NGUYỄN ĐỊNH - NGUYỄN HOÀNG

HÀM SỐ BIẾN SỐ THỰC

(CƠ SỞ GIẢI TÍCH HIỆN ĐẠI)

GIÁO TRÌNH DÙNG CHO SINH VIÊN KHOA TOÁN
CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

NGUYỄN ĐỊNH – NGUYỄN HOÀNG

HÀM SỐ BIẾN SỐ THỰC

(CƠ SỞ GIẢI TÍCH HIỆN ĐẠI)

GIÁO TRÌNH DÙNG CHO SINH VIÊN KHOA TOÁN CÁC TRƯỜNG ĐẠI HỌC

(Tái bản lần thứ hai)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

11 – 2007/CXB/231 – 2119/GD

Mã số : 7K410n7 – D

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn sách này trình bày các kiến thức cơ sở của giải tích hiện đại từ những khái niệm ban đầu của không gian mêtric, không gian tôpô, lí thuyết độ đo và tích phân Lebesgue. Qua thực tế và kinh nghiệm giảng dạy, chúng tôi chọn những nội dung tối thiểu về giải tích cho sinh viên khoa Toán ở các trường ĐHSP và ĐHKH cho dù về sau sinh viên đó trở thành giáo viên hay là cán bộ nghiên cứu ở các ngành khác nhau. Đặc thù của phần kiến thức này là nặng về suy luận trừu tượng, lí thuyết, khác với phần giải tích cổ điển, thường tập trung cho các kĩ năng tính toán biến đổi.

Cuốn sách bao gồm 4 chương chính. Chương 1 dành cho khái niệm mêtric, là cửa ngõ đi vào các phần khác nhau của giải tích hàm (tuyến tính hay phi tuyến). Chương 2 trình bày các yếu tố tổng quát và cơ bản của giải tích, đó là không gian tôpô. Chúng tôi không có tham vọng trình bày chi tiết, đầy đủ các vấn đề của tôpô đại cương mà chỉ cung cấp một lượng kiến thức cần thiết, để người học toán làm quen với khái niệm, thuật ngữ, phương pháp suy luận hầu có thể dễ dàng lĩnh hội các học phần khác về sau. Chương 3 trình bày lí thuyết độ đo Lebesgue, đây là một nội dung quan trọng, đồng thời cũng là cơ sở để xây dựng tích phân Lebesgue ở chương 4. Có nhiều giáo trình và sách tham khảo định nghĩa độ đo trên đại số các tập hợp. Ở đây chúng tôi trình bày độ đo trên nửa vành. Nhìn chung độ phức tạp không tăng bao nhiêu nhưng cách này tỏ ra thuận lợi khi xây dựng độ đo Lebesgue trên $\mathbf{R}^n$ hay tích các độ đo. Về lí thuyết tích phân, chúng tôi trình bày theo phương pháp kinh điển mà các tác giả như Rudin, Hewitt-Stromberg, Hoàng Tuy đã trình bày trong các cuốn sách của họ.

Cho đến nay việc lập một chương trình toán thống nhất cho các trường đại học là vấn đề khó thực hiện. Do đó trong hai chương đầu chúng tôi cố gắng trình bày tương đối độc lập (do đó có đôi chỗ lặp lại) để tuỳ theo chương trình và quan điểm của người dạy, có thể từ chương 1 đi thẳng vào chương 3 và 4 hoặc có thể dùng các chương 1, 2 để giảng các kiến thức cơ sở về tôpô, mêtric v.v... Nói chung chúng tôi cố ý thiết kế để cuốn sách được dùng một cách uyển chuyển tuỳ theo ý thích của giảng viên và chương trình quy định.

Các vấn đề trong cuốn sách này là khó đối với học viên có trình độ từ trung bình khá trở xuống. Do đó sinh viên mới học phải tập trung nỗ lực để tiếp thu các khái niệm, định nghĩa. Cần nắm chắc các phép toán về tập hợp, ánh xạ, phải thao tác biến đổi trên các đối tượng này một cách thành thạo. Kinh nghiệm cho thấy rằng, nếu sinh viên nào không hiểu đầy đủ các quy tắc suy luận logic và các phép toán về tập hợp thì rất lúng túng trong việc tiếp thu các chương này.

Dù ý đồ của các tác giả là cố gắng trình bày chi tiết, sơ cấp các vấn đề để phù hợp với trình độ của đa số sinh viên (đây là đối tượng phục vụ chủ yếu của cuốn sách) nhưng có nhiều kết quả khó, chứng minh dài nên đòi hỏi người học một sự kiên trì đáng kể.

Theo sự phân công, PTS. Nguyễn Hoàng viết các chương 1, 2 và PTS. Nguyễn Định viết các chương 3, 4. Các tác giả đã có nhiều cố gắng trong việc biên soạn, tuy nhiên đây là lần đầu tiên ra mắt bạn đọc nên cuốn sách có thể sẽ còn những khiếm khuyết. Chúng tôi rất mong nhận được sự góp ý chân tình của quý đồng nghiệp và bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong lần in sau.

CÁC TÁC GIẢ

Chương 0.

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

§ 1. TẬP HỢP, ÁNH XẠ, QUAN HỆ

1.1 Tập hợp.

1.1.1 Các phép toán trên các tập hợp.

a) Cho A, B là các tập hợp. Tập A được gọi là *tập con* của tập B, kí hiệu $A \subset B$, nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B. Hai tập hợp A, B được gọi là bằng nhau nếu $A \subset B$ và $B \subset A$.

Giả sử X là một tập hợp. Kí hiệu $\mathcal{P}(X)$ sẽ được dùng để chỉ tập hợp tất cả những tập con của X.

Các phép toán hợp, giao, hiệu, hiệu đối xứng của hai tập được định nghĩa lần lượt như sau :

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hay } x \in B\}$ (hợp của A và B),

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$ (giao của A và B),

$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$ (hiệu của A và B),

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (hiệu đối xứng).

Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì ta cũng nói là A và B *rời nhau* (không giao nhau hay có giao bằng $\emptyset$).

Các tính chất. Mối quan hệ giữa các phép toán được thể hiện trong các công thức sau. Giả sử A, B, C là các tập hợp.

(i) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

(ii) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

(iii) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

(iv) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

b) **Hợp, giao của một họ tập.** Cho $(A_i)_{i \in I}$ là một họ các tập hợp. Hợp và giao của họ tập này được định nghĩa như sau :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \text{ sao cho } x \in A_i\},$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ mọi } i \in I\}.$$

Họ $(A_i)_{i \in I}$ được gọi là rời nhau từng đôi nếu $A_i \cap A_j = \emptyset$ khi $i \neq j$.

Trường hợp $I = \mathbf{N}$, ta thường viết $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ hay $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ thay cho $\bigcap\limits_{i \in \mathbf{N}} A_i$ và $\bigcup\limits_{i \in \mathbf{N}} A_i$. Các công thức sau đây là mở rộng của (i) và (ii) ở trên (B là một tập tuỳ ý).

$$B \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B),$$

$$B \cup (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B).$$

c) **Phần bù của một tập.** Giả sử X là một tập và $B, A \subset X$. Tập $X \setminus A$ gọi là *phần bù* của A trong X và được kí hiệu là A^c. Các đẳng thức sau là đúng.

(i) $A \setminus B = A \cap B^c$,

(ii) $A \subset B$ khi và chỉ khi $B^c \subset A^c$,

(iii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

(iv) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Luật De Morgan.

$(A_i)_{i \in I}$ là một họ những tập con của X. Các công thức sau thường được gọi là luật De Morgan.

$$(\bigcup_{i \in I} A_i)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c \ ; \ (\bigcap_{i \in I} A_i)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

1.2 Ánh xạ.

1.2.1 Định nghĩa và các tính chất.

Giả sử A, B là các tập hợp khác rỗng. Một *ánh xạ* f từ A vào B, kí hiệu $f : A \longrightarrow B$ hay $x \mapsto f(x)$, là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in A$ với một phần tử duy nhất $y \in B$. Phần tử y này thường được kí hiệu là $f(x)$ và gọi là giá trị của f tại x hay ảnh của x qua ánh xạ f.

Hai ánh xạ $f : A \longrightarrow B$, $g : A \longrightarrow B$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $f = g$, nếu $f(x) = g(x)$, với mọi $x \in A$.

Cho $f : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ. Một đơn ánh, toàn ánh và song ánh được định nghĩa như sau.

$$(f - \text{đơn ánh}) \overset{\text{đn}}{\Leftrightarrow} \left(\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\right),$$

$$(f - \text{toàn ánh}) \overset{\text{đn}}{\Leftrightarrow} \left(\forall y \in Y,\ \exists x \in X : f(x) = y\right),$$

$$(f - \text{song ánh}) \overset{\text{đn}}{\Leftrightarrow} (f \text{ vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh}).$$

Bây giờ giả sử $f : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ, $A \subset X$ và $B \subset Y$. Ảnh của tập A qua ánh xạ f, kí hiệu $f(A)$, và nghịch ảnh (tạo ảnh) của tập B qua ánh xạ f, kí hiệu $f^{-1}(B)$, được định nghĩa là các tập sau :

$$f(A) = \left\{y \in Y \mid \exists x \in A \text{ để cho } f(x) = y\right\},$$

$$f^{-1}(B) = \left\{x \in X \mid f(x) \in B\right\}.$$

Giả sử $f : X \longrightarrow Y$, $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{P}(X)$, $(B_i)_{i \in J} \subset \mathcal{P}(Y)$. Khi đó,

(i) $f(\bigcup\limits_{i \in I} A_i) = \bigcup\limits_{i \in I} f(A_i)$,

(ii) $f(\bigcap\limits_{i \in I} A_i) = \bigcap\limits_{i \in I} f(A_i)$,

(iii) $f^{-1}(\bigcup\limits_{i \in J} B_i) = \bigcup\limits_{i \in J} f^{-1}(B_i)$,

(iv) $f^{-1}(\bigcap_{i\in J} B_i) = \bigcap_{i\in J} f^{-1}(B_i)$,

(v) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c = X \setminus f^{-1}(B)$.

1.2.2 Hợp của hai ánh xạ.

Cho $f: X \longrightarrow Y$ và $g: Y \longrightarrow Z$ là hai ánh xạ. Khi đó hợp của g và f (theo thứ tự đó), kí hiệu $g\circ f$, là ánh xạ được định nghĩa bởi

$$g\circ f: X \longrightarrow Z$$
$$x \longrightarrow (g\circ f)(x) = g(f(x)),\ x\in X.$$

Ta có thể chứng minh được các đẳng thức sau đây.

(i) $(g\circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$, mọi $C\subset Z$,

(ii) $(g\circ f)\circ h = g\circ(f\circ h)$, mọi $h: T\longrightarrow X$,

(iii) $f(f^{-1}(B))\subset B$, mọi $B\subset Y$,

$A\subset f^{-1}(f(A))$, mọi $A\subset X$.

1.2.3 Tích Descartes của một họ tập.

Giả sử $(A_i)_{i\in I}$ là một họ các tập hợp. *Tích Descartes* của họ này, kí hiệu $\prod_{i\in I} A_i$, là tập được định nghĩa bởi

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{x: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \mid x(i)\in A_i,\ \text{mọi } i\in I\right\}.$$

Phần tử của $\prod_{i\in I} A_i$ thường được kí hiệu là $\{x_i : i\in I\}$ hay $(x_i)_{i\in I}$.

Khi họ này chỉ gồm có hai tập $A,\ B$ thì tích Descartes của chúng sẽ được kí hiệu là $A\times B$ và phần tử của $A\times B$ thường được viết thành cặp (có thứ tự), nghĩa là

$$A\times B = \{(a,\ b)\mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Tương tự, tích Descartes của n tập, $A_i\times\ldots\times A_n$ (cũng kí hiệu $\prod_{i=1}^{n} A_i$) là tập gồm các bộ có thứ tự $(a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n)$ trong đó $a_i\in A_i$, mọi $i = 1,\ 2,\ldots,\ n$.

Nếu có $i \in I$ mà $A_i = \emptyset$ thì ta định nghĩa $\prod_{i \in I} A_i = \emptyset$. Tuy nhiên nếu $A_i \neq \emptyset$ mọi $i \in I$ thì liệu ta có thể khẳng định là $\prod_{i \in I} A_i$ khác $\emptyset$ không ? Không thể trả lời câu hỏi này bằng cách chỉ sử dụng các tiên đề thông thường về tập hợp. Mệnh đề sau đây thường được biết dưới tên gọi là "tiên đề chọn".

Tiên đề chọn : *Nếu* $(A_i)_{i \in I}$ *là một họ gồm các tập không rỗng thì* $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Dạng tương đương của tiên đề chọn :

Nếu $(A_i)_{i \in I}$ *là một họ gồm các tập khác rỗng, rời nhau từng đôi một thì tồn tại một tập* E *con* $\bigcup_{i \in I} A_i$ *sao cho* $E \cap A_i$ *chứa duy nhất một phần tử với mọi* $i \in I$.

1.3 Quan hệ.

Một quan hệ (hai ngôi) trên tập X là một tập con $\mathcal{R}$ của tích Descartes $X \times X$.

Nếu $(x, y) \in \mathcal{R}$ thì ta nói "x *quan hệ với* y *theo quan hệ* $\mathcal{R}$" *và kí hiệu* $x\mathcal{R}y$.

1.3.1 Quan hệ tương đương.

Một quan hệ $\mathcal{R}$ trên X gọi là một *quan hệ tương đương* nếu nó thoả mãn các điều kiện sau :

(i) $x\mathcal{R}x$, với mọi $x \in X$ (tính phản xạ),

(ii) Nếu $x\mathcal{R}y$ thì $y\mathcal{R}x$ (tính đối xứng),

(iii) Nếu $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}z$ thì $x\mathcal{R}z$ (tính bắc cầu).

Giả sử $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên X và $x \in X$. *Lớp tương đương* của x (theo quan hệ tương đương $\mathcal{R}$), kí hiệu là $\overline{x}$, là tập

$$\overline{x} := \{y \in X \mid x\mathcal{R}y\}.$$

Tập hợp gồm tất cả các lớp tương đương theo quan hệ $\mathcal{R}$ thường được gọi là *tập thương* của X theo $\mathcal{R}$ và kí hiệu là $X/\mathcal{R}$. Vậy $X/\mathcal{R} = \{\overline{x} \mid x \in X\}$.

Dễ dàng nhận thấy rằng nếu $x, y \in X$ thì hoặc là $\overline{x} = \overline{y}$ hoặc là $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$. Như vậy tập các lớp tương đương theo quan hệ $\mathcal{R}$ lập thành một phân hoạch của X, nghĩa là có một họ $(A_i)_{i\in I}$ những tập con của X (mỗi A_i là một lớp tương đương), $A_i \cap A_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$ sao cho $X = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Ngược lại nếu $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{P}(X)$ sao cho $A_i \cap A_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$ và $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = X$ thì

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists i \in I \text{ sao cho } x, y \in A_i\}$$

là một quan hệ tương đương trên X mà các lớp tương đương (theo $\mathcal{R}$) chính là các A_i.

1.3.2. Quan hệ thứ tự.

Một loại quan hệ khác trên X cũng có một vai trò quan trọng là quan hệ thứ tự. Một quan hệ, kí hiệu "$\leq$", trên X gọi là *quan hệ thứ tự* (bộ phận) trên X (hay cũng nói "X được sắp bộ phận bởi $\leq$") nếu nó thoả mãn các điều kiện sau :

a) $x \leq x$, mọi $x \in X$,

b) $x \leq y$ và $y \leq x$ thì $x = y$ (phản xứng),

c) Nếu $x \leq y$ và $y \leq z$ thì $x \leq z$.

Bây giờ giả sử X là tập được sắp bởi quan hệ thứ tự bộ phận $\leq$. Tập con Y của X gọi là được *sắp thẳng* nếu với mọi cặp các phần tử $x, y \in Y$ ta có $x \leq y$ hay $y \leq x$.

Phần tử $u \in X$ được gọi là một cận trên của tập Y nếu $y \leq u$, mọi $y \in Y$.

Phần tử $m \in X$ được gọi là phần tử tối đại của X nếu quan hệ $m \leq x$, $x \in X$ kéo theo $x = m$ (lưu ý rằng X có thể có nhiều hơn một phần tử tối đại và cũng có thể không có phần tử tối đại). Phát biểu sau đây nêu lên một đảm bảo cho sự tồn tại phần tử tối đại đối với một tập hợp được sắp. Nó được gọi tên là bổ đề Zorn. Người ta cũng chứng minh được nó tương đương với Tiên đề chọn.

Bổ đề Zorn. Nếu mọi tập con sắp thẳng của X đều có một cận trên thì X có một phần tử tối đại.

BÀI TẬP

1. $(A_n)_{n\in\mathrm{N}}$ là họ một tập.

(a) Hãy xây dựng một họ $(B_n)_{n\in\mathrm{N}}$ sao cho : $B_n \subset B_{n+1}$ và $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(b) Hãy xây dựng một họ $(B_n)_{n\in\mathrm{N}}$ sao cho $B_n \cap B'_n = \emptyset$ nếu $n \neq n'$ và $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

(c) Giả sử thêm $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathrm{N}$. Hãy xây dựng họ $(B_n)_n$ sao cho $B_n \cap B'_n = \emptyset$ nếu $n \neq n'$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ và $A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_i$ ∎

2. $f : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ. Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương.

a) f là một đơn ánh,

b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, mọi $A, B \subset X$,

c) Mọi cặp các tập $A, B \subset X$ mà $A \cap B = \emptyset$ thì

$$f(A) \cap f(B) = \emptyset.$$

3. $f : X \longrightarrow Y$ là toàn ánh khi và chỉ khi

$$f\left(f^{-1}(B)\right) = B, \text{ mọi } B \subset Y.$$

4. Cho một thí dụ về một ánh xạ $f : X \longrightarrow Y$ và hai tập $A, B \subset X$ sao cho :

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B).$$

5. Cho $f : X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ. Chứng tỏ rằng f là một đơn ánh khi và chỉ khi với mọi tập Z và mọi ánh xạ $g_1 : Z \longrightarrow X$, $g_2 : Z \longrightarrow X$ sao cho $f \circ g_1 = f \circ g_2$ thì $g_1 = g_2$.

§ 2. SỐ THỰC

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số tính chất của tập số thực, được dùng thường xuyên sau này. Nhắc lại rằng, tập hợp số thực **R** là một trường với hai phép toán cộng và nhân thông thường, trên đó có trang bị quan hệ thứ tự toàn phần.

2.1 Supremum và infimum của một tập $M \subset \mathbf{R}$.

Cho M là một tập con của **R**. Số $y \in \mathbf{R}$ được gọi là một *cận trên* (tương ứng, *cận dưới*) của M nếu với mọi $x \in M$ thì $x \leq y$ $(\text{t.ư.}, y \leq x)$. Hiển nhiên nếu y là cận trên (t.ư., cận dưới) của M thì với mọi $y' \geq y$ $(\text{t.ư.}, y' \leq y)$ cũng là cận trên (t.ư., cận dưới của M).

Tập hợp M được gọi là *bị chặn trên* (t.ư., *bị chặn dưới*) nếu M tồn tại ít nhất một cận trên (t.ư., cận dưới). Ta có một tính chất cơ bản và quan trọng sau đây :

Nguyên lí supremum. Mọi tập con M khác rỗng của **R** bị chặn trên (t.ư., bị chặn dưới) thì tồn tại cận trên bé nhất (t.ư., cận dưới lớn nhất).

Cận trên bé nhất của một tập bị chặn trên được gọi là *supremum* của M và kí hiệu sup M. Cận dưới lớn nhất của một tập bị chặn dưới được gọi là *infimum* của M và kí hiệu là inf M.

Theo định nghĩa ta có $\alpha = \sup M$ khi và chỉ khi hai điều kiện sau đây được thoả mãn :

1) $\forall x \in M : x \leq \alpha$

2) $(\forall \alpha' < \alpha)(\exists x \in M) : \alpha' < x$

(Điều kiện 1) diễn tả α là một cận trên của M, còn điều kiện 2) nói rằng vì α là cận trên bé nhất nên nếu $\alpha' < \alpha$ thì α' không còn là cận trên của M nữa.)

Điều kiện 2) có thể diễn tả bằng nhiều cách khác nhau. Ta có thể viết lại các mệnh đề tương đương như sau

$$\alpha = \sup M \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \forall x \in M : x \leq \alpha \\ 2')\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in M) : \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha \end{cases}$$

Nếu lấy ε lần lượt bằng $\dfrac{1}{n}$ thì ta có thể viết lại

$$\alpha = \sup M \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \forall x \in M : x \leq \alpha \\ 2")\ \exists (x_n)_n \subset M : x_n \to \alpha (n \to \infty) \end{cases}$$

Bạn đọc hãy viết chi tiết các mệnh đề tương đương đối với infimum.

Sau đây là một số tính chất thường dùng của tập số thực.

2.2 Dãy các đoạn $([a_n, b_n])_n$ được gọi là *thắt lại* nếu $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, $n = 1, 2\ldots$ và $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Nguyên lí Cantor. *Mỗi dãy đoạn $([a_n, b_n])_n$ trong $\mathbf{R}$ thắt lại thì có một phần tử chung duy nhất cho tất cả các đoạn đó.*

2.3 Nguyên lí Bolzano-Weierstrass *Mọi dãy số thực bị chặn đều có một dãy con hội tụ trong* $\mathbf{R}$.

2.4 Dãy số thực $(x_n)_n \subset \mathbf{R}$ được gọi là *dãy cơ bản* hay *dãy Cauchy* nếu

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(\forall m, n \geq n_0) : |x_n - x_m| < \epsilon.$$

Nguyên lí Cauchy *Mọi dãy số thực cơ bản thì phải hội tụ.*

2.5 Tính chất trù mật của tập số hữu tỉ $\mathbf{Q}$ trong $\mathbf{R}$.

Với mỗi cặp số thực (a, b), $a < b$ bao giờ cũng tồn tại một số hữu tỉ r sao cho $a < r < b$.

§ 3. CHUỖI SỐ

Phần này liệt kê một số kiến thức liên quan tới các chuỗi số dương được sử dụng thường xuyên trong các chương 3 và 4.

3.1 Chuỗi số dương và tính giao hoán.

Nhắc lại rằng nếu $(x_n)_n \subset \mathbf{R}$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ được gọi là *hội tụ* trong $\mathbf{R}$ nếu dãy tổng riêng $(s_n)_{n\in N}$ của nó hội tụ trong $\mathbf{R}$ $\left(s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i,\ n \in \mathrm{N}\right)$.

Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$ thì ta viết $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty$ và nói chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ có tổng là $+\infty$. Trường hợp $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = -\infty$ cũng được hiểu hoàn toàn tương tự.

Một chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$. Một chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ trong $\mathbf{R}$.

Sau này ta sẽ xét đến các chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mà $x_n \in \overline{\mathbf{R}}$, $n \in \mathbf{N}$. Tổng của chuỗi trong trường hợp này cũng được định nghĩa như trước đây, là giới hạn của dãy tổng riêng $(s_n)_{n\in\mathrm{N}}$ và là một số thuộc $\overline{\mathbf{R}}$. Ta có kết quả sau.

3.1.1 Định lí. *Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ là một chuỗi dương thì với mọi song ánh $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, ta đều có $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ (chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ có tính giao hoán).*

Chứng minh. Gọi $a = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$, $b = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ (để ý a, $b \in \overline{\mathbf{R}}$ và $a, b \geq 0$). Ta chỉ cần chứng minh $b \leq a$ là đủ ($a \leq b$ chứng minh tương tự). Mọi $n \in \mathbf{N}$, đặt $k = max\{\sigma(1),...,\sigma(n)\}$. Khi đó

$$\sum_{m=1}^{n} x_{\sigma(m)} \leq \sum_{i=1}^{k} x_i \leq a.$$

Từ đây $b \leq a$ ∎

Lưu ý. Đôi khi ta cũng xét chuỗi số $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n$. Tổng của chuỗi này được hiểu là $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=-n}^{n} x_i$.

3.2 Chuỗi số kép.

Cùng với chuỗi số thông thường, các "chuỗi số kép" với số hạng không âm cũng được sử dụng trong giáo trình này. Ta nhắc lại một vài khái niệm và kết quả đáng quan tâm.

Nếu $(a_{n,m})_{(n,m)\in\mathrm{N}\times N}$ là một dãy kép với $a_{n,m} \in [0, +\infty]$ thì với mỗi $n \in \mathbf{N}$ cố định, chuỗi $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$ luôn hội tụ trong $\overline{\mathbf{R}}$ (tức có tổng là một số thực hay $+\infty$). Tổng của chuỗi kép $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$ (luôn tồn tại) được định nghĩa là

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \lim_{k,l\to\infty}\sum_{n=1}^{k}(\sum_{m=1}^{l} a_{n,m}).$$

Kết quả về sự thay đổi thứ tự lấy tổng được cho trong định lí sau.

3.2.1 Định lí. *Nếu* $a_{n,m} \in [0,\infty]$, *mọi* $m,n \in \mathbf{N}$ *thì*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}).$$

Chứng minh. Đặt $a = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}$, $b = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}$. Khi đó với mỗi $p,k \in \mathrm{N}$, ta có :

$$\sum_{n=1}^{k}\sum_{m=1}^{p} a_{n,m} = \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{k} a_{n,m} \le \sum_{m=1}^{p}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m})$$

$$\le \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m} = b.$$

Từ đây ta dễ dàng suy ra được rằng $a \le b$. Hoàn toàn tương tự ta cũng có $b \le a$. Vậy $a = b$ ∎

Lưu ý. Người ta cũng chứng minh được kết quả tổng quát sau :

Nếu $a_{n,m} \in [0,+\infty]$ *mọi* m, $n \in \mathbf{N}$ *và* $\sigma : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathbf{N}\times\mathbf{N}$ *là một song ánh thì*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{\sigma(n,m)}.$$

§ 4. LỰC LƯỢNG CỦA CÁC TẬP HỢP

Cho A là một tập hợp có phần tử là các đối tượng nào đó. Ta thử để ý đến "số lượng" các phần tử của tập A này bằng cách "đếm" các phần tử ấy. Có thể xảy ra một trong hai khả năng sau đây :

1) Nếu có thể ước lượng các phần tử của tập A nhỏ hơn một số nguyên nào đó hoặc có thể đếm hết được các phần tử của tập A thì tập A được gọi là tập hợp hữu hạn và số nguyên cuối cùng đếm tới chính là số lượng các phần tử của tập A.

2) Nếu việc đếm các phần tử của tập A không kết thúc cũng như không thể ước lượng số phần tử của nó thì tập A được gọi là tập vô hạn.

Bây giờ chúng ta muốn so sánh "số lượng" các phần tử của hai tập A, B. Nếu có ít nhất một tập hữu hạn thì việc so sánh trở nên dễ dàng nhờ việc đếm các phần tử. Trường hợp cả A lẫn B đều vô hạn thì cách đếm không thể thực hiện nên chưa so sánh được. Ta xét ví dụ sau đây. Kí hiệu B là tập hợp các số tự nhiên chẵn

$$B = \{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$$

Hiển nhiên B là tập con thực sự của tập số tự nhiên $\mathbf{N} = \{1, 2, ...\}$ Tuy nhiên chúng ta không thể nói rằng "số lượng" các phần tử của tập $\mathbf{N}$ nhiều gấp đôi "số lượng" các phần tử của tập B.

Để ý rằng, thực chất của việc đếm các phần tử là thực hiện một đơn ánh từ tập ta đếm vào tập số tự nhiên $\mathbf{N}$. Ngoài ra muốn biết hai tập hợp có cùng số lượng các phần tử hay không, ta chỉ cần xem có thể thiết lập được một song ánh giữa hai tập này hay không. Như vậy với phương pháp dùng ánh xạ, ta có thể so sánh "số lượng" phần tử các tập hợp cho dù chúng là hữu hạn hay vô hạn.

4.1 Tập hợp tương đương.

4.1.1 Định nghĩa. Ta nói hai tập hợp A, B *tương đương* với nhau nếu tồn tại một song ánh từ A lên B. Kí hiệu $A \simeq B$.

4.1.2 Ví dụ.

1. Hai tập hợp hữu hạn có cùng một số lượng các phần tử thì tương đương với nhau.

2. Tập hợp các số tự nhiên $\mathbf{N}$ và tập các số chẵn $B = \{2, 4, ..., 2n, ...\}$ là tương đương với nhau nhờ song ánh từ $\mathbf{N}$ lên B xác định bởi $n \to 2n$, $n \in \mathrm{N}$.

3. Tập $(0,\ 1) \subset \mathbf{R}$ tương đương với $(a,\ b) \subset \mathbf{R}$ với $a,\ b \in \mathbf{R}$ và $a < b$ nhờ song ánh $(0,\ 1) \ni x \to y = (b-a)x + a$.

4. Tập $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ tương đương với tập $\mathbf{R}$ bởi song ánh

$$f : \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R} : x \to y = f(x) = \mathrm{tg}x$$

Nhận xét.

