

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{r^n e^{int}} dt = \begin{cases} \int_0^{2\pi} idt & \text{khi} \quad n=1 \\ \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt & \text{khi} \quad n \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} 2\pi i & \text{khi} \quad n=1 \\ 0 & \text{khi} \quad n \neq 1. \end{cases} \quad \textbf{(1.54)}$$

1.4.3. Tích phân bất định, nguyên hàm

Hàm $F(z)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm phức $f(z)$ nếu $F'(z) = f(z)$.

Tương tự như hàm thực, ta có thể chứng minh được rằng nếu $F(z)$ là một nguyên hàm của $f(z)$ thì $F(z)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(z)$ và mọi nguyên hàm của $f(z)$ đều có dạng như thế.

Tập hợp các nguyên hàm của $f(z)$ được gọi là tích phân bất định của $f(z)$, ký hiệu $\int f(z)dz$.

Định lý 1.8: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D, $z_0 \in$ D. Khi đó

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz = \int_{\overset{\frown}{z_0 z}} f(z)dz$$

là một nguyên hàm của $f(z)$. Trong đó vế phải của đẳng thức trên là tích phân phức được lấy theo đường cong bất kỳ nằm trong D nối z_0 đến z.

Định lý 1.9: (Công thức Newton - Lepnitz)

Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền đơn liên D thì tồn tại một nguyên hàm $F(z)$. Khi đó, với mọi $z_0, z_1 \in$ D ta có:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1} = F(z_1) - F(z_0) \quad \textbf{(1.55)}$$

Ví dụ 1.17: $\int e^z dz = e^z + C$, $\int z^n dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1} + C$, $\int \sin z dz = -\cos z + C$;

$$\int_{1+i}^{2+4i} z^2 dz = \frac{z^3}{3}\Bigg|_{1+i}^{2+4i} = -\frac{86}{3} - 6i.$$

1.4.4. Công thức tích phân Cauchy

Định lý 1.10: Giả sử $f(z)$ giải tích trong miền $\overline{D}$ (có thể đa liên) có biên là ∂D. Khi đó, với mọi $a \in D$ ta có:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a} dz \quad \textbf{(1.56)}$$

tích phân được lấy theo chiều dương của ∂D.

Chứng minh: Với mọi $\varepsilon > 0$ chọn r đủ bé để đường tròn tâm a bán kính r: $C_r \subset D$ và $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$ (điều này có được vì $f(z)$ liên tục tại a). Gọi $\overline{D_r'}$ là miền có được bằng cách bỏ đi hình tròn $C_r = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-a| < r\}$ từ miền D. Biên của $\overline{D_r'}$ gồm biên ∂D của D và C_r. Hàm $\dfrac{f(z)}{z-a}$ giải tích trong miền $\overline{D_r'}$, áp dụng hệ quả 2 của Định lý 1.**6** ta được

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)}{z-a}dz$$

Mặt khác, từ ví dụ 1.16 ta có $\left|\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\dfrac{f(z)}{z-a}dz - f(a)\right| = \left|\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\dfrac{f(z)}{z-a}dz - \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\dfrac{f(a)}{z-a}dz\right|$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}dz\right| < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r}\cdot 2r\pi = \varepsilon .$$

Vì $\varepsilon > 0$ bé tuỳ ý cho trước nên $\left|\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\dfrac{f(z)}{z-a}dz - f(a)\right| = 0 \Rightarrow f(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\dfrac{f(z)}{z-a}dz$.

1.4.5. Đạo hàm cấp cao của hàm giải tích

Định lý 1.11: Hàm $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$ thì có đạo hàm mọi cấp trong D và với mọi $a \in D$ ta có:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad \textbf{(1.57)}$$

Từ (1.56)-(1.57) ta có công thức tích phân Cauchy:

$$\oint_{\partial D}\frac{f(z)}{z-a}dz = 2\pi i f(a), \quad \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a) \qquad \textbf{(1.58)}$$

trong đó C là đường cong kín bất kỳ bao quanh a nằm trong D.

Nhận xét:

1. Định lý trên suy ra rằng đạo hàm của một hàm giải tích là một hàm giải tích.
2. Kết hợp định lý 1.**7** và định lý 1.10, ta suy ra rằng: điều kiện cần và đủ để hàm đơn trị $f(z)$ có nguyên hàm trong miền D là giải tích trong D.

Ví dụ 1.18: Tính tích phân $I = \oint_C \dfrac{\cos z}{(z+1)z^2}dz$, trong đó C là đường tròn: $|z-1| = 3$.

Giải: Bằng phương pháp đồng nhất hệ số, ta có thể phân tích $\dfrac{1}{(z+1)z^2}$ thành tổng các phân thức hữu tỷ tối giản $\dfrac{1}{(z+1)z^2} = -\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z+1}$.

Do đó $I = \oint\limits_C \frac{\cos z}{(z+1)z^2}dz = -\oint\limits_C \frac{\cos z}{z}dz + \oint\limits_C \frac{\cos z}{z^2}dz + \oint\limits_C \frac{\cos z}{z+1}dz$.

Các điểm $z=0$ và $z=-1$ đều nằm trong hình tròn giới hạn bởi C. Áp dụng công thức (1.56)' và (1.57)' ta có:

$$I = -2\pi i \cos z\big|_{z=0} + 2\pi i(\cos z)'\big|_{z=0} + 2\pi i \cos z\big|_{z=-1} = 2\pi i(-1+\cos 1).$$

1.4.6. Bất đẳng thức Cauchy và định lý Louville

Từ công thức (1.58) suy ra rằng, nếu đường tròn $C_R : |z-a| = R$ nằm trong D và $|f(z)| \le M$ với mọi $z \in C_R$ thì

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint\limits_{C_R} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \le \frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{M2R\pi}{R^{n+1}}$$

hay

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{n!M}{R^n};\ \ n = 0,\ 1, ... \qquad \textbf{(1.59)}$$

Bất đẳng thức (1.58) được gọi là bất đẳng thức Cauchy.

Định lý 1.12 (định lý Louville): Nếu $f(z)$ giải tích trong toàn mặt phẳng và bị chặn thì nó là một hàm hằng.

Chứng minh: Theo giả thiết, tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(z)| \le M$ với mọi $z \in \mathbb{C}$. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy (1.58) với $n=1$, ta được $|f'(a)| \le \frac{M}{R}$ với mọi $R > 0$ suy ra $f'(a) = 0$ với mọi $a \in \mathbb{C}$.

Áp dụng công thức Newton - Lepnit, ta có

$$f(z) - f(z_0) = \int\limits_{z_0}^{z} f'(z)dz = 0 \quad \Rightarrow \quad f(z) = f(z_0),\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

1.5. LÝ THUYẾT CHUỖI PHỨC

1.5.1. Chuỗi số phức

Cho dãy số phức $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, ta định nghĩa một cách hình thức $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ là một chuỗi các số phức mà số hạng thứ n là u_n.

Tổng $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi trên.

Nếu dãy các tổng riêng $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn là $S \in \mathbb{C}$ thì ta nói *chuỗi* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *hội tụ* và S được gọi là *tổng của chuỗi*, ký hiệu $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Trong trường hợp ngược lại, dãy $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ không có giới hạn hoặc có giới hạn bằng ∞ thì ta nói *chuỗi phân kỳ*.

Tương tự (1.27), mỗi chuỗi phức $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ khi và chỉ khi hai chuỗi số thực tương ứng $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ hội tu và $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + i\sum_{n=0}^{\infty} b_n$; trong đó $u_n = a_n + ib_n$.

Với nhận xét này, ta có thể áp dụng các kết quả đã biết đối với chuỗi số thực cho các chuỗi số phức. Chẳng hạn:

- Điều kiện cần để chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ là $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

- Nếu chuỗi các môđun $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ cũng hội tụ. Khi đó ta nói chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ *hội tụ tuyệt đối*. Nếu chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ hội tụ nhưng chuỗi các môđun $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ không hội tụ thì ta nói *chuỗi bán hội tụ*.

1.5.2. Chuỗi luỹ thừa

Chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ , với } c_n,\, z,\, a \in \mathbb{C} \tag{1.60}$$

được gọi là *chuỗi luỹ thừa tâm* a . Khi cho z một giá trị cụ thể ta được một chuỗi số phức, chuỗi số phức này hội tụ hoặc phân kỳ. Miền hội tụ của chuỗi (1.60) là tập hợp các giá trị z mà chuỗi này hội tụ.

Rõ ràng rằng mọi chuỗi luỹ thừa tâm a bất kỳ có thể đưa về chuỗi luỹ thừa tâm 0 bằng cách đặt $\xi = z - a$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n \text{ , với } c_n,\, \xi \in \mathbb{C} \text{ .} \tag{1.61}$$

Vì vậy để đơn giản, trong các trường hợp sau ta chỉ xét sự hội tụ của chuỗi lũy thừa tâm 0.

Một ví dụ đặc biệt của chuỗi luỹ thừa là chuỗi cấp số nhân $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, có tổng riêng là tổng của các số hạng của cấp số nhân $S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ với $z \neq 1$, do đó

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-z} & \text{khi } |z| < 1 \\ \text{phân kỳ} & \text{khi } |z| \geq 1 \end{cases}$$

Định lý 1.13 (định lý Abel):

1. Nếu chuỗi (1.61) hội tụ tại z_0 thì hội tụ tuyệt đối trong hình tròn $\{|z| < |z_0|\}$.

2. Từ đó suy ra rằng nếu chuỗi (1.61) phân kỳ tại z_1 thì phân kỳ tại mọi điểm $z : |z| > |z_1|$.

Chứng minh: Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ hội tụ suy ra $\lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$, vì vậy tồn tại $M > 0$ sao cho $\left|c_n z_0^n\right| \leq M$, $\forall\ n = 0, 1, 2, \ldots$ Do đó $\left|c_n z^n\right| = \left|c_n z_0^n\right| \left|\dfrac{z^n}{z_0^n}\right| \leq M \cdot \dfrac{\left|z^n\right|}{\left|z_0^n\right|}$.

Chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \dfrac{\left|z^n\right|}{\left|z_0^n\right|}$ hội tụ khi $|z| < |z_0|$. Suy ra chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ hội tụ tuyệt đối khi $|z| < |z_0|$. Phần 2. của định lý là hệ quả của phần 1.

Định nghĩa 1.8: Số R $(0 \leq R \leq \infty)$ thỏa mãn một trong những điều kiện sau được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi (1.61):

- Nếu chuỗi (1.61) hội tụ tại mọi z thì ta đặt $R = \infty$.
- Nếu chuỗi (1.61) chỉ hội tụ tại $z = 0$ thì ta đặt $R = 0$.
- Chuỗi (1.61) hội tụ khi $|z| < R$, phân kỳ khi $|z| > R$.

Định lý 1.14: Nếu $\rho = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ (tiêu chuẩn D'Alembert)

hoặc $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$ (tiêu chuẩn Cauchy) thì

$$R = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \rho = \infty \\ \dfrac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < \infty \\ \infty & \text{nếu } \rho = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1.62)}$$

là bán kính hội tụ của chuỗi (1.61).

Nhận xét: Định lý trên cho ta cách xác định bán kính hội tụ của chuỗi (1.61). Để tìm miền hội tụ của chuỗi này ta chỉ cần xét thêm sự hội tụ của chuỗi trên đường tròn $|z| = R$.

Định lý 1.15: a) Nếu chuỗi (1.61) có bán kính hội tụ R thì tổng của chuỗi $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ là một hàm giải tích trong hình tròn hội tụ $|z| < R$, đạo hàm $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$.

b) $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} z^{n+1}$ cũng có bán kính hội tụ là R.

1.5.3. Chuỗi Taylor

Định nghĩa 1.9: *Chuỗi lũy thừa có dạng*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \tag{1.63}$$

được gọi là chuỗi Taylor của hàm $f(z)$ tại a.

Định lý 1.16: 1) Chuỗi luỹ thừa bất kỳ là chuỗi Taylor của hàm tổng của nó trong hình tròn hội tụ.

2) Ngược lại, mọi hàm $f(z)$ giải tích tại a thì có thể được khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận $|z-a| < R$. Có thể chọn R là số thực dương lớn nhất sao cho $f(z)$ giải tích trong lân cận $|z-a| < R$.

Nhận xét: Nếu hàm $f(z)$ giải tích tại a thì hàm có thể khai triển duy nhất thành chuỗi luỹ thừa tâm a, đó chính là chuỗi Taylor của $f(z)$ tại a. Vì vậy, nếu có thể bằng một phương pháp khác, ta có khai triển $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ thì

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \tag{1.64}$$

Chuỗi Taylor tại điểm $a = 0$ được gọi là chuỗi Mac Laurin.

1.5.4. Khai triển thành chuỗi Mac Laurin của các hàm số sơ cấp cơ bản

a. Hàm $f(z) = e^z$

Với mọi n, $f^{(n)}(z) = e^z \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$. Vậy

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Hàm giải tích tại mọi điểm nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \infty$.

b. Hàm $f(z) = \sin z$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}\left(1-(-1)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Hàm giải tích tại mọi điểm nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \infty$.

c. Hàm $f(z) = \cos z$

$$\cos z = (\sin z)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n+1)z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Hàm giải tích tại mọi điểm nên bán kính hội tụ của chuỗi là $R = \infty$.

d. Hàm $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$ vì hàm số không giải tích tại -1.

e. Nhánh chính của hàm lôgarit và hàm lũy thừa

Vì hàm $\ln(1+z)$ là một nguyên hàm của $\dfrac{1}{z+1}$ nên $\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{z^{n+1}}{n+1}$.

Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$.

Hàm lũy thừa $m \in \mathbb{R}$:

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}z^n + \cdots$$

Bán kính hội tụ của chuỗi là $R = 1$.

Đặc biệt: $\dfrac{1}{\sqrt{1+z}} = (1+z)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2}z + \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2!}z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^n$.

1.5.5. Không điểm của một hàm giải tích, định lý về tính duy nhất

Định nghĩa 1.10: *Điểm a được gọi là không điểm của hàm giải tích $f(z)$ nếu $f(a) = 0$.*

Khai triển Taylor của $f(z)$ tại không điểm a có dạng

$$f(z)=c_n(z-a)^n+c_{n+1}(z-a)^{n+1}+\cdots=\sum_{k=n}^{\infty}c_k(z-a)^k=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k .$$

Số tự nhiên n bé nhất sao cho $c_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}\neq 0$ thì được gọi là *cấp của không điểm* a.

Nếu n là cấp của không điểm a thì

$$f(z)=(z-a)^n\varphi(z),\ \text{với}\ \varphi(a)=c_n\neq 0. \tag{1.65}$$

$\varphi(z)$ là tổng của một chuỗi luỹ thừa có cùng bán kính hội tụ với chuỗi Taylor của $f(z)$ tại a nên giải tích trong lân cận của a.

Định lý 1.17: Giả sử $f(z)$ giải tích tại a và không đồng nhất bằng 0 trong bất kỳ lân cận nào của a. Khi đó, nếu a là không điểm của $f(z)$ thì tồn tại một lân cận của a sao cho trong lân cận này không có một không điểm nào khác.

Chứng minh: Vì a là không điểm của $f(z)$ nên có thể biểu diễn dưới dạng (1.65) trong đó hàm giải tích $\varphi(z)$ thỏa mãn $\varphi(a)\neq 0$. Vì vậy tồn tại một lân cận của a để trong lân cận này $\varphi(z)\neq 0$, do đó $f(z)$ cũng khác 0.

Hệ quả: Nếu $f(z)$ giải tích tại a và tồn tại dãy không điểm $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ có giới hạn là a khi $n\to\infty$, thì $f(z)$ đồng nhất bằng 0 trong một lân cận của a.

Định lý 1.18 (định lý về tính duy nhất): Nếu $f(z)$, $g(z)$ là hai hàm giải tích trong miền D và trùng nhau trên một dãy hội tụ về a trong D thì $f(z)=g(z),\ \forall z\in D$.

1.5.6. Chuỗi Laurent và điểm bất thường

Có thể xảy ra trường hợp hàm $f(z)$ không giải tích tại a nhưng giải tích trong một lân cận của a bỏ đi điểm a: $0<|z-a|<R$ hoặc giải tích trong hình vành khăn $r<|z-a|<R$. Trong trường hợp này hàm $f(z)$ không thể khai triển thành chuỗi luỹ thừa (chuỗi Taylor) tại a. Tuy nhiên, có thể khai triển được dưới dạng chuỗi Laurent tại a như sau.

1.5.6.1. Chuỗi Laurent

Định nghĩa 1.11: *Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $K=\{z \mid r<|z-a|<R\}$; $0\le r<R\le\infty$. Khi đó chuỗi*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n\ ,\ \text{với}\ c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \tag{1.66}$$

được gọi là chuỗi Laurent của hàm đó tại a, trong đó C là đường cong kín bất kỳ nằm trong K bao quanh a.

Tổng $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ được gọi là phần đều và $f_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ được gọi là phần chính của chuỗi Laurent (1.66).

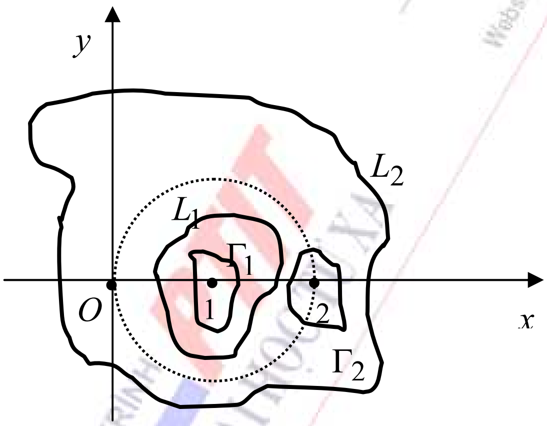
Định lý 1.19 (định lý tồn tại và duy nhất của chuỗi Laurent):

1. Mọi hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn K: $r<|z-a|<R$ đều có thể khai triển thành chuỗi Laurent (1.66).

2. Ngược lại, chuỗi bất kỳ có dạng $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$ hội tụ trong hình vành khăn K: $r<|z-a|<R$; $0\le r<R\le\infty$ có hàm tổng là $f(z)$ thì chuỗi này là chuỗi Laurent của hàm tổng $f(z)$ trong hình vành khăn K.

Ví dụ 1.19: Khai triển hàm $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ thành chuỗi Laurent có tâm tại $z=1$.

Giải: Rõ ràng rằng hàm $f(z)$ không giải tích tại 1 và 2. Vì vậy, khi khai triển theo chuỗi Laurent tâm tại 1 thì chỉ khai triển được trong hai miền: $0<|z-1|<1$ và $|z-1|>1$



a. Khai triển Laurent trong miền $0<|z-1|<1$:

Chọn đường cong kín L_1 bao quanh 1 nằm trong miền này. $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{\frac{1}{z-2}}{(z-1)^{n+2}}dz$.

- $n+2\le 0 \quad\Rightarrow\quad c_n=0$ (theo định lý 1.7).

- $n=-1 \quad\Rightarrow\quad c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{\frac{1}{z-2}}{z-1}dz=\frac{1}{z-2}\Big|_{z=1}=-1$ (theo công thức (1.56) định lý 1.9).

▪ $n \ge 0 \quad \Rightarrow \quad c_n = \dfrac{1}{(n+1)!}\left(\dfrac{1}{z-2}\right)^{(n+1)}\Bigg|_{z=1} = \dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(-1)^{n+2}} = -1$ (theo công thức (1.57) định lý 1.11).

Vậy $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n = -\sum\limits_{n=-1}^{\infty} (z-1)^n$.

b. Khai triển Laurent trong miền $|z-1| > 1$:

Chọn đường cong kín L_2 bao quanh 1 nằm trong miền này.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2} \frac{1}{(z-2)(z-1)^{n+2}} dz .$$

Chọn Γ_1, Γ_2 lần lượt là 2 đường cong kín nằm trong L_2 bao quanh 1, 2.

Áp dụng công thức (1.53) hệ quả 2 của định lý 1.7 ta có:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2} \frac{1}{(z-2)(z-1)^{n+2}} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \frac{\frac{1}{(z-2)}}{(z-1)^{n+2}} dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{1}{(z-1)^{n+2}}}{(z-2)} dz$$

Tương tự trên ta có $\quad \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_1} \dfrac{\frac{1}{(z-2)}}{(z-1)^{n+2}} dz = \begin{cases} -1 & \text{nếu } n \le -2 \\ 0 & \text{nếu } n \ge -1 \end{cases}$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_2} \frac{\frac{1}{(z-1)^{n+2}}}{(z-2)} dz = \frac{1}{(z-1)^{n+2}}\Bigg|_{z=2} = 1 \quad \text{với mọi } n .$$

Vậy $c_n = \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \le -2 \\ 1 & \text{nếu } n \ge -1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-1)^n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{(z-1)^n}$.

Ta cũng có thể khai triển Laurent của hàm $f(z)$ cách phân tích thành tổng của các phân thức hữu tỉ tối giản

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} .$$

Trong miền $0 < |z-1| < 1$ thì $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{-1}{1-(z-1)} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} (z-1)^n \quad \Rightarrow \quad f(z) = -\sum\limits_{n=-1}^{\infty} (z-1)^n$.

Trong miền $|z-1| > 1$ thì $\dfrac{1}{z-2} = \dfrac{1}{(z-1)\left(1 - \dfrac{1}{z-1}\right)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(z-1)^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(z-1)^n}$

$$\Rightarrow \quad f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}-\frac{1}{z-1}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}.$$

1.5.6.2. Điểm bất thường cô lập

Định nghĩa 1.12: *Nếu hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $0<|z-a|<R$ và không giải tích tại a thì a được gọi là điểm bất thường cô lập hay kỳ dị cô lập của hàm $f(z)$.*

Theo định lý 1.19 có thể khai triển thành chuỗi Laurent của hàm trong hình vành khăn ứng với điểm bất thường cô lập. Có ba trường hợp xảy ra:

a. Nếu khai triển Laurent của hàm chỉ có phần đều, nghĩa là

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots$$

thì tồn tại $\lim\limits_{z\to a} f(z)=c_0$. Do đó nếu đặt $f(a)=c_0$ thì $f(z)$ giải tích trong hình tròn $|z-a|<R$. Vì vậy a được gọi là *điểm bất thường bỏ được.*

b. Nếu phần chính chỉ có một số hữu hạn các số hạng, nghĩa là

$$f(z)=\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots$$

trong đó $c_{-n}\neq 0$ thì a được gọi là *cực điểm và n được gọi là cấp của cực điểm.* Cực điểm cấp 1 được gọi là *cực điểm đơn*.

c. Nếu phần chính có vô số số hạng thì a được gọi là điểm bất thường cốt yếu.

Ví dụ 1.20: $\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots \Rightarrow \frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots$

Vậy $z=0$ là điểm bất thường bỏ được.

▪ Hàm $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ trong ví dụ 1.19 có $z=1$ là cực điểm cấp 1.

▪ Hàm $e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots$ có $z=0$ là điểm bất thường cốt yếu.

1.6. THẶNG DƯ VÀ ỨNG DỤNG

1.6.1. Định nghĩa thặng dư

Giả sử $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $K=\{z \mid 0<|z-a|<R\}$ có a là điểm bất thường cô lập. Từ hệ quả 2 của định lý 1.10 ta suy ra rằng tích phân lấy theo mọi đường cong kín C bất kỳ bao điểm a nằm trong hình vành khăn K là một số phức không phụ thuộc vào đường C. Ta gọi số phức này là *thặng dư của $f(z)$ tại a*, ký hiệu

$$\left[\operatorname{Res} f(z);a\right]=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz \qquad \textbf{(1.67)}$$

1.6.2. Cách tính thặng dư

a. Từ công thức khai triển Laurent của hàm trong hình vành khăn $K: 0<|z-a|<R$ (công thức (1.67)), ta có

$$\left[\operatorname{Res} f(z);a\right]=c_{-1} \qquad \textbf{(1.68)}$$

trong đó c_{-1} là hệ số của số hạng ứng với $\dfrac{1}{z-a}$ trong khai triển Laurent của hàm $f(z)$.

Chẳng hạn, từ ví dụ 1.19 ta có $\left[\operatorname{Res}\dfrac{1}{(z-1)(z-2)};1\right]=-1$

b. Thặng dư tại cực điểm đơn

Nếu a là cực điểm đơn của $f(z)$ thì

$$\left[\operatorname{Res} f(z);a\right]=\lim_{z\to a}(z-a)f(z) \qquad \textbf{(1.69)}$$

Đặc biệt, nếu $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ thỏa mãn điều kiện $\varphi(a)\neq 0,\ \psi(a)=0,\ \psi'(a)\neq 0$ thì

$$\left[\operatorname{Res}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)};a\right]=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} \qquad \textbf{(1.70)}$$

Ví dụ 1.21: $\left[\operatorname{Res}\dfrac{1}{(z-1)(z-2)};\,2\right]=\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{1}{z-1}=1$. $\left[\operatorname{Res}\operatorname{cotg} z;0\right]=\dfrac{\cos(0)}{(\sin z)'\big|_{z=0}}=1$.

c. Thặng dư tại cực điểm cấp m

Giả sử a là cực điểm cấp m của $f(z)$ thì

$$\left[\operatorname{Res} f(z);a\right]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right] \qquad \textbf{(1.71)}$$

Ví dụ 1.22: $\left[\operatorname{Res}\dfrac{1}{z(z+2)^3};-2\right]=\dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to-2}\dfrac{d^2}{dz^2}\left[\dfrac{1}{z}\right]=\dfrac{1}{2!}\lim\limits_{z\to-2}\left(\dfrac{2}{z^3}\right)=-\dfrac{1}{8}$.

1.6.3. Ứng dụng của lý thuyết thặng dư

Định lý 1.21: Cho miền đóng $\overline{D}$ có biên là ∂D. Giả sử $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$, ngoại trừ tại một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập $a_1,\ldots,a_n\in D$. Khi đó

$$\oint_{\partial D} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Res} f(z);a_k\right] \qquad \textbf{(1.72)}$$

Ví dụ 1.23: Tính tích phân $I=\displaystyle\oint_C\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$, trong đó

a. C là đường tròn: $|z| = \dfrac{3}{2}$.

b. C là đường tròn: $|z| = 10$.

Giải: Hàm $\dfrac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ có $z=1$ là cực điểm đơn và $z=-3$ cực điểm kép.

$$\left[\operatorname{Res}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2};1\right] = \lim_{z\to 1}\frac{e^z}{(z+3)^2} = \frac{e}{16},$$

$$\left[\operatorname{Res}\frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2};-3\right] = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^z}{z-1}\right] = \lim_{z\to 1} e^z\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2}\right] = -\frac{5e^{-3}}{16}$$

a. Khi C là đường tròn $|z| = \dfrac{3}{2}$ thì trong C hàm đã cho chỉ có một cực điểm $z=1$.

Vậy $I = 2\pi i\dfrac{e}{16} = \dfrac{e\pi i}{8}$.

b. Khi C là đường tròn. $|z| = 10$ thì trong C hàm đã cho có hai cực điểm $z=1$ và $z=-3$.

Do đó $I = 2\pi i\left(\dfrac{e}{16} - \dfrac{5e^{-3}}{16}\right) = \dfrac{\pi i\left(e^4-5\right)}{8e^3}$.

1.6.4. Áp dụng lý thuyết thặng dư để tính các tích phân thực

1.6.4.1. Tính tích phân $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}dx$, trong đó $P(x)$, $Q(x)$ là hai đa thức thực.

Bổ đề: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z \ge 0$, trừ ra tại một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập và thoả mãn:

$$\lim_{\operatorname{Im} z\ge 0;\, z\to\infty} zf(z) = 0 \qquad \textbf{(1.73)}$$

Khi đó $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$, trong đó $C_R = \left\{z\in\mathbb{C}\,\big|\,|z| = R,\ \operatorname{Im} z\ge 0\right\}$.

Định lý 1.22: Giả sử $P(z)$, $Q(z)$ là hai đa thức hệ số thực biến phức, bậc của $P(z)$ lớn hơn bậc của $Q(z)$ ít nhất là hai. Nếu $Q(x)\ne 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $a_1, ..., a_n$ là các cực điểm nằm trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z > 0$ của phân thức $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$. Khi đó

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Res} R(z);a_k\right] \qquad \textbf{(1.74)}$$

Ví dụ 1.24: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Giải: Hàm $R(z)=\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}=\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ có cực điểm kép $z=i$ nằm trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z>0$. Vậy

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left[\operatorname{Res}\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2};i\right]=\pi i\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right]=\pi i\frac{-2}{(2i)^3}=\frac{\pi}{4}.$$

1.6.4.2. Tích phân dạng $\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos\beta x dx$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin\beta x dx$

Hai tích phân trên là phần thực và phần ảo của tích phân $\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{i\beta x}dx$.

Bổ đề: Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z\ge 0$, trừ tại một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập và thoả mãn:

$$|f(z)|\le\frac{M}{R^k},\ \forall z\in C_R;\ \ k>0,\ M \text{ là hằng số} \qquad \textbf{(1.75)}$$

thì $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C_R}e^{i\lambda z}f(z)dz=0$, với mọi $\lambda>0$. Trong đó $C_R=\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,|z|=R,\ \operatorname{Im} z\ge 0\right\}$.

Định lý 1.23: Giải sử $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ là một phân thức hữu tỷ thoả mãn các điều kiện sau:

i. $R(z)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} z>0$ ngoại trừ tại một số hữu hạn các cực điểm $a_1, ..., a_n$.

ii. $R(z)$ có thể có m cực điểm $b_1, ..., b_m$ trên trục thực và $R(x)e^{i\beta x}$ khả tích tại những điểm này.

iii. Bậc của $Q(z)$ lớn hơn bậc của $P(z)$ ít nhất là 1.

Khi đó

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{i\beta x}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Res} R(z)e^{i\beta z};a_k\right]+\pi i\sum_{k=1}^{m}\left[\operatorname{Res} R(z)e^{i\beta z};b_k\right] \qquad \textbf{(1.76)}$$

Ví dụ 1.25: Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}dx$, $(\lambda,\ a>0)$.

Giải: Vì hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn nên

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{x^2+a^2}dx\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(2\pi i\left[\mathrm{Res}\frac{e^{i\lambda x}}{x^2+a^2};ai\right]\right)=\frac{\pi e^{-\lambda a}}{2a}.$$

Ví dụ 1.26: Tính tích phân $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

Giải: Vì hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn nên $I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right)$.

Hàm $R(z)=\frac{1}{z}$ thoả mãn các điều kiện của định lý 1.23, có cực điểm đơn duy nhất $z=0$ trên trục thực. Do đó $I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(i\pi\left[\mathrm{Res}\frac{e^{iz}}{z};0\right]\right)=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(i\pi)=\frac{\pi}{2}$.

1.6.4.3. Tích phân dạng $\int_0^{2\pi}R(\cos nx,\sin nx)dx$.

Đặt $z=e^{ix}$ thì $\cos nx=\frac{z^n+z^{-n}}{2}$, $\sin nx=\frac{z^n-z^{-n}}{2i}$, $dx=\frac{dz}{iz}$

Khi x biên thiên từ $0\to 2\pi$ thì $z=e^{ix}$ vạch lên đường tròn đơn vị C theo chiều dương. Vì vậy

$$\int_0^{2\pi}R(\cos nx,\sin nx)dx=\oint_C R\left(\frac{z^n+z^{-n}}{2},\frac{z^n-z^{-n}}{2i}\right)\frac{dz}{iz} \qquad \mathbf{(1.77)}$$

Ví dụ 1.27: Tính tích phân $I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{5+3\sin x}$

Giải: Vì hàm số $\frac{2}{3\left(z^2+\frac{10i}{3}z-1\right)}=\frac{2}{3\left(z+\frac{i}{3}\right)(z+3i)}$ chỉ có một cực điểm đơn $z=-\frac{i}{3}$ nằm trong đường tròn đơn vị C, do đó

$$I=\oint_C\frac{1}{5+\frac{3}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{iz}=\oint_C\frac{2dz}{3\left(z^2+\frac{10i}{3}z-1\right)}=2\pi i\left[\mathrm{Res}\frac{2}{3\left(z^2+\frac{10i}{3}z-1\right)};-\frac{i}{3}\right]=\frac{\pi}{2}.$$

1.7. PHÉP BIẾN ĐỔI Z

Dựa vào tính chất xác định duy nhất của hàm số giải tích trong hình vành khăn $r<|z|<R$ bởi dãy các hệ số trong khai triển Laurent của nó (1.66) - định lý 1.19, người ta xây dựng phép biến đổi Z và sử dụng để biểu diễn các tín hiệu rời rạc qua các hàm giải tích trong hình vành khăn.

Phép biến đổi Z có rất nhiều ứng dụng trong lý thuyết xử lý tín hiệu và lọc số, vì nói chung việc khảo sát các hàm giải tích sẽ thuận lợi và dễ dàng hơn so với khảo sát các dãy rời rạc.

1.7.1. Định nghĩa phép biến đổi Z

Định nghĩa 1.13: *Biến đổi Z của dãy tín hiệu* $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ *là hàm phức*

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left(z^{-1}\right)^{n} \qquad \textbf{(1.78)}$$

Miền hội tụ của chuỗi (1.78) là miền xác định của biến đổi Z.

Trường hợp dãy tín hiệu $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ chỉ xác định với $n\ge 0$, nghĩa là $x(n)=0,\quad \forall n<0$, khi đó biến đổi Z của tín hiệu này được gọi là *biến đổi một phía.*

Ví dụ 1.28: Tìm biến đổi Z của tín hiệu $x(n)=\begin{cases}2^n & \text{nếu } -\infty<n\le 3\\ 0 & \text{nếu } n>3\end{cases}$

Giải: $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{3}2^n z^{-n}=\frac{8}{z^3}+\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z}+1+\sum_{n=-\infty}^{-1}2^n z^{-n}$.

Đổi $m=-n$ vào chuỗi cuối cùng vế phải ở trên ta được:

$$1+\sum_{n=-\infty}^{-1}2^n z^{-n}=1+\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}z^m=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^m=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=\frac{2}{2-z},\quad \text{với } |z|<2.$$

Vậy $X(z)=\frac{8}{z^3}+\frac{4}{z^2}+\frac{2}{z}+\frac{2}{2-z}$ với $0<|z|<2$.

1.7.2. Miền xác định của biến đổi Z

Để tìm miền xác định của phép biến đổi Z ta có thể áp dụng tiêu chuẩn Cauchy hoặc tiêu chuẩn D'Alembert (định lý 1.14, công thức (1.62)).

Ta tách chuỗi vô hạn hai phía thành tổng của 2 chuỗi:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\left(z^{-1}\right)^{n}=X_1(z)+X_2(z).$$

trong đó $X_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)\left(z^{-1}\right)^{n}$, $X_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)\left(z^{-1}\right)^{n}=\sum_{m=1}^{\infty}x(-m)z^m$ (đặt $m=-n$).

Có hai tiêu chuẩn sau về miền xác định của $X(z)$.

♦ Tiêu chuẩn D'Alembert

Nếu

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|x(n+1)|}{|x(n)|} \quad \text{và} \quad \frac{1}{R}=\lim_{n\to-\infty}\frac{|x(n)|}{|x(n+1)|} \qquad \textbf{(2.79)}$$

thì $X(z)$ xác định khi $r < |z| < R$.

♦ Tiêu chuẩn Cauchy

Nếu

$$r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x(n)|} \quad \text{và} \quad \frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to-\infty}} \sqrt[-n]{|x(n)|} \tag{2.80}$$

thì $X(z)$ xác định khi $r < |z| < R$.

Trong ví dụ 1.28: $x(n) = 0, \forall n > 3 \Rightarrow r = 0$.

$$x(n) = 2^n, \ \forall n \le 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{x(n)}{x(n+1)} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

hoặc $\sqrt[-n]{|x(n)|} = \sqrt[-n]{2^n} = \frac{1}{2}, \ \forall n < 0 \ \Rightarrow \ R = 2$

Vậy biến đổi Z có miền xác định $0 < |z| < 2$.

Ví dụ 1.29: Tìm biến đổi Z của tín hiệu xác định bởi $x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{|n|}$.

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(z^{-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4z}} = \frac{4z}{4z-3}, \quad \text{với } \left|\frac{3}{4z}\right| < 1 \text{ hay } |z| > \frac{3}{4}.$$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)\left(z^{-1}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{-n}\left(z^{-1}\right)^n = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{3z}{4}\right)^m \quad (\text{đặt } m = -n)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{3z}{4}\right)^m - 1 = \frac{1}{1-\frac{3z}{4}} - 1 = \frac{4}{4-3z} - 1 = \frac{3z}{4-3z}, \quad \text{với } \left|\frac{3z}{4}\right| < 1 \text{ hay } |z| < \frac{4}{3}.$$

Vậy $X(z) = \dfrac{4z}{4z-3} + \dfrac{3z}{4-3z} = \dfrac{7z}{(4z-3)(4-3z)}$, với $\dfrac{3}{4} < |z| < \dfrac{4}{3}$.

Ta cũng thấy rằng $r = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x(n)|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{3}{4}$.

$$\overline{\lim_{n\to-\infty}} \sqrt[-n]{|x(n)|} = \lim_{n\to-\infty} \sqrt[-n]{\left(\frac{3}{4}\right)^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{4}{3}.$$

1.7.3. Biến đổi Z ngược

Theo định lý 1.19, mỗi hàm phức $X(z)$ giải tích trong hình vành khăn $r < |z| < R$, ($0 \le r < R \le \infty$) đều có thể khai triển thành chuỗi Laurent:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n z^n \quad \text{với} \quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{X(z)}{z^{n+1}}dz\,,$$

C là đường cong kín bao quanh gốc O và nằm trong hình vành khăn $r<|z|<R$.

Đặt $x(n)=c_{-n}$ thì

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \quad \text{với} \quad x(n)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C z^{n-1}X(z)dz\,. \qquad \textbf{(2.81)}$$

Theo (2.81) $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ xác định duy nhất bởi $X(z)$ được gọi là *biến đổi ngược của biến đổi* Z *của* $X(z)$.

Tương tự khai triển Laurent, do tính chất duy nhất của khai triển hàm số giải tích trong hình vành khăn $r<|z|<R$ thành tổng của chuỗi lũy thừa nên ta có thể sử dụng phương pháp tính trực tiếp theo công thức (2.81) hoặc các phương pháp khai triển thành chuỗi lũy thừa để tìm biến đổi ngược của phép biến đổi Z.

Ví dụ 1.30: Hàm $X(z)=\dfrac{z+2}{2z^2-7z+3}=\dfrac{z+2}{2\left(z^2-\frac{7}{2}z+\frac{3}{2}\right)}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{z-3}$ giải tích tại mọi $z\neq\frac{1}{2}, 3$. Vì vậy ta có thể tìm biến đổi ngược trong 3 miền sau:

a. Miền $|z|<\frac{1}{2}$:

$$X(z)=\frac{1}{1-2z}+\frac{-1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}2^n z^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n-\frac{1}{3^{n+1}}\right)z^n=\sum_{n=-\infty}^{0}\left(2^{-n}-\frac{1}{3^{-n+1}}\right)z^{-n}$$

Vậy $$x(n)=\begin{cases}2^{-n}-\dfrac{1}{3^{-n+1}} & \text{nếu } -\infty<n\le 0\\ 0 & \text{nếu } n>0\end{cases}.$$

b. Miền $\frac{1}{2}<|z|<3$:

$$X(z)=\frac{-1}{2z\left(1-\frac{1}{2z}\right)}+\frac{-1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)}=\frac{-1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^{-n}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}z^{-n}-\sum_{n=-\infty}^{0}3^{n-1}z^{-n}\,.$$

Vậy $$x(n)=\begin{cases}-3^{n-1} & \text{nếu } -\infty<n\le 0\\ -2^{-n} & \text{nếu } n>0\end{cases}.$$

c. Miền $3<|z|$:

$$X(z)=\frac{-1}{2z\left(1-\frac{1}{2z}\right)}+\frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)}=\frac{-1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}z^{-n}+\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}3^{n}z^{-n}=-\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}z^{-n}+\sum_{n=1}^{\infty}3^{n-1}z^{-n}$$ Vậy

$$x(n)=\begin{cases}0 & \text{nếu } -\infty<n\le 0\\ 3^{n-1}-2^{-n} & \text{nếu } n\ge 1\end{cases}.$$

TÓM TẮT

Dạng tổng quát của số phức

$z=x+iy$, trong đó $x,\ y$ là các số thực; $i^2=-1$.

Dạng lượng giác, dạng mũ của số phức

$z=x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \ z=|z|e^{i\varphi}$.

Trong đó $|z|=r=OM=\sqrt{x^2+y^2}$, $\text{Argz}=\varphi+k2\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

$\varepsilon-$ lân cận của $z_0\in\mathbb{C}$: $B_\varepsilon(z_0)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-z_0|<\varepsilon\}$.

Miền

Điểm z_0 được gọi là *điểm trong* của E nếu tồn tại một lân cận của z_0 nằm hoàn toàn trong E. Tập chỉ gồm các điểm trong được gọi là *tập mở*.

D là *tập liên thông* nếu với bất kỳ 2 điểm nào của D cũng có thể nối chúng bằng một đường cong liên tục nằm hoàn toàn trong D.

Một tập mở và liên thông được *gọi là miền*.

Hàm biến phức

Một hàm biến phức xác định trên tập con D của $\mathbb{C}$ hoặc $\overline{\mathbb{C}}$ là một quy luật cho tương ứng mỗi số phức $z\in D$ với một hoặc nhiều số phức w, ký hiệu $w=f(z), z\in D$.

$z=x+iy$ và $w=f(z)=u+iv$ thì $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$. Gọi $u(x,y)$ là phần thực, $v(x,y)$ là phần ảo của hàm $f(z)$.

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=u_0+iv_0 \Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=u_0\\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=v_0\end{cases}$$

Hàm phức liên tục khi và chỉ khi phần thực, phần ảo là hai hàm thực hai biến liên tục.

Hàm khả vi, điều kiện Cauchy-Riemann. Hàm giải tích

Nếu tồn tại đạo hàm $f'(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ ta nói hàm khả vi tại z.

Nếu hàm phức $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ khả vi tại $z = x + iy$ thì phần thực $u(x,y)$ và phần ảo $v(x,y)$ có các đạo hàm riêng tại (x,y) và thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

Ngược lại, nếu phần thực $u(x,y)$, phần ảo $v(x,y)$ khả vi tại (x,y) và thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann thì $w = f(z)$ khả vi tại $z = x + iy$ và

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y).$$

Hàm đơn trị $w = f(z)$ khả vi trong một lân cận của z được gọi là giải tích tại z. Nếu $f(z)$ khả vi tại mọi điểm của D thì ta nói $f(z)$ giải tích trong D. $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$ nếu nó giải tích trong một miền chứa $\overline{D}$.

Phép biến hình bảo giác

Phép biến hình $w = f(z)$ được gọi là bảo giác tại z nếu thoả mãn hai điều kiện sau:

i. Bảo toàn góc giữa hai đường cong bất kỳ qua điểm z (kể cả độ lớn và hướng).

ii. Có hệ số co dãn không đổi tại z, nghĩa là mọi đường cong đi qua điểm này đều có hệ số co dãn như nhau qua phép biến hình.

Phép biến hình $w = f(z)$ được gọi là bảo giác trong miền D nếu nó bảo giác tại mọi điểm của miền này.

Nếu hàm $w = f(z)$ khả vi tại z và $f'(z) \neq 0$ thì phép biến hình thực hiện bởi hàm $w = f(z)$ bảo giác tại điểm z, đồng thời $\arg f'(z)$ là góc quay và $|f'(z)|$ là hệ số co giãn tại điểm z của phép biến hình đó. Nếu $w = f(z)$ giải tích trong D và $f'(z) \neq 0,\ \forall z \in D$ thì nó là một phép biến hình bảo giác trong D.

Tích phân phức

Giả sử $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ xác định đơn trị trong miền D. L là đường cong (có thể đóng kín) nằm trong D có điểm mút đầu là A mút cuối là B.

Chia L thành n đoạn bởi các điểm $A \equiv z_0, z_1, z_2, ..., z_n \equiv B$ nằm trên L theo thứ tự tăng dần của các chỉ số. Chọn trên mỗi cung con z_{k-1}, z_k của đường cong L một điểm bất kỳ $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$. Đặt $z_k = x_k + iy_k$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$; $k = \overline{1,n}$.

$$I = \int_{AB} f(z)dz = \lim_{\substack{\max\limits_{1\le k\le n}|\Delta z_k| \to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k .$$

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{AB} udx - vdy + i\int_{AB} vdx + udy .$$

Công thức tích phân Cauchy

Giả sử $f(z)$ giải tích trong miền $\overline{D}$ (có thể đa liên) có biên là ∂D. Khi đó, với mọi $a \in D$ ta có:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z-a}dz\ ;\ f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

tích phân được lấy theo chiều dương của ∂D.

Chuỗi Taylor

Chuỗi lũy thừa có dạng $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ được gọi là chuỗi Taylor của hàm $f(z)$ tại a.

1) Chuỗi luỹ thừa bất kỳ là chuỗi Taylor của hàm tổng của nó trong hình tròn hội tụ.

2) Ngược lại, mọi hàm $f(z)$ giải tích tại a thì có thể được khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận $|z-a| < R$.

Chuỗi Laurent

Giả sử hàm $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $K = \{z \mid r < |z-a| < R\}$;

$0 \le r < R \le \infty$. Khi đó chuỗi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$, với $c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$ được gọi là chuỗi Laurent của hàm đó tại a, trong đó C là đường cong kín bất kỳ nằm trong K bao quanh a.

Thặng dư

Giả sử $f(z)$ giải tích trong hình vành khăn $K = \{z \mid 0 < |z-a| < R\}$ có a là điểm bất thường cô lập. Ta gọi số phức sau đây là *thặng dư của* $f(z)$ *tại* a, ký hiệu

$$\left[\operatorname{Res} f(z); a\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz.$$

Cho miền đóng $\overline{D}$ có biên là ∂D. Giả sử $f(z)$ giải tích trong $\overline{D}$, ngoại trừ tại một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập $a_1, ..., a_n \in D$. Khi đó

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\left[\operatorname{Res} f(z); a_k\right].$$

Biến đổi Z

Biến đổi Z của dãy tín hiệu $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ là hàm phức $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\left(z^{-1}\right)^n$

Ngược lại dãy $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ xác định bởi công thức $x(n)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} z^{n-1}X(z)dz$ được gọi là *biến đổi ngược của biến đổi Z của $X(z)$.*

CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP

1.1. Nếu hàm phức $w=f(z)$ có đạo hàm tại z_0 thì có đạo hàm mọi cấp tại z_0.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.2. Hàm phức $w=f(z)$ giải tích tại z_0 thì có thể khai triển thành tổng của chuỗi lũy thừa tâm z_0.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.3. Hàm phức $w=f(z)$ có đạo hàm khi và chỉ khi phần thực và phần ảo $u(x,y), v(x,y)$ có đạo hàm riêng cấp 1.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.4. Nếu z_0 là điểm bất thường cô lập của hàm phức $w=f(z)$ thì có thể khai triển Laurent của hàm số này tại z_0.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.5. Tích phân của hàm phức giải tích $w=f(z)$ trong miền đơn liên D không phụ thuộc đường đi nằm trong D.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.6. Tích phân trên một đường cong kín của hàm phức giải tích $w=f(z)$ trong miền đơn liên D luôn luôn bằng không.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.7. Thặng dư của hàm phức $w=f(z)$ tại z_0 là phần dư của khai triển Taylor của hàm này tại z_0.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.8. Hàm phức $w=f(z)$ có nguyên hàm khi và chỉ khi giải tích.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.9. Tích phân của một hàm phức $w=f(z)$ chỉ có một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập trên một đường cong kín C (không đi qua các điểm bất thường) bằng tổng các thặng dư của $w=f(z)$ nằm trong đường C.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.10. Có thể tìm được một hàm phức bị chặn và giải tích tại mọi điểm.

Đúng ☐ Sai ☐.

1.11. Rút gọn các biểu thức sau

a. $2(5-3i)-3(-2+i)+5(i-3)$,

b. $\dfrac{1}{1+3i}-\dfrac{1}{1-3i}$,

c. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{10}$,

d. $\dfrac{(1+i)(2+3i)(4-2i)}{(1+2i)^3(1-i)}$.

1.12. Giải các phương trình sau

a. $z^2+z+1=0$,

b. $z^3-2z-4=0$,

1.13. Tính: a. $\sqrt[3]{-1+i}$,

b. $\sqrt[3]{4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i}$.

1.14. Tính quỹ tích những điểm trong mặt phẳng phức thoả mãn

a. $|z-3-4i|=2$,

b. $\arg(z-i)=\dfrac{\pi}{4}$,

c. $|z-2|+|z+2|=6$,

d. $|z+2|=2|z-1|$.

1.15. Tính phần thực và phần ảo của các hàm số sau

a. $w=z^3$

b. $w=\dfrac{1}{1-z}$

c. $w=e^{3z}$.

1.16. Cho $w=z+\dfrac{1}{z}$. Tìm đạo hàm $w'(z)$ trực tiếp từ định nghĩa. Với giá trị nào của z thì hàm số không giải tích.

1.17. Chứng minh hàm $w=z|z|$ không giải tích tại mọi z.

1.18. Chứng minh rằng hàm

a. $w=z^4$

b. $w=\dfrac{1}{z^2+1}$, $z\neq \pm i$

thoả mãn điều kiện Cauchy-Riemann. Tính $w'(z)$ trong mỗi trường hợp trên.

1.19. Tìm hàm phức giải tích $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ biết phần thực

a. $u(x,y)=x^3-3xy^2$,

b. $u(x,y)=x^2-y^2+2x$,

1.20. Tìm hàm phức giải tích $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ biết phần ảo

a. $v(x,y)=\dfrac{-y}{(x+1)^2+y^2}$,

b. $v(x,y)=2xy+3x$,

1.21. Tìm ảnh của các đường cong sau đây qua phép biến hình $w=\dfrac{1}{z}$.

a. $x^2+y^2=4$,

b. $y=x$,

c. $\infty, 0, 1$,

d. $(x-1)^2+y^2=1$.

1.22. Tìm ảnh của đường thẳng nằm trên tia $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{3} + k\pi$ qua phép biến hình $w = \frac{1+z}{1-z}$.

1.23. Cho phép biến hình tuyến tính $w = (1+i)z - 1$

a. Tìm ảnh của đoạn thẳng nối $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = -i$.

b. Tìm ảnh của đường tròn $|z - (1+i)| = 2$.

1.24. Tìm phép biến hình bảo giác biến hình tròn $|z| < 1$ thành nửa mặt phẳng $\operatorname{Im} w > 0$ sao cho các điểm $-1, 1, i$ biến lần lượt thành $\infty, 0, 1$.

1.25. Tính tích phân $I = \int\limits_C |z| dz$ trong hai trường hợp sau

a. C là đoạn thẳng nối 2 điểm -1 và $+1$.

b. C là nửa cung tròn tâm 0 nằm trong nửa mặt phẳng trên đi từ điểm -1 đến điểm 1.

1.26. Cho C là đường tròn $|z-1| = 3$, tính các tích phân sau:

a. $\oint\limits_C \frac{\cos z}{z - \pi} dz$, b. $\oint\limits_C \frac{e^z}{z(z+1)} dz$.

1.27. Tính tích phân $I = \int\limits_C z dz$ trong đó C là đường gấp khúc có đỉnh lần lượt là $-2, -1+2i,$ $1+i, 2$.

1.28. Tính tích phân $I = \oint\limits_C \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2 - 1} dz$ trong đó C là đường tròn $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

1.29. Tính tích phân $I = \oint\limits_C \frac{dz}{(z+1)^3 (z-1)^3}$ trong các trường hợp sau:

a. C là đường tròn $|z-1| = R,\ R < 2$,

b. C là đường tròn $|z+1| = R,\ R < 2$,

c. C là đường tròn $|z| = R,\ R < 1$.

1.30. Tìm miền hội tụ của các chuỗi sau:

a. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 2^n}$, b. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{3n}}{3^n + n}$.

1.31. Viết bốn số hạng đầu trong khai triển Taylor của hàm số dưới đây tại $z = 0$.

a. $w = e^{\frac{1}{1-z}}$, b. $w = \sin \frac{1}{1-z}$.

1.32. Khai triển Laurent của hàm số $w = \dfrac{z+1}{z^2+z-2}$

a. Trong hình vành khăn $1 < |z| < 2$.

b. Trong hình tròn $|z| < 1$.

c. Trong miền ngoài của hình tròn $|z| > 2$.

1.33. Tính tích phân $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x + 2y$.

1.34. Tính tích phân $\oint\limits_C \dfrac{dz}{z^4+1}$, C là đường tròn $x^2 + y^2 = 2x$.

1.35. Tính các tích phân thực sau

a. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$;   b. $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)(x^2+1)^2}$.

1.36. Tính các tích phân thực sau

a. $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+4}dx$;   b. $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)^2}dx$;

1.37. Tính các tích phân thực sau

a. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\cos x}$;   b. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin x + \cos x + 2}$.

1.38. Chứng minh các tính chất sau đây của phép biến đổi Z :

Tín hiệu: $x(n)$ Biến đổi Z tương ứng: $X(z)$

a. $ax_1(n) + bx_2(n)$ $aX_1(z) + bX_2(z)$ *(tính tuyến tính).*

b. $x(n-n_0)$ $z^{-n_0}X(z)$ *(tính trễ).*

c. $a^n x(n)$ $X\left(\dfrac{z}{a}\right)$ *(tính đồng dạng).*

d. $nx(n)$ $-z\dfrac{dX(z)}{dz}$ *(đạo hàm ảnh)*

e. $x_1(n) * x_2(n) = \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$ $X_1(z)X_2(z)$ *(tích chập).*

1.39. Ta gọi và ký hiệu dãy tín hiệu xác định như sau là tín hiệu bước nhảy đơn vị:

$$u(n)=\begin{cases}0 & \text{nếu } n<0\\ 1 & \text{nếu } n\ge 0\end{cases}.$$

Tìm biến đổi Z của các dãy tín hiệu sau:

a) $x(n)=e^{in\omega}u(n)$. b) $x(n)=ne^{-na}u(n)$. c) $x(n)=-a^{n}u(-n-1)$.

d) $x(n)=2^{n}\operatorname{rect}_{N}(n)$, trong đó $\operatorname{rect}_{N}(n)=u(n)-u(n-N)$: gọi là dãy chữ nhật.

1.40. Tìm biến đổi Z ngược của hàm giải tích $X(z)=\dfrac{4}{z^{3}(2z-1)}$ trong miền $|z|>\dfrac{1}{2}$.

CHƯƠNG II: CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN

GIỚI THIỆU

Trong chương I chúng ta đã sử dụng tính duy nhất của khai triển Laurent của hàm giải tích trong hình vành khăn để xây dựng phép biến đổi Z. Nhờ phép biến đổi Z ta có thể biểu diễn tín hiệu số $\{x(n)\}$ bởi hàm giải tích $X(z)$. Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu hai phép biến đổi tích phân là biến đổi Laplace và biến đổi Fourier.

❖ Nhiều vấn đề trong kỹ thuật, trong điện tử viễn thông, trong lý thuyết mạch…, đưa về giải các phương trình, hệ phương trình chứa đạo hàm, tích phân của các hàm nào đó, nghĩa là phải giải các phương trình vi phân, tích phân hay phương trình đạo hàm riêng. Việc giải trực tiếp các phương trình này nói chung rất khó. Kỹ sư Heaviside là người đầu tiên đã vận dụng *phép biến đổi Laplace* để giải quyết các bài toán liên quan đến mạch điện.

Phép biến đổi Laplace biến mỗi hàm gốc theo biến t thành hàm ảnh theo biến s. Với phép biến đổi này việc tìm hàm gốc thoả mãn các biểu thức chứa đạo hàm, tích phân (nghiệm của phương trình vi phân, phương trình tích phân, phương trình đạo hàm riêng…) được quy về tính toán các biểu thức đại số trên các hàm ảnh. Khi biết hàm ảnh, ta sử dụng phép biến đổi ngược để tìm hàm gốc cần tìm.

Trong mục ta này giải quyết hai bài toán cơ bản của phép biến đổi Laplace là tìm biến đổi thuận, biến đổi nghịch và một vài ứng dụng của nó.

Các hàm số trong chương này được ký hiệu là $x(t),\ y(t),...$ thay cho $f(x),\ g(x),...$ vì $x(t),\ y(t)$ được ký hiệu cho các tín hiệu phụ thuộc vào thời gian t.

❖ *Phép biến đổi Fourier hữu hạn* được phát triển trên ý tưởng của khai triển hàm số tuần hoàn thành chuỗi Fourier, trong đó mỗi hàm số hoàn toàn được xác định bởi các hệ số Fourier của nó và ngược lại. Có ba dạng của chuỗi Fourier: dạng cầu phương (công thức 2.57, 2.57'), dạng cực (công thức 2.63) và dạng phức (công thức 2.64, 2.68). Phần 1 của mục này sẽ trình bày ba dạng này của chuỗi Fourier, các công thức liên hệ giữa chúng và kèm theo lời nhận xét nên sử dụng dạng nào trong mỗi trường hợp cụ thể. Trường hợp hàm không tuần hoàn phép biến đổi Fourier rời rạc được thay bằng *phép biến đổi Fourier*, phép biến đổi ngược duy nhất được xây dựng dựa vào công thức tích phân Fourier.

Khi các hàm số biểu diễn cho các tín hiệu thì biến đổi Fourier của chúng được gọi là *biểu diễn phổ*. Tín hiệu tuần hoàn sẽ có phổ rời rạc, còn tín hiệu không tuần hoàn sẽ có phổ liên tục. Đối số của hàm tín hiệu là thời gian còn đối số của biến đổi Fourier của nó là tần số, vì vậy phép biến đổi Fourier còn được gọi là phép biến đổi biến miền thời gian về miền tần số.

Phép biến đổi Fourier rời rạc được sử dụng để tính toán biến đổi Fourier bằng máy tính, khi đó các tín hiệu được rời rạc hoá bằng cách chọn một số hữu hạn các giá trị mẫu theo thời gian và phổ cũng nhận được tại một số hữu hạn các tần số. Tuy nhiên để thực hiện nhanh phép biến đổi Fourier rời rạc, người ta sử dụng các *thuật toán biến đổi Fourier nhanh*.

Hướng ứng dụng vào viễn thông: Phân tích phổ, phân tích truyền dẫn tín hiệu, ghép kênh vô tuyến, ghép kênh quang, đánh giá chất lượng WDM...

NỘI DUNG

2.1. PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

2.1.1. Định nghĩa biến đổi Laplace

Định nghĩa 2.1: *Giả sử* $x(t)$ *là hàm số thực xác định với mọi* $t > 0$. *Biến đổi Laplace của hàm số* $x(t)$ *được định nghĩa và ký hiệu:*

$$\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}x(t)dt \tag{2.1}$$

Phép biến đổi Laplace của hàm số $x(t)$ gọi là tồn tại nếu tích phân (2.1) hội tụ với giá trị s thuộc miền nào đó. Trường hợp ngược lại ta nói phép biến đổi Laplace của hàm số $x(t)$ không tồn tại. Phép biến đổi Laplace là thực hay phức nếu biến số s của hàm ảnh $X(s)$ là thực hay phức.

Theo thói quen người ta thường ký hiệu các hàm gốc bằng các chữ thường $x(t), y(t),...$ còn các biến đổi của nó bằng các chữ in hoa $X(s), Y(s), ...$. Đôi khi cũng được ký hiệu bởi $\widetilde{x}(s), \widetilde{y}(s),...$.

2.1.2. Điều kiện tồn tại

Định nghĩa 2.2: *Hàm biến thực* $x(t)$ *được gọi là hàm gốc nếu thoả mãn 3 điều kiện sau:*

1) $x(t) = 0$ *với mọi* $t < 0$.

2) $x(t)$ *liên tục từng khúc trong miền* $t \geq 0$.

Điều này có nghĩa là, trên nửa trục thực $t \geq 0$, *hàm chỉ gián đoạn loại 1 nhiều nhất tại một số hữu hạn các điểm. Tại các điểm gián đoạn, hàm có giới hạn trái và giới hạn phải hữu hạn.*

3) $x(t)$ *không tăng nhanh hơn hàm mũ khi* $t \to \infty$. *Nghĩa là tồn tại* $M > 0, \alpha_0 \geq 0$ *sao cho*

$$|x(t)| \leq Me^{\alpha_0 t}, \forall t > 0. \tag{2.2}$$

α_0 *được gọi là chỉ số tăng của* $x(t)$.

Rõ ràng α_0 là chỉ số tăng thì mọi số $\alpha_1 > \alpha_0$ cũng là chỉ số tăng.

Ví dụ 2.1: Hàm bước nhảy đơn vị (Unit step function)

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad t < 0 \\ 1 & \text{nếu} \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Hàm bước nhảy đơn vị $\eta(t)$ liên tục với mọi $t \geq 0$, không tăng hơn ở mũ với chỉ số tăng $\alpha_0 = 0$.

Ví dụ 2.2: Các hàm sơ cấp cơ bản $x(t)$ đều liên tục và không tăng nhanh hơn hàm mũ. Nhưng vẫn chưa phải là hàm gốc vì không thoả mãn điều kiện 1) của định nghĩa 2.2. Tuy nhiên hàm số sau:

$$x(t)\eta(t)=\begin{cases}0 & \text{nếu} \quad t<0\\ x(t) & \text{nếu} \quad t\ge 0\end{cases} \tag{2.4}$$

là một hàm gốc.

Định lý 2.1: Nếu $x(t)$ là hàm gốc với chỉ số tăng α_0 thì tồn tại biến đổi Laplace

$$\mathscr{L}\{x(t)\}=X(s)=\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt$$

xác định với mọi số phức $s=\alpha+i\beta$ sao cho $\alpha>\alpha_0$ và $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} X(s)=0$.

Hơn nữa hàm ảnh $X(s)$ giải tích trong miền $\mathrm{Re}(s)>\alpha_0$ với đạo hàm

$$X'(s)=\int_0^\infty (-t)e^{-st}x(t)dt \tag{2.5}$$

Chứng minh: Với mọi $s=\alpha+i\beta$ sao cho $\alpha>\alpha_0$, ta có: $\left|x(t)e^{-st}\right|\le Me^{(\alpha_0-\alpha)t}$ mà $\int_0^\infty e^{(\alpha_0-\alpha)t}dt$ hội tụ, do đó tích phân $\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$ hội tụ tuyệt đối. Vì vậy tồn tại biến đổi Laplace $X(s)$ và $\left|X(s)\right|\le\int_0^\infty\left|x(t)e^{-st}\right|dt=\int_0^\infty\left|x(t)e^{-\alpha t}e^{-i\beta t}\right|dt=\int_0^\infty\left|x(t)e^{-\alpha t}\right|dt$

$$\le\int_0^\infty Me^{(\alpha_0-\alpha)t}dt=\left.\frac{Me^{(\alpha_0-\alpha)t}}{\alpha_0-\alpha}\right|_0^\infty=\frac{M}{\alpha-\alpha_0}.$$

Ngoài ra $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\dfrac{M}{\alpha-\alpha_0}=0 \Rightarrow \lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty}X(s)=0$.

Tích phân $\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt$ hội tụ và tích phân $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left(x(t)e^{-st}\right)dt=\int_0^\infty x(t)e^{-st}(-t)\,dt$ hội tụ đều trong miền $\left\{s\,\middle|\,\mathrm{Re}(s)\ge\alpha_1\right\}$ với mọi α_1, $\alpha_1>\alpha_0$ (theo định lý Weierstrass), suy ra hàm ảnh có đạo hàm $X'(s)=\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial s}\left(x(t)e^{-st}\right)dt$ tại mọi s thuộc các miền trên. Vì vậy $X(s)$ giải tích trong miền $\mathrm{Re}(s)>\alpha_0$.

Nhận xét:

1. Theo định lý trên thì mọi hàm gốc đều có ảnh qua phép biến đổi Laplace. Tên gọi "hàm gốc" là do vai trò của nó trong phép biến đổi này.

2. Từ ví dụ 2.2, công thức (2.4) suy ra rằng mọi hàm sơ cấp cơ bản $x(t)$ đều có biến đổi Laplace $\mathscr{L}\{x(t)\eta(t)\}$. Tuy nhiên, để đơn giản thay vì viết đúng $\mathscr{L}\{x(t)\eta(t)\}$ thì ta viết tắt $\mathscr{L}\{x(t)\}$. Chẳng hạn ta viết $\mathscr{L}\{\sin t\}$ thay cho $\mathscr{L}\{\eta(t)\sin t\}$, $\mathscr{L}\{1\}$ thay cho $\mathscr{L}\{\eta(t)\}$.

3. Ta quy ước các hàm gốc liên tục phải tại 0. Nghĩa là $\lim\limits_{t\to 0^+} x(t) = x(0)$.

Ví dụ 2.3: Vì hàm $\eta(t)$ có chỉ số tăng $\alpha_0 = 0$ do đó biến đổi

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s} \text{ với mọi } s,\ \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Ví dụ 2.4: Hàm $\sin t$ có chỉ số tăng $\alpha_0 = 0$ do đó biến đổi

$$\mathscr{L}\{\sin t\} = X(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt \text{ tồn tại với mọi } s,\ \mathrm{Re}(s) > 0.$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta được:

$$X(s) = -\cos t e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty se^{-st}\cos t\,dt = 1 - \left(se^{-st}\sin t\Big|_0^\infty\right) - s^2\int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt$$

$$\Rightarrow \left(1+s^2\right)X(s) = 1 \ \Rightarrow\ X(s) = \frac{1}{1+s^2}.$$

2.1.3. Các tính chất của phép biến đổi Laplace

2.1.3.1. Tính tuyến tính

Định lý 2.2: Nếu $x(t)$, $y(t)$ có biến đổi Laplace thì với mọi hằng số A, B, $Ax(t) + By(t)$ cũng có biến đổi Laplace và

$$\mathscr{L}\{Ax(t) + By(t)\} = A\mathscr{L}\{x(t)\} + B\mathscr{L}\{y(t)\}. \tag{2.6}$$

Ví dụ 2.5: $\mathscr{L}\{5 + 4\sin t\} = 5\mathscr{L}\{1\} + 4\mathscr{L}\{\sin t\} = \dfrac{5}{s} + \dfrac{4}{s^2+1}$.

2.1.3.2. Tính đồng dạng

Định lý 2.3: Nếu $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$ thì với mọi $a > 0$,

$$\mathscr{L}\{x(at)\} = \frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right). \tag{2.7}$$

Ví dụ 2.6: $\mathscr{L}\{\sin \omega t\} = \dfrac{1}{\omega}\cdot\dfrac{1}{(s/\omega)^2+1} = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$.