Trong ví dụ 2, ta thấy từ tập $\mathbf{N}$ sau khi bỏ đi tất cả các số nguyên lẻ, tập số nguyên chẵn còn lại B vẫn còn tương đương với $\mathbf{N}$. Tương tự như vậy, ở các ví dụ 3, 4, một tập con thực sự của một tập vẫn có thể tương đương với chính nó. Đây là một đặc trưng của tập hợp vô hạn vì đối với tập hữu hạn, hai tập hữu hạn tương đương với nhau khi và chỉ khi chúng có cùng số lượng các phần tử. Do vậy, ta có thể định nghĩa tập hợp hữu hạn và vô hạn như sau :

Tập A được gọi là *tập hợp vô hạn* nếu A tương đương với một tập con thực sự của nó.

Tập A được gọi là *tập hợp hữu hạn* nếu A không phải là tập hợp vô hạn.

Khi hai tập hợp tương đương với nhau ta bảo chúng có cùng *lực lượng* hay cùng *bản số*. Đối với các tập hữu hạn, theo nhận xét trên chúng có cùng lực lượng khi và chỉ khi chúng có cùng số lượng các phần tử nên ta đồng nhất lực lượng của các tập hợp có n phần tử là n. Như thế khái niệm lực lượng là sự mở rộng khái niệm số lượng các phần tử của một tập hợp cho trường hợp tập vô hạn. Lực lượng của tập A được kí hiệu là $\overline{\overline{A}}$ hay card A. Ví dụ $\operatorname{card}\{1,2,3,4,5\}=5$, $\operatorname{card}\{a,b,c\}=3$... Lực lượng của tập $\mathbf{N}$ được kí hiệu là $\operatorname{card}\mathbf{N}=\aleph$.

Nếu tập hợp B tương đương với một tập con thực sự của A nhưng không tương đương với A thì ta nói lực lượng của B nhỏ hơn của A và kí hiệu $\overline{\overline{B}}<\overline{\overline{A}}$. Lúc này ta cũng gọi lực lượng của A lớn hơn lực lượng của B và kí hiệu $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$.

4.1.3 Định lí. (Cantor-Bernstein) *Cho hai tập hợp A, B tuỳ ý. Nếu A tương đương với một tập con $B_1\subset B$ và B tương đương với tập $A_1\subset A$ thì A, B tương đương với nhau.*

Chứng minh. Giả sử $g:B\to A_1$ và $h:A\to B_1$ là các song ánh. Khi đó $f=g\circ h$ là một song ánh từ A lên $f(A)\subset A_1\subset A$. Đặt $C=A_1\setminus f(A)$.

* Nếu $C=\emptyset$ thì $f(A)=A_1$. Như vậy $A\simeq A_1$ và $A_1\simeq B$ nên $A\simeq B$.

* Nếu $C\neq\emptyset$ thì ta kí hiệu

$$D = C \cup f(C) \cup f^2(C) \cup ... \cup f^n(C) ... \quad (1)$$

trong đó $f^2 = f \circ f, ...$ Đặt $\varphi : A \to A_1$ xác định bởi

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \in D \\ f(x) & \text{nếu } x \in A \setminus D. \end{cases} \quad (2)$$

Ta chứng minh φ là một song ánh. Thật vậy

$$\varphi(A) = \varphi(D) \cup \varphi(A \setminus D) = D \cup f(A \setminus D) \quad (3)$$

Theo (1) và (2) ta có

$$f(D) = f(C) \cup f^2(C) \cup ...$$

nên $D = C \cup f(D)$ và

$$\varphi(A) = C \cup f(D) \cup f(A \setminus D) = C \cup f(A) = A_1.$$

Vậy φ là toàn ánh. Tiếp theo ta chứng minh $\varphi(D) \cap \varphi(A \setminus D) = \emptyset$. Từ định nghĩa của φ ta có

$$\varphi(A \setminus D) = f(A) \setminus f(D) = f(A) \setminus (C \cup f(D)) = f(A) \setminus D.$$

Vậy $\varphi(D) \cap \varphi(A \setminus D) = D \cap (f(A) \setminus D) = \emptyset$. Điều này có nghĩa là φ đơn ánh nên suy ra $A \simeq A_1$ nên $A \simeq B$ vì theo giả thiết $A_1 \simeq B$. ▮

Chú ý. Dùng tiên đề chọn, người ta chứng minh rằng không thể xảy ra trường hợp "A không tương đương với bất cứ tập con nào của B và B không tương đương với bất kì tập con nào của A." Do đó từ định lí Cantor-Bernstein ta suy ra hệ quả sau đây.

4.1.4 Hệ quả. *Cho hai tập A, B tuỳ ý. Bao giờ cũng xảy ra một và chỉ một trong 3 trường hợp sau :*

1. $\bar{\bar{A}} = \bar{\bar{B}}$ *(tức là A, B tương đương với nhau).*

2. $\bar{\bar{A}} < \bar{\bar{B}}$,

3. $\bar{\bar{A}} > \bar{\bar{B}}$.

4.2 Tập hợp đếm được.

4.2.1 Định nghĩa. Ta gọi A là một *tập đếm được* nếu A tương đương với tập số tự nhiên $\mathbf{N}$. Nói cách khác, A đếm được nếu tồn tại một song ánh từ $\mathbf{N}$ lên A. Khi ấy ta cũng nói A có lực lượng đếm được.

Kí hiệu $a : \mathbf{N} \to A$ là song ánh nói trên, ta có

$$\mathbf{N} \ni n \to a(n) = a_n \in A.$$

Như vậy ta còn có thể nói một tập đếm được là một tập mà tất cả các phần tử của nó đều có thể đánh số thành một dãy vô hạn

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

4.2.2 Ví dụ.

1. Tập các số tự nhiên, số tự nhiên chẵn, số tự nhiên lẻ đều là các tập đếm được. Thật vậy $\mathbf{N} \simeq \mathbf{N}$, $B = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\} \simeq \mathbf{N}$ và $C = \{1, 3, \ldots, 2n+1, \ldots\} \simeq \mathbf{N}$ bằng các ánh xạ đồng nhất, $n \to 2n$, $n \to 2n+1$.

2. Tập $\mathbf{Z}$ gồm tất cả các số nguyên là đếm được. Thật vậy, ta xét ánh xạ $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$ cho bởi :

$$n \to f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{nếu } n \text{ chẵn}, \\ \dfrac{1-n}{2} & \text{nếu } n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra f là song ánh nên ta có được kết luận.

3. Tập các số hữu tỉ $\mathbf{Q}$ là đếm được. Thật vậy, một số hữu tỉ có thể viết duy nhất thành một phân số tối giản $\dfrac{p}{q}$, $q > 0$. Ta tạm gọi tổng $|p| + q$ là "hạng" của số hữu tỉ $\dfrac{p}{q}$. Rõ ràng tập hợp các phân số có hạng cho trước là hữu hạn, ví dụ, phân số có hạng 1 là $\dfrac{0}{1} = 0$, hạng 2 là $\dfrac{1}{1}$ và $\dfrac{-1}{1}$, hạng 3 là $\dfrac{2}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{-2}{1}, \dfrac{-1}{2}, \ldots$ Hơn nữa mỗi số hữu tỉ đều có hạng xác định nên ta có thể đánh số các số hữu tỉ thành dãy theo thứ tự tăng dần của hạng, tức là bắt đầu đánh số các số hạng 1 rồi các số có hạng 2, hạng 3,... Vậy các phần tử của $\mathbf{Q}$ có thể sắp thành dãy nên $\mathbf{Q}$ là tập đếm được.

Sau đây là các định lí cơ bản về tập đếm được.

4.2.3 Định lí. *Mọi tập vô hạn đều có chứa một tập con đếm được.*

Chứng minh. Giả sử M là một tập vô hạn. Lấy ra một phần tử bất kì $a_1 \in M$. Vì $M \setminus \{a_1\}$ cũng vô hạn nên lấy tiếp $a_2 \in M \setminus \{a_1\}$ rồi $a_3 \in M \setminus \{a_1, a_2\}$ v.v... Tiếp tục quy nạp ta thu được tập đếm được $A = \{a_1, a_2 ...\} \subset M$. ∎

4.2.4 Định lí. *Mọi tập con của một tập đếm được thì phải là tập hữu hạn hay đếm được.*

Chứng minh. Giả sử $A = \{a_1, a_2, ...\}$ là một tập đếm được và B là một tập con của A. Gọi $a_{n_1}, a_{n_2}, ...$ là các phần tử của A thuộc tập B theo thứ tự tăng dần trong A. Nếu trong các số $n_1, n_2, ...$ có số lớn nhất thì B hữu hạn. Trường hợp trái lại, các phần tử của B được sắp thành dãy vô hạn $a_{n_1}, a_{n_2}, ...$ nên B đếm được. ∎

4.2.5 Định lí. *Hợp một họ hữu hạn hay đếm được các tập hữu hạn hay đếm được là một tập hữu hạn hay đếm được.*

Chứng minh. Cho $A_1, A_2, ...$ là những tập hữu hạn hay đếm được. Ta có thể giả thiết các tập này không giao nhau vì nếu khác đi, ta đặt $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), ...$ Các tập B_i này là hữu hạn hay đếm được, không giao nhau và $\bigcup_i A_i = \bigcup_i B_i$. Bây giờ ta sắp các phần tử của các tập $A_1, A_2, ...$ thành một bảng hữu hạn hay vô hạn như sau :

$$\begin{array}{llllll}
A_1 : & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\
A_2 : & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\
A_3 : & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\
. & . & . & . & \dots \\
. & . & . & . & \dots
\end{array}$$

Ta hãy đánh số tất cả các phần tử của bảng trên theo "đường chéo" từ trái lên phía trên. Do mỗi đường chéo có hữu hạn phần tử nên ta có thể đánh số thứ tự trên đường chéo thứ nhất rồi đường chéo thứ hai, thứ ba, ... như sau

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, ...$$

Vậy tất cả các phần tử của tập $A = \bigcup_i A_i$ được đánh số nên tập A là hữu hạn hay đếm được. ▮

4.2.6 Định lí. *Khi thêm một tập hợp hữu hạn hay đếm được vào một tập vô hạn thì không làm thay đổi lực lượng của tập vô hạn này.*

Chứng minh. Giả sử A là một tập hữu hạn hay đếm được và M là một tập vô hạn. Kí hiệu $N = M \cup A$. Theo Định lí 4.2.3 tồn tại một tập đếm được $B \subset M$. Đặt $M' = M \setminus B$, ta có $M = M' \cup B$ nên $N = M' \cup B \cup A$. Theo Định lí 4.2.5 thì $B \cup A$ là tập đếm được nên tồn tại song ánh giữa B và $B \cup A$. Ta đặt

$$g : M = M' \cup B \to N = M' \cup (B \cup A)$$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x \in M', \\ f(x) & \text{nếu } x \in B. \end{cases}$$

Như thế g là một song ánh từ M lên N nên $\operatorname{card} M = \operatorname{card} N$.

Theo định lí này ta thấy $(a, b) \simeq [a, b]$. Hơn nữa, $(a, b) \simeq \mathbf{R}$ nên $[a, b]$ cũng tương đương với $\mathbf{R}$. ▮

Nhận xét. Từ các Định lí 4.2.3 và 4.2.6 ta thấy lực lượng đếm được là lực lượng "bé nhất" trong các lực lượng của các tập vô hạn.

4.2.7 Định lí. *Tập hợp tất cả các dãy hữu hạn thành lập từ các phần tử của một tập đếm được là tập đếm được.*

Chứng minh. Giả sử $A = \{a_1, a_2, ...\}$ là một tập đếm được. Kí hiệu S_m là tập tất cả các dãy có đúng m phần tử của A dạng $(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m})$. Ta có $S_1 = A$ đếm được. Giả sử S_m đếm được, ta lấy $a_k \in A$ và kí hiệu S_{m+1}^k là tập tất cả các dãy có dạng $(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}, a_k)$. Giữa S_{m+1}^k và S_m có một song ánh cho bởi $(a_{i_1}, ..., a_{i_m}, a_k) \to (a_{i_1}, ..., a_{i_m})$ nên S_{m+1}^k đếm được. Mặt khác, vì $S_{m+1} = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_{m+1}^k$ nên S_{m+1} là tập đếm được theo Định lí 4.2.5. Như vậy tập tất cả các dãy hữu hạn $S = \bigcup_{m=1}^{\infty} S_m$ là một tập đếm được. ▮

4.2.8 Hệ quả. *Tập hợp tất cả các đa thức* $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ $(n \in \mathbf{N})$ *với các hệ số hữu tỉ* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *là một tập đếm được.*

Chứng minh. Mỗi đa thức như trên tương ứng với một và chỉ một dãy hữu hạn các hệ số hữu tỉ của nó. Vì $\mathbf{Q}$ là một tập đếm được nên theo Định lí 4.2.7, tập tất cả các dãy hữu hạn các số hữu tỉ là đếm được nên tập các đa thức ấy đếm được. ▮

4.3 Lực lượng continum.

Ngoài các ví dụ về tập vô hạn đếm được nêu trên, ta còn gặp các tập hợp vô hạn không đếm được. Sau đây là một tập hợp như thế.

4.3.1 Định lí. *Tập các số thực* $\mathbf{R}$ *là tập vô hạn không đếm được.*

Chứng minh. Ta đã thấy ở Định lí 4.2.6 là $\mathbf{R}$ tương đương với $[0, 1]$. Do đó ta chỉ cần chứng minh $[0, 1]$ không đếm được. Giả sử ngược lại $[0, 1]$ đếm được. Khi đó các phần tử của nó được đánh số thành dãy $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ Chia $[0, 1]$ thành 3 đoạn bằng nhau và gọi đoạn không chứa x_1 là Δ_1. Lại chia tiếp Δ_1 thành 3 đoạn bằng nhau và gọi Δ_2 là đoạn nhỏ không chứa $x_2, \ldots$ Tiếp tục quá trình này ta thu được dãy đoạn $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ với Δ_n có độ dài là $|\Delta_n| = \dfrac{1}{3n}$ sao cho $x_n \notin \Delta_n$. Đây là dãy đoạn thắt lại nên theo nguyên lí Cantor, tồi tại $\xi \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n \subset [0, 1]$. Như vậy ξ phải trùng với một x_{n_0} nào đó. Vì $\xi \in \Delta_n$ với mọi n nên $x_{n_0} \in \Delta_{n_0}$. Điều này mâu thuẫn với cách xây dựng các đoạn Δ_n. Vậy đoạn $[0, 1]$ là tập vô hạn, không đếm được. ▮

4.3.2 Nhận xét.

1. Đặt $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\} \subset [0, 1]$. Rõ ràng A là tập đếm được. Do đó lực lượng của đoạn $[0, 1]$ hay $\mathbf{R}$ lớn hơn lực lượng đếm được..Người ta gọi lực lượng này là *lực lượng continum* hay *lực lượng c*.

2. Tập hợp số thực bằng hợp của số hữu tỉ và vô tỉ. Do tập hợp số hữu tỉ đếm được nên tập số vô tỉ không đếm được và cũng có lực lượng là c.

BÀI TẬP

1. Hãy thiết lập một song ánh giữa hai tập $(0, 1)$ và $[0, 1]$.

2. Chứng minh tập các điểm gián đoạn của một hàm số đơn điệu, xác định trên $[a, b]$ là hữu hạn hay đếm được.

3. Giả sử E là một tập con của $\mathbf{R}$ có tính chất $|x-y|>1$ với mọi $x, y \in E$. Chứng minh E là một tập hữu hạn hay đếm được.

4. Cho A và B là các tập đếm được. Chứng minh tập $A \times B$ cũng đếm được.

5. Kí hiệu E là tập hợp tất cả các dãy số thực $(x_n)_n$ trong đó $x_n = 0$ hay $x_n = 1$. Chứng minh E là tập hợp không đếm được.

Chương 1.

KHÔNG GIAN MÊTRIC

§ 1. KHÁI NIỆM MÊTRIC

Phép toán đặc trưng của ngành giải tích là phép toán lấy giới hạn. Để có thể định nghĩa phép toán này ta phải biết cách "đo" độ xa, gần giữa các đối tượng đang xét. Có nhiều cách để xác định các mức độ xa, gần ấy. Ở đây ta dùng khái niệm khoảng cách hay mêtric, đó là khái niệm khá tự nhiên, được dùng thường xuyên trong cuộc sống.

1.1 Định nghĩa.

Giả sử X là một tập tuỳ ý khác trống cho trước. Ta gọi hàm số $d: X \times X \to \mathbf{R}$ là một *mêtric* (hay *khoảng cách*) trên X nếu hàm số này thoả mãn ba tiên đề sau đây :

1. $d(x, y) \geq 0$, với mọi $x, y \in X$; $d(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.

2. $d(x, y) = d(y, x)$, (tính đối xứng),

3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, với mọi $x, y \in X$, (bất đẳng thức tam giác).

Khi đó tập X cùng với mêtric d đã cho được gọi là một *không gian mêtric* và kí hiệu là (X, d). Nếu không sợ nhầm lẫn do mêtric d được xác định rõ ràng thì ta chỉ cần kí hiệu đơn giản là X.

Để gợi hình ảnh trực quan, ngôn ngữ hình học sẽ được dùng trong phần lớn các khái niệm tiếp theo. Ta sẽ gọi phần tử $x \in X$ là *điểm* của không gian X, số thực không âm $d(x, y)$ là *khoảng cách* giữa hai điểm x, y.

1.2 Các ví dụ.

1.2.1 Giả sử M là tập con khác rỗng của tập số thực $\mathbf{R}$. Với $x, y \in M$ ta đặt

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Khi ấy sử dụng các tính chất quen thuộc của giá trị tuyệt đối, ta kiểm tra được ngay d là một mêtric và gọi nó là mêtric thông thường trên M.

1.2.2 Kí hiệu $\mathbf{R}^k = \{(x^1, ..., x^k) : x^i \in \mathbf{R},\ i = 1, ..., k\}$ là tập hợp tất cả các bộ gồm k số thực. Với $x = (x^1, ..., x^k),\ y = (y^1, ..., y^k) \in \mathbf{R}^k$, ta đặt

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x^i - y^i|^2}$$

Rõ ràng d thoả mãn các tiên đề 1, 2 của mêtric. Ta hãy kiểm tra tiên đề 3, tức là chứng minh

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x^i - z^i|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x^i - y^i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |y^i - z^i|^2}.$$

Ta đặt $a_i = x^i - y^i,\ b_i = y^i - z^i$ khi đó $a_i + b_i = x^i + y^i$.

Để ý

$$d^2(x, y) = \sum_{i=1}^{k} |a_i + b_i|^2 = \sum_{i=1}^{k} |a_i|^2 + \sum_{i=1}^{k} |b_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{k} a_i b_i.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz cho hạng tử sau cùng của bất đẳng thức trên ta được

$$\begin{aligned} d^2(x, y) &\le \sum_{i=1}^{k} |a_i|^2 + \sum_{i=1}^{k} |b_i|^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{k} |a_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{k} |b_i|^2} \\ &\le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{k} |a_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{k} |b_i|^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Từ đó lấy căn bậc hai hai vế và trở về các kí hiệu cũ, ta có

$$d(x, y) \le d(x, z) + d(y, z).$$

Vậy $(\mathbf{R}^k, d)$ là một không gian mêtric và ta gọi mêtric d này là *mêtric thông thường* (hay *mêtric Euclide*) trên $\mathbf{R}^k$.

Chú ý :

1. Khi $k=1$ ta trở về ví dụ 1 với $M=\mathbf{R}$.

2. Khi xét $\mathbf{R}^k$ mà không nói rõ mêtric nào thì ta quy ước là xét $\mathbf{R}^k$ với mêtric thông thường.

3. Các mêtric xét trong các ví dụ 1 và 2 chính là cơ sở cho ta làm toán giải tích, chẳng hạn nghiên cứu phép tính vi tích phân của hàm một hoặc nhiều biến số.

1.2.3 Giả sử X là một tập tuỳ ý khác rỗng. Ta đặt

$$d(x, y)=\begin{cases}0, \text{ nếu } x=y,\\ 1, \text{ nếu } x\neq y\end{cases}$$

với mọi $x, y\in X$. Ta hãy kiểm tra d là một mêtric trên X.

Tiên đề 1) và 2) được nghiệm đúng. Tiên đề 3) có dạng

$$d(x, z)\leq d(x, y)+d(y, z)$$

i) Nếu $x\neq z$ thì $d(x, z)=1$ còn vế sau ≥ 1 do $y\neq x$ hoặc $y\neq z$.

ii) Nếu $x=z$ thì $d(x, z)=0$ còn vế sau ≥ 0.

Vậy tiên đề 3 cũng thoả mãn nên (X, d) trở thành một không gian mêtric. Mêtric d này gọi là mêtric tầm thường hay mêtric rời rạc trên X.

1.2.4 Kí hiệu tập hợp các hàm số liên tục

$$f:[a, b]\to\mathbf{R}$$

là $C_{[a, b]}$. Với các hàm f, g thuộc $C_{[a, b]}$ ta đặt

$$d(f, g)=\max_{[a, b]}|f(x)-g(x)|$$

Vì f, g là các hàm liên tục trên $[a, b]$ nên hàm $|f-g|$ cũng vậy. Do đó giá trị lớn nhất của hàm $|f-g|$ đạt được trên khoảng đóng $[a, b]$ nên $d(f, g)$ được xác định. Tiên đề 2 rõ ràng. Ta có

$$d(f, g)=\max_{[a, b]}|f(x)-g(x)|\geq 0$$

$$d(f, g)=0\Leftrightarrow\forall x\in[a, b]: f(x)-g(x)=0$$

$$\Leftrightarrow f=g$$

Tiên đề 3 suy ra từ bất đẳng thức

$$\forall x \in [a,\ b] : |f(x) - h(x)| \le |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$$
$$\le \max_{[a,\ b]} |f(x) - g(x)| + \max_{[a,\ b]} |g(x) - h(x)|$$

nên

$$\max_{[a,\ b]} |f(x) - h(x)| \le \max_{[a,\ b]} |f(x) - g(x)| + \max_{[a,\ b]} |g(x) - h(x)|$$

hay $d(f,\ h) \le d(f,\ g) + d(g,\ h)$ với mọi $f,\ g,\ h \in C_{[a,\ b]}$.

Không gian mêtric này thường được kí hiệu gọn là $C_{[a,\ b]}$.

1.2.5 Cũng trên tập hợp $C_{[a,\ b]}$ ta đặt

$$d(f,\ g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Ở ví dụ này các tiên đề 2 và 3 dễ kiểm tra. Ta nghiệm lại tiên đề 1. Rõ ràng $d(f,\ g) \ge 0$. Nếu $d(f,\ g) = 0$ tức là

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx = 0.$$

Giả sử $f \ne g$ khi ấy có $x_0 \in [a,\ b]$ để $|f(x_0) - g(x_0)| > 0$. Theo tính chất của hàm số liên tục, tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $|f(x) - g(x)| \ge \epsilon > 0$ với mọi x thuộc đoạn $[\alpha,\ \beta]$ nào đó chứa trong $[a,\ b]$. Như vậy

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx \ge \int_\alpha^\beta |f(x) - g(x)| dx \ge$$
$$\ge \int_\alpha^\beta \epsilon dx = \epsilon(\beta - \alpha) > 0.$$

Điều này mâu thuẫn. Vậy $f = g$.

Không gian mêtric này được kí hiệu là $C_{[a,\ b]}^L$.

Nhận xét : Qua các ví dụ trên, ta thấy có thể cho nhiều mêtric khác nhau trên cùng một tập X (tất nhiên sẽ nhận được các không gian mêtric khác nhau). Tuỳ theo từng mục đích nghiên cứu, người ta sẽ chọn mêtric nào phù hợp với yêu cầu.

1.3 Một số tính chất đơn giản.

Giả sử (X, d) là một không gian mêtric.

1.3.1 Cho $x_1, \ldots, x_n$ là các điểm của X. Khi đó ta có *bất đẳng thức tam giác mở rộng :*

$$d(x_1, x_n) \le d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

Tính chất này được suy từ tiên đề 3 và lí luận quy nạp.

1.3.2 Với mọi x, y, u, v thuộc X ta có *bất đẳng thức tứ giác :*

$$|d(x, y) - d(u, v)| \le d(x, u) + d(y, v)$$

Thật vậy, áp dụng 1.3.1 ta có

$$d(x, y) \le d(x, u) + d(u, v) + d(v, y)$$

hay

$$d(x, y) - d(u, v) \le d(x, u) + d(y, v).$$

Thay đổi vai trò của x, y cho u, v ta lại được

$$d(u, v) - d(x, y) \le d(x, u) + d(y, v).$$

Như vậy có được điều phải chứng minh.

1.3.3 Cho A, B là hai tập con khác rỗng trong không gian mêtric X. Đặt

$$d(A, B) = \inf_{x \in A,\, y \in B} d(x, y)$$

và gọi số thực $d(A, B)$ này là *khoảng cách* giữa hai tập A và B. Nếu $A = \{a\}$ ta viết $d(A, B) = d(a, B)$ và gọi là khoảng cách từ điểm a đến tập B. Để ý rằng nếu $A \cap B \neq \emptyset$ thì $d(A, B) = 0$ nhưng điều ngược lại nói chung không đúng.

Với $x, y \in X$, ta có bất đẳng thức sau :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \le d(x, y).$$

Thật vậy, với mọi $z \in A$ ta có

$$d(x, A) \le d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z).$$

Do đó

$$d(x, A) \le d(x, y) + \inf_{z \in A} d(y, z) = d(x, y) + d(y, A).$$

Như thế

$$d(x, A)-d(y, A)\leq d(x, y).$$

Tương tự ta cũng có $d(y, A)-d(x, A)\leq d(x, y)$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

1.4 Không gian mêtric con, không gian mêtric tích.

1.4.1 Định nghĩa. Giả sử (X, d) là một không gian mêtric và Y là một tập con khác rỗng của X. Nếu xét thu hẹp d' của hàm d lên tập $Y\times Y$ (nghĩa là $d'=d|_{Y\times Y}$) thì hiển nhiên d' là một mêtric trên Y. Ta gọi d' là *mêtric cảm sinh* bởi d lên Y. Với mêtric cảm sinh này, (Y, d') được gọi là *không gian mêtric con* của không gian mêtric (X, d).

1.4.2 Định nghĩa. Giả sử (X, d_X) và (Y, d_Y) là hai không gian mêtric tuỳ ý. Trên tích Descartes $X\times Y=\{(x, y): x\in X, y\in Y\}$ ta đặt

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2))=d_X(x_1, x_2)+d_Y(y_1, y_2)$$

Dễ dàng kiểm tra để thấy rằng d là một mêtric trên tập $X\times Y$. Khi đó không gian $(X\times Y, d)$ được gọi là *tích* của các không gian mêtric X và Y.

1.5 Sự hội tụ trong không gian mêtric.

Các khái niệm hội tụ và giới hạn trong không gian mêtric X bất kì được định nghĩa một cách tương tự như trong tập $\mathbf{R}$ với việc thay $|x-y|$ bằng khoảng cách giữa hai phần tử $d(x, y)$. Một dãy trong không gian mêtric (X, d) là một ánh xạ

$$x:\mathbf{N}\to X,\ n\to x(n).$$

Ta cũng dùng kí hiệu quen thuộc là dãy $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ hay $(x_n)_n$. Giả sử $(k_n)_n$ là một dãy tăng thực sự các số nguyên dương. Khi đó dãy $(x_{k_n})_n$ được gọi là một *dãy con* của dãy $(x_n)_n$.

1.5.1 Định nghĩa. Giả sử X là một không gian mêtric và $(x_n)_n$ là một dãy trong X. Ta nói dãy $(x_n)_n$ *hội tụ* đến $x\in X$ nếu khoảng cách giữa x_n và x dần đến 0 khi $n \to \infty$. Lúc đó x được gọi là giới hạn của dãy x_n và ta sẽ kí hiệu

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

hay $x_n \to x$, $n \to \infty$. Diễn tả lại, ta có

$$(\lim_{n\to\infty} x_n = x) \Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0)$$

$$\Leftrightarrow \big((\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbf{N}) : (\forall n \geq n_0) d(x_n, x) < \epsilon\big).$$

1.5.2 Các tính chất.

Cho $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ là các dãy trong không gian mêtric X. Ta có

a) Nếu dãy $(x_n)_n$ hội tụ đến $x \in X$ thì mọi dãy con $(x_{k_n})_n$ của dãy $(x_n)_n$ cũng hội tụ đến x.

b) Giới hạn của một dãy hội tụ là duy nhất.

c) Nếu $x_n \to x$ và $y_n \to y$ thì $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$ khi $n \to \infty$

Chứng minh.

a) Giả sử $(k_n)_n$ là dãy tăng thực sự các số nguyên. Cho $\epsilon > 0$, tồn tại số nguyên n_0 sao cho $d(x_n, x) < \epsilon$ khi $n \geq n_0$. Từ đó với mọi $n \geq k_{n_n} \geq n_0$ ta có $k_n \geq n \geq n_0$ nên $d(x_{k_n}, x) < \epsilon$ nghĩa là dãy con $x_{k_n} \to x$ khi $n \to \infty$

b) Giả sử $x_n \to x$ và $x_n \to x'$. Khi đó từ bất đẳng thức tam giác, ta có

$$d(x, x') \leq d(x_n, x) + d(x_n, x').$$

Cho $n \to \infty$ thì

$$0 \leq d(x, x') \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, x) + \lim_{n\to\infty} d(x_n, x') = 0$$

Vậy $d(x, x') = 0$ hay $x = x'$.

c) Theo bất đẳng thức tứ giác (1.3.2) ta có

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y_n, y), \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Qua giới hạn khi $n \to \infty$ ta nhận được kết quả. ∎

1.5.3 Các ví dụ.

1. Hội tụ trong $\mathbf{R}^k$. Giả sử $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là một dãy trong $\mathbf{R}^k$ với mêtric thông thường. Ta có

$$x_1 = (x_1^1, ..., x_1^k),$$
$$x_2 = (x_2^1, ..., x_2^k),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = (x_n^1, ..., x_n^k)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Như vậy cho một dãy trong $\mathbf{R}^k$ tương đương với việc cho k dãy số thực thành phần.