2.1.3.3. Tính dịch chuyển ảnh

Định lý 2.4: Nếu $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}$ thì với mọi $a\in\mathbb{R}$,

$$\mathscr{L}\{e^{at}x(t)\}=X(s-a). \qquad \textbf{(2.8)}$$

Ví dụ 2.7: $\mathscr{L}\{e^{at}\}=\mathscr{L}\{e^{at}\cdot 1\}=\dfrac{1}{s-a}$. $\Rightarrow$ $\mathscr{L}\{\operatorname{ch}\omega t\}=\mathscr{L}\left\{\dfrac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}\right\}=\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$;

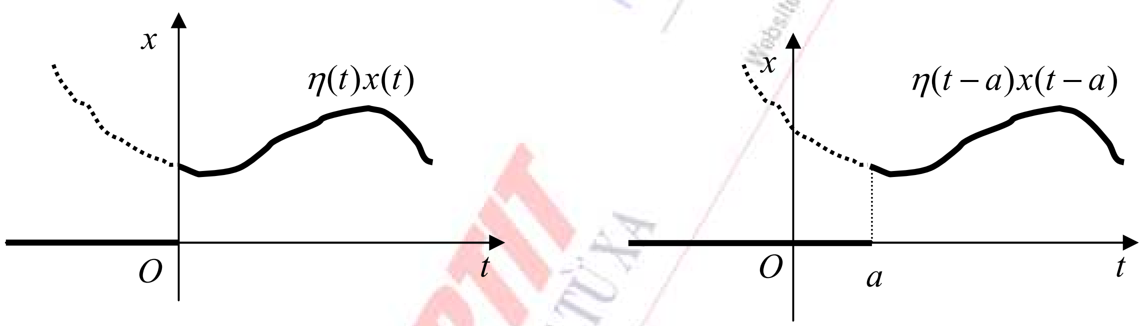
$$\mathscr{L}\{\operatorname{sh}\omega t\}=\mathscr{L}\left\{\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\right\}=\frac{\omega}{s^2-\omega^2}. \quad \mathscr{L}\{e^{at}\sin\omega t\}=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}.$$

2.1.3.4. Tính trễ

Định lý 2.5: Nếu $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}$ thì với mọi $a\in\mathbb{R}$,

$$\mathscr{L}\{\eta(t-a)x(t-a)\}=e^{-sa}X(s). \qquad \textbf{(2.9)}$$

Đồ thị của hàm $\eta(t-a)x(t-a)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị của $\eta(t)x(t)$ dọc theo trục hoành một đoạn bằng a. Nếu $x(t)$ biểu diễn tín hiệu theo thời gian t thì $x(t-a)$ biểu diễn trễ a đơn vị thời gian của quá trình trên.



Ví dụ 2.8: $\mathscr{L}\{\eta(t-a)\}=\dfrac{e^{-as}}{s}$.

Ví dụ 2.9: Hàm xung (Impulse) là hàm chỉ khác không trong một khoảng thời gian nào đó.

$$x(t)=\begin{cases}0 & \text{nếu } t<a\\ \varphi(t) & \text{nếu } a<t<b\\ 0 & \text{nếu } t>b\end{cases} \qquad \textbf{(2.10)}$$

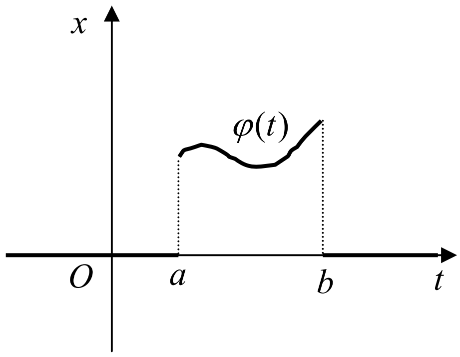
Hàm xung đơn vị trên đoạn $[a;b]$:

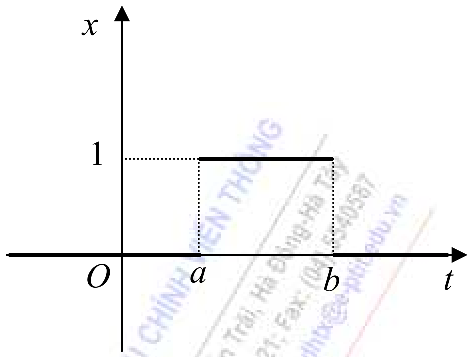
$$\eta_{a,b}(t)=\begin{cases}0 & \text{nếu } t<a\\ 1 & \text{nếu } a<t<b\\ 0 & \text{nếu } t>b\end{cases}=\eta(t-a)-\eta(t-b) \qquad \textbf{(2.11)}$$

Hàm xung bất kỳ (2.10) có thể biểu diễn qua hàm xung đơn vị

$$x(t)=\eta(t-a)\varphi(t)-\eta(t-b)\varphi(t)=\eta_{a,b}(t)\varphi(t) \qquad \textbf{(2.12)}$$

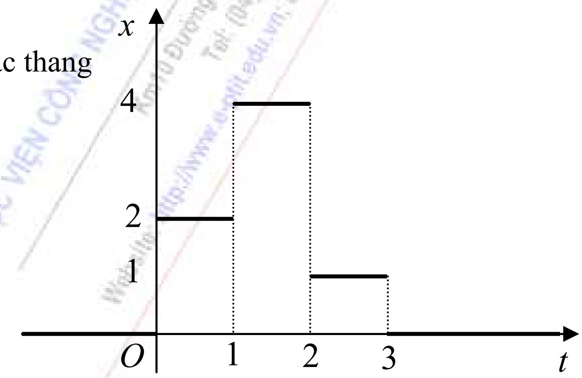
$$\mathscr{L}\{\eta_{a,b}(t)\} = \mathscr{L}\{\eta(t-a)\} - \mathscr{L}\{\eta(t-a)\} = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}.$$





Ví dụ 2.10: Tìm biến đổi Laplace của hàm bậc thang

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \; t < 0 \; \text{ hoặc } t > 3 \\ 2 & \text{nếu } \; 0 < t < 1 \\ 4 & \text{nếu } \; 1 < t < 2 \\ 1 & \text{nếu } \; 2 < t < 3 \end{cases}$$



$$x(t) = 2\eta_{0,1}(t) + 4\eta_{1,2}(t) + \eta_{2,3}(t)$$

$$= 2[\eta(t) - \eta(t-1)] + 4[2\eta(t-1) - \eta(t-1)] + [\eta(t-2) - \eta(t-3)]$$

$$= 2\eta(t) + 2\eta(t-1) - 3\eta(t-2) - \eta(t-3).$$

Do đó $\quad \mathscr{L}\{x(t)\} = \dfrac{2 + 2e^{-s} - 3e^{-2s} - e^{-3s}}{s}.$

Ví dụ 2.11: Tìm biến đổi Laplace của hàm xung $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \; t < 0 \\ \sin t & \text{nếu } \; 0 < t < \pi \\ 0 & \text{nếu } \; t > \pi \end{cases}$

Theo công thức (2.12) ta có thể viết

$$x(t) = \eta(t)\sin t - \eta(t-\pi)\sin t = \eta(t)\sin t + \eta(t-\pi)\sin(t-\pi).$$

Vậy $\quad \mathscr{L}\{x(t)\} = \dfrac{1}{s^2+1} + \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1} = \dfrac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}.$

2.1.3.5. Biến đổi của đạo hàm

Định lý 2.6: Giả sử hàm gốc $x(t)$ có đạo hàm $x'(t)$ cũng là hàm gốc. Nếu $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$ thì

$$\mathscr{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0). \tag{2.13}$$

Tổng quát hơn, nếu $x(t)$ có đạo hàm đến cấp n cũng là hàm gốc thì

$$\mathscr{L}\left\{x^{(n)}(t)\right\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)\,. \qquad \textbf{(2.14)}$$

Ví dụ 2.12: $\mathscr{L}\{\cos\omega t\} = \mathscr{L}\left\{\left(\dfrac{\sin\omega t}{\omega}\right)'\right\} = \dfrac{1}{\omega}\cdot s\cdot\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2} - \sin 0 = \dfrac{s}{s^2+\omega^2}$.

Hệ quả: Với giả thiết của định lý 2.6 thì $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} sX(s) = x(0)$.

Chứng minh: Áp dụng định lý 2.1 cho đạo hàm $x'(t)$ ta có $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} sX(s) - x(0) = 0$.

2.1.3.6. Biến đổi Laplace của tích phân

Định lý 2.7: Nếu hàm gốc $x(t)$ có $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$ thì hàm số $\varphi(t) = \int\limits_0^t x(u)du$ cũng là hàm gốc và

$$\mathscr{L}\left\{\int\limits_0^t x(u)du\right\} = \frac{X(s)}{s}\,. \qquad \textbf{(2.15)}$$

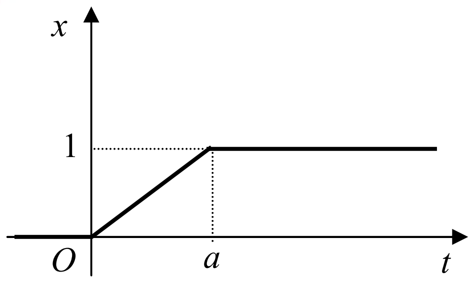
2.1.3.7. Đạo hàm ảnh

Định lý 2.8: Giả sử $x(t)$ là một hàm gốc có $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$ thì

$$\mathscr{L}\left\{t^n x(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} X(s). \qquad \textbf{(2.16)}$$

Ví dụ 2.13: $\mathscr{L}\left\{t^n\right\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}\left(\dfrac{1}{s}\right) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$.

Ví dụ 2.14: Hàm dốc

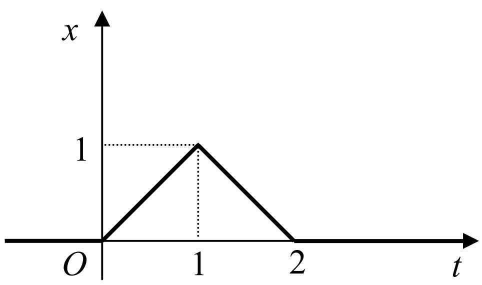


$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } \ t < 0 \\ \dfrac{t}{a} & \text{nếu } \ 0 \le t \le a \\ 1 & \text{nếu } \ t \ge a \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{t}{a}\eta_{0a}(t) + \eta(t-a) = \frac{t}{a}\eta(t) - \frac{t}{a}\eta(t-a) + \eta(t-a) = \frac{t}{a}\eta(t) - \frac{t-a}{a}\eta(t-a)\,.$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{L}\{x(t)\} = \frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{as^2} = \frac{1-e^{-as}}{as^2}\,.$$

Ví dụ 2.15: Hàm xung tam giác đơn vị



$$\Lambda(t)=\begin{cases}0 & \text{nếu} \quad t<0\\ t & \text{nếu} \quad 0\le t\le 1\\ 2-t & \text{nếu} \quad 1\le t\le 2\\ 0 & \text{nếu} \quad t>2\end{cases}$$

$$\Lambda(t)=t\left[\eta(t)-\eta(t-1)\right]+(2-t)\left[\eta(t-1)-\eta(t-2)\right]$$
$$=t\eta(t)-2(t-1)\eta(t-1)+(t-2)\eta(t-2)\,.$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{L}\{\Lambda(t)\}=\frac{1}{s^2}-\frac{2e^{-s}}{s^2}+\frac{e^{-2s}}{s^2}=\frac{\left(e^{-s}-1\right)^2}{s^2}\,.$$

2.1.3.8. Tích phân ảnh

Định lý 2.9: Giả sử $\frac{x(t)}{t}$ là một hàm gốc (chẳng hạn $x(t)$ là một hàm gốc và tồn tại $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{x(t)}{t}$ hữu hạn). Đặt $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\},\ s\in\mathbb{R}$ thì

$$\mathscr{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty X(u)du\,. \qquad \textbf{(2.17)}$$

Ví dụ 2.16: Vì $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1$ và $\mathscr{L}\{\sin t\}=\frac{1}{s^2+1}$.

$$\Rightarrow \quad \mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_s^\infty \frac{du}{u^2+1}=\operatorname{arctg}u\Big|_s^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}s=\operatorname{arcotg}s=\operatorname{arctg}\frac{1}{s}\,.$$

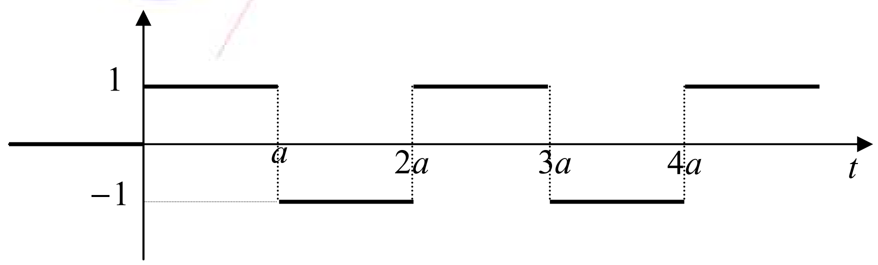
Hàm tích phân sin: $\operatorname{Si}t=\int_0^t\frac{\sin u}{u}du,\ t>0$ có biến đổi Laplace $\mathscr{L}\left\{\int_0^t\frac{\sin u}{u}du\right\}=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\frac{1}{s}$.

2.1.3.9. Biến đổi Laplace của hàm tuần hoàn

Định lý 2.10: Giả sử $x(t)$ là một hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $T>0$ thì

$$X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}=\frac{\int_0^T e^{-st}x(t)dt}{1-e^{-sT}}\,. \qquad \textbf{(2.18)}$$

Ví dụ 2.17: Tìm biến đổi Laplace của hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $2a>0$ sau:



$$\int_0^{2a} e^{-st}x(t)dt = \int_0^{a} e^{-st}dt - \int_a^{2a} e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^a - \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^{2a} = \frac{\left(e^{-as}-1\right)^2}{s}.$$

$$\Rightarrow \quad X(s) = \frac{\left(e^{-as}-1\right)^2}{s\left(1-e^{-2as}\right)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}} = \frac{1}{s}\cdot\frac{e^{\frac{as}{2}}-e^{-\frac{as}{2}}}{e^{\frac{as}{2}}+e^{-\frac{as}{2}}} = \frac{1}{s}\cdot\frac{\operatorname{sh}\frac{as}{2}}{\operatorname{ch}\frac{as}{2}} = \frac{1}{s}\cdot\operatorname{th}\frac{as}{2}.$$

2.1.3.10. Ảnh của tích chập

Định nghĩa 2.3: *Tích chập của hai hàm số $x(t),\ y(t);\ t\ge 0$ là hàm số được ký hiệu và xác định bởi công thức*

$$x(t)*y(t) = \int_0^t x(u)y(t-u)du \qquad \textbf{(2.19)}$$

Tính chất:

♦ $x(t)*y(t) = y(t)*x(t)$ *(tích chập có tính giao hoán)*

♦ Nếu $x(t),\ y(t)$ là hai hàm gốc thì tích chập của chúng $x(t)*y(t)$ cũng là hàm gốc.

Định lý 2.11: Nếu $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\},\ Y(s)=\mathscr{L}\{y(t)\}$ thì

$$\mathscr{L}\{x(t)*y(t)\} = X(s)Y(s) \qquad \textbf{(2.20)}$$

Ngoài ra nếu $x'(t),\ y'(t)$ cũng là hàm gốc thì ta có *công thức Duhamel*:

$$\mathscr{L}\{x(0)y(t)+x'(t)*y(t)\} = \mathscr{L}\{x(t)y(0)+x(t)*y'(t)\} = sX(s)Y(s) \qquad \textbf{(2.21)}$$

Ví dụ 2.17: $\mathscr{L}\{t*\sin t\} = \mathscr{L}\{t\}\cdot\mathscr{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{s^2}\cdot\dfrac{1}{s^2+1}$

$$= \frac{1}{s^2\left(s^2+1\right)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} = \mathscr{L}\{t-\sin t\}.$$

Do tính duy nhất của biến đổi ngược (định lý 2.12) ta suy ra: $t*\sin t = t-\sin t$.

2.1.4. Phép biến đổi Laplace ngược

Từ ví dụ 2.17 cho thấy cần thiết phải giải bài toán ngược: Cho hàm ảnh, tìm hàm gốc. Trong mục này ta sẽ chỉ ra những điều kiện để một hàm nào đó là hàm ảnh, nghĩa là tồn tại hàm gốc của nó, đồng thời cũng chỉ ra rằng hàm gốc nếu tồn tại là duy nhất.

Định nghĩa 2.4: *Cho hàm $X(s)$, nếu tồn tại $x(t)$ sao cho $\mathscr{L}\{x(t)\}=X(s)$ thì ta nói $x(t)$ là biến đổi ngược của $X(s)$, ký hiệu $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$.*

2.1.4.1. Tính duy nhất của biến đổi ngược

Định lý 2.12: Nếu $x(t)$ là một hàm gốc với chỉ số tăng α_0 và $\mathscr{L}\{x(t)\}=X(s)$ thì tại mọi điểm liên tục t của hàm $x(t)$ ta có:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{st}X(s)ds \qquad \textbf{(2.22)}$$

trong đó tích phân ở vế phải được lấy trên đường thẳng $\mathrm{Re}(s)=\alpha$ theo hướng từ dưới lên, với α là số thực bất kỳ lớn hơn α_0.

Công thức (2.22) được gọi là công thức tích phân Bromwich.

Công thức Bromwich cho thấy biến đổi Laplace ngược nếu tồn tại thì duy nhất.

2.1.4.2. Điều kiện đủ để một hàm có biến đổi ngược

Định lý 2.1 cho thấy không phải mọi hàm phức giải tích nào cũng có biến đổi ngược. Chẳng hạn hàm $X(s)=s^2$ không thể là ảnh của hàm gốc nào vì $\lim\limits_{\mathrm{Re}(s)\to\infty} X(s)=\infty$.

Định lý sau đây cho ta một điều kiện đủ để hàm giải tích có biến đổi ngược

Định lý 2.13: Giả sử hàm phức $X(s)$ thoả mãn 3 điều kiện sau:

i. $X(s)$ giải tích trong nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(s)>\alpha_0$,

ii. $|X(s)|\le M_R$ với mọi s thuộc đường tròn $|s|=R$ và $\lim\limits_{R\to\infty} M_R=0$,

iii. Tích phân $\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} X(s)ds$ hội tụ tuyệt đối.

Khi đó $X(s)$ có biến đổi ngược là hàm gốc $x(t)$ cho bởi công thức (2.22).

Độc giả có thể tìm hiểu chứng minh định lý 2.12, định lý 2.13 trong Phụ lục C của [2] hoặc định lý1 trang 29 của [5].

2.1.4.3. Một vài phương pháp tìm hàm ngược

a. Sử dụng các tính chất của biến đổi thuận và tính duy nhất của biến đổi ngược

Từ tính duy nhất của biến đổi ngược, ta suy ra rằng tương ứng giữa hàm gốc và hàm ảnh là tương ứng 1-1 . Vì vậy ta có thể áp dụng các tính chất đã biết của phép biến đổi thuận để tìm hàm ngược.

Ví dụ 2.18: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s+4)^6}\right\}=e^{-4t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^6}\right\}=e^{-4t}\dfrac{t^5}{5!}$

$$\Rightarrow \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{5-3s}}{(s+4)^6}\right\}=e^5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-3s}}{(s+4)^6}\right\}=e^5e^{-4(t-3)}\frac{(t-3)^5}{5!}\eta(t-3).$$

b. Khai triển thành chuỗi lũy thừa

Nếu $X(s)=\dfrac{a_0}{s}+\dfrac{a_1}{s^2}+\dfrac{a_2}{s^3}+\dfrac{a_3}{s^4}+\dfrac{a_4}{s^5}+\cdots$ thì

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=a_0+a_1t+\frac{a_2t^2}{2!}+\frac{a_3t^3}{3!}+\frac{a_4t^4}{4!}+\cdots \tag{2.23}$$

Ví dụ 2.19:

$$\frac{1}{s}e^{\frac{-1}{s}}=\frac{1}{s}\left[1-\frac{1}{s}+\frac{1}{2!s^2}-\frac{1}{3!s^3}+\frac{1}{4!s^4}-\cdots\right]=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2!s^3}-\frac{1}{3!s^4}+\frac{1}{4!s^5}-\cdots$$

$$\Rightarrow\ x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{\frac{-1}{s}}\right\}=1-t+\frac{t^2}{(2!)^2}-\frac{t^3}{(3!)^2}+\frac{t^4}{(4!)^2}-\cdots$$

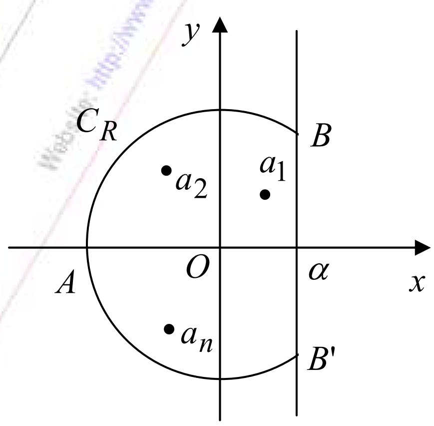
$$=1-\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^2}{2^2}+\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^4}{2^24^2}-\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^6}{2^24^26^2}+\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^8}{2^24^26^28^2}-\cdots=J_0\left(2\sqrt{t}\right)$$

trong đó J_0 là hàm Bessel bậc 0 (xem chương III).

c. Sử dụng thặng dư của tích phân phức

Với điều kiện của định lý 2.13 thì $X(s)$ có biến đổi ngược $x(t)$ xác định bởi công thức Bromwich (2.22).

Mặt khác giả sử hàm $X(s)$ chỉ có một số hữu hạn các điểm bất thường cô lập $a_1, a_2, ..., a_n$ trong nửa mặt phẳng $\mathrm{Re}(s)<\alpha$ với α nào đó $>\alpha_0$.



Chọn R đủ lớn sao cho các điểm bất thường này đều nằm trong phần của mặt phẳng được giới hạn bởi đường tròn C_R tâm O bán kính R và đường thẳng $\mathrm{Re}(s)=\alpha$. Khi đó

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=\sum_{k=1}^{n}\left[\mathrm{Res}\,e^{st}X(s);a_k\right] \tag{2.24}$$

Đặc biệt nếu $X(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$, trong đó bậc của đa thức $Q(s)$ lớn hơn bậc của đa thức $P(s)$. Giả sử $Q(s)$ chỉ có các không điểm đơn là $a_1, a_2, ..., a_n$ và chúng không phải là không điểm của $P(s)$ thì ta có *công thức Heavyside*:

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\}=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}e^{a_kt} \tag{2.25}$$

Ví dụ 2.20: Tìm hàm gốc $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+3s+5}{(s-1)(s+2)(s+3)}\right\}$.

Giải: Hàm ảnh $\dfrac{P(s)}{Q(s)}=\dfrac{s^2+3s+5}{(s-1)(s+2)(s+3)}$ có các cực điểm đơn là $1,\,-2,\,-3$.

$$\left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=1}=\frac{3}{4},\ \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=-2}=-1,\ \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=-3}=\frac{5}{4}\ \Rightarrow\ x(t)=\frac{3}{4}e^t-e^{-2t}+\frac{5}{4}e^{-3t}.$$

Ví dụ 2.21: Tìm hàm gốc $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}\right\}$.

Giải: Hàm ảnh $\dfrac{P(s)}{Q(s)}=\dfrac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}$ có các cực điểm đơn là $2,\,-2+2i,\,-2-2i$.

$$\left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=2}=1,\ \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=-2+2i}=1+\frac{i}{4},\ \left.\frac{P(s)}{Q'(s)}\right|_{s=-2-2i}=\overline{\left(\frac{P(-2+2i)}{Q'(-2+2i)}\right)}=\overline{1+\frac{i}{4}}=1-\frac{i}{4}.$$

$$\Rightarrow\ x(t)=e^{2t}+\left(1+\frac{i}{4}\right)e^{-2t+2it}+\left(1-\frac{i}{4}\right)e^{-2t-2it}$$

$$=e^{2t}+e^{-2t}\left(e^{2it}+e^{-2it}\right)+\frac{i}{4}e^{-2t}\left(e^{2it}-e^{-2it}\right)=e^{2t}+e^{-2t}\left(2\cos 2t-\frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

d. Tìm hàm gốc của các phân thức hữu tỉ

Mọi phân thức hữu tỉ có dạng $X(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$, trong đó bậc của $Q(s)$ lớn hơn bậc của $P(s)$ đều có thể phân tích thành tổng của các phân thức tối giản loại I và loại II.

♦ Các phân thức hữu tỉ loại I: $\dfrac{1}{s-a}$ hay $\dfrac{1}{(s-a)^n}$, $a\in\mathbb{R}$ có hàm gốc:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at},\quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\}=e^{at}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{2.26}$$

♦ Các phân thức hữu tỉ loại II: $\dfrac{Ms+N}{\left((s+a)^2+\omega^2\right)^n}$, $M,\,N,\,a,\,\omega\in\mathbb{R}$.

Sử dụng tính chất dịch chuyển ảnh ta có thể đưa các phân thức tối giản loại II về một trong hai dạng sau:

$$\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^n}\quad\text{hoặc}\quad\frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^n} \tag{2.27}$$

♦ Trường hợp $n=1$, từ ví dụ 2.6 và ví dụ 2.12 ta có:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\right\}=\cos\omega t,\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\omega^2}\right\}=\frac{\sin\omega t}{\omega} \tag{2.28}$$

♦ Trường hợp $n=2$:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right\}=\frac{t\sin\omega t}{2\omega},\ \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right\}=\frac{\sin\omega t-\omega t\cos\omega t}{2\omega^3} \quad \textbf{(2.29)}$$

♦ Trường hợp $n=3$: $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right\}=\frac{t\sin\omega t-\omega t^2\cos\omega t}{8\omega^3}$,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}\right\}=\frac{\left(3-\omega^2t^2\right)\sin\omega t-3\omega t\cos\omega t}{8\omega^3} \quad \textbf{(2.30)}$$

Ví dụ 2.22: Hàm ảnh ở ví dụ 2.21. $X(s)=\dfrac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}$ có thể phân tích thành tổng các phân thức tối giản

$$X(s)=\frac{1}{s-2}+\frac{2s+3}{s^2+4s+8}=\frac{1}{s-2}+\frac{2(s+2)}{(s+2)^2+4}-\frac{1}{(s+2)^2+4}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+3s+2}{(s-2)\left(s^2+4s+8\right)}\right\}=e^{2t}+2e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t\,.$$

Ví dụ 2.25: Tìm hàm gốc của $X(s)=\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}$.

Ta có thể phân tích $X(s)$ thành tổng các phân thức tối giản

$$X(s)=\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}=\frac{-\frac{1}{3}}{s+1}+\frac{\frac{1}{3}}{s-2}+\frac{4}{(s-2)^2}+\frac{-7}{(s-2)^3}$$

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^3}\right\}=-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}+4te^{2t}-\frac{7}{2}t^2e^{2t}\,.$$

2.1.5. Ứng dụng của biến đổi Laplace

2.1.5.1. Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân tuyến tính

a. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

$$a_n\frac{d^nx}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x=y(t) \quad \textbf{(2.31)}$$

thỏa mãn điều kiện đầu

$$x(0)=x_0,\ x'(0)=x_1,\ldots,x^{(n-1)}(0)=x_{n-1} \quad \textbf{(2.32)}$$

Ta tìm nghiệm là hàm gốc bằng cách đặt $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}$, $Y(s)=\mathscr{L}\{y(t)\}$.

Áp dụng công thức biến đổi Laplace của đạo hàm (2.13), (2.14) với điều kiện đầu (2.32),

$$\mathscr{L}\{a_0x(t)\}=a_0X(s)$$

$$\mathscr{L}\{a_1x'(t)\}=a_1\big(sX(s)-x_0\big)$$

.. ..

$$\mathscr{L}\left\{a_nx^{(n)}(t)\right\}=a_n\left(s^nX(s)-s^{n-1}x_0-\cdots-sx_{n-2}-x_{n-1}\right). \qquad \textbf{(2.33)}$$

Thay vào (2.31) ta được

$$\left(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0\right)X(s)=Y(s)+x_0\left(a_ns^{n-1}+a_{n-1}s^{n-2}+\cdots+a_1\right)$$
$$+x_1\left(a_ns^{n-2}+a_{n-1}s^{n-3}+\cdots+a_2\right)+\cdots+x_{n-1}a_n.$$

Vậy phương trình ảnh có dạng: $A(s)X(s)=Y(s)+B(s)\ \Rightarrow\ X(s)=\dfrac{Y(s)+B(s)}{A(s)}$.

Ảnh ngược $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$ là nghiệm cần tìm.

Ví dụ 2.27: Tìm nghiệm của phương trình: $x^{(4)}+2x''+x=\sin t$ thỏa mãn điều kiện đầu $x(0)=x'(0)=x''(0)=x^{(3)}(0)=0$.

Giải: Phương trình ảnh: $\left(s^4+2s^2+1\right)X(s)=\dfrac{1}{s^2+1}\ \Rightarrow X(s)=\dfrac{1}{\left(s^2+1\right)^3}$.

Áp dụng công thức (2.30) ta có nghiệm $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}=\dfrac{\left(3-t^2\right)\sin t-3t\cos t}{8}$.

Ví dụ 2.28: Tìm nghiệm của phương trình: $x''+x=e^t$ thỏa mãn điều kiện đầu $x(1)=1$, $x'(1)=0$.

Giải: Bằng cách đặt $u=t-1$ ta đưa điều kiện đầu $t=1$ về điều kiện đầu $u=0$.

Đặt $y(u)=x(u+1)=x(t)$. Sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp ta có:

$$\frac{dy}{du}=\frac{dx}{du}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{du}=\frac{dx}{dt}, \text{ tương tự } \frac{d^2y}{du^2}=\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Do đó phương trình đã cho có thể viết lại tương ứng: $y''(u)+y(u)=e^{u+1}$ với điều kiện đầu $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Đặt $Y(s)=\mathscr{L}\{y(u)\}\ \Rightarrow\ \mathscr{L}\{y''(u)\}=s^2Y(s)-s$.

Phương trình ảnh: $\left(s^2+1\right)Y(s)=\dfrac{e}{s-1}+s\ \Rightarrow Y(s)=\dfrac{e}{(s-1)\left(s^2+1\right)}+\dfrac{s}{s^2+1}$.

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{\frac{e}{2}}{(s-1)}+\left(1-\frac{e}{2}\right)\frac{s}{s^2+1}-\frac{\frac{e}{2}}{s^2+1} \quad \Rightarrow \quad y(u)=\frac{e}{2}e^u+\left(1-\frac{e}{2}\right)\cos u+\frac{e}{2}\sin u \,.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x(t)=\frac{1}{2}e^t+\left(1-\frac{e}{2}\right)\cos(t-1)+\frac{e}{2}\sin(t-1)$.

b. Hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng

Ví dụ 2.29: Tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} x'=2x-3y \\ y'=y-2x \end{cases} \quad \text{với điều kiện đầu} \quad \begin{cases} x(0)=8 \\ y(0)=3 \end{cases}.$$

Giải: Đặt $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}$, $Y(s)=\mathscr{L}\{y(t)\}$ $\Rightarrow$ $\mathscr{L}\{x(t)\}=sX-8, \mathscr{L}\{y(t)\}=sY-3$.

Thay vào hệ phương trình trên ta có hệ phương trình ảnh:

$$\begin{cases} sX-8=2X-3Y \\ sY-3=Y-2X \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} (s-2)X+3Y=8 \\ 2X+(s-1)Y=3 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ảnh ta có nghiệm:

$$\begin{cases} X=\dfrac{8s-17}{(s+1)(s-4)}=\dfrac{5}{s+1}+\dfrac{3}{s-4} \\ Y=\dfrac{3s-22}{(s+1)(s-4)}=\dfrac{5}{s+1}-\dfrac{2}{s-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t)=5e^{-t}+3e^{4t} \\ y(t)=5e^{-t}-2e^{4t} \end{cases}.$$

c. Phương trình vi phân tuyến tính hệ số biến thiên

Ví dụ 2.31: *Giải phương trình* $t x''+x'+4tx=0$

Đặt $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}$ thì $\mathscr{L}\{4tx(t)\}=-4\dfrac{dX}{ds}$, $\mathscr{L}\{x'(t)\}=sX-x(0)$.

$$\mathscr{L}\{tx''(t)\}=\frac{d}{ds}\left(s^2X-sx(0)-x'(0)\right)=-2sX-s^2\frac{dX}{ds}+x(0).$$

Phương trình ảnh: $-2sX-s^2\dfrac{dX}{ds}+x(0)+sX-x(0)-4\dfrac{dX}{ds}=0$.

Hay $\quad (s^2+4)\dfrac{dX}{ds}=sX \Rightarrow \dfrac{dX}{X}=\dfrac{s}{s^2+4}ds$.

Giải phương trình này ta được: $X(s)=\dfrac{C}{\sqrt{s^2+4}}$.

Nghiệm của phương trình là hàm gốc $\quad x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{C}{\sqrt{s^2+4}}\right\}=CJ_0(2t)$.

Để xác định C ta thay $t=0$ vào 2 vế của đẳng thức trên: $x(0)=CJ_0(0)=C$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $\quad x(t)=x(0)J_0(2t)$.

2.1.5.2. Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải phương trình tích phân

Xét phương trình tích phân dạng tích chập

$$A\,x(t)+B\int_0^t x(u)\,k(t-u)\,du = C\,f(t) \qquad \textbf{(2.34)}$$

A, B, C là các hằng số, $f(t),\ k(t)$ là các hàm gốc.

Giải phương trình (2.34) là tìm tất cả các hàm thực $x(t)$ thỏa mãn đẳng thức với mọi t thuộc một miền nào đó.

Giả sử $x(t)$ là hàm gốc. Đặt $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}$, $F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}$, $K(s)=\mathscr{L}\{k(t)\}$.

Phương trình ảnh $A\,X(s)+B\,X(s)\,K(s)=C\,F(s) \;\Rightarrow\; X(s)=\dfrac{C\,F(s)}{A+B\,K(s)}$.

Nghiệm

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{C\,F(s)}{A+B\,K(s)}\right\} \qquad \textbf{(2.35)}$$

Ví dụ 2.33: Giải phương trình tích phân Abel:

$$\int_0^t \frac{x(u)}{(t-u)^{\alpha}}\,du = f(t)\ ;\ 0<\alpha<1.$$

Giải: Ta có $A=0$, $B=C=1$; $K(s)=\mathscr{L}\left\{t^{-\alpha}\right\}=\dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}$.

Do đó $X(s)=\dfrac{F(s)}{K(s)}=\dfrac{s^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}F(s)$. Nghiệm của phương trình $x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$.

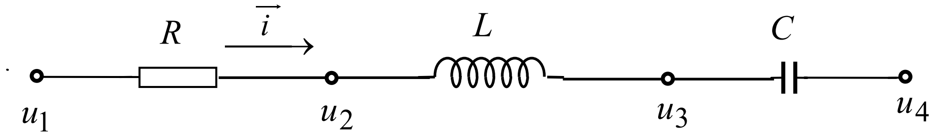
Chẳng hạn $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $f(t)=1+t+t^2$ thì $\Gamma(1-\alpha)=\sqrt{\pi}$, $F(s)=\dfrac{1}{s}+\dfrac{1}{s^2}+\dfrac{2}{s^3}$.

$$\Rightarrow\ X(s)=\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}+\frac{2}{s^{\frac{5}{2}}}\right)\ \Rightarrow x(t)=\frac{1}{3\pi\sqrt{t}}\left(3+6t+8t^2\right).$$

2.1.5.3. Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải các bài toán mạch điện

Một số bài toán về tính toán các mạch điện được đưa về giải phương trình vi phân, phương trình tích phân, hoặc phương trình đạo hàm riêng… Vì vậy, nếu chuyển qua ảnh của biến đổi Laplace thì việc giải các bài toán sẽ đơn giản hơn.

Giả sử trên một đoạn mạch có điện trở R, một cuộn dây có hệ số tự cảm L và một tụ điện có điện dung C.



Gọi $u(t)$ là hiệu điện thế của hai đầu đoạn mạch, $i(t)$ là cường độ dòng điện của mạch tại thời điểm t. $u(t)$ và $i(t)$ thỏa mãn các đẳng thức sau:

$$u(t) = u_2 - u_1 = R\,i(t)\,; \quad u_3 - u_2 = L\frac{di(t)}{dt}\,; \quad u_4 - u_3 = \frac{1}{C}\left(\int_0^t i(t)dt + q_0\right). \qquad \textbf{(2.36)}$$

Đặt $I(s) = \mathscr{L}\{i(t)\}, U(s) = \mathscr{L}\{u(t)\}$ thì $\mathscr{L}\left\{\frac{di(t)}{dt}\right\} = sI - i(0)\,,\ \mathscr{L}\left\{\int_0^t i(t)dt + q_0\right\} = \frac{I}{s} + \frac{q_0}{s}$.

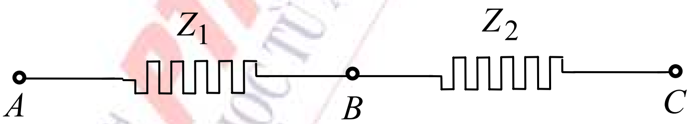
Trong đó q_0 là điện lượng ban đầu ($t = 0$) trên các thành tụ điện. Trong các bài toán đóng mạch các điều kiện ban đầu đều bằng 0: $q_0 = 0,\ i(0) = 0$. Lúc đó tỉ số giữa điện thế ảnh và cường độ ảnh gọi là trở kháng ảnh $Z = \frac{U}{I}$. Như vậy các trở kháng ảnh của điện trở R, cuộn dây có hệ số tự cảm L và tụ điện có điện dung C tương ứng là:

$$Z = R\ ; \quad Z = Ls\ ; \quad Z = \frac{1}{Cs} \qquad \textbf{(2.37)}$$

Khi tính toán một mạng gồm nhiều mạch điện kín ta áp dụng định luật thứ nhất của Kirchoff (Kiếchốp) cho từng nút và định luật thứ hai cho từng mạch kín, sau đó chuyển các phương trình tìm được sang phương trình ảnh.

Áp dụng hai định luật Kirchoff ta có thể tìm trở kháng ảnh tương đương của mạch mắc nối tiếp và mạch song song cơ bản sau:

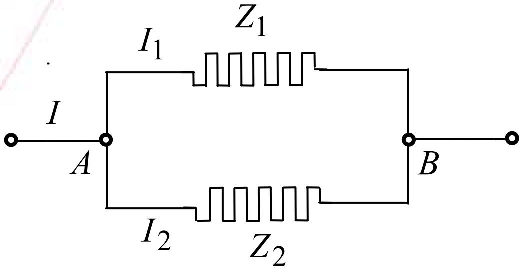
- Trở kháng ảnh tương đương Z của hai trở kháng Z_1, Z_2 mắc nối tiếp bằng tổng hai trở kháng này.



Gọi u_1, u_2, u lần lượt là hiệu điện thế giữa A, B; B, C và A, C. theo định luật 1 Kirchoff ta có $u = u_1 + u_2$. Chuyển qua ảnh $U = U_1 + U_2 \Rightarrow ZI = Z_1 I + Z_2 I$. Vậy

$$Z = Z_1 + Z_2 \qquad \textbf{(2.38)}$$

- Nghịch đảo của trở kháng ảnh tương đương của hai trở kháng Z_1, Z_2 mắc song song bằng tổng nghịch đảo hai trở kháng này.



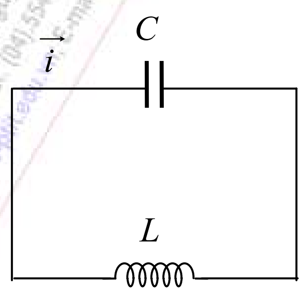
Gọi I_1, I_2, I lần lượt là cường độ ảnh trong mạch 1, mạch 2 và mạch chính. U là điện thế ảnh giữa A và B.

Áp dụng định luật 2 Kirchoff tại nốt A ta có $I = I_1 + I_2 \Rightarrow \dfrac{U}{Z} = \dfrac{U}{Z_1} + \dfrac{U}{Z_2}$. Vậy:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \tag{2.39}$$

Ví dụ 2.34: *Một tụ điện có điện dung C được nạp điện có điện lượng q_0. Tại thời điểm $t = 0$, ta mắc nó vào 2 mút của 1 cuộn dây có điện cảm L. Tìm điện lượng $q(t)$ của tụ điện và cường độ $i(t)$ của dòng điện trong mạch tại thời điểm $t > 0$.*

Giải: Áp dụng định luật Kirchoff thứ nhất cho mạch vòng ta có:



$$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\left(\int_0^t i\,dt + q_0\right) = 0 .$$

Vì $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$ nên phương trình trên trở thành

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}\left(\int_0^t \frac{dq}{dt}dt + q_0\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0 .$$

Đặt $Q(s) = \mathscr{L}\{q(t)\}$, vì $q(0) = q_0$, $q'(0) = i(0) = 0$. Do đó ta có phương trình ảnh:

$$L\left(s^2Q - sq_0\right) + \frac{Q}{C} = 0 \ \Rightarrow \ Q = q_0 \frac{s}{s^2 + \dfrac{1}{CL}} .$$

Vậy $q(t) = q_0 \cos\dfrac{t}{\sqrt{CL}}$; $i(t) = \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{q_0}{\sqrt{CL}}\sin\dfrac{t}{\sqrt{CL}}$.

2.2. PHÉP BIẾN ĐỔI FOURIER

2.2.1. Chuỗi Fourier

2.2.1.1. Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ 2π

Định nghĩa 2.5: *Cho $x(t)$ là một hàm tuần hoàn chu kỳ 2π, chuỗi*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right) \tag{2.40}$$

có các hệ số xác định bởi

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)dt \ ; \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\cos nt dt \ ; \ b_n = \int_0^{2\pi} x(t)\sin nt dt \ ; \ n = 1, 2, ... \tag{2.41}$$

được gọi là chuỗi Fourier của hàm $x(t)$. Các hệ số (2.41) gọi là hệ số Fourier.

Có thể chứng minh được rằng nếu

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt \quad \textbf{(2.42)}$$

thì các hệ số a_0, a_n, b_n là các hệ số Fourier (2.41) của hàm $x(t)$.

Ngược lại mọi hàm thỏa mãn điều kiện Dirichlet thì có thể khai triển thành chuỗi Fourier.

Định lý 2.14 (Định lý Dirichlet): Giả sử hàm $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ 2π, *đơn điệu từng khúc và bị chặn* (gọi là điều kiện Dirichlet), tại các điểm gián đoạn ta ký hiệu

$$x(t)=\frac{x(t+0)+x(t-0)}{2} \quad \textbf{(2.43)}$$

Khi đó chuỗi Fourier hội tụ và có đẳng thức (2.42), trong đó $x(t+0)$, $x(t-0)$ lần lượt là giới hạn phải và giới hạn trái của $x(t)$ tại t.

2.2.1.2. Khai triển Fourier của hàm tuần hoàn chu kỳ $T_0=2l$

Chuỗi Fourier của hàm $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ $2l$ có dạng:

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right) \quad \textbf{(2.44)}$$

Các hệ số Fourier được tính theo công thức sau:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{2l}x(t)dt\ ;\ a_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}x(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt\ ;\ b_n=\frac{1}{l}\int_0^{2l}x(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt\ ;\ n=1,2,... \quad \textbf{(2.45)}$$

Nhận xét:

1. Hàm tuần hoàn chu kỳ 2π là một trường hợp đặc biệt của hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$, vì vậy các nhận xét sau đây được giả thiết là hàm tuần hoàn chu kỳ $2l$. Ngoài ra do tính chất tích phân của hàm tuần hoàn nên các hệ số Fourier (2.45) cũng có thể tính như sau:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_c^{2l+c}x(t)dt\ ;\ a_n=\frac{1}{l}\int_c^{2l+c}x(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt\ ;$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_c^{2l+c}x(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt\ ;\ n=1,2,...\forall c \quad \textbf{(2.46)}$$

2. Nếu $x(t)$ là hàm lẻ tuần hoàn chu kỳ $2l$ thì $x(t)\cos\frac{n\pi}{l}t$ là hàm lẻ và $x(t)\sin\frac{n\pi}{l}t$ là hàm chẵn, do đó các hệ số Fourier (2.44) thỏa mãn

$$a_0=a_n=0;\quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l}x(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt\ ;\ n=1,2,... \quad \textbf{(2.47)}$$

3. Nếu $x(t)$ là hàm chẵn tuần hoàn chu kỳ $2l$ thì $x(t)\cos\frac{n\pi}{l}t$ là hàm chẵn và $x(t)\sin\frac{n\pi}{l}t$ là hàm lẻ, do đó các hệ số Fourier (2.44) thỏa mãn

$$b_n = 0;\quad a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x(t)dt\ ;\quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x(t)\cos\frac{n\pi}{l}tdt\ ;\ n = 1, 2, ... \qquad \textbf{(2.48)}$$

4. Giả sử $x(t)$ là hàm xác định, bị chặn và đơn điệu từng khúc trong khoảng (a, b). Ta có thể mở rộng thành hàm tuần hoàn chu kỳ $2l = b-a$. Do đó $x(t)$ có thể khai triển thành chuỗi Fourier, các hệ số Fourier được tính như sau

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_a^b x(t)dt\ ;\ a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b x(t)\cos\frac{2n\pi}{b-a}tdt\ ;$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b x(t)\sin\frac{2n\pi}{b-a}tdt\ ;\ n = 1, 2, ... \qquad \textbf{(2.49)}$$

5. Giả sử $x(t)$ là hàm xác định, bị chặn và đơn điệu từng khúc trong khoảng $(0, l)$. Khi đó ta có thể mở rộng thành hàm chẵn hoặc hàm lẻ tuần hoàn chu kỳ $2l$. Nếu mở rộng thành hàm chẵn thì các hệ số Fourier được tính theo công thức (2.48) và nếu mở rộng thành hàm lẻ thì các hệ số Fourier được tính theo công thức (2.47).

2.2.1.3. Dạng cực của chuỗi Fourier (Polar Fourier Series)

Từ công thức (2.42) nếu ta đặt

$$A_0 = \frac{a_0}{2};\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \textbf{(2.50)}$$

và góc φ_n, $0 \le \varphi_n < 2\pi$ xác định bởi

$$\cos\varphi_n = \frac{a_n}{A_n}\ ,\quad \sin\varphi_n = \frac{-b_n}{A_n} \qquad \textbf{(2.51)}$$

thì công thức (2.42) có thể viết lại

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}t + b_n\sin\frac{n\pi}{l}t = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}t + \varphi_n\right) \qquad \textbf{(2.52)}$$

Công thức (2.42) được gọi là *chuỗi Fourier dạng cầu phương* (Quadrature Fourier Series). Công thức (2.52) được gọi là *chuỗi Fourier dạng cực* của $x(t)$.

2.2.1.4. Dạng phức của chuỗi Fourier (Complex Fourier Series)

Sử dụng công thức Euler (1.8) và thay vào (2.42) ta được

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt + b_n\sin nt\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{\text{int}} + e^{-\text{int}}}{2} + b_n\frac{e^{\text{int}} - e^{-\text{int}}}{2i}\right)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right) e^{\text{int}} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) e^{-\text{int}}$$

Vậy ta có thể viết chuỗi Fourier dưới dạng phức

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\text{int}} \tag{2.53}$$

trong đó các hệ số Fourier phức c_n xác định như sau

$$\begin{cases} c_0 = a_0 / 2 \\ c_n = (a_n - ib_n)/2 \\ c_{-n} = (a_n + ib_n)/2 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} a_0 = 2c_0 \\ a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases} \tag{2.54}$$

Các hệ số Fourier phức (2.54) có thể tính trực tiếp

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_c^{c+2\pi} x(t) e^{-\text{int}} dt \,,\ \ \forall c \tag{2.55}$$

Hàm tuần hoàn chu kỳ $T_0 = 2l$ có khai triển Fourier dạng phức

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{l}t} \,, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_c^{c+2l} x(t) e^{-i\frac{n\pi}{l}t} dt \,,\ \ \forall c \tag{2.56}$$

Nếu ký hiệu $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$ là tần số cơ bản của hàm tuần hoàn chu kỳ T_0 thì công thức (2.68) được biểu diễn

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i2n\pi f_0 t} \,, \quad c_n = \frac{1}{2l} \int_c^{c+2l} x(t) e^{-i2n\pi f_0 t} dt \,,\ \ \forall c \tag{2.57}$$

Định lý 2.15: Đối với mọi hàm $x(t)$ tuần hoàn chu kỳ $T_0 = 2l$ thoả mãn điều kiện Dirichlet thì có đẳng thức Parseval

$$\frac{1}{T_0} \int_c^{c+T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{2.58}$$

Nhận xét: Công thức (2.44), (2.52), (2.56) cho thấy dạng cực, dạng phức và dạng cầu phương của chuỗi Fourier là hoàn toàn tương đương, nghĩa là từ dạng này ta có thể biểu diễn duy nhất qua dạng kia và ngược lại. Vậy thì dạng nào được ứng dụng tốt nhất? Câu trả lời phụ thuộc vào từng trường hợp cụ thể. Nếu bài toán thiên về giải tích thì sử dụng dạng phức sẽ thuận lợi hơn vì việc tính các hệ số c_n dễ hơn. Tuy nhiên khi đo các hàm dạng sóng được thực hiện trong phòng thí nghiệm thì dạng cực sẽ thuận tiện hơn, vì các thiết bị đo lường như vôn kế, máy phân tích phổ sẽ đọc được biên độ và pha. Dùng các kết quả thí nghiệm đo được, các nhà kỹ thuật có thể vẽ các vạch phổ một phía là các đoạn thẳng ứng với mỗi giá trị biên độ A_n tại tần số $f_n = nf_0 = \dfrac{n}{T_0}$.

2.2.2. Phép biến đổi Fourier hữu hạn

2.2.2.1. Định nghĩa phép biến đổi Fourier hữu hạn

Biến đổi Fourier hữu hạn của tín hiệu rời rạc $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ là

$$\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf} \quad \textbf{(2.59)}$$

nếu chuỗi ở vế phải hội tụ.

Công thức biến đổi ngược

$$x(n) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(f)\right\} = \int_0^1 \widehat{X}(f)e^{i2\pi nf}df \quad \textbf{(2.60)}$$

Ví dụ 2.36: Tìm biến đổi Fourier hữu hạn của tín hiệu rời rạc $x(n) = \mathrm{rect}_N(n)$, N là 1 số tự nhiên.

Giải: $\widehat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-i2\pi nf} = \dfrac{1-e^{-i2\pi Nf}}{1-e^{-i2\pi f}}$

$$= \frac{e^{-i\pi Nf}}{e^{-i\pi f}} \cdot \frac{e^{i\pi Nf} - e^{-i\pi Nf}}{e^{i\pi f} - e^{-i\pi f}} = e^{-i\pi(N-1)f}\,\frac{\sin N\pi f}{\sin \pi f}.$$

Nhận xét:

1. Trong công thức biến đổi Fourier 2.59, 2.60 đối số f được ký hiệu cho tần số. Có tài liệu không biểu diễn biến đổi Fourier qua miền tần số mà qua miền ω như sau

$$\widehat{X}(\omega) = \mathscr{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i\omega n}, \; x(n) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widehat{X}(\omega)e^{i\omega n}d\omega \quad \textbf{(2.61)}$$

2. Hai cách biểu diễn này tương ứng với nhau qua phép đổi biến số $\omega = 2\pi f$.

3. Một điều kiện đủ để tín hiệu rời rạc $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ tồn tại biến đổi Fourier hữu hạn là

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty.$$

4. Công thức biến đổi ngược (2.60), (2.61) là khai triển Fourier dạng phức của hàm $\widehat{X}(f)$ (hoặc $\widehat{X}(\omega)$). Vì vậy biến đổi ngược tồn tại khi $\widehat{X}(f)$ (hoặc $\widehat{X}(\omega)$) thỏa mãn điều kiện Dirichlet.

2.2.2.2. Tính chất của phép biến đổi Fourier hữu hạn

Tương tự phép biến đổi Laplace, phép biến đổi Fourier hữu hạn có các tính chất sau:

1. Tuyến tính:

$$\mathscr{F}\left\{ Ax(n)+By(n)\right\} = A\mathscr{F}\left\{ x(n)\right\} + B\mathscr{F}\left\{ y(n)\right\} \qquad \textbf{(2.62)}$$

2. Trễ:

$$\widehat{X}(f)=\mathscr{F}\left\{ x(n)\right\} \;\Rightarrow\; \mathscr{F}\left\{x(n-n_0)\right\} = e^{-i2\pi n_0 f}\,\widehat{X}(f). \qquad \textbf{(2.63)}$$

3. Dịch chuyển ảnh:

$$\widehat{X}(f)=\mathscr{F}\left\{ x(n)\right\} \;\Rightarrow\; \mathscr{F}\left\{e^{i2\pi n f_0}x(n)\right\} = \widehat{X}(f-f_0). \qquad \textbf{(2.64)}$$

4. Điều chế:

$$\mathscr{F}\left\{ x(n)\cos(2\pi n f_0)\right\} = \mathscr{F}\left\{ x(n)\frac{e^{i2\pi n f_0}+e^{-i2\pi n f_0}}{2}\right\} = \frac{\widehat{X}(f-f_0)+\widehat{X}(f+f_0)}{2}. \qquad \textbf{(2.65)}$$

5. Liên hợp phức: $\widehat{X}(f)=\mathscr{F}\left\{ x(n)\right\} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf}$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{ \overline{x(n)}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{x(n)}e^{-i2\pi nf} = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{i2\pi nf}} = \overline{\widehat{X}(-f)} \qquad \textbf{(2.66)}$$

Do đó nếu $x(n)$ thực thì $\widehat{X}(f)=\overline{\widehat{X}(-f)}$.

6. Biến số đảo: $\widehat{X}(f)=\mathscr{F}\left\{ x(n)\right\} = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf}$

$$\Rightarrow \mathscr{F}\left\{ x(-n)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-i2\pi nf} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)e^{-i2\pi(-n)(-f)} = \widehat{X}(-f) \qquad \textbf{(2.67)}$$

7. Tích chập:

$$\mathscr{F}\left\{ x(n)*y(n)\right\} = \mathscr{F}\left\{ x(n)\right\}\cdot\mathscr{F}\left\{ y(n)\right\} \qquad \textbf{(2.68)}$$

8. Tích chập ảnh:

$$\mathscr{F}\left\{ x(n)\cdot y(n)\right\} = \mathscr{F}\left\{ x(n)\right\} * \mathscr{F}\left\{ y(n)\right\} \qquad \textbf{(2.69)}$$

9. Biến đổi của hàm tương quan

$$r_{x,y}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\overline{y(m-n)} \Rightarrow \mathscr{F}\left\{ r_{x,y}(n)\right\} = \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(f)} \qquad \textbf{(2.70)}$$

Nếu $x(n)$, $y(n)$ thực thì $r_{x,y}(n) = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(m-n) \Rightarrow \mathscr{F}\left\{ r_{x,y}(n)\right\} = \widehat{X}(f)\widehat{Y}(-f)$.

10. Định lý Weiner-Khinchin:

$$\mathscr{F}\left\{ r_{x,x}(n) \right\} = \left| \widehat{X}(f) \right|^2 . \tag{2.71}$$

11. Đạo hàm ảnh:

$$\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\left\{ x(n) \right\} \;\Rightarrow\; \mathscr{F}\left\{ nx(n) \right\} = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{d\widehat{X}(f)}{df} \tag{2.72}$$

12. Đẳng thức Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} = \int_0^1 \widehat{X}(f)\overline{\widehat{Y}(-f)}df \;;\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \int_0^1 \left|\widehat{X}(f)\right|^2 df . \tag{2.73}$$

2.2.3. Phép biến đổi Fourier

2.2.3.1. Công thức tích phân Fourier

Định lý 2.16: Nếu hàm $x(t)$ khả tích tuyệt đối trên toàn bộ trục thực ($\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt < \infty$) và thoả mãn điều kiện Dirichlet thì có đẳng thức

$$x(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\lambda(u-t)du \tag{2.74}$$

Công thức (2.74) *được gọi là công thức tích phân Fourier.*

Vì hàm cosin là hàm chẵn và sin là hàm lẻ nên từ công thức (2.74) ta có:

$$x(t) = \int_0^{\infty} F(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cos\lambda(u-t)du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\big(\cos\lambda(u-t) - i\sin\lambda(u-t)\big)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} x(u)e^{-i\lambda(u-t)}du \tag{2.74}$$

(2.74) được gọi là *công thức tích phân Fourier phức.*

Chú ý:

1. Các công thức trên đã sử dụng quy ước (2.43) tại những điểm không liên tục.
2. Nếu $x(t)$ là hàm chẵn thì

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\lambda t d\lambda \int_0^{\infty} x(u)\cos\lambda u du . \tag{2.76}$$

3. Nếu $x(t)$ là hàm lẻ thì

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \sin\lambda t d\lambda \int_0^{\infty} x(u)\sin\lambda u du . \tag{2.77}$$

4. Các công thức tích phân Fourier, định lý 2.16 được phát biểu và chứng minh cho trường hợp $x(t)$ là hàm thực. Tuy nhiên do tính chất tuyến tính của tích phân nên các kết quả trên vẫn còn đúng cho trường hợp hàm phức biến thực $x(t)$ khả tích tuyệt đối có phần thực, phần ảo thỏa mãn điều kiện Dirichlet.
5. Nếu đổi biến $\lambda = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad d\lambda = 2\pi df$, thay vào công thức (2.75) ta được

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} df \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-i2\pi f(u-t)} du = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-i2\pi fu} du \right) e^{i2\pi ft} df \qquad \textbf{(2.78)}$$

2.2.3.2. Định nghĩa phép biến đổi Fourier

Định nghĩa 2.6: *Giả sử hàm $x(t)$ khả tích tuyệt đối trên trục thực và thỏa mãn điều kiện Dirichlet. Biến đổi Fourier (viết tắt là FT) của $x(t)$ là*

$$\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt,\ f \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(2.79)}$$

Trong kỹ thuật, nếu $x(t)$ là hàm dạng sóng (waveform) theo thời gian t thì $\widehat{X}(f)$ được gọi là phổ hai phía của $x(t)$ (two - sided spectrum), còn tham số f chỉ tần số, có đơn vị là Hz.

Từ công thức tích phân Fourier (2.78) ta có *công thức biến đổi ngược*

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\widehat{X}(f)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(f) e^{i2\pi ft} df \qquad \textbf{(2.80)}$$

Hàm ảnh qua phép biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$ có thể viết dưới dạng cực

$$\widehat{X}(f) = \left|\widehat{X}(f)\right| e^{i\varphi(f)} \qquad \textbf{(2.81)}$$

trong đó

$$\left|\widehat{X}(f)\right| = \sqrt{\widehat{X}(f)\overline{\widehat{X}(f)}} \quad , \quad \varphi(f) = \angle \widehat{X}(f) \qquad \textbf{(2.82)}$$

được gọi *dạng biên độ - pha* của phép biến đổi.

Cặp $x(t), \widehat{X}(f)$ được gọi là cặp biến đổi Fourier.

2.2.3.3. Tính chất của phép biến đổi Fourier

a. Tương tự các tính chất (2.63)-(2.73) của phép biến đổi Fourier hữu hạn, phép biến đổi Fourier có các tính chất được tổng kết trong bảng sau:

(2.83)

Tính chất	Hàm $x(t)$	Biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$
1. Tuyến tính	$Ax_1(t) + Bx_2(t)$	$A\widehat{X}_1(f) + B\widehat{X}_2(f)$

2. Đồng dạng	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\widehat{X}(f/a)$
3. Liên hợp	$\overline{x(t)}$	$\overline{\widehat{X}(-f)}$
4. Đối ngẫu	$\widehat{X}(t)$	$x(-f)$
5. Trễ	$x(t-T_d)$	$e^{-i2\pi T_d}\widehat{X}(f)$
6. Dịch chuyển ảnh	$e^{i2\pi f_0 t}x(t)$	$\widehat{X}(f-f_0)$
7. Điều chế	$x(t)\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2}\widehat{X}(f-f_0)+\frac{1}{2}\widehat{X}(f+f_0)$
8. Đạo hàm	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(i2\pi f)^n\widehat{X}(f)$
9. Tích phân	$\int_{-\infty}^{t} x(u)du$	$\frac{1}{i2\pi f}\widehat{X}(f)+\frac{1}{2}\widehat{X}(0)\delta(f)$
10. Đạo hàm ảnh	$t^n x(t)$	$(-i2\pi f)^{-n}\frac{d^n\widehat{X}(f)}{df^n}$
11. Tích chập	$x_1 * x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(u)x_2(t-u)du$	$\widehat{X}_1(f)\widehat{X}_2(f)$
12. Tích	$x_1(t)x_2(t)$	$\widehat{X}_1(f)*\widehat{X}_2(f)$

Hàm δ trong tính chất 9. là hàm Dirac (xem ví dụ 2.40).

b. Từ định nghĩa biến đổi Fourier (2.79) ta nhận thấy rằng nếu $x(t)$ là hàm thực chẵn thì biến đổi Fourier của nó cũng là hàm thực chẵn. Kết hợp với tính chất đối ngẫu 4. ta có thể chuyển đổi vai trò của $x(t)$ và $\widehat{X}(f)$ cho nhau, nghĩa là

$$\widehat{X}(f)=\mathscr{F}\{x(t)\} \quad\Rightarrow\quad \mathscr{F}\{\widehat{X}(t)\}=x(f) \qquad \textbf{(2.84)}$$

2.2.3.4. Định lý Parseval và định lý năng lượng Rayleigh

Nếu $x_1(t), x_2(t)$ là hai hàm bình phương khả tích (gọi là hàm kiểu năng lượng) thì ta có *đẳng thức Parseval*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\overline{x_2(t)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{X}_1(f)\overline{\widehat{X}_2(f)}df \qquad \textbf{(2.85)}$$

Khi $x_1(t)=x_2(t)=x(t)$ ta có *định lý năng lượng Rayleigh*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{X}_1(f)\right|^2 df \qquad \textbf{(2.86)}$$

Như vậy có thể thay thế việc tính năng lượng trong miền thời gian bằng việc tính năng lượng trong miền tần số.

2.2.3.5. Biến đổi Fourier của các hàm đặc biệt

Ví dụ 2.37: Xung vuông đơn vị

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \ |t| < 1/2 \\ 0 & \text{nếu } \ |t| > 1/2 \end{cases} \qquad \textbf{(2.87)}$$

$$\widehat{\Pi}(f) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi ft} dt = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \ f = 0 \\ \left.\dfrac{e^{-i2\pi ft}}{-i2\pi f}\right|_{-1/2}^{1/2} & \text{nếu } \ f \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \ f = 0 \\ \dfrac{\sin(\pi f)}{\pi f} & \text{nếu } \ f \neq 0 \end{cases}$$

Đặt

$$\sin c(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \ t = 0 \\ \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & \text{nếu } \ t \neq 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2.88)}$$

Ta có: $\mathscr{F}\{\Pi(t)\} = \sin c(f)$. Áp dụng tính chất b. công thức (2.84) ta cũng có

$$\mathscr{F}\{\sin c(t)\} = \Pi(f) .$$

Ví dụ 2.38: Xung tam giác đơn vị

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{nếu } \ |t| < 1 \\ 0 & \text{nếu } \ |t| > 1 \end{cases} \qquad \textbf{(2.89)}$$

Áp dụng quy tắc tích phần từng phần ta được

$$\widehat{\Lambda}(f) = \int_{-1}^{1} (1-|t|) e^{-i2\pi ft} dt = 2\int_{0}^{1} (1-t)\cos(2\pi ft) dt = (\sin c(f))^2$$

Áp dụng tính chất b. công thức (2.84) ta cũng có

$$\mathscr{F}\left\{\sin c^2(t)\right\} = \Lambda(f) .$$

Ví dụ 2.39: Hàm phân bố mũ hai phía $x(t) = e^{-\lambda|t|}, \ \lambda > 0$.

$$\widehat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|t|} e^{-i2\pi ft} dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda t} \cos 2\pi ft \, dt$$

Áp dụng quy tắc tích phân từng phần, đặt

$$\begin{cases} U = e^{-\lambda t} \\ dV = \cos 2\pi ft dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dU = -\lambda e^{-\lambda t} dt \\ V = \sin 2\pi ft / 2\pi f \end{cases}$$

$$\widehat{X}(f)=2\left[\frac{e^{-\lambda t}\sin 2\pi ft}{2\pi f}\Big|_0^{\infty}+\frac{\lambda}{2\pi f}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\sin 2\pi ft\,dt\right]=\frac{\lambda}{\pi f}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\sin 2\pi ft\,dt$$

Tiếp tục đặt $\begin{cases}U=e^{-\lambda t}\\ dV=\sin 2\pi ftdt\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}dU=-\lambda e^{-\lambda t}dt\\ V=-\cos 2\pi ft/2\pi f\end{cases}$

$$\widehat{X}(f)=\frac{\lambda}{\pi f}\left[-\frac{e^{-\lambda t}\cos 2\pi ft}{2\pi f}\Big|_0^{\infty}-\frac{\lambda}{2\pi f}\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\cos 2\pi ft\,dt\right]=\frac{\lambda}{\pi f}\left(\frac{1}{2\pi f}-\frac{\lambda}{4\pi f}\hat{X}(f)\right)$$

$$\widehat{X}(f)=\frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2f^2}.$$

Ngược lại $\mathscr{F}\left\{\frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2t^2}\right\}=e^{-\lambda|f|},\ \lambda>0.$

Ví dụ 2.40: *Hàm Dirac* hai phía $\delta(t)$ là hàm suy rộng, hàm chẵn thỏa mãn tính chất

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & \text{với } t\neq 0\\ \infty & \text{với } t=0\end{cases}\quad \text{và}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \qquad \textbf{(2.90)}$$

1. $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)dt=f(0)$ với mọi hàm $f(t)$ liên tục tại 0.

2. $\mathscr{F}\{\delta(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-i2\pi ft}dt=1 \Rightarrow \delta(t)=\mathscr{F}^{-1}\{1\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i2\pi ft}df.$

3. Nếu giả thiết $\delta(t)$ là hàm chẵn thì

$$\delta(t)=\delta(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\pm i2\pi ft}df.$$

4. Áp dụng tính đồng dạng của biến đổi Fourier ta có

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t).$$

5. Đổi biến số lấy tích phân ta có

$$f*\delta(t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)dt=f(t_0)\ \text{ với mọi hàm } f(t) \text{ liên tục tại } t_0.$$

Hàm Dirac còn được gọi là *hàm xung kim*.

Ví dụ 2.41: Hàm bước nhảy

$$u(t)=\begin{cases}1 & \text{nếu } t>0\\ 0 & \text{nếu } t<0\end{cases}=\int_{-\infty}^{t}\delta(\lambda)d\lambda \qquad \textbf{(2.91)}$$

Hàm $u(t)$ không khả tích tuyệt đối trong toàn bộ trục thực nhưng từ tính chất A. 9. và $\dfrac{du(t)}{dt} = \delta(t)$ ta có thể mở rộng và xem

$$\mathscr{F}\{u(t)\} = \mathscr{F}\left\{ \int_{-\infty}^{t} \delta(\lambda) d\lambda \right\} = \frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f).$$

Ví dụ 2.42: Hàm dấu

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t > 0 \\ -1 & \text{nếu } t < 0 \end{cases} = u(t) - u(-t) \tag{2.92}$$

$$\mathscr{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = \mathscr{F}\{u(t)\} - \mathscr{F}\{u(-t)\} = \left(\frac{1}{i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f) \right) - \left(\frac{1}{-i2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(-f) \right) = \frac{1}{i\pi f}.$$

2.2.4. Phép biến đổi Fourier rời rạc (DFT: Discrete Fourier Tranform)

Việc tính toán biến đổi Fourier dựa vào máy tính phải được rời rạc hoá bằng cách chọn một số hữu hạn các giá trị mẫu theo thời gian và phổ có được cũng nhận tại một số hữu hạn các tần số. Đó là nội dung của phép biến đổi Fourier rời rạc.

Giả sử $N > 0$ là một số tự nhiên cho trước, căn bậc N của 1: $\mathscr{E} = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ thỏa mãn các tính chất sau:

i. $\mathscr{E}^{N+n} = \mathscr{E}^{n}, \forall n.$ **(2.93)**

ii. $\sum_{k=0}^{N-1} \mathscr{E}^{kn} = 0$ nếu $n \neq lN$. $\sum_{k=0}^{N-1} \mathscr{E}^{kn} = N$ nếu $n = lN$, l nguyên dương **(2.94)**

iii. Với mọi dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ tuần hoàn chu kỳ N: $x(n+N) = x(n)$ thì

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x(m) \mathscr{E}^{-mk} \right) \mathscr{E}^{nk} \tag{2.95}$$

Dựa vào (2.95) ta có thể định nghĩa phép biến đổi Fourier rời rạc của dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ tuần hoàn chu kỳ N.

Định nghĩa 2.7: Biến đổi Fourier rời rạc của dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ tuần hoàn chu kỳ N là

$$\widehat{X}(k) = DFT\{x(n)\} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \mathscr{E}^{-mk} \tag{2.96}$$

Biến đổi Fourier rời rạc ngược

$$x(n) = IDFT\left\{\widehat{X}(k)\right\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{X}(k) \mathscr{E}^{nk} \tag{2.97}$$

Ví dụ 2.43: Tìm biến đổi Fourier rời rạc của dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ tuần hoàn chu kỳ N xác định bởi $x(n) = a^{n}$, $\forall n = 0,..., N-1$.

Giải: $\widehat{X}(k)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\mathscr{E}^{-mk}=\sum_{m=0}^{N-1}a^m\mathscr{E}^{-mk}=\dfrac{1-a^N\mathscr{E}^{-Nk}}{1-a\mathscr{E}^{-k}}=\dfrac{1-a^N}{1-ae^{-i\frac{2\pi}{N}k}}$.

Nhận xét:

1. $\mathscr{E}=e^{i\frac{2\pi}{N}}$ tuần hoàn chu kỳ N (2.93), do đó phép biến đổi Fourier rời rạc chỉ xét các dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ tuần hoàn. Ảnh $\left\{\widehat{X}(k)\right\}$ của biến đổi Fourier rời rạc của dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ tuần hoàn chu kỳ N cũng tuần hoàn chu kỳ N.
2. Một dãy tín hiệu hữu hạn $\{x(n)\}_{n=0}^{M-1}$ có thể được mở rộng thành dãy tuần hoàn chu kỳ $N>M$.
3. Để có công thức đối xứng đôi khi người ta nhân $\sqrt{N}$ với vế phải của (2.96) và chia $\dfrac{1}{\sqrt{N}}$ với vế phải của (2.97):

$$\widehat{X}(k)=DFT\{x(n)\}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{N-1}x(m)\mathscr{E}^{-mk},\ x(n)=IDFT\left\{\widehat{X}(k)\right\}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}\widehat{X}(k)\mathscr{E}^{nk}.$$

4. Hầu hết các tính chất của FT cũng còn đúng cho DFT.
5. Chương trình MATLAB dùng lệnh:

$$X=fft(x) \tag{2.98}$$

để tính DFT (công thức (2.96)), trong đó $x=\{x(n)\}_{n=1}^{N}$ và $X=\{X(n)\}_{n=1}^{N}$ (công thức được tính ứng với $n=1,...,N$ thay cho $n=0,...,N-1$).

Dòng lệnh tính biến đổi ngược IDFT (công thức (2.97)).

$$x=ifft(X) \tag{2.99}$$

TÓM TẮT

Định nghĩa biến đổi Laplace

Biến đổi Laplace của hàm số thực $x(t)$ xác định với mọi $t>0$

$$\mathscr{L}\{x(t)\}=X(s)=\int_0^\infty e^{-st}x(t)dt$$

Các tính chất của phép biến đổi Laplace

1. $\mathscr{L}\{Ax(t)+By(t)\}=A\mathscr{L}\{x(t)\}+B\mathscr{L}\{y(t)\}$.

2. Với mọi $a>0$, $\mathscr{L}\{x(at)\}=\dfrac{1}{a}X\left(\dfrac{s}{a}\right)$.

3. $\mathscr{L}\left\{e^{at}x(t)\right\}=X(s-a)$.

4. Với mọi $a \in \mathbb{R}$, $\mathscr{L}\{\eta(t-a)x(t-a)\} = e^{-sa}X(s)$.

5. $\mathscr{L}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0)$; $\mathscr{L}\{x^{(n)}(t)\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)$.

6. $\mathscr{L}\left\{\int_0^t x(u)du\right\} = \dfrac{X(s)}{s}$.

7. $\mathscr{L}\{t^n x(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}X(s)$.

8. $\mathscr{L}\left\{\dfrac{x(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} X(u)du$.

9. $x(t)$ là một hàm gốc tuần hoàn chu kỳ $T > 0$ thì $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\} = \dfrac{\int_0^T e^{-st}x(t)dt}{1-e^{-sT}}$.

10. $\mathscr{L}\{x(t) * y(t)\} = X(s)Y(s)$

Biến đổi Laplace ngược

$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\}$ là biến đổi ngược của $X(s)$ nếu $\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s)$.

Công thức tích phân Bromwich $x(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{st}X(s)ds$

Biến đổi Fourier hữu hạn của tín hiệu rời rạc $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ là

$$\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\{x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf}$$

Công thức biến đổi ngược $x(n) = \mathscr{F}^{-1}\{\widehat{X}(f)\} = \int_0^1 \widehat{X}(f)e^{i2\pi nf}df$.

Phép biến đổi Fourier

Giả sử hàm $x(t)$ khả tích tuyệt đối trên trục thực và thỏa mãn điều kiện Dirichlet. Biến đổi Fourier của $x(t)$ là $\widehat{X}(f) = \mathscr{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$, $f \in \mathbb{R}$.

Công thức biến đổi ngược: $x(t) = \mathscr{F}^{-1}\{\widehat{X}(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{X}(f)e^{i2\pi ft}df$.

Phép biến đổi Fourier rời rạc

Giả sử $N > 0$ là một số tự nhiên cho trước, $\mathscr{E} = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ là căn bậc N của 1.

Biến đổi Fourier rời rạc của dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ tuần hoàn chu kỳ N là

$$\widehat{X}(k) = DFT\{x(n)\} = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\mathcal{E}^{-mk}.$$

Biến đổi Fourier rời rạc ngược: $x(n) = IDFT\left\{\widehat{X}(k)\right\} = \dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widehat{X}(k)\mathcal{E}^{nk}$.

CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP

2.1 Hàm ảnh $F(s)$ của biến đổi Laplace là một hàm giải tích trong nửa mặt phẳng.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.2 Nếu $f(t)$ là hàm gốc thì đạo hàm $f'(t)$ cũng là hàm gốc.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.3 Nếu $f(t)$ là hàm gốc thì tích phân $\varphi(t) = \int_0^t f(u)du$ cũng là hàm gốc.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.4 Phép biến đổi Laplace có tính chất tuyến tính.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.5 Biến đổi Laplace của tích hai hàm gốc bằng tích hai hàm ảnh.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.6 Chỉ có các hàm tuần hoàn mới tồn tại biến đổi Fourier.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.7 Phép biến đổi Fourier hữu hạn được sử dụng để khảo sát các tín hiệu rời rạc $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.8 Mọi hàm gốc của biến đổi Laplace đều tồn tại biến đổi Fourier.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.9 Phép biến đổi Fourier rời rạc áp dụng cho các dãy tín hiệu $\{x(n)\}$ tuần hoàn chu kỳ N.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.10 Phép biến đổi Fourier biến miền thời gian về miền tần số.

Đúng ☐ Sai ☐.

2.11. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau:

a. $\sin^3 t$ **b**. $\cos^4 \omega t$ **c**. $e^{-2t}\operatorname{ch} 3t$

d. $\left(1+te^{-t}\right)^3$ **e**. $\operatorname{ch} 2t\cos t$ **f**. $e^{-t}\sin 2t\cos 4t$.

2.12. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc sau:

a. $t\operatorname{ch}3t$ **b**. $t\cos\omega t\operatorname{ch}at$ **c**. $t^3\sin t$

d. $\dfrac{\sin 4t}{t}$ **e**. $\dfrac{\cos at-\cos bt}{t}$ **f**. $\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$.

2.13. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc:

a. $\eta(t-b)\cos^2(t-b)$ **b**. $x(t)=\begin{cases}(t-1)^2 & \text{nếu } t>1\\ 0 & \text{nếu } 0<t<1\end{cases}$

c. $x(t)=\begin{cases}t & \text{nếu } 0<t<1\\ 2-t & \text{nếu } 1<t<2\\ 0 & \text{nếu } t>2\end{cases}$ **d**. $x(t)=\begin{cases}\cos t & \text{nếu } 0<t<\pi\\ \sin t & \text{nếu } t>\pi\end{cases}$.

2.14. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc:

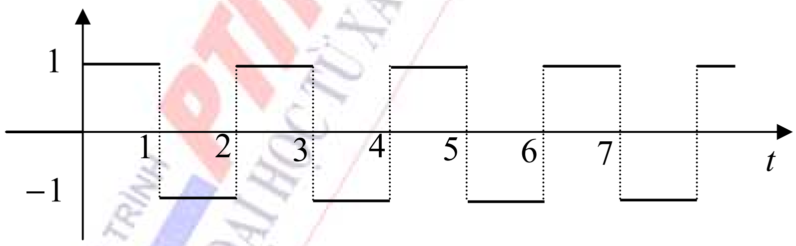
a. $x(t)=\int\limits_0^t\left(u^2-u+e^{-u}\right)du$ **b**. $x(t)=\int\limits_0^t(u+1)\cos\omega u\,du$

c. $x(t)=\int\limits_0^t\cos(t-u)e^{2u}du$ **d** . $x(t)=\int\limits_0^t\dfrac{1-e^{-u}}{u}du$.

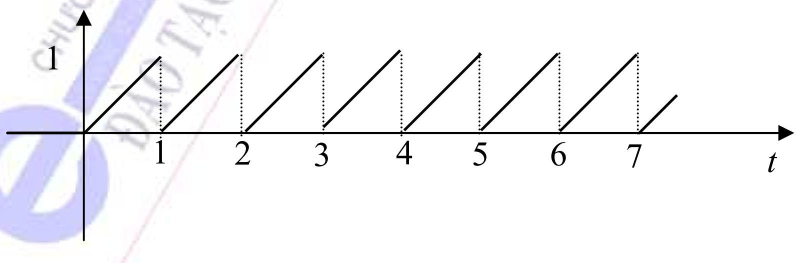
2.15. Chứng minh rằng nếu $X(s)=\mathscr{L}\{x(t)\}$ thì $\mathscr{L}\left\{\int\limits_0^t dt_1\int\limits_0^{t_1}x(u)\,du\right\}=\dfrac{X(s)}{s^2}$.

2.16. Tìm biến đổi Laplace của các hàm gốc tuần hoàn có đồ thị hoặc xác định như sau:

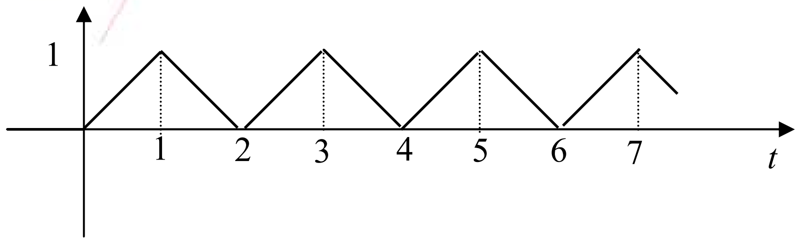
a.



b.



c.



d. $x(t)=\left|\cos t\right|$.

2.17. Sử dung công thức định nghĩa Laplace tính các tích phân sau:

a. $\int_0^\infty t^3 e^{-t}\sin t\,dt$ **b**. $\int_0^\infty \frac{e^{-t}\sin t}{t}\,dt$

c. $\int_0^\infty \frac{\cos 6t-\cos 4t}{t}\,dt$ **d**. $\int_0^\infty \frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}\,dt$

2.18. **a**. Chứng minh rằng biến đổi Laplace $\mathscr{L}\left\{\sin^{2n+1} t\right\}=\dfrac{(2n+1)!}{\left(s^2+1\right)\cdots\left(s^2+(2n+1)^2\right)}$.

b. Chứng minh rằng biến đổi Laplace $\mathscr{L}\left\{\sin^{2n} t\right\}=\dfrac{(2n)!}{s\left(s^2+4\right)\cdots\left(s^2+(2n)^2\right)}$.

2.19. Tìm hàm gốc của các hàm số sau:

a. $\dfrac{s^2}{(s-1)^3}$ **b**. $\dfrac{s+3}{s^2+6s+11}$ **c**. $\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}$

d. $\dfrac{4s+12}{s^2+8s+16}$ **e**. $\dfrac{s^3}{\left(s^2+4\right)^2}$ **f**. $\dfrac{3s+2}{\left(s^2-4s+6\right)^2}$.

2.20. Tìm hàm gốc:

a. $\dfrac{3s+1}{(s-1)\left(s^2+1\right)}$ **b**. $\dfrac{1}{s^3\left(s^3+1\right)}$

c. $\dfrac{s-1}{(s+3)\left(s^2+2s+2\right)}$ **d**. $\dfrac{5s^2-15s-11}{(s+1)(s-2)^2}$

2.21. Tìm hàm gốc:

a. $\dfrac{s^4-9s^3+16s^2-4s+5}{s^5-4s^4+5s^3}$ **b**. $\dfrac{e^{-\frac{s}{3}}}{s(s^2+1)}$ **c**. $\dfrac{1}{\sqrt{2s+3}}$ **d**. $\dfrac{e^{4-3s}}{\sqrt{(s+4)^5}}$.

2.22. Tính: $\int_0^t J_0(u)J_0(t-u)\,du$, $(t>0)$.

2.23. Tìm hàm gốc của hàm ảnh: $\dfrac{e^{-\frac{1}{s}}}{s}$.

2.24. Giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng với các điều kiện đầu:

a. $x''+2x'+x=t^2e^t$, $\quad x(0)=x'(0)=0$.

b. $x'''+3x''+3x'+x=6e^{-t}$, $\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=0$.

c. $x''-x=4\sin t+5\cos 2t$, $\quad x(0)=-1,\ x'(0)=-2$.

d. $x''+9x=\cos 2t$, $\quad x(0)=1,\ x(\pi/2)=-1$.

2.25. Giải các phương trình vi phân tuyến tính hệ số hằng với các điều kiện đầu:

a. $x''+a^2x=f(t)$, $\quad x(0)=1,\ x'(0)=-2$.

b. $x''-a^2x=g(t)$, $\quad x(0)=C_1,\ x'(0)=C_2$.

2.26. Giải hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x'+y'=t \\ x''-y=e^{-t} \end{cases}$ với điều kiện đầu $\begin{cases} x(0)=3,\ x'(0)=-2 \\ y(0)=0 \end{cases}$.

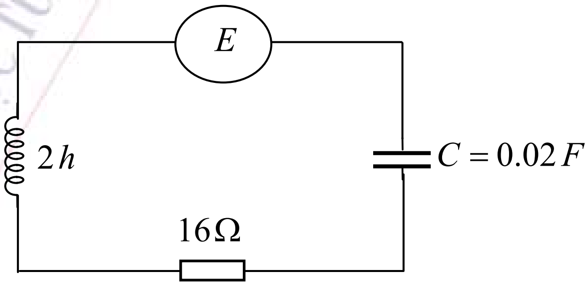
b. $\begin{cases} x'-y'-2x+2y=\sin t \\ x''+2y'+x=0 \end{cases}$ với điều kiện đầu $\begin{cases} x(0)=x'(0)=0 \\ y(0)=0 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} -3x''+3y''=te^{-t}-3\cos t \\ tx''-y'=\sin t \end{cases}$ với điều kiện đầu $\begin{cases} x(0)=-1,\ x'(0)=2 \\ y(0)=4,\ y'(0)=0 \end{cases}$.

2.27. Cho mạch điện như hình vẽ được nối tiến với suất điện động E volts, điện dung 0,02 farads, hệ số tự cảm 2 henry và điện trở 16 Ohms. Tại thời điểm t = 0 điện lượng ở tụ điện và cường độ dòng điện trong mạch bằng 0. Tìm điện lượng và cường độ dòng điện tại thời điểm t nếu:

a. E = 300 (Volts)

b. E = 100 sin3t (Volts)



2.28. Cho mạch điện như hình vẽ:

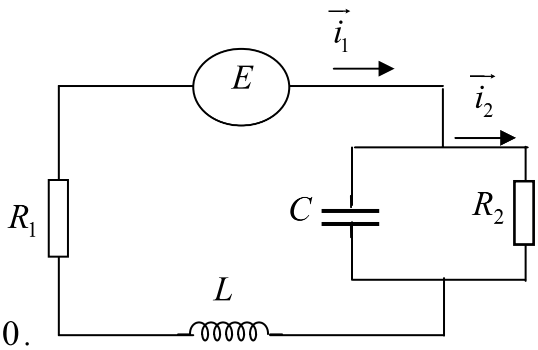
$E=500\,\mathbf{sin}\,10t \qquad L=1\,\text{henry}$

$R_1=10\,\text{ohms} \qquad R_2=10\,\text{ohms}$

$C=0,01$ farad .

Nếu điện thế ở tụ điện và cường độ i_1, i_2 bằng không tại thời điểm $t=0$.

Tìm điện lượng tại tụ điện tại thời điểm $t>0$.



2.29. Cho $x(t)$ là hàm tuần hoàn chu kỳ 10 và $x(t)=\begin{cases} 0 \text{ nếu } & -5<t<0 \\ 3 \text{ nếu } & 0<t<5 \end{cases}$

a. Tìm chuỗi Fourier của $x(t)$.

b. $x(t)$ nhận giá trị bao nhiêu tại $t=-5,0,5$ để chuỗi Fourier hội tụ về $x(t)$ với mọi $t\in[-5;5]$.

2.30. Cho $x(t)=2t,\ 0<t<4$.

a. Tìm khai triển Fourier của $x(t)$ theo các hàm $\sin$.

b. Tìm khai triển Fourier của $x(t)$ theo các hàm $\cos$.

2.31. Cho dãy tín hiệu rời rạc $x(n)=\begin{cases} 1/3^n & n\ge 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$.

a. Tìm biến đổi Z của $x(n)$.

b. Tìm biến đổi Fourier của $x(n)$.

c. Tìm biến đổi Fourier của $y(n)=nx(n)$.

2.32. Tìm biến đổi Fourier ngược của $\hat{X}(f)=\begin{cases} e^{-i2\pi f n_0} & |f|<f_0 \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$

trong trường hợp $f_0=\dfrac{1}{4},\ n_0=4$.

2.33. **a**. Tìm biến đổi Fourier của $x(t)=\begin{cases} 1 \text{ nếu } & -T<t<T \\ 0 \text{ nếu } & |t|>T \end{cases}$

b. Hãy suy ra giá trị của tích phân $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda T\cos\lambda t}{\lambda}d\lambda$.

c. Tính $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$.

d. Áp dụng đẳng thức Parseval cho hàm $x(t)$ ở câu a, suy ra giá trị của tích phân: $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du$.

2.34. Tìm hàm chẵn thỏa mãn phương trình tích phân

$$\int_0^{\infty}x(t)\cos\lambda t\,dt=\begin{cases} 1-\lambda & \text{nếu } 0\le\lambda\le 1 \\ 0 & \text{nếu } \lambda>1 \end{cases}.$$

2.35. Chứng minh rằng $\int_0^\infty \frac{\cos \lambda t}{\lambda^2+1} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-|t|}$.

2.36. Tìm biến đổi Fourier của các hàm số sau:

a. $x(t) = \Pi(t/T)\sin\omega_0 t$.

b. $\Lambda(t/T) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T} & |t| < T \\ 0 & |t| > T \end{cases}$.

2.37. Tìm biến đổi Fourier của các hàm số sau:

a. $x(t) = \begin{cases} e^{-t/T} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$, $T > 0$.

b. $x(t) = e^{-|t|/T}$, $T > 0$.

c. $x(t) = \frac{1}{t^2 + a^2}$, $a > 0$.

d. $x(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{nếu} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{nếu} \quad |t| > 1 \end{cases}$

CHƯƠNG III: CÁC HÀM SỐ VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC BIỆT

GIỚI THIỆU

Ta đã gặp các hàm sơ cấp cơ bản thực và phức, đó là các hàm lượng giác, lượng giác ngược, hàm mũ, hàm lôgarit, hàm đa thức. Các hàm nhận được bằng cách thực hiện một số hữu hạn các phép toán cộng trừ nhân chia, lấy hàm hợp từ các hàm sơ cấp cơ bản được gọi là các hàm sơ cấp. Các hàm không phải sơ cấp gọi là các hàm siêu việt. Trong chương này chúng ta khảo sát các hàm siêu việt đặc biệt thường được sử dụng trong kỹ thuật nói chung và trong ngành điện tử viễn thông nói riêng.

Các hàm này có thể được xét dưới dạng tổng quát hàm biến phức gồm có:

- Các hàm tích phân: Tích phân sin, tích phân cos, tích phân mũ.
- Hàm Gamma, hàm Bêta
- Các hàm xác suất trong đó có hàm xác suất lỗi.
- Các hàm Bessel loại I, loại II là nghiệm của phương trình Bessel.

Đối với mỗi hàm trên ta khảo sát các tính chất của chúng: Biến đổi Laplace, khai triển Mac Laurin và khai triển tiệm cận.

Khai triển Mac Laurin khảo sát dáng điệu của hàm số tại 0, khai triển tiệm cận khảo sát dáng điệu của hàm số tại ∞.

Từ công thức tích phân Lommel của hàm Bessel loại I ta xây dựng hệ trực giao và khai triển Fourier-Bessel của hàm số trên đoạn $[0;1]$.

NỘI DUNG

3.1. KHÁI NIỆM VỀ KHAI TRIỂN TIỆM CẬN HÀM SỐ

3.1.1. Định nghĩa khai triển tiệm cận

Chuỗi hàm

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots \tag{3.1}$$

Trong đó a_i (i = 0, 1, 2,...) là các hằng số phức, gọi là *khai triển tiệm cận của hàm số* $f(z)$ nếu thoả mãn hai điều kiện dưới đây :

- $\lim\limits_{|z|\to\infty} R_n(z) = \lim\limits_{|z|\to\infty} z^n \left\{ f(z) - S_n \right\} = 0$, ($n$ cố định) trong đó : $S_n = a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}$ là *tổng riêng thứ* n chuỗi (3.1)

- $f(z) - S_n$ không dần đến 0 khi $n \to \infty$ với z cố định.

Chuỗi hàm tiệm cận của hàm số $f(z)$ thường ký hiệu

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots$$

$\frac{a_n}{z^n}$ là số *hạng tổng quát thứ* n *của khai triển tiệm cận.*

Chú ý 1: Điều kiện thứ nhất của khai triển tiệm cận có nghĩa là :

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A > 0 : |z| > A$; n cố định thì $\left| z^n \{ f(z) - S_n(z) \} \right| \langle \varepsilon$

Chú ý 2: Nhờ vào khai triển tiệm cận có thể tính gần đúng giá trị của những hàm số đặc biệt.

Ví dụ 3.1: Cho hàm số $f(x) = \int_x^\infty t^{-1} e^{x-t} dt \quad , (x > 0)$

Bằng cách lặp lại các tích phân từng phần sẽ nhận được

$$f(x) = -\frac{1}{t} e^{x-t} \Big|_x^\infty - \int_x^\infty t^{-2} e^{x-t} dt = \frac{1}{x} - \int_x^\infty t^{-2} e^{x-t} dt = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + 2! \int_x^\infty t^{-3} e^{x-t} dt$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n} + (-1)^n x^n \int_x^\infty t^{-n-1} e^{x-t} dt$$

Xét tổng riêng: $S_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$

$$0 < \left| f(x) - S_n(x) \right| = n! \int_x^{+\infty} t^{-n-1} e^{x-t} dt = \frac{n!}{x^{n+1}} - (n+1)! \int_x^\infty t^{-n-2} e^{x-t} dt < \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Suy ra: $|R_n(x)| < \frac{n!}{x^{n+1}}$.

Với n cố định thì $\lim\limits_{x \to \infty} x^n R_n(x) = 0$ chứng tỏ $S_n(x)$ là tổng riêng của khai triển tiệm cận hàm số $f(x)$ mặc dù biết rằng chuỗi hàm phân kỳ với mọi giá trị của x. Chúng ta hãy tính $f(10)$. Số hạng tổng quát là $\frac{(-1)^n n!}{10^{n+1}}$ có giá trị tuyệt đối giảm theo n từ 1 đến 10 và sau đó tăng lên vô hạn.

Theo đánh giá trên $\left|f(x)-S_n(x)\right|<\dfrac{n!}{x^{n+1}}$

nên có thể coi $f(10)\approx S_{10}$ và $\left|f(10)-S_{10}\right|<\dfrac{10!}{10^{11}}=0{,}0000362$

Bảng số dưới đây cho thấy sự giảm và tăng của dãy tổng riêng:

$S_1 = 0{,}1$	$S_6 = 0{,}091720$	$S_{11} = 0{,}091782$	$S_{16} = 0{,}091685$
$S_2 = 0{,}09$	$S_7 = 0{,}091792$	$S_{12} = 0{,}091743$	$S_{17} = 0{,}091895$
$S_3 = 0{,}092$	$S_8 = 0{,}091742$	$S_{13} = 0{,}091791$	$S_{18} = 0{,}091545$
$S_4 = 0{,}0916$	$S_9 = 0{,}091782$	$S_{14} = 0{,}091729$	$S_{19} = 0{,}092185$
$S_5 = 0{,}09184$	$S_{10} = 0{,}091746$	$S_{15} = 0{,}091816$	

Chú ý 3: Hàm số f(z) khai triển tiệm cận trên miền D thì khai triển là duy nhất trên miền D. Thật vậy:

$$a_0=\lim_{|z|\to\infty}f(z),\ a_1=\lim_{|z|\to\infty}\left\{f(z)-a_0\right\},\ a_2=\lim_{|z|\to\infty}\left\{f(z)-a_0-\frac{a_1}{z}\right\},\dots \qquad \textbf{(3.2)}$$

Tuy nhiên hai hàm khác nhau có thể có cùng một khai triển tiệm cận. Chẳng hạn hàm số $f_1(z)$ và $f_2(z)=f_1(z)+e^{-\alpha|z|}$, Re$\alpha$ > 0 có cùng một khai triển tiệm cận vì các hệ số a_i (i = 0,1...) của hàm $e^{-\alpha|z|}$ tính theo công thức (3.2) đều bằng không.

3.1.2. Tính chất

Cho $f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{z^n},\quad g(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{b_n}{z^n}$

Định lý 3.1: Số hạng tổng quát thứ n của khai triển tiệm cận hàm số $\alpha f(z)+\beta g(z)$ (α, β = const) có dạng: $\dfrac{\alpha a_n+\beta b_n}{z^n}$

Định lý 3.2: Số hạng tổng quát thứ n của khai triển tiệm cận hàm $f(z)\cdot g(z)$ có dạng :

$$\frac{1}{z^n}\sum_{k=0}^{n}a_k.b_{n-k}$$

Định lý 3.3: Nếu hàm $\Psi(w)$ khai triển thành chuỗi luỹ thừa có bán kính hội tụ là R (tức là hội tụ khi $|w|<R$) thì khai triển tiệm cận hàm hợp $\varphi(z)=\Psi(f(z))$ nhận được bằng cách đặt trực tiếp khai triển tiệm cận hàm $w=f(z)$ với điều kiện $|a_0|<R$ vào chuỗi luỹ thừa của hàm $\Psi(w)$.

Định lý 3.4: Nếu $f(z)$ và $f'(z)$ có thể khai triển tiệm cận thì khai triển của $f'(z)$ nhận được bằng cách lấy đạo hàm từng từ của khai triển $f(z)$.

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \quad \Rightarrow \quad f'(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-na_n}{z^{n+1}}$$

Định lý 3.5 : Nếu $f(z)$ có khai triển tiệm cận và $a_0 = a_1 = 0$ thì khai triển tiệm cận hàm số $\int_z^{\infty} f(z)dz$ nhận được bằng cách lấy tích phân từng từ của khai triển hàm số $f(z)$.

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \quad \Rightarrow \quad \int_z^{\infty} f(z)dz \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)z^{n-1}}.$$

Chú ý 4: Giả sử $f(z)$ không thể khai triển tiệm cận, tuy nhiên tồn tại hàm số $g(z)$ mà tỉ số $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ có thể khai triển tiệm cận $\quad \dfrac{f(z)}{g(z)} \sim a_0 + \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \cdots$

khi đó thường viết : $\quad f(z) \sim g(z)\left\{a_0 + \dfrac{a_1}{z} + \dfrac{a_2}{z^2} + \cdots\right\}$

Gọi tích $a_0 g(z)$ là phần chính biểu diễn tiệm cận hàm số $f(z)$.

3.2. CÁC HÀM SỐ TÍCH PHÂN

3.2.1. Định nghĩa các hàm số tích phân

1. $\mathrm{Ei}(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x > 0$ đọc là hàm *tích phân mũ* của x. **(3.2)**

2. $\mathrm{Si}(x) = \int_0^{x} \frac{\sin t}{t} dt, \quad x > 0$ đọc là hàm *tích phân sin* của x. **(3.3)**

3. $\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt, \quad x > 0$ đọc là hàm *tích phân cosin* của x. **(3.4)**

Ngoài ra ký hiệu:

$$\mathrm{si}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{cũng đọc là tích phân sin của x..} \tag{3.5}$$

Vì $\quad \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ suy ra $\quad \mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} + \mathrm{si}(x)$.

3.2.2. Khai triển thành chuỗi luỹ thừa và biến đổi Laplace của các hàm tích phân

$$\frac{\sin t}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \Rightarrow \mathrm{Si}(x) = \int_0^{x} \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} \tag{3.6}$$

Biến đổi Laplace: $\mathscr{L}\{\mathrm{Ei}(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)dt$, đổi biến số $v = \frac{u}{t} \Rightarrow dv = \frac{du}{t}$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\{\mathrm{Ei}(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_1^\infty \frac{e^{-tv}}{v}dv\right)dt = \int_1^\infty \frac{1}{v}\left(\int_0^\infty e^{-st}e^{-vt}dt\right)dv = \int_1^\infty \frac{1}{v}\left(\frac{1}{v+s}\right)dv = \frac{\ln(s+1)}{s}$$

Tương tự $\mathscr{L}\{\mathrm{Ci}(t)\} = -\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_t^\infty \frac{\cos u}{u}du\right)dt = -\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_1^\infty \frac{\cos tv}{v}dv\right)dt = -\frac{\ln\left(s^2+1\right)}{2s}$

Áp dụng phép biến đổi Laplace có thể khai triển hàm $\mathrm{Ei}(x)$ và $\mathrm{Ci}(x)$ như sau :

$$\mathrm{Ei}(x) = -\ln x - \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}; \quad \mathrm{Ci}(x) = \ln x + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!2n}. \tag{3.7}$$

trong đó:

$$\gamma = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+....+\frac{1}{m}-\ln m\right) \text{ gọi là hằng số Euler.} \tag{3.8}$$

Mặt khác, vì $\cos t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}$ nên $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!2n} = -\int_0^x \frac{1-\cos t}{t}dt$. Vậy:

$$\mathrm{Ci}(x) = \ln x + \gamma - \int_0^x \frac{1-\cos t}{t}dt \tag{3.9}$$

Với x khá bé (ký hiệu $|x| << 1$) sẽ nhận được các công thức sấp xỉ như sau :

$$\mathrm{Si}(x) \sim x,\ \mathrm{Ci}(x) \sim \gamma + \ln x,\ \mathrm{Ei}(x) \sim -\gamma - \ln x.$$

3.2.3. Khai triển thành chuỗi tiệm cận

$$\mathrm{Ci}(x) + i\,\mathrm{si}(x) = -\int_x^\infty \frac{e^{it}}{t}dt$$

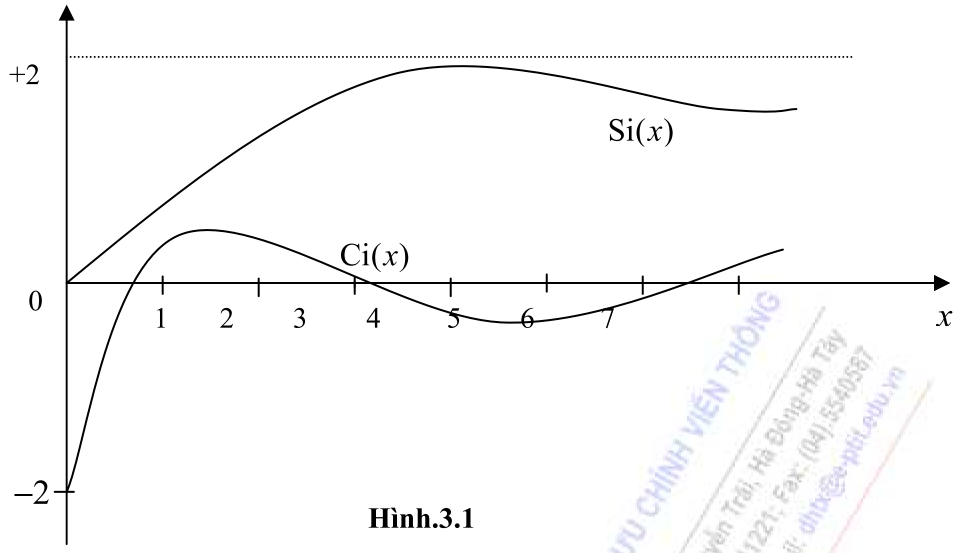
Lặp lại các tích phân từng phần và so sánh các phần thực, phần ảo tương ứng nhận được:

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}(x) &\sim \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\sin x}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}\\ \mathrm{Ci}(x) &\sim \frac{\sin x}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{x^{2n}} - \frac{\cos x}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}}\end{aligned} \tag{3.10}$$

Các công thức gần đúng cho phép xác định các giá trị $\mathrm{Si}(x)$ và $\mathrm{Ci}(x)$.

Đồ thị của các hàm $\mathrm{Si}(x)$ và $\mathrm{Ci}(x)$ cho trên hình 3.1.

S



Hình.3.1

3.3. HÀM GAMMA

3.3.1. Định nghĩa hàm Gamma (Gauss)

Hàm số Gamma, ký hiệu $\Gamma(z)$, là hàm số biến số phức xác định với mọi $z \neq 0, -1, -2, \cdots$ cho bởi biểu thức:

$$\Gamma(z) = \lim_{m\to\infty} \frac{m!m^z}{z(z+1)(z+2)...(z+m)} \tag{3.11}$$

Định lý 3.6: Hàm gamma có các dạng sau đây:

1. Công thức Weierstrass:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}.\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}} \tag{3.12}$$

trong đó γ là hằng số Euler, thường lấy gần đúng $\gamma \approx \frac{1}{2}(\sqrt[3]{10}-1) = 0{,}5772173$

2. Công thức Euler:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt \qquad \text{nếu } \operatorname{Re} z > 0 \tag{3.13}$$

3.3.2. Các tính chất của hàm Gamma

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ **(3.14)**

2. $\Gamma(1) = \lim_{m\to\infty} \frac{m.m!}{1.2...(m+1)} = 1$. **(3.15)**

3. Với $z = n \in \mathbb{N}$ thì $\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1) = n!$ **(3.16)**

4. $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$, $\forall z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ **(3.17)**

Trong (3.17) thay z bởi $z+\dfrac{1}{2}$ ta nhận được:

5. $$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right)=\frac{\pi}{\cos\pi z}\,,\ \forall z\neq\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{5}{2},... \qquad \textbf{(3.18)}$$

6. $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \qquad \textbf{(3.19)}$$

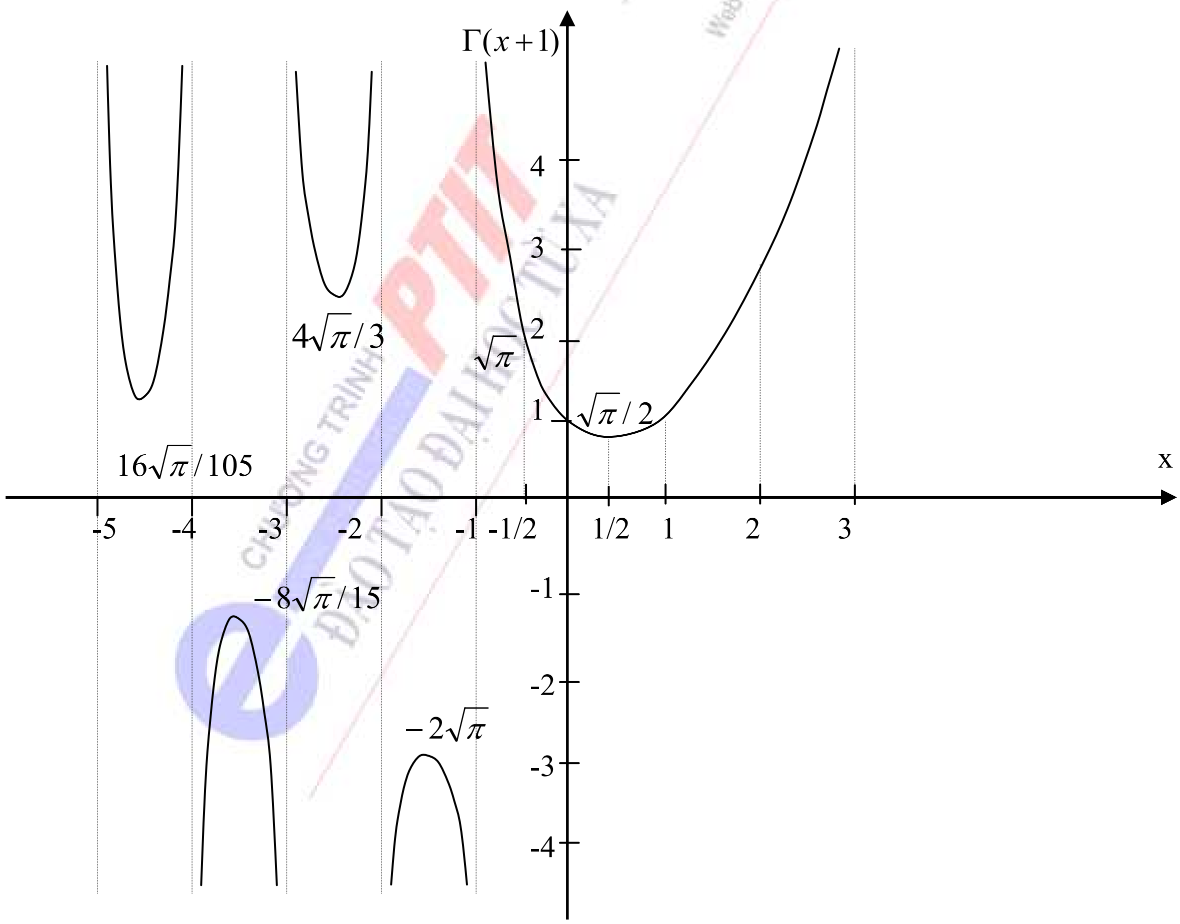
7. Từ công thức định nghĩa (3.11) suy ra: $\Gamma(-n)=\pm\infty$ với $n\in\mathbb{N}$.

8. $$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \qquad \textbf{(3.20)}$$

Đặt $z=n$ vào (3.18), từ (3.20) suy ra:

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(-2)^n}{(2n-1)!!}\sqrt{\pi} \qquad \textbf{(3.21)}$$

Đồ thị hàm số Gamma với z là số thực cho trên hình 3.2 (theo công thức (3.11)).



Hình 3.2

Ví dụ 3.2: Tính $\Gamma(5/2)$; $\Gamma(3/4)\Gamma(5/4)$.

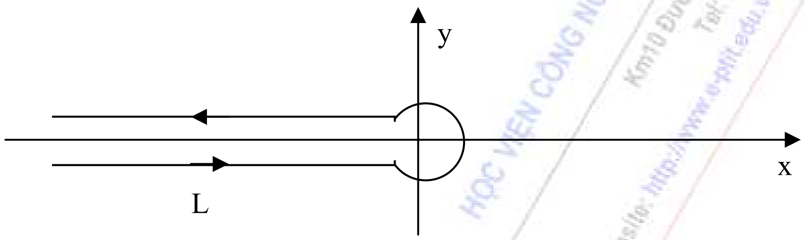
Giải: $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$$

3.3.3. Biểu diễn hàm Gamma qua tích phân Cauchy

Xét tích phân: $I=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{e^z\,dz}{z^{\alpha+1}}$

Chu tuyến L gồm đường tròn tâm ở gốc toạ độ với bán kính đủ bé và hai nhánh chạy dọc theo phần âm của trục thực.



Gọi I_1 là tích phân theo đường tròn $z=re^{i\varphi}$: $I_1=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)-i\alpha.\varphi}.r^{-\alpha}d\varphi$.

Nếu $\mathrm{Re}\,\alpha<0$ thì $I_1\to 0$ khi $r\to 0$

Gọi I_2 là tích phân theo nửa đường dưới $z=xe^{-i\pi}$: $I_2=-\dfrac{e^{\alpha\pi i}}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{x^{\alpha+1}}dx$

Gọi I_3 là tích phân theo nửa đường trên $z=xe^{i\pi}$: $I_3=\dfrac{e^{-\alpha\pi i}}{2\pi i}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{e^{-x}}{x^{\alpha+1}}dx$

Suy ra $I=I_2+I_3=-\dfrac{\sin\pi\alpha}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-x}x^{-\alpha-1}dx=-\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\Gamma(-\alpha)$

Theo công thức (3.17): $-\dfrac{\sin\pi\alpha}{\pi}\Gamma(-\alpha)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$

Mặt khác $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{e^z dz}{z^{\alpha+1}}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^z dz}{z^{\alpha+1}}$ trong đó C là đường khép kín bao quanh O. Do đó:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^z dz}{z^{\alpha+1}} \qquad \textbf{(3.22)}$$

3.3.4. Liên hệ giữa hàm Beta và hàm Gamma

Định nghĩa 3.1: *Hàm số biểu diễn dưới dạng tích phân phụ thuộc hai tham số thực* $p,q>0$

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \tag{3.23}$$

gọi là hàm Beta hay là tích phân Euler loại 1.

Hàm Gamma gọi là tích phân Euler loại 2.

Tính chất:

1. $B(p,q)=B(q,p)$. **(3.24)**

2. Đặt $x=\cos^2\theta$ khi đó:

$$B(p,q)=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta \tag{3.25}$$

3. $$B(m,n)=\frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \tag{3.26}$$

Ví dụ 3.3: Tính tích phân $I=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{tg\theta}}=\int_0^{\pi/2}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\sin^{-\frac{1}{2}}\theta d\theta$

$$=\frac{1}{2}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma(1)}=\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

3.4. CÁC TÍCH PHÂN XÁC SUẤT

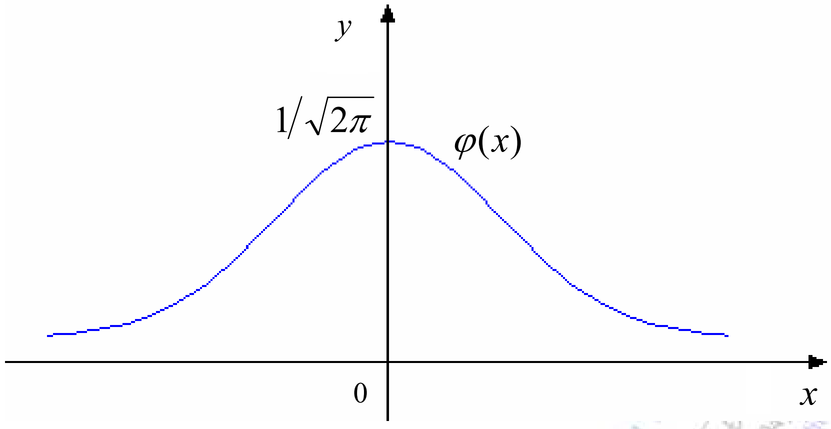
3.4.1. Định nghĩa hàm lỗi

Tích phân phụ thuộc cận trên:

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt \tag{3.27}$$

xác định một hàm số của biến số x *được gọi là hàm lỗi (error function).*

Hàm mật độ của phân bố chuẩn tắc $N(0,1)$: $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ gọi là hàm Gauss. Đồ thị của hàm Gauss được cho trên hình 3.3:



Hình 3.3

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đồ thị hàm số Gauss bằng đơn vị, thật vậy:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Đặt $x^2 = 2u \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm Gauss, nửa trục hoành bên trái tính từ điểm có hoành độ x sẽ là:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \tag{3.28}$$

Đây là hàm phân bố chuẩn tắc $N(0;1)$.

Đặt $u = t\sqrt{2}$ vào (3.27) sẽ có: $\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$, mà $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2}$.

Vậy
$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 2\Phi(x) \tag{3.29}$$

Các hàm $\operatorname{erf}(x)$ và $\Phi(x)$ đóng vai trò rất quan trọng trong lý thuyết xác suất, đặc biệt thường được sử dụng khi phân tích các nhiễu tín hiệu.

3.4.2. Khai triển luỹ thừa của hàm lỗi

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!} \Rightarrow \int_0^{x} e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)} + \cdots \right] \tag{3.30}$$

Chuỗi ở vế phải hội tụ với mọi x.

3.4.3. ***Chuỗi tiệm cận của hàm đối lỗi*** **(complementary error function)**

Hàm đối lỗi được định nghĩa và ký hiệu:

$$\operatorname{erfc}(x)=1-\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^\infty e^{-t^2}dt-\int_0^x e^{-t^2}dt\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}dt\,. \tag{3.31}$$

Đặt $u=t^2$ thì $\operatorname{erfc}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{x^2}^{\infty}e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\infty}^{x^2}u^{-\frac{1}{2}}de^{-u}$

Sau khi lặp lại các tích phân từng phần nhận được:

$$\operatorname{erfc}(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-u}.u^{-\frac{1}{2}}\Big|_\infty^{x^2}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_\infty^{x^2}u^{-\frac{2}{3}}de^{-u}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{e^{-x^2}}{x}-\frac{e^{-x^2}}{2x^3}+\frac{1.3}{2^2}.\int_\infty^{x^2}u^{-\frac{5}{2}}de^{-u}\right)$$

$$\operatorname{erfc}(x)\approx\frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}\left\{1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1.3}{2^2.x^4}-\frac{1.3.5}{2^3.x^6}+\ldots(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}x^{2n-2}}\right\} \tag{3.32}$$

3.4.4. Biểu diễn hàm $\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\right)$ qua tích phân Cauchy

Trong công thức (3.32) thay x bởi $\frac{x}{2}$ nhận được

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\right)=1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!2^{2n+1}(2n+1)}$$

Từ công thức (3.21) với $n\in\mathbb{N}$ có $\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}=\begin{cases}1 & \text{nếu } r=0\\ \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{\sqrt{\pi}.2^n} & \text{nếu } r=2n+1\\ 0 & \text{nếu } r=2n\end{cases}$

Suy ra: $$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^r}{r!\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}$$

Từ công thức (3.23) thay $\alpha=-\frac{r}{2}$ sẽ có: $\frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{r}{2}\right)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^z dz}{z^{1-r/2}}$

Từ đó nhận được:

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^z}{z}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(x\sqrt{z}\right)^r}{r!}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{z-x\sqrt{z}}}{z}dz \tag{3.33}$$

Chu tuyến C xác định ở 3.3.3.

3.5. CÁC HÀM BESSEL

3.5.1. Các hàm Bessel loại 1 và loại 2

3.5.1.1. Phương trình Bessel

Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+(1-\frac{\alpha^2}{z^2})y=0 \tag{3.34}$$

Gọi là phương trình Bessel ứng với tham số α, dưới đây thường xét với $\alpha\in\mathbb{R}$ và thường gọi là phương trình Bessel cấp $\alpha\ge 0$.

Nghiệm riêng của phương trình (3.34) gọi là hàm Bessel cấp α. Rõ ràng nếu $J_\alpha(z)$ và $Y_\alpha(z)$ là hai nghiệm độc lập tuyến tính của (3.34) thì nghiệm tổng quát của nó có dạng

$$y(z)=AJ_\alpha(z)+BY_\alpha(z)=Z_\alpha(z) \tag{3.35}$$

Trong đó A, B là các hằng số tuỳ ý.

3.5.1.2. Hàm Bessel loại 1

Ta tìm nghiệm của phương trình (3.34) theo phương pháp Frobenius bằng cách xét các nghiệm dưới dạng chuỗi:

$$y(z)=z^\rho\sum_{r=0}^{\infty}a_r z^r\,,\quad a_0\ne 0\,.$$

Thay vào phương trình (3.34) và đồng nhất hệ số suy ra các hằng số ρ và a_r (r = 0,1,2...) thoả mãn các phương trình

$$\begin{cases}(\rho^2-\alpha^2)a_0=0\\ \left((\rho+1)^2-\alpha^2\right)a_1=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \left((\rho+r)^2-\alpha^2\right)a_r+a_{r-2}=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{cases} \tag{3.36}$$

Giả sử $a_0\ne 0$ khi đó $\rho=\pm\alpha$

1. Trường hợp thứ nhất: $\rho=\alpha$

$$(\rho+r)^2-\alpha^2=(\alpha+r)^2-\alpha^2=(2\alpha+r)r$$

$$\Rightarrow\quad a_r=\frac{-a_{r-2}}{r(2\alpha+r)}\quad \forall r\ne 0 \tag{3.37}$$

$$\Rightarrow\quad a_{2r+1}=0\ \forall r=0,\,1,\,2,\ldots \text{ và } a_{2r}=a_0\frac{(-1)^r}{2^{2r}r(1+\alpha)(2+\alpha)\ldots(r+\alpha)},\quad a_0 \text{ tuỳ ý.}$$

Lấy $a_0 = \dfrac{1}{2^{\alpha}\Gamma(1+\alpha)}$ và biết rằng: $\Gamma(1+r+\alpha) = (1+\alpha)(2+\alpha)...(r+\alpha)\Gamma(r+\alpha)$

Suy ra:

$$y(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(\alpha+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} \equiv J_{\alpha}(z) \qquad \textbf{(3.38)}$$

Nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}$ thì:

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{n} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(r+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} \qquad \textbf{(3.39)}$$

Đặc biệt

$$J_0 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} \qquad \textbf{(3.40)}$$

2. Trường hợp thứ hai: $\rho = -\alpha$

$$(\rho+r)^2 - \alpha^2 = (-\alpha+r)^2 - \alpha^2 = (-2\alpha+r)r$$

Các hệ số chẵn liên hệ theo công thức

$$2r(2r-2\alpha)a_{2r} + a_{2r-2} = 0 \qquad \textbf{(3.41)}$$

Các hệ số lẻ thoả mãn

$$(2r+1)(2r+1-2\alpha)a_{2r+1} + a_{2r-1} = 0.$$

a) Nếu $\alpha \neq \dfrac{2k+1}{2}$, $k \in \mathbb{N}$ thì $a_{2r+1} = 0$ với mọi r, khi đó tương tự như trên, chọn a_0 thích hợp sẽ có

$$y(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(r+1-\alpha)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2r} \equiv J_{-\alpha}(z) \qquad \textbf{(3.42)}$$

b) Nếu $\alpha = \dfrac{2k+1}{2}$, $k \in \mathbb{N}$ *(cấp bán nguyên)* thì hệ số lẻ $a_{2r+1} = 0$ với mọi chỉ số $r < k$ và hệ số lẻ a_{2r+1} có thể khác không khi $r \geq k$. Tuy nhiên nếu ta chọn các hệ số lẻ đều bằng không và chọn a_0 thích hợp vẫn được nghiệm có dạng (3.42).

Gọi $J_{\alpha}(z)$ và $J_{-\alpha}(z)$ là các hàm Bessel loại 1.

Định lý 3.7:

1. Nếu α không phải là số tự nhiên thì $J_{\alpha}(z)$ và $J_{-\alpha}(z)$ độc lập tuyến tính.

Trong trường hợp này nghiệm tổng quát của (3.34) có dạng: $Z_{\alpha}(z) = AJ_{\alpha}(z) + BJ_{-\alpha}(z)$.

2. Nếu $\alpha = n \in \mathbb{N}$ thì $J_n(z)$ và $J_{-n}(z)$ phụ thuộc tuyến tính, hơn nữa

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \tag{3.43}$$

3.5.1.3. Hàm Bessel loại 2

Xét hàm số

$$Y_\alpha(z) = \begin{cases} \dfrac{\cos\pi\alpha . J_\alpha(z) - J_{-\alpha}(z)}{\sin\pi\alpha} & \text{nếu } \alpha \neq n \\ \lim\limits_{\beta\to n} Y_\beta(z) & \text{nếu } \alpha = n \end{cases} \tag{3.44}$$

cũng là nghiệm của phương trình Bessel (3.34), được gọi là *hàm Bessel loại 2*.

Áp dụng quy tắc De L'Hospital nhận được

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_n(z)}{\partial n} - (-1)^n \frac{\partial J_{-n}(z)}{\partial n}\right] \tag{3.45}$$

Nhờ vào công thức đạo hàm của hàm số $\ln\Gamma(z)$ nhận được kết quả sau:

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\frac{z}{2}\right)J_n(z) - \frac{1}{\pi}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-r-1)!}{r!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2r} - \frac{1}{\pi}\sum_{r=c}^{\infty}(-1)^r\frac{S_{nr}}{r!(n+r)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r+n} \tag{3.46}$$

trong đó:
$$S_{nr} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{r} + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{r+n}, \; r \neq 0 \tag{3.47}$$

$$S_{no} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}. \tag{3.48}$$

Với mọi α, các hàm $J_\alpha(z)$ và $Y_\alpha(z)$ là độc lập tuyến tính.

Theo lý thuyết của phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất cấp 2:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + p(z)\frac{dy}{dz} + q(z)y = 0.$$

Nếu biết $y_1(z)$ là một nghiệm thì ta có thể tìm nghiệm độc lập tuyến tính với $y_1(z)$ theo công thức: $y_2(z) = y_1\int\frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(z)dz}dz$.

Vì vậy với trường hợp phương trình Bessel cấp n nguyên, ta có thể tìm nghiệm độc lập với $J_n(z)$ theo công thức:

$$y(z) = J_n(z)\left(A + B\int\frac{dz}{zJ_n^2(z)}\right)$$

Chọn A, B thích hợp sẽ được hàm số $Y_n(z)$ cho bởi (3.46). Hàm số $Y_n(z)$ gọi là *hàm Weber*.

Đôi khi còn sử dụng hàm số độc lập tuyến tính với $J_\alpha(z)$ theo công thức:

$$N_\alpha(z) = \frac{1}{2}\pi Y_\alpha(z) + (\ln 2 - \gamma) J_\alpha(z) \quad \textbf{(3.49)}$$

Gọi là *hàm số Neumann.*

Gọi $Y_\alpha(z)$, $N_\alpha(z)$ *là các hàm Bessel loại 2.*

3.5.2. Các công thức truy toán đối với hàm Bessel

Các công thức sau đúng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ (kể cả trường hợp $\alpha < 0$):

1. $J_{\alpha+1}(z) = \frac{2\alpha}{z} J_\alpha(z) - J_{\alpha-1}(z)$. **(3.50)**

2. $zJ'_\alpha(z) = \alpha J_\alpha(z) - zJ_{\alpha+1}(z)$. **(3.51)**

$\alpha = 0 \Rightarrow J'_0(z) = -J_1(z)$. Chứng tỏ các không điểm của $J_1(z)$ làm cho $J_0(z)$ đạt cực đại hoặc cực tiểu.

3. $J'_\alpha(z) = \frac{1}{2}\left[J_{\alpha-1}(z) - J_{\alpha+1}(z)\right]$. **(3.52)**

4. $zJ'_\alpha(z) = zJ_{\alpha-1}(z) - \alpha J_\alpha(z)$. **(3.53)**

5. $\frac{d}{dz}\left(z^\alpha J_\alpha(z)\right) = z^\alpha J_{\alpha-1}(z)$. **(3.54)**

6. $\frac{d}{dz}\left(z^{-\alpha} J_\alpha(z)\right) = -z^{-\alpha} J_{\alpha+1}(z)$. **(3.55)**

7. $\int\limits_{z_0}^{z} z^\alpha J_{\alpha-1}(z)dz = \int\limits_{z_0}^{z} \frac{d}{dz}\left(z^\alpha J_\alpha(z)\right)dz = z^\alpha J_\alpha(z)\Big|_{z_0}^{z}$. **(3.56)**

$\int\limits_{z_0}^{z} z^{-\alpha} J_{\alpha+1}(z)dz = -\int\limits_{z_0}^{z} \frac{d}{dz}\left(z^{-\alpha} J_\alpha(z)\right)dz = -z^{-\alpha} J_\alpha(z)\Big|_{z_0}^{z}$. **(3.57)**

8. $\int\limits_0^z J_\alpha(z)dz = 2\left[J_{\alpha+1}(z) + J_{\alpha+3}(z) + \dots\right] = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty} J_{\alpha+2k+1}(z)$. **(3.58)**

Đặc biệt $\int\limits_0^z J_0(z)dz = 2\left[J_1(z) + J_3(z) + \dots\right] = 2\sum\limits_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(z)$. **(3.59)**

9. Với mọi số nguyên dương $m \in \mathbb{Z}_+^*$ đặt: $I_m = \int\limits_0^z z^m J_m(z)dz$ thì

$$I_m = -z^m J_{m-1}(z) + (2m-1) I_{m-1}. \quad \textbf{(3.60)}$$

10. Với mọi cặp số tự nhiên $m, n \in \mathbb{N}$, $n < m$ đặt: $I_{m,n} = \int\limits_0^z z^m J_n(z)dz$ thì

$$I_{m,n} = z^m J_{n+1}(z) - (m-n-1) I_{m-1,n+1}. \qquad \textbf{(3.61)}$$

3.5.3. Các tích phân Lommel

Định lý 3.8:

$$\int_0^z J_\alpha(kz) J_\alpha(lz) z dz = \frac{z}{k^2 - l^2}\left\{ k J_\alpha(lz) J_{\alpha+1}(kz) - l J_\alpha(kz) J_{\alpha+1}(lz) \right\},\ k^2 \neq l^2. \qquad \textbf{(3.62)}$$

$$\int_0^z J_\alpha(kz) J_\alpha(lz) z dz = \frac{z}{k^2 - l^2}\left\{ l J_{\alpha-1}(lz) J_\alpha(kz) - k J_{\alpha-1}(kz) J_\alpha(lz) \right\},\ k^2 \neq l^2. \qquad \textbf{(3.63)}$$

$$\int_0^z z J_\alpha^2(kz) dz = \frac{1}{2} z^2 \left\{ J'^2_\alpha(kz) + \left(1 - \frac{\alpha^2}{k^2 z^2}\right) J_\alpha^2(kz) \right\}. \qquad \textbf{(3.64)}$$

3.5.4. Quan hệ giữa hai hàm Bessel với cấp hơn kém nhau một số nguyên

Từ công thức (3.55) suy ra: $z^{-\alpha-1} J_{\alpha+1}(z) = -\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[z^{-\alpha} J_\alpha(z) \right]$

Thay α bởi $\alpha+1$ vào công thức trên sẽ có:

$$z^{-\alpha-2} J_{\alpha+2}(z) = -\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left\{ z^{-\alpha-1} J_{\alpha+1}(z) \right\} = -\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left\{ -\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left[z^{-\alpha} J_\alpha(z) \right] \right\}$$

hay
$$z^{-\alpha-2} J_{\alpha+2}(z) = (-1)^2 \frac{d^2}{(zdz)^2}\left\{ z^{-\alpha} J_\alpha(z) \right\}$$

....

$$z^{-\alpha-n} J_{\alpha+n}(z) = (-1)^n \frac{d^n}{(zdz)^n}\left\{ z^{-\alpha} J_\alpha(z) \right\} \qquad \textbf{(3.65)}$$

Tương tự từ công thức (3.54) nhận được

$$z^{\alpha-1} J_{\alpha-1}(z) = \frac{d}{dz}\left[z^\alpha J_\alpha(z) \right]$$

$$z^{\alpha-n} J_{\alpha-n}(z) = \frac{d^n}{(zdz)^n}\left[z^\alpha J_\alpha(z) \right] \qquad \textbf{(3.66)}$$

3.5.5. Khai triển theo chuỗi các hàm Bessel

3.5.5.1. Nghiệm của hàm Bessel

Chúng ta xét nghiệm của phương trình $J_\alpha(x) = 0$ với $x \in \mathbb{R}$ và $\alpha > -1$.

Định lý 3.9: Tất cả các nghiệm của $J_\alpha(x) = 0$ đều thực.

Định lý 3.10: Các nghiệm $x > 0$ của $J_\alpha(x) = 0$ và $J_{\alpha+1}(x) = 0$ xen kẽ nhau.

3.5.5.2. Khai triển Fourier - Bessel

Định lý 3.11: Dãy hàm $\left\{\sqrt{x}J_{\alpha}\left(\lambda_i x\right)\right\},\ i=1,\ 2,\ 3,\ldots$ trực giao trên $[0;\ 1]$ trong đó $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_i,\ldots$ là nghiệm của phương trình $J_{\alpha}(x)=0$.

Định nghĩa 3.2: *Nếu hàm số f(x) biểu diễn dưới dạng*

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i J_{\alpha}(\lambda_i x) \tag{3.67}$$

thì nói rằng hàm số đó khai triển được thành chuỗi Fourier - Bessel.

Từ định lý 3.11 suy ra rằng, nếu $f(x)$ khai triển thành chuỗi Fourier - Bessel thì các hệ số của chuỗi đó tính theo công thức:

$$a_i=\frac{2}{J'^2_{\alpha}(\lambda_i)}\int_0^1 x.f(x).J_{\alpha}(\lambda_i x)dx\ ;\quad i=1,\ 2,\ \ldots \tag{3.68}$$

Gọi đó là các hệ số Fourier - Bessel.

Ví dụ 3.4: Hãy khai triển hàm số $f(x)=1$ thành chuỗi Fourier-Bessel trong khoảng $(0;\ 1)$ theo hệ các hàm $\sqrt{x}J_o(\lambda_i x),\ i=1,2\ldots$.

Theo (3.68) sẽ có: $a_i=\dfrac{2}{J'^2_0(\lambda_i)}\displaystyle\int_0^1 xJ_0(\lambda_i x)dx$

$$=\frac{2}{\lambda_i^2 J_1^2(\lambda_i)}\int_0^1 \lambda_i x J_0(\lambda_i x)d(\lambda_i x)=\frac{2}{\lambda_i^2 J_1^2(\lambda_i)}\int_0^{\lambda_i} xJ_0(x)dx=\frac{2}{\lambda_i J_1(\lambda_i)}\ ;\ i=1,\ 2,\ \ldots$$

Vậy $\quad f(x)=1=\dfrac{2J_0(\lambda_1 x)}{\lambda_1 J_1(\lambda_1)}+\dfrac{2J_0(\lambda_2 x)}{\lambda_2 J_1(\lambda_2)}+\dfrac{2J_0(\lambda_3 x)}{\lambda_3 J_1(\lambda_3)}+\cdots+\dfrac{2J_0(\lambda_i x)}{\lambda_i J_1(\lambda_i)}+\cdots$

3.5.6. Các hàm Bessel loại 1 và loại 2 với cấp bán nguyên

Xét phương trình Bessel với cấp bán nguyên $\alpha=\dfrac{1}{2}$, tức là phương trình có dạng:

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{1}{4z^2}\right)y=0. \tag{3.69}$$

Đặt $y=uz^{-1/2}$, dẫn phương trình về dạng: $\dfrac{d^2u}{dz^2}+u=0$.

Phương trình này cho nghiệm tổng quát $u=A\cos z+B\sin z$.

Do đó: $y=\dfrac{1}{\sqrt{z}}(A\cos z+B\sin z)$. Tìm A, B để y trùng với $J_{1/2}(z)$ hoặc $J_{-1/2}(z)$.

Vì $J_{1/2}(0)=0$ suy ra $A=0$.

$$\frac{B}{\sqrt{z}}\sin z = J_{1/2}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r} = \frac{2}{\sqrt{\pi z}}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r z^{2r+1}}{(2r+1)!} \Rightarrow B = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Do đó
$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z \quad \textbf{(3.70)}$$

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z \quad \textbf{(3.71)}$$

Từ (3.45) nhận được hàm Bessel loại 2:

$$Y_{1/2}(z) = -J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z \;; \quad Y_{-1/2}(z) = J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z\,.$$

Từ công thức truy toán (3.50), lấy $\alpha = \frac{1}{2}$ sẽ nhận được: $J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(\frac{\sin z}{z} - \cos z\right)$

lấy $\alpha = -\frac{1}{2}$ sẽ nhận được: $J_{-3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(-\sin z - \frac{\cos z}{z}\right)$

Tương tự ta có các công thức sau:

$$J_{5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\sin z - \frac{3}{z}\cos z\right\}, \quad J_{-5/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\frac{3}{z}\sin z + \left(\frac{3}{z^2}-1\right)\cos z\right\}$$

$$J_{7/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{15}{z^3}-\frac{6}{z}\right)\sin z - \left(\frac{15}{z^2}-1\right)\cos z\right\},$$

$$J_{-7/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(1-\frac{15}{z^2}\right)\sin z - \left(\frac{15}{z^3}-\frac{6}{z}\right)\cos z\right\},$$

$$J_{9/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{105}{z^4}-\frac{45}{z^2}+1\right)\sin z - \left(\frac{105}{z^3}-\frac{10}{z}\right)\cos z\right\},$$

$$J_{-9/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\left(\frac{105}{z^3}-\frac{10}{z}\right)\sin z + \left(\frac{105}{z^4}+\frac{45}{z^2}+1\right)\cos z\right\}.$$

Từ các công thức (3.65) (3.66) ta nhận được các công thức truy toán của hàm Bessel với cấp bán nguyên như sau:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(zdz)^n}\left(\frac{\sin z}{z}\right);\; Y_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{n+1}J_{-n-\frac{1}{2}}(z)$$

$$J_{-n-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}z^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^n}{(zdz)^n}\left(\frac{\cos z}{z}\right);\; Y_{-n-\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n J_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad \textbf{(3.72)}$$

3.5.7. Ứng dụng hàm Bessel tính các tích phân Fresnel

Tích phân cosin Fresnel

$$C(\alpha)=\int_0^{\alpha}\cos\frac{\pi t^2}{2}dt \tag{3.73}$$

Tích phân sin Fresnel

$$S(\alpha)=\int_0^{\alpha}\sin\frac{\pi t^2}{2}dt \tag{3.74}$$

Đặt $\frac{\pi t^2}{2}=z$ và chú ý đến các công thức (3.70), (3.71) nhận được

$$C(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi\alpha^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z dz=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi\alpha^2}{2}}J_{-\frac{1}{2}}(z)dz$$

$$S(\alpha)=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi\alpha^2}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z dz=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi\alpha^2}{2}}J_{\frac{1}{2}}(z)dz$$

Từ công thức (3.58) suy ra:

$$\begin{aligned}C(\alpha)&=J_{1/2}(\alpha')+J_{5/2}(\alpha')+J_{9/2}(\alpha')+\cdots\\ S(\alpha)&=J_{3/2}(\alpha')+J_{7}(\alpha')+J_{11/2}(\alpha')+\cdots \quad ;\ \alpha'=\frac{\pi.\alpha^2}{2}\end{aligned} \tag{3.75}$$

3.5.8. Hàm Bessel cấp nguyên

Xét hàm số $e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}=e^{\frac{zt}{2}}.e^{\frac{-z}{2t}}$

$$e^{\frac{zt}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n t^n=1+\frac{zt}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{zt}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{zt}{2}\right)^n+\cdots$$

$$e^{-\frac{z}{2t}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{z}{2}\right)^n t^{-n}=1-\frac{z}{2t}+\frac{1}{2!}\left(\frac{z}{2t}\right)^2-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{2t}\right)^n+\cdots$$

Hai chuỗi hội tụ tuyệt đối với t ≠ 0. Thực hiện phép nhân chuỗi. Hệ số của t^n là chuỗi luỹ thừa của z chính là $J_n(z)$ còn hệ số của t^{-n} chính là $J_{-n}(z)$.