Theo định nghĩa, dãy $(x_n)_n$ hội tụ về $x_0 = (x_0^1, ..., x_0^k) \in \mathbf{R}^k$ khi và chỉ khi $d(x_n, x_0) \to 0$ khi $n \to \infty$. Điều này tương đương với

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{k} |x_n^i - x_0^i|^2} \to 0 \Leftrightarrow |x_n^i - x_0^i|^2 \to 0, \text{ với mọi } i = 1, ..., k$$

$$\Leftrightarrow |x_n^i - x_0^i| \to 0 \text{ hay } x_n^i \to x_0^i, \text{ với mọi } i = 1, ..., k,$$

khi $n \to \infty$.

Vậy sự hội tụ của một dãy trong $\mathbf{R}^k$ chính là sự hội tụ theo toạ độ (hay thành phần) của dãy. Đặc biệt với $k = 1$ thì đây chính là sự hội tụ của một dãy số thực thông thường.

2. Hội tụ trong $C_{[a,b]}$.

Giả sử $(x_n)_n$ là một dãy (tức là dãy hàm) trong không gian $C_{[a,b]}$ hội tụ đến điểm $x \in C_{[a,b]}$.

Theo định nghĩa ta có

$$d(x_n, x) = \max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x(t)| \to 0 \ (n \to \infty).$$

Diễn tả chi tiết của định nghĩa này là :

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall t \in [a, b]) : |x_n(t) - x(t)| < \epsilon.$$

Như vậy sự hội tụ trong không gian $C_{[a,b]}$ chính là sự hội tụ đều của một dãy hàm trên tập $[a, b]$ trong giải tích cổ điển.

3. Trong $C^L_{[a,b]}$ sự hội tụ của một dãy $(x_n)_n$ đến điểm x nghĩa là

$$d(x_n, x) = \int_a^b |x_n(t) - x(t)| dt \to 0, \ (n \to \infty).$$

Sự hội tụ này còn được gọi là sự hội tụ "trung bình" của dãy hàm $(x_n)_n$.

Nhận xét : Theo định lí qua giới hạn dưới dấu tích phân của một dãy hàm liên tục, ta thấy rằng nếu $(x_n(t))_n$ hội tụ đều đến $x(t)$ thì $(x_n(t))_n$ hội tụ trung bình đến $x(t)$ nhưng điều ngược lại nói chung không đúng. Có thể coi sự "gần nhau" giữa các hàm trong tập $C_{[a,b]}$ theo mêtric "max" chặt chẽ hơn mêtric "$\int_a^b$".

BÀI TẬP

1.1. Kiểm tra các tập và các hàm sau đây lập thành không gian mêtric.

a) $X = \mathbf{R}^k$, $d(x, y) = \max\{|x^i - y^i|, \ i = 1, \dots, k\}$.

b) $X = \mathbf{R}^k$, $d(x, y) = \sum_{i=1}^{k} |x^i - y^i|$

trong đó $x = (x^1, \dots, x^k)$, $y = (y^1, \dots, y^k) \in \mathbf{R}^k$.

c) $X = M_{[a,b]} = \{f : [a, b] \to \mathbf{R}, f$ bị chặn trong $[a, b]\}$,

$$d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

d) $X = C^1_{[a,b]}$ là tập các hàm khả vi liên tục trên $[a, b]$,

$$d(f, g) = \max_{x \in [a,b]} |f'(x) - g'(x)| + |f(a) - g(a)|.$$

1.2. Giả sử $d(x, y)$ là một mêtric trên tập X. Chứng minh các hàm sau đây cũng là những mêtric trên X.

a) $d_1(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$,

b) $d_2(x, y) = \min(1, d(x, y))$,

c) $d_3(x, y) = \ln(1 + d(x, y))$

1.3. Cho $(x_n)_n$ là một dãy trong không gian mêtric X. Chứng minh rằng nếu ba dãy con $(x_{2n})_n$, $(x_{2n+1})_n$, $(x_{3n})_n$ đều hội tụ thì dãy $(x_n)_n$ cũng hội tụ.

1.4. Trong không gian $C_{[0, 1]}$ khảo sát sự hội tụ của các dãy $(x_n)_n$ được cho sau đây.

a) $x_n(t) = t^n$,

b) $x_n(t) = \dfrac{\sin nt}{n}$,

c) $x_n(t) = t^n(1 - t^n)$.

§ 2. TẬP MỞ VÀ TẬP ĐÓNG

2.1 Các định nghĩa. Cho X là một không gian mêtric.

2.1.1 Lân cận : Cho a là một điểm của không gian X và r là một số dương.

a) Ta gọi *hình cầu mở* tâm a bán kính $r > 0$ trong X và kí hiệu $B(a, r)$ là tập $\{x \in X : d(x, a) < r\}$. Hình cầu mở $B(a, r)$ cũng còn được gọi là một $r -$ *lân cận* của điểm a.

b) Tập $U \subset X$ được gọi là một *lân cận* của điểm $a \in X$ nếu U có chứa một $r -$ lân cận nào đó của a. Ta kí hiệu tập tất cả các lân cận của điểm a là $\mathcal{N}(a)$. Như vậy

$$\left(U \in \mathcal{N}(a)\right) \Leftrightarrow \left(\exists r > 0 : B(a, r) \subset U\right)$$

Từ định nghĩa ta thấy rằng các $r-$ lân cận của a cũng là lân cận của điểm này.

2.1.2 Vị trí tương đối của một điểm đối với một tập.

Cho A là một tập con của X và $x \in X$. Có ba vị trí tương đối của x đối với tập A như sau :

a) Có một lân cận của điểm x được chứa trong A. Khi ấy x được gọi là một *điểm trong* của A.

b) Có một lân cận của x nằm hoàn toàn ngoài tập A, tức là tồn tại $U \in \mathcal{N}(x)$ sao cho $U \subset A^c = X \setminus A$ hay $U \cap A = \emptyset$. Lúc này x được gọi là *điểm ngoài* của tập A. Từ định nghĩa ta thấy x lại là điểm trong của phần bù A^c của A.

c) Bất cứ lân cận nào của x cũng có chứa những điểm của A và những điểm của A^c tức là

$$\forall U \in \mathcal{N}(x) : U \cap A \neq \emptyset \text{ và } U \cap A^c \neq \emptyset.$$

Khi ấy x được gọi là *điểm biên* của A. Theo định nghĩa, rõ ràng x cũng đồng thời là điểm biên của tập A^c.

Nhận xét : Điểm trong của tập A thì phải thuộc A, điểm ngoài của A thì không thuộc A còn điểm biên của A thì có thể thuộc nó hoặc không.

2.2 Tập mở và tập đóng.

2.2.1 Tập mở. Tập $A \subset X$ được gọi là một *tập mở* nếu A không chứa một điểm biên nào cả.

Như vậy các điểm của tập mở A chỉ là những điểm trong mà thôi. Ta viết lại định nghĩa bằng các mệnh đề tương đương sau đây :

i. $(A \text{ mở}) \Leftrightarrow (\forall x \in A : x \text{ là điểm trong của A})$.

ii. $(A \text{ mở}) \Leftrightarrow \left(\forall x \in A, \exists r > 0 : B(x, r) \subset A\right)$.

iii. $(A \text{ mở}) \Leftrightarrow \left(\forall x \in A, \exists U \in \mathcal{N}(x) : U \subset A\right)$.

Nhận xét.

1. Để ý rằng các tập X và tập $\emptyset$ không có điểm biên nào cả nên theo định nghĩa các tập này là tập mở.

2. Trong thực hành ta thường dùng mệnh đề ii) để kiểm tra một tập nào đó là mở.

2.2.2 Tập đóng. Tập $F \subset X$ được gọi là *tập đóng* nếu F chứa tất cả các điểm biên của nó.

Nhận xét.

1. Từ các định nghĩa trên ta suy ra được

$$(A \text{ đóng}) \Leftrightarrow (A^c = X \setminus A \text{ là tập mở})$$

Thật vậy, ta có $A \cap A^c = \emptyset$ và tập hợp tất cả các điểm biên của A và A^c trùng nhau nên nếu A chứa tất cả điểm biên của nó thì A^c không chứa điểm biên nào của nó cả và ngược lại.

b) Các tập $\emptyset$ và X cũng là các tập đóng. Thật vậy, vì theo a), các tập $X^c = \emptyset$ và $\emptyset^c = X$ là các tập mở.

2.2.3 Ví dụ.

1. Trong không gian mêtric tuỳ ý mọi hình cầu mở đều là tập mở.

Chứng minh. Giả sử $B(a, r)$ là hình cầu mở tâm a bán kính r trong X. Khi đó với mọi $x \in B(a, r)$ ta có $d(x, a) < r$. Đặt $\epsilon = r - d(x, y) > 0$. Xét hình cầu mở $B(x, \epsilon)$. Ta chứng minh $B(x, \epsilon) \subset B(a, r)$. Nếu $y \in B(x, \epsilon)$ thì $d(x, y) < \epsilon$. Khi đó

$$d(y, a) \leq d(x, y) + d(x, a) < \epsilon + d(x, a) = r$$

nên $y \in B(a, r)$. Vậy $B(a, r)$ là tập mở. ∎

2. Kí hiệu $B'(a, r)$ là tập hợp $\{x \in X : d(x, a) \leq r\}$ với r là số dương và gọi nó là *hình cầu đóng*. Ta có $B'(a, r)$ là tập đóng vì bằng lí luận tương tự ví dụ 1 ta thấy $X \setminus B'(a, r)$ là tập mở.

3. Tập một điểm $\{a\}$ trong bất kì không gian mêtric nào cũng là tập đóng vì tập các điểm biên của nó là $\emptyset$ hoặc chính nó.

4. Giả sử a, b là hai số thực. Các tập (a, b), $(a, +\infty)$ là mở ; các tập $[a, b]$, $[a, +\infty)$ là đóng trong $\mathbf{R}$.

Lưu ý. Trong một không gian mêtric tuỳ ý X, ta có

1. $(A$ mở$) \Leftrightarrow (A^c$ đóng$)$.

2. Có thể có những tập không mở mà cũng không đóng, ví dụ tập $(0, 1] \subset \mathbf{R}$.

3. Có những tập vừa mở, vừa đóng (chẳng hạn, các tập $\emptyset$, X).

2.3 Các tính chất của tập mở và tập đóng.

2.3.1 Định lí. *Trong một không gian mêtric bất kì X, ta có :*

a) Hợp một họ tuỳ ý các tập mở là tập mở.

b) Giao một họ hữu hạn các tập mở là tập mở.

Chứng minh.

a) Giả sử $(A_i)_{i\in I}$ là một họ các tập mở. Đặt $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. Nếu $x \in A$ thì tồn tại $i_0 \in I$ để $x \in A_{i_0}$. Vì A_{i_0} mở nên có số dương r sao cho $B(x, r) \subset A_{i_0}$. Khi đó $B(x, r) \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i = A$. Vậy A là tập mở.

b) Nếu $A_1, \ldots, A_n$ là các tập mở ta đặt $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Với $x \in A$ ta có $x \in A_i$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Mỗi A_i là tập mở nên tồn tại các số dương r_i sao cho $B(x, r_i) \subset A_i$. Đặt $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\} > 0$, khi đó $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset A_i$ với mọi $i = 1, \ldots, n$. Do đó $B(x, r) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Theo định nghĩa, A là tập mở. ∎

2.3.2 Định lí. *Trong một không gian mêtric bất kì ta có :*

a) Hợp một họ hữu hạn các tập đóng là tập đóng.

b) Giao một họ tuỳ ý các tập đóng là tập đóng.

Chứng minh.

a) Giả sử $F_1, F_2, \ldots, F_n$ là các tập đóng. Khi đó các tập $F_1^c, \ldots, F_n^c$ là mở. Theo công thức De Morgan $(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i)^c = \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i^c$. Áp dụng Định lí 2.3.1 ta suy được $(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i)^c$ là tập mở nên $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i = ((\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i)^c)^c$ là tập đóng.

b) Chứng minh tương tự a). ∎

Chú ý : Giao một họ vô hạn các tập mở nói chung chưa chắc là một tập mở. Chẳng hạn, ta xét họ $G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ các khoảng mở trong **R**. Khi ấy $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$ lại là không mở $(\{0\}$ là tập đóng$)$. Tương tự, hợp một họ bất kì các tập đóng chưa chắc là tập đóng. (Lấy ví dụ, chẳng hạn xét họ $F_n = G_n^c = (-\infty, -1/n] \cup [1/n, +\infty)$.)

2.4 Điểm tụ, điểm dính.

2.4.1 Định nghĩa. Cho A là tập con của X. Điểm $x \in X$ được gọi là *điểm tụ* của tập A nếu bất kì lân cận nào của x đều có chứa một điểm của A khác với x.

Điểm $x \in A$ được gọi là *điểm dính* của tập $A \subset X$ nếu bất kì lân cận nào của x đều có chứa một điểm của A.

2.4.2 Ví dụ.

1. Trong **R** cho tập $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\right\}$. Khi ấy A có điểm tụ duy nhất là điểm 0. Mọi điểm thuộc A đều là điểm dính của nó nhưng không phải là điểm tụ của A.

2. Mọi điểm của tập $B = (0, 1]$ đều là điểm tụ của B.

2.4.3 Định lí. *Điểm $x \in X$ là điểm tụ của tập A nếu và chỉ nếu bất kì lân cận nào của x đều có chứa vô số điểm của tập A.*

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên. Ta chứng minh điều kiện cần. Giả sử bất kì lân cận của x đều có chứa một điểm khác với x. Cho U là một lân cận của x, ta chứng minh trong U có chứa vô số các phần tử của A. Theo định nghĩa của lân cận, tồn tại số dương r_1 sao cho $B(x, r_1) \subset U$. Gọi $x_1 \in A \cap B(x_1, r_1)$; $x_1 \neq x$. Lấy số dương $r_2 < \min\{d(x, x_1), 1/2\}$. Xét hình cầu mở $B(x, r_2)$. Chọn $x_2 \in A \cap B(x, r_2)$, $x_2 \neq x$. Hiển nhiên $x_2 \neq x_1$. Bằng quy nạp, lấy số dương $r_n < \min\{d(x, x_{n-1}), 1/n\}$ và chọn được $x_n \in A \cap B(x, r_n)$, $x_n \neq x$ với mọi $n \in N$. Ta thấy rằng với $n \neq n'$ thì $x_n \neq x_{n'}$. Như thế trong U có chứa vô số phần tử x_n của A. Vậy theo định nghĩa, x là điểm tụ của tập A. ∎

2.4.4 Nhận xét.

1. Điểm tụ hoặc điểm dính của tập hợp A thì không nhất thiết phải thuộc A.

2. Nếu x là điểm tụ của tập A thì x là điểm dính của A. Ngược lại nói chung không đúng.

3. Từ chứng minh định lí trên, ta thấy x là điểm tụ của A khi và chỉ khi tồn tại một dãy $(x_n)_n$ của A với $x_n \neq x_{n'}$ (khi $n \neq n'$) hội tụ về x.

4. x là điểm dính của A khi và chỉ khi tồn tại một dãy $(x_n)_n \subset A$ (các phần tử của dãy không cần phân biệt) hội tụ về x.

2.4.5 Định lí. *Tập A là đóng khi và chỉ khi A chứa mọi điểm tụ (t.ư., điểm dính) của nó.*

Chứng minh. Giả sử A là tập đóng và x là điểm tụ (t.ư., điểm dính) của A. Khi đó x chỉ có thể là điểm trong hay điểm biên của A nên phải thuộc A. Ngược lại, nếu $x \notin A$, theo giả thiết x không phải là điểm tụ (t.ư., điểm dính) của A nên phải có $r > 0$ sao cho $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Như vậy A^c là tập mở hay A là tập đóng. ∎

Hệ quả sau đây được dùng thường xuyên để kiểm tra một tập hợp nào đó là đóng.

2.4.6 Hệ quả. *Tập A là đóng khi và chỉ khi với bất kì dãy $(x_n)_n \subset A$, nếu $x_n \to x$ thì x phải thuộc A.*

Chứng minh. Suy trực tiếp từ Định lí 2.4.5 và Nhận xét 2.4.4. ∎

2.5 Phần trong và bao đóng của một tập.

2.5.1 Định nghĩa. Cho A là một tập con của không gian mêtric X. Để ý rằng luôn luôn có một tập mở chứa trong A, chẳng hạn tập $\emptyset$ và có một tập đóng chứa A, chẳng hạn $X \supset A$.

a) Hợp của tất cả các tập mở chứa trong A được gọi là phần trong của A, kí hiệu $\overset{\circ}{A}$ hay $\operatorname{int} A$.

b) Giao của tất cả các tập đóng chứa A được gọi là bao đóng của A, kí hiệu $\overline{A}$ hay $\operatorname{cl} A$.

Từ định nghĩa ta có :

2.5.2 Định lí. *Cho $A \subset X$. Ta có các mệnh đề sau đây :*

1) $\mathring{A}$ là tập mở lớn nhất được chứa trong A, nghĩa là nếu $G \subset A$ là một tập mở thì $G \subset \mathring{A}$.

2) A là tập mở khi và chỉ khi $A = \mathring{A}$.

3) Phần trong $\mathring{A}$ của tập A là hợp tất cả các điểm trong của A.

Chứng minh. Để ý rằng hợp một họ tuỳ ý các tập mở là mở nên từ định nghĩa, ta có ngay Mệnh đề 1. Nếu $A = \mathring{A}$ thì đương nhiên A là tập mở vì $\mathring{A}$ mở. Ngược lại, nếu A mở thì từ $\mathring{A} \subset A$ và $\mathring{A}$ là tập mở lớn nhất chứa trong A nên $A \subset \mathring{A}$. Vậy Mệnh đề 2 được chứng minh.

Tiếp theo, giả sử $x \in \mathring{A}$. Vì $\mathring{A}$ là tập mở nên nó là một lân cận của x. Như thế x là một điểm trong của A. Mặt khác, nếu x là một điểm trong của A thì có $r > 0$ để hình cầu mở $B(x, r) \subset A$. Theo Mệnh đề 1, ta có $x \in B(x, r) \subset \mathring{A}$. ∎

Đối với bao đóng, ta có các mệnh đề sau :

2.5.2' Định lí.

1) Bao đóng $\overline{A}$ là tập đóng bé nhất chứa tập A, nghĩa là nếu F là tập đóng và $F \supset A$ thì $\overline{A} \subset F$.

2) A là tập đóng khi và chỉ khi $A = \overline{A}$.

3) Bao đóng $\overline{A}$ của tập A bằng hợp của A và tập tất cả các điểm biên của A.

Chứng minh. Các Mệnh đề 1, 2 được suy luận tương tự như các Mệnh đề 1, 2 trong Định lí 2.5.2. Kí hiệu ∂A là tập tất cả các điểm biên của A. Bây giờ ta chứng minh $\overline{A} = A \cup \partial A$. Giả sử $x \notin \overline{A}$. Vì $\overline{A}$ đóng nên tồn tại $r > 0$ để $B(x, r) \cap \overline{A} = \emptyset$ hay $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Vậy $x \notin A \cup \partial A$. Ngược lại, nếu $x \notin A \cup \partial A$ thì x là một điểm ngoài của A nên tồn tại số dương r sao cho $B(x, r) \cap A = \emptyset$. Như thế $x \notin X \setminus B(x, r) \supset A$ hay $x \notin \overline{A}$. ∎

2.5.3 Hệ quả. *Cho A là một tập con của X. Ta có*

1) $\overline{A}$ là tập hợp tất cả các điểm dính của A. Như vậy $x \in A$ khi và chỉ khi tồn tại một dãy $(x_n)_n \subset A$ sao cho $x_n \to A$.

2) $\overline{A}$ bằng hợp của A và tập tất cả các điểm tụ của A.

2.5.4 Ví dụ.

1. Cho $a \le b$ là hai số thực. Đặt $A = (a,\, b]$. Khi đó

$$\mathring{A} = (a,\, b),\ \overline{A} = [a,\, b].\ \mathring{\overline{A}} = (a,\, b).$$

2. Bao đóng tập các số hữu tỉ $\mathbf{Q}$ trong $\mathbf{R}$ chính là tập $\mathbf{R}$.

3. Trong không gian mêtric X tuỳ ý, ta luôn luôn có $\overline{B(a,\, r)} \subset B'(a,\, r)$.

2.6 Tập hợp trù mật – Không gian khả li.

2.6.1 Định nghĩa. Giả sử A, B là hai tập con trong không gian mêtric X. Ta nói tập A *trù mật trong B nếu $B \subset \overline{A}$.* Nếu $A \subset X$ và $\overline{A} = X$ thì ta nói tập A *trù mật khắp nơi.*

2.6.2 Nhận xét.

1. Theo định nghĩa A trù mật trong B khi và chỉ khi mọi điểm của B là điểm dính của tập A. Nói một cách tương đương, với mọi $x \in B$ tồn tại một dãy $(x_n)_n \subset A$ sao cho $x_n \to x$.

2. Giả sử A trù mật trong B và B trù mật trong C. Khi ấy A cũng trù mật trong C.

Thật vậy, do $C \subset \overline{B}$ và $B \subset \overline{A}$ nên $C \subset \overline{B} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Ví dụ.

1. Trong $\mathbf{R}$, tập số hữu tỉ $\mathbf{Q}$ trù mật khắp nơi.

2. Tập hợp các đa thức xác định trên $[a,\, b]$ trù mật trong không gian $C_{[a,\, b]}$ (xem Định lí Weierstrass 5.6.1.)

2.6.3 Định nghĩa. Không gian mêtric X được gọi là *khả li* nếu tồn tại một tập hữu hạn hay đếm được $A \subset X$ trù mật khắp nơi.

Các không gian khả li có vai trò quan trọng. Nhiều lúc chỉ cần nắm thông tin trên một tập con "khá nhỏ" là ta có thể đánh giá, am hiểu các đối tượng xác định trên toàn bộ không gian.

Để ý rằng tập $\mathbf{Q}^k = \underbrace{\mathbf{Q}\times\ldots\times\mathbf{Q}}_{k \text{ lần}}$, (trong đó $\mathbf{Q}$ là tập số hữu tỉ) đếm được và trù mật khắp nơi trong $\mathbf{R}^k$, $k=1, 2\cdots$ Như vậy $\mathbf{R}^k$ là một ví dụ về không gian mêtric khả li.

2.7 Tập mở và tập đóng trên đường thẳng thực.

Theo định nghĩa, ta thấy mỗi tập mở trong không gian mêtric tuỳ ý có thể biểu diễn thành hợp của một họ các hình cầu mở. Đặc biệt tập mở trong $\mathbf{R}$ có cấu trúc cụ thể hơn như định lí sau :

2.7.1 Định lí. *Mỗi tập mở trong* $\mathbf{R}$ *bằng hợp một số hữu hạn hay đếm được các khoảng mở không giao nhau.*

Chứng minh. Giả sử G là một tập mở trong $\mathbf{R}$. Với $x \in G$ tồn tại $r>0$ sao cho $B(x, r)=(x-r, x+r)\subset G$. Kí hiệu Δ_x là hợp tất cả các khoảng mở chứa trong G và có chứa x. Ta chứng minh Δ_x cũng là một khoảng mở. Thật vậy, đặt $p=\inf\Delta_x$, $q=\sup\Delta_x$, (p, q có thể bằng $-\infty$, $+\infty$). Với mọi $y\in\Delta_x$ thì $p<y<q$ vì trước hết rõ ràng ta có $p\le y\le q$. Nếu $y=p$ thì có một khoảng mở chứa x và chứa cả p nên mâu thuẫn với $p=\inf\Delta_x$. Tương tự y không thể bằng q. Vậy $\Delta_x\subset(p, q)$. Ngược lại nếu $y\in(p, q)$, giả sử $p<y<x$. Theo định nghĩa của infimum, tồn tại $t\in\Delta_x : p<t\le y<x$. Do đó có một khoảng mở chứa x và chứa luôn cả t. Vì thế y thuộc khoảng mở này tức là $y\in\Delta_x$. Vậy $\Delta_x=(p, q)$.

Bây giờ ta xét tất cả các khoảng Δ_x ứng với các điểm $x\in G$. Hiển nhiên $G=\bigcup_{x\in G}\Delta_x$. Nhận xét rằng nếu $z\in\Delta_x$ thì $\Delta_x\subset\Delta_z$ (vì Δ_z là khoảng mở lớn nhất chứa x) nhưng lúc đó $x\in\Delta_z$ nên $\Delta_z\subset\Delta_x$ tức là $\Delta_x=\Delta_z$. Cho nên với hai khoảng mở Δ_x và Δ_y thì hoặc $\Delta_x\cap\Delta_y=\emptyset$ hoặc $\Delta_x=\Delta_y$ (vì nếu có $z\in\Delta_x\cap\Delta_y$ thì $\Delta_x=\Delta_z=\Delta_y$).

Vậy G bằng hợp của những khoảng mở rời nhau. Trong mỗi khoảng mở đó ta chọn một số hữu tỉ. Vì tập các số hữu tỉ đếm được nên số các khoảng mở lập thành G là hữu hạn hay đếm được. Định lí được chứng minh xong. ∎

Do mỗi tập đóng là phần bù của tập mở nên ta có :

2.7.2 Hệ quả. *Mỗi tập đóng trên* $\mathbf{R}$ *là phần còn lại sau khi rút khỏi* $\mathbf{R}$ *một số hữu hạn hay đếm được các khoảng mở rời nhau.*

Các khoảng mở này được gọi là các khoảng kề của tập đóng đó.

2.8 Tập mở và tập đóng trong không gian con.

Giả sử X là một không gian mêtric, Y là không gian con của X và A là một tập con của Y. Để ý rằng, nếu A là một tập mở (hay đóng) trong Y thì chưa chắc A là mở (hay đóng) trong X. Tuy nhiên ta có :

2.8.1 Định lí. *Điều kiện cần và đủ để tập* A *mở trong không gian con* Y *là tồn tại tập mở* G *trong* X *sao cho* $A = G \cap Y$.

Chứng minh. Kí hiệu $B_X(a, r)$, $B_Y(a, r)$ lần lượt là các hình cầu mở trong X và Y tương ứng. Nếu $a \in Y$ thì $B_Y(a, r) = \{y \in Y : d(a, y) < r\}$ $= Y \cap B_X(a, r)$. Giả sử A là tập mở trong Y, khi đó với mọi $x \in A$ tồn tại $r_x > 0$ sao cho $B_Y(x, r_x) \subset Y$. Đặt $G = \bigcup_{x \in A} B_X(x, r_x)$, tức là G bằng hợp của một họ các tập mở (trong X) nên nó là tập mở trong X. Hơn nữa,

$$A = \bigcup_{x \in A} B_Y(x, r_x) = \bigcup_{x \in A} \left(B_X(x, r_x) \cap Y\right)$$
$$= Y \cap \left(\bigcup_{x \in A} B_X(x, r_x)\right) = Y \cap G.$$

Ngược lại, cho $A = G \cap Y$ với G là tập mở trong X. Nếu $x \in G \cap Y$ thì do G mở nên tồn tại $r > 0$ sao cho $B_X(x, r) \subset G$. Thành ra $B_Y(x, r) = B_X(x, r) \cap Y \subset G \cap Y = A$ hay A mở trong Y. ∎

2.8.2 Định lí. *Điều kiện cần và đủ để tập* A *đóng trong* Y *là tồn tại một tập đóng* F *trong* X *sao cho* $A = Y \cap F$.

Chứng minh. Tập A đóng trong Y khi và chỉ khi $Y \setminus A$ là mở trong Y. Theo Định lí 2.8.1, tồn tại tập mở G trong X sao cho $Y \setminus A = G \cap Y$. Khi đó

$$A = Y \cap (X \setminus G) = Y \cap F$$

với $F = X \setminus G$ là tập đóng. ∎

Từ các định lí trên ta dễ dàng suy ra hệ quả sau.

2.8.3 Hệ quả. *Để mọi tập con* $A \subset Y$ *mở (t.ư., đóng) trong* Y *cũng là mở (t.ư., đóng) trong* X, *điều kiện cần và đủ là* Y *là tập mở (t.ư., đóng) trong* X.

BÀI TẬP

2.1. Giả sử X là không gian mêtric, $A \subset X$ và $x \in X$.

a) Chứng minh rằng x là điểm dính của A khi và chỉ khi $d(x, A) = 0$. Suy ra

$$(A \text{ đóng}) \Leftrightarrow (d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A).$$

b) Cho $\epsilon > 0$. Chứng minh

$$\{x \in X : d(x, A) < \epsilon\} \text{ là tập mở,}$$

$$\{x \in X : d(x, A) \leq \epsilon\} \text{ là tập đóng.}$$

2.2. Cho F_1, F_2 là hai tập đóng trong không gian mêtric X sao cho $F_1 \cap F_2 = \phi$.

a) Chứng minh tập $G = \{x \in X : d(x, F_1) < d(x, F_2)\}$ là tập mở, đồng thời $F_1 \subset G$, $\bar{G} \cap F_2 = \phi$.

b) Từ a) suy ra có các tập mở G_1, G_2 sao cho $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ và $G_1 \cap G_2 = \phi$.