Thật vậy $$e^{\frac{zt}{2}}e^{-\frac{z}{2t}}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n t^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}B_n t^n$$

$$A_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^k\frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{k+n}=\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}}{k!(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2(k+n)}$$

$$=\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!(r-n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}=J_{-n}(z).$$

$$B_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^k\frac{1}{(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{k+n}=\left(\frac{z}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}=J_n(z).$$

Do đó $e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}=J_0(z)+tJ_1(z)+\cdots+t^nJ_n(z)+\cdots+\frac{1}{t}J_{-1}(z)+\cdots+\frac{1}{t^n}J_{-n}(z)+\cdots$

Vì: $J_n(z)=(-1)^nJ_{-n}(z)$

nên có:

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}=J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n(z)\left\{t^n+\frac{(-1)^n}{t^n}\right\} \qquad \textbf{(3.76)}$$

Hàm số $F(t,z)=e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}$ *gọi là hàm sinh đối với hàm Bessel loại 1 cấp nguyên*, nó được biểu diễn qua chuỗi (3.76) hội tụ tuyệt đối với mọi z và với mọi $t\neq 0$.

Đặt $t=e^{i\theta}$ và thay vào (3.76) sẽ có:

$$e^{iz\sin\theta}=J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}J_n(z)\left\{e^{in\theta}+(-1)^ne^{-in\theta}\right\}$$

$$=J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(z)\cos 2k\theta+2i\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k-1}(z)\sin(2k-1)\theta$$

So sánh các phần thực và phần ảo hai vế nhận được:

$$\cos(z\sin\theta)=J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(z)\cos 2k\theta \qquad \textbf{(3.77)}$$

$$\sin(z\sin\theta)=2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k-1}(z)\sin(2k-1)\theta \qquad \textbf{(3.78)}$$

Thay θ bởi $\theta-\frac{\pi}{2}$ vào các công thức trên sẽ có

$$\cos(z\cos\theta)=J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kJ_{2k}(z)\cos 2k\theta \qquad \textbf{(3.79)}$$

$$\sin(z\cos\theta)=-2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kJ_{2k-1}(z)\cos(2k-1)\theta \qquad \textbf{(3.80)}$$

Như vậy chúng ta đã nhận được khai triển Fourier các hàm số $\cos(z\cos\theta)$, $\sin(z\cos\theta)$, $\cos(z\sin\theta)$, $\sin(z\sin\theta)$. Từ đó suy ra:

$$J_{2k}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta)\cos 2k\theta d\theta\,;\quad J_{2k-1}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\theta)\sin(2k-1)\theta d\theta$$

Vì rằng: $\int_0^{\pi}\sin(2m-1)\theta\sin 2k\theta d\theta=0$, $\int_0^{\pi}\cos 2m\theta\cos(2k-1)\theta d\theta=0;\ \forall m$

Theo (3.77) - (3.78) ta có:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\theta)\sin 2k\theta d\theta=0\,;\ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta)\cos(2k-1)\theta d\theta=0$$

Cuối cùng nhận được: $J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\{\cos(z\sin\theta)\cos n\theta+\sin(z\sin\theta)\sin n\theta\}d\theta$.

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-z\sin\theta)d\theta \tag{3.81}$$

Gọi vế phải của (3.81) là *tích phân Bessel*

3.5.9. Biểu diễn hàm Bessel $J_\alpha(z)$ qua tích phân xác định

Từ (3.25), (3.26) nhận được $\frac{1}{\Gamma(p+q)}=\frac{2}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$

Đặt $p=r+\frac{1}{2},\ q=\alpha+\frac{1}{2}$ ta được $\frac{1}{\Gamma(r+\alpha+1)}=\frac{2}{\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2r}\theta\sin^{2\alpha}\theta d\theta$

Thay $\frac{1}{\Gamma(r+\alpha+1)}$ vào biểu thức của $J_\alpha(z)$ và $\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)=\frac{1.3.....(2r-1)}{2^r}\sqrt{\pi}$

Khi đó $J_\alpha(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r z^{2r}}{1.3...(2r-1).2.4...2r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2r}\theta\sin^{2\alpha}\theta d\theta$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\alpha}\theta\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r z^{2r}\cos^{2r}\theta}{(2r)!}d\theta$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\alpha}\theta\cos(z\cos\theta)d\theta$$

Đặt $u=\cos\theta$ thì

$$J_\alpha(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^\alpha\int_0^1\left(1-u^2\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}\cos zu\,du\,,\quad \alpha>-\frac{1}{2} \qquad \textbf{(3.82)}$$

3.5.10. Biểu diễn hàm $J_\alpha(z)$ qua tích phân Cauchy

Thay $\Gamma(\alpha+r+1)$ bởi tích phân Cauchy (3.22) vào công thức (3.38) của hàm $J_\alpha(z)$ sẽ nhận được

$$J_\alpha(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^\alpha\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{2\pi i}\oint_C\frac{e^t}{r!t^{\alpha+1}}\left(\frac{z^2}{4t}\right)^r dt=\left(\frac{z}{2}\right)^\alpha\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{t-\frac{z^2}{4t}}}{t^{\alpha+1}}dt \qquad \textbf{(3.83)}$$

Chu tuyến C đã nói rõ ở mục 3.3.3.

3.5.11. Các phương trình vi phân đưa về phương trình Bessel

3.5.11.1. Phương trình dạng

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(k^2-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)y=0\,.$$

Đổi biến $z=kx \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=k\frac{dy}{dz}$, tương tự $\frac{d^2y}{dx^2}=k^2\frac{d^2y}{dz^2}$.

Thay vào phương trình trên dẫn đến phương trình Bessel

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{\alpha^2}{z^2}\right)y=0$$

khi đó nghiệm tổng quát sẽ là:

$$Z_\alpha(kx)=\begin{cases}AJ_\alpha(kx)+BJ_{-\alpha}(kx) & \text{nếu } \alpha\neq n\\ AJ_\alpha(kx)+BY_\alpha(kx) & \text{nếu } \alpha=n\end{cases}$$

Ví dụ 3.5: Giải phương trình $y''+\frac{a}{x}y'+by=0$, trong đó a, b là hằng số.

Thay biến $y=x^\alpha u$ sẽ có: $x^\alpha u''+(a+2\alpha)x^{\alpha-1}u'+\left\{\left[(a-1)\alpha+\alpha^2\right]x^{\alpha-2}+bx^\alpha\right\}u=0$

Chọn $\alpha=\frac{1-a}{2}$ để $a+2\alpha=1$, ta được: $u''+\frac{1}{x}u'+\left(b-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)u=0$.

Nghiệm tổng quát là: $\qquad y=x^{\frac{1-a}{2}}Z_{\frac{1-a}{2}}(x\sqrt{b})$

Ví dụ 3.6: Giải phương trình $y''+\frac{a}{x}y'+(bx^m-\frac{c}{x^2})y=0$, $(c\geq 0)$.

Tương tự trên đặt: $y = x^{\alpha}u,\ \alpha = \dfrac{1-a}{2}$ và thay biến $t = x^{\frac{m}{2}+1}$ sẽ nhận được phương trình

$$u'' + \frac{1}{t}u' + \left(\frac{4b}{(m+2)^2} - \frac{(1-a)^2+4c}{(m+2)^2}\frac{1}{t^2}\right)u = 0\,.$$

Nghiệm tổng quát: $u = Z_{\alpha'}\left(\dfrac{2\sqrt{b}}{m+2}t\right)$

$$\Rightarrow\quad y = x^{\frac{1-a}{2}} Z_{\alpha'}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right) \quad \text{với} \quad \alpha' = \frac{\sqrt{(1-a)^2+4c}}{m+2}\,,\ (m \neq -2)$$

Chẳng hạn phương trình: $y'' + \dfrac{5}{x}y' - 16x^4 y = 0$ có nghiệm $\quad y = x^{-2}Z_{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{4}{3}ix^3\right)$

Các trường hợp riêng của ví dụ 3.6:

a. $\quad y'' + \left(bx^m + \dfrac{C}{x^2}\right)y = 0$ cho nghiệm tổng quát dưới dạng:

$$y = \sqrt{x}Z_{\alpha}\left(\frac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right),\quad \alpha = \frac{\sqrt{1-4C}}{m+2}\,.$$

b. $\quad y'' + \left(b - \dfrac{p(p+1)}{x^2}\right)y = 0$ có nghiệm tổng quát $y = \sqrt{x}Z_{p+\frac{1}{2}}\left(x\sqrt{b}\right)$.

c. $\quad y'' + bx^m y = 0$ có nghiệm tổng quát $y = \sqrt{x}Z_{\frac{1}{m+2}}\left(2\dfrac{\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right)$.

d. $\quad y'' + bxy = 0$ có nghiệm tổng quát $y = \sqrt{x}Z_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{b}x^{\frac{3}{2}}\right)$.

e. $\quad y'' + \dfrac{a}{x}y' + bx^m y = 0$ có nghiệm tổng quát $y = x^{\frac{1-a}{2}}Z_{\frac{1-a}{m+2}}\left(\dfrac{2\sqrt{b}}{m+2}x^{\frac{m+2}{2}}\right)$.

Ví dụ 3.7: $\quad \dfrac{d}{dx}\left(x^{\alpha}\dfrac{dy}{dx}\right) + bx^{\beta}y = 0.$

Dẫn đến phương trình e. với $m = \beta - \alpha$ và $a = \alpha$.

Nhận xét: Khi $m = -2$ phương trình trong ví dụ 3.6 dẫn đến phương trình Euler:

$$x^2y'' + axy' + ky = 0\,.$$

Bằng cách đặt $x = e^u$ sẽ dẫn đến phương trình hệ số hằng: $\dfrac{d^2y}{du^2} + (a-1)\dfrac{dy}{du} + ky = 0$.

3.5.11.2. Phương trình dạng

$$y'' + \left(2a + \frac{1}{x}\right)y' + \left(b + \frac{a}{x} - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)y = 0 \qquad \textbf{(3.84)}$$

Đặt: $y = e^{-ax}u$ sẽ nhận được phương trình

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(b - a^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)u = 0\,. \qquad \textbf{(3.85)}$$

a. Khi $b \neq a^2$ nghiệm tổng quát có dạng: $y = e^{-ax}Z_\alpha\left\{\sqrt{b-a^2}\,x\right\}$

b. Khi $b = a^2$ và $\alpha \neq 0$, (3.66)' là phương trình Euler có hai nghiệm độc lập $u_1 = x^\alpha$ và $u_2 = x^{-\alpha}$. Vậy nghiệm tổng quát của (3.66): $y = e^{-ax}\left(Ax^\alpha + Bx^{-\alpha}\right)$; A,B là hằng số tuỳ ý.

c. Khi $b = a^2$ và $\alpha \neq 0$, (3.66)' có nghiệm tổng quát $u = A + B\ln x$. Vậy (3.66) có nghiệm tổng quát $y = e^{-ax}(A + B\ln x)$; A,B là hằng số tuỳ ý.

3.5.11.3. Phương trình dạng

$$y'' + \left[\frac{1}{x} - 2g(x)\right]y' - \left[1 - \frac{\alpha^2}{x^2} + g^2(x) - g'(x) - \frac{g(x)}{x}\right]y = 0 \qquad \textbf{(3.86)}$$

Nghiệm tổng quát có dạng: $y = e^{\int g(x)dx}Z_\alpha(x)$.

Ví dụ 3.8: $y'' + \left(\dfrac{1}{x} - 2\mathrm{tg}x\right)y' + \left(\dfrac{\alpha^2}{x^2} + \dfrac{\mathrm{tg}x}{x}\right)y = 0$

Có nghiệm $y = \dfrac{1}{\cos x}Z_\alpha(x)$.

Ví dụ 3.9: $y'' + \left(\dfrac{1}{x} + 2\mathrm{cotg}x\right)y' - \left(\dfrac{\alpha^2}{x^2} - \dfrac{\mathrm{cotg}x}{x}\right)y = 0$

Có nghiệm $y = \dfrac{1}{\sin x}Z_\alpha(x)$.

TÓM TẮT

Khai triển tiệm cận

Chuỗi hàm $a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} + \cdots$ trong đó a_i (i = 0, 1, 2,...) là các hằng số phức, gọi là khai triển tiệm cận của hàm số $f(z)$ nếu thoả mãn hai điều kiện dưới đây :

- $\lim\limits_{|z|\to\infty} R_n(z) = \lim\limits_{|z|\to\infty} z^n \{f(z) - S_n\} = 0$, ($n$ cố định)

Trong đó : $S_n = a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}$ là tổng riêng thứ n.

- $f(z) - S_n$ không dần đến 0 khi $n \to \infty$ với z cố định.

Các hàm số tích phân

$\mathrm{Ei}(x) = \int\limits_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad x > 0$ đọc là hàm tích phân mũ của x.

$\mathrm{Si}(x) = \int\limits_0^{x} \frac{\sin t}{t} dt, \quad x > 0$ đọc là hàm tích phân sin của x.

$\mathrm{Ci}(x) = -\int\limits_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt, \quad x > 0$ đọc là hàm tích phân cosin của x.

Ngoài ra ký hiệu: $\mathrm{si}(x) = -\int\limits_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ cũng đọc là tích phân sin của x.

Hàm số Gamma

$\Gamma(z) = \lim\limits_{m\to\infty} \frac{m!m^z}{z(z+1)(z+2)...(z+m)}$ $z \neq 0, -1, -2, \cdots$ (công thức Gauss)

Công thức Weierstrass: $\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}.\prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{m}\right)e^{-\frac{z}{m}}$

Công thức Euler: $\Gamma(z) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ nếu $\mathrm{Re}\, z > 0$.

Hàm Bêta

Hàm số biểu diễn dưới dạng tích phân phụ thuộc hai tham số thực $p, q > 0$

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

gọi là hàm Beta. $B(p,q) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta d\theta$, $B(m,n) = \frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$.

Hàm lỗi $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$. $\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+1=2\Phi(x)$.

Phương trình Bessel cấp α

Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất $\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+(1-\frac{\alpha^2}{z^2})y=0$.

Hàm Bessel loại 1:

$$J_\alpha(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(\alpha+r+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r} \; ; \; J_{-\alpha}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!\Gamma(r+1-\alpha)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2r}.$$

Hàm Bessel loại 2: $Y_\alpha(z)=\begin{cases}\dfrac{\cos\pi\alpha.J_\alpha(z)-J_{-\alpha}(z)}{\sin\pi\alpha} & \text{nếu} \quad \alpha\neq n\\ \lim\limits_{\beta\to n}Y_\beta(z) & \text{nếu} \quad \alpha=n\end{cases}$

Khai triển Fourier - Bessel

Nếu $f(x)$ biểu diễn dưới dạng $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iJ_\alpha(\lambda_i x)$ thì nói rằng hàm số đó khai triển được thành chuỗi Fourier– Bessel. Trong đó $\lambda_1,\ldots,\lambda_i,\ldots$ là nghiệm của phương trình $J_\alpha(x)=0$ và $a_i=\frac{2}{J'^2_\alpha(\lambda_i)}\int_0^1 x.f(x).J_\alpha(\lambda_i x)dx$; $i=1,2,\ldots$ là các hệ số Fourier-Bessel.

CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP

3.1 Khai triển tiệm cận là khai triển Laurent của hàm số tại ∞.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.2 Các hàm tích phân mũ, tích phân cosin, tích phân sin có đạo hàm mọi cấp.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.3 Nếu $a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}+\cdots$ là khai triển tiệm cận của $f(z)$ thì $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{z^n}$.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.4 Các hàm tích phân là các hàm sơ cấp.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.5 Hàm Gama chỉ xác định với mọi số phức $\mathrm{Re}\,z>0$.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.6 Hàm Bêta là hàm thực hai biến (p,q) xác định với mọi $p>0,\, q>0$.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.7 Hàm Bessel là nghiệm của phương trình Bessel.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.8 Hàm Bessel loại I $J_\alpha(z)$ và loại II $Y_\alpha(z)$ luôn luôn độc lập tuyến tính.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.9 Hàm Bessel loại I $J_\alpha(z)$ và $J_{-\alpha}(z)$ luôn phụ thuộc tuyến tính.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.10 Nếu hàm $f(x)$ khai triển thành chuỗi Fourier-Bessel thì $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

Đúng ☐ Sai ☐.

3.11. Áp dụng phép biến đổi Laplace suy ra các công thức khai triển sau:

$$\mathrm{Ei}(x) = -\gamma - \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \quad ; \quad \mathrm{Ci}(x) = \gamma + \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

3.12. Tính

a. $\dfrac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}$ **b.** $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ **c.** $\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)$ **d.** $\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$.

3.13. Sử dụng hàm Gamma tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx$

3.14. Sử dụng hàm Gamma tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y^3} dy$ **b.** $\displaystyle\int_0^\infty 3^{-4t^2} dt$

3.15. Chứng minh: $\displaystyle\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{R},\ m > -1.$

3.16. Áp dụng hàm Beta tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^1 x^4(1-x^3)dx$ **b.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$ **c.** $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt[3]{8-x^3}\, dx$

3.17. Áp dụng hàm Beta tính các tích phân sau:

a. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta \cos^5\theta d\theta$ **b.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta d\theta$ **c.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathrm{tg}\theta}\, d\theta$

3.18. Chứng minh: $\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta=\int_0^{\pi/2}\sin^n\theta d\theta=\begin{cases}\frac{\pi}{2}\frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ chẵn}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ lẻ}\end{cases}$

(2k+1)!! = 1.3.5...(2k+1).

(2k)!! = 2.4.6...(2k).

3.19. Đặt $I=\int_0^{\pi/2}\sin^{2p}xdx$, $J=\int_0^{\pi/2}\sin^{2p}2xdx$, $p>0$

a. Chứng minh: I = J

b. Chứng minh: $I=\dfrac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2\Gamma(p+1)}$; $J=\dfrac{2^{2p-1}\left\{\Gamma(p+\frac{1}{2})\right\}^2}{\Gamma(2p+1)}$

c. Suy ra công thức nhân đôi của hàm Gamma:

$$2^{2p-1}\Gamma(p)\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\Gamma(2p).$$

3.20. Chứng minh rằng:

a. $\int_0^\infty\frac{x^{p-1}}{x+1}dx=\Gamma(p)\Gamma(1-p)$, $0<p<1$.

b. $\int_0^\infty\frac{dx}{x^p+1}=\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{p}\right)$, $p>1$.

3.21. Tính các tích phân sau

a. $\int_0^\infty\frac{dx}{x^4+1}dx$ **b.** $\int_0^\infty\frac{xdx}{x^6+1}$ **c.** $\int_0^\infty\frac{x^2dx}{x^4+1}$.

3.22. Chứng minh các công thức truy toán đối với hàm Bessel

1) $J_{\alpha+1}(z)=\frac{2\alpha}{z}J_\alpha(z)-J_{\alpha-1}(z)$; 2) $zJ'_\alpha(z)=zJ_{\alpha-1}(z)-\alpha J_\alpha(z)$;

3) $zJ'_\alpha(z)=\alpha J_\alpha(z)-zJ_{\alpha+1}(z)$; 4) $J'_\alpha(z)=\frac{1}{2}\{J_{\alpha-1}(z)-J_{\alpha+1}(z)\}$;

5) $\frac{d}{dz}(z^\alpha J_\alpha(z))=z^\alpha J_{\alpha-1}(z)$; 6) $\frac{d}{dz}(z^{-\alpha}J_\alpha(z))=-z^{-\alpha}J_{\alpha+1}(z)$;

7) $z^{\alpha\text{-n}} J_{\alpha-n}(z) = \dfrac{d^n}{(zdz)^n}(z^{-\alpha} J_\alpha(z))$; $z^{-\alpha\text{-n}} J_{\alpha+n}(z) = (-1)^n \dfrac{d^n}{(zdz)^n}(z^{-\alpha} J_\alpha(z))$;

8) $\displaystyle\int_{z_0}^{z} z^\alpha J_{\alpha-1}(z)dz = z^\alpha J_\alpha(z)\Big|_{z_0}^{z}$ 9) $\displaystyle\int_{z_0}^{z} z^{-\alpha} J_{\alpha+1}(z)dz = -z^{-\alpha} J_\alpha(z)\Big|_{z_0}^{z}$

10) $\displaystyle\int_0^z J_\alpha(z)dz = 2\{J_{\alpha+1}(z) + J_{\alpha+3}(z) + \cdots\}$

3.23. Tính các tích phân không xác định:

a. $\int x^n J_{n-1}(x)dx$ **b.** $\int \dfrac{J_{n+1}^{(x)}}{x^n} dx$ **c.** $\int x^4 J_1(x)dx$

3.24. Tính theo $J_1(x)$ và $J_0(x)$

a. $J_3(x)$ **b.** $\int J_1(\sqrt[3]{x})dx$ **c.** $\int J_0(x)\sin x dx$

3.25. Chứng minh:

a. $1 = J_0(x) + 2J_2(x) + 2J_4(x) + \cdots$

b. $J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - J_7(x) + \cdots = \dfrac{1}{2}\sin x$.

3.26. Chứng tỏ rằng

a. $\dfrac{1-x^2}{8} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_0(\lambda_n x)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n x)}$, $0 < x < 1$.

Trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_0(\lambda) = 0$.

b. $x^3 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2(8-\lambda_n^2)J_1(\lambda_n x)}{\lambda_n^3 J'_1(\lambda_n x)}$, $0 < x < 1$.

Trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_1(\lambda) = 0$.

3.27. Chứng minh rằng nếu $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\lambda_n x)$, $0 < x < 1$; trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_0(\lambda) = 0$ thì $\displaystyle\int_0^1 x\big(f(x)\big)^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 J_1^2(\lambda_n)$.

3.28. **a.** Chứng tỏ rằng $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{J_1(\lambda_n x)}{\lambda_n J_2(\lambda_n x)}$, $0 < x < 1$. Trong đó λ_n là nghiệm thực dương của phương trình $J_1(\lambda) = 0$.

b. Sử dụng bài 27. và a. chứng tỏ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \frac{1}{4}$.

3.29. Chứng tỏ rằng phương trình: $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + (k^2 - \frac{\alpha^2}{x^2})y = 0$

có nghiệm tổng quát: $y = AJ_\alpha(kx) + BY_\alpha(kx)$

3.30. Giải các phương trình sau:

a. zy'' + y' + ay =0 **b.** 4zy'' + 4y' + y =0

c. zy'' + 2y' + 2y = 0 **d.** y'' + z^2y = 0.

CHƯƠNG IV: PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG

GIỚI THIỆU

Phương trình vi phân là phương trình chứa hàm số một biến độc lập, các đạo hàm của chúng và biến độc lập. Lý thuyết phương trình vi phân đã được khảo sát trong chương trình toán giải tích II.

Phương trình đạo hàm riêng là phương trình chứa hàm số nhiều biến số, các đạo hàm riêng của chúng và các biến độc lập. Phương trình sóng điện từ Maxuell nói riêng và phương trình truyền sóng nói chung là những phương trình đạo hàm riêng thường được sử dụng để mô tả các hiện tượng vật lý áp dụng trong điện tử viễn thông.

Trong chương này ta khảo sát các khái niệm cơ bản của phương trình đạo hàm riêng:

- Nghiệm của phương trình đạo hàm riêng, điều kiện biên, điều kiện đầu. Một vài phương pháp tìm nghiệm của phương trình đạo hàm riêng.
- Tìm nghiệm của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 1, các phương trình tuyến tính cấp cao hệ số hằng dạng chính tắc.
- Giải bài toán Dirichlet đối với phương trình Laplace.
- Giải bài toán Cauchy đối với phương trình truyền sóng: Công thức Kirchoff, Poisson, D'Alembert.
- Giải bài toán Cauchy đối với phương trình truyền nhiệt.

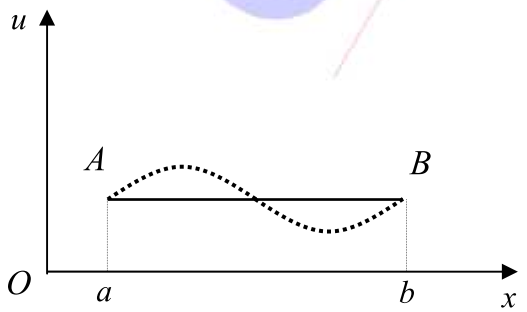
Để học tốt chương này học viên nên xem lại các kiến thức giải tích II: Hàm nhiều biến, đạo hàm riêng, tích phân mặt. Các định lý Green, Stock, Odstrograsky.

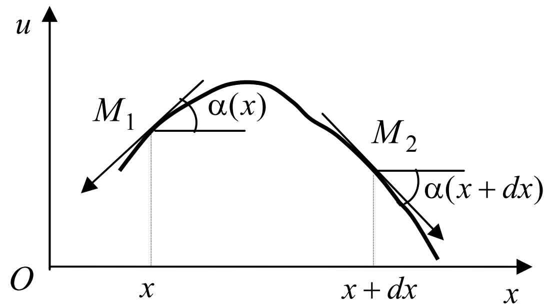
NỘI DUNG

4.1. BÀI TOÁN DẪN ĐẾN PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ CÁC ĐỊNH NGHĨA

4.1.1. Phương trình dao động của sợi dây

Trong mặt phẳng Oxu xét sợi dây AB ở vị trí cân bằng, nó song song với trục Ox. Chúng ta nghiên cứu dao động ngang của sợi dây tức là trong quá trình chuyển động các chất điểm của nó luôn luôn dịch chuyển thẳng góc với trục Ox (xem hình 4.1).





Giả sử sợi dây AB rất mảnh chịu uốn và có sức căng T tương đối lớn so với trọng lượng của nó. Vì vậy trong quá trình xem xét có thể bỏ qua trọng lượng của sợi dây.

Gọi $u(x,t)$ là độ lệch của dây so với vị trí cân bằng của điểm vật chất $M(x)$ trên dây tại thời điểm t. Coi rằng dao động là nhỏ nên $\frac{\partial u}{\partial x} << 1$; Vậy có thể coi $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0$. Từ giả thiết này ta thấy ngay trong quá trình dao động, độ dài $l = AB$ không thay đổi. Thật vậy, độ dài của dây tại thời điểm t sẽ là l' thì

$$l' = \int_a^b \sqrt{1+u'^2_x}\,dx \approx \int_a^b dx = b-a = l$$

Chính vì vậy, theo định luật Hook (số gia lực căng tỉ lệ với số gia của chiều dài của sợi dây), sức căng T của sợi dây tại mọi thời điểm t và vị trí x có cường độ như nhau: $T(x,t) = T_0$, $\forall x \in [a;b]$, $\forall t$.

Giả sử ngoại lực tác dụng vào dây có hướng song song với trục Ou với hàm mật độ $F(x,t)$, gọi $\rho(x)$ là tỉ khối của sợi dây.

Xét dao động của đoạn dây có độ dài là dx.

Theo định luật Newton ta có:

$$u''_{tt}\,\rho(x)dx = -T_0 \sin\alpha(x+dx) - T_0 \sin\alpha(x) + F(x,t)dx$$

vì $\sin\alpha(x+dx) \approx \mathrm{tg}\alpha(x+dx) = -\frac{\partial}{\partial x}u(x+dx,t) \approx -u'_x(x,t) - u''_{xx}(x,t)dx$

và $\sin\alpha(x) \approx \mathrm{tg}\alpha(x) = -u'_x(x,t)$. Vậy $u''_{tt}\,\rho(x) = T_0 u''_{xx} + F(x,t)$.

Đặt $a^2 = \frac{T_0}{\rho(x)}$, $f(x,t) = \frac{F(x,t)}{\rho(x)}$ ta được:

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f(x,t) \quad \textbf{(4.1)}$$

Gọi (4.1) là phương trình dao động của sợi dây hay gọi là phương trình truyền sóng một chiều. Bài toán xét dao động của một thanh đàn hồi cũng dẫn đến phương trình dạng trên.

Tương tự gọi phương trình dưới đây là phương trình truyền sóng hai chiều:

$$u''_{tt} = a^2\left(u''_{xx} + u''_{yy}\right) + f(x,y,t) \quad \textbf{(4.2)}$$

Phương trình truyền sóng trong không gian (ví dụ: truyền âm):

$$u''_{tt} = a^2\left(u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}\right) + f(x,y,z,t) \quad \textbf{(4.3)}$$

4.1.2. Các định nghĩa cơ bản

a. Phương trình đạo hàm riêng

Phương trình đạo hàm riêng là một phương trình liên hệ giữa hàm nhiều biến phải tìm $u(x_1,x_2,...,x_n)$, các đạo hàm riêng của chúng và các biến độc lập $x_1,x_2,...,x_n$.

Các phương trình từ (4.1) đến (4.3) là các phương trình đạo hàm riêng mà các hàm phải tìm lần lượt là hàm của hai, ba và bốn biến.

b. Cấp của phương trình đạo hàm riêng là cấp cao nhất của đạo hàm riêng có mặt trong phương trình đó.

Vậy một phương trình đạo hàm riêng cấp m có dạng tổng quát sau đây:

$$F\left(x_1,\cdots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},\cdots,\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m},\cdots,\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right)=0 \tag{4.4}$$

Trong phương trình trên có mặt ít nhất một đạo hàm riêng cấp m.

c. Phương trình (4.4) gọi là *tuyến tính* nếu F là một hàm tuyến tính đối với hàm số phải tìm u và và các đạo hàm riêng của nó. Phương trình không tuyến tính gọi là ***phi tuyến***, Nếu F là hàm phi tuyến nhưng tuyến tính đối với đạo hàm riêng cấp cao nhất thì gọi đó là phương trình ***á tuyến***.

Ví dụ 4.1: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\sin x^2 y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cos y\frac{\partial u}{\partial x}-3e^{xy}\frac{\partial u}{\partial y}+(x-y^5)u=0$ là phương trình tuyến tính cấp 2.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\sin x^2 y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\cos y\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-3e^{xy^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\cos u=0$ là phương trình á tuyến.

d. Hàm số $u=u(x_1,x_2,...,x_n)$ **gọi là một *nghiệm*** của (4.4) nếu thay nó vào phương trình sẽ được một đồng nhất thức đối với các biến $x_1, x_2,...,x_n$ trong một miền xác định nào đó. Chẳng hạn có thể dễ dàng kiểm tra được hàm số $u=x^2+y^2$ là một nghiệm của phương trình: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

4.1.3. Điều kiện ban đầu và điều kiện biên

Nói chung các quá trình vật lý xảy ra là một quá trình không dừng, tức là không những phụ thuộc vào vị trí mà còn phụ thuộc vào thời gian. Yếu tố khởi đầu của quá trình đóng vai trò cơ bản vào cả quá trình. Mô hình toán học phản ánh điều đó thông qua dạng hệ thức giữa các giá trị của tham số đã biết và các đạo hàm riêng của chúng tại thời điểm ban đầu. Các hệ thức này gọi là các ***điều kiện ban đầu***. Bài toán tìm nghiệm của phương trình với điều kiện ban đầu gọi là ***bài toán Cauchy***. Chẳng hạn, bài toán về dao động của dây có thể cho điều kiện ban đầu là

$u(x,0)=\varphi(x)$ gọi là dạng ban đầu của dây.

$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi(x)$ gọi là vận tốc ban đầu của dây.

Quá trình vật lý xảy ra trong miền hữu hạn $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, đương nhiên nó phải quan hệ mật thiết với phần còn lại của không gian. Hệ thức mô tả quan hệ giữa các giá trị của tham số đã biết và các đạo hàm riêng của chúng trên biên của Ω gọi là các ***điều kiện biên***.

Chẳng hạn đối với phương trình (4.1), điều kiện ở đầu mút bên trái có thể là:

$u(a,t)=0$, $\dfrac{\partial u(a,t)}{\partial t}=0$: tức là đầu mút bên trái luôn buộc chặt.

Bài toán với điều kiện biên cụ thể có các tên riêng, như ***bài toán Dirichlet***.

Bài toán gồm cả điều kiện ban đầu và điều kiện biên gọi là ***bài toán hỗn hợp***.

4.1.4. Khái niệm về tích phân tổng quát

Như ta đã biết, đối với phương trình vi phân thường, tồn tại các nghiệm dạng tổng quát phụ thuộc vào một vài tham số mà một nghiệm riêng bất kỳ có thể nhận được bằng cách cho tham số của nghiệm tổng quát những giá trị cụ thể nào đó. Một vài dạng nghiệm tổng quát có thể tìm được bằng cách tích phân của phương trình. Đối với phương trình đạo hàm riêng cũng vậy, sẽ có nghiệm tổng quát bằng cách tính tích phân của phương trình. Tuy nhiên có sự khác nhau cơ bản so với phương trình vi phân thường, ở đây nghiệm tổng quát phụ thuộc vào các hàm số tuỳ ý chứ không phải các hằng số tuỳ ý như phương trình vi phân thường. Để minh họa điều này chúng ta hãy xét ví dụ sau

Ví dụ 4.2: Xét phương trình:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0 \tag{4.5}$$

Phương trình (4.5) viết dưới dạng: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi(x)$.

Vậy $$u(x,y)=\int \varphi(x)dx+g(y)$$

$$u(x,y)=f(x)+g(y) \tag{4.6}$$

ở đây f(x), g(y) là các hàm tuỳ ý và gọi là tích phân tổng quát của phương trình (4.5).

4.1.5. Ứng dụng của biến đổi Laplace để giải phương trình đạo hàm riêng

Có thể sử dụng phép biến đổi Laplace để giải các bài toán biên của phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2 dạng:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial t}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+cu=0. \tag{4.7}$$

thuộc loại Hyperbolic hay Parabolic và các hệ số của phương trình chỉ phụ thuộc x chứ không phụ thuộc t (trong các bài toán thực tế biến số t là biến thời gian, $t \ge 0$).

Giả sử $u(x,t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ là các hàm gốc đối với biến t khi cố định biến x. Đặt:

$$U(x,s)=\mathscr{L}\{u(x,t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st}u(x,t)\,dt \tag{4.8}$$

Dựa vào tính hội tụ đều của tích phân suy rộng (4.8) ta chứng minh được:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = sU(x,s) - u(x,0) \ ; \quad \mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = s^2U(x,s) - su(x,0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) \qquad \textbf{(4.9)}$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{\partial U}{\partial x} \ ; \quad \mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad \textbf{(4.10)}$$

Thay (4.8)-(4.10) vào (4.7) ta được phương trình ảnh. Giải phương trình ảnh ta được nghiệm ảnh $U(x,s)$. Biến đổi Laplace ngược của $U(x,s)$ là nghiệm của phương trình (4.7).

Ví dụ 4.3: Tìm nghiệm của phương trình đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ , \ a > 0 \, ; \ 0 < x < l ; t > 0$$

với điều kiện đầu $u(x,0) = 3\sin 2\pi x$ và điều kiện biên $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{cases}$.

Giải: Thay (4.8)-(4.10) vào phương trình trên ta được phương trình ảnh

$$sU - u(x,0) = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \ \Rightarrow \ a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - sU = -3\sin 2\pi x \qquad (*)$$

Nếu xem s là tham số thì phương trình ảnh (*) là phương trình tuyến tính cấp 2 đối với biến x có nghiệm tổng quát:

$$U(x,s) = C_1 e^{\frac{-\sqrt{s}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{s}}{a}x} + \frac{3}{s + 4\pi^2 a^2} \sin 2\pi x \, .$$

Từ điều kiện biên $U(0,s) = \mathscr{L}\{u(0,t)\} = 0$ và $U(1,s) = \mathscr{L}\{u(1,t)\} = 0$. Suy ra:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}} + C_2 e^{\frac{\sqrt{s}}{a}} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_2 = 0 \, .$$

Do đó $U(x,s) = \dfrac{3}{s + 4\pi^2 a^2} \sin 2\pi x$.

Vậy $u(x,t) = \mathscr{L}^{-1}\{U(x,s)\} = 3e^{-4\pi^2 a^2 t} \sin 2\pi x$.

4.2. PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP 1

4.2.1. Phương trình tuyến tính cấp 1 thuần nhất

Phương trình dạng

$$\sum_{k=1}^{n} X_k(x_1,\ldots,x_n) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \qquad \textbf{(4.11)}$$

gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất cấp 1.

Ta xét trường hợp phương trình (4.11) với giả thiết các hàm $X_k(x_1,...,x_n)$, $k=\overline{1,n}$ là các hàm liên tục cùng các đạo hàm riêng của chúng tại lân cận điểm $X^0=(x_1^0,...,x_n^0)$ và không đồng thời triệt tiêu tại X^0, chẳng hạn

$$X_n\left(X^0\right)\neq 0 . \tag{4.12}$$

Rõ ràng mọi hàm hằng $u(x_1,...,x_n)=C$ (C là hằng số nào đó) là nghiệm của (4.11) . Ta gọi đó là nghiệm tầm thường. Sau đây ta sẽ tìm nghiệm không tầm thường của (4.11).

Gọi hệ phương trình vi phân dạng đối xứng:

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n} \tag{4.13}$$

là *hệ đối xứng tương ứng với phương trình (4.11).*

Kết hợp với điều kiện (4.12), hệ (4.13) có thể viết dưới dạng chuẩn tắc sau:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dx_n}=\dfrac{X_1}{X_n}\\ \dots\dots\dots\dots\\ \dfrac{dx_{n-1}}{dx_n}=\dfrac{X_{n-1}}{X_n}\end{cases} \tag{4.14}$$

Hàm số $\varphi=\varphi(x_1,...,x_n)$ khả vi liên tục và không phải là hàm hằng được gọi là tích phân của (4.13) hay (4.14) nếu nó trở thành hàm hằng khi thay $x_1,...,x_{n-1}$ bởi bất kỳ một nghiệm riêng nào của hệ đó.

Định lý 4.1: **a.** Nếu $\varphi=\varphi(x_1,...,x_n)$ là tích phân của (4.13) thì hàm số $u=\varphi(x_1,...,x_n)$ là một nghiệm của (4.11).

b. Ngược lại, nếu $u=\varphi(x_1,...,x_n)$ khác hằng số là một nghiệm của (4.11) thì $\varphi=\varphi(x_1,...,x_n)$ là tích phân của (4.13).

Như vậy việc tìm nghiệm của (4.11) đưa về việc tìm các tích phân của (4.13). Lý thuyết phương trình vi phân chỉ ra rằng hệ (4.13) có $n-1$ nghiệm độc lập. Vậy nếu tìm được $n-1$ tích phân độc lập của hệ (4.13) là $\varphi_i=\varphi_i(x_1,...,x_n);\ i=1,...,n-1$. Khi đó hàm số:

$$\varphi=\Phi\left(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1}\right)$$

trong đó Φ là hàm số tuỳ ý khả vi liên tục, cũng là tích phân tổng quát của hệ (4.13). Vì vậy hàm số:

$$u=\Phi\left(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1}\right) \tag{4.15}$$

là nghiệm tổng quát của (4.11).

Ví dụ 4.4: Tìm nghiệm tổng quát của phương trình

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

Giải: Hệ đối xứng tương ứng:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z} \quad \text{hay} \quad \begin{cases}\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dz}{z}\\ \dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}x=C_1z\\ y=C_2z\end{cases}$$

trong đó C_1, C_2 là hằng số tuỳ ý.

Dễ thấy $\varphi_1=\frac{x}{z}$, $\varphi_2=\frac{y}{z}$; $z\neq 0$ là hai tích phân độc lập của hệ đối xứng trên, vậy nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$u=\Phi\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)$$

với Φ là hàm khả vi liên tục bất kỳ.

4.2.2. Phương trình tuyến tính không thuần nhất

Phương trình dạng

$$\sum_{k=1}^{n}X_k(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_k}=f(x_1,...,x_n,u) \qquad \textbf{(4.16)}$$

gọi là phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp 1.

Ta xét trường hợp phương trình (4.16) với giả thiết các hàm $X_k(x_1,...,x_n,u)$, $k=\overline{1,n}$ và $f(x_1,...,x_n,u)$ là các hàm liên tục cùng các đạo hàm riêng của chúng tại lân cận điểm $Y^0=(x_1^0,...,x_n^0,u^0)$. Các hàm này không đồng thời triệt tiêu tại Y^0, chẳng hạn $X_n\left(Y^0\right)\neq 0$.

Chúng ta sẽ tìm nghiệm của (4.16) dưới dạng ẩn: $V(x_1,...,x_n,u)=0$, trong đó V khả vi liên tục và $\frac{\partial V}{\partial u}(Y^0)\neq 0$. Theo định lý hàm ẩn suy ra $\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial u}}$; $i=\overline{1,n}$. Vậy

$$\sum_{k=1}^{n}X_k(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_k}+f(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial u}=0. \qquad \textbf{(4.17)}$$

Đó là phương trình tuyến tính thuần nhất được trình bày ở đoạn trên.

Gọi $\varphi_i=\varphi_i(x_1,...,x_n,u)$; $i=1,...,n$ là các tích phân độc lập của hệ đối xứng tương ứng với (4.14). Khi đó nghiệm tổng quát của (4.17) là:

$$V=\Phi\left(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n\right).$$

Suy ra tích phân tổng quát của (4.17)

$$\Phi(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) = 0.$$

Với Φ là hàm tuỳ ý khả vi liên tục.

4.2.3. Nghiệm của bài toán Cauchy đối với phương trình thuần nhất

Xét bài toán Cauchy: Hãy tìm nghiệm $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ của phương trình

$$\sum_{k=1}^{n} X_k(x_1, ..., x_n) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \quad \textbf{(4.18)}$$

Thoả mãn điều kiện:

$$u(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n^0) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}) \quad \textbf{(4.19)}$$

Trong đó $X_i; i = \overline{1,n}$ liên tục cùng các đạo hàm riêng cấp 1 ở lân cận $X^0 = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ và φ là hàm khả vi liên tục.

Để giải bài toán (4.18) - (4.19) ta làm như sau:

♦ Lập hệ đối xứng tương ứng của (4.18) và tìm $n-1$ tích phân độc lập của hệ đó:

$$\varphi_i = \varphi_i(x_1, ..., x_n); \; i = 1, ..., n-1$$

♦ Lập hệ phương trình với các ẩn số $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, ..., x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\varphi}_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n-1}(x_1, ..., x_{n-1}, x_n^0) = \overline{\varphi}_{n-1} \end{cases}$$

và giải hệ phương trình này được

$$\begin{cases} x_1 = \psi_1(\overline{\varphi}_1, ..., \overline{\varphi}_{n-1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-1} = \psi_{n-1}(\overline{\varphi}_1, ..., \overline{\varphi}_{n-1}) \end{cases}$$

♦ Thay $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, ..., \overline{\varphi}_{n-1}$ bằng các hàm số $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}$ ta được nghiệm của bài toán Cauchy (4.18)-(4.19):

$$u = \varphi\big(\psi_1(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1}), ..., \psi_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1})\big). \quad \textbf{(4.20)}$$

Thật vậy, theo (4.16) thì u là nghiệm của (4.18), chúng ta kiểm tra điều kiện (4.19).

$$u\big|_{x_n = x_n^0} = \varphi\big(\psi_1(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, ..., \overline{\varphi}_{n-1}), ..., \psi_{n-1}(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, ..., \overline{\varphi}_{n-1})\big) = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}).$$

Nhận xét:

1. Trong các bài toán thực tế biến thứ n biểu diễn sự phụ thuộc vào thời gian do đó thường được ký hiệu là t thay cho x_n. Lúc đó điều kiện (4.19) của bài toán Cauchy được gọi là điều kiện đầu.
2. Quá trình tìm nghiệm của bài toán Cauchy đối với phương trình không thuần nhất là tương tự vì chúng ta đưa về phương trình thuần nhất (4.17). Thí dụ dưới đây sẽ minh họa điều đó.

Ví dụ 4.5: Tìm nghiệm của bài toán Cauchy sau

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x}+(y+x^2)\dfrac{\partial u}{\partial y}=u \\ u(x,y)\big|_{x=2}=y-4 \end{cases}$$

Giải: Đưa về dạng thuần nhất (4.17): $x\dfrac{\partial V}{\partial x}+(y+x^2)\dfrac{\partial V}{\partial y}+u\dfrac{\partial V}{\partial u}=0$ có nghiệm dưới dạng hàm ẩn $V(x,y,u(x,y))=0$.

Hệ phương trình vi phân đối xứng dạng (4.13) tương ứng: $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y+x^2}=\dfrac{du}{u}$.

$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y+x^2} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+x \Rightarrow y=x(C_1+x)$ (phương trình vi phân tuyến tính cấp 1).

$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{du}{u} \Rightarrow u=C_2x$. Do đó nhận được hai tích phân độc lập

$$\varphi_1(x,y,u)=\frac{y-x^2}{x},\quad \varphi_2(x,y,u)=\frac{u}{x}.$$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \varphi_1(2,y,u)=\dfrac{y-4}{2}=\overline{\varphi}_1 \\ \varphi_2(2,y,u)=\dfrac{u}{2}=\overline{\varphi}_2 \end{cases}$ Nhận được: $\begin{cases} y=2\overline{\varphi}_1+4 \\ u=2\overline{\varphi}_2 \end{cases}$

Điều kiện (4.19) tương ứng $V(2,y,u(2,y))=0$ là $u(2,y)=y-4$ suy ra $2\overline{\varphi}_2=2\overline{\varphi}_1$ hay $\overline{\varphi}_2=\overline{\varphi}_1$. Công thức (4.15): $\dfrac{u}{x}=\dfrac{y-x^2}{x}$.

Vậy $u=y-x^2$ là nghiệm cần tìm.

4.3. PHÂN LOẠI PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG RIÊNG TUYẾN TÍNH CẤP 2 TRƯỜNG HỢP HÀM HAI BIẾN

Xét phương trình:

$$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0 \tag{4.21}$$

trong đó ký hiệu:

u_x thay cho $u'_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; u_{xx} thay cho $u''_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; u_{xy} thay cho $u''_{xy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdots$ **(4.22)**

$a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ là các hàm liên tục trong $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. F là hàm liên tục và biểu diễn tuyến tính đối với u, u_x, u_y.

Ta phân loại (4.21) tại $M_0(x_0, y_0) \in \Omega$ như sau:

a. Phương trình (4.21) thuộc loại hyperbolic tại M_0 nếu $(b^2 - ac)\big|_{M_0} > 0$.

b. Phương trình (4.21) thuộc loại elliptic tại M_0 nếu $(b^2 - ac)\big|_{M_0} < 0$.

c. Phương trình (4.21) thuộc loại parabolic tại M_0 nếu $(b^2 - ac)\big|_{M_0} = 0$.

Phương trình (4.21) thuộc loại hyperbolic (elliptic, parabolic) tại mọi điểm $M(x,y) \in \Omega$ thì ta nói rằng nó thuộc loại hyperbolic (elliptic, parabolic) trên miền Ω.

Dưới đây sẽ dùng các phép biến đổi thích hợp để đưa (4.21) về dạng rút gọn, gọi là các phương trình chính tắc của nó.

Xét phép biến đổi không suy biến

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases} \text{ với điều kiện } J = \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0. \quad \textbf{(4.23)}$$

Trong phép biến đổi này ta giả thiết rằng $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ là các hàm khả vi liên tục đến cấp 2.

Định lí 4.2: Loại của phương trình (4.21) (tại 1 điểm hay trên 1 miền) không thay đổi qua phép biến đổi không suy biến (4.23).

Chứng minh: Từ (4.23), áp dụng công thức đạo hàm của hàm hợp, suy ra:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \quad u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}$$

Thay vào (4.21) nhận được:

$$a_1(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2b_1(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + c_1(\xi,\eta)u_{\eta\eta} + F_1(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0 \quad \textbf{(4.24)}$$

trong đó:

$$a_1(\xi,\eta) = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, \quad \textbf{(4.25)}$$

$$b_1(\xi,\eta) = a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y, \quad \textbf{(4.26)}$$

$$c_1(\xi,\eta) = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 . \tag{4.27}$$

Từ đó suy ra $b_1^2 - a_1c_1 = \left(b^2 - ac\right)J^2$. Chứng tỏ $b_1^2 - a_1c_1$ và $b^2 - ac$ cùng đấu. Định lí được chứng minh.

Chú ý 1: Từ (4.25)-(4.27) ta nhận thấy rằng nếu muốn $a_1 = 0$ hoặc $c_1 = 0$ qua phép biến đổi không suy biến $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ thì hàm số này phải thỏa mãn phương trình sau gọi là ***phương trình đặc trưng*** của phương trình (4.21)

$$a(x,y)\varphi_x^2 + 2b(x,y)\varphi_x\varphi_y + c(x,y)\varphi_y^2 = 0 \tag{4.28}$$

Bổ đề: Giả sử $\varphi(x,y)$ khả vi liên tục trên Ω và trên đó $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 > 0$. Để $\varphi = \varphi(x,y)$ là nghiệm riêng của (4.26) cần và đủ là $\varphi(x,y) = C$ (C là hằng số) là tích phân tổng quát của phương trình vi phân sau

$$a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)\,dxdy + c(x,y)(dx)^2 = 0 \tag{4.29}$$

Phương trình vi phân cấp 1 không tuyến tính (4.29) cũng gọi là phương trình các đường đặc trưng của (4.21).

Phương trình (4.29) thường viết dưới một trong hai dạng sau đây:

$$a(y')^2 - 2b\,y' + c = 0,\ (a \neq 0) \tag{4.30}$$

$$a - 2b\,x' + c(x')^2 = 0,\ (c \neq 0) \tag{4.31}$$

Bây giờ tùy theo dấu của biểu thức $\Delta = b^2 - ac$ sẽ tìm được phép biến đổi thích hợp (4.23) để đưa phương trình (4.21) về dạng chính tắc.

1. Trường hợp $\Delta' = b^2 - ac > 0$: phương trình thuộc loại hyperbolic

a. Nếu $a \neq 0$ ($c \neq 0$ cũng tương tự).

Phương trình đặc trưng (4.30) cho hai phương trình tương đương

$$y' = \frac{b - \sqrt{\Delta'}}{a} \quad \text{và} \quad y' = \frac{b + \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Từ đó tìm được hai tích phân tổng quát tương ứng $\varphi_1(x,y) = C_1$ và $\varphi_2(x,y) = C_2$; C_1, C_2 là các hằng số tùy ý.

Ta thực hiện phép đổi biến: $\begin{cases} \xi = \varphi_1(x,y) \\ \eta = \varphi_2(x,y) \end{cases}$ thì phương trình (4.25) có dạng:

$$u_{\xi\eta} = F_1^*(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) \tag{4.32}$$

trong đó đặt $F_1^* = -\dfrac{F_1}{2b_1}$.

b. Nếu $a = 0$, $c = 0$ thì $b \neq 0$ vì $\Delta' > 0$. Rõ ràng khi đó phương trình có dạng (4.32).

Nếu thực hiện phép biến đổi: $\begin{cases}\xi = \alpha + \beta \\ \eta = \alpha - \beta\end{cases}$ thì (4.32) đưa về dạng:

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = F_1^{**}(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \qquad \textbf{(4.33)}$$

Các phương trình (4.32), (4.33) đều gọi là dạng chính tắc của phương trình loại hyperbolic (4.21).

2. Trường hợp $\Delta = b^2 - ac < 0$: phương trình thuộc loại elliptic.

Vì $0 \le b^2 < ac$ nên $a, c \ne 0$. Phương trình đặc trưng (4.30) cho hai phương trình vi phân tương đương với nó.

$$y' = \frac{b - i\sqrt{-\Delta'}}{a} \quad \text{và} \quad y' = \frac{b + i\sqrt{-\Delta'}}{a}$$

Từ đó tìm được hai tích phân tổng quát: $\varphi(x, y) = C_1$ và $\overline{\varphi(x, y)} = C_2$; $\overline{\varphi(x, y)}$ là liên hợp của $\varphi(x, y)$.

Giả sử $\varphi(x, y) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$. Ta thực hiện phép đổi biến: $\begin{cases}\alpha = \alpha(x, y) \\ \beta = \beta(x, y)\end{cases}$

Khi đó phương trình (4.24) đưa về dạng:

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = F_2^{*}(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \qquad \textbf{(4.34)}$$

trong đó đặt $F_2^* = -\dfrac{F_1}{a_1}$.

Gọi (4.34) là dạng chính tắc của phương trình elliptic (4.21)

3. Trường hợp $\Delta' = b^2 - ac = 0$: phương trình thuộc loại parabolic.

a. Nếu $b \ne 0$ thì $ac \ne 0$ và a, c cùng dương hoặc cùng âm. Khi đó phương trình đặc trưng (4.30) dẫn đến phương trình vi phân tương đương với nó: $y' = \dfrac{b}{a}$

Giả sử phương trình trên cho tích phân tổng quát là $\varphi(x, y)$ = const. Theo bổ đề $\varphi = \varphi(x, y)$ là nghiệm của (4.28). Thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases}\xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y)\end{cases}$$

trong đó $\psi(x, y)$ được chọn sao cho nó độc lập với $\varphi(x, y)$ tức là $\dfrac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \ne 0$.

Với phép biến đổi trên phương trình (4.24) dẫn về dạng:

$$u_{\eta\eta} = F_1^{***}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \qquad \textbf{(4.35)}$$

trong đó: $F_1^{***} = -\dfrac{F_1}{c_1}$

b. Nếu $b = 0$ thì $a = 0, c \neq 0$ hoặc $a \neq 0, c = 0$ bản thân (4.21) có dạng (4.35).

Gọi (4.35) là dạng chính tắc của phương trình parabolic. Từ sự phân loại trên kết luận rằng:

Phương trình truyền sóng thuộc loại hyperbolic.

Phương trình Laplace thuộc loại elliptic.

Phương trình truyền nhiệt thuộc loại parabolic.

Ví dụ 4.6: Hãy tìm nghiệm tổng quát của phương trình dao động của dây:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ a = \text{const}.$$

Giải: Thực hiện phép biến đổi: $\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases}$

Phương trình đưa về dạng $u_{\xi\eta} = 0$. Theo Ví dụ 4.1 ta được nghiệm tổng quát có dạng:

$u = f(\xi) + g(\eta) = f(x + at) + g(x - at)$; f, g là hai hàm tùy ý.

4.4. DẠNG CHÍNH TẮC CỦA PHƯƠNG TRÌNH CÓ HỆ SỐ HẰNG SỐ

Chúng ta xét phương trình:

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d_1 u_x + d_2 u_y + eu + f(x, y) = 0 \qquad \textbf{(4.36)}$$

ở đây a, b, c, d_1, d_2, e là các hằng số; $f(x, y)$ là hàm liên tục trong miền $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ nào đó.

Rõ ràng phương trình đặc trưng của (4.32) cũng có hệ số hằng số, các tích phân tổng quát hay gọi là các đặc trưng của nó là các đường thẳng.

$$y = \int \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} dx = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} x + C$$

Thực hiện các phép biến đổi thích hợp đã trình bày trong mục 3. phương trình (4.36) được dẫn về một trong các dạng sau:

a. Dạng phương trình elliptic

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + d_1 u_\xi + d_2 u_\eta + eu + f(x, y) = 0. \qquad \textbf{(4.37)}$$

b. Dạng phương trình hyperbolic:

$$u_{\xi\eta} + d_1 u_\xi + d_2 u_\eta + eu + f(x, y) = 0 \qquad \textbf{(4.38)}$$

hay $$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + d_1 u_\xi + d_2 u_\eta + eu + f(x, y) = 0.$$

c. Dạng phương trình parabolic

$$u_{\xi\xi} + d_1 u_\xi + d_2 u_\eta + eu + f(x, y) = 0 \qquad \textbf{(4.39)}$$

Tuy nhiên, chúng ta còn có thể đơn giản hóa các phương trình trên nhờ vào việc đổi biến:

$$u = v e^{\alpha\xi+\beta\eta}$$

Trong đó α, β sẽ được chọn thích hợp. Chẳng hạn xét phương trình (4.37). Theo biến mới, hãy thay các biến thức sau vào (4.37).

$$u_\xi = e^{\alpha\xi+\beta\eta}\left(v_\xi + \alpha v\right),\ u_\eta = e^{\alpha\xi+\beta\eta}\left(v_\eta + \beta v\right).$$

$$u_{\xi\xi} = e^{\alpha\xi+\beta\eta}\left(v_{\xi\xi} + 2\alpha v_\xi + \alpha^2 v\right),\ u_{\xi\eta} = e^{\alpha\xi+\beta\eta}\left(v_{\xi\eta} + \alpha v_\eta + \beta v_\xi + \alpha\beta v\right).$$

$$u_{\eta\eta} = e^{\alpha\xi+\beta\eta}\left(v_{\eta\eta} + 2\beta v_\eta + \beta^2 v\right).$$

$$\Rightarrow \quad v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (d_1 + 2\alpha)v_\xi + (d_2 + 2\beta)v_\eta + \left(\alpha^2 + \beta^2 + d_1\alpha + d_2\beta + e\right)v + f_1 = 0.$$

Lấy $\alpha = -\frac{d_1}{2}, \beta = -\frac{d_2}{2}$. Khi đó (4.37) có dạng

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1(\xi,\eta) = 0. \tag{4.40}$$

Tương tự (4.38)-(4.39) đưa về dạng

$$v_{\xi\eta} + \gamma v + f_1(\xi,\eta) = 0.$$

hay

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1(\xi,\eta) = 0. \tag{4.41}$$

$$v_{\xi\xi} + b_2 v_\eta + f_1(\xi,\eta) = 0. \tag{4.42)'}$$

Sau đây chúng ta giải quyết các bài toán tương ứng với từng loại phương trình với hệ số hằng dạng chính tắc.

4.5. PHƯƠNG TRÌNH LOẠI ELLIPTIC

4.5.1. Phương trình Laplace và hàm điều hòa

Toán tử Laplace: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

Phương trình Laplace là phương trình có dạng: $\Delta u = 0$

Theo ký hiệu (4.22) phương trình Laplace được viết lại:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \tag{4.43}$$

Hàm $u(x, y, z)$ thỏa mãn phương trình (4.43) trong miền bị chặn $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ gọi là ***hàm điều hòa*** trong Ω.

Nếu Ω không bị chặn trong $\mathbb{R}^3$, hàm $u(x, y, z)$ gọi là điều hòa trên Ω nếu nó điều hòa tại mọi điểm của Ω, ngoài ra thỏa mãn đánh giá:

$$|u(x, y, z)| \le \frac{C}{r},\ C > 0,\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

4.5.2. Nghiệm cơ bản của phương trình Laplace

Lấy $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Hàm số dạng:

$$\varepsilon(X, X_0) = \frac{1}{4\pi|X - X_0|} \tag{4.44}$$

trong đó $|X - X_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = r$, là một hàm điều hòa trong $\mathbb{R}^3 \setminus \{X_0\}$; gọi là nghiệm cơ bản của (4.43).

Để chứng tỏ $\varepsilon(X, X_0)$ là một hàm điều hòa, ta hãy tính:

$$2rr_x = 2(x - x_0) \Rightarrow r_x = \frac{x - x_0}{r},\ r_{xx} = \frac{r - (x - x_0)r_x}{r^2}.$$

Suy ra: $\varepsilon_x = -\dfrac{r_x}{4\pi r^2} = -\dfrac{x - x_0}{4\pi r^3}$,

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{r^3 - (x - x_0)3r^2 r_x}{r^6} = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{r^2 - 3(x - x_0)^2}{r^5}.$$

Tương tự có: $\varepsilon_{yy} = -\dfrac{1}{4\pi} \cdot \dfrac{r^2 - 3(y - y_0)^2}{r^5}$; $\varepsilon_{zz} = -\dfrac{1}{4\pi} \cdot \dfrac{r^2 - 3(z - z_0)^2}{r^5}$.

Vậy: $\Delta\varepsilon(X, X_0) = 0$.

Tương tự ta có thể kiểm tra được hàm số:

$$\varepsilon(X, X_0) = \frac{1}{2\pi} \ln\frac{1}{r} \quad \text{trong đó } |X - X_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r \tag{4.45}$$

thỏa mãn phương trình Laplace trong không gian hai chiều: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Chú ý 2: Nhắc lại một số kết quả của giải tích véc tơ.

1) Toán tử Napla: $\overrightarrow{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}; \dfrac{\partial}{\partial y}; \dfrac{\partial}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$.

Trường hợp trong mặt phẳng toán tử Napla là: $\overrightarrow{\nabla} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}; \dfrac{\partial}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j}$.

2) Toán tử Laplace: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\nabla}$ (tích vô hướng).

3) $\overrightarrow{\text{grad}} f = \overrightarrow{\nabla} f$; $\text{div}\,\vec{F} = \overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{F}$; $\text{rot}\,\vec{F} = \overrightarrow{\nabla} \times \vec{F}$ (tích véc tơ).

4) Véc tơ đơn vị $\vec{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$, $\alpha = (\vec{n}, \overrightarrow{Ox})$; $\beta = (\vec{n}, \overrightarrow{Oy})$; $\gamma = (\vec{n}, \overrightarrow{Oz})$.

Véc tơ pháp tuyến đơn vị phía ngoài của mặt cầu tâm $(x_0; y_0; z_0)$ bán kính R là:

$$\overrightarrow{n} = \left(\frac{x - x_0}{R}; \frac{y - y_0}{R}; \frac{z - z_0}{R} \right).$$

5) Đạo hàm theo hướng: $\dfrac{\partial f}{\partial \overrightarrow{n}} = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{\nabla} f \cdot \overrightarrow{n}$.

6) Tích phân mặt của một trường véc tơ $\overrightarrow{F} = (P;Q;R)$ trên mặt S có véc tơ pháp tuyến đơn vị $\overrightarrow{n} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$:

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS = \iint_S \left(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\right) dS .$$

7) Định lý Ostrogradsky: $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \left(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}\right) dS = \iiint_{\Omega} \left(\text{div}\,\overrightarrow{F}\right) dV = \iiint_{\Omega} \left(\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{F}\right) dV$.

8) Định lý Green: $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \overrightarrow{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} \right) dS = \iint_{\partial\Omega} \left(u\,\overrightarrow{\text{grad}}\, v - v\,\overrightarrow{\text{grad}}\, u \right) \overrightarrow{n}\, dS$

$$= \iiint_{\Omega} \overrightarrow{\nabla} \left(\text{u}\, \overrightarrow{\nabla} v - v\, \overrightarrow{\nabla} u \right) dV = \iiint_{\Omega} \left(\text{u}\, \Delta v - v\Delta u \right) dV .$$

Trong đó $\overrightarrow{n}$ là véc tơ pháp tuyến ngoài của $\partial\Omega$.

Bổ đề: Giả sử $\varphi(x, y, z)$ liên tục tại lân cận X_0 và S_δ là mặt cầu tâm X_0 bán kính là δ khi đó:

a. $\displaystyle\lim_{\delta \to 0} \iint_{S_\delta} \frac{\partial \varepsilon(X, X_0)}{\partial \overrightarrow{n}} \varphi(X) dS = -\varphi(X_0)$, ($\overrightarrow{n}$ là pháp tuyến ngoài). **(4.46)**

b. $\displaystyle\lim_{\delta \to 0} \iint_{S_\delta} \varepsilon(X, X_0) \varphi(X) dS = 0$. **(4.47)**

4.5.3. Biểu diễn tích phân của hàm điều hòa

Định lí 4.3: Giả sử Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ có biên $\partial\Omega$ trơn từng mảnh. Nếu $u(X)$ điều hòa trên Ω và có đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trên $\overline{\Omega}$ thì ta có.

$$u(X_0) = \iint_{\partial\Omega} \left\{ \varepsilon(X, X_0) \frac{\partial u(X)}{\partial \overrightarrow{n}} - u(X) \frac{\partial \varepsilon(X, X_0)}{\partial \overrightarrow{n}} \right\} dS \tag{4.48}$$

trong đó $X_0 \in \Omega$, $\overrightarrow{n}$ là pháp tuyền ngoài của $\partial\Omega$.

4.5.4. Các tính chất cơ bản của hàm điều hòa

a. Hàm điều hòa trong miền bị chặn Ω có đạo hàm mọi cấp trong miền đó

Thật vậy, từ công thức (4.48) và tính chất của hàm $\varepsilon(X, X_0)$ suy ra được điều này.

b. Nếu u điều hòa trong miền bị chặn $\overline{\Omega}$ thì

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS = 0 \qquad \textbf{(4.49)}$$

ở đây $\vec{n}$ là pháp tuyến của $\partial\Omega$.

Thật vậy, áp dụng công thức Green với hai hàm điều hòa u và $v = 1$, ta có:

$$0 = \iint_{\partial\Omega} \left\{ u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right\} dS = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS .$$

c. **Định lí giá trị trung bình của hàm điều hòa**

Định lí 4.4: Giả sử $u(X)$ là hàm điều hòa trong hình cầu đóng $\overline{\Omega}_R$ tâm X_0 bán kính R khi đó:

$$u(X_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\partial\Omega_R} u(X) dS \qquad \textbf{(4.50)}$$

d. **Nguyên lí cực trị của hàm điều hòa**

Định lí 4.5: Giả sử Ω là miền bị chặn, nếu $u(X)$ là hàm điều hòa trên Ω, liên tục trên $\overline{\Omega}$ và đạt giá trị lớn nhất hay giá trị bé nhất tại một điểm trong của Ω thì $u(X)$ phải là hằng số trên Ω.

Từ định lí suy ra một số hệ quả quan trọng sau đây:

Hệ quả 1: Nếu hàm $u(X)$ là hàm điều hòa trên Ω, liên tục trên $\overline{\Omega}$ và không phải là hằng số thì $u(X)$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên biên $\partial\Omega$.

Hệ quả 2: Giả sử hàm $u(X)$ là hàm điều hòa trên Ω, liên tục trên $\overline{\Omega}$.

i. Nếu $u(X) \ge 0$ trên $\partial\Omega$ thì $u(X) \le 0$ trên Ω.

ii. Nếu $u(X) \le 0$ trên $\partial\Omega$ thì $u(X) \le 0$ trên Ω.

Hệ quả 3: Giả sử u_1, u_2 điều hòa trên Ω, liên tục trên $\overline{\Omega}$.

i. Nếu $u_1(X) \le u_2(X)$ với mọi $X \in \partial\Omega$ thì $u_1(X) \le u_2(X)$ với mọi $X \in \Omega$.

ii. Nếu $|u_1(X)| \le u_2(X)$ với mọi $X \in \partial\Omega$ thì $|u_1(X)| \le u_2(X)$ với mọi $X \in \Omega$.

Hệ quả 4: Giả sử u điều hòa trên Ω, liên tục trên $\overline{\Omega}$.

i. Nếu $u(X) = 0$ với mọi $X \in \partial\Omega$ thì $u(X) = 0$ với mọi $X \in \Omega$.

ii. Nếu $u(X) = C =$ hằng số, với mọi $X \in \partial\Omega$ thì $u(X) = C =$ hằng số, với mọi $X \in \Omega$.

4.5.5. Bài toán Dirichlet

Bài toán Dirichlet đối với phương trình Laplace được phát biểu như sau: Tìm hàm điều hòa $u(X)$ trên miền bị chặn Ω, trùng với hàm $\varphi(X)$ cho trước trên ∂Ω. Tức là tìm $u(X)$ thỏa mãn các điều kiện:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \forall X \in \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(X), \ \forall X \in \partial\Omega \end{cases} \quad \textbf{(4.51)}$$

4.5.5.1. Tính duy nhất nghiệm và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện biên

Định lý 4.6: Nghiệm của bài toán (4.51) nếu tồn tại sẽ duy nhất.

Chứng minh: Giả sử $u_1(X), u_2(X)$ là hai nghiệm của bài toán (4.51). Rõ ràng $u = u_1 - u_2$ thỏa mãn phương trình trên với điều kiện biên $u\big|_{\partial\Omega} = \varphi(X) - \varphi(X) = 0, \ \forall X \in \partial\Omega$. Theo hệ quả 4 thì $u(X) = 0$, với mọi $X \in \Omega$ hay $u_1(X) = u_2(X)$, với mọi $X \in \Omega$.

Định lý 4.7: Nghiệm của bài toán (4.51) phụ thuộc liên tục vào điều kiện biên, tức là nếu u_1, u_2 lần lượt là nghiệm của bài toán:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ \forall X \in \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi_1(X), \ \forall X \in \partial\Omega \end{cases}, \qquad \begin{cases} \Delta u = 0, \ \forall X \in \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = \varphi_2(X), \ \forall X \in \partial\Omega \end{cases}.$$

Khi đó nếu $\left|\varphi_1(X) - \varphi_2(X)\right| < \varepsilon, \ \forall X \in \partial\Omega$ thì $\left|u_1(X) - u_2(X)\right| < \varepsilon, \ \forall X \in \partial\Omega$.

Trong đó $\varepsilon > 0$ đủ bé cho trước.

Chứng minh định lý này chỉ cần để ý đến hệ quả 3.

4.5.5.2. Hàm Green đối với phương trình Laplace trong miền Ω

Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^3$. Hàm số $G(X, X_0)$ gọi là hàm Green của phương trình Laplace trong Ω nếu thỏa mãn hai điều kiện:

❖ $\forall X \in \overline{\Omega}, \ X_0 \in \Omega$ hàm $G(X, X_0)$ có dạng:

$$G(X, X_0) = \varepsilon(X, X_0) + g(X, X_0) \quad \textbf{(4.52)}$$

Trong đó $\varepsilon(X, X_0)$ là nghiệm cơ bản của phương trình Laplace còn $g(X, X_0)$ là hàm điều hòa theo X trong Ω có các đạo hàm riêng cấp1 liên tục trong $\overline{\Omega}$.

❖ $$G(X, X_0)\big|_{\partial\Omega} = 0 \quad \textbf{(4.53)}$$

Từ định nghĩa trên suy ra: $G(X, X_0)$ là hàm điều hòa tại mọi $X \in \Omega \setminus \{X_0\}$,

$g(X, X_0)\big|_{\partial\Omega} = -\varepsilon(X, X_0)\big|_{\partial\Omega}$ và khi $X \to X_0$ thì $G(X, X_0) \to +\infty$.

Gọi X_0 là điểm cực điểm của hàm Green.

4.5.5.3. Biểu diễn nghiệm của bài toán (4.41) qua hàm Green

Định lý 4.8: Giả sử trong miền Ω tồn tại hàm $G(X, X_0)$ và tồn tại nghiệm $u(X)$ của bài toán (4.51), với $u(X)$ có đạo hàm riêng cấp1 liên tục trên $\overline{\Omega}$.

Khi đó:

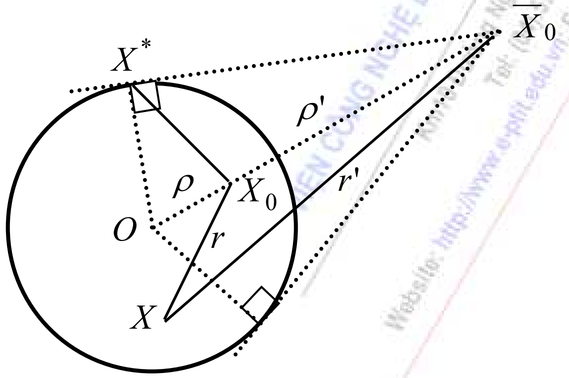
$$u(X_0) = -\iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial G(X, X_0)}{\partial \vec{n}} \varphi(X) dS \qquad \textbf{(4.54)}$$

$\vec{n}$ là pháp tuyến ngoài của $\partial\Omega$.

4.5.5.4. Giải bài toán Dirichlet đối với hình cầu tâm O bán kính R

Xét bài toán (4.51) trên hình cầu tâm O bán kính R, ký hiệu V_R. Biên của hình cầu ký hiệu S_R.

Lấy $X_0 \in V_R$, gọi $\overline{X}_0$ là điểm đối xứng của X_0 qua S_R, tức là $\left|\overrightarrow{OX_0}\right|\left|\overrightarrow{O\overline{X}_0}\right| = R^2$. Gọi $\left|\overrightarrow{OX_0}\right| = \rho$, $\left|\overrightarrow{O\overline{X}_0}\right| = \rho'$. Lấy $X \in \overline{V}_R$, đặt $\left|\overrightarrow{X_0X}\right| = r$, $\left|\overrightarrow{\overline{X}_0X}\right| = r'$.



Định lý 4.9: Hàm Green trong hình cầu V_R có dạng

$$G(X, X_0) = \frac{1}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{R}{\rho r'} \right) \qquad \textbf{(4.55)}$$

Hàm Green trong hình tròn có dạng:

$$G(X, X_0) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\ln\frac{1}{r} - \ln\frac{R}{\rho r'} \right) \qquad \textbf{(4.56)}$$

Định lý 4.10: Giả sử tồn tại nghiệm $u(X)$ của bài toán (4.51) khả vi liên tục trong hình cầu đóng $\overline{V_R}$ khi đó:

$$u(X_0) = \iint\limits_{S_R} P(X, X_0) \varphi(X) dS \qquad \textbf{(4.57)}$$

trong đó $P(X, X_0) = \dfrac{1}{4\pi} \cdot \dfrac{R^2 - \rho^2}{R s^3}$; $\vec{s} = \overrightarrow{X_0X}$, $s = \left|\overrightarrow{X_0X}\right|$ gọi là ***nhân Poisson***, còn (4.57) gọi là *công thức Poisson.*

Nhân Poisson $P(X, X_0)$ có các tính chất sau:

❖ $P(X, X_0) > 0$; $\forall X_0 \in V_R$, $\forall X \in S_R$.

❖ $\iint\limits_{S_R} P(X, X_0) dS = 1$.

❖ $P(X, X_0)$ là hàm điều hòa theo $X_0 \in V_R$.

Như vậy công thức (4.56) cho ta cách xây dựng hàm $u(X)$ nếu nó tồn tại là nghiệm của (4.51). Vấn đề đặt ra là khi nào tồn tại nghiệm của (4.51). Định lý sau đây trả lời câu hỏi đó.

Định lý 4.11: Nếu hàm $\varphi(X)$ liên tục trên biên S_R thì hàm $u(X_0)$ cho bởi công thức Poisson (4.57) chính là nghiệm của bài toán (4.51). Tức là:

$u(X_0)$ liên tục tại mọi $X_0 \in \overline{V_R}$,

$\Delta u(X_0) = 0$ với mọi $X_0 \in V_R$ và $\lim\limits_{X \to X'_0} u(X_0) = \varphi(X'_0)$ với mọi $X'_0 \in S_R$.

4.5.5.5. Giải bài toán Dirichlet trong hình tròn

Theo định lý 4.6 nghiệm của bài toán (4.51) nếu tồn tại thì duy nhất. Trong phần này chúng ta sử dụng phương pháp tách biến hay gọi là phương pháp Fourier để tìm nghiệm của bài toán (4.51) trong hình tròn tâm O bán kính a và đó là nghiệm duy nhất của bài toán.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\big|_S = f_1(s) \end{cases} \qquad \textbf{(4.58)}$$

Trong đó S là đường tròn tâm O bán kính a, s là độ dài cung được tính từ một điểm cố định của đường tròn, $f_1(s)$ là hàm liên tục và thỏa mãn điều kiện $f_1(s + 2\pi a) = f_1(s)$.

Phương trình Laplace trong hệ tọa độ cực có dạng:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad \textbf{(4.49)}$$

Điều kiện biên tương ứng:

$$u(r,\varphi)\Big|_{r=a} = f(\varphi),\ f(\varphi + 2\pi) = f(\varphi). \qquad \textbf{(4.60)}$$

Giải bài toán (4.59) - (4.60) bằng phương pháp Fourier như sau:

Tìm nghiệm của nó trong dạng:

$u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ thỏa mãn $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$.

Thay vào (4.59) nhận được: $\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right)\Phi(\varphi) + \frac{R}{r^2}\Phi''(\varphi) = 0$,

hay $$\frac{1}{R}\left(r^2 R'' + rR'\right) = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Vì hai vế của đẳng thức trên phụ thuộc vào hai biến độc lập khác nhau, nên đẳng thức xảy ra khi cả hai vế cùng bằng một hằng số, gọi λ là hằng số đó.

$$\begin{cases} r^2R''+rR'-\lambda R=0 \\ \Phi''+\lambda\Phi=0. \end{cases}$$

Đối với Φ(φ) ta có bài toán: $\begin{cases} \Phi''+\lambda\Phi=0 \\ \Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi). \end{cases}$

❖ Nếu $\lambda<0$ thì $\Phi\equiv 0$.

❖ Nếu $\lambda\ge 0$ (do điều kiện tuần hoàn chu kỳ 2π của Φ) thì

$$\Phi(\varphi)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi,\ \text{với}\ \lambda=n^2,\ n\in\mathbb{N}.$$

Như vậy ta đã tìm được tập hợp các hàm Φ(φ): $\Phi_n(\varphi)=a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi$.

Thay $\lambda=n^2$ vào phương trình đối với $R(r)$ sẽ có:

$$r^2R''+rR'-n^2R=0.$$

Đó là phương trình Euler, có hai nghiệm độc lập tuyến tính $R=r^n$ và $R=r^{-n}$. Chúng ta cần tìm nghiệm trong hình tròn tâm O, vậy lấy $R=r^n$. Theo tính chất của phương trình tuyến tính thì nghiệm của bài toán (4.59) có dạng:

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)$$

Các hằng số a_n, b_n được xác định bởi điều kiện biên.

Ta có $$u(a,\varphi)=f(\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^*\cos n\varphi+b_n^*\sin n\varphi$$

Mặt khác $$u(a,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\left(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi\right)$$

So sánh các hệ số của $\cos n\varphi$ và $\sin n\varphi$, để ý đến công thức tính các hệ số Fourier của $f(\varphi)$.

Suy ra: $$a_0=a_0^*=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta$$

$$a_n=\frac{a_n^*}{a^n}=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$$

$$b_n=\frac{b_n^*}{a^n}=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\,d\theta$$

Tóm lại nghiệm của (4.59) - (4.60) là:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n(\varphi-\theta)\,d\theta \qquad \textbf{(4.61)}$$

Tương tự, nghiệm của bài toán Dirichlet ngoài hình tròn tâm O bán kính a :

$$\begin{cases}\Delta u=0\\ u\Big|_S=f_1(s)\end{cases}$$

Có dạng: $$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n(\varphi-\theta)\,d\theta \qquad \textbf{(4.62)}$$

4.6. PHƯƠNG TRÌNH LOẠI HYPERBOLIC

Phương trình loại Hyperbolic đơn giản là phương trình truyền sóng.

Dạng tổng quát là: $\qquad u_{tt}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t)$

Trong đó $\qquad \Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$.

a là hằng số, gọi là vận tốc truyền sóng, t là biến thời gian. Nếu $f=0$ ta có phương trình truyền sóng thuần nhất.

4.6.1. Bài toán Cauchy đối với phương trình truyền sóng và định lý duy nhất nghiệm

4.6.1.1. Bài toán Cauchy

Để dễ hình dung về hình học chúng ta hãy xét $u=u(x,y,t)$.

Bài toán đặt ra: Hãy tìm nghiệm của phương trình

$$u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+f(x,y,t) \qquad \textbf{(4.63)}$$

thỏa mãn các điều kiện ban đầu:

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y) \qquad \textbf{(4.64)}$$

$$u_t(x,y,0)=\psi(x,y) \qquad \textbf{(4.65)}$$

Trong hình nón K giới hạn bởi mặt phẳng $t=0$ và mặt nón có phương trình

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2(t-t_0)^2,\ t\ge 0.$$

x_0, y_0, t_0 là các hằng số nào đó. Các hàm $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ xác định trên hình tròn:

$$\begin{cases}t=0\\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2=a^2t_0^2\end{cases}$$

Sau đây gọi mặt hình nón là S, đáy mặt nón là B.

Tương tự như công thức (4.28), chúng ta xét trong không gian $\mathbb{R}^3$ các mặt nón:

$$F(x,y,t)=a^2(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=0$$

chính là các đặc trưng của phương trình (4.63).

4.6.1.2. Định lý duy nhất nghiệm

Định lý 4.12: Nghiệm của bài toán (4.63) - (4.65) có đạo hàm riêng đến cấp 2 liên tục trong K là duy nhất.

Chứng minh: Nếu u_1, u_2 là nghiệm của bài toán (4.63) - (4.65) thì $u = u_1 - u_2$ là nghiệm của bài toán sau đây:

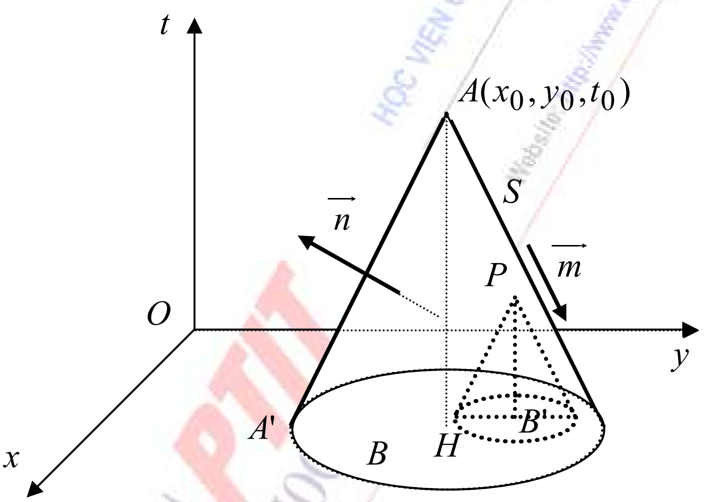
$$u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \tag{4.66}$$

thỏa mãn các điều kiện ban đầu: $u(x,y,0) = 0$ **(4.67)**

$$u_t(x,y,0) = 0 \tag{4.68}$$

Ta chứng minh bài toán (4.66)-(4.68) có nghiệm $u(x,y,t) = 0$ trên $\overline{K}$.

Trước hết ta chứng minh $u = 0$ tại đỉnh A của hình nón K. Để làm điều đó ta biến đổi như sau:



Nhân (4.66) với $2u_t$, rồi lấy tích phân trên K, sẽ có

$$I = \iiint\limits_K \left(2u_{tt}u_t - a^2(2u_t u_{xx} + 2u_t u_{yy})\right)dxdydt = 0$$

Nhận thấy: $2u_{tt}u_t = \left(u_t^2\right)_t$; $2u_t u_{xx} = 2(u_t u_x)_x - \left(u_x^2\right)_t$; $2u_t u_{yy} = 2(u_t u_y)_y - \left(u_y^2\right)_t$.

Suy ra: $$I = \iiint\limits_K \left\{\left(u_t^2 + a^2u_x^2 + a^2u_y^2\right)_t - 2a^2(u_t u_x)_x - 2a^2(u_t u_y)_y\right\}dxdydt = 0$$

Áp dụng công thức Ostrogradski:

$$I = \iint\limits_{\partial K} \left\{\left(u_t^2 + a^2u_x^2 + a^2u_y^2\right)\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ot}) - 2a^2u_t u_x \cos(\vec{n},\overrightarrow{Ox}) - 2a^2u_t u_y \cos(\vec{n},\overrightarrow{Oy})\right\} dS = 0$$

Trên biên B, từ (4.67) và (4.68) suy ra $u_t = u_x = u_y = 0$. Vậy:

$$I=\iint\limits_S \left\{\left(u_t^2+a^2u_x^2+a^2u_y^2\right)\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ot})-2a^2u_tu_x\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ox})-2a^2u_tu_y\cos(\vec{n},\overrightarrow{Oy})\right\}dS=0$$

Vì $\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ot})=\sin\widehat{A'AH}=\dfrac{HA'}{AA'}=\dfrac{at_0}{t_0\sqrt{a^2+1}}=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}=$ hằng số.

$$J=\iint\limits_S \left\{\left(u_t^2+a^2u_x^2+a^2u_y^2\right)\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ot})-2a^2\left(u_tu_x\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ox})+u_tu_y\cos(\vec{n},\overrightarrow{Oy})\right)\right\}\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ot})dS$$

$$=\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ot})I=0.$$

Mặt khác từ phương trình mặt nón $F(x,y,t)=0$ suy ra: $F_t^2=a^2F_x^2+a^2F_y^2$

và $\overrightarrow{\text{grad}}\,F\,//\,\vec{n} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{F_t}{\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ot})}=\dfrac{F_x}{\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ox})}=\dfrac{F_y}{\cos(\vec{n},\overrightarrow{Oy})}$.

Vậy $\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ot})=a^2\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ox})+a^2\cos(\vec{n},\overrightarrow{Oy})$.

Từ đó J có thể biểu diễn dưới dạng:

$$J=\iint\limits_S \left(au_t\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ox})-au_x\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ot})\right)^2dS+\left(au_t\cos(\vec{n},\overrightarrow{Oy})-au_y\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ot})\right)^2dS$$

Do $J=0$ suy ra các biểu thức dưới dấu tích phân phải bằng không.

Chứng tỏ: $\dfrac{u_x}{\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ox})}=\dfrac{u_y}{\cos(\vec{n},\overrightarrow{Oy})}=\dfrac{u_t}{\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ot})}=v$

Gọi $\vec{m}$ là véc tơ chỉ phương của đường sinh của mặt nón, trên đường sinh đó, chúng ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{m}}=\overrightarrow{\text{grad}}\,u\cdot\vec{m}=u_x\cos(\vec{m},\overrightarrow{Ox})+u_y\cos(\vec{m},\overrightarrow{Oy})+u_t\cos(\vec{m},\overrightarrow{Ot})$$

$$=v\left(\cos(\vec{m},\overrightarrow{Ox})\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ox})+\cos(\vec{m},\overrightarrow{Oy})\cos(\vec{n},\overrightarrow{Oy})+\cos(\vec{m},\overrightarrow{Ot})\cos(\vec{n},\overrightarrow{Ot})\right)$$

$$=v\left(\vec{m}\cdot\vec{n}\right)=0.$$

Suy ra u là hằng số trên đương sinh. Theo (4.67) nên $u=0$ trên dường sinh, nói riêng $u=0$ tại A.

Lấy tùy ý $P\in\overline{K}$. Dựng mặt nón đỉnh P, đáy của nó là $B'\subset B$.

Như vậy; $u\Big|_{B'}=u_t\Big|_{B'}=0$. Theo trên $u=0$ tại P.

Vì P lấy tùy ý thuộc $\overline{K}$, vậy $u=0$ trên $\overline{K}$.

4.6.2. Công thức nghiệm của bài toán Cauchy

Trong phần này sẽ giải quyết vấn đề tồn tại nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình truyền sóng bằng cách thiết lập nghiệm cụ thể của bài toán này.

Xét bài toán:

$$u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + f(x, y, z, t) \quad \textbf{(4.69)}$$

thỏa mãn các điều kiện ban đầu: $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$ **(4.70)**

$$u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z) \quad \textbf{(4.71)}$$

Hãy tìm nghiệm của bài toán trong miền $t > 0$ với giả thiết φ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp 3, ψ có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp 2 còn f liên tục theo biến t và có các đạo hàm riêng liên tục đến cấp 1 theo x, y, z. Bài toán (4.69) - (4.71) được giải quyết trên cơ sở giải quyết ba bài toán phụ sau đây:

Bài toán 1:
$$\begin{cases} v_{tt} = a^2\left(v_{xx} + v_{yy} + v_{zz}\right) \\ v(x, y, z, 0) = 0 \\ v_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z) \end{cases} \quad \textbf{(4.72)}$$

Bài toán 2:
$$\begin{cases} \omega_{tt} = a^2\left(\omega_{xx} + \omega_{yy} + \omega_{zz}\right) \\ \omega(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) \\ \omega_t(x, y, z, 0) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(4.73)}$$

Bài toán 3 (dao động cưỡng bức):
$$\begin{cases} u^*_{tt} = a^2\left(u^*_{xx} + u^*_{yy} + u^*_{zz}\right) + f(x, y, z, t) \\ u^*(x, y, z, 0) = 0 \\ u^*_t(x, y, z, 0) = 0 \end{cases} \quad \textbf{(4.74)}$$

Nghiệm của bài toán ban đầu sẽ là $u = v + \omega + u^*$ trong đó v, ω, u^* là nghiệm của bài toán 1, 2, 3 tương ứng.

a. Giải bài toán 1

Định lý 4.13: Nghiệm của bài toán 1 (4.72)có dạng

$$v(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{S_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS \quad \textbf{(4.75)}$$

Trong đó $t > 0$, S_{at} là mặt cầu tâm (x, y, z), bán kính at có phương trình:

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = a^2 t^2.$$

b. Giải bài toán 2

Định lý 4.14: Giả sử v_φ là nghiệm của bài toán 1 ứng với điều kiện biên φ. Khi đó nghiệm của bài toán 2 (4.73)là:

$$\omega(x, y, z, t) = \left(v_\varphi\right)_t = \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} \quad \textbf{(4.76)}$$

c. Giải bài toán 3

Định lý 4.15 (Nguyên lí Duhamel): Nếu $V(\lambda, x, y, z, t)$ là nghiệm của bài toán sau đây:

$$\begin{cases} V_{tt} = a^2 \Delta V \\ V(\lambda, x, y, z, 0) = 0 \\ V_t(\lambda, x, y, z, 0) = f(x, y, z, \lambda) \end{cases}$$

thì hàm số cho bởi công thức dưới đây là nghiệm của bài toán 3 (4.74)

$$u^*(x, y, z, t) = \int_0^t V(\lambda, x, y, z, t-\lambda) d\lambda \,. \tag{4.77}$$

Cuối cùng nghiệm của bài toán Cauchy (4.69)-(4.71) biểu diễn trong dạng:

$$u = v_\psi + \left(v_\varphi\right)_t + u^* = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{ \iint_{S_{at}} \frac{\psi}{t} dS + \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}} \frac{\varphi}{t} dS + \iiint_{V_{at}} \frac{f\left(\xi, \eta, \zeta, t - \dfrac{r}{a}\right)}{r} dV \right\} \tag{4.78}$$

trong đó: $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$.

Công thức (4.78) gọi là ***công thức Kirchoff***.

4.6.3. Công thức nghiệm của bài toán Cauchy có số biến không gian ít hơn ba

4.6.3.1. Công thức Poisson

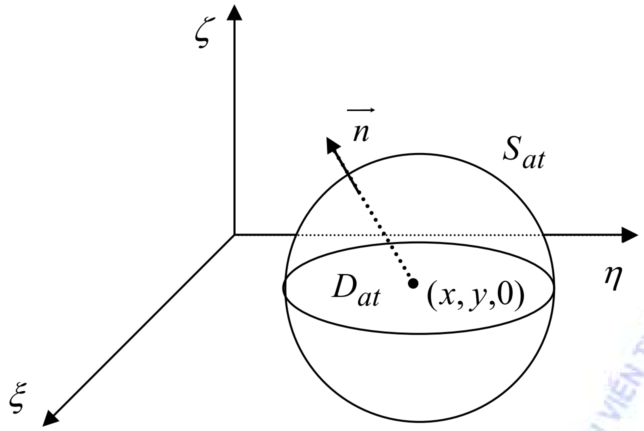
Tìm nghiệm của bài toán:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y) \\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y) \end{cases} \tag{4.79}$$

Vì nghiệm của bài toán Cauchy là duy nhất nên ta có thể xem nghiệm của bài toán (4.60) là nghiệm của bài toán có 3 biến không gian sau

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) \\ u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y) \\ u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y) \end{cases} \tag{4.80}$$

Áp dụng công thức (4.78) ta có nghiệm: $u = \dfrac{1}{4\pi a^2}\left\{ \iint_{S_{at}} \dfrac{\psi}{t} dS + \dfrac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}} \dfrac{\varphi}{t} dS \right\}$



$$S_{at} : (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta)^2 = a^2t^2$$

$D_{at} : (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \le a^2t^2$, hình tròn tâm (x, y) bán kính at.

$$d\xi d\eta = dS\left|\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{O\zeta}\right)\right| = dS\frac{|\zeta|}{at} \quad \Rightarrow dS = at\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}$$

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{S_{at}} \frac{\Phi}{t} dS = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{D_{at}} \frac{\Phi d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}$$

Vậy nghiệm của bài toán (4.80) cho bởi công thức:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a}\left\{\iint\limits_{D_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{D_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}}\right\} \qquad \textbf{(4.81)}$$

gọi (4.81) là ***công thức Poisson***.

4.6.3.2. Công thức D′Alembert

Tìm nghiệm của bài toán dao động của dây:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad \textbf{(4.82)}$$

Theo ví dụ 4.4 phương trình $u_{tt} = a^2u_{xx}$ có nghiệm tổng quát

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at).$$

Áp dụng điều kiện đầu ta có: $\quad f(x) + g(x) = \varphi(x)$

$$af'(x) - ag'(x) = \psi(x)$$

Do đó: $\begin{cases} f(x + at) + g(x + at) = \varphi(x + at) \\ f(x - at) + g(x - at) = \varphi(x - at) \end{cases}$

và $$f(x+at)-f(x-at)-g(x+at)+g(x-at)=\int_{x-at}^{x+at}\frac{\psi(v)}{a}dv.$$

Vậy nghiệm của (4.82) có dạng:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(v)dv \qquad \textbf{(4.83)}$$

Công thức (4.83) gọi là ***công thức D'Alembert***.

4.6.4. Bài toán hỗn hợp

Cho $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ là miền bị chặn có biên là $\partial\Omega$. Gọi hình trụ trong $\mathbb{R}^4$ là hình cho bởi $Q_T=\Omega\times(0,T)$ với $T>0$. Mặt xung quanh của Q_T là $S_T=\partial\Omega\times(0,T)$. Đáy dưới và đáy trên của Q_T lần lượt là Ω và Ω_T.

Trong Ω_T xét bài toán hỗn hợp đối với phương trình truyền sóng sau đây:

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})\\ u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)\\ u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z)\\ u(x,y,z,t)\big|_{S_T}=0 \quad \text{hay} \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{S_T}=0 \end{cases} \qquad \textbf{(4.84)}$$

Biết rằng φ khả vi liên tục trên Ω, ψ liên tục trên $\overline{\Omega}$ và $\vec{n}$ là véc tơ pháp của S_T.

4.7. PHƯƠNG TRÌNH LOẠI PARABOLIC

Trong $\mathbb{R}^2$ cho miền mở Ω bị chặn, có biên $\partial\Omega$.

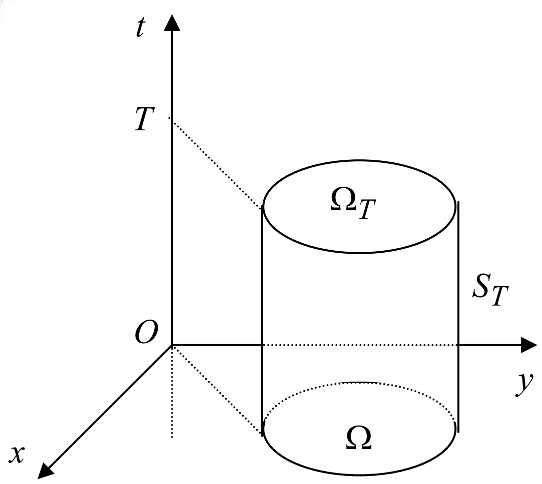
Ta kí hiệu như sau:

Hình trụ $Q_T=\Omega\times(0,T)$ với $T>0$.

Mặt trụ $S_T=\partial\Omega\times(0,T)$.

Đáy trên $\Omega_T=\{(x,y,T)\,|\,(x,y)\in\Omega\}$

Trong Ω_T xét phương trình truyền nhiệt



$$\mathrm{T}u\equiv u_t-(u_{xx}+u_{yy})=f(x,y,t) \qquad \textbf{(4.85)}$$

4.7.1. Nguyên lý cực trị trong miền bị chặn đối với phương trình (4.85)

4.7.1.1. Nguyên lý cực trị

Định lý 4.16: Nếu $u(x, y, t)$ là nghiệm của phương trình $Tu = 0$ và liên tục trên $\overline{\Omega_T}$ thì u đạt giá trị lớn nhất và giá trị bé nhất trên miền $\sigma = S_T \cup \Omega$.

$$\min_{\sigma} u(x, y, t) \le u(x, y, t) \le \max_{\sigma} u(x, y, t)$$

4.7.1.2. Tính duy nhất nghiệm của bài toán biên thứ nhất đối với phương trình truyền nhiệt

Bài toán biên thứ nhất có dạng sau đây:

$$\begin{cases} \mathrm{T}u \equiv u_t - (u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t) \\ u\big|_{\sigma} = \varphi(x, y, t)\big|_{\sigma} \end{cases} \tag{4.86}$$

Định lý 4.17: Nghiệm của bài toán (4.86) nếu có là duy nhất

Chứng minh: Giả sử bài toán biên thứ nhất có hai nghiệm u_1, u_2 khi đó $u = u_1 - u_2$ là nghiệm của bài toán:

$$\begin{cases} \mathrm{T}u = 0 \\ u\big|_{\sigma} = 0 \end{cases}$$

Từ bất đẳng thức mô tả nguyên lý cực trị suy ra $u_1 = u_2$.

4.7.2. Nguyên lý cực trị trong miền không bị chặn đối với phương trình truyền nhiệt

Kí hiệu $G_T = \mathbb{R}^2 \times (0, T),\ T > 0$.

Xét phương trình truyền nhiệt $\mathrm{T}u \equiv u_t - (u_{xx} + u_{yy}) = 0$ trên G_T.

4.7.2.1. Nguyên lý cực trị

Định lý 4.18: Nếu $u(x, y, t)$ bị chặn trên G_T và có đạo hàm riêng theo x, y liên tục đến cấp 2, có đạo hàm riêng theo t liên tục đến cấp 1 đồng thời là nghiệm của phương trình $\mathrm{T}u = 0$ thì

$$\inf_{\mathbb{R}^2} u(x, y, 0) \le u(x, y, t) \le \sup_{\mathbb{R}^2} u(x, y, 0)\ ,\ \forall (x, y, t) \in G_T .$$

4.7.2.2. Bài toán Cauchy và định lý duy nhất nghiệm

Xét bài toán Cauchy trong miền $G_T = \mathbb{R}^2 \times (0, T)$ sau:

$$\begin{cases} \mathrm{T}u \equiv u_t - (u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y, t) \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y) \end{cases} \tag{4.87}$$

Định lý 4.19: Nghiệm bị chặn của bài toán Cauchy (4.87), nếu có là duy nhất.

4.7.3. Công thức Poisson đối với phương trình truyền nhiệt

Xét bài toán:

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad \textbf{(4.88)}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad \textbf{(4.89)}$$

Ta tìm nghiệm bị chặn bài toán (4.88)-(4.89) bằng cách dùng phép biến đổi tích phân Fourier (công thức (2.77)-(2.80) chương II).

Đặt $\quad U(f,t) = \mathscr{F}\left\{ u(x,t) \right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i2\pi fx} dx .$

$$\mathscr{F}\left\{ u_t(x,t) \right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} e^{-i2\pi fx} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i2\pi fx} dx = \frac{\partial}{\partial t} U(f,t) .$$

Áp dụng công thức biến đổi Fourier của đạo hàm ta có: $\mathscr{F}\left\{ u_{xx}(x,t) \right\} = (i2\pi f)^2 U(f,t)$.

Thay vào phương trình (4.88) ta có phương trình ảnh: $\quad \dfrac{\partial}{\partial t} U(f,t) = -4\pi^2 f^2 a^2 U(f,t)$.

Giải phương trình vi phân theo biến số t dạng tách biến được nghiệm

$$U(f,t) = C(f) e^{-4\pi^2 f^2 a^2 t}$$

Theo điều kiện đầu: $\ C(f) = U(f,0) = \mathscr{F}\left\{ \varphi(x) \right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i2\pi fx} dx .$

Suy ra $$U(f,t) = e^{-4\pi^2 f^2 a^2 t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{-i2\pi fx} dx .$$

Áp dụng công thức biến đổi ngược (2.80) ta có nghiệm của phương trình (4.88)-(4.89):

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}\left\{ U(f,t) \right\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(f,t) e^{i2\pi fx} df = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi fx} \left(e^{-4\pi^2 f^2 a^2 t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-i2\pi f\xi} d\xi \right) df$$

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi fx} e^{-i2\pi f\xi} e^{-4\pi^2 f^2 a^2 t} df = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 a^2 t \left(f^2 + \frac{i(\xi - x) f}{2\pi a^2 t} \right)} df$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 a^2 t \left(f^2 + \frac{i(\xi - x) f}{2\pi a^2 t} \right)} df = e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 a^2 t \left(f + \frac{i(\xi - x)}{4\pi a^2 t} \right)^2} df = e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}$$

Vậy $$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi . \qquad \textbf{(4.90)}$$

Nhận xét:

1. Nếu ta gọi X là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn $N(x; 2a^2 t)$ thì công thức nghiệm (4.90) có thể xem là kỳ vọng $u(x,t) = \mathrm{E}\varphi(X)$.

2. Trong chứng minh trên ta đã sử dụng tích phân Euler

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2+2bx}dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\left(x^2-\frac{2b}{a^2}x\right)}dx=e^{\frac{b^2}{a^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\left(x-\frac{b}{a^2}\right)^2}dx\,;\ \ (a>0)$$

Đổi biến số $y=a\left(x-\dfrac{b}{a^2}\right)$ ta được

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2+2bx}dx=\frac{e^{\frac{b^2}{a^2}}}{a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy=\frac{e^{\frac{b^2}{a^2}}}{a}\int_{0}^{\infty} e^{-t}t^{-1/2}dt=\frac{e^{\frac{b^2}{a^2}}}{a}\sqrt{\pi}\,. \tag{4.91}$$

Tương tự
$$J=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2+i2bx}dx=e^{\frac{-b^2}{a^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\left(x-\frac{ib}{a^2}\right)^2}dx=\frac{e^{\frac{-b^2}{a^2}}}{a}\sqrt{\pi}\,. \tag{4.92}$$

3. Bằng cách hoàn toàn tương tự có các kết quả sau đây:

Nghiệm của bài toán Cauchy trong không gian hai chiều:

$$u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)\ ;\ u(x,y,0)=\varphi(x,y),\ \ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

được cho bởi công thức Poisson sau:

$$u(x,y,t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\eta)e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{4a^2t}}d\xi d\eta\,. \tag{4.93}$$

Nghiệm của bài toán Cauchy trong không gian 3 chiều

$$u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)\ ;\ u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z),\ \ \forall x,y,z\in\mathbb{R}$$

cho bởi công thức Poisson sau:

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi,\eta,\zeta)e^{-\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2t}}d\xi d\eta d\zeta\,. \tag{4.94}$$

TÓM TẮT

Phương trình đạo hàm riêng

Phương trình đạo hàm riêng là một phương trình liên hệ giữa hàm nhiều biến phải tìm $u(x_1,x_2,...,x_n)$, các đạo hàm riêng của chúng và các biến độc lập $x_1,x_2,...,x_n$.

Cấp của phương trình đạo hàm riêng là cấp cao nhất của đạo hàm riêng có mặt trong phương trình đó.

Phương trình tuyến tính cấp 1 thuần nhất $\sum_{k=1}^{n} X_k(x_1,...,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_k}=0$ có nghiệm tổng quát là $u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{n-1})$, trong đó Φ là hàm số tuỳ ý khả vi liên tục và $\varphi_i=\varphi_i(x_1,...,x_n);\ i=1,...,n-1$ là $n-1$ tích phân độc lập của hệ $\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots=\frac{dx_n}{X_n}$.

Phương trình tuyến tính không thuần nhất $\sum_{k=1}^{n} X_k(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_k}=f(x_1,...,x_n,u)$ được đưa về phương trình tuyến tính thuần nhất bằng cách tìm nghiệm dưới dạng hàm ẩn $V(x_1,...,x_n,u)=0$ thỏa mãn $\sum_{k=1}^{n} X_k(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial x_k}+f(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial V}{\partial u}=0$.

Phân loại phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 2 trường hợp hàm hai biến

$a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+F(x,y,u,u_x,u_y)=0$

Phương trình thuộc loại hyperbolic, elliptic hay parabolic tùy theo $\Delta'=b^2-ac$ dương, âm hay bằng 0. Trong mỗi trường hợp ta có thể sử dụng phép đổi biến để đưa về dạng chính tắc.

Phương trình Laplace $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$

Nghiệm của phương trình Laplace trong miền bị chặn $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ gọi là ***hàm điều hòa*** trong Ω. Nếu Ω không bị chặn trong $\mathbb{R}^3$, hàm $u(x,y,z)$ gọi là điều hòa trên Ω nếu nó điều hòa tại mọi điểm của Ω, ngoài ra thỏa mãn đánh giá: $|u(x,y,z)|\le\frac{C}{r}$.

Bài toán Dirichlet $\begin{cases}\Delta u=0,\ \forall X\in\Omega\\ u\big|_{\partial\Omega}=\varphi(X),\ \forall X\in\partial\Omega\end{cases}$ có nghiệm $u(X_0)=\iint\limits_{S_R}P(X,X_0)\varphi(X)dS$

trong đó $P(X,X_0)=\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{Rs^3}$; $\vec{s}=\overrightarrow{X_0X}$, $s=\left|\overrightarrow{X_0X}\right|$ gọi là ***nhân Poisson***.

Bài toán Dirichlet trong hình tròn $\begin{cases}\Delta u=0\\ u\big|_S=f_1(s)=f(\varphi)\end{cases}$ có nghiệm

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n(\varphi-\theta)\,d\theta.$$

Phương trình loại Hyperbolic đơn giản là phương trình truyền sóng.

Dạng tổng quát là: $u_{tt}=a^2\Delta u+f(x,y,z,t)$, trong đó $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$. Nghiệm của phương trình thỏa mãn các điều kiện ban đầu: $u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z)$

$u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z)$

$$u = v_\psi + \left(v_\varphi\right)_t + u^* = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{\iint_{S_{at}} \frac{\psi}{t} dS + \frac{\partial}{\partial t}\iint_{S_{at}} \frac{\varphi}{t} dS + \iiint_{V_{at}} \frac{f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\dfrac{r}{a}\right)}{r} dV\right\}.$$

Nghiệm của bài toán truyền sóng trong mặt phẳng:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\left\{\iint_{D_{at}} \frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_{D_{at}} \frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}}\right\}$$

Nghiệm của bài toán truyền sóng trên dây: $u(x,t) = \dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(v)dv$.

Công thức nghiệm bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt

- Trên dây $u_t = a^2 u_{xx}$, $u(x,0) = \varphi(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{\frac{-(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi .$$

- Trong mặt phẳng $u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)$; $u(x,y,0) = \varphi(x,y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$

$$u(x,y,t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,\eta) e^{\frac{-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}{4a^2t}} d\xi d\eta .$$

- Trong không gian $u_t = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)$; $u(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z)$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,\eta,\zeta) e^{\frac{-(\xi-x)^2-(\eta-y)^2-(\zeta-z)^2}{4a^2t}} d\xi d\eta d\zeta .$$

CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP

4.1 Phương trình đạo hàm riêng là phương trình chỉ chứa các đạo hàm riêng.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.2 Nghiệm tổng quát của phương trình đạo hàm riêng phụ thuộc các hàm số tùy ý

Đúng ☐ Sai ☐.

4.3 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin x^2 y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos y\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^3 - 3e^{xy^2}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \cos u = 0$ là phương trình đạo hàm riêng cấp 3.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.4 Phương trình đạo hàm riêng riêng tuyến tính cấp 2 có thể phân 3 loại: Hyperbolic, eliptic, parabolic và loại của phương trình không thay đổi khi thực hiện phép đổi biến số không suy biến.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.5 Nghiệm của phương trình Laplace trong miền bị chặn được gọi là hàm điều hòa.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.6 Nếu hàm $u(X)$ là hàm điều hòa trên Ω, liên tục trên $\overline{\Omega}$ và không phải là hằng số thì $u(X)$ đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên biên $\partial\Omega$.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.7 Bài toán Dirichlet đối với phương trình Laplace nếu tồn tạo là duy nhất.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.8 Phương trình truyền sóng thuộc loại parabolic.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.9 Nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình truyền nhiệt là một hàm tuần hoàn vì có thể tìm nghiệm bằng phép biến đổi Fourier.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.10 Công thức Kirchoff, công thức Poisson và công thức D'Alembert lần lượt biểu diễn nghiệm của bài toán Cauchy của phương trình truyền sóng trong không gian, trong mặt phẳng và trên dây.

Đúng ☐ Sai ☐.

4.11 Xác định loại của phương trình và đưa về dạng chính tắc các phương trình sau đây:

a. $u_{xx} + 3u_{xy} + 4u_{yy} + 5u_x - 2u_y + 4u = 2x - 3y$.

b. $u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} - 32u = 0$.

c. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 9u_x + 9u_y - 2u = 0$.

d. $u_{xx} + 4u_{xy} + 13u_{yy} + 3u_y - 9u + 9(x+y) = 0$.

4.12. Xác định loại các phương trình sau:

a. $u_{xx} - 2\cos u_{xy} - (3 + \sin^2 x)u_{yy} - yu_y = 0$.

b. $xu_{xx} + yu_{yy} + 3y^2 u_x = 0$.

4.13. Tìm nghiệm của phương trình: $4u_{tt} = 25u_{xx}$ với điều kiện: $\begin{cases} u(x,0) = \sin 2x \\ u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \end{cases}$

4.14. Tìm nghiệm của phương trình $u_{xy} = x^2 y$ thỏa mãn điều kiện: $\begin{cases} u(x,0) = x^2 \\ u(1,y) = \cos y \end{cases}$.

4.15. Tìm tích phân tổng quát của các phương trình:

a. $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$.

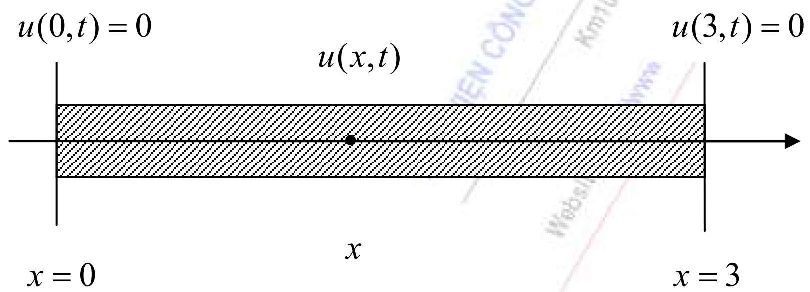
b. $4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = 0$.

4.16. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

a. $u_{xx} + u_{yy} = e^{2x+y}$ biết rằng phương trình có nghiệm riêng dạng $u = ke^{2x+y}$.

b. $u_{xx} - 4u_{yy} = e^{2x+y}$ biết rằng phương trình có nghiệm riêng dạng $u = kxe^{2x+y}$.

4.17. Một thanh có chiều dài 3 đơn vị, có hệ số khuyếch đại tán bằng hai đơn vị.



Gọi $u(x,t)$ là nhiệt độ vào thời điểm t tại vị trí x trên thanh. Giả sử nhiệt độ ban đầu tại x là: $u(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x$.

Nhiệt độ hai đầu luôn bằng 0 thì $u(x,t)$ là nghiệm của phương trình:

$$u_t = 2u_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0.$$

Với điều kiện: $\begin{cases} u(0,t) = u(3,t) = 0 \\ u(x,0) = 5\sin 4\pi x - 3\sin 8\pi x + 2\sin 10\pi x \end{cases}$

a. Giải phương trình bằng phép biến đổi Fourier hữu hạn

b. Giải phương trình bằng phép biến đổi Laplace.

4.18. Tìm k để các hàm số sau đây là hàm điều hòa

a. $u(x,y) = x^3 + kxy^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b. $u = \dfrac{1}{r^k}$ với $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

4.19. Tìm các giá trị lớn nhất và bé nhất của các hàm điều hòa sau đây:

a. $u(x,y) = xy$ trên miền $\overline{D}: x^2 + y^2 \le 1$.

b. $u(x,y)=x^2-y^2$ trên miền $\overline{D}$: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 1$.

4.20. Giả sử u là hàm khả vi liên tục đến cấp 2 trong $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ và $\iint\limits_S \dfrac{\partial u}{\partial \overline{n}}dS=0$ với mọi mặt cong kín S bất kỳ nằm trong Ω, $\overrightarrow{n}$ là véc tơ pháp tuyến đơn vị của S. Chứng minh u là hàm điều hòa trên Ω.

4.21. Giải bài toán Dirichlet đối với phương trình $\Delta u=0$ trong các trường hợp sau:

a. Tìm nghiệm phía trong hình tròn tâm O bán kính bằng 1 thỏa mãn điều kiện $u=\sin 2\varphi\ (0\le\varphi\le 2\pi)$ trên đường tròn $x^2+y^2=1$.

b. Tìm nghiệm phía ngoài hình tròn tâm O bán kính bằng 2 thỏa mãn:

$$u\big|_S=x^2-xy^2+2,\ S \text{ là đường tròn tâm O bán kính bằng 2.}$$

4.22. Giải bài toán Cauchy sau đây:

$$4y^2u_{xx}+2(1-y^2)u_{xy}-u_{yy}-\frac{2y}{1+y^2}(2u_x-u_y)=0$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_y(x,0)=\psi(x);\ \ \varphi(x),\psi(x) \text{ khả vi liên tục đến cấp 2.}$$

4.23. Tìm nghiệm của phương trình: $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}-u_{tt}=0$ trong mỗi trường hợp sau:

a. $u(x,y,z,0)=e^x\cos y$ và $u_t(x,y,z,0)=x^2-y^2$.

b. $u(x,y,z,0)=\dfrac{1}{x}$ và $u_t(x,y,z,0)=0$, $(x\ne 0)$.

4.24. Tìm nghiệm của bài toán: $\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+u_{yy} \\ u(x,y,0)=x^3y^2 \\ u_t(x,y,0)=x^2y^4-3x^2 \end{cases}$

4.25. Tìm nghiệm của bài toán:

a. $\begin{cases} u_{tt}=u_{xx}+u_{yy} \\ u(x,y,0)=x^2+y^2 \\ u_t(x,y,0)=1 \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} u_{tt}=u_{xx} \\ u(x,0)=e^x \\ u_t(x,0)=e^x \end{cases}$

4.26. Giải bài toán Cauchy sau:

a. $\begin{cases} u_t=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right),\ t>0 \\ u(x,y,z,0)=\sin x+\cos^2 y+\cos z,\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \end{cases}$.

b. $\begin{cases} u_t = u_{xx}\ , & t > 0 \\ u(x,0) = \sin^2 x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$

4.27. Tìm nghiệm của bài toán Cauchy sau:

a. $\begin{cases} u_t = u_{xx}\ , & t > 0 \\ u(x,0) = \sin x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$

b. $\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}\ , & t > 0 \\ u(x,y,0) = \sin l_1 x + \cos l_2 y, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$, l_1, l_2 là các hằng số .

CHƯƠNG V: QUÁ TRÌNH DỪNG

GIỚI THIỆU

Chuỗi Markov, quá trình Poisson nghiên cứu sự tiến triển theo thời gian của các hệ ngẫu nhiên mà trong đó tương lai chỉ phụ thuộc hiện tại và độc lập với quá khứ (tính Markov). Khái niệm quá trình ngẫu nhiên và chuỗi Markov đã được nghiên cứu trong giáo trình xác suất thống kê.

Ngoài những quá trình Markov, trong thực tế ta còn gặp các hệ ngẫu nhiên mà quá khứ của nó có ảnh hưởng lớn đến sự tiến triển của quá trình trong tương lai. Đặc biệt với quá trình mà hàm tự tương quan thuần nhất theo thời gian (quá trình dừng) có rất nhiều ứng dụng trong viễn thông. Các tín hiệu, nhiễu của một hệ thống viễn thông là các quá trình dừng. Khái niệm quá trình dừng được nhà toán học người Nga Khintchine đưa ra lần đầu tiên vào năm 1934. Ngày nay quá trình dừng đã trở thành một trong những lĩnh vực quan trọng và có nhiều ứng dụng của lý thuyết xác suất.

Có hai định nghĩa về quá trình dừng: Quá trình dừng theo nghĩa hẹp và nghĩa rộng. Trong chương này chủ yếu xét quá trình dừng theo nghĩa rộng, đó là quá trình ngẫu nhiên có kỳ vọng không phụ thuộc thời gian và hàm tự tương quan thuần nhất theo thời gian. Các tín hiệu viễn thông và nhiễu là các quá trình dừng. Các quá trình này được ký hiệu bằng chữ thường $x(t)$. Các quá trình đếm xét trong chương 6 được ký hiệu bằng chữ in hoa $X(t)$.

Để đi đến khái niệm quá trình dừng ta xét các quá trình cấp 2, đó là các quá trình tồn tại mômen cấp 2 và hàm tự tương quan. Ta cũng xét một cách sơ lược về khái niệm đạo hàm, tích phân của một quá trình ngẫu nhiên cấp 2.

Khi quá trình dừng biểu diễn các tín hiệu thì nhờ định lý Wiener-Khintchine ta có thể tính công suất trung bình của tín hiệu thông qua phổ của quá trình dừng, đó là biến đổi Fourier của hàm tự tương quan của quá trình.

Trung bình theo giời gian (time average) của một quá trình ngẫu nhiên bao giờ cũng dễ thực hiện hơn trung bình theo tập hợp (ensemble average), vì vậy khi trung bình theo thời gian trùng với trung bình theo tập hợp thì việc nghiên cứu chúng sẽ thuận lợi hơn. Quá trình có trung bình theo thời gian trùng với trung bình theo tập hợp được gọi là quá trình ergodic. Chúng ta sẽ chỉ ra những tiêu chuẩn để nhận biết quá trình dừng là quá trình ergodic.

Để học tốt chương này học viên nên xem lại lý thuyết xác suất và phép biến đổi Fourier.

NỘI DUNG

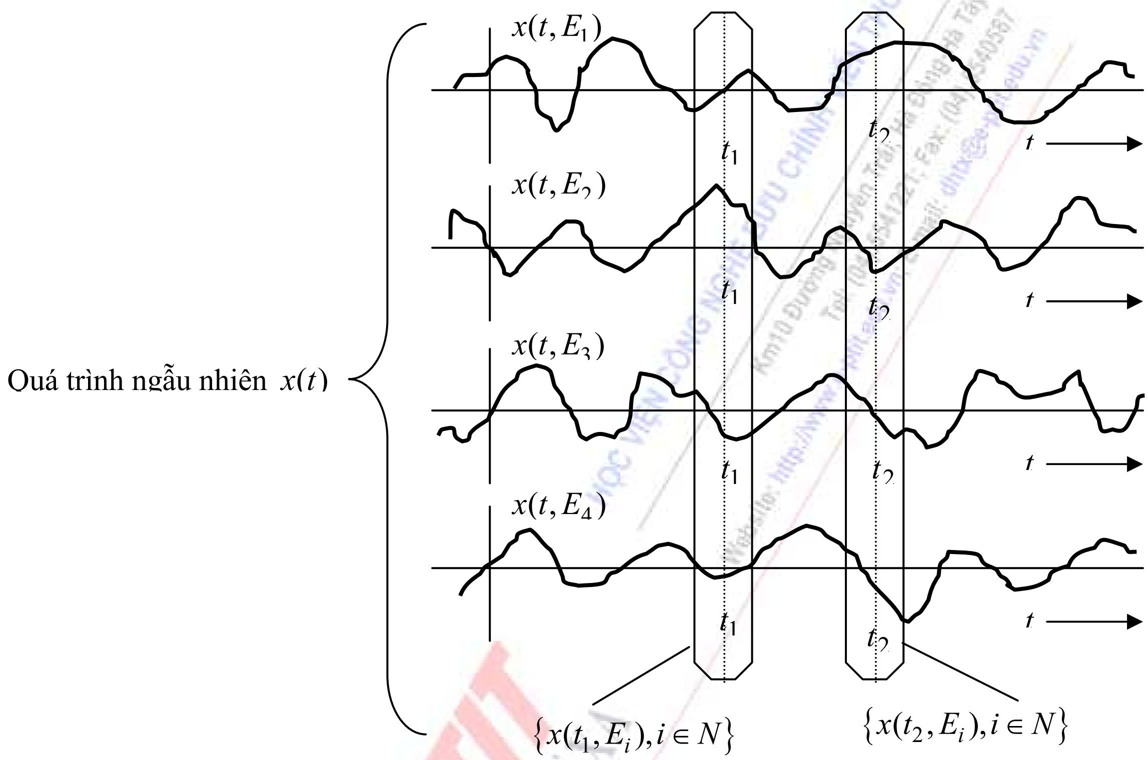
5.1. QUÁ TRÌNH CẤP 2

5.1.1. Khái niệm quá trình ngẫu nhiên

Hầu hết các quá trình xảy ra trong tự nhiên và xã hội đều là các quá trình ngẫu nhiên.

Các tín hiệu của các hệ thống thông tin là các tín hiệu ngẫu nhiên vì ngoài thành phần mang tin còn có sự tác động của giao thoa ngẫu nhiên và nhiễu của thiết bị.

Giả sử một tín hiệu nào đó mà tại mỗi thời điểm t chỉ xảy ra ứng với các biến cố $\{E_i, i \in N\}$ của không gian mẫu. Tín hiệu này nhận giá trị được ký hiệu là $x(t, E_i)$ nếu tại thời điểm t biến cố E_i xảy ra. Như vậy $x(t, E_i)$ là một mẫu của quá trình ngẫu nhiên $x(t)$. Quá trình ngẫu nhiên $x(t)$ vừa phụ thuộc thời gian t, vừa phụ thuộc yếu tố ngẫu nhiên E_i.



Một cách tổng quát một quá trình ngẫu nhiên là một họ các biến ngẫu nhiên $\{x(t,\omega); t \in I\}$. Các quá trình này vừa phụ thuộc vào thời gian t và khi cố định tham số t thì $x(t,\omega)$ là biến ngẫu nhiên theo ω. Tập chỉ số I thường biểu diễn tham số thời gian.

Quá trình ngẫu nhiên $\{x(t,\omega); t \in I\}$ được gọi là có thời gian rời rạc hay liên tục nếu tập chỉ số I là tập đếm được hay là một khoảng nào đó. Quá trình ngẫu nhiên là thực hay phức nếu các biến ngẫu nhiên $x(t,\omega)$ nhận giá trị thực hay phức.

Người ta thường viết tắt quá trình $\{x(t)\}_{t \in I}$ thay cho quá trình ngẫu nhiên $\{x(t,\omega); t \in I\}$.

5.1.2. Khái niệm quá trình cấp 2

Xét quá trình ngẫu nhiên $\{x(t)\}_{t \in I}$. Như vậy với mỗi $t \in I$ thì $x(t)$ là một biến ngẫu nhiên của không gian xác suất $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Biến ngẫu nhiên $x(t)$ có các đặc trưng như: Kỳ vọng, phương sai, tương quan, moment… .

Moment cấp m của biến ngẫu nhiên X định nghĩa như sau:

- Nếu biến ngẫu nhiên X rời rạc có bảng phân bố xác suất

X	u_1	$\cdots$	u_i	$\cdots$
P	p_1	$\cdots$	p_i	$\cdots$

thì $\mathrm{E}\left(X^m\right)=\sum_i u_i^m p_i$.

- Nếu biến ngẫu nhiên X liên tục có hàm mật độ $f(u)$ thì $\mathrm{E}\left(X^m\right)=\int_{-\infty}^{\infty} u^m f(u)du$.

Định nghĩa 5.1: *Quá trình ngẫu nhiên* $x(t)$ *được gọi là quá trình cấp 2 nếu tồn tại moment cấp 2 với mọi* $t \in I$. *Nghĩa là*

$$\mathrm{E}|x(t)|^2 < \infty\ ,\ \ \forall\ t \in I\ .$$

5.1.3. Hàm trung bình và hàm tự tương quan

Ký hiệu $$m(t)=\mathrm{E}x(t),\ \ \forall\ t \in I \quad \textbf{(5.1)}$$

$$r(s,t)=\mathrm{E}\left[x(s)x(t)\right]\ ,\quad \forall\, s,t \in I \quad \textbf{(5.2)}$$

Công thức (5.1) được gọi là *hàm trung bình và* (5.2) là *hàm tự tương quan* của quá trình $x(t)$.

Hiệp phương sai

$$C(s,t)=\operatorname{cov}\left[x(s),x(t)\right]=\mathrm{E}\left[\left(x(s)-m(s)\right)\left(x(t)-m(t)\right)\right]$$

$$=\mathrm{E}\left[x(s)x(t)\right]-m(s)m(t),\ \ \forall\, s,t \in I\ .$$

Đặc biệt phương sai $\operatorname{var} x(t)=C(t,t)$

Định lý 5.1: Hàm hiệp phương sai $C(s,t)$ có tính chất:

1) Đối xứng: $C(s,t)=C(t,s)$, $\forall\, t,s$.

2) Xác định không âm: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t_1,t_2,...,t_n \in I$, $\forall\, b_1,b_2,...,b_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i \bar{b}_j C(t_i,t_j) \geq 0\ ,$$

trong đó $\bar{z}=a-ib$ là số phức liên hợp của số phức $z=a+ib$.

Ngược lại người ta cũng chứng minh được nếu hàm $C(t,s)$ có hai tính chất trên thì luôn tồn tại một quá trình cấp 2 nhận $C(t,s)$ làm hàm tự tương quan.

Nếu $\{\,x(t)\,\}_{t\in T}$ là một quá trình phức thì hàm tự tương quan được định nghĩa như sau:

$$r(s,t)=\mathrm{E}\left[\,x(s)\overline{x(t)}\,\right] \quad \textbf{(5.3)}$$

có các tính chất:

1') Đối xứng: $C(s,t)=\overline{C(t,s)}$, $\forall\, t,s$.

2') Xác định không âm: $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1, t_2, ..., t_n \in I$, $\forall b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{C}$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i \bar{b}_j C(t_i, t_j) \geq 0 .$$

Sau đây ta xét một cách tổng quát các quá trình là quá trình phức.

Ví dụ 5.1: (Quá trình Wiener) *Quá trình* $w(t)$, $t \geq 0$ *được gọi là một quá trình Wiener với tham số* σ^2 *nếu nó thoả mãn các tính chất sau:*

1) $w(0) = 0$.

2) *Với mọi* $0 \leq s < t$ *thì* $w(t) - w(s)$ *là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn* $N(0; \sigma^2(t-s))$.

3) $w(t)$, $t \geq 0$ *là quá trình với gia số độc lập, tức là với mọi* $0 \leq t_1 < t_2 ... < t_n$ *thì các biến ngẫu nhiên:* $w(t_2) - w(t_1)$, $w(t_3) - w(t_2)$,..., $w(t_n) - w(t_{n-1})$ *là độc lập.*

Như vậy $w(t)$, $t \geq 0$ là một quá trình cấp 2 có: $m(t) = \mathrm{E}w(t) = 0 \quad \forall\, t \geq 0$.

$\forall\, t, s \geq 0$, $C(s,t) = \mathrm{E}\big[\, w(s)\, w(t)\,\big] = \mathrm{E}\Big[\, w(s)\big(\, w(s) + w(t) - w(s)\big)\Big]$

$= \mathrm{E}\big[\, w(s)\,\big]^2 + \mathrm{E}\big[\big(w(s) - w(0)\big)\big(w(t) - w(s)\big)\big]$ (do tính chất tuyến tính của kỳ vọng)

$= \sigma^2 s + \mathrm{E}\big[\, w(s) - w(0)\big]\mathrm{E}\big[\, w(t) - w(s)\big] = \sigma^2 s$. (do gia số độc lập và $\mathrm{E}w(s) = 0$)

Vậy $\qquad C(s,t) = \sigma^2 \min(s,t)$.

5.1.4. Phép tính vi phân cho quá trình cấp 2

Định nghĩa 5.2: *Quá trình cấp 2* $\{\, x(t)\,\}_{t \in I}$

1) *Được gọi là* L_2 *– liên tục tại* t_0 *nếu* $\lim\limits_{t \to t_0} \| x(t) - x(t_0) \| = 0$.

2) *Được gọi là* L_2 *– khả vi tại* t_0 *và có đạo hàm* $x'(t_0)$ *nếu:*

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h} - x'(t_0) \right\| = 0 , \qquad \textbf{(5.4)}$$

trong đó $\|X\| = \sqrt{\mathrm{E}|X|^2}$.

Nếu $x(t)$ là L_2 – liên tục (tương tự L_2 – khả vi) tại mọi t thì ta nói là L_2 – liên tục (tương tự L_2 – khả vi).

Định lý 5.2: Quá trình $x(t)$ L_2 – khả vi tại t_0 nếu và chỉ nếu:

1) $m(t)$ khả vi tại t_0 ,

2) Tồn tại giới hạn

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{1}{hk}\left[C(t_0+h,t_0+k)-C(t_0+h,t_0)-C(t_0,\, t_0+k)+C(t_0,t_0)\right]. \tag{5.5}$$

Từ định lý này ta suy ra quá trình Wiener không L_2-khả vi tại bất cứ điểm nào. Thật vậy, thay $C(s,t)=\sigma^2\min(s,t)$ vào biểu thức trên với $k=h>0$ ta có

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left[C(t_0+h,t_0+h)-C(t_0+h,t_0)-C(t_0,\, t_0+h)+C(t_0,t_0)\right]$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sigma^2}{h^2}\left[t_0+h-t_0-\,t_0+t_0\right]=\lim_{h\to 0}\frac{\sigma^2}{h}=\infty.$$

Định lý 5.3: Nếu hàm trung bình $m(t)$ khả vi và đạo hàm riêng cấp 2 $\dfrac{\partial^2 C(s,t)}{\partial s\partial t}$ của hàm hiệp phương sai liên tục thì quá trình $x(t)$ là L_2-khả vi, đạo hàm $x'(t)$ cũng là một quá trình cấp 2. Hơn nữa

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}x'(t)=m'(t),\\ &\operatorname{cov}\left[x'(s),x'(t)\right]=\frac{\partial^2 C(s,t)}{\partial s\partial t},\\ &\operatorname{cov}\left[x'(s),x(t)\right]=\frac{\partial C(s,t)}{\partial s}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Tương tự ta có thể xây dựng các khái niệm L_2-khả vi cấp 2, 3…

5.1.5. Phép tính tích phân của quá trình cấp 2

Cho quá trình cấp 2 $\{x(t)\}_{t\in I}$ và đoạn $[a;b]\subset I$.

Ứng với mỗi phân hoạch $\Delta: a=t_0<t_1<...<t_n=b$ của đoạn $[a;b]$, biến ngẫu nhiên sau được gọi là tổng tích phân của quá trình

$$S(\Delta)=\sum_{i=0}^{n-1}x(s_i)\left(t_{i+1}-t_i\right),$$

trong đó $s_i\in\left[t_i;t_{i+1}\right]$. Đặt $|\Delta|=\max\limits_{0\le i\le n-1}\left|t_{i+1}-t_i\right|$.

Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{|\Delta|\to 0}\left\|S(\Delta)-I\right\|=0$ không phụ thuộc cách chia phân hoạch và cách chọn các điểm đại diện s_i thì ta nói *quá trình* $x(t)$ *là* L_2-*khả tích. I là một biến ngẫu nhiên có moment cấp 2 hữu hạn được gọi là tích phân của* $x(t)$ *trên đoạn [a;b]*. Ký hiệu

$$I=\int_a^b x(t)dt$$

Chú ý rằng $\int_a^b x(t)dt$ cũng là một biến ngẫu nhiên.

Định lý 5.4: L_2-tích phân có các tính chất sau

1) Nếu $x(t)$ là L_2-liên tục trong [a; b] thì tồn tại tích phân $\int_a^b x(t)dt$,

2) Nếu $x(t)\ge 0$, $\forall t\in[a;b]$ thì $\int_a^b x(t)dt\ge 0$,

3) $$\int_a^c x(t)dt+\int_c^b x(t)dt=\int_a^b x(t)dt\,,\quad (a<c<b) \qquad \textbf{(5.7)}$$

4) $$\int_a^b\big(\alpha\,x(t)+\beta\,y(t)\big)dt=\alpha\int_a^b x(t)dt+\beta\int_a^b y(t)dt\,, \qquad \textbf{(5.8)}$$

5) Nếu $x(t)=g(t)X$ trong đó X là một biến ngẫu nhiên còn $g(t)$ là một hàm số phụ thuộc biến số t thì $\int_a^b x(t)dt=\int_a^b Xg(t)dt=X\int_a^b g(t)dt$. **(5.9)**

6) Giả sử $x(t)$ là L_2-liên tục.

Đặt $y(t)=\int_a^t x(s)ds$ thì $y(t)$ là L_2-khả vi và $y'(t)=x(t)$, **(5.10)**

7) Nếu $x(t)$ là L_2-liên tục trên [a;b] thì ta có ***công thức Newton- Leibnitz***

$$\int_a^b x'(t)dt=x(b)-x(a)\,. \qquad \textbf{(5.11)}$$

Định lý 5.5: Nếu hàm trung bình $m(t)$ khả tích trên [a;b] và hàm hiệp phương sai $C(s,t)$ khả tích trên $[a;b]\times[a;b]$ thì quá trình $x(t)$ là L_2-khả tích trên [a;b]. Hơn nữa:

$$\mathrm{E}\left(\int_a^b x(t)dt\right)=\int_a^b m(t)dt\,,\ \operatorname{var}\left(\int_a^b x(t)dt\right)=\int_a^b\int_a^b C(s,t)dsdt\,,$$

$$\operatorname{cov}\left(\int_a^b x(s)ds,\int_c^d x(t)dt\right)=\int_a^b\int_c^d C(s,t)dsdt\ ;\ \ [c;d]\subset[a;b];$$

$$\operatorname{cov}\left(x(s),\int_a^b x(t)dt\right)=\int_a^b C(s,t)dt\,. \qquad \textbf{(5.12)}$$

Ví dụ 5.2: Giả sử $w(t)$; $t \ge 0$ là một quá trình Wiener với tham số σ^2 xét trong ví dụ 1. Quá trình này có hàm trung bình $m(t) = 0$ và hàm tự tương quan $C(s,t) = \sigma^2 \min(t,s)$ là hai hàm khả tích. Theo định lý trên ta có tích phân $x(t) = \int_0^t w(s)ds$ với mọi $t \ge 0$. Khi t thay đổi ta có quá trình $\{x(t); t \ge 0\}$ gọi là quá trình Weiner tích hợp.