2.3. Một tập A trong không gian mêtric X được gọi là một tập kiểu G_δ (t.ư., F_σ) nếu A bằng giao (t.ư., hợp) của một họ đếm được các tập mở (t.ư., đóng).

Chứng minh rằng trong không gian mêtric X mỗi tập đóng là tập kiểu G_δ và tập mở là kiểu F_σ.

2.4. Giả sử A, B là các tập con của không gian mêtric X. Chứng minh

a) $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$, $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

b) Nếu $A \subset B$ thì $\mathring{A} \subset \mathring{B}$, $\bar{A} \subset \bar{B}$.

c) $\operatorname{int}(A \cap B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$, $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

d) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

2.5. Cho A là một tập mở chứa trong không gian mêtric X. Chứng minh rằng nếu A là tập hợp trù mật khắp nơi thì $A^c = X \setminus A$ là một tập không đâu trù mật.

2.6. a) Cho A là một tập mở trong không gian mêtric X. Hãy chứng tỏ rằng với mọi tập $B \subset X$ ta luôn luôn có

$$A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$$

b) Tìm ví dụ về các tập mở A, B trên $\mathbf{R}$ sao cho 4 tập $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A} \cap \overline{B}$ và $\overline{A \cap B}$ đều khác nhau.

2.7. Trên $\mathbf{R}$ hãy tìm một dãy các tập đóng, khác trống (F_n) sao cho $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ nhưng $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$.

2.8. Chứng minh rằng mọi không gian con của không gian mêtric khả li là khả li.

§ 3. ÁNH XẠ LIÊN TỤC

3.1 Định nghĩa và các tính chất chung.

Cho hai không gian mêtric (X, d_1) và (Y, d_2). Nếu không sợ nhầm lẫn, ta dùng kí hiệu d để chỉ cả d_1 lẫn d_2. Giả sử f là một ánh xạ từ X vào Y và x_0 là một điểm của X.

3.1.1 Định nghĩa.

1) Ánh xạ f được gọi là *liên tục* tại x_0 nếu mọi $\epsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ với mọi $x \in X$ mà $d(x, x_0) < \delta$.

Định nghĩa này thường gọi là định nghĩa về tính liên tục bằng ngôn ngữ ϵ, δ.

2) Ánh xạ f được gọi là *liên tục trên* $A \subset X$ nếu f liên tục tại mọi điểm $x \in A$.

Một tiêu chuẩn tương đương với định nghĩa trên thường dùng để khảo sát tính liên tục một cách có hiệu quả, cho bởi định lí sau :

3.1.2 Định lí. (Tiêu chuẩn qua dãy) *Ánh xạ* f *liên tục tại* $x_0 \in X$ *khi và chỉ khi với mọi dãy* $(x_n)_n \subset X$, *nếu* $x_n \to x_0$ *thì* $f(x_n) \to f(x_0)$.

Chứng minh. Giả sử f liên tục tại x_0 và $(x_n)_n$ là một dãy trong X sao cho $x_n \to x_0$. Ta hãy chứng minh $f(x_n) \to f(x_0)$ trong Y. Cho $\epsilon > 0$, vì f liên tục tại x_0 nên có $\delta > 0$ để

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon \text{ khi } d(x, x_0) < \delta,\ x \in X.$$

Vì $x_n \to x_0$ nên với $\delta > 0$ ở trên, tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ để $d(x_n, x_0) < \delta$ khi $n \geq n_0$. Nhưng lúc đó theo trên thì $d(f(x_n), f(x_0)) < \epsilon$. Vậy $f(x_n) \to f(x_0)$.

Ngược lại, ta dùng phản chứng. Giả sử f không liên tục tại x_0. Khi ấy tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mọi $\delta > 0$ tồn tại $x \in X : d(x, x_0) < \delta$ và $d(f(x), f(x_0)) \geq \epsilon$. Lấy δ lần lượt bằng 1, $\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ thì sẽ có $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ thuộc X thoả mãn $d(x_n, x_0) < \frac{1}{n}$ nhưng $d(f(x_n), f(x_0)) \geq \epsilon$. Như vậy ta đã chỉ ra một dãy $(x_n)_n \subset X$, $x_n \to x_0$ nhưng $f(x_n) \not\to f(x_0)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Định lí được chứng minh. ∎

Khái niệm giới hạn theo tập của một ánh xạ trong không gian mêtric có thể định nghĩa trực tiếp hoặc thông qua ánh xạ liên tục như sau đây.

3.1.3 Định nghĩa. Cho A là tập con của không gian mêtric X và f là một ánh xạ từ A vào không gian mêtric Y, x_0 là một điểm tụ của A. Ta nói f có giới hạn $l \in Y$ khi x dần đến x_0 và kí hiệu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ nếu ánh xạ $F : A \cup \{x_0\} \to Y$ xác định bởi :

$$x \to F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \setminus \{x_0\} \\ l, & x = x_0, \end{cases}$$

liên tục tại điểm x_0.

Có thể diễn tả lại định nghĩa trên như sau :

$$(\lim_{x \to x_0} f(x) = l) \Leftrightarrow ((\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\forall x \in A),$$

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), l) < \epsilon)$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(\forall (x_n)_n \subset A \setminus \{x_0\}\right), x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to l\right)\right).$$

3.1.4 Định lí. *Cho X, Y là hai không gian mêtric và $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Các mệnh đề sau đây là tương đương :*

a) f liên tục trên X.

b) Với mọi tập mở $G \subset Y$ thì tập $f^{-1}(G)$ là mở trong X.

c) Với mọi tập đóng $F \subset Y$ thì tập $f^{-1}(F)$ là đóng trong X.

Chứng minh.

a) $\Rightarrow$ b). Giả sử $x \in f^{-1}(G)$, khi đó $f(x) \in G$. Vì G mở trong Y nên tồn tại $\epsilon > 0$ để $B_Y(f(x), \epsilon) \subset G$. Do f liên tục tại x nên với ϵ này thì tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\forall x' \in X$, $d(x', x) < \delta$ thì $d(f(x'), f(x)) < \epsilon$. Điều này có nghĩa là với mọi $x' \in B_X(x, \delta)$ thì $f(x') \in B_Y(f(x), \epsilon) \subset G$ hay $x' \in f^{-1}(G)$. Vậy $B_X(x, \delta) \subset f^{-1}(G)$ nên $f^{-1}(G)$ là mở.

b) $\Rightarrow$ a). Cho $x \in X$ và $\epsilon > 0$. Tập $B = B_Y(f(x), \epsilon)$ là tập mở trong Y nên $f^{-1}(B)$ mở trong X và $x \in f^{-1}(B)$. Do vậy, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B)$. Nói cách khác, với mọi $x' \in X$ sao cho $d(x', x) < \delta$ thì $x \in f^{-1}(B)$ nên $f(x') \in B$, nghĩa là $d(f(x'), f(x)) < \epsilon$.

b) $\Leftrightarrow$ c). Ta có

$$f^{-1}(Y \setminus E) = X \setminus f^{-1}(E).$$

Do đó từ mối liên hệ giữa tập mở và tập đóng, ta lấy E lần lượt bằng F và G thì suy ra được điều phải chứng minh. ∎

3.1.5 Định lí. *Giả sử X, Y, Z là ba không gian mêtric, $f : X \to Y$ liên tục tại x_0, $g : Y \to Z$ liên tục tại $y_0 = f(x_0) \in Y$. Khi ấy ánh xạ hợp $h = g \circ f : X \to Z$ liên tục tại x_0.*

Chứng minh. Giả sử $(x_n)_n \subset X$ và $x_n \to x_0$. Do f liên tục tại x_0 nên $f(x_n) \to y_0 = f(x_0)$ và g cũng liên tục tại $f(x_0)$ nên $g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$. Như thế $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x_0)$. Vậy $h = g \circ f$ liên tục tại x_0. ∎

3.2 Ánh xạ đồng phôi.

3.2.1 Phép đồng phôi. Cho X, Y là hai không gian mêtric. Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh sao cho f và f^{-1} đều là các ánh xạ liên tục thì f được gọi là một *ánh xạ đồng phôi* (hay *phép đồng phôi*) từ X lên Y. Hai không gian mêtric được gọi là *đồng phôi* với nhau nếu tồn tại một phép đồng phôi từ không gian này lên không gian kia.

Ví dụ.

1. Lấy $X = (a, b)$, $Y = (0, 1)$ là hai tập con của tập số thực $\mathbf{R}$ với mêtric thông thường. Khi ấy X, Y đồng phôi với nhau nhờ ánh xạ

$$f(x) = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a}.$$

2. Cho $X = \mathbf{R}$ và $Y = (0, 1)$ cũng với mêtric thông thường thì chúng đồng phôi với nhau bởi ánh xạ.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}.$$

Nhận xét.

1. Theo Định lí 3.1.4, một phép đồng phôi biến một tập mở (t.ư., đóng) trong không gian này thành tập mở (t.ư., đóng) trong không gian kia và ngược lại. Do đó tất cả các khái niệm, định nghĩa, tính chất trong không gian mêtric mà dẫn xuất từ tập mở đều bất biến qua phép đồng phôi, nghĩa là các tập $A \subset X$, các điểm $x \in X$ có các tính chất hay tên gọi kể trên thì qua ánh xạ đồng phôi f, các tập $f(A)$, các điểm $f(x)$ trong Y cũng có tính chất, tên gọi như vậy.

2. Các khái niệm về hình cầu, khoảng cách, bán kính,... không bất biến qua phép đồng phôi. Chúng bất biến qua một khái niệm mạnh hơn, được định nghĩa tiếp theo sau đây.

3.2.2 Phép đẳng cự.

Cho X, Y là hai không gian mêtric. Một song ánh f từ X lên Y được gọi là một phép *đẳng cự* nếu

$$\forall x, x' \in X : d\big(f(x), f(x')\big) = d(x, x').$$

Hiển nhiên lúc đó $f^{-1} : Y \to X$ cũng là phép đẳng cự và ta gọi X, Y là hai không gian đẳng cự với nhau.

Nhận xét.

1. Nếu f là phép đẳng cự từ X lên Y thì rõ ràng f cũng là phép đồng phôi từ X lên Y.

2. Cho X là một không gian mêtric còn Y là một tập hợp bất kì. Giả sử có một song ánh $f : Y \to X$. Khi ấy nếu đặt $d^*(y, y') = d\big(f(y), f(y')\big)$ thì d^* là một mêtric trên Y và hơn nữa X, Y là hai không gian mêtric đẳng cự.

3. Theo quan điểm của không gian mêtric, nếu X, Y đẳng cự với nhau thì chúng được đồng nhất với nhau.

3.2.3 Mêtric tương đương.

Cho d_1, d_2 là hai mêtric trên cùng một tập X. Khi đó ta có hai không gian mêtric khác nhau (X, d_1) và (X, d_2) có chung "tập nền" X.

Hai mêtric d_1, d_2 được gọi là *tương đương tôpô* nếu ánh xạ đồng nhất

$$\begin{aligned} \mathrm{id} : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

là một phép đồng phôi từ không gian (X, d_1) lên (X, d_2).

Nếu tồn tại các số dương m, M sao cho

$$md_1(x, y) \le d_2(x, y) \le Md_1(x, y)$$

với mọi $x, y \in X$ thì d_1, d_2 được gọi là hai mêtric *tương đương đều*.

Nhận xét.

1. Từ định nghĩa ta suy ra nếu d_1, d_2 tương đương đều thì chúng sẽ tương đương tôpô nhưng điều ngược lại nói chung không đúng.

2. Hai mêtric tương đương tôpô thì họ các tập mở (t.ư., đóng) trong hai không gian này trùng nhau. Tất nhiên các khái niệm khác dẫn xuất từ tập mở cũng trùng nhau.

Hai mêtric tương đương đều thì thêm nữa là các tính chất liên quan đến khoảng cách cũng sẽ bất biến định tính.

3.3 Suy rộng các ánh xạ liên tục.

Giả sử X, Y là các không gian mêtric và f là ánh xạ từ X vào Y. Nếu f liên tục thì với mọi $A \subset X$, thu hẹp của f lên A, kí hiệu $f_{|A} : A \to Y$, $f_{|A}(x) = f(x)$ cũng là ánh xạ liên tục trên A. Ngược lại, cho $h : A \to Y$ liên tục thì với điều kiện nào tồn tại ánh xạ $f : X \to Y$ liên tục, duy nhất và $f_{|A} = h$?

Trước hết ta thiết lập các định lí để suy ra tính duy nhất của suy rộng.

3.3.1 Định lí. *Giả sử f, g là hai ánh xạ liên tục từ X vào Y. Khi đó tập hợp*

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

là tập đóng trong X.

Chứng minh. Giả sử $x_0 \in \overline{A}$. Khi đó tồn tại dãy $(x_n)_n \subset A$ sao cho $x_n \to x_0$. Theo tiêu chuẩn qua dãy, ta có $f(x_n) \to f(x_0)$ và $g(x_n) \to g(x_0)$. Vì $x_n \in A$ nên $f(x_n) = g(x_n)$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ nên $f(x_0) = g(x_0)$ do giới hạn của mỗi dãy hội tụ là duy nhất. Vậy $x_0 \in A$ hay $A = \overline{A}$, có nghĩa là A đóng. ∎

3.3.2 Hệ quả. *Giả sử f, g là hai ánh xạ liên tục từ X vào Y. Nếu $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in A$ trong đó $\overline{A} = X$ thì $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$.*

Chứng minh. Đặt $D = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Theo Định lí 3.3.1, D là tập đóng và $A \subset D$.

Ta có

$$X = \overline{A} \subset \overline{D} = D \subset X.$$

Vậy $D = X$ hay $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$. ∎

3.3.3 Định lí. *Cho X, Y là hai không gian mêtric, A là tập con trù mật trong X và f là ánh xạ liên tục từ A vào Y. Điều kiện cần và đủ để tồn tại ánh xạ $\overline{f} : X \to Y$ liên tục, thoả mãn $\overline{f}_{|A} = f$ là $\lim\limits_{\substack{z \in A \\ z \to x}} f(z)$ tồn tại với mọi $x \in X$. Khi đó ánh xạ $\overline{f}$ duy nhất.*

Chứng minh. Trước hết ta diễn tả lại khái niệm giới hạn như đã định nghĩa ở 3.1.3, nhờ dãy sau đây :

$$\left(\lim_{\substack{z\in A\\ z\to x}} f(z)=l\right) \Leftrightarrow \left(\forall (z_n)\subset A : (z_n \to a) \Rightarrow \left(f(z_n)\to l\right)\right).$$

Điều kiện cần. Giả sử tồn tại $\overline{f}$ liên tục và $\overline{f}_{|A}=f$. Khi đó $\forall x\in X$ và $\forall (z_n)\subset A$ sao cho $z_n\to x$ thì $\overline{f}(z_n)\to \overline{f}(x)$. Nhưng vì $f(z_n)=\overline{f}(z_n)$ nên $f(z_n)\to l=\overline{f}(x)$ tức là giới hạn $\lim\limits_{\substack{z\in A\\ z\to x}} f(z)$ tồn tại với mọi $x\in X$.

Điều kiện đủ. Với mọi $x\in X$ đặt $\overline{f}(x)=\lim\limits_{\substack{z\in A\\ z\to x}} f(z.)$ Nếu $x\in A$ hiển nhiên $\overline{f}(x)=f(x)$ tức là $\overline{f}_{|A}=f$. Ta chứng minh $\overline{f}$ liên tục.

Giả sử $x\in X$ và $(x_n)_n$ là một dãy trong X hội tụ đến x. Theo cách đặt, ta có $\overline{f}(x_n)=\lim\limits_{\substack{z\in A\\ z\to x_n}} f(z)$. Do đó, theo điều diễn tả nói trên, với mỗi $n\in \mathbf{N}$ tồn tại $z_n\in A$ sao cho $d(z_n, x_n)<\dfrac{1}{n}$ và $d\left(\overline{f}(x_n), f(z_n)\right)<\dfrac{1}{n}$.

Vì $d(z_n, x)\le d(z_n, x_n)+d(x_n, x)<\dfrac{1}{n}+d(x_n, x)\to 0 (n\to\infty)$

tức là $z_n\to x$, $z_n\in A$ nên $\overline{f}(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$.

Suy ra

$$\begin{aligned} d\left(\overline{f}(x_n),\overline{f}(x)\right) &\le d\left(\overline{f}(x_n), f(z_n)\right)+d\left(f(z_n),\overline{f}(x)\right)\\ &<\frac{1}{n}+d\left(f(z_n),\overline{f}(x)\right)\to 0\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là $\overline{f}$ liên tục tại $x\in X$. Vì x bất kì nên $\overline{f}$ liên tục trên X. Tính duy nhất của $\overline{f}$ được suy từ Hệ quả 3.3.2. ▮

Nhận xét. Một số các hàm số liên tục trên $\mathbf{R}$ có thể xem là các suy rộng của hàm số liên tục xác định trên tập số hữu tỉ $\mathbf{Q}$ trù mật trong $\mathbf{R}$, chẳng hạn như là hàm số mũ là mở rộng của luỹ thừa.

BÀI TẬP

3.1. Giả sử f là ánh xạ từ không gian mêtric X vào Y. Chứng minh các mệnh đề sau đây là tương đương.

a) f liên tục tại $x_0 \in X$

b) Nếu $V \in \mathcal{N}(f(x_0))$ thì $f^{-1}(V) \in \mathcal{N}(x_0)$

c) Với mọi $V \in \mathcal{N}(f(x_0))$ tồn tại $U \in \mathcal{N}(x_0) : f(U) \subset V$.

3.2. Chứng minh các ánh xạ từ $C_{[a,b]}$ vào $\mathbf{R}$ cho bởi các công thức sau đây là liên tục.

a) $x(t) \to f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$

b) $x \to f(x) = x(a)$.

3.3. Cho F_1 và F_2 là hai tập đóng trong không gian mêtric X. Đặt $A = F_1 \cup F_2$ và $f : A \to Y$ là một ánh xạ xác định trên A. Chứng minh rằng nếu $f\big|_{F_1}, f\big|_{F_2}$ là các ánh xạ liên tục thì f liên tục trên A.

3.4.* Cho X, Y, Z là ba không gian mêtric, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ là các ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng nếu f là một toàn ánh còn $g \circ f$ là phép đồng phôi của X lên Z thì các ánh xạ f, g lần lượt là các phép đồng phôi.

3.5. Cho X, Y là hai không gian mêtric và $f : X \to Y$ là một toàn ánh liên tục từ X lên Y. Giả sử A là một tập hợp trù mật khắp nơi trong X. Chứng minh tập $f(A)$ trù mật khắp nơi trong Y.

3.6. Cho A, B là các tập con đóng của không gian mêtric X thoả mãn $A \cap B = \emptyset$. Với mỗi $x \in X$ ta đặt

$$\varphi(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

a) Chứng minh φ là một ánh xạ liên tục từ $X \to \mathbf{R}$ thoả mãn điều kiện $0 \le \varphi(x) \le 1$ với mọi $x \in X$. Hơn nữa $\varphi(x) = 0$ tương đương $x \in A$ và $\varphi(x) = 1$ tương đương $x \in B$.

b) Đặt $G_1 = \varphi^{-1}\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right)$, $G_2 = \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2},\ +\infty\right)$. Chứng minh G_1, G_2 là hai tập mở thoả mãn $A \subset G_1$, $B \subset G_2$ và $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

3.7. Cho X, Y là hai không gian mêtric và f là một ánh xạ liên tục từ X vào Y. Chứng minh hai mệnh đề sau đây tương đương :

a) f liên tục,

b) Với mọi tập $B \subset Y$ ta có $f^{-1}(\inf B) \subset \inf\left(f^{-1}(B)\right)$.

3.8. Cho f là một hàm số liên tục trên $\mathbf{R}$.

a) Chứng minh hàm số $F(x, y) = f(x) - y$ là hàm số liên tục trên $\mathbf{R}^2$.

b) Suy ra đồ thị G_f của hàm số f là tập đóng trong $\mathbf{R}^2$ với $G_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbf{R}\}$

3.9. Trong tập $\mathbf{R}^k$ ta xét 3 mêtric sau :

$$d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(x^i - y^i\right)^2}$$

$$d_2(x, y) = \max_{i=1,\dots,k}\left|x^i - y^i\right|$$

$$d_3(x, y) = \sum_{i=1}^{k}\left|x^i - y^i\right|$$

với $x = \left(x^1,\dots,x^k\right)$, $y = \left(y^1,\dots,y^k\right) \in \mathbf{R}^k$

Chứng minh ba mêtric này tương đương đều với nhau.

§ 4. KHÔNG GIAN MÊTRIC ĐẦY ĐỦ

4.1 Định nghĩa và các ví dụ.

4.1.1 Định nghĩa

1. Dãy $(x_n)_n$ trong không gian mêtric X được gọi là *dãy cơ bản* hay *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{m,\, n \to \infty} d(x_m, x_n) = 0$. Nói cách khác, $(x_n)_n$ là dãy cơ bản khi và chỉ khi

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0) : (\forall m,\ n \geq n_0)\ d(x_m,\ x_n) < \epsilon.$$

Ta có các tính chất đơn giản sau :

a) Nếu $(x_n)_n$ là một dãy hội tụ thì nó là dãy cơ bản trong X.

b) Nếu dãy cơ bản $(x_n)_n$ có một dãy con $(x_{k_n})_n \subset (x_n)_n$ sao cho $(x_{k_n})_n$ hội tụ đến x_0 thì chính dãy $(x_n)_n$ cũng hội tụ về x_0.

Thật vậy, ta có

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x_0) \to 0 \text{ khi } n \to \infty$$

vì $(k_n)_n$ là dãy số nguyên tăng và $k_n \geq n$.

2. Không gian mêtric X được gọi là *không gian mêtric đầy đủ* nếu mọi dãy cơ bản của nó đều hội tụ trong X.

Như vậy nếu không gian mêtric X là đầy đủ thì muốn biết một dãy có hội tụ hay không (mà không quan tâm đến giới hạn) ta chỉ cần xem nó có phải là một dãy cơ bản hay không.

Nhận xét. Khái niệm đầy đủ xuất phát từ tính chất của tập số thực : Mọi dãy số thực thoả mãn tiêu chuẩn Cauchy (dãy cơ bản) đều hội tụ về một số thực trong $\mathbf{R}$. Tính chất này đóng vai trò cốt yếu trong việc thiết lập tính đầy đủ của phần lớn các không gian mêtric.

4.1.2 Ví dụ.

1. Không gian $\mathbf{R}^k$ với mêtric thông thường là không gian đầy đủ.

Thật vậy, cho $(x_n)_n \subset \mathbf{R}^k$ là một dãy cơ bản, trong đó $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^k)$. Hiển nhiên ta có

$$\left|x_n^i - x_m^i\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left|x_m^j - x_n^j\right|^2} = d(x_m,\ x_n) \to 0 (m,\ n \to \infty)$$

nên với mọi $i = 1,\ 2, \dots,\ k$ các dãy số thực $(x_n^i)_n$ cơ bản trong $\mathbf{R}$. Do đó $x_n^i \to x_0^i$ khi $n \to \infty$. Theo Ví dụ 1.5.3 ta biết rằng sự hội tụ của một dãy trong $\mathbf{R}^k$ là sự hội tụ theo toạ độ nên ta kết luận được rằng dãy $(x_n)_n$ hội tụ về $x_0 = (x_0^1, \dots,\ x_0^k) \in \mathbf{R}^k$. Vậy $\mathbf{R}^k$ là không gian đầy đủ.

2. Kí hiệu $X=(0,\ 1]\subset \mathbf{R}$ và d là mêtric thông thường trên X tức là $d(x,\ y)=|x-y|$. Không gian này không đầy đủ.

Thật vậy, lấy dãy $(x_n)_n$ xác định bởi $x_n=\frac{1}{n}$ trong X. Ta có

$$|x_n-x_m|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\le \frac{1}{n}+\frac{1}{m}\to 0,\ (m,\ n\to\infty)$$

nên nó là dãy cơ bản nhưng không hội tụ về một điểm nào trong X. (Nếu xét trong $\mathbf{R}$ hay trong $[0,\ 1]$ thì dãy này hội tụ về 0.)

3. Không gian $C_{[a,\ b]}$ là không gian đầy đủ.

Chứng minh. Giả sử $(x_n)_n$ là một dãy cơ bản trong $C_{[a,\ b]}$. Theo định nghĩa ta có

$$d(x_n,\ x_m)=\max_{t\in[a,\ b]}|x_n(t)-x_m(t)|\to 0\ (m,\ n\to\infty).$$

Với mỗi $t\in[a,\ b]$, hiển nhiên ta có

$$|x_n(t)-x_m(t)|\le d(x_n,\ x_m),$$

suy ra $(x_n(t))_n$ là dãy cơ bản trong $\mathbf{R}$ nên nó hội tụ. Với mọi $t\in[a,\ b]$ ta đặt $x(t)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)$. Như thế ta xác định được hàm x trên $[a,\ b]$. Tiếp theo, ta kiểm tra rằng $x\in C_{[a,\ b]}$ và $x_n\to x$ trong không gian $C_{[a,\ b]}$. Lại dùng định nghĩa của dãy cơ bản, với mọi $\epsilon>0$ tồn tại n_0 sao cho với mọi $m,\ n\ge n_0$ và với mọi $t\in[a,\ b]$ ta có

$$|x_n(t)-x_m(t)|\le d(x_n,\ x_m)<\epsilon. \tag{1}$$

Lấy $n\ge n_0$ tuỳ ý, cho $m\to\infty$ ở (1), ta được $|x_n(t)-x(t)|\le\epsilon$ với mọi $t\in[a,\ b]$. Vậy dãy hàm liên tục $(x_n)_n$ hội tụ đều đến hàm số x trên đoạn $[a,\ b]$ nên $x(t)$ liên tục trên $[a,\ b]$ tức là $x\in C_{[a,\ b]}$, đồng thời $x_n\to x$. Do đó $C_{[a,\ b]}$ là một không gian mêtric đầy đủ. ∎

4. Không gian $C^{L}_{[a,\,b]}$ không đầy đủ.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta xét trường hợp $[a,\,b]=[0,\,1]$. Ta hãy xây dựng một dãy cơ bản trong không gian này nhưng nó không hội tụ trong $C^{L}_{[0,\,1]}$. Đặt

$$x_n(t)=\begin{cases}1 & \text{khi } t\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right],\\[2mm] 0 & \text{khi } \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}\le t\le 1,\\[2mm] n+1-2nt & \text{khi } \dfrac{1}{2}\le t\le\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2n}.\end{cases}$$

Với mọi $m,\ n\in\mathbf{N},\ (m>n)$ ta có

$$d(x_n,\ x_m)=\int_0^1\left|x_n(t)-x_m(t)\right|dt=\int_{1/2}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}\left|x_n(t)-x_m(t)\right|dt.\ ■$$

Vì $\left|x_n(t)-x_m(t)\right|\le 2$ nên $d(x_n,x_m)\le\dfrac{1}{n}\to 0$ khi $m,\ n\to\infty$. Vậy $(x_n(t))_n$ đúng là một dãy cơ bản trong $C_{[0,\,1]}$.

Tuy nhiên ta chứng minh rằng dãy $(x_n(t))_n$ không hội tụ trong $C^{L}_{[0,\,1]}$. Thật vậy, giả sử $x(t)$ là một hàm bất kì trong $C^{L}_{[0,\,1]}$. Xét hàm số gián đoạn $y(t)$ trên $[0,\,1]$ cho bởi công thức sau

$$y(t)=\begin{cases}1, & t\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right],\\[2mm] 0, & t\in\left[\dfrac{1}{2},\ 1\right]\end{cases}$$

Như thế $x(t)\neq y(t)$ nên phải có $t_0\in\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$ chẳng hạn để $y(t_0)\neq x(t_0)$. Hơn nữa, trên đoạn $\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$ cả hai hàm $y(t)$ và $x(t)$ cùng liên tục nên lí luận như Ví dụ 1.2.5, ta có

$$0 < \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t) - y(t)| dt.$$

Từ đó

$$0 < \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t) - y(t)| dt \le \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$$
$$\le \int_0^1 |x(t) - x_n(t)| dt + \int_0^1 |x_n(t) - y(t)| dt.$$

Mặt khác khi $n \to \infty$ ta có :

$$\int_0^1 |x_n(t) - y(t)| dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} (n + 1 - 2nt) dt = \frac{1}{4n} \to 0.$$

Vì vậy với n đủ lớn, ta có

$$\int_0^1 |x_n(t) - x(t)| dt \ge \beta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t) - y(t)| dt > 0$$

tức là x_n không thể hội tụ về hàm x trong $C^L_{[0,\,1]}$. Nói cách khác, không có điểm nào trong $C^L_{[0,\,1]}$ là giới hạn của dãy cơ bản $(x_n)_n$ cả. Như thế không gian $C^L_{[0,\,1]}$ không đầy đủ. ∎

4.2 Các tính chất cơ bản.

4.2.1 Định lí. *Cho X là một không gian mêtric đầy đủ và $Y \neq \emptyset$ là một tập con đóng của X. Khi đó không gian mêtric con Y cũng đầy đủ.*

Chứng minh. Giả sử $(x_n)_n$ là một dãy cơ bản trong Y. Dĩ nhiên $(x_n)_n$ cũng là một dãy cơ bản trong X. Vì X đầy đủ nên x_n hội tụ đến điểm $x_0 \in X$. Mặt khác, do Y là tập đóng và $(x_n)_n \subset Y$ nên từ $x_n \to x_0$ thì x_0 phải thuộc Y. Vậy Y là không gian con đầy đủ. ∎

Tính đầy đủ của không gian mêtric còn tương đương với một tính chất tương tự của dãy đoạn thắt lại trong $\mathbf{R}$. Ta có định nghĩa sau đây.