Ta có $$\mathrm{E}[x(t)] = \mathrm{E}\left(\int_0^t w(s)ds\right) = \int_0^t m(s)ds = 0,$$

$$\mathrm{var}[x(t)] = \mathrm{var}\left(\int_0^t w(s)ds\right) = \int_0^t\int_0^t C(s,u)dsdu$$

$$= \sigma^2 \int_0^t\int_0^t \min(s,u)dsdu = \sigma^2 \int_0^t\left(\int_0^u \min(s,u)ds + \int_u^t \min(s,u)ds\right)du$$

$$= \sigma^2 \int_0^t\left(\int_0^u sds + \int_u^t uds\right)du = \frac{\sigma^2 t^3}{3}.$$

Với mọi $0 \le s < t$, ta có $x(t) = x(s) + (t-s)w(s) + \int_s^t (w(v) - w(s))dv$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{E}[x(s)x(t)] = \mathrm{E}|x(s)|^2 + (t-s)\mathrm{E}[x(s)w(s)] + \mathrm{E}\left[x(s)\int_s^t (w(v)-w(s))\right]dv$$

Mặt khác $\mathrm{E}|x(s)|^2 = \mathrm{var}[x(s)] = \dfrac{\sigma^2 s^3}{3}$.

$$\mathrm{E}[x(s)w(s)] = \mathrm{cov}\left[\int_0^s w(t)dt, w(s)\right] = \int_0^s r(s,t)dt = \int_0^s \sigma^2 tdt = \frac{\sigma^2 s^2}{2}.$$

$x(s) = \int_0^s w(v)dv = \int_0^s (w(v) - w(0))dv$ và $\int_s^t (w(v) - w(s))dv$ độc lập

$$\Rightarrow \quad \mathrm{E}\left[x(s)\int_s^t (w(v)-w(s))\right]dv = \mathrm{E}[x(s)]\mathrm{E}\left[\int_s^t (w(v)-w(s))dv\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{cov}[x(s), x(t)] = \frac{\sigma^2 s^3}{3} + (t-s)\frac{\sigma^2 s^2}{2} = (3t-s)\frac{\sigma^2 s^2}{6}.$$

5.2. QUÁ TRÌNH DỪNG

5.2.1. Khái niệm dừng theo nghĩa hẹp

Quá trình ngẫu nhiên $\{x(t);\, t \in I\}$ gọi là quá trình dừng theo nghĩa hẹp (hay dừng theo nghĩa chặt) nếu với mọi n, với mọi $t_1,...,t_n$ và với mọi T thì véc tơ ngẫu nhiên $\left(x(t_1),...,x(t_n)\right)$ và $\left(x(t_1+T),...,x(t_n+T)\right)$ có cùng luật phân bố.

Từ định nghĩa suy ra rằng nếu quá trình ngẫu nhiên $\{x(t);\, t \in I\}$ dừng theo nghĩa hẹp thì mọi biến ngẫu nhiên $x(t)$ tại thời điểm t bất kỳ của quá trình đều có cùng luật phân bố với $x(0)$.

Quá trình ngẫu nhiên theo nghĩa hẹp đòi hỏi quá chặt vì vậy ít gặp trong thực tế. Người ta xét quá trình dừng theo nghĩa rộng như sau.

5.2.2. Khái niêm quá trình dừng

Quá trình cấp 2 $\{x(t);\, t \in I\}$ được gọi là quá trình dừng (theo nghĩa rộng) nếu:

1) $m(t) = \mathrm{E}x(t) = m = const$,

2) *Hàm tự tương quan:* $r(s,t) = \mathrm{E}\left[x(s)\overline{x(t)}\right]$ *chỉ phụ thuộc vào* $s-t$ *; nghĩa là tồn tại hàm* $K_x(\tau)$ *sao cho*

$$r(s,t) = K_x(s-t)\ ;\ \forall s,t \in I .$$

Theo Định lý 1.2 hàm tự tương quan $K_x(\tau)$ có các tính chất sau

Định lý 5.6:

1) $K_x(-\tau) = \overline{K_x(\tau)}$.

2) $|K_x(\tau)| \le K_x(0) = \mathrm{E}|x(t)|^2 = \mathrm{E}|x(0)|^2, \ \forall t.$

Nếu $x(t)$ là dãy tín hiệu thì $K_x(0) = \mathrm{E}|x(t)|^2$ được gọi là công suất trung bình của tín hiệu.

Chú ý: Giả sử hàm trung bình $m(t) = \mathrm{E}x(t) = m = const$, khi đó hàm hiệp phương sai

$$\mathrm{cov}(x(s),x(t)) = \mathrm{E}\left(x(s)-m\right)\left(\overline{x(t)-m}\right) = \mathrm{E}\left(x(s)\overline{x(t)}\right) - |m|^2$$

chỉ phụ thuộc vào $s-t$ khi và chỉ khi hàm tự tương quan $r(s,t) = \mathrm{E}\left[x(s)\overline{x(t)}\right]$ chỉ phụ thuộc vào $s-t$. Vì vậy có thể định nghĩa quá trình dừng theo nghĩa rộng là quá trình cấp 2 thỏa mãn hai điều kiện sau:

1') $m(t) = \mathrm{E}x(t) = m = const$,

2') *Hàm hiệp phương sai* $C(s,t) = \mathrm{cov}\left[x(s),x(t)\right] = \mathrm{E}\left[\left(x(s)-m(s)\right)\left(\overline{x(t)-m(t)}\right)\right]$ chỉ phụ thuộc vào $s-t$; nghĩa là tồn tại hàm $K_x(\tau)$ sao cho $C(s,t) = K_x(s-t)\ ;\ \forall s,t \in I$.

Rõ ràng rằng hai định nghĩa này trùng nhau khi $m(t) = \mathrm{E}x(t) = 0, \forall t$.

Ví dụ 5.3: *Giả sử U, V là hai biến ngẫu nhiên thoả mãn* $\mathrm{E}U = \mathrm{E}V = 0$, $\mathrm{cov}(U,V) = 0$, $\mathrm{var}\,U = \mathrm{var}\,V = \sigma^2$ *; λ là một hằng số thì quá trình* $x(t) = U\cos\lambda t + V\sin\lambda t$ *là quá trình dừng có hàm tự tương quan* $K_x(\tau) = \sigma^2\cos\lambda\tau$.

Giải: $\mathrm{E}x(t) = \cos\lambda t EU + \sin\lambda t EV = 0$.

$$r(s,t) = \mathrm{E}[x(s)x(t)] = \mathrm{E}[(U\cos\lambda s + V\sin\lambda s)(U\cos\lambda t + V\sin\lambda t)]$$

$$= \mathrm{E}\left[U^2\cos\lambda s\cos\lambda t + V^2\sin\lambda s\sin\lambda t + UV(\cos\lambda s\cos\lambda t + \sin\lambda s\sin\lambda t)\right]$$

$$= \sigma^2\cos\lambda(t-s) \;\Rightarrow\; K_x(\tau) = \sigma^2\cos\lambda\tau .$$

Ví dụ 5.4: Quá trình Wiener không phải là quá trình dừng.

5.2.3. Biểu diễn phổ của quá trình dừng

Định nghĩa 5.3: Giả sử $\{x(t)\}_{t\in I}$ *quá trình dừng với hàm tự tương quan* K_x. *Nếu tồn tại* $\mathscr{P}(f)$ *sao cho:*

$$K_x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{in2\pi f}\mathscr{P}(f)df \quad khi\ I = \mathbb{Z} \tag{5.7}$$

hoặc

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau 2\pi f}\mathscr{P}(f)df \quad khi\ I = \mathbb{R} \tag{5.8}$$

thì $\mathscr{P}(f)$ *được gọi là* **mật độ phổ** *của quá trình dừng* $\{x(t)\}_{t\in I}$.

Định lý 5.7: 1) Trường hợp thời gian rời rạc $I = \mathbb{Z}$: Nếu $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|K_x(n)| < \infty$ thì tồn tại mật độ phổ

$$\mathscr{P}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in2\pi f}K_x(n) . \tag{5.9}$$

2) Trường hợp thời gian liên tục $I = \mathbb{R}$: Nếu $K_x(\tau)$ khả tích tuyệt đối trên $\mathbb{R}$ thì tồn tại mật độ phổ

$$\mathscr{P}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\tau f}K_x(\tau)d\tau . \tag{5.10}$$

Như vậy hàm mật độ phổ là biến đổi Fourier của hàm tự tương quan và hàm tự tương quan là biến đổi Fourier ngược của mật độ phổ.

$$\mathscr{P}(f) = \mathscr{F}\{K_x(\tau)\}, \quad K_x(\tau) = \mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{P}(f)\} .$$

Định lý là hệ quả của các điều trình bày ở trang 75, 78.

5.2.4 Mật độ phổ công suất

Cho quá trình $\{x(t)\}_{t\in I}$ biểu diễn các tín hiệu.

Với mỗi $T>0$ xét: $x_T(t)=\begin{cases} x(t) & \text{nếu } |t|<T/2 \\ 0 & \text{nếu } |t|\ge T/2. \end{cases}$

Đặt biến đổi Fourier của $x_T(t)$ là $X_T(f)=\mathscr{F}\{x_T(t)\}$

$$X_T(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)e^{-i2\pi ft}dt=\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i2\pi ft}dt.$$

$x_T(t)$ và $X_T(f)$ cũng là hai quá trình ngẫu nhiên.

Áp dụng đẳng thức Parseval ta có: $\mathscr{E}_T=\int_{-\infty}^{\infty} x_T{}^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X_T(f)|^2 df$.

$\mathscr{E}_T$ cũng là một quá trình ngẫu nhiên. Áp dụng định lý năng lượng Rayleich, công thức (2..86) ta được

$$\mathrm{E}\mathscr{E}_T=\mathrm{E}\int_{-\infty}^{\infty} x_T{}^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{E}x_T{}^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{E}|X_T(f)|^2 df.$$

Công suất trung bình của quá trình

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\mathrm{E}\left(x_T^2(t)\right)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left(x_T^2(t)\right)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{E}|X_T(f)|^2 df$$

$\Rightarrow$ ***Mật độ phổ công suất của quá trình***, viết tắt **PSD** (Power Spectral Density), là

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{E}|X_T(f)|^2. \tag{5.11}$$

Định lý 5.8: (Định lý Wiener - Khintchine) Mật độ phổ công suất PSD của quá tình dừng $\{x(t)\}_{t\in I}$ có giá trị trung bình $\mathrm{E}x(t)=0$ bằng mật độ phổ của quá trình này và bằng biến đổi Fourier của hàm tự tương quan:

$$\mathscr{P}(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{E}|X_T(f)|^2 \text{ và ta có } P=\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{P}(f)df \tag{5.12}$$

Nhận xét: Định lý 5.8 cho ta ý nghĩa của khái niệm mật độ phổ của quá trình dừng, đó là mật độ phổ công suất của quá trình. Như vậy ta có thể tính mật độ phổ của một quá trình dừng theo 2 công thức khác nhau (5.9)-(5.10) hoặc (5.12). Tuy nhiên tồn tại quá trình ngẫu nhiên không dừng (không có mật độ phổ) nhưng có mật độ phổ công suất.

Ví dụ 5.4: Xét quá trình tín hiệu cực với dữ liệu nhị phân $x(t)$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n f(t-nT_b), \tag{5.13}$$

trong đó $f(t)$ là xung mẫu $f(t)=\begin{cases}1 & \text{nếu } |t|<T_b/2\\ 0 & \text{nếu } |t|>T_b/2,\end{cases}$ T_b là chu kỳ 1 bít.

$\{a_n\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập biểu diễn các dữ liệu nhị phân. Các biến ngẫu nhiên a_n có phân bố rời rạc nhận hai giá trị ± 1 đồng khả năng.

Vậy $P\{a_n=1\}=P\{a_n=-1\}=1/2$; $\mathrm{E}[a_n]=0$; $\mathrm{var}[a_n]=\mathrm{E}\left[a_n^2\right]=1^2\frac{1}{2}+(-1)^2\frac{1}{2}=1$;

$$\mathrm{cov}[a_n,a_m]=\mathrm{E}[a_n a_m]-\mathrm{E}[a_n]\mathrm{E}[a_m]=0.$$

Đặt $T=(2N+1)T_b$ thì quá trình $x_T(t)$ của quá trình (5.13) sẽ là

$$x_T(t)=\sum_{n=-N}^{N} a_n f(t-nT_b)$$

$$\Rightarrow X_T(f)=\mathscr{F}\{x_T(t)\}=\sum_{n=-N}^{N} a_n \mathscr{F}\{f(t-nT_b)\}=\sum_{n=-N}^{N} a_n F(f)e^{-i\omega nT_b}=F(f)\sum_{n=-N}^{N} a_n e^{-i\omega nT_b}$$

Trong đó $F(f)=\mathscr{F}\{f(t)\}=T_b \sin c(T_b f)$ (ví dụ 2.37 chương II)

$$\Rightarrow \mathrm{E}|X_T(f)|^2=\mathrm{E}\left[|F(f)|^2\sum_{n,m=-N}^{N} a_n \overline{a_m} e^{-i\omega(n-m)T_b}\right]$$

$$=|F(f)|^2\sum_{n,m=-N}^{N}\mathrm{E}\left[a_n\overline{a_m}\right]e^{-i\omega(n-m)T_b}=|F(f)|^2\sum_{n=-N}^{N}1=|F(f)|^2(2N+1).$$

Vậy mật độ phổ công suất PSD

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{E}|X_T(f)|^2=\lim_{T\to\infty}\frac{|F(f)|^2(2N+1)}{(2N+1)T_b}=\frac{|F(f)|^2}{T_b}=T_b\sin c^2(T_b f).$$

Tuy nhiên $r(t,t+\tau)=\mathrm{E}[x(t)x(t+\tau)]=\mathrm{E}\left[\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n f(t-nT_b)\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m f(t+\tau-mT_b)\right)\right]$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}[a_n a_m]f(t-nT_b)f(t+\tau-mT_b)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(t-nT_b)f(t+\tau-mT_b)$$

trong đó $f(t-nT_b)f(t+\tau-mT_b)=\begin{cases}1 & \text{nếu } |t-nT_b|<T_b/2 \text{ và } |t+\tau-nT_b|<T_b/2\\ 0 & \text{nếu ngược lại}\end{cases}$

Điều này chứng tỏ $r(t,t+\tau)$ còn phụ thuộc vào thời điểm t nên quá trình $x(t)$ không dừng.

Ví dụ 5.5: Sóng ngẫu nhiên nhị phân

Xét quá trình ngẫu nhiên $\{x(t); t \in \mathbb{R}\}$ gồm các bit 1 và các bit 0 thoả mãn các điều kiện sau:

1) Bit 1 và 0 lần lượt được biểu diễn bởi các xung chữ nhật với biên độ $+A$ và $-A$ volt với độ rộng của xung là T giây.

2) Các hàm mẫu (sample functions) là không đồng bộ và giả thiết rằng thời điểm xuất phát của xung thứ nhất t_d xảy ra đồng khả năng trong khoảng từ 0 đến T. Điều này có nghĩa là t_d là giá trị mẫu của biến ngẫu nhiên T_d có phân bố đều trong đoạn $[0; T]$.

3) Trong khoảng thời gian xung bất kỳ $(n-1)T < t - t_d < nT$, hai bit 1 và 0 là đồng khả năng xuất hiện, nghĩa là $x(t)$ nhận giá trị $+A$ hoặc $-A$ trong suốt khoảng xung này với xác suất $1/2$. $x(t)$ và $x(s)$ là độc lập nếu t, s ở trong khoảng xung thời gian khác nhau.

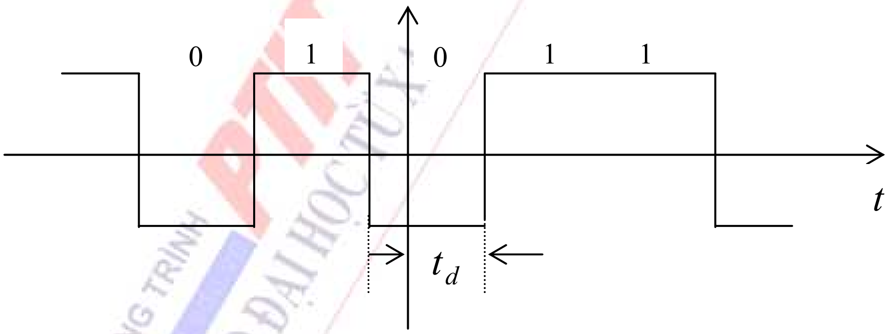
Ta có: $\forall t;\ \mathrm{E}x(t) = A \times 1/2 + (-A) \times 1/2 = 0$.

Hàm tự tương quan: $r_x(t_k, t_i) = \mathrm{E}[x(t_k), x(t_i)]$.

* Nếu $|t_k - t_i| > T$ thì $x(t_k),\ x(t_i)$ độc lập

$$\Rightarrow \quad r_x(t_k, t_i) = \mathrm{E}[x(t_k), x(t_i)] = 0.$$

* Nếu $|t_k - t_i| < T$ và giả sử rằng $x(t_k),\ x(t_i)$ cùng có trễ là t_d thì $x(t_k),\ x(t_i)$ cùng xung khi và chỉ khi $|t_k - t_i| < T - t_d$.



Vậy $\mathrm{E}\big[x(t_k), x(t_i) \big| t_d\big] = \begin{cases} A^2 & \text{nếu } t_d < T - |t_k - t_i| \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ

$$\mathrm{E}[x(t_k), x(t_i)] = \int_0^{T-|t_k-t_i|} A^2 f_{T_d}(t_d)\,dt_d = \int_0^{T-|t_k-t_i|} \frac{A^2}{T}\,dt_d = A^2\left(1 - \frac{|t_k - t_i|}{T}\right).$$

Đặt $\tau = t_k - t \Rightarrow$ Hàm tự tương quan $K_x(\tau) = \begin{cases} A^2\left(1 - \dfrac{|\tau|}{T}\right) & \text{nếu } |\tau| < T \\ 0 & \text{nếu } |\tau| \ge T. \end{cases}$

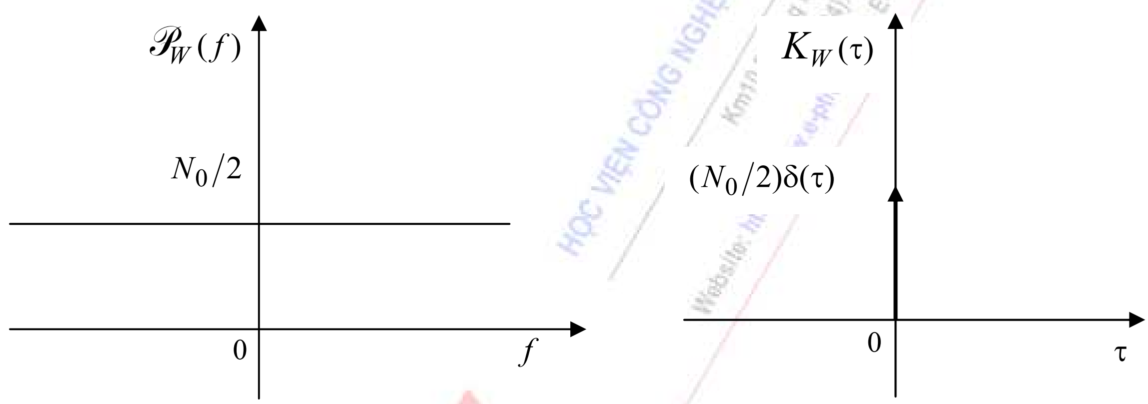
Mật độ phổ công suất

$$\mathscr{P}_x(f)=\mathscr{F}\{K_x(\tau)\}=\int_{-T}^{T}A^2\left(1-\frac{|\tau|}{T}\right)e^{-i2\pi f\tau}d\tau \;=A^2T\sin c^2(fT).$$

Ví dụ 5.6: Nhiễu trắng (White Noise) được mô tả như là một quá trình dừng (theo nghĩa rộng) mà mật độ phổ công suất là một hằng số $\mathscr{P}_W(f)=\dfrac{N_0}{2}$.

Hệ số $1/2$ để chỉ một nửa công suất ứng với tần số dương và một nửa ứng với tần số âm. N_0 có đơn vị watt/ hertz. Hàm tự tương quan

$$K_W(\tau)=\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{N_0}{2}\right\}=\frac{N_0}{2}\delta(\tau).$$



Quá trình nhiễu trắng không phải là một quá trình vật lý có thực vì có công suất bằng ∞. Trong quang học, mật độ phổ năng lượng của ánh sáng trắng là không đổi $\mathscr{P}(\upsilon)=$ hằng số với mọi tần số υ (Năng lượng ánh sáng trắng phân bố đều theo mọi tần số υ). Vì vậy nhiễu với mật độ phổ hằng số được gọi là nhiễu trắng.

5.3. QUÁ TRÌNH DỪNG ERGODIC

Trong nhiều bài toán về quá trình ngẫu nhiên đòi hỏi phải tính các giá trị trung bình của quá trình theo thời gian. Nghĩa là phải tính tích phân ngẫu nhiên (xem mục 1.5.). Bài toán này sẽ trở nên đơn giản hơn nếu trung bình theo thời gian trùng với trung bình theo tập hợp.

Giả thiết Ergodic cho rằng trung bình theo thời gian ở các cấp trùng với trung bình theo tập hợp cùng cấp tương ứng. Giả thiết này đáng tiếc là không phải luôn đúng như một số các nhà kỹ thuật đầu thế kỷ 20 tin tưởng. Khoảng năm 1931 hai nhà toán học G. D. Birkhoff (Mỹ) và A. Ia. Khintchine (Nga) đã chứng minh rằng trung bình theo thời gian luôn luôn tồn tại và đã chỉ ra các điều kiện để nó trùng với trung bình tập hợp.

Ta có các định nghĩa sau về tính chất ergodic của các quá trình cấp 2.

Định nghĩa 5.4:

1) Quá trình dừng thời gian rời rạc $\{x(n);n\geq 0\}$ *gọi là ergodic nếu*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left|\frac{x(0)+x(1)+\dots x(n-1)}{n}-m\right|^2 = 0 \; ; \; m = \mathrm{E}x(n).$$

2) Quá trình dừng với thời gian liên tục $\{x(t); t\in\mathbb{R}\}$ có hàm trung bình $m(t)=m$ gọi là ergodic nếu

$$\lim_{T\to\infty} \mathrm{E}\left|\frac{1}{T}\left(\int_0^T x(t)dt\right)-m\right|^2 = 0.$$

Định lý 5.9: Quá trình dừng thời gian rời rạc $\{x(n); n\ge 0\}$ với hàm tự tương quan $K_x(n)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n} K(m) = 0. \qquad \textbf{(5.14)}$$

Định lý 5.10: Quá trình dừng $\{x(t); t\in\mathbb{R}\}$ với hàm tự tương quan $K_x(\tau)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K_x(t-s)dtds = 0. \qquad \textbf{(5.15)}$$

Định lý 5.11: Quá trình dừng $\{x(t); t\in\mathbb{R}\}$ với hàm tự tương quan $K_x(\tau)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)K_x(t)dt = 0. \qquad \textbf{(5.16)}$$

Hệ quả: Nếu $\lim\limits_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$ thì quá trình $\{x(t); t\in\mathbb{R}\}$ là ergodic.

Ví dụ 5.7: Xét quá trình ngẫu nhiên $x(t) = A\cos(\omega_0 t+\theta)$. Trong đó A, ω_0 là hai hằng số. θ là biến ngẫu nhiên có phân bố đều trên đoạn $[0;2\pi]$ với hàm mật độ

$$f_\theta(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & \text{nếu } \; 0\le u\le 2\pi \\ 0 & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

$$\mathrm{E}[x(t)] = \mathrm{E}[A\cos(\omega_0 t+\theta)] = A\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_0 t+u)f_\theta(u)du = A\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+u)\frac{1}{2\pi}du = 0$$

$$r(t,t+\tau) = \mathrm{E}[x(t)x(t+\tau)] = \mathrm{E}[A\cos(\omega_0 t+\theta)A\cos(\omega_0(t+\tau)+\theta)]$$

$$= \frac{A^2}{2}\mathrm{E}[\cos(\omega_0(2t+\tau)+2\theta)+\cos\tau]$$

$$= \frac{A^2}{2}(\mathrm{E}[\cos(\omega_0(2t+\tau)+2\theta)]+\mathrm{E}[\cos\tau]) = \frac{A^2}{2}\cos\tau$$

Như vậy $\{x(t)\}$ là một quá trình dừng vơi hàm tự tương quan $K_x(\tau) = \dfrac{A^2}{2}\cos\tau$.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left(1-\frac{\tau}{T}\right)\frac{A^2}{2}\cos\tau\, d\tau = \frac{A^2}{2T}\left(\sin\tau\Big|_0^T - \frac{1}{T}\left(\tau\sin\tau\Big|_0^T + \cos\tau\Big|_0^T\right)\right)$$

$$= \frac{A^2}{2T}\left(\sin T - \sin T + \frac{1-\cos T}{T}\right) \to 0 \quad \text{khi} \quad T \to \infty$$

Theo định lý 5.11 $\{x(t)\}$ là một quá trình dừng thoả mãn điều kiện (5.11) do đó là một quá trình ergodic.

Ta cũng có thể kiểm chứng điều này bằng cách tính trực tiếp như sau: Vì quá trình tuần hoàn theo thời gian với chu kỳ $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ nên trung bình theo thời gian

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} A\cos(\omega_0 t + \theta)dt = \frac{1}{T_0}\left(A\,\frac{\sin(\omega_0 t + \theta)}{\omega_0}\Bigg|_0^{T_0}\right) = 0 = \mathrm{E}[x(t)]$$

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} A^2\cos^2(\omega_0 t + \theta)dt = \frac{A^2}{2} = K_x(0) = \mathrm{E}\left[x^2(t)\right].$$

5.4. MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA QUÁ TRÌNH DỪNG

5.4.1 Bộ lọc tuyến tính

Giả sử $x(t)$ là một quá trình dừng và $h(t)$ là hàm khả tích tuyệt đối. Ta xác định quá trình mới $\mathcal{L}\{x(t)\}$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x(s)ds = h(t) * x(t) \qquad \textbf{(5.17)}$$

được gọi là bộ lọc tuyến tính với ***đáp ứng xung*** $h(t)$ (impulse response).

Hàm $H(f) = \mathscr{F}\{h(t)\}$ được gọi là ***hàm truyền đạt*** (transfer function) của bộ lọc.

Trường hợp quá trình với thời gian rời rạc $\{x(n); n \ge 0\}$ và đáp ứng xung là dãy $\{h(n)\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ thì đầu ra có dạng

$$\mathcal{L}\{x(n)\} = y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)x(m);$$

Hàm truyền đạt $H(f) = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-i2\pi mf}$.

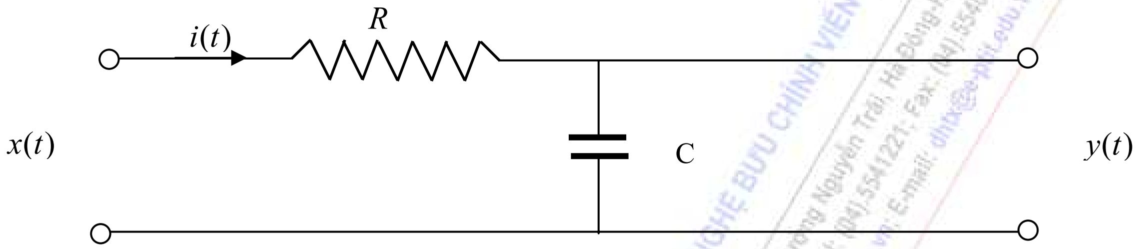
Định lý 5.12: Đầu ra $y(t)$ của bộ lọc tuyến tính (5.17) cũng là quá trình dừng với hàm tự tương quan

$$K_y(\tau) = h(-\tau) * h(\tau) * K_x(\tau) \quad \textbf{(5.18)}$$

và mật độ phổ

$$\mathscr{P}_y(f) = |H(f)|^2 \mathscr{P}_x(f) \quad \textbf{(5.19)}$$

Ví dụ 5.8: Lọc thông thấp (RC low - pass filter). Xét mạch điện như hình vẽ, trong đó điện trở thuần R, tụ điện có điện dung C; điện áp đầu vào $x(t)$, điện áp đầu ra $y(t)$.



Áp dụng định luật Kirchoff ta được $RC\dfrac{dy}{dt} + y(t) = x(t)$

Trường hợp $x(t)$ là tất định (deterministic): $y(t) = h(t) * x(t)$, bằng cách áp dụng phép biến đổi Fourier ta tính được

$$h(t) = \begin{cases} (1/RC)e^{-t/RC} & \text{nếu} \quad t \ge 0 \\ 0 & \text{nếu} \quad t < 0 \end{cases}$$

$$H(f) = Y(f)/X(f) = \frac{1}{1 + i(2\pi RC)f}$$

Do đó nếu $x(t)$ là quá trình dừng, theo công thức (5.19) ta được mật độ phổ của đầu ra của lọc thông thấp

$$\mathscr{P}_y(f) = \frac{1}{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2} \mathscr{P}_x(f)$$

Nếu đầu vào $w(t)$ là nhiễu trắng với hàm mật độ phổ công suất $\mathscr{P}_W(f) = \dfrac{N_0}{2}$ thì đầu ra $\mathscr{P}_y(f) = |H(f)|^2 \mathscr{P}_x(f) = \dfrac{N_0/2}{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2}$.

Sử dụng biến đổi Fourrier ngược ta có $K_y(\tau) = \mathscr{F}^{-1}\left\{\dfrac{N_0/2}{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2}\right\} = \dfrac{N_0}{4RC} e^{-|\tau|/RC}$

Công suất trung bình $P_y = \mathrm{E}\left[y^2(t)\right] = K_y(0) = \dfrac{N_0}{4RC}$

Ta có $\dfrac{\ln \mathscr{P}_y(f)}{1 + f^2} = \dfrac{\ln(N_0/2) - \ln(1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2)}{1 + f^2} \Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \mathscr{P}_y(f)}{1 + f^2} df > -\infty$.

Tổng quát hơn ta có định lý sau.

Định lý 5.13 (A. N. Kolmogorov): Giả sử quá trình $y(t)$ có thể biểu diễn dưới dạng bộ lọc

$$\mathscr{L}\{x(t)\} = y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s)x(s)ds = h(t) * x(t)$$

trong đó đáp ứng xung thoả mãn $h(t) = 0$; $\forall\ t < 0$ (bộ lọc nhân quả) với hàm truyền đạt $H(f)$. Khi đó $x(t)$ là nhiễu trắng khi và chỉ khi $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \mathscr{P}_y(f)}{1+f^2} df > -\infty$.

5.4.2. Quá trình ngẫu nhiên Gauss

Định nghĩa 4.5. *Quá trình ngẫu nhiên* $\{x(t)\}$ *gọi là quát trình Gauss nếu với mọi* N *và mọi* $t_1, t_2, ..., t_N$

$$X = \left(x(t_1),\ x(t_2), ..., x(t_N) \right)$$

là véc tơ ngẫu nhiên có phân bố Gauss N *chiều.*

Như vậy hàm mật độ của X có dạng

$$f_X(x_1, x_2, ..., x_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det C}} e^{\frac{-1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})C^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^t} \quad \textbf{(5.20)}$$

trong đó $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_N)$; $\mathbf{m} = \left(m_1, m_2, ..., m_N \right)$, $m_i = \mathrm{E}\left[x(t_i)\right]$; ma trận vuông hiệp phương sai $C = \left[C_{ij} \right]_{N\times N}$; $C_{ij} = \mathrm{cov}\left[x(t_i), x(t_j)\right]$.

Quá trình Gauss là quá trình dừng nếu

$$m_i = \mathrm{E}\left[x(t_i)\right] = m = \text{hằng số và } C_{ij} + |m|^2 = K_x(t_i - t_j)\,. \quad \textbf{(5.21)}$$

Ngoài ra, nếu $x(t_i),\ x(t_j); \forall i \neq j$ không tương quan, nghĩa là

$$\mathrm{E}\left[x(t_i)\overline{x(t_j)} \right] = \mathrm{E}\left[x(t_i)\right]\overline{\mathrm{E}\left[x(t_j) \right]}$$

thì ma trận hiệp phương sai có dạng

$$C = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.22)}$$

trong đó $\sigma^2 = K_x(0) = \mathrm{cov}\left[x(t_i), x(t_i)\right]$.

Quá trình Gauss có các tính chất sau:

1) f_X chỉ phụ thuộc vào ma trận M và vectơ m, vì vậy véc tơ ngẫu nhiên Gauss chỉ phụ thuộc vào các moment cấp 1 và cấp 2.

2) $X = \left(x(t_1),\, x(t_2),\ldots,x(t_N)\right)$ là véc tơ ngẫu nhiên có phân bố Gauss N chiều, do đó các biến ngẫu nhiên thành phần $x(t_i)$ cũng có phân bố Gauss.

3) Các biến ngẫu nhiên thành phần $x(t_1),\, x(t_2),\ldots,x(t_N)$ độc lập khi và chỉ khi không tương quan. Điều này xảy ra khi ma trận hiệp phương sai C là ma trận đường chéo dạng (5.22).

4) Quá trình Gauss dừng theo nghĩa rộng khi và chỉ khi dừng theo nghĩa chặt (Xem Chanmugan & Breipoht, 1988, trang 141).

5) Nếu $X = \left(x(t_1),\, x(t_2),\ldots,x(t_N)\right)$ là một véc tơ ngẫu nhiên Gauss thì $\left(y(t_1),\, y(t_2),\ldots,y(t_N)\right)$ cũng là một véc tơ ngẫu nhiên Gauss, với

$$\left[y(t_1),\, y(t_2),\ldots,y(t_N)\right] = A\left[x(t_1),\, x(t_2),\ldots,x(t_N)\right]^t$$

trong đó A là một ma trận vuông cấp N bất kỳ.

Từ tính chất 5) người ta có thể chứng minh được kết quả rộng hơn như sau.

Định lý 5.14: Đầu ra của một quá trình Gauss qua lọc tuyến tính là một quá trình Gauss. Nghĩa là nếu $x(t)$ là quá trình Gauss thì

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda)x(\lambda)d\lambda$$

cũng là một quá trình Gauss.

TÓM TẮT

Khái niệm quá trình ngẫu nhiên

Quá trình ngẫu nhiên là một họ các biến ngẫu nhiên $\{x(t,\omega); t \in I\}$, I được gọi là tập các chỉ số (thường chỉ thời gian).

Quá trình cấp 2

Quá trình ngẫu nhiên $x(t)$ được gọi là quá trình cấp 2 nếu tồn tại moment cấp 2 với mọi $t \in I$. Nghĩa là $\mathrm{E}|x(t)|^2 < \infty$, $\forall\, t \in I$.

Hàm trung bình $m(t) = \mathrm{E}x(t)$, $\forall\, t \in I$

Hàm tự tương quan $r(s,t) = \mathrm{E}\left[x(s)\overline{x(t)}\right]$

Khái niêm quá trình dừng

Quá trình cấp 2 $\{x(t)\}_{t\in I}$ được gọi là quá trình dừng nếu:

1) $m(t) = \mathrm{E}x(t) = m = const$,

2) Hàm tự tương quan $r(s,t) = \mathrm{E}\left[x(s)\overline{x(t)}\right]$ chỉ phụ thuộc vào $s-t$; nghĩa là tồn tại hàm $K_x(\tau)$ sao cho $r(s,t) = K_x(s-t)$; $\forall s,t \in I$.

Biểu diễn phổ của quá trình dừng

Giả sử $\{x(t)\}_{t\in I}$ quá trình dừng với hàm tự tương quan K_x. Nếu tồn tại $\mathscr{P}(f)$ sao cho:

$$K_x(n)=\int_{-1/2}^{1/2} e^{in2\pi f}\mathscr{P}(f)df \quad \text{khi } I=\mathbb{Z} \quad \text{hoặc} \quad K_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau 2\pi f}\mathscr{P}(f)df \quad \text{khi } I=\mathbb{R}$$

thì $\mathscr{P}(f)$ được gọi là mật độ phổ của quá trình dừng $\{x(t)\}_{t\in I}$.

Định lý Wiener – Khintchine: Mật độ phổ công suất PSD của quá tình dừng $\{x(t)\}_{t\in I}$ có giá trị trung bình $\mathrm{E}x(t)=0$ bằng mật độ phổ của quá trình này.

Quá trình dừng ergodic

Giả thiết Ergodic cho rằng trung bình theo thời gian mọi cấp trùng với trung bình theo tập hợp ở cấp tương ứng. Quá trình dừng thời gian rời rạc $\{x(n); n\ge 0\}$ gọi là ergodic nếu

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}\left|\frac{x(0)+x(1)+\ldots .x(n-1)}{n}-m\right|^2=0\ ;\ m=\mathrm{E}x(n).$$

Quá trình dừng với thời gian liên tục $\{x(t); t\in\mathbb{R}\}$ có hàm trung bình $m(t)=m$ gọi là ergodic nếu $\lim\limits_{T\to\infty}\mathrm{E}\left|\frac{1}{T}\left(\int_0^T x(t)dt\right)-m\right|^2=0$.

Quá trình dừng $\{x(t); t\in\mathbb{R}\}$ với hàm tự tương quan $K_x(\tau)$ là ergodic khi và chỉ khi

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{t}{T}\right)K_x(t)dt=0.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP

5.1 Hàm trung bình $m(t)=\mathrm{E}x(t), \forall\ t\in I$ của quá trình ngẫu nhiên $\{x(t)\}_{t\in I}$ là một biến ngẫu nhiên.

Đúng ☐ Sai ☐.

5.2 Trung bình theo thời gian $\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt$ của quá trình ngẫu nhiên $\{x(t)\}_{t\in I}$ là một biến ngẫu nhiên.

Đúng ☐ Sai ☐.

5.3 Hàm tự tương quan của một quá trình dừng $\{x(t)\}_{t\in I}$, là một hàm 2 biến theo thời gian.

Đúng ☐ Sai ☐.

5.4 Mật độ phổ của quá trình dừng bằng biến đổi Fourier của hàm tự tương quan.

Đúng ☐ Sai ☐.

5.5 Hàm tự tương quan của quá trình dừng bằng biến đổi Fourier của mật độ phổ của quá trình.

Đúng ☐ Sai ☐.

Quá trình dừng có hàm trung bình là hàm hằng nên trung bình theo thời gian bằng trung bình theo tập hợp.

Đúng ☐ Sai ☐

5.6 Cho $\{x(t)\}_{t\in I}$ là một quá trình dừng với hàm trung bình $\mathrm{E}x(t)=m, \forall t$. Chứng minh rằng $\{y(t)\}_{t\in I}$, $y(t)=x(t)-m$ là quá trình dừng có hàm trung bình $\mathrm{E}y(t)=0, \forall t$ và hàm tự tương quan $K_y=K_x$.

5.7 Cho $\{x(t)\}_{t\in I}$ là một quá trình cấp 2 có tính chất $\mathrm{E}x(s)$ và $\mathrm{E}x(s)x(s+t)$ không phụ thuộc vào s. Chứng minh rằng $\{x(t)\}_{t\in I}$ là quá trình dừng.

5.8 Cho $\{x(t)\}_{t\in I}$ là một quá trình dừng với hàm tự tương quan $K_x(\tau)$. Chứng minh rằng $\{y(t)\}_{t\in I}$, $y(t)=x(t+1)-x(t)$ cũng là quá trình dừng. Tìm hàm trung bình và hàm tự tương quan.

5.9 Cho Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên đoạn $[0,2\pi]$, A_0, ω_0 là hai hằng số. Chứng minh rằng $x(t)=A_0\sin(\omega_0 t+\Theta)$ là một quá trình dừng. Tìm hàm tự tương quan. Quá trình $x(t)$ có phải là quá trình ergodic?

5.10 Cho Θ là biến ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên đoạn $[0,2\pi]$, R là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $f_R(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{\sigma^2}e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}, & \text{nếu } 0<r<\infty\\ 0, & \text{nếu } r\le 0\end{cases}$.

Giả sử Θ và R độc lập, $\lambda>0$. Chứng minh rằng $x(t)=R\cos(\lambda t+\Theta)$ là một quá trình dừng với trung bình 0 và hàm tự tương quan $K_x(t)=\sigma^2\cos\lambda t$.

5.11 Cho A là biến ngẫu nhiên có phân bố chuẩn $N(0;\sigma^2)$. Đặt $x(t)=A\cos(10\pi t)$. Tìm hàm mật độ xác suất của $x(t)$. Quá trình $\{x(t)\}_{t\in I}$ có phải là quá trình dừng không?

5.12 Cho Z_1 và Z_2 là hai biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố xác suất $P\{Z_1=-1\}=P\{Z_1=1\}=\frac{1}{2}$. Đặt $x(t)=Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t$, λ là hằng số. Chứng minh $x(t)$ là quá trình dừng. Tìm hàm tự tương quan.

5.13 Cho quá trình dừng $\{x(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ có trung bình $\mathrm{E}x(n)=2$ và hàm tự tương quan $K_x(n)=\frac{2\pi}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^{|n|}$. Tìm mật độ phổ.

5.14 Cho $W(t)$ là quá trình Wiener với tham số σ^2. Đặt $x(t) = e^{-\alpha t} W(e^{2\alpha t})$, $\alpha > 0$ là hằng số. Chứng minh rằng $x(t)$ là quá trình Gauss dừng với hàm tự tương quan $K_x(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|}$, $-\infty < t < \infty$. Tìm mật độ phổ.

5.15 Cho quá trình dừng ergodic $x(t)$ có mật độ phổ $\mathscr{P}_x(f) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma^2}(B - |f|), & \text{nếu } |f| \le B \\ 0, & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$.

Tìm hàm tự tương quan.

CHƯƠNG VI: QUÁ TRÌNH POISSON

GIỚI THIỆU

Đầu thế kỷ XX, A. A. Markov- nhà Toán học và Vật lý nổi tiếng người Nga đã đưa ra mô hình toán học để mô tả chuyển động của các phân tử chất lỏng trong bình kín. Về sau mô hình này được phát triển và sử dụng trong nhiều lĩnh vực khác như cơ học, sinh học, y học, kinh tế, v.v….và được mang tên là Quá trình Markov.

Trong những năm gần đây, quá trình Markov được ứng dụng rất nhiều trong các bài toán kinh tế, tin học, viễn thông, đặc biệt là các bài toán về điều khiển tổng đài v.v…

Quá trình Poisson là dạng đặc biệt của quá trình Markov với thời gian liên tục. Quá trình Poisson $X(t)$ mô tả quá trình đếm số lần xuất hiện một biến cố A nào đó cho đến thời điểm t. Quá trình Poisson được ứng dụng nhiều trong viễn thông, liên quan đến bài toán truyền tín hiệu, các hệ phục vụ, bài toán chuyển mạch ...

Nếu số cuộc gọi đến một tổng đài là một quá trình Poisson, mỗi cuộc gọi chiếm dụng thiết bị trong một khoảng thời gian nào đó, giả sử các khoảng thời gian này là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân bố, khi đó tổng số giờ gọi là một quá trình Poisson phức hợp.

Quá trình Poisson $X(t)$ mô tả quá trình đếm số lần xuất hiện một biến cố A nào đó cho đến thời điểm t. Giả sử biến cố A được phân thành 2 loại A_1, A_2 và tại mỗi thời điểm việc xuất hiện biến cố A_1 hoặc A_2 là độc lập nhau, khi đó ta có quá trình Poisson có phân loại.

Quá trình Poisson phức hợp và quá trình Poisson phân loại giúp ta tính được sản lượng trung bình khi khai thác dịch vụ viễn thông.

Trong chương này chúng ta khảo sát các vấn đề sau:

- Quá trình đếm, quá trình điểm.
- Quá trình Poisson.
- Các phân bố liên quan đến quá trình điểm Poisson: thời điểm đến thứ n (hay thời gian chờ) và khoảng thời gian giữa hai lần đến liên tiếp thứ n.
- Quá trình Poissson có phân loại.
- Quá trình Poisson phức hợp.

Quá trình Poisson là cơ sở quan trọng để khảo sát quá trình sắp hàng được nghiên cứu trong chương tiếp theo.

Để học tốt chương này học viên phải nắm các kiến thức có bản của lý thuyết xác suất.

NỘI DUNG

6.1. KHÁI NIỆM QUÁ TRÌNH POISSON

6.1.1. Quá trình đếm

Quá trình đếm rất thường gặp trong thực tế.

Giả sử A là biến cố nào đó. Ký hiệu $X(t)$, $t>0$ là số lần biến cố A xuất hiện trong khoảng thời gian từ 0 đến t. Khi đó $\{X(t),\ t>0\}$ được gọi là quá trình đếm.

Chẳng hạn ta có những ví dụ sau về quá trình đếm:

- A là biến cố khách vào điểm phục vụ nào đó. Khi ấy $X(t)$ là số khách vào điểm phục vụ tính đến thời điểm t.
- A là biến cố có cuộc gọi đến một tổng đài nào đó. Khi ấy $X(t)$ là số cuộc gọi đến tổng đài tính đến thời điểm t.

Quá trình đếm $\{X(t);\ t\ge 0\}$ có các tính chất đặc trưng sau:

1. $X(0)=0$; **(6.1)**

2. $X(t)$ chỉ nhận giá trị là các số tự nhiên; **(6.2)**

3. $X(s)\le X(t),\ 0\le s\le t$. **(6.3)**

4. $X(s,t]=X(t)-X(s)$, $0\le s<t$, là số lần biến cố A xảy ra trong khoảng thời gian $(s,t]$. **(6.4)**

Ta gọi $\{X(s,t],\ 0\le s<t\}$ là *quá trình điểm* ứng với quá trình đếm $\{X(t);\ t\ge 0\}$.

6.1.2. Quá trình Poisson

Định nghĩa 6.1: *Ta nói rằng quá trình $\{X(t);\ t\ge 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ λ (hoặc tham số λ) nếu:*

i) $X(0)=0$*;*

ii) $X(t)$ *chỉ nhận giá trị là các số tự nhiên;*

iii) $\{X(t);\ t\ge 0\}$ *là quá trình có gia số độc lập, tức là, với bất kỳ* $0=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n$ *các gia số* $X(t_1)-X(t_0)$, $X(t_2)-X(t_1),\dots,X(t_n)-X(t_{n-1})$ *là các biến ngẫu nhiên độc lập.*

iv) *Mỗi gia số* $X(s+t)-X(s)$ *có phân bố Poisson với tham số* λt *với mọi* $s\ge 0,\ t>0$.

Định lý 6.1: Nếu quá trình đếm $\{X(t);\ t\ge 0\}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. *Có gia số độc lập*, tức là $\forall m=2,3,\dots$ và với mọi $0=t_0<t_1<\dots<t_m$ thì các gia số $X(t_0;t_1],\ X(t_1;t_2],\dots,\ X(t_{m-1};t_m]$ là các biến ngẫu nhiên độc lập,

2. *Có gia số dừng*, tức là với mọi $s>0$. $\forall 0\le t_1<t_2$ thì các gia số $X(t_1+s;t_2+s]$, $X(t_1;t_2]$ có cùng phân bố xác suất. Như vậy luật phân bố chỉ phụ thuộc vào khoảng thời gian và không phụ thuộc thời điểm.

3. *Xác suất xuất hiện biến cố A gần đều*; tức là tồn tại $\lambda > 0$ (tốc độ xuất hiện biến cố A) sao cho với $h > 0$ khá bé thì

$$P\{X(h) = 1\} = \lambda h + o(h). \tag{6.5}$$

4. Với $h > 0$ khá bé thì

$$P\{X(h) \ge 2\} = o(h), \tag{6.6}$$

thì $\{X(t);\, t \ge 0\}$ là *quá trình Poisson tham số* λ.

Ngược lại, quá trình Poisson là quá trình đếm thỏa mãn 4 điều kiện trên.

Chứng minh: Điều kiện i), ii) của định nghĩa quá trình Poisson được suy từ tính chất của quá trình đếm. Từ 1) ta suy ra điều kiện iii). Theo 2) để chứng minh điều kiện iv) ta chỉ cần chứng minh $X(t)$ có phân bố Poisson $\mathscr{P}(\lambda t)$.

Đặt $p_n(t) = P\{X(t) = n\}$, $n = 0,1,2,...$

$$p_0(t+h) = P\{X(t+h) = 0\} = P\{X(t) = 0, X(t+h) - X(t) = 0\}$$

$$= p_0(t)p_0(h) = p_0(t)\big(1 - \lambda h + o(h)\big),$$

$$\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h} \;\Rightarrow\; p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \;\Rightarrow\; p_0(t) = Ce^{-\lambda t}.$$

$$p_0(0) = 1 \;\Rightarrow\; p_0(t) = e^{-\lambda t}\;;\; t \ge 0.$$

Tương tự $\quad p_n(t+h) = P\{X(t+h) = n\} = P\{X(h) = 0, X(t+h) - X(h) = n\}$

$$+ P\{X(h) = 1, X(t+h) - X(h) = n-1\} + \sum_{k\ge 2} P\{X(h) = k, X(t+h) - X(h) = n-k\}$$

$$= p_0(h)p_n(t) + p_1(h)p_{n-1}(t) + \sum_{k\ge 2} p_{n-k}(t)o(h) = (1-\lambda h)p_n(t) + \lambda h p_{n-1}(t) + o(h)$$

$$\Rightarrow \quad p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t).$$

Đặt biến đổi Laplace của $p_n(t)$ là $P_n(s) = \mathscr{L}\{p_n(t)\}$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{L}\{p_n'(t)\} = sP_n(s) = -\lambda P_n(s) + \lambda P_{n-1}(s) \;\Rightarrow\; P_n(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}P_{n-1}(s)$$

$$\Rightarrow \; P_n(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^n P_0(s) = \frac{\lambda^n}{(\lambda+s)^{n+1}} \quad \Rightarrow \; p_n(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\lambda^n}{(\lambda+s)^{n+1}}\right\} = \frac{\lambda^n}{n!}t^n e^{-\lambda t}.$$

Vậy $X(t)$ có phân bố Poisson $\mathscr{P}(\lambda t)$.

Ngược lại nếu $\{X(t);\, t \ge 0\}$ là quá trình Poisson tham số λ thì $X(t)$ có phân bố Poisson $\mathscr{P}(\lambda t)$ nên $\mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{var}[X(t)] = \lambda t$. Khai triển Taylor ta có

$$P\{X(h) = 0\} = e^{-\lambda h} = 1 - \lambda h + o(h) \text{ khi } h \to 0,$$

$P\{X(h)=1\}=\lambda h e^{-\lambda h}=\lambda h\big(1-\lambda h+o(h)\big)=\lambda h+o(h)$ khi $h\to 0$.

Do đó $P\{X(h)\ge 2\}=1-P\{X(h)=0\}-P\{X(h)=1\}=o(h)$ khi $h\to 0$.

Nhận xét: Giả sử quá trình $\{X(t);\, t\ge 0\}$ đếm số lần xuất hiện biến cố A là quá trình Poisson tham số $\lambda>0$ thì $E[X(1)]=\lambda$. Như vậy λ là số lần trung bình xảy ra biến cố A trong khoảng 1 đơn vị thời gian. Nếu quá trình $\{X(t);\, t\ge 0\}$ đếm số khách đến điểm phục vụ thì λ là tốc độ đến trung bình.

6.1.3. Các phân bố liên quan đến quá trình Poisson

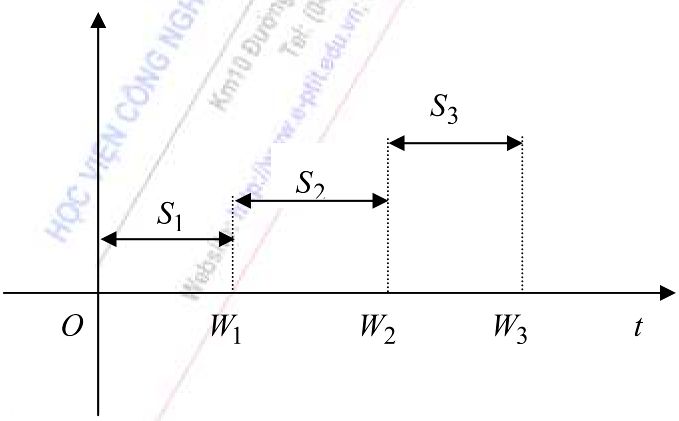
Định nghĩa 6.2: Giả sử $\{X(t);\, t\ge 0\}$ là quá trình Poisson đếm số lần xuất hiện biến cố A.

1) Ta ký hiệu $W(n)$ là thời điểm đến (arrival time) (hay thời gian chờ, waiting time) thứ n, đó là thời điểm mà biến cố A xuất hiện lần thứ n.

Quy ước $W(0)=0$.

2) Ký hiệu $S(n)$ là khoảng thời gian giữa 2 lần đến liên tiếp thứ n (interarrival time), đó là khoảng thời gian tính từ thời điểm biến cố A xảy ra lần thứ $n-1$ đến thời điểm xảy ra biến cố A lần thứ n.

Vậy $S(n)=W(n)-W(n-1)$.



Định lý 6.2:

1. Các thời gian đến trung gian $S(1), S(2),..., S(n)$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố mũ tham số λ với hàm mật độ

$$f_{S(n)}(t)=\lambda e^{-\lambda t}\ ;\ t\ge 0. \qquad \textbf{(6.7)}$$

2. $W(n)$ có phân bố Erlang tham số n,λ với hàm mật độ

$$f_{W(n)}(t)=\frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\ ;\ t\ge 0. \qquad \textbf{(6.8)}$$

Đặc biệt $W(1)$ có phân bố mũ.

3. Với mọi $0<s<t$ và $0\le k\le n$

$$P\{X(s)=k|X(t)=n\}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}. \qquad \textbf{(6.9)}$$

Chú ý rằng nếu $X_1, X_2,..., X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố mũ tham số λ thì $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ có phân bố Erlang tham số n,λ. Do đó có kỳ vọng và phương sai:

$$\mathrm{E}[X_1+X_2+\cdots+X_n]=\frac{n}{\lambda};\ \mathrm{var}[X_1+X_2+\cdots+X_n]=\frac{n}{\lambda^2}. \qquad \textbf{(6.10)}$$

Ví dụ 6.1: Giả sử số khách đến cửa hàng nào đó là 1 quá trình Poisson với tốc độ $\lambda = 4$ khách/ giờ. Cửa hàng mở cửa lúc 8h.

1. Tính xác suất để đến 8h30 có cả thảy 1 khách; đồng thời đến 10h30 có cả thảy 5 khách đến cửa hàng.

2. Tính thời điểm trung bình khách thứ 10 tới.

3. Tính xác suất để khoảng thời gian giữa khách thứ 10 và khách thứ 11 lớn hơn 1/2 giờ.

Giải:

1. Xem $t_0 = 8$h. Vậy xác suất cần tìm là

$$P\{X(1/2)=1; X(5/2)=5\} = P\{X(1/2)=1; X(5/2)-X(1/2)=4\}$$

$$= P\{X(1/2)=1\}.P\{X(2)=4\} = 2.e^{-2}.\frac{8^4}{4!}e^{-8} \approx 0{,}0155.$$

2. $\mathrm{E}W(10) = \dfrac{10}{\lambda} = \dfrac{10}{4} = 2^h30'$.

3. $P\{S(1) > 1/2\} = 1 - P\{S(1) < 1/2\} = 1 - \left(1 - e^{-4\times\frac{1}{2}}\right) = e^{-2} \approx 0{,}135$.

Ví dụ 6.2: Cho hai quá trình Poisson độc lập $\{X_1(t); t \geq 0\}$ và $\{X_2(t); t \geq 0\}$ với các tham số tương ứng λ_1, λ_2. Tìm xác suất để $X_1(t) = 1$ trước khi $X_2(t) = 1$.

Giải: Ta cần tìm xác suất $P\{W_1^1 < W_1^2\}$, trong đó W_n^1 là thời điểm đến thứ n của quá trình $X_1(t)$ còn W_m^2 là thời điểm đến thứ m của quá trình $X_2(t)$.

$$P\{W_1^1 < W_1^2\} = \iint\limits_{0\leq x<y} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}dxdy = \int_0^{\infty}\int_x^{\infty}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}dxdy = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Tổng quát, ta có thể chứng minh công thức sau

$$P\{W_n^1 < W_m^2\} = \sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}. \qquad \textbf{(6.11)}$$

6.2. QUÁ TRÌNH POISSON CÓ PHÂN LOẠI

Xét quá trình Poisson $\{X(t); t \geq 0\}$ với cường độ λ (tương ứng với quá trình đếm số lần xảy ra biến cố A). Giả sử mỗi khi biến cố A xảy ra thì nó được phân thành hai loại: loại I với xác suất p và loại II với xác suất $q = 1 - p$. Hơn nữa, giả sử sự phân loại biến cố này là độc lập với sự phân loại biến cố kia.

Chẳng hạn, khách đến cửa hàng theo quá trình Poisson $\{X(t); t \geq 0\}$ với cường độ λ, khách được phân làm hai loại: nam với xác suất 1/2 và nữ với xác suất 1/2.

Ta ký hiệu $X_1(t)$ và $X_2(t)$ là quá trình đếm tương ứng với biến cố loại I và biến cố loại II. Rõ ràng là $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$.

Định lý 6.3: *Với các điều kiện trên ta có $X_1(t)$ và $X_2(t)$ là hai quá trình Poisson với cường độ tương ứng λp và λq. Hơn nữa, hai quá trình này là độc lập.*

Chứng minh*:* Theo công thức xác suất đầy đủ

$$P\{X_1(t) = n,\ X_2(t) = m\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_1(t) = n,\ X_2(t) = m \mid X(t) = k\} P\{X(t) = k\}.$$

Vì $X(t) = X_1(t) + X_2(t) \Rightarrow P\{X_1(t) = n,\ X_2(t) = m \mid X(t) = k\} = 0\ \ \forall\ k \neq n+m$, do đó $P\{X_1(t) = n,\ X_2(t) = m\} = P\{X_1(t) = n,\ X_2(t) = m \mid X(t) = n+m\} P\{X(t) = n+m\}$.

Mặt khác trong $n+m$ biến cố có n biến cố loại I và m biến cố loại II. Do đó, từ giả thiết độc lập của sự phân loại biến cố và $P\{X(t) = n+m\} = \dfrac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda t}$ suy ra:

$$P\{X_1(t) = n,\ X_2(t) = m\} = C_{n+m}^{n} p^n q^m \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda tp)^n}{n!} e^{-\lambda tp} \frac{(\lambda tq)^m}{m!} e^{-\lambda tq}$$

$$\Rightarrow P\{X_1(t) = n\} = \sum_{m=0}^{\infty} P\{X_1(t) = n, X_2(t) = m\} = \frac{(\lambda tp)^n}{n!} e^{-\lambda tp}.$$

Điều này chứng tỏ $\{X_1(t);\ t \geq 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ λp.

Tương tự $\{X_2(t);\ t \geq 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ λq.

6.3. PHÂN BỐ ĐỀU VÀ QUÁ TRÌNH POISSON

Giả sử ta có một đoạn thẳng chiều dài bằng t và có n hạt cho trước. Ta rải các hạt lên đoạn thẳng này sao cho vị trí của các hạt trên đoạn này lập thành n biến ngẫu nhiên độc lập có phân bố đều (mỗi hạt đồng khả năng rơi vào từng điểm). Ta ký hiệu U_k là vị trí của hạt thứ k; $k = 1, 2, ..., n$. Theo cách rải của ta thì $U_1, ..., U_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố đều với hàm mật độ.

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{nếu} \quad 0 \leq u \leq t \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Bây giờ ta sắp xếp lại dãy các vị trí theo thứ tự từ bé đến lớn. Bằng cách ấy ta được dãy $W_1 \leq W_2 \leq .... \leq W_n$, trong đó W_1 là bé nhất trong số $U_1, ..., U_n$; tương tự W_2 là bé thứ hai trong số $U_1, ..., U_n$. Ta gọi $W_1, W_2, ... , W_n$ là thống kê thứ tự của phân bố đều trên đoạn (0; t] .

Định lý 6.4: Hàm phân bố đồng thời của $W_1, W_2, ... , W_n$ có hàm mật độ là

$$f_{W_1,\ldots,W_n}(w_1,\ldots,w_n)=\frac{n!}{t^n} \quad \text{với} \quad 0<w_1<w_2<\ldots<w_n\le t. \tag{6.12}$$

Định lý 6.5: Giả sử $\{X(t);\, t\ge 0\}$ là quá trình Poisson với tham số λ và $W_1,W_2,\ldots,W_n$ là các thời gian đến trong quá trình Poisson này. Khi đó, với điều kiện $X(t)=n$, phân bố đồng thời của $W_1,W_2,\ldots,W_n$ có mật độ

$$f_{W_1,\ldots,W_n|X(t)=n}(w_1,\ldots,w_n)=\frac{n!}{t^n} \quad \text{với} \quad 0<w_1<w_2<\ldots<w_n\le t. \tag{6.13}$$

Ý nghĩa của định lý 6.5 là: Với điều kiện có đúng n biến cố xảy ra trong khoảng thời gian $(0;t]$ thì các thời gian đến là thống kê thứ tự của phân bố đều trên đoạn $(0;t]$.

Ví dụ 6.3: Khách đến một cửa hàng theo quá trình Poisson với cường độ λ. Mỗi khách hàng trả 1 nghìn đồng để vào cửa tại thời điểm t = 0. Sau đó giá được giảm theo thời gian với tốc độ hạ giá là β. Ta cần tính số tiền trung bình M cửa hàng thu được trong khoảng thời gian $(0;t]$.

Khách hàng thứ k đến tại thời điểm W_k nên phải trả vé vào cửa với giá $e^{-\beta W_k}$. Gọi $N(t)$ là số khách đến trong khoảng thời gian $(0;t]$ thì

$$M=\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\beta W_k}\right).$$

Theo công thức xác suất đầy đủ ta có

$$M=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\beta W_k}\,\middle|\, N(t)=n\right)P\{N(t)=n\}.$$

Giả sử $U_1, \ldots, U_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập và có phân bố đều trên đoạn [0;t]. Do tính chất giao hoán của phép cộng trong công thức $\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\beta W_k}\right)$ và định lý 6.5 ta có

$$\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\beta W_k}\,\middle|\, N(t)=n\right)=\mathrm{E}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{-\beta U_k}\right)=n\mathrm{E}\left(e^{-\beta U_1}\right)=\frac{n}{t}\int_0^t e^{-\beta u}du=\frac{n}{\beta t}\left(1-e^{-\beta t}\right).$$

Suy ra $M=\dfrac{1}{\beta t}\left(1-e^{-\beta t}\right)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(t)=n\}=\dfrac{1}{\beta t}\left(1-e^{-\beta t}\right)\mathrm{E}N(t)=\dfrac{\lambda}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right).$

6.4. QUÁ TRÌNH POISSON PHỨC HỢP

Định nghĩa 6.3: *Giả sử $\{X(t);t\ge 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ $\lambda>0$. $Y_1,\ldots,Y_n$ dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân bố và dãy này độc lập với $\{X(t);t\ge 0\}$. Khi đó ta gọi*

$$Z(t)=\sum_{k=1}^{X(t)} Y_k\ ;\ \ t\ge 0 \tag{6.14}$$

là quá trình Poisson phức hợp.

Ví dụ 6.4: 1. Nếu $Y_k \equiv 1$ thì $Z(t) = X(t)$. Do đó, quá trình Poisson thông thường là quá trình Poisson phức hợp.

2. Giả sử khách rời cửa hàng là quá trình Poisson và tiền mua hàng của khách là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân bố và dãy này độc lập với số khách. Khi đó ta có quá trình Poisson phức hợp $Z(t)$ là tiền bán hàng thu được tính đến thời điểm t.

3. Các cuộc gọi đến tổng đài là quá trình Poisson và thời gian gọi của mỗi cuộc là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân bố và dãy này độc lập với các cuộc gọi đến. Khi đó tổng thời gian của tất cả các cuộc gọi cho đến thời điểm t là một quá trình Poisson phức hợp.

4. Giả sử các lần chuyển đổi tại thị trường chứng khoán diễn ra theo quá trình Poisson. Gọi Y_k là lượng thay đổi giá cổ phiếu giữa lần chuyển đổi thứ $k-1$ và thứ k. Khi đó ta có quá trình Poisson phức hợp $Z(t)$ là sự biến động tổng cộng giá cổ phiếu tính đến thời điểm t.

Định lý 6.6: Kỳ vọng và phương sai của quá trình Poisson phức hợp:

$$\mathrm{E}Z(t) = \lambda t \mathrm{E}Y_1 \ ; \ \ \operatorname{var} Z(t) = \lambda t \mathrm{E}Y_1^2 , \tag{6.15}$$

Hàm phân bố

$$P\{Z(t) < z\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} F_n(z) , \tag{6.16}$$

trong đó $\quad F_0(z) = 1 , \ \forall \ z ,$

$$F_1(z) = F_{X_1}(z) = P\{ X_1 < z \} , \ \forall \ z ,$$

$F_n(z)$ là hàm phân bố của $Y_1 + \cdots + Y_n$.

Đặc biệt nếu $Y_1 + \cdots + Y_n$ có phân bố mũ tham số μ thì $F_n(z)$ là hàm phân bố Erlang tham số n, μ

$$F_n(z) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\mu z)^k}{k!} e^{-\mu z} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\mu z)^k}{k!} e^{-\mu z} . \tag{6.17}$$

Ví dụ 6.5 (Mô hình chấn động) Giả sử $X(t)$ là số lần chấn động trong hệ nào đó và Y_k là lượng thiệt hại tổng cộng do chấn động thứ k gây ra $P\{Y_k \ge 0\} = 1$. Khi đó $Z(t)$ là lượng thiệt hại tổng cộng do chấn động gây ra tính đến thời điểm t. Hệ tiếp tục làm việc khi lượng thiệt hại tổng cộng bé hơn a và ngừng hoạt động trong trường hợp ngược lại. Ký hiệu T là thời điểm hệ ngừng hoạt động. Tính $\mathrm{E}T$ (là thời gian trung bình hệ ngừng hoạt động).

Giải: Ta có $T > t$ khi và chỉ khi $Z(t) < a$, tức là $\{T > t\} = \{Z(t) < a\}$

$$\Rightarrow \ P\{T > t\} = P\{Z(t) < a\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} F_n(a) .$$

Do đó $\mathrm{E}T = \int_0^\infty P\{T > t\}dt = \sum_{n=0}^\infty \left(\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} dt \right) F_n(a) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^\infty F_n(a)$.

Đặc biệt khi các Y_k có phân bố mũ tham số μ thì

$$T = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=n}^\infty \frac{(\mu a)^k}{k!} e^{-\mu a} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^\infty \sum_{n=0}^k \frac{(\mu a)^k}{k!} e^{-\mu a} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^\infty (1+k) \frac{(\mu a)^k}{k!} e^{-\mu a} = \frac{1}{\lambda}(1+\mu a).$$

Chú thích: Trong ví dụ trên ta đã sử dụng công thức tính kỳ vọng của biến ngẫu nhiên nhận giá trị không âm. Nếu X là biến ngẫu nhiên, $X \ge 0$ thì $\mathrm{E}X = \int_0^\infty P\{X > x\}dx$. Đặc biệt X là biến ngẫu nhiên rời rạc nhận các giá trị $k = 0,1,2,...$ thì $\mathrm{E}X = \sum_{k=1}^\infty kP\{X = k\} = \sum_{k=1}^\infty P\{X \ge k\}$.

TÓM TẮT

Quá trình Poisson

Ta nói rằng quá trình $\{X(t);\, t \ge 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ λ (hoặc tham số λ) nếu:

1. $X(0) = 0$;

2. $X(t)$ chỉ nhận giá trị là các số tự nhiên;

3. $\{X(t);\, t \ge 0\}$ là quá trình có gia số độc lập, tức là, với bất kỳ $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$ các gia số $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1), ..., X(t_n) - X(t_{n-1})$ là các biến ngẫu nhiên độc lập.

4. Mỗi gia số $X(s+t) - X(s)$ có phân bố Poisson với tham số λt với mọi $s \ge 0,\, t > 0$.

Nếu quá trình đếm $\{X(t);\, t \ge 0\}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. Có gia số độc lập, tức là $\forall m = 2,3,...$ và với mọi $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ thì các gia số $X(t_0;t_1]$, $X(t_1;t_2]$,..., $X(t_{m-1};t_m]$ là các biến ngẫu nhiên độc lập,

2. Có gia số dừng, tức là với mọi $s > 0$. $\forall 0 \le t_1 < t_2$ thì các gia số $X(t_1 + s; t_2 + s]$, $X(t_1;t_2]$ có cùng phân bố xác suất. Như vậy luật phân bố chỉ phụ thuộc vào khoảng thời gian và không phụ thuộc thời điểm.

3. Xác suất xuất hiện biến cố A gần đều; tức là tồn tại $\lambda > 0$ (tốc độ xuất hiện biến cố A) sao cho với $h > 0$ khá bé thì $P\{X(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$.

4. Với $h > 0$ khá bé thì $P\{X(h) \ge 2\} = o(h)$, thì $\{X(t);\, t \ge 0\}$ là *quá trình Poisson tham số* λ.

Thời điểm đến và thời gian giữa hai lần đến liên tiếp

Ta ký hiệu $W(n)$ là thời điểm đến thứ n, đó là thời điểm mà biến cố A xuất hiện lần thứ n. Quy ước $W(0) = 0$.

Ký hiệu $S(n)$ là khoảng thời gian giữa hai lần đến liên tiếp thứ n, đó là khoảng thời gian tính từ thời điểm biến cố A xảy ra lần thứ $n-1$ đến thời điểm xảy ra biến cố A lần thứ n.

1. Các thời gian đến trung gian $S(1), S(2),..., S(n)$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố mũ tham số λ với hàm mật độ $f_{S(n)}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$; $t \geq 0$.

2. $W(n)$ có phân bố Erlang tham số n, λ với hàm mật độ $f_{W(n)}(t) = \dfrac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$; $t \geq 0$.

Đặc biệt $W(1)$ có phân bố mũ.

3. Với mọi $0 < s < t$ và $0 \leq k \leq n$: $P\{X(s) = k | X(t) = n\} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\left(\dfrac{s}{t}\right)^k \left(1 - \dfrac{s}{t}\right)^{n-k}$.

4. Với điều kiện $X(t) = n$, phân bố đồng thời của $W_1, W_2, ..., W_n$ có mật độ

$$f_{W_1,....,W_n|X(t)=n}(w_1,....,w_n) = \frac{n!}{t^n} \quad \text{với} \quad 0 < w_1 < w_2 < .... < w_n \leq t .$$

Quá trình Poisson có phân loại

Xét quá trình Poisson $\{X(t); t \geq 0\}$ với cường độ λ (tương ứng với quá trình đếm số lần xảy ra biến cố A). Giả sử mỗi khi biến cố A xảy ra thì nó được phân thành hai loại: loại I với xác suất p và loại II với xác suất $q = 1 - p$. Hơn nữa, giả sử sự phân loại biến cố này là độc lập với sự phân loại biến cố kia. Ta ký hiệu $X_1(t)$ và $X_2(t)$ là quá trình đếm tương ứng với biến cố loại I và biến cố loại II. Rõ ràng là $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$.

Với các điều kiện trên ta có $X_1(t)$ và $X_2(t)$ là hai quá trình Poisson với cường độ tương ứng λp và λq. Hơn nữa, hai quá trình này là độc lập.

Quá trình Poisson phức hợp

Giả sử $\{X(t); t \geq 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ $\lambda > 0$. $Y_1,...,Y_n$ dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân bố và dãy này độc lập với $\{X(t); t \geq 0\}$. Khi đó ta gọi

$Z(t) = \sum_{k=1}^{X(t)} Y_k$; $t \geq 0$ là quá trình Poisson phức hợp. Kỳ vọng và phương sai của quá trình Poisson phức hợp: $\mathrm{E}Z(t) = \lambda t \mathrm{E}Y_1$; $\operatorname{var} Z(t) = \lambda t \mathrm{E}Y_1^2$, $P\{Z(t) < z\} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} F_n(z)$.

CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP

6.1 Quá trình Poisson có không gian trạng thái là tập các số tự nhiên.

Đúng ☐ Sai ☐.

6.2 Mọi quá trình đếm là quá trình Poisson.

Đúng ☐ Sai ☐.

6.3 Nếu quá trình $\{X(t);\, t \ge 0\}$ đếm số lần xuất hiện biến cố A là quá trình Poisson tham số $\lambda > 0$ thì λ là số lần trung bình xảy ra biến cố A trong khoảng 1 đơn vị thời gian..

Đúng ☐ Sai ☐.

6.4 Giả sử $\{X(t);\, t \ge 0\}$ là quá trình Poisson đếm số lần xuất hiện biến cố A. $W(n)$ là thời gian đến thứ n. $W(n)$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố Poisson.

Đúng ☐ Sai ☐.

6.5 Giả sử $\{X(t);\, t \ge 0\}$ là quá trình Poisson đếm số lần xuất hiện biến cố A. $S(n)$ là thời gian đến trung gian thứ n. $S(n)$ là các biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố mũ.

Đúng ☐ Sai ☐.

6.6 Giả sử $\{X(t);\, t \ge 0\}$ là quá trình Poisson đếm số lần xuất hiện biến cố A. Giả sử mỗi khi biến cố A xảy ra thì nó được phân thành hai loại: loại I và loại II. Hơn nữa, giả sử sự phân loại biến cố này là độc lập với sự phân loại biến cố kia. Ta ký hiệu $X_1(t)$ và $X_2(t)$ là quá trình đếm tương ứng với biến cố loại I và biến cố loại II thì $X_1(t)$ và $X_2(t)$ cũng là hai quá trình Poisson.

Đúng ☐ Sai ☐.

6.7 Các bức điện gửi tới bưu điện là quá trình Poisson với tốc độ trung bình 3 bức trong 1 giờ.

a) Tính xác suất để từ 8h00 đến 12h00 không có bức điện nào.

b) Tính phân bố của thời điểm tại đó nhận được bức điện đầu tiên sau 12h00.

6.8 Số cuộc gọi đến tổng đài là quá trình Poisson $X(t)$ với tốc độ trung bình 2 cuộc gọi trong một đơn vị thời gian. Hãy tính:

a) $P\{X(1)=2\}$ và $P\{X(1)=2, X(3)=6\}$.

b) $P\{X(1)=2 \,|\, X(3)=6\}$ và $P\{X(3)=6 \,|\, X(1)=2\}$.

6.9 Cho $X(t), t \ge 0$ là quá trình Poisson với cường độ $\lambda = 2$. Hãy tính:

a) $\mathrm{E}X(2)$, $\mathrm{E}X^2(1)$, $\mathrm{E}[X(1)\cdot X(2)]$.

b) $P\{X(1) \le 2\}$, $P\{X(1), X(2) = 3\}$.

6.10 Cho $\{X_1(t), t \ge 0\}$ và $\{X_2(t), t \ge 0\}$ là các quá trình Poisson độc lập với các cường độ là λ_1 và λ_2 tương ứng. Chứng minh rằng $\{X(t) = X_1(t) + X_2(t), t \ge 0\}$ là quá trình Poisson với cường độ là $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

6.11 Cho $\{X_1(t), t \ge 0\}$ và $\{X_2(t), t \ge 0\}$ là hai quá trình Poisson độc lập với các cường độ là λ_1 và λ_2 tương ứng.

a) Tính xác suất để $X_1(t) = 1$ trước khi $X_2(t) = 1$.

b) Tính xác suất để $X_1(t) = 2$ trước khi $X_2(t) = 2$.

c) Tính xác suất để $X_1(t) = n$ trước khi $X_2(t) = m$.

6.12 Khách tới cửa hàng theo quá trình Poisson với cường độ 5 người một giờ. Biết rằng trong 2 giờ đầu đã có 12 khách tới, tính xác suất (có điều kiện) để có 5 khách tới trong giờ đầu tiên.

6.13 Khách tới cửa hàng theo quá trình Poisson với cường độ 10 người một giờ. Khách có thể mua hàng với xác suất $p = 0,3$ và không mua hàng với xác suất $q = 0,7$. Tính xác suất để trong giờ đầu tiên có 9 người vào cửa hàng trong số đó 3 người mua hàng, 6 người không mua.

6.14 Cho quá trình Poisson $\{X(t), t \ge 0\}$ với tham số λ. Gọi S_n là thời gian đến trung gian thứ n. Hãy tính $\mathrm{E}S_4$ và $\mathrm{E}\left[X(4) - X(2) \middle| X(1) = 3\right]$.

CHƯƠNG VII: LÝ THUYẾT SẮP HÀNG

GIỚI THIỆU

Trong nhiều hệ thống phục vụ, các khách hàng (costumer) phải dùng chung tài nguyên, phải chờ để được phục vụ và đôi khi bị từ chối phục vụ. Lý thuyết quá trình sắp hàng (queueing process) xác định và tìm các phương án tối ưu để hệ thống phục vụ tốt nhất.

Trong nửa đầu của thế kỷ 20 lý thuyết sắp hàng đã được ứng dụng để nghiên cứu thời gian đợi trong các hệ thống điện thoại. Ngày nay lý thuyết sắp hàng còn có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như trong mạng máy tính, trong việc quản lý xí nghiệp, quản lý giao thông và trong các hệ phục vụ khác… Ngoài ra lý thuyết sắp hàng cũng còn là cơ sở toán học để nghiên cứu và ứng dụng trong nhiều bài toán kinh tế như đầu tư, kiểm kê, rủi ro của bảo hiểm, thị trường chứng khoán ... Chuỗi Markov là quá trình sắp hàng với thời gian rời rạc đã được xem xét trong giáo trình xác suất thống kê. Quá trình sinh tử cũng là quá trình sắp hàng, trong đó sinh biểu thị sự đến và tử biểu thị sự rời hàng của hệ thống.

Người ta phân loại các quá trình sắp hàng dựa vào luật phân bố của quá trình đến, luật phân bố phục vụ, nguyên tắc phục vụ và cơ cấu phục vụ. Trên cơ sở phân loại này ta có ký hiệu Kendall $A/B/k$ hoặc $A/B/k/N$, trong đó A là ký hiệu luật phân bố của quá trình đến (hay quá trình đến trung gian), B ký hiệu luật phân bố của quá trình phục vụ, k ký hiệu số server và N ký hiệu dung lượng tối đa của hàng.

Đối với lý thuyết sắp hàng ta quan tâm đến các số đo hiệu năng, đó là các giá trị trung bình khi quá trình đạt trạng thái dừng bao gồm: độ dài hàng đợi trung bình của hàng, độ dài hàng đợi trung bình của hệ thống, thời gian đợi trung bình của hàng (trễ của hàng) và thời gian đợi trung bình của hệ thống (trễ của hệ thống). Để tính các đại lượng này ta có thể sử dung phương pháp giải phương trình tích phân dạng Wiener-Hopf hoặc phương pháp khảo sát chuỗi Markov nhúng. Từ đó suy ra các công thức tính các phân bố ổn định cho các loại hàng $M/M/k$, $M/M/k/N$; Công thức tổng quát tính các giá trị trung bình này cho các hàng $G/G/1$ và công thức cụ thể cho các hàng đặc biệt $M/M/1$, $M/D/1$ và $M/E_k/1$. Tuy nhiên trong chương này chúng tôi chỉ cung cấp các kết quả dưới dạng các công thức và không chứng minh.

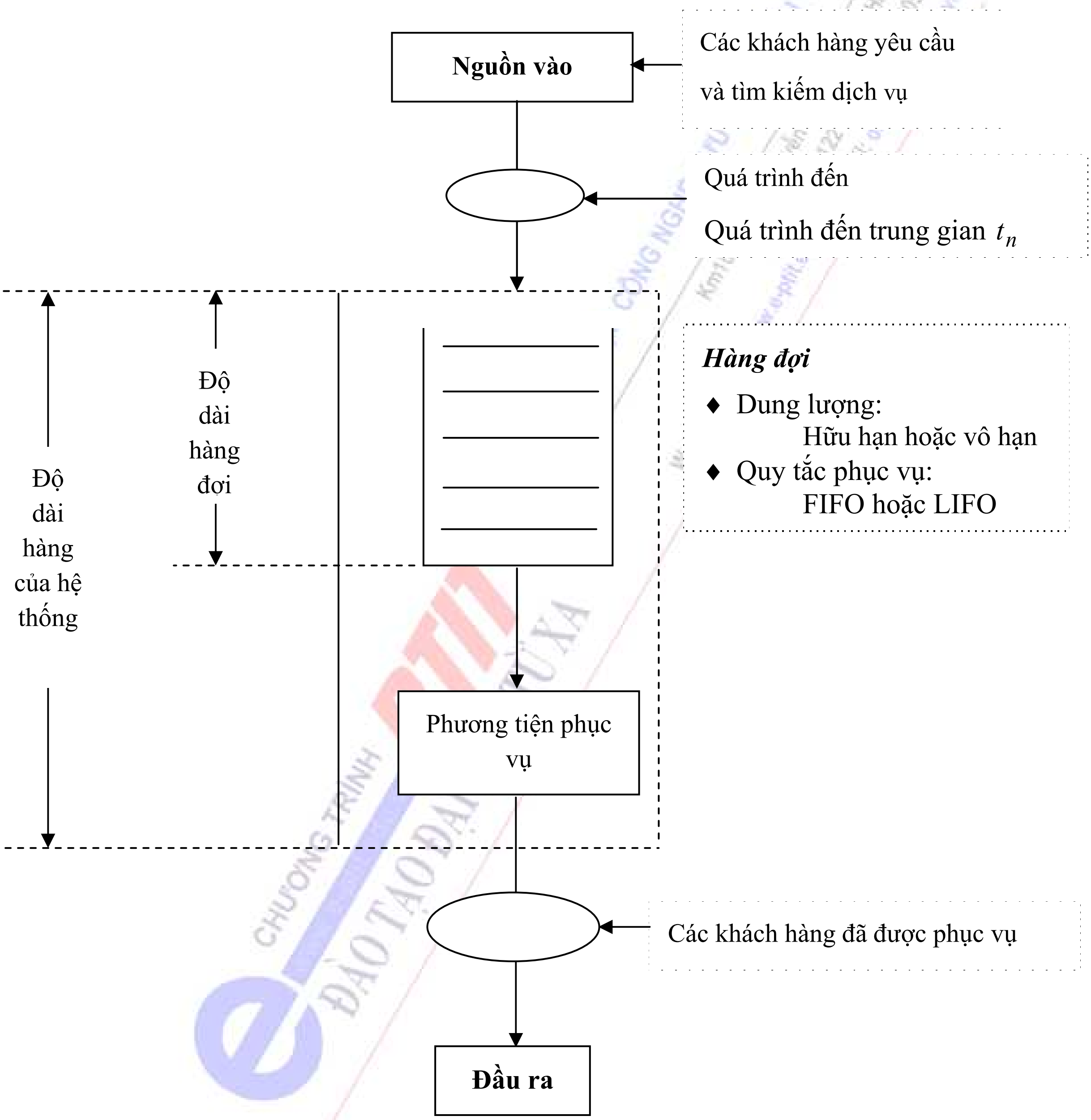
Hướng ứng dụng vào viễn thông: Một trong những bài toán quan trọng của lý thuyết chuyển mạch là vấn đề xung đột thông tin, nghẽn mạch hoặc rớt cuộc gọi. Lý thuyết sắp hàng sẽ xác lập phương án tối ưu để khắc phục những vấn đề trên. Ngoài ra lý thuyết sắp hàng cũng được ứng dụng rộng rãi trong các hệ phục vụ khác.

NỘI DUNG

7.1. KHÁI NIỆM VÀ PHÂN LOẠI QUÁ TRÌNH SẮP HÀNG

7.1.1. Khái niệm quá trình sắp hàng

Mô hình tổng quát của lý thuyết sắp hàng là khách hàng đến ở một thời điểm ngẫu nhiên nào đó và yêu cầu được phục vụ theo một loại nào đó. Giả thiết thời gian phục vụ có thể ngẫu nhiên



Đặt t_n là khoảng thời gian giữa 2 lần đến của khách hàng thứ n và thứ $n+1$. Ta giả định rằng tất cả các t_n $(n \geq 1)$ là độc lập và có cùng phân bố. Vì vậy việc đến của các khách hàng tạo thành 1 hàng kế tiếp nhau với tốc độ đến là $\lambda = \dfrac{1}{\mathrm{E}(t_1)}$. Ta gọi quá trình $\{t_n ; n = 1, 2, ...\}$ là quá trình đến. Khách hàng đến hệ thống yêu cầu các server của hệ thống phục vụ. Ta giả sử rằng khách hàng thứ n cần một thời gian phục vụ là s_n ($n \ge 1$), tất cả các s_n độc lập và có cùng phân bố. Quá trình $\{s_n; n = 1, 2, ...\}$ được gọi là quá trình phục vụ. Ta cũng giả thiết rằng các thời gian đến trung gian độc lập với thời gian phục vụ.

Quá trình sắp hàng được phân loại dựa vào các tiêu chí sau:

1) Phân bố của quá trình đến (input process) $\{t_n; n = 1, 2, ...\}$.

2) Phân bố của thời gian phục vụ (service distribution) $\{s_n; n = 1, 2, ...\}$.

3) Nguyên tắc phục vụ: Các khách hàng đến được sắp xếp vào hàng chờ đến lượt được phục vụ. Để đơn giản ta giả thiết chỉ có một hàng. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp có thể mở rộng cho nhiều hàng cùng hoạt động song song. Nếu độ dài hàng có đặt ngưỡng thì các đơn vị đến hàng khi hàng đầy vượt ngưỡng sẽ bị loại. Các khách hàng được chọn để phục vụ theo nguyên tắc "đến trước phục vụ trước" (FIFO), nghĩa là phục vụ cho khách nào đứng đầu hàng.

4) Cơ cấu phục vụ: Một phương tiện phục vụ bao gồm một hay nhiều Server. Các Server có thể kết nối thành chuỗi vì thế mỗi yêu cầu phục vụ được phục vụ theo nhiều cách hoặc lần lượt hoặc song song.

7.1.2. Phân loại Kendall

Kendall (1951) đã đa ra ký hiệu $A/B/k$ để mô tả các tham số cơ bản của hệ thống sắp hàng, trong đó A biểu diễn dạng của phân bố thời gian đến trung gian, B là dạng phân bố thời gian phục vụ và k là số Server.

- Nếu luật phân bố được xét dưới dạng tổng quát thì A hoặc B lấy ký hiệu G (General). Đôi khi người ta còn ký hiệu GI (general independence).
- Nếu quá trình đến là quá trình Poisson, nghĩa là thời gian đến trung gian có phân bố mũ thì A được ký hiệu M (Markovian). Tương tự nếu thời gian phục vụ có phân bố mũ thì B cũng được ký hiệu M.
- Nếu thời gian đến trung gian hoặc thời gian phục vụ có phân bố Erlang-k thì A, B được ký hiệu E_k.
- Nếu thời gian đến trung gian hoặc thời gian phục vụ là hằng số thì A hoặc B được ký hiệu D (Deterministic).

Khi một vài thiết bị phục vụ có dung lượng hữu hạn thì hệ thống chỉ có thể chứa đến N khách hàng. Nếu ở trong hàng đã có N khách hàng chưa được phục vụ thì khách hàng mới đến sẽ bị từ chối hoặc bị mất. Trong trường hợp này hệ thống được ký hiệu $A/B/k/N$.

7.1.3. Các số đo hiệu năng

1) L_q: Độ dài hàng đợi trung bình của hàng, đó là kỳ vọng của chuỗi thời gian liên tục $\{l_q(t)\}_{t\ge 0}$ trong đó $l_q(t)$ là số khách hàng đợi trong hàng tại thời điểm t.

2) L : Độ dài hàng đợi trung bình của hệ thống, đó là kỳ vọng của chuỗi thời gian liên tục $\{l(t)\}_{t\ge 0}$ trong đó $l(t)$ là số khách hàng trong hệ thống tại thời điểm t. Vậy $l(t) = l_q(t) +$ số khách hàng đang được phục vụ.

3) W_q : Thời gian đợi trung bình của hàng là kỳ vọng của quá trình thời gian rời rạc $\{q_n; n = 1,2,...\}$ trong đó q_n là khoảng thời gian mà khách hàng thứ n phải đợi trong hàng cho đến lúc anh ta được nhận phục vụ.

4) W : Thời gian đợi trung bình của hệ thống là kỳ vọng của quá trình thời gian rời rạc $\{w_n; n = 1,2,...\}$ trong đó $w_n = q_n + s_n$ là thời gian khách hàng thứ n ở trong hệ thống, đó là thời gian đợi trong hàng và thời gian được phục vụ.

7.1.4. Kết quả nhỏ (Little's result)

Công thức liên hệ giữa độ dài hàng đợi và thời gian đợi ở trạng thái cân bằng

$$L = \lambda W \tag{7.1}$$

$$L_q = \lambda W_q \tag{7.2}$$

trong đó λ là tốc độ đến được định nghĩa như sau:

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{E}\left\{\text{số khách đến trong khoảng } (0;t]\right\}}{t} \tag{7.3}$$

7.2. HÀNG $M/M/k$

7.2.1. Trạng thái ổn định của hàng $M/M/k$

Hàng $M/M/k$ có quá trình đến Poisson, thời gian phục vụ theo phân bố mũ và k Server. Trong trường hợp này chuỗi thời gian liên tục $\{l(t)\}_{t\ge 0}$ với không gian trạng thái $\{0,1,2,...\}$ là một quá trình sinh tử vô hạn có có tốc độ sinh $\lambda_i = \lambda$ và tốc độ tử $\mu_i = \min(k,i)\mu$.

- Khi $\lambda > k\mu$ hay *cường độ lưu thông* (traffic intensity) $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} > k$ thì hệ thống không đạt được trạng thái ổn định. Chuỗi $\{l(t)\}_{t\ge 0}$ *không hồi qui* (transient). Số các khách hàng trong hệ thống sẽ dần đến vô hạn.
- Khi $\lambda = k\mu$ hay $\rho = k$, chuỗi $\{l(t)\}_{t\ge 0}$ *hồi qui không* (null - recurrent), hệ thống cũng không đạt trạng thái ổn định. Số khách hàng trong hệ thống không tiến về một trạng thái nào. Thời gian trung bình để hệ thống xuất phát từ một trạng thái bất kỳ quay về lại trạng thái này là vô hạn.
- Khi $\lambda < k\mu$ hay $\rho < k$, chuỗi $\{l(t)\}_{t\ge 0}$ *hồi qui dương* (positive recurrent) và hệ thống đạt được trạng thái ổn định. Nghĩa là khi tốc độ đến nhỏ hơn tốc độ phục vụ tối đa của hệ thống thì số khách hàng ở trong hệ thống có khuynh hướng tiến về không và hệ thống quay trở lại trạng thái 1 nếu có một khách hàng mới đến khi hệ thống đang rỗng.

♦ Tại thời điểm t bất kỳ đặt $d(t)$ là khoảng thời gian cho đến khi khách hàng tiếp theo rời khỏi hệ thống. Định lý Burke phát biểu rằng khi $t \to \infty$ thì $d(t)$ có phân bố mũ với tham số λ và độc lập với số khách hàng trong hệ thống tại thời điểm t. Nói cách khác, chuỗi giới hạn các khách hàng rời khỏi hệ thống $M/M/k$ là một quá trình Poisson tham số λ (Burke, 1976).

Rõ ràng rằng tốc độ rời khỏi hệ thống phải bằng tốc độ đến để hệ thống trở lại trạng thái ổn định. Tuy nhiên, rất khó hình dung được khoảng thời gian giới hạn cho tới khi khách hàng tiếp theo rời hệ thống lại độc lập với số khách hàng trong hệ thống…

7.2.2. Phân bố dừng của hàng $M/M/k$

Khi $\lambda < k\mu$ hay $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < k$ thì hệ thống đạt trạng thái ổn định có phân bố dừng thoả mãn:

$$p_{n+1} = \frac{\lambda_0\lambda_1...\lambda_n}{\mu_1\mu_2...\mu_{n+1}} p_0 = \begin{cases} \dfrac{p_0\rho^n}{n!} & \text{nếu} \quad 0 \le n \le k \\ \dfrac{p_0\rho^n}{k^{n-k}k!} & \text{nếu} \quad n > k \end{cases} \tag{7.4}$$

Từ điều kiện $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ suy ra

$$p_0 = \left[\frac{\rho^k}{k!}\left(\frac{k}{k-\rho}\right) + \sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n}{n!} \right]^{-1} \tag{7.5}$$

7.2.3. Hàng $M/M/k/N$

Đây là hàng có quá trình đến Poisson với tốc độ λ, thời gian phục vụ có phân bố mũ tốc độ μ với k Server. Trạng thái của hệ thống bị giới hạn bởi số lượng N. Khi một khách hàng đến hệ thống thì xảy ra hiện tượng sau: Nếu đã có đủ N khách hàng trong hàng thì lập tức khách hàng này rời khỏi hệ thống còn trường hợp ngược lại thì khách hàng sẽ xếp vào hàng chờ. Như vậy không gian trạng thái của chuỗi $\{l(t)\}_{t\ge 0}$ là $\{0,1,...,N\}$, đây là một quá trình sinh tử hữu hạn. Chuỗi $l(t)$ chuyển từ trạng thái i đến $i+1$ khi một khách hàng đến và đổi trạng thái i về $i-1$ khi một phục vụ vừa hoàn tất. Tốc độ sinh là hằng số $\lambda_i = \lambda$ với mọi $i = 1,2,...$. Tốc độ tử $\mu_i = \min(k,i)\mu$.

Hệ thống đạt trạng thái ổn định với phân bố dừng thoả mãn:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{p_0\rho^n}{n!} & \text{nếu} \quad 0 \le n \le k \\ \dfrac{p_0\rho^n}{k^{n-k}k!} & \text{nếu} \quad k < n \le N \end{cases} \tag{7.6}$$

$$p_0 = \left[\frac{\rho^k}{k!}\sum_{n=0}^{N-k}\left(\frac{\rho}{k}\right)^n + \sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n}{n!} \right]^{-1} \tag{7.7}$$

Một vài trường hợp đặc biệt

- Khi $N \to \infty$ ta có nhận được công thức (7.4)-(7.5) của trường hợp $M/M/k$.
- Khi $N = k$ ta được công thức mất của Erlang (Erlang's loss formula).

7.3. HÀNG $G/G/1$

Hệ thống có 1 Server, quá trình đến là tổng quát nhưng các thời gian đến trung gian t_n độc lập, có cùng phân bố và có kỳ vọng chung là $\mathrm{E}[t_1]$. Thời gian phục vụ trong mỗi chu kỳ cũng độc lập, cùng phân bố và có kỳ vọng chung $\mathrm{E}[s_1]$. Kendall ký hiệu hệ thống này là $G/G/1$ (cũng có khi ký hiệu $GI/GI/1$, ở đây I thay cho independence nghĩa là độc lập).

Ta sẽ đưa ra 3 phương pháp để phân tích các trường hợp đặc biệt đối với quá trình sắp hàng $G/G/1$.

- Phương pháp thứ nhất được gọi là *phương pháp phương trình tích phân*. Phương pháp này đưa bài toán tìm các phân bố giới hạn thời gian đợi của khách hàng thứ n (khi $n \to \infty$) về bài toán giải phương trình tích phân dạng Wiener - Hopf.
- Phương pháp thứ 2 khảo sát *chuỗi Markov nhúng* (Embedded Markov Chain). Nếu quá trình đến là Poisson thì chuỗi Markov nhúng được xét là độ dài của hàng tại những thời điểm khi có một khách hàng vừa được phục vụ xong.

Nếu thời gian phục vụ có phân bố mũ và quá trình đến có phân bố tổng quát thì chuỗi Markov nhúng có được bằng cách kê khai kích thước của hàng tại mỗi thời điểm khi có một khách hàng mới đến. Khi đó quá trình trở thành một chuỗi Markov với cấu trúc đặc biệt.

- Phương pháp thứ 3 nghiên cứu các tính chất của biến ngẫu nhiên $W(t)$ là thời gian một khách hàng phải đợi nếu anh ta đến hệ thống tại thời điểm t. Đại lượng này được gọi là thời gian đợi thực sự của khách hàng với giả thiết khách hàng đến hệ thống tại thời điểm t.

7.3.1. Phương pháp phương trình tích phân

Ký hiệu:

- W_n là thời gian đợi của khách hàng thứ n (không bao gồm thời gian phục vụ).
- s_n là thời gian phục vụ khách hàng thứ n.
- t_n là thời gian đến trung gian của khách hàng thứ n và thứ $n+1$.
- T_n là thời điểm khách hàng thứ n đến hệ thống,

với giả thiết W_0, s_0, T_0 đều bằng 0. Nghĩa là ta giả thiết rằng người thứ nhất đến tại thời điểm $t = 0$ và không có ai đứng chờ trước anh ta.

Rõ ràng $W_n + s_n$ là khoảng thời gian khách hàng thứ n ở trong hệ thống (thời gian chờ + thời gian phục vụ). Do đó, nếu $t_n > W_n + s_n$ thì khi khách hàng thứ $n+1$ đến sẽ không có ai trong hàng vì vậy thời gian đợi $W_{n+1}=0$. Trường hợp $t_n \le W_n + s_n$ thì thời gian đợi là $W_n + s_n - t_n$. Tóm lại

$$W_{n+1} = \begin{cases} W_n + s_n - t_n & \text{nếu } W_n + s_n - t_n \ge 0 \\ 0 & \text{nếu } W_n + s_n - t_n < 0 \end{cases} \quad \textbf{(7.8)}$$

Ký hiệu

$$U_n = s_n - t_n \quad \text{và} \quad Z^+ = \max(Z,0) \quad \textbf{(7.9)}$$

thì

$$W_{n+1} = (W_n + s_n - t_n)^+ = (W_n + U_n)^+ \quad \textbf{(7.10)}$$

$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân bố với U. Giả sử $F_n(x)$ là hàm phân bố của W_n và $g(x)$ là hàm mật độ phân bố của U. Vì W_n và U_n là các biến ngẫu nhiên độc lập, do đó với mọi $x \ge 0$:

$$F_{n+1}(x) = P\{W_{n+1} < x\} = P\{\max(W_n + U_n; 0) < x\} = P\{W_n + U_n < x\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P\{W_n + U_n < x | U_n = y\} g(y)dy = \int_{y \le x} F_n(x-y)g(y)dy \quad \textbf{(7.11)}$$

Vì người thứ nhất đến hệ thống tại thời điểm $t=0$ và không đợi nên

$$F_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \ge 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases} \quad \textbf{(7.12)}$$

Mặt khác: $F_n(x) = 0$ với mọi $x < 0$, với mọi $n = 0,1,2,...$ Do đó

$$F_1(x) - F_2(x) \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$F_n(x) - F_{n+1}(x) = \int_{y \le x} [F_{n-1}(x-y) - F_n(x-y)] g(y)dy$$

Bằng qui nạp ta chứng minh được, với mọi n

$$F_n(x) - F_{n+1}(x) \ge 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(7.13)}$$

Dãy hàm $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ không tăng, không âm nên hội tụ về hàm $F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chuyển qua giới hạn của đẳng thức (7.11) ta được:

$$F(x) = \int_{y \le x} F(x-y)g(y)dy \quad \textbf{(7.14)}$$

Đặt $z = x - y$ ta được

$$F(x)=\int_{0}^{\infty}F(z)g(x-z)dz=F(x)*g(x) \quad \textbf{(7.15)}$$

Định lý 7.1:

(i) Với mọi $x<0$, $F(x)=0$.

(ii) Nếu $\mathrm{E}[U]=\int_{-\infty}^{\infty}xg(x)dx\ge 0$ thì $F(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(iii) Nếu $\mathrm{E}[U]=\int_{-\infty}^{\infty}xg(x)dx<0$ thì $F(x)$ là hàm phân bố (là hàm không giảm, liên tục trái và thoả mãn $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$).

Định nghĩa 7.1: *Thời gian từ lúc một khách hàng rời khỏi hệ thống và hệ thống trở thành rỗng cho đến khi có một khách hàng tiếp theo đến hệ thống gọi là chu kỳ rỗi của hệ thống. Ký hiệu chu kỳ rỗi thứ n là i_n.*

Định lý 7.2: Nếu $\mathrm{E}[U]<\infty$ thì hệ thống đạt được trạng thái ổn định và thời gian đợi trung bình trong hàng

$$W_q=\frac{\mathrm{E}\left[U^2\right]}{-2\mathrm{E}[U]}-\frac{\mathrm{E}\left[i_1^2\right]}{2\mathrm{E}[i_1]} \quad \textbf{(7.16)}$$

trong đó i_1 là chu kỳ rỗi đầu tiên.

Nhận xét: Nếu ta tính được moment cấp1và cấp 2 của thời gian rỗi $i_1$thì công thức (7.16) cho ta tính được thời gian đợi trung bình của hàng W_q. Dựa vào "kết quả nhỏ" (7.1) sẽ cho phép tính được các số đo hiệu năng còn lại L, L_q và W.

7.3.2. Hàng $M/G/1$

Ta giả thiết quá trình đến Poisson tốc độ λ, nghĩa là quá trình đến trung gian t_n có phân bố mũ tốc độ λ. Quá trình phục vụ $\{s_n\}$ được xét một cách tổng quát nhưng giả thiết thời gian phục vụ trong các chu kỳ là độc lập với nhau và có cùng luật phân bố.

$$\mathrm{E}[t_1]=\frac{1}{\lambda};\ \mathrm{E}\left[t_1^2\right]=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Do đó cường độ lưu thông

$$\rho=\frac{\mathrm{E}[s_1]}{\mathrm{E}[t_1]}=\lambda\mathrm{E}[s_1],$$

$$-\mathrm{E}[U_1]=\mathrm{E}[t_1-s_1]=\frac{1}{\lambda}-\frac{\rho}{\lambda}=\frac{1-\rho}{\lambda}>0$$

$$\mathrm{E}\left[U_1^2\right]=\mathrm{E}\left[(s_1-t_1)^2\right]=\mathrm{E}\left[s_1^2\right]-2\mathrm{E}[s_1]\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{\lambda^2}=\mathrm{E}\left[s_1^2\right]+\frac{2(1-\rho)}{\lambda^2}.$$

Mặt khác, vì quá trình đến là Poisson nên khoảng thời gian từ một thời điểm bất kỳ đến lúc có một khách hàng tiếp theo đến hệ thống luôn có phân bố mũ. Do đó thời gian từ lúc một khách hàng rời khỏi hệ thống và hệ thống trở thành rỗng cho đến khi có một khách hàng tiếp theo đến hệ thống (chu kỳ rỗi của hệ thống) cũng có phân bố mũ tốc độ λ. Vậy

$$\mathrm{E}[i_1]=\frac{1}{\lambda};\ \mathrm{E}\left[i_1^2\right]=\frac{2}{\lambda^2}.$$

Thay vào công thức (7.16) của định lý 7.2 ta được công thức Pollaczek - Khinchin (P-K) cho hàng $M/G/1$

$$W_q=\frac{\mathrm{E}\left[s_1^2\right]+\dfrac{2(1-\rho)}{\lambda^2}}{\dfrac{2(1-\rho)}{\lambda}}-\frac{\dfrac{2}{\lambda^2}}{\dfrac{2}{\lambda}}=\frac{\lambda\mathrm{E}\left[s_1^2\right]}{2(1-\rho)} \quad \textbf{(7.17)}$$

$$W=W_q+\mathrm{E}[s_1] \quad \textbf{(7.18)}$$

Từ "kết quả nhỏ" (7.1)-(7.2) suy ra các số đo hiệu năng còn lại.

7.3.3. Các trường hợp đặc biệt của hàng $M/G/1$

1) ***Hàng*** $M/M/1$: Quá trình đến Poisson với tốc độ đến λ, thời gian phục vụ có phân bố mũ tốc độ μ.

$$\mathrm{E}[s_1]=\frac{1}{\mu};\ \mathrm{E}\left[s_1^2\right]=\frac{2}{\mu^2};\ \rho=\frac{\lambda}{\mu}. \quad \textbf{(7.19)}$$

$$W_q=\frac{\dfrac{2\lambda}{\mu^2}}{2\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \quad \textbf{(7.20)}$$

$$W=W_q+\frac{1}{\mu}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}+\frac{1}{\mu}=\frac{1}{\mu-\lambda} \quad \textbf{(7.21)}$$

$$L=\lambda W=\frac{\lambda}{\mu-\lambda};\quad L_q=\lambda W_q=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \quad \textbf{(7.22)}$$

2) ***Hàng*** $M/D/1$: Quá trình đến Poisson với tốc độ đến λ, thời gian phục vụ không đổi tốc độ μ.

$$\mathrm{E}[s_1]=\frac{1}{\mu};\ \mathrm{var}[s_1]=\mathrm{E}\left[s_1^2\right]\text{-}\mathrm{E}[s_1]^2=0\ \Rightarrow \mathrm{E}\left[s_1^2\right]=\frac{1}{\mu^2};\ \rho=\frac{\lambda}{\mu}. \quad \textbf{(7.23)}$$

$$W_q = \frac{\frac{\lambda}{\mu^2}}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)} \tag{7.24}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{2\mu-\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)} \tag{7.25}$$

$$L = \lambda W = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)} + \frac{\lambda}{\mu};\quad L_q = \lambda W_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)} \tag{7.26}$$

3) Hàng $M/E_k/1$: Quá trình đến Poisson với tốc độ đến λ, thời gian phục vụ ngẫu nhiên độc lập có cùng phân bố Erlang-k với tốc độ μ.

$$\mathrm{E}\left[s_1\right] = \frac{1}{\mu} = \frac{k}{\lambda_0};\ \mathrm{var}\left[s_1\right] = \frac{k}{\lambda_0^2} = \frac{1}{k\mu^2} \Rightarrow \mathrm{E}\left[s_1^2\right] = \frac{1}{k\mu^2} + \frac{1}{\mu^2};\ \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \tag{7.27}$$

$$W_q = \frac{\frac{\lambda(k+1)}{k\mu^2}}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{(k+1)\lambda}{2k\mu(\mu-\lambda)} \tag{7.28}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{(k+1)\lambda}{2k\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} \tag{7.29}$$

$$L = \lambda W = \frac{(k+1)\lambda^2}{2k\mu(\mu-\lambda)} + \frac{\lambda}{\mu};\quad L_q = \lambda W_q = \frac{(k+1)\lambda^2}{2k\mu(\mu-\lambda)} \tag{7.30}$$

Trong công thức trên ta đã sử dụng (6.10) chương 6.

Nhận xét:

1. Thời gian đợi trung bình W_q mà một khách hàng phải mất ở hàng đợi là số đo trễ xẩy ra ở hệ thống sắp hàng. Ta có

$$W_{q\,M/D/1} \le W_{q\,M/E_k/1} \le W_{q\,M/M/1} \tag{7.31}$$

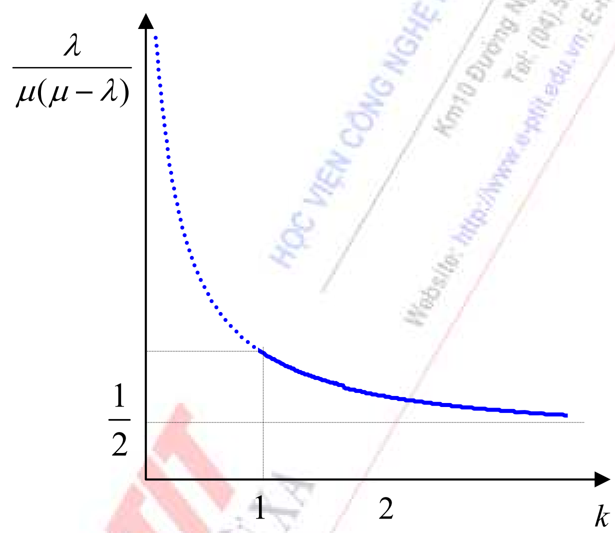
Khi $k=1$: $W_{q\,M/E_k/1} = W_{q\,M/M/1}$.

Khi $k \to \infty$: $\lim\limits_{k\to\infty} W_{q\,M/E_k/1} = W_{q\,M/D/1}$.

2. Xét hệ toạ độ trực chuẩn Oxy. Trên trục hoành ta chọn các hoành độ nguyên $k = 1, 2, \ldots$, trục tung chọn đơn vị là $\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ thì đồ thị của $W_{q\,M/E_k/1}$ là hyperbol

$\frac{k+1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2k}$ đạt cực đại bằng 1 khi $k=1$ và tiệm cận đến $\frac{1}{2}$ khi $k \to \infty$.

3. Hệ số $\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ lớn nếu λ gần bằng μ. Như vậy khi tốc độ đến gần với tốc độ phục vụ thì hàng đợi tăng lên nhanh chóng tỉ lệ nghịch với hiệu số hai tốc độ.



7.3.4. Phương pháp chuỗi Markov nhúng áp dụng cho hàng $G/M/1$

Xét hệ thống sắp hàng có 1 server, các chu kỳ thời gian phục vụ s_n độc lập cùng có phân bố mũ tốc độ μ. Quá trình đến là độc lập, tổng quát, có cùng phân bố và thời gian đến trung gian là biến ngẫu nhiên có hàm phân bố $H(u)$.

Ta xét chuỗi Markov nhúng là số khách hàng trong hàng tại những thời điểm khi có khách hàng mới đến hệ thống.

Gọi q là trạng thái của hệ thống khi có 1 người mới đến và gọi q' là trạng thái sau khi có 1 người tiếp theo đến :

$$q' = q + 1 - N \qquad \textbf{(7.32)}$$

trong đó N là số khách hàng được phục vụ trong chu kỳ giữa hai lần đến. Vì phân bố mũ có tính chất "không nhớ" nên số khách hàng N được phục vụ trong chu kỳ giữa 2 lần đến chỉ phụ thuộc vào độ dài của khoảng và q mà không phụ thuộc vào phạm vi phục vụ mà khách hiện tại đã được nhận phục vụ. Với các giả thiết này công thức (7.32) xác định chuỗi Markov có xác suất chuyển $P = \lfloor p_{ij} \rfloor$ thỏa mãn :

$$p_{ij} = P\{q' = j | q = i\} = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad j > i+1 \\ P\{N = i+1-j\} & \text{nếu} \quad i+1 \geq j \geq 1 \end{cases} \quad \textbf{(7.33)}$$

Đặt $a_k = P\{N = k\}$ thì

$$p_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad j > i+1 \\ a_{i+1-j} & \text{nếu} \quad i+1 \geq j \geq 1 \end{cases} \quad \textbf{(7.34)}$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ và từ giả thiết thời gian phục vụ có phân bố mũ với tốc độ μ có thể chứng minh được (xem mục 5 chương 14 [6]) :

$$a_k = \int_0^{\infty} e^{-\mu u} \frac{u^k \mu^k}{k!} dH(u) \quad \textbf{(7.35)}$$

trong đó $H(u)$ là hàm phân bố của chu kỳ đến trung gian.

Cuối cùng các xác suất chuyển p_{i0} ($j = 0$) là xác suất mà tất cả i người trong hàng đã được phục vụ trước khi có người mới đến.

$$p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1 - a_0 - a_1 - \cdots - a_i \quad \textbf{(7.36)}$$

Vậy ma trận xác suất chuyển

$$P = \begin{bmatrix} r_0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ r_1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ r_2 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & \dots \\ r_3 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.37)}$$

trong đó $r_i = 1 - a_0 - a_1 - \cdots - a_i$.

Cường độ lưu thông $\rho = 1 \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} k a_k$.

Hệ thống đạt trạng thái ổn định khi $\rho < 1$ hay $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k > 1$.

Phân bố dừng

$$\Pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, ...] \text{ có dạng } \pi_i = (1-\xi_0)\xi_0^i \,;\, i = 0,1,2,... \quad \textbf{(7.38)}$$

trong đó ξ_0 là nghiệm duy nhất của phương trình

$$f(\xi_0) = \xi_0 \;\; (0 < \xi_0 < 1) \quad \text{với} \quad f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k \quad \textbf{(7.39)}$$

Thời gian đợi W

Nếu $\rho < 1$ thì hệ thống đạt trạng thái ổn định, khi đó hàm phân bố độ dài của hàng cũng đạt đến phân bố ổn định. Với điều kiện này ta xét thời gian đợi W.

Xác suất không phải đợi là $\pi_0 = 1 - \xi_0$.

Nếu khách hàng đến và đã có $n \ge 1$ khách hàng ở trong hàng thì anh ta phải đợi với tổng số n lần phục vụ có phân bố độc lập và cùng phân bố mũ trước khi đến lượt anh ta.

Ta biết rằng tổng của n phân bố mũ độc lập tham số μ là phân bố Erlang-n tham số μ. Do đó

$$P\left\{W < t \,\middle|\, \text{có } n \text{ người trong hàng}\right\} = \int_0^t \frac{\mu^n \tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu\tau} d\tau \;,\; n \ge 1. \tag{7.40}$$

Mặt khác

$$P\left\{\text{có } n \text{ người trong hàng}\right\} = \pi_n = (1-\xi_0)\xi_0^n \;,\; n \ge 1. \tag{7.41}$$

Áp dụng công thức xác suất đầy đủ ta được

$$W(t) = P\{W < t\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{W < t \,\middle|\, \text{có } n \text{ người trong hàng}\right\} P\left\{\text{có } n \text{ người trong hàng}\right\} + \pi_0$$

$$= (1-\xi_0)\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n \tau^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu\tau} \xi_0^n d\tau + (1-\xi_0).$$

$$W(t) = (1-\xi_0) + \xi_0\left[1 - e^{-\mu t(1-\xi_0)}\right]. \tag{7.42}$$

7.3.5. Các cận trên của thời gian đợi trung bình của hàng

Để tính các số đo hiệu năng của hàng $G/G/1$ ta có công thức (7.16) và "kết quả nhỏ" (7.1)-(7.2). Tuy nhiên trong trường hợp tổng quát chưa có qui tắc tính $\mathrm{E}[i_1]$ và $\mathrm{E}\left[i_1^2\right]$. Thay cho công thức tính chính xác người ta tìm các cận trên và cận dưới của chúng. Ở đây người ta nêu một vài cận trên cho W_q.

1. Vì số hạng $\mathrm{E}\left[i_1^2\right] / \mathrm{E}\left[i_1\right] \ge 0$ nên

$$W_q \le \frac{\mathrm{E}\left[U^2\right]}{-2\mathrm{E}[U]} \tag{7.43}$$

2. Mặt khác ta còn có thể chứng minh được $-2\mathrm{E}[U]W_q \le \mathrm{var}[U]$ và $-2\mathrm{E}[U] > 0$, do đó

$$W_q \le \frac{\mathrm{var}[\mathrm{U}]}{-2\mathrm{E}[U]} \tag{7.44}$$

3. Khi cường độ lưu thông $\rho \to 0$ thì thời gian rỗi i_1 tiến đến 0. Điều này làm cho $\mathrm{E}\left[i_1^2\right]$ tiến đến 0 nhanh hơn $\mathrm{E}\left[i_1\right]$. Do đó $\mathrm{E}\left[i_1^2\right]/\mathrm{E}\left[i_1\right] \to 0$, vì vậy

$$\lim_{\rho\to 0} W_q \approx \frac{\mathrm{var}[\mathrm{U}]}{-2\mathrm{E}[U]} = \frac{\mathrm{var}[\mathrm{u}_1]}{-2\mathrm{E}[\mathrm{u}_1]} = \frac{\mathrm{var}[\mathrm{t}_1]+\mathrm{var}[\mathrm{s}_1]}{-2\mathrm{E}[\mathrm{u}_1]} = \frac{\lambda\left(\mathrm{var}[\mathrm{t}_1]+\mathrm{var}[\mathrm{s}_1]\right)}{2(1-\rho)} \tag{7.45}$$

TÓM TẮT

Khái niệm quá trình sắp hàng

Mô hình tổng quát của lý thuyết sắp hàng là khách hàng đến ở một thời điểm ngẫu nhiên nào đó và yêu cầu được phục vụ theo một loại nào đó. Giả thiết thời gian phục vụ có thể ngẫu nhiên

Phân loại Kendall

Kendall (1951) đã đa ra ký hiệu $A/B/k$ hoặc $A/B/k/N$ để mô tả các tham số cơ bản của hệ thống sắp hàng, trong đó A biểu diễn loại của phân bố thời gian đến trung gian. B là loại phân bố thời gian phục vụ và k là số Server. N là dung lượng của hàng.

Các số đo hiệu năng

L_q : Độ dài hàng đợi trung bình của hàng.

L : Độ dài hàng đợi trung bình của hệ thống.

W_q : Thời gian đợi trung bình của hàng.

W : Thời gian đợi trung bình của hệ thống.

Kết quả nhỏ

Công thức liên hệ giữa độ dài hàng đợi và thời gian đợi ở trạng thái cân bằng

$$L = \lambda W\,;\; L_q = \lambda W_q$$

trong đó λ là tốc độ đến được định nghĩa như sau:

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{E}\left\{\text{số khách đến trong khoảng } (0;\mathrm{t}]\right\}}{t}$$

Phân bố dừng của hàng $M/M/k$

Khi $\lambda < k\mu$ hay $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < k$ thì hệ thống đạt trạng thái ổn định có phân bố dừng thoả mãn:

$$p_{n+1} = \frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_n}{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{n+1}} p_0 = \begin{cases} \dfrac{p_0\rho^n}{n!} & \text{nếu } \; 0 \le n \le k \\[2ex] \dfrac{p_0\rho^n}{k^{n-k}k!} & \text{nếu } \; n > k \end{cases} \;;\; p_0 = \left[\frac{\rho^k}{k!}\left(\frac{k}{k-\rho}\right) + \sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}.$$

Hàng $M/M/k/N$

Hệ thống đạt trạng thái ổn định với phân bố dừng thoả mãn:

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{p_0\rho^n}{n!} & \text{nếu } \ 0 \le n \le k \\ \dfrac{p_0\rho^n}{k^{n-k}k!} & \text{nếu } \ k < n \le N \end{cases} \quad ; \quad p_0 = \left[\frac{\rho^k}{k!}\sum_{n=0}^{N-k}\left(\frac{\rho}{k}\right)^n + \sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n}{n!} \right]^{-1}.$$

Hàng $G/G/1$

- W_n là thời gian đợi của khách hàng thứ n (không bao gồm thời gian phục vụ).
- s_n là thời gian phục vụ khách hàng thứ n.
- t_n là thời gian đến trung gian của khách hàng thứ n và thứ $n+1$.
- $U_n = s_n - t_n$.
- $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy các biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân bố với U.

Nếu $\mathrm{E}[U] < \infty$ thì hệ thống đạt được trạng thái ổn định và thời gian đợi trung bình trong hàng $W_q = \dfrac{\mathrm{E}\left[U^2\right]}{-2\mathrm{E}[U]} - \dfrac{\mathrm{E}\left[i_1^2\right]}{2\mathrm{E}[i_1]}$, trong đó i_1 là chu kỳ rỗi đầu tiên.

Hàng $M/G/1$

Ta giả thiết quá trình đến Poisson tốc độ λ, nghĩa là quá trình đến trung gian t_n có phân bố mũ tốc độ λ. Quá trình phục vụ $\{s_n\}$ được xét một cách tổng quát nhưng giả thiết thời gian phục vụ trong các chu kỳ là độc lập với nhau và có cùng luật phân bố. $\mathrm{E}[t_1] = \dfrac{1}{\lambda}$; $\mathrm{E}\left[t_1^2\right] = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

Do đó cường độ lưu thông $\rho = \dfrac{\mathrm{E}[s_1]}{\mathrm{E}[t_1]} = \lambda \mathrm{E}[s_1]$.

Chu kỳ rỗi đầu tiên $\mathrm{E}[i_1] = \dfrac{1}{\lambda}$; $\mathrm{E}\left[i_1^2\right] = \dfrac{2}{\lambda^2}$.

Trễ trung bình của hàng và của hệ thống:

$$W_q = \frac{\mathrm{E}\left[s_1^2\right] + \dfrac{2(1-\rho)}{\lambda^2}}{\dfrac{2(1-\rho)}{\lambda}} - \frac{\dfrac{2}{\lambda^2}}{\dfrac{2}{\lambda}} = \frac{\lambda \mathrm{E}\left[s_1^2\right]}{2(1-\rho)};\ W = W_q + \mathrm{E}[s_1].$$

Các trường hợp đặc biệt của hàng $M/G/1$

Hàng $M/M/1$: $W_q = \dfrac{\dfrac{2\lambda}{\mu^2}}{2\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)} = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$; $W = W_q + \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{\mu-\lambda}$

$$L = \lambda W = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}; \quad L_q = \lambda W_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

Hàng $M/D/1$:

$$W_q = \frac{\dfrac{\lambda}{\mu^2}}{2\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)}; \quad W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{2\mu-\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)};$$

$$L = \lambda W = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)} + \frac{\lambda}{\mu}; \quad L_q = \lambda W_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)}.$$

Hàng $M/E_k/1$: $W_q = \dfrac{\dfrac{\lambda(k+1)}{k\mu^2}}{2\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)} = \dfrac{(k+1)\lambda}{2k\mu(\mu-\lambda)}$; $W = W_q + \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{(k+1)\lambda}{2k\mu(\mu-\lambda)} + \dfrac{1}{\mu}$;

$$L = \lambda W = \frac{(k+1)\lambda^2}{2k\mu(\mu-\lambda)} + \frac{\lambda}{\mu}; \quad L_q = \lambda W_q = \frac{(k+1)\lambda^2}{2k\mu(\mu-\lambda)}.$$

Phương pháp chuỗi Markov nhúng áp dụng cho hàng $G/M/1$

Gọi q là trạng thái của hệ thống khi có 1 người mới đến và gọi q' là trạng thái sau khi có 1 người tiếp theo đến: $q' = q + 1 - N$, trong đó N là số khách hàng được phục vụ trong chu kỳ giữa hai lần đến. Vì phân bố mũ có tính chất "không nhớ" nên số khách hàng N được phục vụ trong chu kỳ giữa 2 lần đến chỉ phụ thuộc vào độ dài của khoảng và q mà không phụ thuộc vào phạm vi phục vụ mà khách hiện tại đã được nhận phục vụ. Với các giả thiết này ta có chuỗi Markov với xác suất chuyển $P = \lfloor p_{ij} \rfloor$ thỏa mãn :

$$p_{ij} = P\{q' = j | q = i\} = \begin{cases} 0 & \text{nếu} \quad j > i+1 \\ P\{N = i+1-j\} & \text{nếu} \quad i+1 \ge j \ge 1 \end{cases}$$

Các cận trên của thời gian đợi trung bình của hàng $G/G/1$

$W_q \le \dfrac{\mathrm{E}\left[U^2\right]}{-2\mathrm{E}[U]}$; $W_q \le \dfrac{\mathrm{var}[\mathrm{U}]}{-2\mathrm{E}[U]}$. Khi cường độ lưu thông $\rho \to 0$ thì thời gian rỗi i_1 tiến đến 0. Điều này làm cho $\mathrm{E}\left[i_1^2\right]$ tiến đến 0 nhanh hơn $\mathrm{E}[i_1]$. Do đó $\mathrm{E}\left[i_1^2\right] / \mathrm{E}[i_1] \to 0$,

$$\lim_{\rho\to 0} W_q \approx \frac{\mathrm{var}[\mathrm{U}]}{-2\mathrm{E}[U]} = \frac{\mathrm{var}[\mathrm{u}_1]}{-2\mathrm{E}[\mathrm{u}_1]} = \frac{\mathrm{var}[\mathrm{t}_1] + \mathrm{var}[\mathrm{s}_1]}{-2\mathrm{E}[\mathrm{u}_1]} = \frac{\lambda\left(\mathrm{var}[\mathrm{t}_1] + \mathrm{var}[\mathrm{s}_1]\right)}{2(1-\rho)}.$$

CÂU HỎI ÔN TẬP VÀ BÀI TẬP

7.1 Kết quả nhỏ cho công thức liên hệ giữa các số đo hiệu năng của một hệ thống sắp hàng.

Đúng ☐ Sai ☐.

7.2 Trong ký hiệu Kendall $A/B/k$ nếu quá trình đến là quá trình Poisson thì A được ký hiệu là P.

Đúng ☐ Sai ☐.

7.3 Quá trình trình đến trong mọi hệ thống sắp hàng đều là quá trình Poisson.

Đúng ☐ Sai ☐.

7.4 Hàng $M/M/1$ với tốc độ đến $\lambda <$ tốc độ phục vụ μ thì hệ đạt trạng thái ổn định với trễ trung bình của hàng đợi là $W_q = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$.

Đúng ☐ Sai ☐.

7.5 Hàng $M/E_k/1$ với tốc độ đến $\lambda <$ tốc độ phục vụ μ thì hệ đạt trạng thái ổn định có độ dài trung bình của hệ thống là $L = \dfrac{(k+1)\lambda^2}{2k\mu(\mu-\lambda)}$.

Đúng ☐ Sai ☐.

7.6 Với điều kiện tốc độ đến $\lambda <$ tốc độ phục vụ μ thì hệ $M/G/1$ đạt trạng thái ổn định, trong đó với trễ trung bình của hàng đợi của hàng $M/D/1$ là bé nhất trong số trễ trung bình của hàng đợi của hàng $M/G/1$.

Đúng ☐ Sai ☐.

7.7 Giả sử hệ thống sắp hàng có tốc độ đến $\lambda = 10$, tốc độ phục vụ $\mu = 12$.

a. Tìm trễ phục vụ trung bình của hệ thống và độ dài trung bình của hàng ở trạng thái cân bằng trong các trường hợp sau: $M/M/1$, $M/D/1$, $M/E_5/1$.

b. Tìm k nhỏ nhất để độ dài trung bình của hàng $L_{M/E_k/1}$ không vượt quá 3.

7.8 Hàng $M/M/k/N$ có phân bố dừng thỏa mãn công thức (7.6)-(7.7). Khi $k = N$ các xác suất p_i với mọi $i = 0,1,...,k$ được biết với tên gọi là công thức xác suất mất Erlang. Tìm xác suất mất Erlang khi $k = N = 2$.

7.9 Từ công thức phân bố dừng (7.4)-(7.5) của hàng $M/M/k$. Chứng minh rằng

$$L_q = \frac{\rho^{k+1}}{(k-1)!(k-\rho)^2} p_0 .$$

Hãy tính các số đo hiệu năng: L; W, W_q.

7.10 Hãy tính các số đo hiệu năng: L, L_q; W, W_q của hàng $M/M/2$ với $\lambda = 12$, $\mu = 10$.

HƯỚNG DẪN TRẢ LỜI

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG I

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	1.10
Sai	Đúng	Sai	Đúng	Đúng	Đúng	Sai	Đúng	Sai	Sai

1.11 **a.** $1-4i$ **b.** $-\frac{3}{5}i$ **c.** 25

d. $-9-46i$ **e.** -1 **f.** $\frac{16}{5}-\frac{2}{5}i$.

1.12. **a.** $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ **b.** $2,\ -1+i,\ -1-i$

1.13. **a.** $z=\sqrt[6]{2}e^{i\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}}$, $k=0,1,2$ **b.** $z=2e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}}$, $k=0,1,2$.

1.14. **a.** Đường tròn tâm (3;4) bán kính 2.

b. Nửa đường thẳng gốc tại $z=i$ và tạo với trục thực góc $\frac{\pi}{4}$.

c. Ellipse với tiêu điểm $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$ độ dài trục lớn $2a=6$.

d. Đường tròn tâm (2;0) bán kính 2.

1.15. **a.** $u(x,y)=x^3-3xy^2$, $v(x,y)=3x^2y-y^3$.

b. $u(x,y)=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$, $v(x,y)=\frac{y}{(1-x)^2+y^2}$.

c. $u(x,y)=e^{3x}\cos 3y$, $v(x,y)=e^{3x}\sin 3y$.

1.16. $w'(z)=1-\frac{1}{z^2}$, không giải tích tại $z=0$.

1.17. $u(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,.$$

Hàm số không thỏa mãn điều kiện Cauchy-Riemann tại mọi $z\neq 0$.

$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{w(\Delta z)-w(0)}{\Delta z}=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta z|\Delta z|}{\Delta z}=0$. Vậy $w'(0)=0$.

1.18. **a.** $w'(z)=4z^3$ **b.** $w'(z)=-\dfrac{2z}{(z^2+1)^2}$.

1.19. **a.** $v(x,y)=3x^2y-y^3+C$, $w(z)=z^3+Ci$.

b. $v(x,y)=2xy+2y+C$, $w(z)=z^2+2z+Ci$.

1.20. **a.** $u(x,y)=\dfrac{x+1}{(x+1)^2+y^2}+C$, $w(z)=\dfrac{1}{z+1}+C$.

b. $u(x,y)=x^2-y^2-3y+C$, $w(z)=z^2+3iz+C$.

1.21. Phép biến hình $w=\dfrac{1}{z}$ là hợp của phép đối xứng qua đường tròn đơn vị và phép đối xứng qua trục thực.

a. Biến đường tròn tâm O bán kính 4 thành đường tròn tâm O bán kính $\dfrac{1}{4}$: $u^2+v^2=\dfrac{1}{4}$.

b. Biến đường phân giác thứ nhất thành đường phân giác thứ hai: $v=-u$.

c. $u^2+v^2-u=0$. **d.** $\dfrac{1}{2}$.

1.22. Phép biến hình $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ biến $-1,\ 0,\ \infty$ lần lượt thành $0,1,-1$ vì vậy phép biến hình phân tuyến tính này biến trục thực thành trục thực, biến đường thẳng nằm trên tia $\operatorname{Arg} z=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ (đi qua gốc O lập với trục thực một góc $\dfrac{\pi}{3}$) thành đường tròn đi qua $-1,\ 1$ và tiếp tuyến tại 1 lập với trục thực một góc $\dfrac{\pi}{3}$: $u^2+v^2-\dfrac{2}{\sqrt{3}}v=1$.

1.23. **a.** Đoạn thẳng nối $w_1=1$ và $w_2=-i$.

b. Đường tròn tâm $(-1;2)$ bán kính 4: $|w+1-2i|=2\sqrt{2}$.

1.24. Áp dụng công thức (1.47) ta có: $w=k\dfrac{z-1}{z+1}$; $w(i)=1 \Rightarrow k=-i \Rightarrow w=i\dfrac{1-z}{1+z}$.

1.25. $I=\int\limits_C |z|dz=\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,(dx+idy)$.

a. $C:\begin{cases}-1\le x\le 1\\ y=0\end{cases} \Rightarrow I=\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{x^2}\,dx=2\int\limits_0^1 xdx=1$.

b. $C:\begin{cases}x=\cos(\pi-t)\\ y=\sin(\pi-t)\ ;\ 0\le t\le\pi\end{cases} \Rightarrow I=\int\limits_0^{\pi}\big(\sin(\pi-t)-i\cos(\pi-t)\big)dt=2$.

1.26. **a.** $I=2\pi i\cos\pi=-2\pi i$.

b. $I=\oint\limits_C \dfrac{e^z}{z(z+1)}dz=\oint\limits_C e^z\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z+1}\right)dz=2\pi i\left(e^0-e^{-1}\right)$.

1.27. $I=\left.\dfrac{z^2}{2}\right|_{z=-2}^{2}=0$.

1.28. $C:|z-1|=1 \Rightarrow I=\oint\limits_C \dfrac{\frac{\sin(\pi z/4)}{z+1}}{z-1}dz=2\pi i\left.\left(\dfrac{\sin(\pi z/4)}{z+1}\right)\right|_{z=1}=\dfrac{\pi i}{\sqrt{2}}$.

1.29. **a.** $I=\oint\limits_C \dfrac{\frac{1}{(z+1)^3}}{(z-1)^3}dz=\dfrac{2\pi i}{2!}\left.\left(\dfrac{1}{(z+1)^3}\right)''\right|_{z=1}=\dfrac{3\pi i}{8}$.

b. $I=\oint\limits_C \dfrac{\frac{1}{(z-1)^3}}{(z+1)^3}dz=\dfrac{2\pi i}{2!}\left.\left(\dfrac{1}{(z-1)^3}\right)''\right|_{z=-1}=-\dfrac{3\pi i}{8}$. **c.** $I=0$.

1.30. **a.** $R=2;\ z=2e^{i\varphi}\Rightarrow\left|\dfrac{z^n}{n^2 2^n}\right|=\dfrac{1}{n^2} \Rightarrow$ miền hội tụ $|z|\le 2$.

b. Đặt $u=(z-i)^3$; $R=3, u=3e^{i\varphi}\Rightarrow\dfrac{u^n}{3^n+n}=\dfrac{e^{in\varphi}}{1+\dfrac{n}{3^n}}\not\to 0$: miền hội tụ $|z-i|<\sqrt[3]{3}$.

1.31. **a.** Cách 1: $w'=e^{\frac{1}{1-z}}\dfrac{1}{(1-z)^2}$, $w''=e^{\frac{1}{1-z}}\left(\dfrac{1}{(1-z)^4}+\dfrac{2}{(1-z)^3}\right)$,

$$w''' = e^{\frac{1}{1-z}}\left(\frac{1}{(1-z)^6}+\frac{2}{(1-z)^5}+\frac{4}{(1-z)^5}+\frac{6}{(1-z)^4}\right)$$

$$\Rightarrow\ w = e\left(1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+\cdots\right).$$

Cách 2: $e^{\frac{1}{1-z}} = e^{1+z+z^2+z^3+o(z^3)} = e\,e^{z+z^2+z^3+o(z^3)}$

$$= e\left(1+\frac{z+z^2+z^3+0(z^3)}{1!}+\frac{\left(z+z^2+z^3+o(z^3)\right)^2}{2!}+\frac{\left(z+z^2+z^3+o(z^3)\right)^3}{3!}+o(z^3)\right)$$

$$= e\left(1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+o(z^3)\right).$$

b.

$$w=\sin\left(1+z+z^2+z^3+o(z^3)\right)=\sin 1\cos\left(z+z^2+z^3+o(z^3)\right)-\sin\left(z+z^2+z^3+o(z^3)\right)\cos 1$$

$$\Rightarrow\ w=\sin 1+\cos 1\,z+\left(\cos 1-\frac{1}{2}\sin 1\right)z^2+\left(\frac{5}{6}\cos 1-\sin 1\right)z^3+\cdots$$

1.32. $w=\dfrac{2/3}{z-1}+\dfrac{1/3}{z+2}$

a. $w=\dfrac{1}{6}\left(1-\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{z^3}{8}+\cdots\right)+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z^3}+\cdots\right)$

b. $w=\dfrac{1}{6}\left(1-\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{z^3}{8}+\cdots\right)-\dfrac{2}{3}\left(1+z+z^2+\cdots\right)$

c. $w=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{2}{z^2}+\dfrac{4}{z^3}-\cdots\right)+\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z^3}+\cdots\right).$

1.33. $I=\displaystyle\oint_C\frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}dz=2\pi i\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'\Bigg|_{z=1}+2\pi i\left(\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}\right)\Bigg|_{z=i}=-\frac{\pi i}{2}.$

1.34. Phương trình $z^4+1=0$ chỉ có hai nghiệm $\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$ nằm trong đường tròn C (xem ví dụ 10).

Áp dụng công thức (1.71) ta có $I=\displaystyle\oint_C\frac{dz}{z^4+1}=2\pi i\left(\frac{1}{4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3}+\frac{1}{4\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^3}\right)=-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$

1.35. **a.** $I = 2\pi i\left(\left[\operatorname{Res}\dfrac{z^2+1}{z^4+1};\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right]+\left[\operatorname{Res}\dfrac{z^2+1}{z^4+1};\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}\right]\right)$

$$= 2\pi i\left(\frac{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2+1}{4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3}+\frac{\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2+1}{4\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3}\right)=\sqrt{2}\pi .$$

b. $I=\dfrac{\pi}{9}.$

1.36. Áp dụng công thức (1.76).

a. $I=\dfrac{1}{2}\operatorname{Im}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{i2x}}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(2\pi i\left[\operatorname{Res}\frac{ze^{i2z}}{z^2+4};\,z=2i\right]\right)=\frac{\pi e^{-4}}{2}.$

b. $I=\dfrac{1}{2}\operatorname{Im}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Im}2\pi i\left(\left[\operatorname{Res}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2};\,z=i\right]+\left[\operatorname{Res}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2};\,z=0\right]\right)=\frac{\pi(2e-3)}{4e}.$$

1.37. Áp dụng công thức (1.77).

a. $I=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ **b.** $I=\pi\sqrt{2}$.