Cho $B_1, B_2, \ldots,$ là một dãy hình cầu trong không gian mêtric X, có bán kính lần lượt là $r_1, r_2, \ldots$ Dãy hình cầu này được gọi là thắt lại nếu ta có $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, và $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

4.2.2 Định lí (Cantor). *Trong không gian mêtric đầy đủ, mọi dãy hình cầu đóng, thắt lại đều có một điểm chung duy nhất. Đảo lại, nếu mọi dãy hình cầu đóng, thắt lại trong không gian mêtric X đều có một điểm chung thì X đầy đủ.*

Chứng minh.

Điều kiện cần : Cho $B_1 = B'(x_1, r_1), ..., B_n = B'(x_n, r_r)...$ là một dãy hình cầu đóng thắt lại trong không gian mêtric đầy đủ X. Với $m \geq n$ thì $B_m \subset B_n$ nên $d(x_n, x_m) \leq r_n$. Vì $r_n \to 0$ khi $n \to \infty$ nên $(x_n)_n$ là một dãy cơ bản trong X, thành thử tồn tại $x_0 \in X$ để $x_n \to x_0$.

Mặt khác, với mỗi $k \in \mathbf{N}$, dãy $(x_{k_n})_n$ với $k_n = k + n$ là dãy con của dãy $(x_n)_n$ nên $x_{k_n} \to x_0$. Hơn nữa, do $k_n \geq n$ nên $x_{k_n} \in B_k$ với mọi $k = 1, 2, ...$ và B_k đóng nên $x_0 \in B_k$. Suy ra $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Ta chứng minh x_0 là điểm chung duy nhất. Thật vậy, nếu có $y_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$ thì do x_0, y_0 cùng thuộc B_k nên

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_k) + d(y_0, x_k) \leq 2r_k \to 0 \ (k \to \infty)$$

như vậy $d(x_0, y_0) = 0$ nên $x_0 = y_0$.

Điều kiện đủ. Cho $(x_n)_n$ là một dãy cơ bản trong X. Theo định nghĩa, với $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$ tồn tại số nguyên $n_1 > 0$ sao cho $d(x_n, x_m) < \frac{1}{2}$ với mọi $m, n \geq n_1$, đặc biệt, $d(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$. Đặt $B_1 = B'(x_{n_1}, 1)$. Ta chọn $n_2 > n_1$ sao cho $d(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ khi $n \geq n_2$. Dễ thấy $B_2 = B'\left(x_{n_2}, \frac{1}{2}\right) \subset B_1$. Bằng quy nạp, giả sử đã chọn được $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}$, $(n_1 < n_2 < \cdots < n_k)$ và xây dựng được các hình cầu đóng $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_k$ ta lấy $x_{n_{k+1}}$ trong đó $n_{k+1} > n_k$ và $d(x_n, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$. Như vậy $(B_k)_k$ là một dãy hình cầu đóng, thắt lại nên theo giả thiết tồn tại $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Ta có $d(x_{n_k}, x_0) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$,

$k = 1, 2, \ldots$ nên $x_{n_k} \to x_0$. Dãy cơ bản $(x_n)_n$ có một dãy con $(x_{n_k})_k$ hội tụ về x_0 nên chính bản thân nó cũng phải hội tụ về $x_0 \in X$. Điều này chứng tỏ rằng X là không gian mêtric đầy đủ. ∎

4.3 Các tập thuộc phạm trù I, II.

4.3.1 Định nghĩa. Cho M là một tập con của không gian mêtric X. Ta gọi M là tập không đâu trù mật (hay còn gọi là tập hợp thưa) nếu nó không trù mật trong bất kì hình cầu nào cả. Nói một cách tương đương :

$$(M \subset X \text{ là tập không đâu trù mật}) \Leftrightarrow \left(\overset{\circ}{\overline{M}} = \emptyset\right).$$

4.3.2 Định lí. *Tập con M của X là tập thưa nếu và chỉ nếu mọi hình cầu mở (hoặc đóng) B trong X, luôn tồn tại một hình cầu mở (hoặc đóng) $B_1 \subset B$ sao cho $B_1 \cap M = \emptyset$.*

Chứng minh. Điều kiện cần. Giả sử $\overset{\circ}{\overline{M}} = \emptyset$ và B là hình cầu mở trong X. Theo định nghĩa, $B \not\subset \overline{M}$ nên có $x \in B$ và $x \notin \overline{M}$. Theo tính chất của bao đóng, tồn tại $r > 0$ để $B(x, r) \cap M = \emptyset$. Do B mở và $x \in B$ nên có thể chọn r đủ nhỏ để đồng thời $B(x, r) \subset B$ và $B(x, r) \cap M = \emptyset$.

Điều kiện đủ. Giả sử M không phải là tập hợp thưa, tức là $\overset{\circ}{\overline{M}} = \emptyset$. Lấy $x \in \overset{\circ}{\overline{M}}$ sẽ có $r > 0$ để $B(x, r) \subset \overline{M}$. Vậy bất kì hình cầu B_1 nào chứa trong $B = B(x, r)$ đều được chứa trong $\overline{M}$ nên phải có giao với M khác rỗng. ∎

4.3.3 Định nghĩa. Giả sử A là một tập con của không gian mêtric X. Ta gọi A là tập thuộc *phạm trù I* trong X nếu tồn tại một dãy các tập không đâu trù mật $A_1, A_2, \ldots$, sao cho $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Tập $A \subset X$ được gọi là thuộc *phạm trù II* nếu nó không phải là tập thuộc phạm trù I.

4.3.4 Định lí. (Baire) *Giả sử X là một không gian mêtric đầy đủ. Khi đó X là tập thuộc phạm trù II.*

Chứng minh.

Ta dùng phản chứng. Giả sử X thuộc phạm trù I, khi đó theo định nghĩa, tồn tại một dãy tập thưa $A_n \subset X$ sao cho $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Do A_1 thưa nên có hình cầu đóng B_1 bán kính $r_1 < \frac{1}{2}$ sao cho $B_1 \cap A_1 = \emptyset$. Cũng vậy, vì A_2 thưa, tồn tại hình cầu đóng $B_2 \subset B_1$ bán kính $r_2 < \frac{1}{2}$ để $B_2 \cap A_2 = \emptyset$. Bằng quy nạp, ta xây dựng được dãy hình cầu đóng, thắt lại $(B_n)_n$ có bán kính r_n, $\frac{1}{n}$ sao cho $B_n \cap A_n = \emptyset$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Theo Định lí Cantor, tồn tại duy nhất $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Vì $x_0 \in B_n$ nên $x_0 \notin A_n$ với mọi $n \in \mathbf{N}$. Từ đó $x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Điều này vô lí. Vậy X phải thuộc phạm trù II. ∎

Một hệ quả rất hay dùng được phát biểu dưới dạng sau.

4.3.5 Hệ quả. *Giả sử X là một không gian mêtric đầy đủ và $(A_n)_n$ là dãy các tập con của X sao cho $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Khi đó tồn tại $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $\overset{\circ}{\overline{A_n}} \neq \emptyset$.*

4.4 Ánh xạ liên tục đều.

Giả sử X, Y là hai không gian mêtric, f là ánh xạ từ X vào Y. Bằng ngôn ngữ ϵ, δ theo định nghĩa, hàm f liên tục tại điểm $x_0 \in X$ nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ (δ nói chung phụ thuộc vào x_0 và ϵ) sao cho $d(f(x), f(x')) < \epsilon$ mỗi khi $d(x, x_0) < \delta$. Nếu số dương δ không phụ thuộc vào mỗi điểm x_0 ta có khái niệm liên tục đều.

4.4.1 Định nghĩa. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là liên tục đều trên X nếu với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, x' \in X$ mà $d(x, x') < \delta$ thì $d(f(x), f(x')) < \epsilon$.

4.4.2 Nhận xét.

1. Mọi ánh xạ liên tục đều từ X vào Y là liên tục. Điều ngược lại nói chung không đúng. Chẳng hạn, hàm $x \mapsto x^2$ là liên tục nhưng không liên tục đều trên $\mathbf{R}$ vì hiệu $(x+h)^2 - x^2 = h(2x+h)$ có thể lấy những giá trị lớn tuỳ ý dù h lấy đủ bé.

2. Nếu $f: X \to Y$ và $g: Y \to Z$ là các ánh xạ liên tục đều thì ánh xạ hợp $h = g \circ f: X \to Z$ cũng liên tục đều.

4.4.3 Định lí. *Cho X là không gian mêtric, A là tập con trù mật trong X và f là ánh xạ từ A vào không gian mêtric đầy đủ Y. Giả sử f liên tục đều trên A. Khi ấy tồn tại duy nhất mở rộng $\overline{f}$ của f lên X và $\overline{f}$ liên tục đều trên X.*

Chứng minh. Ta sẽ sử dụng Định lí 3.3.3 để chứng minh tồn tại mở rộng $\overline{f}$. Muốn thế hãy kiểm tra rằng với mọi $x \in X$ thì $\lim\limits_{\substack{z \in A \\ z \to x}} f(z)$ tồn tại.

Lấy một dãy bất kì (z_n) trong A mà $z_n \to x$. Với $\epsilon > 0$ cho trước tuỳ ý, do f liên tục đều trên A nên tồn tại số dương δ sao cho $d(f(z'), f(z'')) < \epsilon$ khi $d(z', z'') < \delta$ với mọi $z', z'' \in A$.

Vì $z_n \to x$ nên dãy $(z_n)_n$ là dãy cơ bản : với $\delta > 0$ ở trên tồn tại số nguyên n_0 để $d(z_n, z_m) < \delta$ với mọi $m, n \geq n_0$. Nhưng khi đó $d(f(z_n), f(z_m)) < \epsilon$. Như thế $(f(z_n))_n$ là một dãy cơ bản trong Y. Hơn nữa, Y đầy đủ nên tồn tại $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = l$. Vậy ta có được ánh xạ $\overline{f}: X \to Y$ mở rộng liên tục duy nhất của ánh xạ f.

Còn lại ta chứng minh $\overline{f}$ liên tục đều trên X. Lại ứng dụng tính liên tục đều của f trên A như trước, giả sử x_0 và x_0' là hai điểm trong X với $d(x_0, x_0') < \delta$. Xét hai dãy (z_n) và (z_n') trong A lần lượt hội tụ đến x_0 và x_0'. Chọn n_0 đủ lớn, ta thấy rằng nếu $n \geq n_0$ thì

$$d(z_n, z_n') \leq d(z_n, x_0) + d(z_n', x_0) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

Do vậy

$$d(\overline{f}(z_n), \overline{f}(z_n')) = d(f(z_n), f(z_n')) < \epsilon.$$

Cho $n \to \infty$ ta có $d(\overline{f}(x_0), \overline{f}(x_0')) \leq \epsilon$. Vậy $\overline{f}$ liên tục đều trên X. ∎

4.5 Nguyên lí ánh xạ co.

4.5.1 Định nghĩa. Giả sử f là một ánh xạ từ tập X vào chính nó. Phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = x$ **được gọi là** ***điểm bất động*** của ánh xạ f.

Vấn đề tìm điểm bất động của một ánh xạ f có nhiều ứng dụng trong giải tích, đặc biệt trong lí thuyết phương trình (vi phân, tích phân,...) vì một điểm bất động của ánh xạ f chính là một nghiệm của phương trình dạng $f(x) = x$.

Bây giờ cho X là một không gian mêtric và f là một ánh xạ từ X vào chính nó. Nếu tồn tại một số $\alpha \in [0, 1)$ sao cho

$$\forall x, y \in X : d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

thì ánh xạ f được gọi là *ánh xạ co* trên X.

Từ định nghĩa ta thấy ngay rằng mọi ánh xạ co trên X thì liên tục đều trên X.

4.5.2 Định lí. (Nguyên lí ánh xạ co Banach) *Giả sử X là một không gian mêtric đầy đủ và $f : X \to Y$ là một ánh xạ co. Khi ấy f có một điểm bất động duy nhất.*

Chứng minh. Ta hãy lấy một điểm tuỳ ý $x_0 \in X$ và đặt

$$x_1 = f(x_0),$$
$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)),$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n = f(x_{n-1}) = \underbrace{f(f \cdots f)}_{n \text{ lần}}(x_0), \cdots$$

Ta chứng tỏ $(x_n)_n$ là một dãy cơ bản trong X. Vì f là ánh xạ co nên nếu $n \geq 1$ thì

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n) \\ &= \alpha d(f(x_{n-2}), f(x_{n-1})) \qquad (*) \\ &\leq \alpha^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \cdots \leq \alpha^n d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

với $\alpha \in [0, 1)$ theo định nghĩa. Với mọi số nguyên dương n, p, từ (*), ta có

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Khi n đủ lớn và p tuỳ ý ta có $d(x_n, x_{n+p}) \to 0$, $(n \to \infty)$ suy ra $(x_n)_n$ là dãy cơ bản trong không gian đầy đủ X nên tồn tại giới hạn $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Cũng từ (*), ta có

$$d(x_n, f(x_n)) = d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x_0, x_1).$$

Cho $n \to \infty$ và để ý rằng các hàm d và f liên tục, ta có

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, f(x_n)) = d(x^*, f(x^*)) \leq 0.$$

Như vậy $d(x^*, f(x^*)) = 0$ hay $f(x^*) = x^*$ nên x^* là một điểm bất động của ánh xạ f. Bây giờ nếu có $y \in X$ mà $f(y) = y$ thì

$$d(x^*, y) = d(f(x^*), f(y)) \leq \alpha d(x^*, y).$$

Như thế $(1-\alpha) d(x^*, y) \leq 0$ nên $d(x^*, y) = 0$. Vậy $y = x^*$ tức là x^* là điểm bất động duy nhất. ▮

4.5.3 Ví dụ.

Xét bài toán Cauchy của phương trình vi phân sau đây :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0 \tag{2}$$

trong đó $f(t, x)$ là một hàm số liên tục trong một tập mở $G \subset \mathbf{R}^2$ và f thoả mãn điều kiện Lipschitz theo biến x trên G, nghĩa là tồn tại một số dương k sao cho

$$\left|f(t, x_1)-f(t, x_2)\right| \le k\left|x_1 - x_2\right| \qquad (3)$$

với mọi (t, x_1), $(t, x_2) \in G$.

Ta hãy chứng minh định lí Picard : ***Tồn tại*** *$r > 0$ sao cho trên đoạn $[t_0 - r, t_0 + r]$ phương trình (1) có một nghiệm duy nhất thoả mãn điều kiện ban đầu (2).*

Thật vậy, phương trình (1) với điều kiện ban đầu (2) tương đương với phương trình tích phân sau :

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \qquad (4)$$

Do G là tập mở và $(t_0, x_0) \in G$ nên có một hình tròn (hình cầu) tâm (t_0, x_0) chứa trong G. Đặt

$$D = \left\{(t, x) \in G : |t - t_0| \le a,\ |x - x_0| \le b\right\}$$

là một hình chữ nhật đóng, nội tiếp trong hình cầu đó. Vì $f(t, x)$ liên tục trên D nên tồn tại số dương L sao cho $|f(t, x)| \le L$ với mọi $(t,x) \in D$. Lấy số dương r thoả $0 < r < \min\left\{\frac{1}{k}, \frac{b}{L}\right\}$. Ta kí hiệu $I = [t_0 - r, t_0 + r]$ và

$$C' = \left\{x \in C_I : \max_{t \in I}|x(t) - x_0| \le b\right\}$$

là một không gian con của C_I. Giả sử $(x_n)_n \in C'$ và $x_n \to x$ thì do $|x_n(t) - x_0| \le b$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ và $t \in I$ nên qua giới hạn, ta cũng có $|x(t) - x_0| \le b$ với mọi $t \in I$. Như vậy C' là tập đóng trong không gian mêtric đầy đủ C_I nên C' cũng phải đầy đủ. Xét ánh xạ $P : C' \to C'$, $x \to Px$, trong đó Px được xác định bởi

$$(Px)(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau + x_0,\ \forall t \in I.$$

Ánh xạ P đặt như trên là hợp lí vì nếu $x \in C'$ thì Px là hàm số liên tục trên I, đồng thời

$$|(Px)(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\,d\tau\right| \le \int_{t_0}^{t} L d\tau \le Lr \le b,$$

nghĩa là $Px \in C'$.

Bây giờ, cho $x,\ y \in C'$, ta có

$$\left|(Px)(t)-(Py)(t)\right| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, y(\tau))\,d\tau\right|$$

$$\leq |\int_{t_0}^{t} K\left|x(\tau)-y(\tau)\right|d\tau \leq K\int_{t_0}^{t} d(x,\ y)\,d\tau$$

(Ở đây ta giả sử $t \leq t_0$, trường hợp $t < t_0$ lí luận tương tự).

Như thế

$$d(Px, Py) = \max_{t\in I}\left|(Px)(t)-(Py)(t)\right|$$
$$\leq K\left|t-t_0\right|d(x,\ y) \leq Krd(x,\ y).$$

Vì $Kr < 1$ nên P là một ánh xạ co. Theo Định lí Banach ở trên, tồn tại duy nhất hàm số $x \in C'$ sao cho $Px = x$. Nói cách khác, bài toán $(1)-(2)$ có nghiệm duy nhất. ∎

4.6 Đầy đủ hoá không gian mêtric.

Vai trò các không gian mêtric đầy đủ rất quan trọng. Nhiều định lí và tính chất chỉ phát huy tác dụng trong các không gian đầy đủ. Do đó với các không gian không đầy đủ X ta hãy "bao" nó bằng một không gian đầy đủ X^* chứa X và X^* phải là không gian gọn nhất.

4.6.1 Định nghĩa. Giả sử X là một không gian mêtric. Ta gọi không gian mêtric đầy đủ X^* là một đầy đủ hoá (hay còn gọi là bổ sung) của X nếu :

a) X là một không gian con của X^*.

b) X trù mật khắp nơi trong X.

4.6.2 Định lí. *Mỗi không gian mêtric X đều có đầy đủ hoá X^* của nó. Hơn nữa, không gian đầy đủ hoá này là duy nhất theo nghĩa là nếu có không gian Y^* cũng thoả mãn các điều kiện a) và b) trong định nghĩa trên thì X^* và Y^* là đẳng cự với nhau.*

Chứng minh. Ta chia phép chứng minh ra làm nhiều bước.

1. Xây dựng tập hợp X^*. Kí hiệu $\mathcal{X}$ là tập hợp tất cả các dãy cơ bản trong X. Nếu $(x_n)_n$ và $(y_n)_n$ là hai phần tử của $\mathcal{X}$ thì ta xét quan hệ hai ngôi trên $\mathcal{X}$ theo định nghĩa

$$(x_n)_n \mathcal{R} (y_n)_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Ta thấy ngay $\mathcal{R}$ có tính phản xạ và đối xứng. Nếu

$$d(x_n, y_n) \to 0 \text{ và } d(y_n, z_n) \to 0$$

thì

$$d(x_n, z_n) \le d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n) \to 0$$

nên $\mathcal{R}$ thoả mãn tính chất bắc cầu, nghĩa là nếu $(x_n)_n \mathcal{R} (y_n)_n$ và $(y_n)_n \mathcal{R} (z_n)_n$ thì $(x_n)_n \mathcal{R} (z_n)_n$. Vậy $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương trên $\mathcal{X}$.

Ta kí hiệu $X^* = \mathcal{X}/\mathcal{R}$ là tập thương của $\mathcal{X}$ theo quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ vừa nêu trên.

2. Xác định mêtric trong X^*.

Kí hiệu x^* và y^* là các phần tử trong X^*, đó là các lớp tương đương các dãy cơ bản trong X. Lấy tuỳ ý các đại diện lần lượt $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ trong x^*, y^* tương ứng rồi đặt

$$d(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \qquad (1)$$

Ta chứng minh tính đúng đắn của cách đặt này tức là kiểm tra giới hạn (1) tồn tại hữu hạn, không phụ thuộc vào việc chọn các đại diện $(x_n)_n \in x^*$ và $(y_n)_n \in y^*$ mà chỉ phụ thuộc vào chính các lớp tương đương x^*, y^*.

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức tứ giác ta có

$$\forall m, n \in \mathbf{N}, \ |d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \le d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n). \qquad (2)$$

Do các dãy $(x_n)_n$, $(y_n)_n$ là các dãy cơ bản trong X nên từ (2) ta suy ra dãy số thực $(d(x_n, y_n))_n$ là cơ bản nên nó phải hội tụ. Ngoài ra, nếu $(x'_n)_n \in x^*$ và $(y'_n)_n \in y^*$ thì cũng theo bất đẳng thức tứ giác, ta có

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \le d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \qquad (3)$$

Vì $(x_n)_n \mathcal{R} (x'_n)_n$ và $(y_n)_n \mathcal{R} (y'_n)_n$ nên vế sau của (3) tiến về 0 khi $n \to \infty$, nghĩa là

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n).$$

Như vậy d là một hàm xác định trên $X^* \times X^* \to \mathbf{R}$. Bây giờ ta kiểm tra 3 tiêu đề của mêtric :

1. Ta có ngay là $d(x^*, y^*) \geq 0$, $d(x^*, y^*) = 0$ tương đương $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ hay $(x_n)_n \mathcal{R} (y_n)_n$. Vậy $x^* = y^*$.

2. Tiên đề 2 rõ ràng.

3. Nếu $(x_n)_n \in x^*$, $(y_n)_n \in y^*$ và $(z_n)_n \in z^*$ thì từ bất đẳng thức

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n),\ \forall n \in \mathbf{N}$$

nên qua giới hạn khi $n \to \infty$ ta được

$$d(x^*, z^*) \leq d(x^*, y^*) + d(y^*, z^*)$$

tức là tiên đề 3 được kiểm tra.

Vậy (X^*, d) là một không gian mêtric.

Bây giờ ta xét ánh xạ $i : X \to X^*$ cho bởi

$$x \to i(x) = x^+ \in X^*$$

trong đó x^+ là một lớp tương đương các dãy cơ bản thoả $x^+ \ni (x_n)_n = (x, x, \ldots,) \in X$. Từ định nghĩa khoảng cách trong X^*, ta có

$$d(x^+, y^+) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y).$$

Như vậy ta xác định được một phép đẳng cự từ X lên một không gian con $X^+ = \{x^+ \in X^* : x^+ \ni (x, x, \ldots,),\ x \in X\}$ của X^*. Do đó ta đồng nhất X với X^+ nghĩa là $X \subset X^*$.

3. X trù mật trong X^*.

Cho $x^* \in X^*$ và giả sử ϵ là số dương cho trước. Lấy $(x_n)_n \in x^*$. Vì $(x_n)_n$ là một dãy cơ bản trong X nên tồn tại n_0 sao cho khi $n \geq n_0$ ta có $d(x_n, x_{n_0}) < \epsilon$.

Xét phần tử $x^+_{n_0} \in X^+ = X$, từ định nghĩa về khoảng cách trong X^* ta có

$$d\left(x_{n_0}^+, x^*\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(x_{n_0}, x_n\right) \le \epsilon.$$

Vậy $X^+ = X$ là trù mật trong X^*.

4. X^* là không gian mêtric đầy đủ.

Giả sử $\left(x_n^*\right)_n$ là một dãy cơ bản trong X^*. Vì $\overline{X} = X^*$ nên với mỗi số nguyên $n \in \mathbf{N}$ tồn tại $x_n \in X$ để $d\left(x_n, x_n^*\right) < \dfrac{1}{n}$. Khi đó

$$d\left(x_n, x_m\right) \le d\left(x_n, x_n^*\right) + d\left(x_n^*, x_m^*\right) + d\left(x_m^*, x_m\right)$$
$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + d\left(x_n^*, x_m^*\right).$$

Vậy $d\left(x_n, x_m\right) \to 0$ khi $n, m \to \infty$ nên $\left(x_n\right)_n$ là dãy cơ bản trong X tức là $\left(x_n\right)_n \in \mathcal{X}$. Đặt X^* là lớp chứa dãy $\left(x_n\right)_n$ thì $x^* \in X^*$ và ta có

$$d\left(x_n^*, x^*\right) \le d\left(x_n^*, x_n\right) + d\left(x_n, x^*\right) \le \frac{1}{n} + d\left(x_n, x^*\right).$$

Vì $\left(x_n, x_n, \ldots\right) \in x_n^+$ và $\left(x_1, x_2, \ldots\right) \in x^*$ với mọi $n \in \mathbf{N}$ nên

$$d\left(x_n, x^*\right) = d\left(x_n^+, x^*\right) = \lim_{n, m\to\infty} d\left(x_n, x_m\right).$$

Vậy $d\left(x_n^*, x^*\right) < \dfrac{1}{n} + \lim\limits_{n,m\to\infty} d\left(x_n, x_m\right)$. Cho $n \to \infty$ ta được $d\left(x_n^*, x^*\right) \to 0$ hay $x_n^* \to x^*$ khi $n \to \infty$.

Như thế X^* là đầy đủ.

5. Tính duy nhất (sai khác một phép đẳng cự) của đầy đủ hoá X^* của X.

Giả sử Y^* là một không gian mêtric đầy đủ và có các tính chất sau

1. $X \subset Y^*$ (nghĩa là X đẳng cự với một không gian con của Y^*.

2. $\overline{X} = Y^*$.

Ta chứng minh Y^* đẳng cự với X^*.

Lấy $x^* \in X^*$, khi ấy tồn tại dãy $\left(x_n\right)_n \subset X$ sao cho $x_n \to x^*$. Dãy $\left(x_n\right)_n$ cơ bản trong Y^* nên nó hội tụ về $y^* \in Y^*$. Đặt

$$\varphi : X^* \to Y^*,\ x^* \to y^*.$$

Ta thấy φ toàn ánh vì nếu $y^* \in Y^*$ thì $y^* = \lim\limits_{n\to\infty} y_n,\ y_n \in X$ nên $y^* = \varphi(x^*)$ với $X^* \ni x^* = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Mặt khác, do tính liên tục của các hàm mêtric trong X^* và Y^* nên ta có

$$d(x^*, x'^*) \overset{\text{trong } X^*}{=} \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \overset{\text{trong } Y^*}{=} d(y^*, y'^*)$$

nghĩa là $d(x^*, x'^*) = d(\varphi(x), \varphi(x'^*))$. Từ đây suy ra φ là đơn ánh và đồng thời nó là một phép đẳng cự giữa X^* và Y^*. Định lí được chứng minh đầy đủ. ∎

4.6.3 Ví dụ.

1. Tập hợp số hữu tỉ **Q** là một không gian mêtric không đầy đủ với khoảng cách

$$d(x,y) = |x - y|.$$

Đầy đủ hoá không gian này ta nhận được tập hợp **R**. Tuy nhiên để có được tập số thực ta phải xây dựng các phép toán + và ., quan hệ "$\le$" trong **R** và đồng thời phải kiểm nghiệm lại **R** là một trường liên tục.

2. Giả sử M là một tập con của không gian mêtric đầy đủ X. Không gian đầy đủ hoá của không gian con M chính là $\overline{M}$.

3. Ta có $C^L_{[a,\,b]}$ là một không gian mêtric không đầy đủ. Không gian đầy đủ hoá của nó được kí hiệu bởi $L[a,\,b]$. Đó là tập hợp tất cả các hàm đo được, khả tích theo nghĩa Lebesgue trên đoạn $[a,\,b]$. (Xem Chương 4).

BÀI TẬP

4.1. Kí hiệu m là tập hợp tất cả các dãy số thực bị chặn $(x_n)_n$. Với $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ thuộc m, ta đặt

$$d(x,\ y) = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n - y_n|$$

a) Chứng minh d là một mêtric trên m.

b) Không gian mêtric (m, d) là đầy đủ.

c) Kí hiệu c là tập hợp các dãy số thực hội tụ. Chứng minh rằng c là một tập con đóng của không gian mêtric m.

4.2. Kí hiệu s_0 là tập hợp tất cả các dãy số thực $(x_n)_n$ sao cho tất cả các $x_n = 0$ ngoại trừ một số hữu hạn n. Ta xem s_0 là một không gian mêtric con của không gian m. Chứng minh rằng s_0 là không gian mêtric không đầy đủ.

4.3. Kí hiệu $\mathbf{N}$ là tập hợp các số nguyên tự nhiên. Đặt

$$d(m, n) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } m = n \\ 1 + \dfrac{1}{m+n} & \text{nếu } m \neq n. \end{cases}$$

a) Chứng minh $d(m, n)$ là một mêtric trên tập $\mathbf{N}$.

b) Không gian $(\mathbf{N}, d)$ là một không gian mêtric đầy đủ.

4.4. Kí hiệu $X = C^c([-a, a])$ là tập hợp tất cả các hàm chẵn, liên tục trên $[-a, a]$. Với $x, y \in X$ ta đặt

$$d(x, y) = \max_{t \in [-a, a]} |x(t) - y(t)|.$$

Chứng minh rằng X là một không gian đầy đủ.

4.5. Cho (X, d) là một không gian mêtric. Đặt

$$d_1(x, y) = \min(1, d(x, y)).$$

a) Kiểm tra rằng d_1 là một mêtric trên X.

b) Chứng minh rằng (X, d) đầy đủ khi và chỉ khi (X, d_1) đầy đủ.

c) Chứng minh d và d_1 tương đương tôpô với nhau.

4.6. Cho X là một không gian đầy đủ, $(Y_n)_n$ là một dãy các tập con mở, trù mật khắp nơi trong X. Chứng minh rằng tập hợp $\bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ cũng là tập trù mật khắp nơi trong X.

4.7. Chứng minh rằng hàm liên tục $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ xác định bởi

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + x - \operatorname{arctg} x$$

không có điểm bất động mặc dù nó thoả mãn bất đẳng thức

$$\forall x, y \in \mathbf{R},\ x \neq y,\ \left| f(x) - f(y) \right| < |x - y|.$$

4.8. Trên tập số thực $\mathbf{R}$ ta đặt

$$d_1(x,\ y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \text{ và } d_2(x,\ y) = |e^x - e^y|.$$

Chứng minh :

a) d_1, d_2 là các mêtric trên $\mathbf{R}$.

b) $(\mathbf{R},\ d_1)$ $(\mathbf{R},\ d_2)$ là các không gian mêtric không đầy đủ.

c) Đầy đủ hoá các không gian $(\mathbf{R},\ d_1)$, $(\mathbf{R},\ d_2)$ là gì ?

§ 5. KHÔNG GIAN COMPACT

Trong giải tích cổ điển, khi làm việc với các tập con của $\mathbf{R}$ ta nhận thấy các khoảng đóng $[a,\ b] \subset \mathbf{R}$ có những tính chất tốt sau đây :

a) Mọi dãy $(x_n)_n \subset [a,\ b]$ bao giờ cũng có một dãy con hội tụ trong đoạn này.

b) Nếu $[a,\ b]$ được chứa trong hợp của họ tuỳ ý các khoảng mở trong $\mathbf{R}$ thì luôn có thể chọn trong đó một số hữu hạn các khoảng mở cũng đủ để che phủ $[a,\ b]$.

c) Hàm số liên tục trên $[a,\ b]$ thì liên tục đều và đạt được các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a,\ b]$.

Tính chất b) chính là đặc điểm cơ bản nhất, cho phép ta chuyển một số khái niệm, thuộc tính, từ địa phương sang toàn cục bằng cách hữu hạn hoá các quá trình vô hạn liên quan đến đối tượng đang xét. Tính chất a) của tập $[a,\ b]$ mang yếu tố kĩ thuật, dễ tiếp cận nên trong phần không gian mêtric này ta sẽ bắt đầu tổng quát hoá bằng cách dùng tính chất a) này.

5.1 Tập hợp compact và không gian compact.

5.1.1 Định nghĩa. Cho X là một không gian mêtric và A là một tập con của X. Ta gọi A là một *tập compact* nếu mọi dãy $(x_n)_n$ chứa trong A luôn luôn tồn tại một dãy con $(x_{k_n})_n$ hội tụ về một điểm $x \in A$.

Nếu bản thân tập X là compact thì không gian X được gọi là *không gian compact*.

Tập $A \subset X$ được gọi là *compact tương đối* nếu $\overline{A}$ là tập compact.

5.1.2 Mệnh đề. *Tập $A \subset X$ là compact tương đối nếu và chỉ nếu mọi dãy $(x_n)_n \subset A$ sẽ có một dãy con hội tụ đến một điểm trong X (không yêu cầu thuộc A).*

Chứng minh. Điều kiện cần hiển nhiên. Ngược lại cho $(x_n)_n$ là một dãy trong A. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$ ta chọn $y_n \in A$ sao cho $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Theo giả thiết, tồn tại một dãy con $(y_{k_n})_n \subset (y_n)_n$ hội tụ về $y_0 \in X$. Vì $(y_{k_n})_n \subset A$ nên $y_0 \in \overline{A}$. Lúc đó

$$d(x_{k_n}, y_0) \leq d(x_{k_n}, y_{k_n}) + d(y_{k_n}, y_0) < \frac{1}{k_n} + d(y_{k_n}, y_0) \to 0.$$

Vậy tồn tại dãy con $(x_{k_n})_n$ của $(x_n)_n$ hội tụ đến $y_0 \in \overline{A}$ nên $\overline{A}$ là compact. ∎

5.1.3 Ví dụ.

1. Trong không gian mêtric X bất kì, một tập gồm một số hữu hạn điểm là tập compact.

Thật vậy, giả sử $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset X$. Nếu $(x_n)_n$ là một dãy bất kì trong A thì phải có ít nhất một a_i nào đó để $x_n = a_i$ với vô hạn các $n \in \mathbf{N}$. Từ tập vô hạn các x_n này ta rút ra một dãy con dừng, hội tụ về đúng a_i.

2. Đoạn $[a, b]$ trong $\mathbf{R}$ là một tập compact. Điều này suy từ định nghĩa và định lí Bozano-Weierstrass.

3. Tập con đóng của một tập compact là compact. Thật vậy, giả sử B là một tập con đóng của tập compact A và $(x_n)_n \subset B$. Khi ấy $(x_n)_n \subset A$ và do A compact nên tồn tại dãy con $(x_{k_n})_n \subset (x_n)_n$ sao cho $x_{k_n} \to x_0 \in A$. Nhưng khi đó x_0 cũng thuộc B vì B là tập đóng.

5.2 Tập hợp bị chặn và hoàn toàn bị chặn

Theo từ nguyên, "compact" có nghĩa là nén chặt, gọn gàng nên tập hợp compact phải không được quá phức tạp, rườm ra. Ta cần các khái niệm sau đây để diễn tả điều vừa nói.

5.2.1 Định nghĩa. Cho X là một không gian mêtric và $\emptyset \neq A \subset X$. Đặt

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \{d(x, y)\} \leq +\infty$$

và ta gọi số $\delta(A)$ này là *đường kính* của tập A.

Nếu $\delta(A) < +\infty$ thì A được gọi là *tập bị chặn*, còn $\delta(A) = +\infty$ thì A gọi là *tập không bị chặn*.

Ta có các tính chất đơn giản sau :

a) Tập A là bị chặn nếu và chỉ nếu A được chứa trong một hình cầu nào đó.

Thật vậy, giả sử $\delta(A) = \sup_{x, y \in A} \{d(x, y)\} = r < +\infty$. Lấy x_0 tuỳ ý thuộc A, khi đó với mọi $y \in A$, ta có $d(x_0, y) \leq r$ hay $A \subset B(x_0, r+1)$. Ngược lại, nếu $A \subset B(x_0, r)$ thì với mọi $x, y \in A$ ta có

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq 2r.$$

Do đó $\delta(A) \leq 2r < +\infty$ nên A bị chặn.

b) Hợp một số hữu hạn các tập bị chặn là bị chặn.

5.2.2 Định nghĩa. Tập $A \subset X$ được gọi là *hoàn toàn bị chặn* (hay còn gọi là *tiền compact*) nếu mọi số dương r, tập A được chứa trong một số hữu hạn hình cầu có bán kính r. Lúc đó ta cũng nói A được phủ bởi một số hữu hạn hình cầu bán kính r.

Chú ý. Ta có $B(a, r) \subset B'(a, r)$ và nếu $r' > r$ thì $B'(a, r) \subset B(a, r')$ nên trong các định nghĩa về tập bị chặn và hoàn toàn bị chặn, ta có thể sử dụng hình cầu mở hoặc đóng tuỳ ý.

5.2.3 Mệnh đề. *Một tập hoàn toàn bị chặn thì bị chặn.*

Chứng minh. Cho A hoàn toàn bị chặn. Theo định nghĩa, với $r = 1$ tồn tại hữu hạn các hình cầu $B(a_i, 1)$ để $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, 1)$. Lấy $x \in A$ sẽ có j để $x \in B(a_j, 1)$. Lúc đó

$$d(x, a_1) \leq d(x, a_j) + d(a_j, a_1)$$

$$d(x, a_j) + \sum_{i=1}^{n} d(a_i, a_1) = r.$$

Vậy A được chứa trong $B'(a_1, r)$. ∎

Mệnh đề ngược lại nói chung không đúng trong trường hợp tổng quát. Tuy nhiên trong $\mathbf{R}^n$ ta có :

5.2.4 Mệnh đề. *Cho A là một tập bị chặn trong $\mathbf{R}^n$ (với mêtric thông thường). Khi ấy A cũng hoàn toàn bị chặn.*

Chứng minh. Gọi $B(x_0, k)$ là hình cầu chứa A. Ta lấy một hình hộp đều cạnh bằng $2k$ song song với các trục toạ độ và ngoại tiếp hình cầu này. Cho $r > 0$, ta chia hình hộp đều này thành các hình hộp đều nhỏ bằng các phẳng song song với các mặt của hình hộp lớn và các phẳng này cách nhau một đoạn $\alpha \leq \frac{r}{\sqrt{n}}$. Số các hình hộp nhỏ này là hữu hạn. Lúc đó rõ ràng A được phủ bởi hữu hạn các hình cầu bán kính $\leq r$, ngoại tiếp các hình hộp nhỏ. Vậy A là hoàn toàn bị chặn. ∎

5.2.5 Mệnh đề. *Nếu $A \subset X$ là tập hoàn toàn bị chặn thì bao đóng $\overline{A}$ của A cũng là một tập hoàn toàn bị chặn.*

Chứng minh. Giả sử r là số dương cho trước. Nếu A là tập hoàn toàn bị chặn thì có hữu hạn hình cầu đóng $B'(a_i, r)$, $(i = 1,..., n)$ sao cho $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B'(a_i, r)$. Nhưng do $\bigcup_{i=n}^{n} B'(a_i, r)$ là một tập đóng nên tập này cũng chứa $\overline{A}$. Điều này có nghĩa là $\overline{A}$ cũng hoàn toàn bị chặn. ∎

Để diễn tả khái niệm hoàn toàn bị chặn bên cạnh dùng họ hữu hạn các hình cầu phủ tập đã cho, nhiều lúc người ta còn dùng khái niệm $\epsilon -$ lưới để được thuận lợi hơn.

5.2.6 Định nghĩa. Cho $A \subset X$ và ϵ là một số dương. Tập $N \subset X$ được gọi là một $\epsilon-$ *lưới* đối với A nếu mọi $x \in A$ ta tìm được $y \in N$ để $d(x, y) < \epsilon$.

Ta gọi các điểm thuộc N là các mắt lưới. Rõ ràng A có một $\epsilon-$ lưới N khi và chỉ khi A được phủ bởi một họ các hình cầu bán kính ϵ với tâm là các mắt lưới. Do đó định nghĩa của tập hoàn toàn bị chặn có thể phát biểu lại như sau .

Tập $A \subset X$ là hoàn toàn bị chặn nếu với mọi $\epsilon > 0$ có thể tìm được cho A một $\epsilon-$ lưới hữu hạn (nghĩa là lưới N là tập hữu hạn).

5.3 Định lí Hausdorff.

5.3.1 Định lí. (Hausdorff). *Giả sử $A \subset X$ là tập tập compact. Khi đó A là tập đóng và hoàn toàn bị chặn. Ngược lại nếu A là tập đóng, hoàn toàn bị chặn và thêm nữa X là không gian mêtric đầy đủ thì A là tập compact.*

Chứng minh.

Điều kiện cần. Giả sử A là tập compact. Nếu $(x_n)_n$ là dãy trong A và $x_n \to x_0$ thì theo định nghĩa tập compact, tồn tại dãy con $(x_{k_n})_n \subset (x_n)_n$, $x_{k_n} \to x_0' \in A$. Nhưng lúc đó x_{k_n} cũng hội tụ về x_0 nên $x_0 = x_0' \in A$. Vậy A là tập đóng. Tiếp theo, ta dùng phản chứng. Giả sử tập A compact nhưng không hoàn toàn bị chặn. Khi đó có $\epsilon > 0$ sao cho không thể phủ được A bằng một số hữu hạn hình cầu bán kính ϵ. Lấy $x_1 \in A$. Hình cầu $B(x_1, \epsilon)$ không phủ được A nên có $x_2 \in A$ sao cho $d(x_2, x_1) \geq \epsilon$. Các hình cầu $B(x_1, \epsilon)$, $B(x_2, \epsilon)$ cũng không phủ được A nên có $x_3 \in A$ sao cho $d(x_3, x_1) \geq \epsilon$ và $d(x_3, x_2) \geq \epsilon$. Tiếp tục cách này bằng quy nạp, ta xây dựng được dãy $(x_n)_n \subset A$ với $d(x_n, x_m) \geq \epsilon$ với mọi $n \neq m$. Bất cứ dãy con nào của dãy $(x_n)_n$ này đều không phải là dãy cơ bản (vì khoảng cách giữa hai điểm phân biệt của dãy con ấy đều $\geq \epsilon$) nên nó không thể hội tụ. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa và cho phép ta kết thúc chứng minh điều kiện cần.

Điều kiện đủ. Bây giờ giả sử X đầy đủ còn A là một tập đóng và hoàn toàn bị chặn trong X. Lấy $(x_n)_n \subset A$. Ta hãy phủ A bằng một số hữu hạn hình cầu bán kính bằng 1. Kí hiệu B_1 là một trong các hình cầu trên có chứa vô số các hạng tử của dãy $(x_n)_n$ và gọi $(x_n^1)_n$ là dãy con của $(x_n)_n$ thành lập nên bởi vô số các phần tử đó. Tập A lại được phủ bằng một số hữu hạn hình cầu bán kính $\frac{1}{2}$ nên có một hình cầu kí hiệu B_2 chứa vô số các (x_n^1) và ta gọi dãy con của $(x_n^1)_n$ chứa trong B_2 là $(x_n^2)_n$. Tiếp tục quá trình quy nạp này ta thu được một dãy các dãy $(x_n)_n$, $(x_n^1)_n$, $(x_n^2)_n$,... mà dãy sau là dãy con của dãy đứng trước, đồng thời $(x_n^k)_n \subset B_k$, (hình cầu B_k có bán kính bằng $\frac{1}{k}$). Lấy một phần tử x_{n_1} trong $(x_n^1)_n$. Từ vô số các hạng tử x_n^2 ta chọn ra được x_{n_2} với $n_2 > n_1$ rồi chọn x_{n_3} trong $(x_n^3)_n$ với $n_3 > n_2$,... Như vậy ta lập được dãy con $(x_{n_j})_j \subset (x_n)_n$. Đây là một dãy cơ bản vì với $k, l \in \mathbf{N}$ bất kì, giả sử $k \geq l$ thì $(x_n^k)_n \subset (x_n^l)_n$ nên x_{n_k}, x_{n_l} cũng thuộc hình cầu B_l. Do đó $d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq \frac{2}{l} \to 0$ khi $k, l \to \infty$. Vì X đầy đủ nên $x_{n_k} \to x_0 \in X$ khi $k \to \infty$. Hơn nữa do A là đóng nên $x_0 \in A$. Vậy A là tập compact. ∎

5.3.2 Hệ quả. *Trong không gian mêtric đầy đủ X, tập đóng $A \subset X$ là tập compact nếu mọi $\epsilon > 0$ ta có thể tìm được một $\epsilon-$ lưới compact B đối với A.*

Chứng minh. Cho $r > 0$, theo giả thiết, tồn tại $\epsilon = \frac{r}{2}-$ lưới compact B đối với A và cũng do B compact nên hoàn toàn bị chặn, thành thử B có một $\frac{r}{2}-$ lưới hữu hạn. Lúc đó N chính là $r-$ lưới hữu hạn đối với A vì nếu $x \in A$ thì tồn tại $b \in B$ để $d(x, b) < \frac{r}{2}$ và với b này sẽ có $y \in N$ để $d(y, b) < \frac{r}{2}$. Lúc đó $d(x, y) \leq d(x, b) + d(b, y) < r$. Vậy A là hoàn toàn bị chặn. Áp dụng Định lí Hausdorff ta kết thúc việc chứng minh. ∎

5.3.3 Hệ quả.

1. Mọi tập compact đều bị chặn.

2. Đối với các tập đóng trong $\mathbf{R}^n$, các khái niệm bị chặn, hoàn toàn bị chặn và compact là tương đương với nhau.

Chứng minh. Tính chất 1 là rõ ràng. Để ý trong $\mathbf{R}^n$ tập A bị chặn khi và chỉ khi nó hoàn toàn bị chặn. Hơn nữa, $\mathbf{R}^n$ là không gian mêtric đầy đủ nên áp dụng Định lí Hausdorff ta có ngay kết quả 2. ∎

5.3.4 Định lí. *Nếu X là một không gian compact thì X là đầy đủ và khả li.*

Chứng minh.

a) Giả sử $(x_n)_n$ là một dãy cơ bản trong X. Vì X compact nên có dãy con $(x_{k_n})_n \subset (x_n)_n$, $x_{k_n} \to x_0 \in X$. Nhưng khi đó chính dãy $(x_n)_n$ cũng hội tụ về x_0 nên X là không gian mêtric đầy đủ.

b) Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, tập X được phủ bằng một số hữu hạn các hình cầu $B\left(x_{n_j}, \dfrac{1}{n}\right)$, $j = 1, \ldots, m_n$.:

$$X = \bigcup_{j=1}^{m_n} B\left(x_{n_j}, \frac{1}{n}\right). \tag{*}$$

Đặt $A = \left\{x_{n_j} : j = 1, \ldots, m_n,\ n = 1, 2, \ldots\right\}$ là tập hợp tất cả tâm của các hình cầu này. Ta thấy A là tập đếm được. Mặt khác với mọi $x \in X$ và với $\epsilon > 0$ tuỳ ý ta chọn n đủ lớn để $\dfrac{1}{n} < \epsilon$. Từ (*) suy ra x thuộc một hình cầu $B\left(x_{n_j}, \dfrac{1}{n}\right)$ nào đó nên $d(x, x_n) < \dfrac{1}{n} < \epsilon$. Vậy A trù mật trong X nên X là một không gian khả li. ∎

5.4 Compact với phủ mở.

5.4.1 Định nghĩa. Cho X là một không gian mêtric và $A \subset X$. Họ $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ các tập con của X được gọi là một *phủ* của A nếu $A \subset \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$.

Ta gọi phủ $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ của A là *phủ mở* (t.ư., *phủ hữu hạn*) nếu $\forall\alpha \in I$, G_α là tập mở (t.ư., I là tập hữu hạn). Nếu tồn tại tập con $J \subset I$ sao cho $(G_\alpha)_{\alpha\in J}$ vẫn còn phủ A thì $(G_\alpha)_{\alpha\in J}$ gọi là *phủ con* của A.

5.4.2 Định lí. (Heine-Borel) *Tập con A của không gian mêtric X là compact khi và chỉ khi với mọi phủ mở $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ của A đều có chứa một phủ con hữu hạn.*

Chứng minh. Điều kiện đủ. Giả sử bất kì phủ mở nào của A đều có phủ con hữu hạn nhưng A không compact. Theo định nghĩa, tồn tại một dãy $(x_n)_n \subset A$ sao cho $x_n \neq x_{n'}$ khi $n \neq n'$ nhưng không có dãy con nào hội tụ cả. Điều này có nghĩa là mỗi $x \in A$ không là giới hạn của bất kì dãy con nào của $(x_n)_n$ nên tồn tại một hình cầu mở $B_x = B(x, r_x)$ chỉ chứa hữu hạn các x_n. Họ $(B_x)_{x\in A}$ lập thành một phủ mở của A nên theo giả thiết, tồn tại phủ con hữu hạn : $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} B_{x_i}$. Mỗi hình cầu B_{x_i}, $i = 1,..., k$ chỉ chứa một số hữu hạn x_n nên hoá ra dãy $(x_n)_n$ chỉ có hữu hạn các phần tử phân biệt. Điều vô lí này cho ta kết luận A phải là compact.

Điều kiện cần. Cho A compact và giả sử có một phủ mở $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ của A nhưng không chứa phủ con hữu hạn nào. Vì A hoàn toàn bị chặn nên nó được phủ bởi một số hữu hạn hình cầu đóng bán kính bằng 1. Ta kí hiệu B_1 là một trong các hình cầu đóng ấy sao cho $A_1 = A \cap B_1$ không thể phủ được bằng một số hữu hạn các tập G_α (nếu khác đi thì A sẽ phủ được bằng hữu hạn các tập G_α, trái với giả thiết phản chứng.) Tập A_1 chứa trong tập hoàn toàn bị chặn A nên A_1 được phủ bằng một số hữu hạn hình cầu bán kính $\frac{1}{2}$, trong số đó có một cái kí hiệu B_2 sao cho $A_2 = A_1 \cap B_2 \subset A$ không thể phủ được bởi hữu hạn các tập G_α. Tập A_2 cũng hoàn toàn bị chặn nên cũng được phủ bởi hữu hạn hình cầu bán kính $\frac{1}{3}$,... Tiếp tục quá trình này, ta thu được một dãy hình cầu đóng B_n và các tập khác rỗng $A_n = A_{n-1} \cap B_n$, $n = 1, 2,...$ trong mỗi A_n ta lấy ra một điểm x_n. Do $A_n \subset A_{n-1} \subset \cdots \subset A$ nên $(x_n)_n$ là dãy trong A thì sẽ có dãy con $(x_{k_n})_n \subset (x_n)_n$ hội tụ đến $x_0 \in A$. Họ $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ phủ A nên có $\alpha_0 \in I$ để $x_0 \in G_{\alpha_0}$. Vì G_{α_0} mở nên tồn tại $r > 0$ để $B(x_0, r) \subset G_{\alpha_0}$. Từ $d(x_{k_n}, x_0) \to 0$ và $\dfrac{1}{k_n} \to 0$ khi $n \to \infty$, chọn n_0 đủ lớn ta sẽ có $d(x_{k_{n_0}}, x_0) < \dfrac{r}{2}$ và $\dfrac{1}{k_{n_0}} < \dfrac{r}{4}$. Lúc ấy với mọi $x \in A_{k_{n_0}}$ ta có

$$d(x, x_0) \le d(x, x_{k_{n_0}}) + d(x_{k_{n_0}}, x_0) \le \frac{2}{k_{n_0}} + \frac{r}{2} < r$$

tức là $A_{k_{n_0}} \subset B(x_0, r) \subset G_{\alpha_0}$ nghĩa là có tập $A_{k_{n_0}}$ được phủ bằng một tập G_{α_0}, trái với cách xây dựng các tập A_n. Mâu thuẫn này chứng tỏ mọi phủ mở của A phải có một phủ con hữu hạn. Định lí được chứng minh đầy đủ. ∎

5.4.3 Định nghĩa. Ta gọi họ các tập con $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ của tập X là *họ có tâm* nếu mọi tập hữu hạn $J \subset I$ thì $\bigcap_{\alpha\in J} F_\alpha \ne \emptyset$.

Từ Định lí Heine-Borel, ta có hệ quả sau :

5.4.4 Hệ quả. *Không gian mêtric X là compact khi và chỉ khi mọi họ có tâm các tập đóng của X có giao khác rỗng.*

Chứng minh. Giả sử X compact và $(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ có tâm các tập con đóng của X. Khi đó $G_\alpha = X \setminus F_\alpha$ là mở. Nếu $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \emptyset$ thì

$$X = X \setminus \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} (X \setminus F_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$$

nên $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một phủ mở của X. Theo Định lí Heine-Borel, X được phủ bởi một số hữu hạn G_α :

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} F_{\alpha_i} = X \setminus (\bigcap_{i=1}^{k} F_{\alpha_i}).$$

Như thế $\bigcap_{i=1}^{k} F_{\alpha_i} = \emptyset$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa họ có tâm. Do đó $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha \ne \emptyset$.

Ngược lại, nếu $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ là phủ mở bất kì của X. Đặt $F_\alpha = G_\alpha^c.(F_\alpha)_{\alpha\in I}$ không phải là họ có tâm của X vì nếu thế thì $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = (\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha)^c = \emptyset$, trái giả thiết, nên có hữu hạn F_{α_i}, $(i = 1,..., k)$ nào đó để $\bigcap_{i=1}^{k} F_{\alpha_i} = \emptyset$. Điều này có nghĩa là tập hữu hạn các G_{α_i} phủ X. Vậy X compact. ▮

5.5 Ánh xạ và hàm số liên tục trên tập compact.

Các ánh xạ liên tục trên các tập compact có những tính chất tốt như hàm số liên tục trên khoảng đóng $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Ta có :

5.5.1 Định lí. *Cho X, Y là hai không gian mêtric, $f : X \to Y$ là ánh xạ liên tục và A là tập con compact của X. Khi đó ảnh $f(A)$ của A là tập compact trong Y.*

Chứng minh. Cho $(y_n)_n$ là dãy bất kì trong $f(A)$. Khi đó trong A tồn tại dãy $(x_n)_n$ sao cho $y_n = f(x_n)$. Vì A compact nên có dãy con $(x_{n_k})_k \subset (x_n)_n$ sao cho $x_{n_k} \to x_0 \in A$ $(k \to \infty)$. Mặt khác f liên tục nên dãy con $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ hội tụ đến $f(x_0) \in f(A)$. Theo định nghĩa, $f(A)$ compact. ▮

5.5.2 Định lí. *Cho $f : X \to Y$ liên tục, A là tập con compact của X. Khi đó f liên tục đều trên A.*

Chứng minh. Giả sử f không liên tục đều trên A. Khi đó tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mọi $\delta > 0$ tồn tại $x', x'' \in A$ với $d(x', x'') < \delta$ nhưng $d(f(x'), f(x'')) \geq \epsilon$. Cho δ lần lượt các giá trị $\frac{1}{n}$, $n = 1, 2,...$ ta thu được hai dãy (x_n') và (x_n'') trong A có tính chất $d(x_n', x_n'') < \frac{1}{n}$ và $d(f(x_n'), f(x_n'')) \geq \epsilon$. Vì A compact, dãy (x_n') có dãy con $(x_{n_k}') \to x_0 \in A$. Từ bất đẳng thức :

$$d(x_{n_k}'', x_0) \leq d(x_{n_k}'', x_{n_k}') + d(x_{n_k}', x_0) < \frac{1}{n_k} + d(x_{n_k}', x_0) \to 0$$

khi $k \to \infty$ ta cũng có $x_{n_k}'' \to x_0$.

Do f liên tục, trong bất đẳng thức $d\left(f\left(x'_{n_k}\right), f\left(x''_{n_k}\right)\right) \geq \epsilon$, cho $k \to \infty$ ta có $0 = d\left(f\left(x_0\right), f\left(x_0\right)\right) \geq \epsilon$. Điều vô lí này nói lên rằng f phải liên tục đều trên A. ∎

Tiếp theo, ta xét hàm số thực xác định trên tập compact.

5.5.3 Định lí. *Cho A là tập compact trong X và hàm $f: A \to \mathbf{R}$ liên tục. Khi đó f bị chặn và đồng thời đạt được giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất trên A.*

Chứng minh. Vì f liên tục, A compact nên $f(A)$ là tập compact trong $\mathbf{R}$. Vậy $f(A) \subset \mathbf{R}$ là tập đóng và bị chặn. Đặt $M = \sup f(A)$, $m = \inf f(A)$ thì M, m là điểm dính của $f(A)$ nên $M, m \in f(A)$ (vì từ định nghĩa của $\sup f(A)$, $\inf f(A)$, sẽ tồn tại các dãy $y_n, z_n \in f(A): y_n \to M$, $z_n \to m$). Như thế tồn tại các điểm $x_0, x_1 \in A$ sao cho với mọi $x \in A$:

$$m = f\left(x_0\right) \leq f(x) \leq f\left(x_1\right) = M.$$

Điều này có nghĩa là f bị chặn và đạt được giá trị bé nhất và lớn nhất trên tập A. ∎

5.6 Xấp xỉ hàm liên tục bằng đa thức.

Giả sử $C_{[0,1]}$ là không gian mêtric, các hàm số liên tục trên $[0, 1]$ với mêtric $d =$ "max". Kí hiệu W là tập các đa thức $g(x)$ xác định trên $[0, 1]$ có dạng $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Ta chứng minh W trù mật trong $C_{[0,1]}$.

5.6.1 Định lí Weierstrass I. *Mỗi hàm số liên tục $f \in C_{[0,1]}$ là giới hạn của một dãy đa thức hội tụ đều.*

Nói cách khác, với mọi $f \in C_{[0,1]}$, ta có

$$\forall \epsilon > 0, \exists g \in W: d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| < \epsilon.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $f(0) = f(1)$.

Thật vậy, nếu hàm f không thoả, ta xét hàm f^* xác định bởi công thức

$$f^*(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)]$$

thì $f^*(0) = f^*(1) = 0$ và nếu f^* được biểu diễn thành giới hạn của dãy đa thức hội tụ đều thì f cũng vậy vì f sai khác với f^* một đa thức bậc nhất.

Đặt $f(x)=0$ với $x \notin [0, 1]$. Khi đó f là hàm liên tục đều trên $\mathbf{R}$. Ta sẽ "nhân chập" hàm f với một dãy các đa thức xác định để thu được một dãy đa thức hội tụ đều về f. Kí hiệu

$$Q_n(x)=c_n\left(1-x^2\right)^n \geq 0,\ n=1,\ 2,... \tag{1}$$

trong đó c_n là các số dương sao cho

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x)\,dx = 2\int_0^1 Q_n(x)dx = 1,\ \ n=1,\ 2,... \tag{2}$$

Ta có

$$1 = 2c_n\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx \geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}\left(1-x^2\right)^n dx$$

$$\geq 2\int_0^{1/\sqrt{n}}\left(1-nx^2\right)dx = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{3}$$

(Để ý, ta đã dùng bất đẳng thức Bermoulli : $\left(1-x^2\right)^n \geq \left(1-nx^2\right)$

Như vậy $c_n < \sqrt{n}$.

Từ (3), với bất kì $\delta \in (0,\ 1)$ ta có

$$Q_n(x)=c_n\left(1-x^2\right)^n \leq \sqrt{n}\left(1-x^2\right)^n \leq \sqrt{n}\left(1-\delta^2\right)^n \tag{4}$$

với mọi x thoả điều kiện $\delta \leq |x| \leq 1$. Do đó $Q_n(x)$ hội tụ đều về 0 trên tập $[-1,\ -\delta]\cup[\delta,\ 1]$. Tiếp theo, ta "nhân chập" hàm f và đa thức $Q_n(x)$ bằng cách đặt :

$$P_n(x)=\int_{-1}^{1} f(x+t)Q_n(t)\,dt,\ x\in[0,\ 1].$$

Dùng giả thiết $f(x)=0$ ngoài $[0,\ 1]$ và đổi biến số $x+t=y$ ta được :

$$P_n(x)=\int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)\,dt = \int_0^1 f(y)Q_n(y-x)dy$$

$$=\int_0^1 f(y)\left[1-(y-x)^2\right]^n dy.$$

Khai triển biểu thức $\left(1-(y-x)^2\right)^n$, sắp xếp theo luỹ thừa tiến của x và dùng tính chất tuyến tính của tích phân ta có được $P_n(x)$ là một đa thức đối với x. Việc còn lại là ta chứng minh $P_n(x)$ hội tụ đều về $f(x)$ trên $[0,\ 1]$.

Cho $\epsilon > 0$, chọn $0 < \delta < 1$ để

$$|f(y) - f(x)| \le \frac{\epsilon}{2} \text{ khi } |x - y| < \frac{\delta}{2}$$

(vì f liên tục đều trên $\mathbf{R}$). Đặt $M = \sup_{x \in [0,\, 1]} |f(x)|$. Từ (2), (4), với mọi $x \in [0,\, 1]$ ta có

$$\begin{aligned}
|P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^{1} f(x+t) - f(x) Q_n(t)\, dt \right| \\
&\le \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)| Q_n(t)\, dt \\
&\le 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)\, dt + \frac{\epsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)\, dt + 2M \int_{\delta}^{1} Q_n(t)\, dt \\
&\le 4M\sqrt{n}\left(1 - \delta^2\right)^n + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,
\end{aligned}$$

với n đủ lớn.

Vậy định lí được chứng minh. ∎

5.6.2 Hệ quả. *Với mọi $f \in C_{[0,\, 1]}$ và mọi $\epsilon > 0$ đều tồn tại đa thức $g^*(x) \in W$ với hệ số hữu tỉ sao cho*

$$d(f,\, g^*) = \max_{x \in [0,\, 1]} |f(x) - g^*(x)| < \epsilon.$$

Chứng minh. Giả sử $f \in C_{[0,\, 1]}$ và $\epsilon > 0$ cho trước. Theo Định lí Weierstrass I, tồn tại đa thức $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ sao cho

$$d(f,\, g) = \max_{x \in [0,\, 1]} |f(x) - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Chọn các số hữu tỉ $b_0,\, b_1, \ldots,\, b_n$ đủ gần $a_0,\, a_1, \ldots,\, a_n$ sao cho

$$\sum_{i=0}^{n} |b_i - a_i| < \frac{\epsilon}{2}, \text{ và đặt}$$

$$g^*(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n.$$

Khi đó với mọi $x \in [0,\, 1]$, ta có

$$\begin{aligned}|g(x)-g^*(x)| &= |(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+\cdots+(a_n-b_n)x^n| \\ &\le \sum_{i=0}^{n}|a_i-b_i||x^i| \le \sum_{i=0}^{n}|a_i-b_i| < \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Vì vậy

$$|f(x)-g^*(x)| \le |f(x)-g(x)|+|g(x)-g^*(x)| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

với mọi $x\in[0,\ 1]$. Từ đó $d(f,\ g^*)=\max\limits_{x\in[0,\ 1]}|f(x)-g^*(x)|<\epsilon$. ∎

5.6.3 Hệ quả. *Không gian mêtric $C_{[0,1]}$ là không gian khả li.*

Chứng minh. Kí hiệu W_1 là tập các đa thức với hệ số hữu tỉ xác định trên $[0,\ 1]$. Khi đó W_1 đếm được. Theo Hệ quả 5.6.2 thì W_1 trù mật trong $C_{[0,\ 1]}$ nên $C_{[0,\ 1]}$ là khả li. ∎

Chú ý. Các kết quả của Định lí Weierstrass I và các Hệ quả 5.6.2, 5.6.3 vẫn còn đúng trong không gian $C_{[a,\ b]}$ với $a<b,\ a,\ b\in\mathbf{R}$. Thật vậy, không gian $C_{[a,\ b]}$ đẳng cự với $C_{[0,\ 1]}$ qua phép đẳng cự

$$C_{[a,\ b]}\ni f\xrightarrow{\varphi} f^*\in C_{[0,\ 1]},\ \ f^*(t)=f\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$$

và mỗi đa thức biến thành một đa thức qua phép biến đổi φ nên các tính chất của $C_{[0,\ 1]}$ được bảo toàn trong $C_{[a,\ b]}$.

5.6.4 Định lí Weierstrass II. *Với mỗi hàm số liên tục $f(x)$ trên $\mathbf{R}$, tuần hoàn theo chu kì 2π và với mỗi số dương ϵ, sẽ tồn tại một đa thức lượng giác*

$$s(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

sao cho với mọi $x\in\mathbf{R}$ ta có

$$|f(x)-s(x)|<\epsilon.$$

Chứng minh. Xét các hàm số

$$\varphi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

$$\psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \sin x.$$

Đây là các hàm số chẵn, liên tục tuần hoàn theo chu kì 2π. Cho x biến thiên trên $[0, \pi]$ và đặt $x = \arccos t$, ta thấy rằng các hàm số

$$\Phi(t) = \varphi(\arccos t), \ \Psi(t) = \psi(\arccos t)$$

liên tục trong đoạn $[-1, 1]$. Dùng Định lí Weierstrass I, tồn tại các đa thức $g(t)$, $h(t)$ xác định trên $[-1, 1]$ sao cho với mọi $t \in [-1, 1]$ ta có

$$|\Phi(t) - g(t)| < \frac{\epsilon}{4}, \ |\Psi(t) - h(t)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Khi ấy với mọi $x \in [0, \pi]$ thì

$$|\varphi(x) - g(\cos x)| < \frac{\epsilon}{4}, \ |\psi(x) - h(\cos x)| < \frac{\epsilon}{4} \qquad (1)$$

và vì $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\cos x$ là những hàm số chẵn, tuần hoàn theo chu kì 2π nên các bất đẳng thức (1) cũng đúng với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Theo cách đặt ở trên, ta có $f(x)\sin x = \varphi(x)\sin x + \psi(x)$ nên

$$|f(x)\sin x - g(\cos x)\sin x - h(\cos x)|$$

$$\leq |\varphi(x) - g(\cos x)||\sin x| + |\psi(x) - h(\cos x)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Kí hiệu $u(x) = g(\cos x)\sin x + h(\cos x)$ thì $u(x)$ là một đa thức lượng giác và ta có

$$|f(x)\sin x - u(x)| < \frac{\epsilon}{2}. \qquad (2)$$

Làm tương tự với hàm số $f_1(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, ta cũng có

$$\left|f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin x - v(x)\right| < \frac{\epsilon}{2}$$

với $v(x)$ cũng là một đa thức lượng giác. Thay $\frac{\pi}{2} - x$ bởi x, ta có

$$\left|f(x)\cos x - v\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| < \frac{\epsilon}{2}. \qquad (3)$$

Kết hợp (2) và (3) ta được

$$\left|f(x)-u(x)\sin x-v\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x\right|$$

$$=\left|f(x)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)-u(x)\sin x-v\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x\right|$$

$$\leq\left|f(x)\sin x-u(x)\right|+\left|f(x)\cos x-v\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|<\epsilon.$$

Do tính tuần hoàn, với mọi $x\in\mathbf{R}$ ta có $|f(x)-s(x)|\leq\epsilon$, trong đó

$$s(x)=u(x)\sin x+u\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x$$

là một đa thức lượng giác. ∎

5.6.5 Định lí Dini. *Giả sử X là một không gian mêtric compact và $(f_n)_n$ là một dãy các hàm số liên tục trên X. Nếu $(f_n)_n$ là một dãy tăng (t.ư., giảm) hội tụ từng điểm đến một hàm số liên tục g trên X thì $(f_n)_n$ hội tụ đều đến $g(x)$ trên X.*

Chứng minh. Nhắc lại rằng $(f_n)_n$ hội tụ đều về g trên X nếu

$$(\forall\epsilon>0)(\exists n_0)(\forall n\geq n_0)(\forall x\in X):|f_n(x)-g(x)|<\epsilon.$$

Để định ý, giả sử $(f_n)_n$ là dãy tăng. Cho $\epsilon>0$, vì với mọi $x\in X$, dãy $(f_n(x))_n$ hội tụ đến $g(x)$ nên có số tự nhiên $n(x)$ sao cho khi $n\geq n(x)$ thì

$$0\leq g(x)-f_n(x)<\epsilon.$$

Mặt khác, vì các hàm g và $f_{n(x)}$ liên tục tại x nên có hình cầu mở $B(x,\, r_x)$ sao cho nếu $x'\in B(x,\, r_x)$ thì

$$\left|f_{n(x)}(x')-f_{n(x)}(x)\right|<\frac{\epsilon}{3} \text{ và } |g(x)-g(x')|<\frac{\epsilon}{3}.$$

Như vậy với mọi $x'\in B(x,\, r_x)$ ta có

$$g(x') - f_{n(x)}(x') \le |g(x') - g(x)| + |g(x) - f_{n(x)}(x)| +$$

$$+ |f_{n(x)}(x) - f_{n(x)}(x')| \le \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Họ các hình cầu mở $(B(x, r_x))_{x \in X}$ là một phủ mở của tập compact X nên có phủ con hữu hạn :

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, r_{x_i}).$$

Đặt $n_0 = \max\{n(x_1), ..., n(x_k)\}$. Khi đó với $n \ge n_0$ và với mọi $x \in X$ ta sẽ tìm được i, $(i = 1, ..., k)$ sao cho $x \in B(x_i, r_{x_i})$. Như thế

$$g(x) - f_n(x) \le g(x) - f_{n_0}(x) \le g(x) - f_{n(x_i)}(x) \le \epsilon.$$

Vậy định lí được chứng minh. ∎

5.7 Định lí Ascoli – Azelà.

Việc khảo sát tính compact của các tập trong không gian mêtric tuỳ ý nói chung là khó. Tuy nhiên trong không gian $C_{[a,b]}$, ta có tiêu chuẩn khá cụ thể. Cho A là một tập con của không gian $C_{[a,b]}$. Ta có các khái niệm sau đây :

1. Tập A được gọi là *bị chặn tại* $x_0 \in [a, b]$ nếu có $K > 0$ sao cho với mọi $f \in A$ ta có $|f(x_0)| \le K$. Tập A được gọi là *bị chặn từng điểm* (t.ư., *bị chặn đều*) trên $[a, b]$ nếu A bị chặn tại mọi điểm $x \in [a, b]$ (t.ư., $(\exists M > 0)$ sao cho với mọi $f \in A$, $x \in [a, b]$ thì $|f(x)| \le M$).

2. Tập A được gọi là *đồng liên tục* tại $x_0 \in [a, b]$ nếu mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in [a, b]$, mọi $f \in A$, nếu $|x - x_0| < \delta$ thì $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Nếu A đồng liên tục tại mọi $x \in [a, b]$ thì ta nói A là *đồng liên tục trên* $[a, b]$.

3. Tập A được gọi là *đồng liên tục đều* trên $[a, b]$ nếu với mọi ϵ tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x, y \in [a, b]$, mọi $f \in A$, nếu $|x - y| < \delta$ thì $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

Sau đây là điều kiện cần để tập A compact.

5.7.1 Định lí. *Giả sử A là một tập compact tương đối trong $C_{[a,b]}$. Khi đó tập A bị chặn đều và đồng liên tục đều trên $[a, b]$.*

Chứng minh. Do $A \subset \overline{A}$ compact nên A là tập bị chặn. Suy ra $A \subset B'(f_0, K) \subset C_{[a,b]}$. Như vậy với mọi $f \in A$, $x \in [a, b]$ ta có

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_0(x)| + |f_0(x)|$$
$$\leq d(f, f_0) \leq K = \max_{x\in[a,b]} |f_0(x)| = M$$

Tiếp theo, cho $\epsilon > 0$. A cũng hoàn toàn bị chặn nên có $\frac{\epsilon}{2}$ – lưới hữu hạn đối với tập A. Mỗi hàm f_i liên tục trên $[a, b]$ nên liên tục đều trên đó : với số dương $\frac{\epsilon}{3}$ tồn tại các số dương δ_i để $|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ nếu $|x - y| < \delta_i$, $i = 1, ..., n$. Đặt $\delta = \min\{\delta_1, ..., \delta_n\}$. Nếu $x, y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta$ và với mọi $f \in A$ ta chọn f_i sao cho $d(f, f_i) < \frac{\epsilon}{3}$ thì

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)|$$
$$\leq 2d(f, f_i) + |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Vậy tập A là đồng liên tục đều trên $[a, b]$. ∎

Điều kiện đủ để tập $A \subset C_{[a,b]}$ là compact tương đối được đưa ra nhẹ hơn (tất nhiên dễ kiểm chứng hơn). Tuy nhiên kết hợp với điều kiện cần, ta thấy chúng tương đương với nhau.

5.7.2 Định lí. *Cho A là một tập con của không gian $C_{[a,b]}$ thoả mãn hai điều kiện sau :*

a) A bị chặn từng điểm trên $[a, b]$.

b) A đồng liên tục trên $[a, b]$.

Khi đó A là một tập hợp compact tương đối trong $C_{[a,b]}$.

Chứng minh. Do $C_{[a,b]}$ là không gian mêtric đầy đủ nên ta chỉ cần chứng minh A là hoàn toàn bị chặn, tức là với mỗi số $r > 0$ tập A được phủ bởi một số hữu hạn hình cầu trong $C_{[a,b]}$ có bán kính r.

Vì A đồng liên tục trên $[a, b]$ nên với số dương $\frac{r}{3}$, với mỗi $x \in [a, b]$ tồn tại $\delta(x) > 0$ sao cho nếu $y \in [a, b]$, $|x - y| < \delta(x)$ thì

$$|f(x) - f(y)| < \frac{r}{3}, \text{ với mọi } f \in A.$$

Họ $\left(B(x, \delta(x))\right)_{x \in [a, b]}$ các hình cầu mở là một phủ mở của tập compact $[a, b]$ nên phải tồn tại phủ con hữu hạn :

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \delta_i), \ (\delta_i = \delta_i(x), \ i = 1, \dots, n).$$

Cố định các điểm $x_1, \dots, x_n$ này lại và xét ánh xạ $\Phi : C_{[a, b]} \to \mathbf{R}^n$ xác định bởi

$$\Phi(f) = \left(f(x_1), \dots, f(x_n)\right).$$

Do điều kiện a), tồn tại các số dương $K_1, \dots, K_n$ sao cho

$$|f(x_i)| \le K_i, \text{ với mọi } f \in A.$$

Đặt $K = \max\{K_1, \dots, K_n\}$, khi đó với mọi $f \in A$, khoảng cách từ điểm $\left(f(x_1), \dots, f(x_n)\right)$ đến $0 = (0, \dots, 0)$ trong $\mathbf{R}^n$ là :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|^2} \le \sqrt{n} K.$$

Điều này có nghĩa là tập $\Phi(A)$ bị chặn trong $\mathbf{R}^n$ nên nó phải hoàn toàn bị chặn. Do đó $\Phi(A)$ được phủ bởi hữu hạn hình cầu với tâm $\xi_j = \left(\xi_j^1, \dots, \xi_j^n\right)$, $j = 1, \dots, m$ và bán kính $\frac{r}{6}$. Ta giả thiết tập $\Phi(A)$ và các hình cầu $B\left(\xi_j, \frac{r}{6}\right)$ có giao khác rỗng vì nếu trái lại, ta bỏ hình cầu đó đi.

Với mỗi $j = 1, \dots, m$ ta chọn một hàm $f_j \in A$ sao cho $\Phi(f_j) \in B\left(\xi_j, \frac{r}{6}\right)$. Bây giờ với $f \in A$, ta có

$$\begin{aligned} |f(x_i) - f_j(x_i)| &\le \left|f(x_i) - \xi_j^i\right| + \left|f_j(x_i) - \xi_j^i\right| \\ &< \frac{r}{6} + \frac{r}{6} = \frac{r}{3}. \end{aligned} \qquad (*)$$

Tiếp theo, ta hãy chứng minh rằng

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} B'(f_j, r).$$

Thật vậy, lấy f tuỳ ý thuộc A. Tồn tại chỉ số j để bất đẳng thức (*) xảy ra. Lấy $x \in [a, b]$ sẽ có i, $i = 1, \dots, n$ sao cho $x \in B(x_i, \delta_i)$. Nhờ (*), ta có

$$|f(x) - f_j(x)| \le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_j)|$$
$$+ |f(x_j) - f_j(x)| < \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = r.$$

Vậy $d(f, f_i) = \max\limits_{x \in [a, b]} |f(x) - f_j(x)| \le r$ hay $f \in B'(f_j, r)$. Nói cách khác, A hoàn toàn bị chặn trong không gian đầy đủ $C_{[a, b]}$ nên phải compact tương đối. Định lí được chứng minh đầy đủ. ∎

5.7.3 Ví dụ. Cho E là một tập bị chặn trong $C_{[a, b]}$. Chứng minh tập

$$A = \left\{ y \in C_{[a, b]} : y(t) = \int_a^t x(\tau)\, d\tau,\ x \in E \right\}$$

là tập compact tương đối trong $C_{[a, b]}$.

Chứng minh. Ta hãy kiểm tra các điều kiện a), b) của Định lí 5.7.2. Vì E là một tập bị chặn nên có số dương L sao cho với mọi $x \in E : \max\limits_{t \in [a, b]} |x(t)| \le L$. Do đó

$$|y(t)| = \left| \int_a^t x(\tau)\, d\tau \right| \le \int_a^t |x(\tau)|\, d\tau \le \int_a^t L\, d\tau \le (t - a)L.$$

Vậy A bị chặn từng điểm trên $[a, b]$. Mặt khác, với $\epsilon > 0$ tồn tại $\delta = \dfrac{\epsilon}{L} > 0$ sao cho với mọi t, $t' \in [a, b]$, $y \in A$ ta có

$$|y(t) - y(t')| = \left| \int_a^t x(\tau)\, d\tau - \int_a^{t'} x(\tau)\, d\tau \right|$$
$$= \left| \int_t^{t'} x(\tau)\, d\tau \right| \le |t - t'| L < \epsilon$$

nếu $|t - t'| < \delta$. Vậy A đồng liên tục trên $[a, b]$ nên A compact tương đối trong $C_{[a, b]}$. ∎

BÀI TẬP

5.1. Chứng minh hợp một số hữu hạn tập compact là một tập compact.

5.2. Giả sử X, Y là hai không gian mêtric compact. Chứng minh rằng không gian tích $X \times Y$ cũng là không gian compact.

5.3. Cho K là tập compact và F là tập đóng trong không gian mêtric sao cho $K \cap F = \emptyset$. Chứng minh

$$d(K, F) = \inf\{d(x, y) / x \in K, y \in F\} > 0$$

5.4. Cho $A_1, A_2, \ldots$ là dãy các tập hợp khác trống trong không gian mêtric X thoả mãn $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$

a) Giả sử tất cả các tập (A_n) đều là tập compact. Chứng minh $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

b) Nếu tất cả các tập (A_n) đều là tập đóng thì $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ có khác rỗng không ?

5.5. Cho $f : X \to Y$ là ánh xạ liên tục đều từ không gian mêtric X vào không gian mêtric Y. Giả sử A là tập hoàn toàn bị chặn trong X. Chứng minh $f(A)$ là tập hoàn toàn bị chặn trong Y.

5.6. Cho $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ là một hàm số liên tục với a, b là các số thực và $a < b$.

a) Giả sử A là một tập đóng chứa trong $[a, b]$. Chứng minh $f(A)$ là một tập đóng trong $\mathbf{R}$.

b) Nếu B là một khoảng mở chứa trong $[a, b]$, hỏi $f(B)$ có phải là tập mở trong $\mathbf{R}$ hay không ?

5.7. Cho X, Y là các không gian mêtric và f là ánh xạ từ X vào Y. Chứng minh rằng f liên tục trên X khi và chỉ khi f liên tục trên mọi tập con compact của X.

5.8. Giả sử X là một không gian mêtric compact và $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một phủ mở của X. Chứng minh rằng tồn tại một số dương r sao cho mọi hình cầu mở bán kính r đều được chứa trong ít nhất một tập G_α nào đó.

5.9. Giả sử X là một không gian compact và $f: X \to X$ là một ánh xạ thoả mãn điều kiện $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ với mọi $x, y \in X$, $x \neq y$. Chứng minh ánh xạ f có một điểm bất động duy nhất.

5.10. Cho X là một không gian mêtric compact và f là một ánh xạ từ X vào X sao cho với mọi cặp điểm (x, y) của không gian X ta đều có bất đẳng thức $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. Chứng tỏ rằng f là một phép đẳng cự từ X lên X.

5.11. Giả sử f là một hàm số liên tục trên $[0, 1]$ và thoả mãn

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng $f(x) \equiv 0$ trên $[0, 1]$.

5.12. Kiểm tra thử xem các tập nào sau đây là tập compact trong không gian $C_{[0,1]}$

a) $\{x_\alpha \in C_{[0,1]} : x_\alpha(t) = \sin \alpha t,\ \alpha \in [1, 2]\}$,

b) $\{x_n \in C_{[0,1]} : x_n(t) = t^n,\ n \in \mathbf{N}\}$.

Chương 2.

KHÔNG GIAN TÔPÔ

§ 1. ĐẠI CƯƠNG VỀ KHÔNG GIAN TÔPÔ

1.1 Định nghĩa. Cho X là một tập hợp khác rỗng. Một họ $\mathcal{T}$ các tập con của X được gọi là một *tôpô* trên X nếu $\mathcal{T}$ thoả mãn 3 tiên đề sau đây :

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

2. Nếu $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ các phần tử của $\mathcal{T}$ thì $\bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha \in \mathcal{T}$.

3. Nếu $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$ thì $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{T}$.

Bằng quy nạp, từ 3) ta thấy rằng nếu $G_1, G_2, ..., G_n \in \mathcal{T}$ thì $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$.

Giả sử trên X đã cho một tôpô $\mathcal{T}$. Khi đó cặp $(X, \mathcal{T})$ được gọi là một *không gian tôpô* xác định trên tập nền X. Các phần tử của $\mathcal{T}$ được gọi là *tập mở* và các phần tử $x \in X$ được gọi là các *điểm* của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$. Nếu không sợ nhầm lẫn, ta thường kí hiệu vắn tắt không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ là X.

1.2 Ví dụ.

1. Cho X là một tập hợp khác rỗng tuỳ ý. Lấy $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$. Khi đó 3 tiên đề của tôpô được thoả mãn một cách hiển nhiên.

2. Cho X là một tập tuỳ ý, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ là tập hợp tất cả các tập con của X. Lúc đó $\mathcal{T}$ cũng là một tôpô trên X.

Trên đây là hai ví dụ tầm thường về tôpô, tuy nhiên ta thường hay gặp nên chúng có tên riêng. Ở ví dụ thứ nhất, $\mathcal{T}$ được gọi là tôpô thô, ví dụ 2, tôpô này được gọi là tôpô rời rạc.

3. Giả sử (X, d) là một không gian mêtric. Gọi $\mathcal{T}$ là họ tất cả các tập mở trên X. Lúc đó $(X, \mathcal{T})$ là một không gian tôpô. Đặc biệt trên $\mathbf{R}$, tôpô xác định bởi mêtric $d(x, y) = |x - y|$ gọi là tôpô thông thường.

Để ý rằng trên cùng một tập hợp X cho trước, ta có thể cho nhiều tôpô khác nhau. Khi đó ta nhận được các không gian tôpô khác nhau (có chung một tập nền X). Nếu $\mathcal{T}_1$ và $\mathcal{T}_2$ là hai tôpô như vậy, khi đó ta có hai không gian tôpô $(X, \mathcal{T}_1)$ và $(X, \mathcal{T}_2)$. Cho $A \subset X$. Giả sử A là tập mở đối với $\mathcal{T}_1$ $(A \in \mathcal{T}_1)$ chẳng hạn, ta sẽ gọi A là $\mathcal{T}_1 -$ mở. Tương tự, ta gọi các tập A là $\mathcal{T}_i -$ đóng, $\mathcal{T}_i -$ lân cận v.v ... , $i = 1, 2$.

Bây giờ $\mathcal{T}_1$ và $\mathcal{T}_2$ là hai tôpô trên X thoả điều kiện $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, thì ta gọi $\mathcal{T}_1$ *yếu hơn* $\mathcal{T}_2$ hay $\mathcal{T}_2$ *mạnh hơn* $\mathcal{T}_1$ và kí hiệu $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$. Hiển nhiên tôpô thô là tôpô yếu nhất và tôpô rời rạc là tôpô mạnh nhất trong tất cả các tôpô cũng xác định trên tập X.

Cũng có thể xảy ra trường hợp hai tôpô $\mathcal{T}_1$ và $\mathcal{T}_2$ không so sánh được với nhau, chẳng hạn $\mathcal{T}_1$ không chứa trong $\mathcal{T}_2$ hoặc ngược lại, $\mathcal{T}_2$ không chứa trong $\mathcal{T}_1$.

1.3 Lân cận.

1.3.1 Định nghĩa. Cho $(X, \mathcal{T})$ là một không gian tôpô và $x_0 \in X$. Tập $A \subset X$ được gọi là một *lân cận* của x_0 nếu tồn tại tập mở $U \in \mathcal{T}$ sao cho $x_0 \in U \subset A$. Hiển nhiên nếu $U \in \mathcal{T}$ thì U là lân cận của mọi điểm của nó. Tuy nhiên một lân cận của x_0 chưa chắc là một tập mở.

Nếu A là một lân cận của x_0 thì x_0 được gọi là một *điểm trong* của A. Nói cách khác, x_0 là điểm trong của $A \subset X$ khi và chỉ khi tồn tại $U \in \mathcal{T}$ sao cho $x_0 \in U \subset A$.

1.3.2 Định lí. *Tập $A \subset X$ là mở (tức là $A \in \mathcal{T}$) khi và chỉ khi nó là lân cận của mọi điểm của nó.*

Chứng minh. Giả sử A mở và $x \in A$. Theo định nghĩa thì A là lân cận của x. Ngược lại, theo giả thiết, với mọi $x \in A$ tồn tại $U_x \in \mathcal{T}$ sao cho $x \in U_x \subset A$. Ta có

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} U_x \subset A.$$

Vậy $A = \bigcup_{x \in A} U_x$. Như thế A là tập mở vì nó là hợp của một họ các tập mở U_x. ∎

1.4 Tập đóng.

1.4.1 Định nghĩa. Cho $(X, \mathcal{T})$ là một không gian tôpô. Tập $F \subset X$ được gọi là *tập đóng* nếu và chỉ nếu $F^c = X \setminus F$ là tập mở (tức là $X \setminus F \in \mathcal{T}$).

1.4.2 Nhận xét.

Ta có $(G^c)^c = X \setminus (X \setminus G) = G$. Như thế tập G mở tương đương với G^c là tập đóng.

Từ tính chất của các tập mở ta suy ra :

1.4.3 Định lí. *Cho X là một không gian tôpô. Khi đó*

1. $\emptyset$, X là các tập đóng.

2. Giao một họ tuỳ ý các tập đóng là một tập đóng.

3. Hợp một số hữu hạn các tập đóng là tập đóng.

Chứng minh. Dựa vào định nghĩa của họ các tập mở và công thức De Morgan, chẳng hạn, giả sử $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ là họ các tập đóng. Lúc đó

$$(\bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} F_\alpha^c$$

là tập mở vì các F_α^c là các tập mở. Do đó $\bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha$ là các tập đóng. ∎

1.5 Phần trong và bao đóng của một tập hợp.

1.5.1 Phần trong. Giả sử X là một không gian tôpô và $A \subset X$. Lúc đó có ít nhất một tập mở chứa trong A chẳng hạn tập rỗng. Hợp tất cả các tập mở chứa trong A được gọi là phần trong của tập A, kí hiệu là $\overset{\circ}{A}$ hay $\inf A$. Ta có :

$\mathring{A}$ là tập mở (vì nó bằng hợp của các tập mở).

$\mathring{A}$ là tập mở lớn nhất chứa trong A (vì trong A có chứa tập mở nào khác thì nó phải chứa trong hợp tất cả các tập mở chứa trong A).

A là tập mở khi và chỉ khi $A = \mathring{A}$.

1.5.2 Định lí. *Cho A, $B \subset X$. Khi đó*

1) Phần trong $\mathring{A}$ của tập A là tập hợp tất cả các điểm trong của tập A.

2) $A \subset B$ thì $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

3) $\operatorname{inf}(A \cap B) = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Chứng minh.

1) x là điểm trong của A khi và chỉ khi x thuộc một tập mở nào đó chứa trong A, nghĩa là x thuộc phần trong của A.

2) Ta có $\mathring{A} \subset A \subset B$ nên hiển nhiên $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ vì $\mathring{B}$ là tập mở lớn nhất chứa trong B.

3) Ta có $A \cap B$ là các tập con của A và B nên $\operatorname{inf}(A \cap B) \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Ngược lại, $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ là tập con mở của $A \cap B$ nên $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \operatorname{inf}(A \cap B)$. ∎

1.5.3 Bao đóng. Cho $A \subset X$. Luôn luôn có ít nhất một tập đóng chứa A, chẳng hạn X. Giao tất cả các tập đóng chứa A được gọi là bao đóng của A, kí hiệu $\overline{A}$. Hiển nhiên $\overline{A}$ là tập đóng bé nhất chứa A.

Từ định nghĩa ta có ngay kết quả :

A là tập đóng khi và chỉ khi $A = \overline{A}$.

1.5.4 Định lí. *Cho A, $B \subset X$, ta có*

1) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

2) Nếu $A \subset B$ thì $\overline{A} \subset \overline{B}$.

3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Chứng minh.

Các tính chất 1), 2) hiển nhiên do định nghĩa.

3) Ta có $A \subset A \cap B$ nên $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$, tương tự $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Do đó $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Ngược lại, $A \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ và $B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ nên $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Vì $\overline{A} \cup \overline{B}$ là tập đóng nên theo định nghĩa, ta có $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Vậy $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ∎

1.6 Điểm dính – Điểm tụ.

1.6.1 Định nghĩa.

Cho A là một tập con của không gian tôpô X và x là một điểm của X. x được gọi là một *điểm dính* của tập A nếu với mọi lân cận V của x ta đều có $V \cap A \neq \emptyset$.

Nếu với mọi lân cận V của x ta đều có $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ thì x được gọi là một *điểm tụ* của tập A. Hiển nhiên mọi điểm tụ của A đều là điểm dính của A nhưng điều ngược lại không đúng.

1.6.2 Định lí. *Bao đóng của tập hợp A là tập hợp tất cả các điểm dính của A.*

Chứng minh. Nếu x không phải là điểm dính của A thì sẽ tồn tại một lân cận mở V của x sao cho $V \cap A = \emptyset$, khi đó $A \subset V^c$. Vì V^c là tập đóng nên $\overline{A} \subset V^c$, từ đó $x \in \overline{A}$. Ngược lại nếu $x \notin \overline{A}$ thì $x \in (\overline{A})^c = X \setminus \overline{A} = V$ là một tập mở nếu nó là lân cận của x và $V \cap A = \emptyset$, nghĩa là x không phải là điểm dính của A. ∎

1.7 Tập hợp trù mật – Không gian khả li.

1.7.1 Định nghĩa. Giả sử A, B là hai tập con trong không gian tôpô X. Nếu $B \subset \overline{A}$ thì ta nói tập A *trù mật* trong tập B. Nếu $A \subset X$ và $\overline{A} = X$ thì A được gọi là trù mật trong X hay A là một tập hợp *trù mật khắp nơi*.

Ta có các tính chất sau.

1) Nếu A trù mật trong B, B trù mật trong C thì A trù mật trong C.

Thật vậy, vì $\overline{A} \supset B$ và $\overline{B} \supset C$ nên $C \subset \overline{A}$.

2) Tập A trù mật trong B khi và chỉ khi với mọi $x \in B$ và mọi lân cận V của x ta có $V \cap A \neq \emptyset$.

Điều này chẳng qua là sự diễn đạt định nghĩa của khái niệm điểm dính và trù mật.

1.7.2 Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *khả li* (hay *tách được*) nếu trong X tồn tại một tập con A hữu hạn hay đếm được và A trù mật khắp nơi.

1.8 Cơ sở của tôpô.

Thông thường để cho một tôpô trên X ta phải chỉ rõ tất cả các tập mở (tức là các tập hợp thuộc $\mathcal{T}$). Tuy nhiên trong nhiều trường hợp ta chỉ cần tìm một tập con của $\mathcal{T}$ là đủ xác định tôpô $\mathcal{T}$. Ta có định nghĩa sau.

1.8.1 Định nghĩa. Giả sử $(X,\mathcal{T})$ là một không gian tôpô và $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Họ $\mathcal{B}$ được gọi là một cơ sở của tôpô $\mathcal{T}$ nếu với mọi $G \in \mathcal{T}$ tồn tại một họ con $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ sao cho $G = \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$.

1.8.2 Ví dụ.

1. Theo định nghĩa thì $\mathcal{T}$ chính là một cơ sở của không gian tôpô $(X,\mathcal{T})$.

2. Tôpô thông thường trên $\mathbf{R}$ nhận họ các khoảng mở (a, b) làm một cơ sở của nó.

1.8.3 Định lí. *Họ $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ là một cơ sở của không gian tôpô $(X,\mathcal{T})$ khi và chỉ khi với mọi $x \in X$ và với mọi lân cận V của x đều tồn tại $B \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in B \subset V$.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{B}$ là một cơ sở của $(X,\mathcal{T})$. Nếu $x \in X$ và V là một lân cận của x thì tồn tại $U \in \mathcal{T}$ để $x \in U \subset V$. Vì $U = \bigcup_{G \in \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}} G$ nên tồn tại $B \in \mathcal{B}$ để $x \in B \subset U \subset V$. Ngược lại, cho $G \in \mathcal{T}$. Với mọi $x \in G$ tồn tại $B_x \in \mathcal{B}$ để $x \in B_x \subset G$. Khi đó $G = \bigcup_{x \in G} B_x$, trong đó $B_x \in \mathcal{B}$. Định lí được chứng minh. ▮

1.8.4 Định lí. *Cho $\mathcal{B} = \{U_\alpha : \alpha \in I\} \subset \mathcal{P}(X)$ thoả mãn hai điều kiện :*

a) Với mọi $U, V \in \mathcal{B}$ và với mọi $x \in U \cap V$, tồn tại $W \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in W \subset U \cap V$.

b) Với mọi $x \in X$ tồn tại $U \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in U$.

Khi ấy tồn tại một tôpô $\mathcal{T}$ trên X sao cho $\mathcal{B}$ là một cơ sở của $\mathcal{T}$.

Chứng minh. Đặt $\mathcal{T} = \left\{G \in X : G = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha,\ U_\alpha \in \mathcal{B},\ J \subset I\right\}$. Ta có :

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ vì $\emptyset = \bigcup_{\alpha \in \emptyset} U_\alpha$, $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$.

(ii) Theo định nghĩa của $\mathcal{T}$ ta thấy ngay hợp một họ các phần tử thuộc $\mathcal{T}$ cũng được biểu diễn bằng hợp các phần tử thuộc $\mathcal{B}$ nên nó phải thuộc $\mathcal{T}$.

(iii) Cho $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$. Khi đó $G_1 = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, $G_2 = \bigcup_{\beta \in J'} U_\beta$, ta có

$$G_1 \cap G_2 = \Big(\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{\beta \in J'} U_\beta\Big)$$
$$= \bigcup_{\alpha \in J} \bigcup_{\beta \in J'} (U_\alpha \cap U_\beta).$$

Ta còn chứng minh $U_\alpha \cap U_\beta \in \mathcal{T}$. Thật vậy, với mọi $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, theo giả thiết tồn tại $W_x \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in W_x \subset U_\alpha \cap U_\beta$ nên

$$U_\alpha \cap U_\beta = \bigcup_{x \in U_\alpha \cap U_\beta} W_x \in \mathcal{T}.$$

Nếu $x \in X$ và G là một tập mở chứa x thì khi ấy $G = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$ nên $x \in U_\alpha \subset G$. ▮

1.9 Cơ sở lân cận.

1.9.1 Định nghĩa. Một họ $\mathcal{V}$ những lân cận của điểm $x \in X$ được gọi là một *cơ sở lân cận* của $x \in X$ nếu với mọi lân cận U của x đều tồn tại một lân cận $V \in \mathcal{V}$ sao cho $x \in V \subset U$.

Theo định nghĩa, với mỗi $x \in X$ luôn luôn tồn tại cơ sở lân cận của nó (chẳng hạn tập tất cả các lân cận của x). Trong thực tế ta thường quan tâm đến cơ sở lân cận bé nhất (theo quan hệ bao hàm) của điểm x.

1.9.2 Định lí. *Cho X là không gian tôpô. Giả sử $\mathcal{V}_x$ là một cơ sở lân cận của mỗi điểm $x \in X$. Khi đó ta có.*

1) $\forall x \in X$, $\forall V_x \in \mathcal{V}_x$, ta có $x \in V_x$.

2) Nếu $V_x^1, V_x^2 \in \mathcal{V}_x$ thì tồn tại $V_x \in \mathcal{V}$ sao cho $V_x \subset V_x^1 \cap V_x^2$.

3) Với mọi $V_x \in \mathcal{V}_x$ đều tồn tại một $W_x \subset V_x$ sao cho $\forall y \in W_x$ thì tồn tại $V_x \in \mathcal{V}_y$ sao cho $V_y \subset V_x$.

Ngược lại giả sử X là một tập tuỳ ý và với mọi $x \in X$ tồn tại một họ $\mathcal{V}_x$ gồm các tập $V_x \subset X$ sao cho các tính chất 1)- 3) được thoả mãn. Lúc đó tồn tại một tôpô $\mathcal{T}$ duy nhất trên X sao cho $\mathcal{V}_x$ là một cơ sở lân cận của mỗi điểm $x \in X$.

Chứng minh.

Tính chất 1) hiển nhiên. Nếu $x \in V_x^1$ và $x \in V_x^2$ thì tồn tại các tập mở G_1, G_2 sao cho $x \in G_1 \subset V_x^1$, $x \in G_2 \subset V_x^2$. Lấy $V_x \subset G_1 \cap G_2$, $V_x \in \mathcal{V}_x$ ta có $V_x \subset V_x^1 \cap V_x^2$. Như vậy 2) được chứng minh.

Bây giờ giả sử $V_x \in \mathcal{V}_x$. Theo định nghĩa, tồn tại tập mở G sao cho $x \in G \subset V_x$. Vì G cũng là một lân cận của x nên theo định nghĩa của cơ sở, phải tồn tại $W_x \in \mathcal{V}_x$ sao cho $W_x \subset G$. Khi đó $\forall y \in W_x$ ta có $y \in G$ nên G là một lân cận của y. Vậy tồn tại $V_y \in \mathcal{V}$ sao cho $V_y \subset G \subset V_x$.

Ngược lại, giả sử tại mỗi điểm x của tập X ta có một họ $\mathcal{V}_x$ sao cho các tính chất 1)- 3) được thoả mãn. Đặt

$\mathcal{T} = \{G \subset X \mid$ hoặc $G = \emptyset$, hoặc $\forall x \in G, \exists V_x \in \mathcal{V}_x : V_x \subset G\}$.

Ta hãy kiểm tra $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X. Thật vậy, $\emptyset \in \mathcal{T}$ và $X \in \mathcal{T}$. Nếu $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ với $G_\alpha \in \mathcal{T}$ thì $G = \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ cũng thuộc $\mathcal{T}$ vì nếu $x \in G$ thì x phải thuộc một G_α nào đó. Lúc ấy có V_x để $x \in V_x \subset G_\alpha \subset G$.

Cho $G_1, G_2 \in \mathcal{T}$ và giả sử $x \in G = G_1 \cap G_2$. Như thế sẽ có $V_1^x \subset G_1$, $V_2^x \subset G_2$. Lấy $V_x \in \mathcal{V}_x$ sao cho $V_x \subset V_1^x \cap V_2^x$. Vì vậy $x \in V_x \subset V_1^x \cap V_2^x \subset G_1 \cap G_2 = G$, hay $G \in \mathcal{T}$. Vậy $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X. Tiếp theo ta sẽ chứng tỏ rằng $\mathcal{V}_x$ đúng là một cơ sở lân cận của điểm x. Trước hết ta kiểm tra mỗi $V_x \in \mathcal{V}_x$ là lân cận của x. Lấy $V_x \in \mathcal{V}_x$ và đặt $G = \{z \in V_x : \exists V_z \in \mathcal{V}_z, V_z \subset V_x\} \subset V_x$, thì $x \in G$. Mặt khác nếu $z \in G$ và $V_z \in \mathcal{V}_z$ sao cho $V_z \subset V_x$ thì theo tính chất 3) tồn tại $W_z \in \mathcal{V}_z$ sao cho $\forall y \in W_z$ thì có $V_y \in \mathcal{V}_y$, $V_y \subset V_z$. Vậy $W_x \in G$ nên G mở và V_x đúng là một lân cận của x.

Như thế $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X và tại mỗi điểm $x \in X$, theo cách xây dựng $\mathcal{T}$ thì V_x đúng là một họ cơ sở lân cận của điểm x. ∎

Nhận xét. Có thể xây dựng tôpô bằng con đường tự nhiên là xuất phát từ khái niệm lân cận. Tuy nhiên điều này không thuận tiện bằng cách dùng họ các tập mở.

1.9.3 Định lí. *Cho $\mathcal{B}$ là một cơ sở của không gian tôpô X. Giả sử họ $\mathcal{B}$ đếm được. Khi đó X khả li và tại mỗi điểm $x \in X$ đều tồn tại một cơ sở lân cận hữu hạn hoặc đếm được.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ...\}$. Trong mỗi tập B_n ta hãy lấy một điểm x_n. Khi đó tập $A = \{x_1, x_2, ...\}$ là hữu hạn hay đếm được. Ta chứng minh tập A là trù mật khắp nơi. Thật vậy, cho x là điểm tuỳ ý của X và U là một lân cận của x. Lúc đó tồn tại tập $B_n \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in B_n \subset U$. Do $x_n \in B_n$ nên $A \cap U \neq \emptyset$. Vậy $x \in \overline{A}$.

Mặt khác, với mỗi $x \in X$, đặt $V_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$, khi đó V_x là một cơ sở lân cận của x và vì $\mathcal{B}$ đếm được nên V_x hoặc đếm được hoặc hữu hạn. ∎

1.9.4 Định nghĩa. Không gian tôpô X có cơ sở đếm được gọi là không gian thoả mãn *tiên đề đếm được thứ hai*. Nếu X thoả mãn tính chất là với mọi $x \in X$ đều tồn tại một cơ sở lân cận đếm được thì X được gọi là thoả mãn *tiên đề đếm được thứ nhất*.

Họ $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ được gọi là một *phủ* của tập A trong không gian X khi và chỉ khi A là một tập con của $\bigcup_{B \in \mathcal{U}} B$. Phủ $\mathcal{U}$ được gọi là *phủ mở* của A nếu mọi phần tử của nó là tập mở. *Phủ con* của phủ $\mathcal{U}$ là một họ con của $\mathcal{U}$ mà bản thân họ này cũng là một phủ của A.

1.9.5 Định lí. (Lindelöf) *Giả sử $(X, \mathcal{T})$ là một không gian tôpô có cơ sở đếm được. Khi đó mọi phủ mở tuỳ ý $\mathcal{U}$ của một tập $A \subset X$ đều tồn tại một phủ con đếm được.*

Chứng minh. Giả sử $A \subset X, \mathcal{U}$ là phủ mở của A và $\mathcal{B}$ là một cơ sở đếm được của không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$. Với mỗi $U \in \mathcal{U}$, tồn tại một họ con của $\mathcal{B}$ để U bằng hợp của họ con này. Tập hợp tất cả các họ con đó khi U chạy khắp $\mathcal{U}$, kí hiệu $\mathcal{F}$ tạo thành một phủ mở của A, hơn nữa $\mathcal{F}$ là họ con của $\mathcal{B}$ nên $\mathcal{F}$ đếm được. Với mỗi phần tử F của tập hợp $\mathcal{F}$, ta chọn ra một phần tử U của họ $\mathcal{U}$ sao cho $F \subset U$. Như thế ta lấy ra được một họ con đếm được $\mathcal{D}$ của $\mathcal{U}$ gồm các tập U vẫn còn phủ được A.

Vậy với phủ bất kì $\mathcal{U}$ của A, tồn tại phủ con đếm được.

Không gian tôpô được gọi là *không gian Lindelöf* nếu với mọi phủ mở bất kì của nó đều tồn tại phủ con đếm được. Như vậy không gian thoả tiên đề đếm thứ hai là một không gian Lindelöf.

1.10 Không gian con.

1.10.1 Định nghĩa.

Cho $(X,\mathcal{T})$ là một không gian tôpô và Y là một tập con của X. Ta đặt $\mathcal{T}_Y=\{G\cap Y : G\in\mathcal{T}\}$. Lúc ấy $\mathcal{T}_Y$ là một tôpô trên tập Y. Thật vậy, $\emptyset=\emptyset\cap Y$, $Y=X\cap Y$ nên $\emptyset$, $Y\in\mathcal{T}_Y$. Nếu $(G_\alpha\cap Y)_{\alpha\in I}$ là một họ các tập thuộc $\mathcal{T}_Y$ thì $\bigcup\limits_{\alpha\in I}(G_\alpha\cap Y)=(\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha)\cap Y$ cũng thuộc $\mathcal{T}_Y$ vì $\bigcup\limits_{\alpha\in I}G_\alpha\in\mathcal{T}$. Tương tự, giao của hai tập thuộc $\mathcal{T}_Y$ cũng là một tập thuộc $\mathcal{T}_Y$.

Tôpô $\mathcal{T}_Y$ được gọi là *tôpô cảm sinh* lên tập Y bởi tôpô $\mathcal{T}$ trong X. Không gian tôpô $(Y,\mathcal{T}_Y)$ được gọi là *không gian con* của không gian $(X,\mathcal{T})$.

Giả sử X là một không gian tôpô, Y là không gian con của X và A là một tập con của Y. Để ý rằng, nếu A là một tập mở (hay đóng) trong Y thì chưa chắc A là mở (hay đóng) trong X. Tuy nhiên ta có :

1.10.2 Định lí. *Cho $(X,\mathcal{T})$ là không gian tôpô và $(Y,\mathcal{T}_Y)$ là không gian con của $(X,\mathcal{T})$. Khi ấy :*

a) $A\subset Y$ là một tập mở trong không gian con Y khi và chỉ khi $A=Y\cap G$ với G là một tập mở trong không gian X.

b) $B\subset Y$ là một tập đóng trong không gian con Y khi và chỉ khi $B=Y\cap F$ với F là một tập đóng trong không gian X.

Chứng minh. a) Mệnh đề này chỉ là sự diễn tả lại định nghĩa của tôpô cảm sinh.

b) Cho B là tập đóng trong không gian Y. Lúc đó $Y\setminus B\in\mathcal{T}_Y$ nên tồn tại tập mở $G\in\mathcal{T}$ sao cho $Y\setminus B=Y\cap G$. Ta có

$$B = Y \setminus (Y \setminus B) = Y \setminus (Y \cap G) = Y \setminus G$$

$$Y \cap G^c = Y \cap (X \setminus G),$$

trong đó $X \setminus G$ là một tập đóng trong X.

Ngược lại, nếu $B = Y \cap F$ với F đóng trong X, lúc ấy ta có

$$Y \setminus B = Y \setminus (Y \cap F) = Y \setminus F = Y \cap (X \setminus F).$$

Vì $X \setminus F$ là tập mở trong X nên $Y \cap (X \setminus F)$ là mở trong Y. Vậy B là tập đóng trong Y. ▮

1.10.3 Hệ quả. *Cho Y là một không gian con của không gian tôpô X và $y \in Y$. Khi đó nếu V_Y là một lân cận của y trong Y thì tồn tại một lân cận V của y trong X sao cho $V_Y = V \cap Y$.*

1.10.4 Hệ quả. *Cho X là một không gian tôpô và Y là một không gian con của X. Lúc đó*

a) Để mọi tập mở trong Y cũng là tập mở trong X, điều kiện cần và đủ là Y mở trong X.

b) Để mọi tập đóng trong Y cũng là tập đóng trong X, điều kiện cần và đủ là Y đóng trong X.

Nếu trường hợp a) (t.ư., b)) thoả mãn, ta gọi Y là không gian con mở (t.ư., không gian con đóng) của không gian X.

1.10.5 Định lí. *Cho Y là không gian con của không gian tôpô X và A là một tập con của Y. Kí hiệu $\widetilde{A}$ là bao đóng của A trong không gian con Y. Khi đó ta có*

$$\widetilde{A} = \overline{A} \cap Y,$$

trong đó $\overline{A}$ là bao đóng của A trong không gian X.

Chứng minh. Do $\overline{A}$ là tập đóng trong X nên $\overline{A} \cap Y$ là tập đóng trong Y và chứa A. Vậy $\widetilde{A} \subset \overline{A} \subset Y$. Mặt khác do $\widetilde{A}$ đóng trong Y nên tồn tại tập đóng F trong X sao cho $\widetilde{A} = F \cap Y$. Vì $\widetilde{A} \subset F$ nên $A \subset F$, như thế $\overline{A} \subset \overline{F} = F$. Vậy $\widetilde{A} = F \cap Y \supset \overline{A} \cap Y$. Do đó $\widetilde{A} = \overline{A} \cap Y$. ▮

BÀI TẬP

1.1. Cho X là một tập hợp có vô hạn phần tử. Đặt

$\mathcal{T} = \{A \subset X \mid A = \emptyset \text{ hoặc } X \setminus A \text{ hữu hạn}\}$.

Chứng minh rằng :

a) $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X.

b) Nếu $A, B \in \mathcal{T}$ và $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ thì $A \cap B \neq \emptyset$.

c) $(X, \mathcal{T})$ là một không gian khả li.

1.2. Giả sử $(X, \mathcal{T})$ là một không gian tôpô thoả mãn tiên đề đếm được II. Chứng minh rằng mỗi cơ sở bất kì $\mathcal{B}$ của $\mathcal{T}$ đều có chứa một họ con đếm được $\mathcal{B}'$ đồng thời $\mathcal{B}'$ cũng là cơ sở của $\mathcal{T}$.

1.3. Cho A, B là hai tập mở trong không gian tôpô X sao cho $A \cap B = \emptyset$. Chứng minh rằng $\operatorname{inf}\overline{A} \cap \operatorname{inf}\overline{B} = \emptyset$.

1.4. Cho A là một tập trù mật khắp nơi trong không gian tôpô X. Giả sử U là một tập mở trong X. Chứng minh rằng

$$\overline{U} = \overline{U \cap A}.$$

1.5. Cho U là một tập mở trong không gian tôpô X và A là một tập con của X. Chứng minh rằng

$$\overline{U \cap \overline{A}} = \overline{U \cap A}.$$

1.6. Trên tập $\mathbf{R}$ các số thực, ta xét họ các tập con $\mathcal{U}$ của tập $\mathbf{R}$ xác định bởi

$$\mathcal{U} = \{[a, b) / a, b \in \mathbf{R}\}.$$

Chứng minh họ này lập thành một cơ sở của tập tôpô $\mathcal{T}'$ trên $\mathbf{R}$. Hãy so sánh tôpô này với tôpô thông thường trên $\mathbf{R}$.

1.7. Chứng minh rằng tôpô cho bởi một mêtric trên X có tính chất là với mọi $x \in X$ tồn tại một cơ sở lân cận đếm được.

1.8. Trên $\mathbf{R}$ ta xét họ các tập con

$$\mathcal{T}_1 = \{U \subset \mathbf{R} \mid 0 \in U\} \cup \{\emptyset\}.$$

Chứng minh rằng $\mathcal{T}_1$ là một tôpô trên $\mathbf{R}$ và $(\mathbf{R}, \mathcal{T}_1)$ khả li nhưng không có cơ sở đếm được.

1.9. Cho $B = \{(a, b) : a, b \in \mathbf{Q}\}$. Chứng minh rằng B là một cơ sở của tôpô thông thường trên $\mathbf{R}$.

1.10. Cho $\mathbf{Z}$ là tập các số nguyên. Kí hiệu $\mathcal{B} = B(m, n) = \{km + n : k \in Z\}$. Chứng minh $\mathcal{B}$ là cơ sở của một tôpô trên $\mathbf{Z}$.

1.11. Cho Y là một không gian con của không gian tôpô X sao cho $Y = U \cup V$ với U, V là các tập mở khác rỗng trong không gian con Y và $U \cap V = \emptyset$. Chứng minh rằng tồn tại một tập mở A, B trong X sao cho $A \cap B = \emptyset$ và $U = A \cap Y, V = B \cap Y$.

§ 2. ÁNH XẠ LIÊN TỤC

Cho $(X, \mathcal{T})$ và $(Y, \mathcal{U})$ là hai không gian tôpô và f là một ánh xạ từ X vào Y. Trên hai tập X, Y có trang bị các tôpô nên bây giờ ta có thể định nghĩa thế nào là một ánh xạ liên tục. Thực ra các khái niệm này là sự tổng quát hoá các khái niệm đã gặp trong giải tích sơ cấp trước đây. Với một sự cẩn thận thích đáng, bạn đọc có thể tự mình phát biểu và chứng minh các tính chất liên quan đến ánh xạ liên tục.

2.1 Định nghĩa. Ánh xạ $f : X \to Y$ được gọi là *liên tục* tại điểm $x_0 \in X$ nếu với mọi lân cận V của $f(x_0)$ đều tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $f(U) \subset V$.

Ánh xạ f được gọi là *liên tục trên* X nếu như f liên tục tại mọi điểm $x \in X$.

Ta có các mệnh đề tương đương sau đây.

2.2 Định lí. *Cho X, Y là hai không gian tôpô và $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Các mệnh đề sau đây là tương đương*

a) f liên tục trên X.

b) với mọi tập đóng $F \subset Y$ thì $f^{-1}(F)$ là tập đóng trong X.

c) với mọi tập mở $G \subset Y$ thì tập $f^{-1}(G)$ mở trong X.

d) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ với mọi tập $A \subset X$.

Chứng minh.

a) $\Rightarrow$ d). Giả sử $y \in f(\overline{A})$. Lúc đó tồn tại $x \in \overline{A}$ để $y = f(x)$. Gọi V là một lân cận bất kì của y. Do f liên tục nên tồn tại một lân cận U của x để $f(U) \subset V$. Vì $x \in \overline{A}$ nên $U \cap A \neq \emptyset$. Suy ra

$$f(U) \cap f(A) \supset f(U \cap A) \neq \emptyset$$

nên $V \cap f(A) \neq \emptyset$. Như thế $y \in \overline{f(A)}$.

d) $\Rightarrow$ *b)*. Giả sử F đóng trong Y. Đặt $A = f^{-1}(F)$. Khi ấy ta có $f(A) \subset F$, vì thế $\overline{f(A)} \subset F$. Mặt khác, để ý rằng nếu E là tập con của X ta luôn luôn có $E \subset f^{-1}(f(E))$. Do đó lấy $E = \overline{A}$, ta được

$$\overline{A} \subset f^{-1}\left(f(\overline{A})\right) \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right) \subset f^{-1}(F) = A.$$

Vậy $A = \overline{A} = f^{-1}(F)$ là tập đóng.

b) $\Rightarrow$ c) hiển nhiên.

c) $\Rightarrow$ a). Giả sử $x_0 \in X$ và V là một lân cận bất kì của $f(x_0)$. Cho G là một tập mở trong Y sao cho $f(x_0) \in G \subset V$. Khi đó $f^{-1}(G)$ là một tập mở trong X chứa x_0 nên đặt $U = f^{-1}(G)$ thì nó là một lân cận của x_0. Ta có

$$f(U) = f\left(f^{-1}(G)\right) \subset G \subset V.$$

Vậy f liên tục tại x_0. ∎

2.3 Định lí. *Giả sử X, Y, Z là ba không gian tôpô, $f : X \to Y$ là ánh xạ liên tục tại $x_0 \in X$ và $g : Y \to Z$ là ánh xạ liên tục tại $y_0 \in f(x_0)$. Khi đó ánh xạ hợp $h = g \circ f : X \to Z$ liên tục tại $x_0 \in X$.*

Chứng minh. Cho W là một lân cận của $h(x_0) = g(y_0)$ trong Z. Khi đó vì g liên tục tại y_0 trong Y nên tồn tại lân cận V của y_0 để $g(V) \subset W$. Mặt khác, f liên tục tại x_0 nên tồn tại lân cận U của