1.39. **a.** $X(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{in\omega}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{i\omega}}{z}\right)^n=\frac{z}{z-e^{i\omega}};\ |z|>1.$

b. Ta có $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{-na}z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e^a z}\right)^n=\frac{e^a z}{e^a z-1};\ |z|>e^{-a}.$

$$\Rightarrow X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}ne^{-na}z^{-n}=-z\left(\frac{e^a z}{e^a z-1}\right)'=\frac{e^a z}{(e^a z-1)^2}\ ;\ |z|>e^{-a}.$$

c. $X(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}-a^n u(-n-1)z^{-n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^{n+1}=\frac{z}{z-a};\ |z|<|a|.$

d. $X(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}z^{-n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^{n+1}=\frac{z^N-1}{z^{N-1}(z-1)}\ ;\ \forall z.$

1.40. Trong miền $|z| > \dfrac{1}{2}$;

$$X(z) = \frac{4}{z^3(2z-1)} = \frac{2}{z^4\left(1-\dfrac{1}{2z}\right)} = \frac{2}{z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n = \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{2^{n-5}}z^{-n}$$

$$\Rightarrow x(n) = \frac{1}{2^{n-5}}u(n-4).$$

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG II

2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	2.10
Đúng	Sai	Đúng	Đúng	Sai	Sai	Đúng	Sai	Đúng	Đúng

2.11. Tìm biến đổi Laplace

a. $x(t) = \sin^3 t = \dfrac{3\sin t - \sin 3t}{4} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \dfrac{6}{(s^2+1)(s^2+9)}.$

b. $\cos^4 \omega t = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{2}\cos 2\omega t + \dfrac{1}{8}\cos 4\omega t \Rightarrow X(s) = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{3}{s} + \dfrac{4s}{s^2+4\omega^2} + \dfrac{s}{s^2+16\omega^2}\right)$

c. $\mathscr{L}\{\text{ch}3t\} = \dfrac{s}{s^2-9} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}\{e^{-2t}\text{ch}3t\} = \dfrac{s+2}{(s+2)^2-9}.$

d. $x(t) = \left(1+te^{-t}\right)^3 = 1 + 3te^{-t} + 3t^2e^{-2t} + t^3e^{-3t}$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+2)^3} + \frac{6}{(s+3)^4}.$$

e. $x(t) = \text{ch}\,2t\cos t = \dfrac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}\cos t \quad \Rightarrow \quad X(s) = \dfrac{s^3-3s}{s^4-s^2+25}.$

f. $x(t) = e^{-t}\sin 2t\cos 4t = \dfrac{e^{-t}}{2}\left(\sin 6t - \sin 2t\right)$

$$\Rightarrow X(s) = \frac{3}{s^2+2s+37} - \frac{1}{s^2+2s+5}.$$

2.12. Tìm biến đổi Laplace

a. $X(s) = -\left(\dfrac{s}{s^2-9}\right)' = \dfrac{s^2+9}{(s^2-9)^2}.$

b. $\mathscr{L}\{t\cos\omega t\} = \dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{L}\{t\cos\omega t\,\mathrm{ch}\,at\} = \frac{1}{2}\left(\frac{(s+a)^2-\omega^2}{\left((s+a)^2+\omega^2\right)^2} + \frac{(s-a)^2-\omega^2}{\left((s-a)^2+\omega^2\right)^2}\right).$$

c. $\mathscr{L}\{t^3\sin t\} = -\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right)''' = \dfrac{24s(s^2-1)}{\left(s^2+1\right)^4}.$

d. $\mathscr{L}\left\{\dfrac{\sin 4t}{t}\right\} = 4\mathscr{L}\left\{\dfrac{\sin 4t}{4t}\right\} = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{s}.$

e. $X(s) = \mathscr{L}\left\{\dfrac{\cos at - \cos bt}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^{\infty}\left(\frac{u}{u^2+a^2} - \frac{u}{u^2+b^2}\right)du = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}\right).$

f. $X(s) = \mathscr{L}\left\{\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\right\} = \displaystyle\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u+a} - \frac{1}{u+b}\right)du = \ln\left(\frac{s+b}{s+a}\right).$

2.13. Tìm biến đổi Laplace

a. $\mathscr{L}\{\cos^2 t\} = \dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}\{\eta(t-b)\cos^2(t-b)\} = e^{-bs}\dfrac{s^2+2}{s(s^2+4)}.$

b. $x(t) = (t-1)^2\eta(t-1) \quad \Rightarrow X(s) = e^{-s}\dfrac{2}{s^3}.$

c. $x(t) = t\left(\eta(t)-\eta(t-1)\right) + (2-t)\left(\eta(t-1)-\eta(t-2)\right)$

$$= t\eta(t) - 2(t-1)\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2) \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2}.$$

d. $x(t) = \cos t\left(\eta(t)-\eta(t-\pi)\right) + \sin t\,\eta(t-\pi)$

$$= \eta(t)\cos t + \eta(t-\pi)\left(\cos(t-\pi) - \sin(t-\pi)\right) \Rightarrow X(s) = \frac{s+(s-1)e^{-\pi s}}{s^2+1}.$$

2.14. Tìm biến đổi Laplace

a. $\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{2}{s^3} - \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s+1}\right)$ **b.** $\dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{s^3+s^2+\omega^2 s-\omega^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}.$

c. $x(t) = \cos t * e^{2t} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \dfrac{s}{(s-2)(s^2+1)}.$

d. $\mathscr{L}\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\}=\int_s^\infty\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)du=\ln\left(\frac{s+1}{s}\right) \Rightarrow \mathscr{L}\left\{\int_0^t\frac{1-e^{-u}}{u}du\right\}=\frac{1}{s}\ln\left(1+\frac{1}{s}\right)$.

2.15. Đặt $y(t)=\int_0^t x(u)du \Rightarrow Y(s)=\frac{X(s)}{s} \Rightarrow \mathscr{L}\left\{\int_0^t y(t_1)dt_1\right\}=\frac{Y(s)}{s}=\frac{X(s)}{s^2}$.

2.16. Tìm biến đổi Laplace

a. $\frac{1}{s}\text{th}\frac{s}{2}$ **b.** $\frac{1}{s^2}-\frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$ **c.** $\frac{1}{s^2}\text{th}\frac{s}{2}$ **d.** $\frac{1}{s^2+1}\left(s+\frac{2}{e^{\frac{\pi}{2}s}(1-e^{-\pi s})}\right)$.

2.17. Áp dụng công thức định nghĩa biến đổi Laplace $X(s)=\int_0^\infty e^{-st}J_0(t)dt$.

a. Sử dụng câu 2, c, $\int_0^\infty e^{-t}t^3\sin t dt=\left.\frac{24s(s^2-1)}{\left(s^2+1\right)^4}\right|_{s=1}=0$.

b. $\int_0^\infty\frac{e^{-t}\sin t}{t}dt=\left.\text{arctg}\frac{1}{s}\right|_{s=1}=\frac{\pi}{4}$.

c. Áp dụng câu 2. e, $\int_0^\infty\frac{\cos 6t-\cos 4t}{t}dt=\left.\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s^2+4^2}{s^2+6^2}\right)\right|_{s=0}=\ln\frac{2}{3}$.

d. Áp dụng câu 2. f, $\int_0^\infty\frac{e^{-3t}-e^{-6t}}{t}dt=\left.\ln\left(\frac{s+6}{s+3}\right)\right|_{s=0}=\ln 2$.

2.18. Chứng minh theo quy nạp và sử dụng công thức sau:

a. $\left(\sin^{2n+1}t\right)''=(2n+1)(2n)\sin^{2n-1}t-(2n+1)^2\sin^{2n+1}t$.

b. $\left(\sin^{2n+2}t\right)''=(2n+2)(2n+1)\sin^{2n}t-(2n+2)^2\sin^{2n+2}t$.

2.19. Tìm hàm gốc

a. $\frac{s^2}{(s-1)^3}=\frac{(s-1+1)^2}{(s-1)^3}=\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{1}{s-1} \Rightarrow x(t)=e^t\left(1+2t+\frac{t^2}{2}\right)$.

b. $e^{-3t}\cos\sqrt{2}t$ **c.** $2e^{2t}\left(3\cos 4t+\sin 4t\right)$

d. $4e^{-4t}\left(1-t\right)$ **e.** $\cos 2t-t\sin 2t$

f. $e^{2t}\left[\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}t+\sqrt{2}\right)\sin\sqrt{2}t-2t\cos\sqrt{2}t\right]$.

2.20. Tìm hàm gốc

a. $2e^t-2\cos t+\sin t$.

b. $\frac{1}{s^3(s^3+1)}=\frac{1}{s^3}-\frac{1}{s^3+1}=\frac{1}{s^3}-\frac{1}{3(s+1)}+\frac{s-2}{3(s^2-s+1)}$

$$=\frac{1}{s^3}-\frac{1}{3(s+1)}+\frac{(s-1/2)-3/2}{3\left[\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}\Rightarrow x(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

c. $\frac{1}{5}e^{-t}\left(4\cos t-3\sin t\right)-\frac{4}{5}e^{-3t}$ **d.** $-\frac{1}{3}e^{-t}+e^{2t}\left(\frac{1}{3}+4t-\frac{7t^2}{2}\right)$

2.21. Tìm hàm gốc

a. $3+\frac{t^2}{2}-e^{2t}\left(2\cos t+\sin t\right)$. **b.** $\eta(t-1/3)-\eta(t-1/3)\cos(t-1/3)$

c. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{3t}{2}}}{\sqrt{t}}$ **d.** $\frac{4\sqrt{(t-3)^3}e^{-4(t-4)}}{3\sqrt{\pi}}\eta(1-3)$.

2.22. $J_0(t)*J_0(t)=\sin t$.

2.23. $\frac{1}{s}e^{-1/s}=\frac{1}{s}\left(1-\frac{1}{s}+\frac{1}{2!s^2}-\frac{1}{3!s^3}+\cdots\right)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s^2}+\frac{1}{2!s^3}-\frac{1}{3!s^4}+\cdots$

$$\Rightarrow x(t)=1-t+\frac{t^2}{(2!)^2}-\frac{t^3}{(3!)^2}+\cdots=1-\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^2}{2^2}+\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^4}{2^24^2}-\frac{\left(2\sqrt{t}\right)^6}{2^24^26^2}+\cdots=J_0(2\sqrt{t}).$$

2.24. **a.** $x(t)=\frac{t^2e^t}{12}$ **b.** $x(t)=t^3e^{-t}$

c. $x(t)=-2\sin t-\cos 2t$ **d.** $x(t)=\frac{4}{5}\cos 3t+\frac{4}{5}\sin 3t+\frac{1}{5}\cos 2t$.

2.25. **a.** $x(t)=\cos at-2\frac{\sin at}{a}+f(t)*\frac{\sin at}{a}$

b. $x(t)=C_1\operatorname{ch}at+C_2\frac{\operatorname{sh}at}{a}+g(t)*\frac{\operatorname{sh}at}{a}$.

2.26. **a.** $\begin{cases} x(t) = 2 + \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{2}e^{-t} - \dfrac{3}{2}\sin t + \dfrac{1}{2}\cos t \\ y(t) = 1 - \dfrac{1}{2}e^{-t} + \dfrac{3}{2}\sin t - \dfrac{1}{2}\cos t \end{cases}$

b. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{9}e^{-t} + \dfrac{4}{45}e^{2t} - \dfrac{2}{5}\sin t - \dfrac{1}{8}\cos t + \dfrac{1}{3}te^{-t} \\ y(t) = \dfrac{1}{9}e^{-t} - \dfrac{1}{9}e^{2t} + \dfrac{1}{3}te^{-t} \end{cases}$

c. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{2}{3}t^2 + \dfrac{5}{3}t - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}e^{-t} \\ y(t) = \dfrac{2}{3}t^2 + \dfrac{8}{3} + \dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{1}{3}te^{-t} + \cos t \end{cases}$.

2.27. Phương trình ảnh $\left(16 + \dfrac{50}{s} + 2s\right)I = \mathscr{L}\{E\}$

Hay $\left(16 + \dfrac{50}{s} + 2s\right)(sQ - q(0)) = \mathscr{L}\{E\} \Rightarrow \left(16s + 50 + 2s^2\right)Q = \mathscr{L}\{E\}$.

a. $Q = \dfrac{150}{s(s^2 + 8s + 25)} \Rightarrow q(t) = 6 - 6e^{-4t}\cos 3\mathrm{t} - 8e^{-4t}\sin 3\mathrm{t}$;

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = 50e^{-4t}\sin 3t .$$

b. $Q = \dfrac{150}{(s^2 + 9)(s^2 + 8s + 25)}$

$$\Rightarrow q(t) = \frac{25}{52}\left(2\sin 3t - 3\cos 3t\right) + \frac{25}{52}e^{-4t}\left(2\sin 3t + 3\cos 3t\right)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{75}{52}\left(2\cos 3t + 3\sin 3t\right) - \frac{25}{52}e^{-4t}\left(17\sin 3t + 6\cos 3t\right).$$

2.28. $q(t) = \sin 10t - 2\cos 10t + e^{-10t}\left(\sin 10t + 2\cos 10t\right)$.

2.29. **a.** $a_0 = 3,\ a_n = 0;\ b_n = \dfrac{3\left(1 - (-1)^n\right)}{n\pi}$. Chuỗi Fourier $\dfrac{3}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\left(1 - (-1)^n\right)}{n\pi} \sin \dfrac{n\pi}{5} t$.

b. $x(-5) = x(0) = x(5) = \dfrac{3}{2}$.

2.30. **a.** $x(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - (-1)^n\right) \dfrac{4}{n\pi} \sin \dfrac{n\pi}{4} t$.

b. $x(t) = 4 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n - 1\right)\frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{4}t$.

2.31. **a.** Biến đổi Z: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3z}} = \frac{3z}{3z-1}$, $|z| > \frac{1}{3}$.

b. Biến đổi Fourier:

$$\widehat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-i2\pi nf} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(3e^{i2\pi f}\right)^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3e^{i2\pi f}}} = \frac{3e^{i2\pi f}}{3e^{i2\pi f}-1} = X(z)\big|_{z=e^{i2\pi f}}.$$

c. $\frac{d}{df}\widehat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i2\pi n)x(n)e^{-i2\pi nf} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)e^{-i2\pi nf} = \frac{1}{-i2\pi}\frac{d}{df}\widehat{X}(f)$

$$\Rightarrow \hat{Y}(f) = \frac{i}{2\pi}\frac{d}{df}\left(\frac{3e^{i2\pi f}}{3e^{i2\pi f}-1}\right) = \frac{3e^{i2\pi f}}{\left(3e^{i2\pi f}-1\right)^2}.$$

2.32. $x(n) = \int_{-1}^{1}\widehat{X}(f)e^{i2n\pi f}df = \int_{-1/4}^{1/4} e^{-i8\pi f}e^{i2n\pi f}df = \int_{-1/4}^{1/4} e^{i2\pi(n-4)f}df$

$$= 2\int_{0}^{1/4}\cos\left(2\pi(n-4)f\right)df = \begin{cases}\frac{1}{2}\frac{\sin\left((n-4)\pi/2\right)}{(n-4)\pi/2} & n \neq 4\\ \frac{1}{2} & n = 4\end{cases} = \frac{1}{2}\sin c\left(\frac{n-4}{2}\right).$$

2.33. **a.** $\widehat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt = 2\int_{0}^{T}\cos\left(2\pi ft\right)dt = 2T\sin c\,(2Tf)$.

b. $I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda T\cos\lambda t}{\lambda}d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda T}{\lambda}e^{i\lambda t}\,d\lambda$.

Đổi biến số $\lambda = 2\pi f \Rightarrow I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\pi fT}{2\pi f}e^{i2\pi ft}\,2\pi df = \pi\mathscr{F}^{-1}\{x(t)\} = \begin{cases}\pi & |t| < T\\ \pi/2 & |t| = T\\ 0 & |t| > T\end{cases}$.

c. Sử dụng kết quả b. với $T = 1,\ t = 0 \Rightarrow \int_{0}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda = \frac{\pi}{2}$.

d. $\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{X}(f)\right|^2 df$

$$\Rightarrow\ 2T=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 2\pi Tf}{(\pi f)^2}df=\frac{2T}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du=\frac{4T}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du\ \Rightarrow\ \int_0^{\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du=\frac{\pi}{2}.$$

2.34. Áp dụng công thức (2.93) tích phân Fourier cho hàm chẵn:

$$x(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\lambda t\,d\lambda\int_0^{\infty}x(u)\cos\lambda u\,du=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-\lambda)\cos\lambda t\,d\lambda=\frac{2(1-\cos t)}{\pi t^2}.$$

2.35. Áp dụng công thức (2.93) tích phân Fourier cho hàm chẵn:

$$e^{-|t|}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\lambda t\,d\lambda\int_0^{\infty}e^{-|u|}\cos\lambda u\,du\quad \text{và}\quad \int_0^{\infty}e^{-u}\cos\lambda u\,du=\mathscr{L}\{\cos\lambda t\}\big|_{s=1}=\frac{1}{1+\lambda^2}.$$

2.36. **a.** $\widehat{X}(f)=i\dfrac{A}{2}T\left[\sin c\,T(f+f_0)-\sin c\,T(f-f_0)\right]$.

b. $\widehat{X}(f)=T\sin c^2(Tf)$.

2.37. **a.** $\widehat{X}(f)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i2\pi ft}dt=\int_0^{\infty}e^{-\frac{t}{T}}e^{-i2\pi ft}dt=\int_0^{\infty}e^{-\left(\frac{t}{T}+i2\pi f\right)t}dt=\frac{T}{1+i2\pi Tf}$.

b. $\widehat{X}(f)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{|t|}{T}}e^{-i2\pi ft}dt=2\int_0^{\infty}e^{-\frac{t}{T}}\cos(2\pi ft)dt=\mathscr{L}\{\cos(2\pi ft)\}\big|_{s=\frac{1}{T}}=\frac{2T}{1+(2\pi Tf)^2}$.

c. $\widehat{X}(f)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i2\pi ft}}{t^2+a^2}dt=2\int_0^{\infty}\frac{\cos(2\pi ft)}{t^2+a^2}dt=\frac{2}{a}\int_0^{\infty}\frac{\cos(2\pi fa)\lambda}{\lambda^2+1}d\lambda=\frac{\pi}{a}\,e^{-2\pi a|f|}$.

d. $\widehat{X}(f)=2\displaystyle\int_0^1(1-t^2)\cos(2\pi ft)dt=\begin{cases}\dfrac{\sin(2\pi f)-(2\pi f)\cos(2\pi f)}{2\pi^3f^3} & f\neq 0\\ 4/3 & f=0\end{cases}$.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG III

3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	3.10
Sai	Đúng	Sai	Sai	Sai	Đúng	Đúng	Đúng	Sai	Sai

3.12. **a.** $\dfrac{16}{315}$ **b.** $-2\sqrt{\pi}$ **c.** $-\dfrac{8}{12}\sqrt{\pi}$ **d.** $-4\sqrt{2}\pi$ (sử dụng $\Gamma(-1/4)=-4\Gamma(3/4)$).

3.13. **a.** 3! **b.** Đổi biến số $y=2x$ suy ra $\dfrac{\Gamma(7)}{2^7}=\dfrac{45}{8}$

3.14. **a.** Đổi biến số $x=y^3$ suy ra $\dfrac{1}{3}\Gamma(1/2)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{3}$ **b.** $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{4\ln 3}}$.

3.15. Đổi biến số $y = -\ln x = \ln\dfrac{1}{x}$.

3.16. **a.** $\dfrac{1}{180}$ **b.** $\dfrac{64\sqrt{2}}{15}$ **c.** $\dfrac{16\pi}{9\sqrt{3}}$.

3.17. **a.** $\dfrac{8}{315}$ **b.** $\dfrac{5\pi}{12}$ **c.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

3.20. **a.** Đặt $y = \dfrac{x}{x+1}$ $\Rightarrow \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{x+1}dx = B(p,1-p)$. **b.** Đặt $x = y^p$ và áp dụng a.

3.21. **a.** $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$ **b.** $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ **c.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

3.23. **a.** $x^n J_n(x) + C$ **b.** $-\dfrac{J_n(x)}{x^n} + C$ **c.** $(8x^2 - x^4)J_0(x) + (4x^3 - 16x)J_1(x) + C$.

3.24. **a.** $J_3(x) = \dfrac{8-x^2}{x^2}J_1(x) - \dfrac{4}{x}J_0(x)$ **b.** $6\sqrt[3]{x}J_1(\sqrt[3]{x}) - 3\sqrt[3]{x^2}J_0(\sqrt[3]{x}) + C$

c. $xJ_0(x)\sin x - xJ_1(x)\cos x + C$.

3.30. **a.** $y = z_0(2\sqrt{a}x^{\frac{1}{2}})$ **b.** $y = z_0(x^{\frac{1}{2}})$ **c.** $y = x^{-1/2}z_{1/2}(x)$

d. $y = x^{1/2}z_{1/4}(\frac{1}{2}x^2)$.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG IV

4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	4.10
Sai	Đúng	Sai	Đúng	Đúng	Đúng	Đúng	Sai	Sai	Đúng

4.11. **a.** Đặt $\begin{cases} \xi = x - \dfrac{3}{8}y \\ \eta = \dfrac{\sqrt{7}}{8}y \end{cases} \Rightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dfrac{92}{7}u_\xi - \dfrac{4\sqrt{7}}{7}u_\eta + \dfrac{64}{7}u = \dfrac{32}{7}\xi - \dfrac{288}{7\sqrt{7}}\eta$.

b. Đặt $\begin{cases} \xi = y - x \\ \eta = 2x \end{cases} \Rightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 8u = 0$.

c. Đặt $\begin{cases} \xi = x + y \\ \eta = x \end{cases} \Rightarrow u_{\eta\eta} + 18u_\xi + 9u_\eta - 2u = 0$.

d. Đặt $\begin{cases} \xi = 2x - y \\ \eta = 3x \end{cases} \Rightarrow u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 2u_{\xi} + u_{\eta} - u = \xi - \eta$.

4.12. **a.** Đặt $\begin{cases} \xi = 2x + \sin x + y \\ \eta = 2x - \sin x - y \end{cases} \Rightarrow u_{\xi\eta} + \dfrac{\eta - \xi}{32}\left(u_{\xi} - u_{\eta}\right) = 0$.

b. $b^2 - ac = -xy \Rightarrow \begin{cases} \text{Hyperbolic trong miền} & xy < 0 \\ \text{Parabolic trong miền} & xy = 0 \\ \text{Eliptic trong miền} & xy > 0 \end{cases}$

4.13. $u(x,t) = \sin 2x \cos 5t$.

4.14. $u(x,y) = \dfrac{1}{6}x^3y^2 + \cos y - \dfrac{1}{6}y^2 - 1 + x^2$.

4.15. **a.** $u(x,y) = F(x-y) + G(x - \dfrac{1}{2}y)$.

b. $u(x,y) = (x+2y)F(x) + G(x)$.

4.16. **a.** $u(x,y) = F(x+iy) + G(x-iy) + \dfrac{1}{5}e^{2x+y}$.

b. $u(x,y) = F(x+2y) + G(x-2y) + \dfrac{1}{4}xe^{2x+y}$.

4.17. $u(x,t) = 5e^{-32\pi^2t^2}\sin 4\pi x - 2e^{-128\pi^2 t}\sin 8\pi x + 2e^{-20\pi^2 t}\sin 10\pi x$.

4.18. **a.** $k = -3$ **b.** $k = 0$ và $k = n-2$ với $n > 2$.

4.19. **a.** $u_{\max} = \dfrac{1}{2}$ tại $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

$u_{\min} = -\dfrac{1}{2}$ tại $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

b. $u_{\max} = 4$ tại $(\pm 2, 0)$; $u_{\min} = -9$ tại $(0, \pm 3)$.

4.21. **a.** $u(x,y) = 2xy$ **b.** $u(x,y) = 4 - \dfrac{4x}{x^2+y^2} + \dfrac{8\left(x^2 - y^2 - 6x\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \dfrac{64x^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}$.

4.22. Đưa phương trình về dạng chính tắc $u_{\xi\eta} = 0$. Tích phân phương trình này và sử dụng các điều kiện biên ta có: $u(x,y) = f\left(x - \dfrac{2}{3}y^2\right) + \displaystyle\int_{x - \frac{2}{3}y^2}^{x+2y} g(t)\,dt$.

4.23. **a.** $u(x,y,z,t) = e^x \cos y + t(x^2 - y^2)$. **b.** $u(x,y,z,t) = \dfrac{x}{x^2 - t^2}$.

4.24. $u(x,y,z,t)=x^3y^2+(3xy^2+x^3)t^2+xt^4+(x^2y^4-3x^3)t$

$$+\frac{1}{3}(y^4-9x+6x^2y^2)t^3+\frac{1}{2}(2y^2+x^2)t^5+\frac{1}{15}t^7.$$

4.25. **a.** $u(x,y,t)=x^2+y^2+t+2t^2$. **b.** $u(x,t)=e^x\operatorname{ch}t+e^{-x}\operatorname{sh}t$.

4.26. **a.** $u(x,y,z,t)=e^{-a^2t}\sin x+\frac{1}{2}e^{-4a^2t}\cos 2y+e^{-a^2t}\cos z+\frac{1}{2}$.

b. $u(x,t)=\dfrac{x}{\sqrt{(1+4t)^3}}e^{-\frac{x^2}{4t+1}}$.

4.27. **a.** $u(x,t)=e^{-t}\sin x$. **b.** $u(x,y,t)=e^{-l_1^2t}\sin l_1x+e^{-l_2^2t}\cos l_2y$.

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG V

5.1	5.2	5.3	5.4	5.5
Sai	Đúng	Sai	Đúng	Sai

5.8 $\mathrm{E}[y(t)]=\mathrm{E}[x(t+1)-x(t)]=\mathrm{E}[x(t+1)]-\mathrm{E}[x(t)]=0$.

$\operatorname{cov}(y(t+\tau);y(t))=\operatorname{cov}(x(t+\tau+1)-x(t+\tau);x(t+1)-x(t))$

$=\operatorname{cov}(x(t+\tau+1);x(t+1))-\operatorname{cov}(x(t+\tau);x(t+1))-\operatorname{cov}(x(t+\tau+1);x(t))+\operatorname{cov}(x(t+\tau);x(t))$

$=K_x(\tau)-K_x(\tau-1)-K_x(\tau+1)+K_x(\tau)$ không phụ thuộc t. Vậy $\{y(t)\}$ là quá trình dừng có hàm tự tương quan $K_y(\tau)=2K_x(\tau)-K_x(\tau-1)-K_x(\tau+1)$.

5.9. $\mathrm{E}[x(t)]=\mathrm{E}[A_0\sin(\omega_0t+\Theta)]=\int\limits_0^{2\pi}A_0\sin(\omega_0t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=-\frac{A_0}{2\pi}\cos(\omega_0t+\theta)\Big|_{\theta=0}^{2\pi}=0$.

$\operatorname{cov}[x(t+\tau);x(t)]=\mathrm{E}[(A_0\sin(\omega_0(t+\tau)+\Theta))(A_0\sin(\omega_0t+\Theta))]$.

$$=\frac{A_0^2}{2}\mathrm{E}[\cos(\omega_0\tau)-\cos(\omega_0(2t+\tau)+2\Theta)]=\frac{A_0^2}{2}\cos(\omega_0\tau).$$

Vậy $\{x(t)\}$ là quá trình dừng có hàm tự tương quan $K_x(\tau)=\frac{A_0^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$.

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left(1-\frac{\tau}{T}\right)\frac{A_0^2}{2}\cos\omega_0\tau\,d\tau=\frac{A_0^2}{2T}\left(\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0}\Big|_0^T-\frac{1}{T}\left(\tau\frac{\sin\omega_0\tau}{\omega_0}\Big|_0^T+\frac{\cos\omega_0\tau}{\omega_0^2}\Big|_0^T\right)\right)$$

$$=\frac{A_0^2}{2T\omega_0}\left(\sin\omega_0 T-\sin\omega_0 T+\frac{1-\cos\omega_0 T}{T\omega_0}\right)\to 0 \quad \text{khi} \quad T\to\infty$$

Theo định lý 5.11 $\{x(t)\}$ là một quá trình dừng thoả mãn điều kiện (5.16) do đó là một quá trình ergodic.

5.10 Theo giả thiết R và Θ độc lập, do đó $\mathrm{E}[x(t)]=\mathrm{E}[R\cos(\lambda t+\Theta)]=\mathrm{E}[R]\mathrm{E}[\cos(\lambda t+\Theta)]$.

Mặt khác $\mathrm{E}[R]=\int\limits_0^\infty \frac{r^2}{\sigma^2}e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}dr=\sigma\sqrt{2}\int\limits_0^\infty t^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=\sigma\sqrt{2}\Gamma(3/2)=\frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2}$; $\mathrm{E}[\cos(\lambda t+\Theta)]=0$.

Vậy $\mathrm{E}[x(t)]=0$.

$$\operatorname{cov}[x(t+\tau);x(t)]=\mathrm{E}\big[(R\cos(\lambda(t+\tau)+\Theta))(R\cos(\lambda t+\Theta))\big]$$

$$=\mathrm{E}\left[R^2\right]\mathrm{E}\big[(\cos(\lambda(t+\tau)+\Theta))(\cos(\lambda t+\Theta))\big]$$

$$=\mathrm{E}\left[R^2\right]\mathrm{E}\left[\frac{\cos(\lambda(2t+\tau)+2\Theta)+\cos\lambda\tau}{2}\right]=\mathrm{E}\left[R^2\right]\frac{\cos\lambda\tau}{2}$$

$$\mathrm{E}\left[R^2\right]=\int\limits_0^\infty \frac{r^3}{\sigma^2}e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}dr=2\sigma^2\int\limits_0^\infty te^{-t}dt=2\sigma^2\Gamma(2)=2\sigma^2.$$

Vậy $\{x(t)\}$ là quá trình dừng có hàm tự tương quan $K_x(\tau)=\sigma^2\cos\lambda\tau$.

5.11 $\mathrm{E}[x(t)]=\mathrm{E}[A\cos(10\pi t)]=\cos(10\pi t)\mathrm{E}[A]=0$.

$$\operatorname{cov}[x(t+\tau);x(t)]=\mathrm{E}\big[(A\cos(10\pi(t+\tau)))(A\cos(10\pi t)\big]=\mathrm{E}\left[A^2\right]\cos(10\pi(t+\tau))\cos(10\pi t)$$

$$=\sigma^2\cos(10\pi(t+\tau))\cos(10\pi t).$$

Hàm tương quan phụ thuộc t do đó quá trình không dừng.

5.12 $\mathrm{E}[x(t)]=\mathrm{E}[Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t]=\cos\lambda t\,\mathrm{E}[Z_1]+\sin\lambda t\,\mathrm{E}[Z_2]=0$.

Theo giả thiết Z_1, Z_2 độc lập do đó:

$$\operatorname{cov}[Z_1\cos\lambda(t+\tau)+Z_2\sin\lambda(t+\tau);Z_1\cos\lambda t+Z_2\sin\lambda t]$$

$$=\cos\lambda(t+\tau)\cos\lambda t\,\mathrm{E}\left[Z_1^2\right]+\sin\lambda(t+\tau)\sin\lambda t\,\mathrm{E}\left[Z_2^2\right]=\cos\lambda\tau.$$

Vậy $\{x(t)\}$ là quá trình dừng có hàm tự tương quan $K_x(\tau)=\cos\lambda\tau$.

5.13 Áp dụng công thức (5.9) ta có

$$\mathscr{P}(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-in2\pi f}K_x(n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-in2\pi f}\frac{1}{7}\left(-\frac{3}{4}\right)^{|n|}$$

$$=\frac{1}{7}\left(1-\frac{3e^{-i2\pi f}}{4+3e^{-i2\pi f}}-\frac{3e^{i2\pi f}}{4+3e^{i2\pi f}}\right)=\frac{1}{25+24\cos 2\pi f}.$$

5.14 Theo ví dụ 5.1 ta có $\mathrm{E}\left[x(t)\right]=\mathrm{E}\left[e^{-\alpha t}W(e^{2\alpha t})\right]=e^{-\alpha t}\mathrm{E}\left[W(e^{2\alpha t})\right]=0$.

Với mọi $\tau \ge 0$:

$$\mathrm{E}\left[x(t+\tau)x(t)\right]=e^{-\alpha(2t+\tau)}\mathrm{E}\left[W(e^{\alpha(2t+\tau)})W(e^{2\alpha t})\right]=e^{-\alpha(2t+\tau)}\sigma^2 e^{2\alpha t}=\sigma^2 e^{-\alpha\tau}.$$

Do đó $K_x(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$.

Theo công thức (5.10) và ví dụ 2.39 ta được:

$$\mathscr{P}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\tau f}K_x(\tau)d\tau=\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi\tau f}e^{-\alpha|\tau|}d\tau=\frac{2\sigma^2\alpha}{\alpha^2+4\pi^2 f}.$$

5.15 Theo công thức (5.10) và ví dụ 2.38

$$K_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi\tau f}\mathscr{P}(f)df=\frac{1}{B^2}\int_{-B}^{B} e^{i2\pi\tau f}\left(B-|f|\right)df=\mathrm{sinc}^2 B\tau.$$

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG VI

6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6
Đúng	Sai	Đúng	Sai	Đúng	Đúng

6.7 Gọi $X(t)$ là số bức điện gửi tới bưu điện trong khoảng thời gian t, theo giả thiết $X(t)$ là quá trình Poisson tham số $\lambda=3$.

a) Xác suất để từ 8h00 đến 12h00 không có bức điện nào bằng :

$$P\{X(12)-X(8)=0\}=P\{X(4)=0\}=e^{-12}.$$

b) $P\left\{X(t)=1 \middle| X(12)=0\right\}=P\left\{X(t-12)=1\right\}=e^{-3(t-12)}3(t-12);\ t>12$.

6.8 Gọi $X(t)$ là số cuộc gọi đến tổng đài trong khoảng thời gian t, theo giả thiết $X(t)$ là quá trình Poisson tham số $\lambda=2$.

a) $P\{X(1)=2\}=e^{-2}\dfrac{2^2}{2!}=2e^{-2}$;

$$P\left\{X(1)=2,X(3)=6\right\}=P\left\{X(1)=2,X(3)-X(1)=4\right\}=e^{-2}\frac{2^2}{2!}e^{-4}\frac{4^4}{4!}=e^{-6}\frac{4^3}{3}.$$

b) $P\{X(1)=2|X(3)=6\}=\dfrac{P\{X(1)=2,X(3)=6\}}{P\{X(3)=6\}.}=\dfrac{e^{-6}\dfrac{4^3}{3}}{e^{-6}\dfrac{6^6}{6!}}=\dfrac{5!4^3}{3.6^5}=\dfrac{5.4^4}{3.6^4}=\dfrac{5}{3}.\left(\dfrac{2}{3}\right)^4$.

$P\{X(3)=6|X(1)=2\}=\dfrac{P\{X(1)=2,X(3)=6\}}{P\{X(1)=2\}.}=P\{X(2)=4\}.=e^{-4}\dfrac{4^4}{4!}$.

6.9 $X(t)$ là quá trình Poisson tham số $\lambda=2$.

a) $X(2)$ là biến ngẫu nhiên có phân bố Poisson tham số 4 do đó $\mathrm{E}[X(2)]=4$.

$X(1)$ là biến ngẫu nhiên có phân bố Poisson tham số $\lambda=2$ do đó $\mathrm{E}\left[X^2(1)\right]=\lambda^2+\lambda=6$.

$\mathrm{E}[X(1)X(2)]=\mathrm{E}[X(1)(X(3)-X(1))]=\mathrm{E}[X(1)].\mathrm{E}[X(3)-X(1)]$

$=\mathrm{E}[X(1)].\mathrm{E}[X(3)]-\mathrm{E}[X(1)].\mathrm{E}[X(1)]=2.6-2^2=8$.

b) $P\{X(1)\le 2\}=e^{-2}\left(1+\dfrac{2}{1!}+\dfrac{2^2}{2!}\right)$.

$P\{X(1)=1,X(2)=3\}=P\{X(1)=1,X(2)-X(1)=2\}=e^{-2}\dfrac{2}{1!}e^{-2}\dfrac{2^2}{2!}=4e^{-4}$.

6.11 Áp dụng công thức (6.10) ví dụ 6.2 ta có:

a) $P\left\{W_1^1<W_1^2\right\}=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.

b) $P\left\{W_2^1<W_2^2\right\}=3\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^2\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}+\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^3$.

c) $P\left\{W_n^1<W_m^2\right\}=\sum_{k=n}^{n+m-1}C_{n+m-1}^k\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}$.

6.12 $P\{X(1)=5|X(2)=12\}=\dfrac{P\{X(1)=5,X(2)=12\}}{P\{X(2)=12\}.}=\dfrac{P\{X(1)=5,X(2)-X(1)=7\}}{P\{X(2)=12\}.}$

$=\dfrac{e^{-5}\dfrac{5^5}{5!}.e^{-5}\dfrac{5^7}{7!}}{e^{-10}\dfrac{10^{12}}{12!}}=C_{12}^5\dfrac{1}{2^{12}}$ (công thức 6.9).

6.13 Gọi $X(t)$ là số khách hàng tới cửa hàng trong khoảng thời gian t, theo giả thiết $X(t)$ là quá trình Poisson tham số $\lambda=10$. Gọi $X_1(t)$, $X_2(t)$ lần lượt là số khách hàng tới cửa hàng có mua hàng và không mua hàng trong khoảng thời gian t thì $X_1(t)$ là quá trình Poisson tham số $\lambda_1=10\times 0,3=3$ còn $X_2(t)$ là quá trình Poisson tham số $\lambda_2=10\times 0,7=7$.

$$P\{X_1(1)=3, X_2(1)=6\} = e^{-3}\frac{3^3}{3!}e^{-7}\frac{7^6}{6!} = e^{-10}\frac{3^3 7^6}{3!6!}.$$

6.14 Theo định lý 6.2 và công thức (6.7) các biến ngẫu nhiên $S(n)$ có phân bố mũ tham số λ, do đó $\mathrm{E}\left[S(4)\right] = \dfrac{1}{\lambda}$.

Vì $X(4)-X(2)$ và $X(1)$ độc lập do đó

$$\mathrm{E}\left[X(4)-X(2) \middle| X(1)=3\right] = \mathrm{E}\left[X(4)-X(2)\right] = 4\lambda - 2\lambda = 2\lambda.$$

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ CHƯƠNG VII

7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6
Đúng	Sai	Sai	Đúng	Sai	Đúng

7.7 a) Độ dài trung bình của hàng và trễ phục vụ của hệ thống

Hàng $M/M/1$: $L_q = \dfrac{25}{6}$; $W = \dfrac{1}{2}$.

Hàng $M/D/1$: $L_q = \dfrac{25}{12}$; $W = \dfrac{7}{24}$.

Hàng $M/E_5/1$: $L_q = \dfrac{5}{2}$; $W = \dfrac{1}{4}$.

c) Độ dài trung bình của hàng $M/E_k/1$ là $\dfrac{(k+1)\lambda^2}{2k\mu(\mu-\lambda)} = \dfrac{25(k+1)}{12k}$ nhỏ hơn 3 khi và chỉ khi $\dfrac{25(k+1)}{12k} \le 3 \Leftrightarrow k \ge \dfrac{25}{11}$. Chọn k nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện là $k=3$.

7.8 $p_2 = \dfrac{\dfrac{\rho^N}{N!}}{\displaystyle\sum_{m=0}^{N}\dfrac{\rho^m}{m!}}$, $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

7.9 $L_q = \dfrac{\rho^{k+1}}{(k-1)!(k-\rho)^2}p_0$; $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{\rho^{k+1}}{\lambda(k-1)(k-\rho)^2}p_0$.

$$W = W_q + \frac{1}{k\mu} = \frac{\rho^{k+1}p_0}{\lambda(k-1)(k-\rho)^2} + \frac{1}{k\mu}\ ;\ L = \lambda W = \frac{\rho^{k+1}p_0}{(k-1)(k-\rho)^2} + \frac{\rho}{k}\ ;$$

$$p_0 = \left[\frac{\rho^k}{k!}\left(\frac{k}{k-\rho}\right) + \sum_{n=0}^{k-1}\frac{\rho^n}{n!}\right]^{-1}.$$

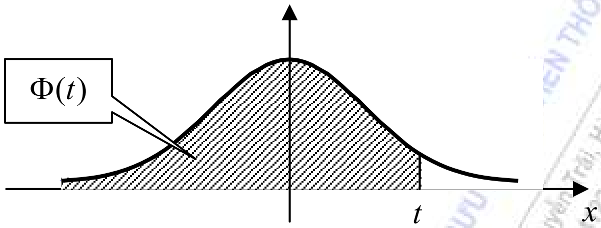
7.10 $k=2 \Rightarrow \quad L_q=\frac{\rho^3}{4-\rho^2};\ W_q=\frac{\rho^3}{\lambda\left(4-\rho^2\right)};W=\frac{\rho^3}{\lambda\left(4-\rho^2\right)}+\frac{1}{2\mu};\ L=\frac{\rho^3}{4-\rho^2}+\frac{\rho}{2}$.

$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5} \quad \Rightarrow\ L_q=\frac{27}{40}=0,675;\ W_q=\frac{27}{480}=0,056;$

$W=\frac{27}{480}+\frac{1}{20}=\frac{51}{480}=0,106;\ L=12W=\frac{51}{40}=1,275$.

PHỤ LỤC

PHỤ LỤC A: GIÁ TRỊ HÀM PHÂN BỐ CHUẨN TẮC $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$



t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	0,6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7156	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7703	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8132
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0,8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	0,9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9712	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	0,9773	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	0,9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
$\Phi(t)$	0,9987	9990	9993	9995	9996	9997	9998	9999	9999	9999

PHỤ LỤC B: Báng tóm tắt các tính chất cơ bản của phép biến đổi Fourier

$$\widehat{X}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} x(t)dt$$

Tính chất	Hàm $x(t)$	Biến đổi Fourier $\widehat{X}(f)$
1. Tuyến tính	$Ax_1(t) + Bx_2(t)$	$A\widehat{X}_1(f) + B\widehat{X}_2(f)$
2. Đồng dạng	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}\widehat{X}(f/a)$
3. Liên hợp	$\overline{x(t)}$	$\overline{\widehat{X}(-f)}$
4. Đối ngẫu	$\widehat{X}(t)$	$x(-f)$
5. Trễ	$x(t-T_d)$	$e^{-i2\pi T_d}\widehat{X}(f)$
6. Dịch chuyển ảnh	$e^{i2\pi f_0 t}x(t)$	$\widehat{X}(f-f_0)$
7. Điều chế	$x(t)\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2}\widehat{X}(f-f_0) + \frac{1}{2}\widehat{X}(f+f_0)$
8. Đạo hàm	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(i2\pi f)^n \widehat{X}(f)$
9. Tích phân	$\int_{-\infty}^{t} x(u)du$	$\frac{1}{i2\pi f}\widehat{X}(f) + \frac{1}{2}\widehat{X}(0)\delta(f)$
10. Đạo hàm ảnh	$t^n x(t)$	$(-i2\pi f)^{-n}\frac{d^n \widehat{X}(f)}{df^n}$
11. Tích chập	$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(u) * x_2(t-u)du$	$\widehat{X}_1(f)\widehat{X}_2(f)$
12. Tích	$x_1(t)x_2(t)$	$\widehat{X}_1(f) * \widehat{X}_2(f)$

PHỤ LỤC C: Bảng tóm tắt các tính chất cơ bản của phép biến đổi Laplace

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-ist} x(t)dt$$

Tính chất	Hàm $x(t)$	Biến đổi Laplace $X(s)$
1. Tuyến tính	$Ax_1(t) + Bx_2(t)$	$AX_1(s) + BX_2(s)$
2. Đồng dạng	$x(at)$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$
3. Dịch chuyển ảnh	$e^{at}x(t)$	$X(s-a)$
4. Trễ	$x(t-a)\eta(t-a)$	$e^{-as}X(s)$
5. Đạo hàm	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0)$
6. Đạo hàm	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - \cdots x^{(n-1)}(0)$
7. Đạo hàm ảnh	$t^n x(t)$	$(-1)^n \frac{d^n X(s)}{ds^n}$
8. Tích phân	$\int_0^t x(u)du$	$\frac{X(s)}{s}$
9. Tích phân	$\int_0^t \cdots \int_0^t x(u)du^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} x(u)du$	$\frac{X(s)}{s^n}$
10. Tích phân ảnh	$\frac{x(t)}{t}$	$\int_s^\infty X(u)du$
11. Tích chập	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$
12. Duhamel	$x_1(0)x_2(t) + x'_1(t) * x_2(t)$	$sX_1(s)X_2(s)$
13. Tuần hoàn	$x(t+T) = x(t)$	$X(s) = \frac{\int_0^T e^{-st}x(t)dt}{1 - e^{-sT}}$

14.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{u^2}{4t}} x(u)\,du$	$\frac{X\left(\sqrt{s}\right)}{\sqrt{s}}$
15.	$\int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{ut})x(u)\,du$	$\frac{1}{s} f\left(\frac{1}{s}\right)$
16.	$t^{\frac{n}{2}}\int_0^{\infty} u^{-\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{ut})x(u)\,du$	$\frac{1}{s^{n+1}} f\left(\frac{1}{s}\right)$
17.	$\int_0^{t} J_0(2\sqrt{u(t-u)})x(u)\,du$	$\frac{1}{s^2+1} f\left(s+\frac{1}{s}\right)$
18.	$x(t^2)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} u^{\frac{-3}{2}} e^{-\frac{s^2}{4u}} X(u)\,du$
19.	$\int_0^{\infty} \frac{t^u x(u)}{\Gamma(u+1)}\,du$	$\frac{f(\ln s)}{s\ln s}$
20.	$\sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} e^{a_k t}$	$\frac{P(s)}{Q(s)}$ Bậc *P(s)* < bậc *Q(s)*, *Q(s)* chỉ có các nghiệm đơn là $a_1,\ldots,a_n$

PHỤ LỤC D: Biến đổi Laplace của các hàm thường gặp

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-ist} x(t)dt$$

TT	Ảnh biến đổi Laplace $X(s)$	Hàm gốc $x(t)$
1.	$\frac{1}{s}$	1
2.	$\frac{1}{s^n}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
3.	$\frac{1}{s^\alpha}$; $\alpha > 0$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$
4.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
5.	$\frac{1}{(s-a)^n}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$
6.	$\frac{1}{(s-a)^\alpha}$; $\alpha > 0$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{at}$
7.	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin at}{a}$
8.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
9.	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{e^{bt}\sin at}{a}$
10.	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos at$
11.	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\text{sh}\, at}{a}$
12.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\text{ch}\, at$

13.	$\dfrac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\dfrac{e^{bt}\operatorname{sh} at}{a}$
14.	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\operatorname{ch} at$
15.	$\dfrac{1}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$\dfrac{\sin at - at\cos at}{2a^3}$
16.	$\dfrac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$\dfrac{t\sin at}{2a}$
17.	$\dfrac{s^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$\dfrac{\sin at + at\cos at}{2a}$
18.	$\dfrac{s^3}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$\cos at - \dfrac{1}{2}at\sin at$
19.	$\dfrac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$	$t\cos at$
20.	$\dfrac{1}{\left(s^2-a^2\right)^2}$	$\dfrac{at\operatorname{ch} at - \operatorname{sh} at}{2a^3}$
21.	$\dfrac{s}{\left(s^2-a^2\right)^2}$	$\dfrac{t\operatorname{sh} at}{2a}$
22.	$\dfrac{s^2}{\left(s^2-a^2\right)^2}$	$\dfrac{\operatorname{sh} at + at\operatorname{ch} at}{2a}$
23.	$\dfrac{s^3}{\left(s^2-a^2\right)^2}$	$\operatorname{ch} at + \dfrac{1}{2}at\operatorname{sh} at$
24.	$\dfrac{s^2+a^2}{\left(s^2-a^2\right)^2}$	$t\operatorname{ch} at$
25.	$\dfrac{1}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\sin at - 3at\cos at}{8a^5}$

26.	$\dfrac{s}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{t\sin at - at^2\cos at}{8a^3}$
27.	$\dfrac{s^2}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{(1+a^2t^2)\sin at - at\cos at}{8a^3}$
28.	$\dfrac{s^3}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{3t\sin at + at^2\cos at}{8a}$
29.	$\dfrac{s^4}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\sin at + 5at\cos at}{8a}$
30.	$\dfrac{s^5}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{(8-a^2t^2)\cos at - 7at\sin at}{8}$
31.	$\dfrac{3s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{t^2\sin at}{2a}$
32.	$\dfrac{s^3-3a^2s}{\left(s^2+a^2\right)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2\cos at$
33.	$\dfrac{s^4-6a^2s^2+a^4}{\left(s^2+a^2\right)^4}$	$\dfrac{1}{6}t^3\cos at$
34.	$\dfrac{s^3-a^2s}{\left(s^2+a^2\right)^4}$	$\dfrac{t^3\sin at}{24a}$
35.	$\dfrac{1}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\operatorname{sh} at - 3at\operatorname{ch} at}{8a^5}$
36.	$\dfrac{s}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{at^2\operatorname{ch} at - t\operatorname{sh} at}{8a^3}$
37.	$\dfrac{s^2}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{at\operatorname{ch} at + (a^2t^2-1)\operatorname{sh} at}{8a^3}$
38.	$\dfrac{s^3}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{3t\operatorname{sh} at + at^2\operatorname{ch} at}{8a}$

39.	$\dfrac{s^4}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\operatorname{sh} at+5at\operatorname{ch} at}{8a}$
40.	$\dfrac{s^5}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{(8+a^2t^2)\operatorname{ch} at+7at\operatorname{sh} at}{8}$
41.	$\dfrac{3s^2+a^2}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{t^2\operatorname{sh} at}{2a}$
42.	$\dfrac{s^3+3a^2s}{\left(s^2-a^2\right)^3}$	$\dfrac{1}{2}t^2\operatorname{ch} at$
43.	$\dfrac{s^4+6a^2s^2+a^4}{\left(s^2-a^2\right)^4}$	$\dfrac{1}{6}t^3\operatorname{ch} at$
44.	$\dfrac{s^3+a^2s}{\left(s^2-a^2\right)^4}$	$\dfrac{t^3\operatorname{sh} at}{24a}$
45.	$\dfrac{1}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a^2}\left\{\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}+e^{-3at/2}\right\}$
46.	$\dfrac{s}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}+\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}-e^{-3at/2}\right\}$
47.	$\dfrac{s^2}{s^3+a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{-at}+2e^{at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}\right)$
48.	$\dfrac{1}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a^2}\left\{e^{3at/2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}\right\}$
49.	$\dfrac{1}{s^3-a^3}$	$\dfrac{e^{-at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}+e^{3at/2}\right\}$
50.	$\dfrac{s^2}{s^3-a^3}$	$\dfrac{1}{3}\left(e^{at}+2e^{-at/2}\cos\dfrac{\sqrt{3}\,at}{2}\right)$
51.	$\dfrac{1}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{4a^3}\{\sin at\operatorname{ch} at-\cos at\operatorname{sh} at\}$

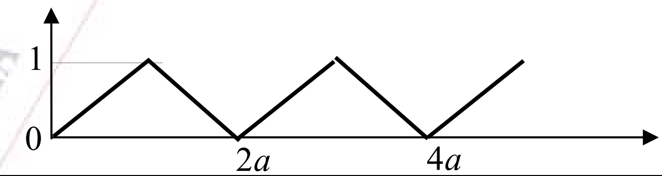
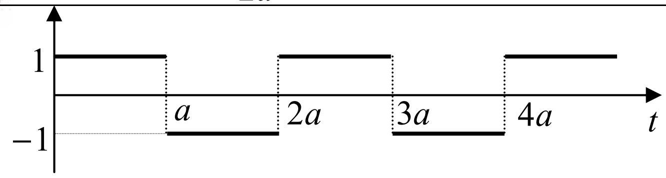
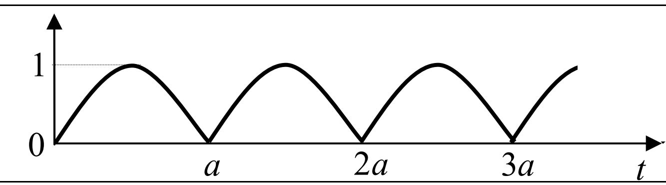
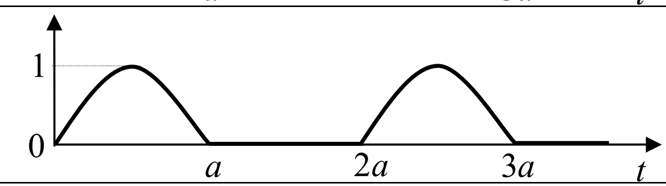
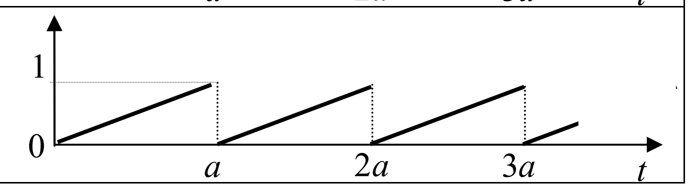
52.	$\dfrac{s}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{\sin at\,\mathrm{sh}\,at}{2a^2}$
53.	$\dfrac{s^2}{s^4+4a^4}$	$\dfrac{1}{2a}\{\sin at\,\mathrm{ch}\,at+\cos at\,\mathrm{sh}\,at\}$
54.	$\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}$	$\cos at\,\mathrm{ch}\,at$
55.	$\dfrac{1}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^3}\{\mathrm{sh}\,at-\sin at\}$
56.	$\dfrac{s}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a^2}\{\mathrm{ch}\,at-\cos at\}$
57.	$\dfrac{s^2}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a}\{\mathrm{sh}\,at+\sin at\}$
58.	$\dfrac{s^3}{s^4-a^4}$	$\dfrac{1}{2a}\{\mathrm{ch}\,at+\cos at\}$
59.	$\dfrac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}$	$\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
60.	$\dfrac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\dfrac{\mathrm{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
61.	$\dfrac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$	$\dfrac{e^{at}\mathrm{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
62.	$\dfrac{1}{\sqrt{s-a}+b}$	$e^{at}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-be^{b^2t}\mathrm{erfc}(b\sqrt{t})\right\}$
63.	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
64.	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$	$I_0(at)$
65.	$\dfrac{\left(\sqrt{s^2+a^2}-s\right)^n}{\sqrt{s^2+a^2}}$; $n>-1$	$a^nJ_n(at)$

66.	$\dfrac{\left(s-\sqrt{s^2-a^2}\right)^n}{\sqrt{s^2-a^2}}$; $n>-1$	$a^n I_n(at)$
67.	$\dfrac{e^{b(s-\sqrt{s^2+a^2})}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(a\sqrt{t(t+2b)})$
68.	$\dfrac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\eta(t-b)J_0(a\sqrt{t^2-b^2})$
69.	$\dfrac{1}{\sqrt{(s^2+a^2)^3}}$	$\dfrac{tJ_1(at)}{a}$
70.	$\dfrac{s}{\sqrt{(s^2+a^2)^3}}$	$tJ_0(at)$
71.	$\dfrac{s^2}{\sqrt{(s^2+a^2)^3}}$	$J_0(at)-tJ_1(at)$
72.	$\dfrac{1}{s(e^s-1)}=\dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$	$x(t)=n,\ n\le t<n+1,\ n=0, 1, 2, \ldots$
73.	$\dfrac{1}{s(e^s-r)}=\dfrac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$	$x(t)=\sum_{k=1}^{[t]} r^k$; $[t]$ là phần nguyên của t
74.	$\dfrac{e^s-1}{s(e^s-r)}=\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$	$x(t)=r^n,\ n\le t<n+1,\ n=0, 1, 2, \ldots$
75.	$\dfrac{e^{-s/a}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$
76.	$\dfrac{e^{-s/a}}{\sqrt{s^3}}$	$\dfrac{\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
77.	$\dfrac{e^{-s/a}}{s^{\alpha+1}}$; $\alpha>-1$	$\left(\dfrac{t}{a}\right)^{\alpha/2} J_\alpha(2\sqrt{at})$
78.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$

79.	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$
80.	$\dfrac{1-e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erf}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
81.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erfc}\left(\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
82.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+b)}$	$e^{b(bt+a)}\operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t}+\dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
83.	$\dfrac{e^{-a/\sqrt{s}}}{s^{\alpha+1}}$; $\alpha>-1$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}\,a^{2\alpha+1}}\int\limits_0^\infty u^\alpha e^{-\frac{u^2}{4a^2t}}J_{2\alpha}(2\sqrt{u})du$
84.	$\ln\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$	$\dfrac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}$
85.	$\dfrac{1}{2s}\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{a^2}\right)$	$\operatorname{Ci}(at)$
86.	$\dfrac{1}{s}\ln\left(\dfrac{s+a}{a}\right)$	$\operatorname{Ei}(at)$
87.	$-\dfrac{\gamma+\ln s}{s}$	$\ln t$; γ là hằng số Euler
88.	$\ln\left(\dfrac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$	$\dfrac{2(\cos at-\cos bt)}{t}$
89.	$\dfrac{\pi^2}{6s}+\dfrac{(\gamma+\ln s)^2}{s}$	$\ln^2 t$; γ là hằng số Euler
90.	$\dfrac{\ln s}{s}$	$-(\ln t+\gamma)$
91.	$\dfrac{\ln^2 s}{s}$	$(\ln t+\gamma)^2-\dfrac{\pi^2}{6}$
92.	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)-\Gamma(\alpha+1)s}{s^{\alpha+1}}$; $\alpha>-1$	$t^\alpha\ln t$

93.	$\mathrm{arctg}\left(\frac{a}{s}\right)$	$\frac{\sin at}{t}$
94.	$\frac{1}{s}\mathrm{arctg}\left(\frac{a}{s}\right)$	$\mathrm{Si}(at)$
95.	$\frac{e^{a/s}}{\sqrt{s}}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{a/s}\right)$	$\frac{e^{-2\sqrt{at}}}{\sqrt{\pi t}}$
96.	$e^{s^2/4a^2}\mathrm{erfc}(s/2a)$	$\frac{2a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2t^2}$
97.	$\frac{e^{s^2/4a^2}\mathrm{erfc}(s/2a)}{s}$	$\mathrm{erf}(at)$
98.	$\frac{e^{as}}{\sqrt{s}}\mathrm{erfc}\left(\sqrt{as}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$
99.	$e^{as}\mathrm{Ei}(as)$	$\frac{1}{t+a}$
100.	$\frac{\cos as\left\{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(as)\right\}-\sin as\,\mathrm{Ci}(as)}{a}$	$\frac{1}{t^2+a^2}$
101.	$\sin as\left\{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(as)\right\}+\cos as\,\mathrm{Ci}(as)$	$\frac{t}{t^2+a^2}$
102.	$\frac{\cos as\left\{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(as)\right\}-\sin as\,\mathrm{Ci}(as)}{s}$	$\mathrm{acrtg}(t/a)$
103.	$\frac{\sin as\left\{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(as)\right\}+\cos as\,\mathrm{Ci}(as)}{s}$	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
104.	$\left\{\frac{\pi}{2}-\mathrm{Si}(as)\right\}^2+\mathrm{Ci}^2(as)$	$\frac{1}{t}\ln\left(\frac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
105.	1	$\delta(t)$ - hàm Dirac
106.	e^{-as}	$\delta(t-a)$

107.	$\dfrac{e^{-as}}{s}$	$\eta(t-a)$
108.	$\dfrac{1}{s}\dfrac{\operatorname{sh} xs}{\operatorname{sh} as}$	$\dfrac{x}{a}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin\dfrac{n\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi t}{a}$
109.	$\dfrac{1}{s}\dfrac{\operatorname{sh} xs}{\operatorname{ch} as}$	$\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\sin\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
110.	$\dfrac{1}{s}\dfrac{\operatorname{ch} xs}{\operatorname{sh} as}$	$\dfrac{t}{a}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\cos\dfrac{n\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi t}{a}$
111.	$\dfrac{1}{s}\dfrac{\operatorname{ch} xs}{\operatorname{ch} as}$	$1+\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
112.	$\dfrac{1}{s^2}\dfrac{\operatorname{sh} xs}{\operatorname{sh} as}$	$\dfrac{xt}{a}+\dfrac{2a}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\sin\dfrac{n\pi x}{a}\cos\dfrac{n\pi t}{a}$
113.	$\dfrac{1}{s^2}\dfrac{\operatorname{sh} xs}{\operatorname{ch} as}$	$x+\dfrac{8a}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
114.	$\dfrac{1}{s^2}\dfrac{\operatorname{ch} xs}{\operatorname{sh} as}$	$\dfrac{t^2}{2a}+\dfrac{2a}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}\cos\dfrac{n\pi x}{a}\left(1-\cos\dfrac{n\pi t}{a}\right)$
115.	$\dfrac{1}{s^2}\dfrac{\operatorname{ch} xs}{\operatorname{ch} as}$	$t+\dfrac{8a}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}\sin\dfrac{(2n-1)\pi t}{2a}$
116.	$\dfrac{\operatorname{sh} x\sqrt{s}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2\pi}{a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\sin\dfrac{n\pi x}{a}$
117.	$\dfrac{\operatorname{ch} x\sqrt{s}}{\operatorname{ch} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{\pi}{a^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t}{4a^2}}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
118.	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}\dfrac{\operatorname{sh} x\sqrt{s}}{\operatorname{ch} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{2}{a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t}{4a^2}}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{2a}$
119.	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}\dfrac{\operatorname{ch} x\sqrt{s}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{a^2}}\cos\dfrac{n\pi x}{2a}$

120.	$\frac{1}{s}\frac{\operatorname{sh} x\sqrt{s}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s}}$	$\frac{x}{a}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{a^2}}\sin\frac{n\pi x}{2a}$
121.	$\frac{1}{s}\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{s}}{\operatorname{ch} a\sqrt{s}}$	$1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t}{4a^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
122.	$\frac{1}{s^2}\frac{\operatorname{sh} x\sqrt{s}}{\operatorname{sh} a\sqrt{s}}$	$\frac{xt}{a}+\frac{2a^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(1-e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{a^2}})\sin\frac{n\pi x}{2a}$
123.	$\frac{1}{s^2}\frac{\operatorname{ch} x\sqrt{s}}{\operatorname{ch} a\sqrt{s}}$	$\frac{x^2-a^2}{2}+t-\frac{16a^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 t}{4a^2}}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
124.	$\frac{1}{s}\frac{J_0(ix\sqrt{s})}{J_0(ia\sqrt{s})}$	$1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ λ_1, λ_2, ... là các nghiệm dương của $J_0(\lambda)=0$
125.	$\frac{1}{s^2}\frac{J_0(ix\sqrt{s})}{J_0(ia\sqrt{s})}$	$\frac{x^2-a^2}{4}+t+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ λ_1, λ_2, ... là các nghiệm dương của $J_0(\lambda)=0$
126.	$\frac{1}{as^2}\operatorname{th}(\frac{as}{2})$	
127.	$\frac{1}{s}\operatorname{th}(\frac{as}{2})$	
128.	$\frac{\pi a}{a^2s^2+\pi^2}\operatorname{ch}(\frac{as}{2})$	
129.	$\frac{\pi a}{(a^2s^2+\pi^2)(1-e^{-as})}$	
130.	$\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	

131.	$\frac{e^{-as}}{s}(1-e^{-bs})$	$\eta(t-a)-\eta(t-a-b)$
132.	$\frac{1}{s(1-e^{-as})}$	$\sum_{n=1}^{\infty} n[\eta(t-(n-1)a)-\eta(t-na)]$
133.	$\frac{e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-s})^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} n^2[\eta(t-n)-\eta(t-(n+1))]$
134.	$\frac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-as})^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} r^n[\eta(t-n)-\eta(t-(n+1))]$
135.	$\frac{\pi a(1+e^{-as})}{a^2s^2+\pi^2}$	$(\eta(t)-\eta(t-a))\sin\frac{\pi t}{a}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Bá Long, *Tài liệu hướng dẫn học tập môn xác suất thống kê cho hệ đào tạo từ xa chuyên ngành điện tử viễn thông.*
2. Vũ Gia Tê, Lê Bá Long, *Giáo trình toán chuyên ngành cho sinh viên hệ chính quy chuyên ngành điện tử viễn thông*. Học viện Công Nghệ Bưu Chính Viễn Thông, 2006.
3. Nguyễn Phạm Anh Dũng, *Các hàm và xác suất ứng dụng trong viễn thông.* Trung Tâm Đào Tạo Bưu Chính Viễn Thông 1, 1999.
4. Nguyễn Quốc Trung, *Xử lý tín hiệu và lọc số*. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2004
5. Nguyễn Duy Tiến (và tập thể), *Các mô hình xác suất và ứng dụng*, tập 1, 2, 3. NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2000.
6. D. L. (Paul) Minh, *Applied probability models*, Duxbury, Thomson Learning 2001.
7. A. Angot, *Compéments de mathématiques a l'usage des ingénieurs de l'eslektrotechnique et des tétécommunications*. Paris, 1957.
8. A. V. Bitsadze, *Equations of Mathematical Physics*, Mir Publishers Moscow, 1980.
9. P.J. Buker, 1976. *Proof of a conjecture on the interarrival-time distribution in an M/M/1 queue with feedback*. IEEE Transactions on Communications, COM-24, 575-576.
10. L. W. Couch, II, *Digital and Analog Communication Systems*. 6th ed, Prentice Hall, 2001.
11. V. Ditkine et A. Proudnikov, *Calcul opérationnel*. Dịch ra tiếng Pháp bởi Djilali Embarex, Mir 1979.
12. V. Ditkine et A. Proudnikov, *Transformation intégrales et calcul opérationnel*. Dịch ra tiếng Pháp bởi Djilali Embarex, Mir 1978.
13. Charles Dixon, *Applied Mathematics of science & Engineering*. John Wiley & Sons: London, New York, Sydney, Toronto 1980.
14. J. L. Doob, 1953. *Stochastic Processes*. Willey and Sons, New York.
15. B.A. Fukxơ và B. V. SaBat, *Hàm biến phức và ứng dụng*. Bản dịch tiếng Việt của Tràn Gia Lịch, Lê Văn Thành và Ngô Văn Lược, NXB Khoa học Hà Nội, 1969.
16. S. Haykin, 1988. *Digital communications*. John Willey and Sons.
17. S. Karlin, 1966. *A first Course in Stochastic Processes*. Academic Press, New York and London.
18. P. Quinn; B. Andrrews & H. Parsons, 1991. *Allocating telecommunications resources at L. L. Bean. Inc.*, Interfaces, 21, 75-91.
19. M. R. Spiegel, PhD, *Theory and Problems of Laplace Transform*. Schaum's outline series. Mc Graw - Hill Book company, Inc. 1986.
20. E. J. Savant JR, *Fundamentals of the Laplace Transformation*. Mc Graw - Hill Book company, Inc. 1962.

21. C. E. Shannon, *Mathematical Theory of Communication*. The Bell System Technical Journal 1948, Vol. 27, pp. 379 - 423, 623 - 656.

22. R. E. Ziemer & R. L.Peterson, *Introduction to digital communication*, Macmillan Publishing Company, 1992.

TOÁN CHUYÊN NGÀNH

Mã số : 491TNC214

Chịu trách nhiệm bản thảo

TRUNG TÂM ĐÀO TẠO BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG 1

(Tài liệu này được ban hành theo Quyết định số :   /QĐ-TTĐT1,
ngày /07/2006 của Giám đốc Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông)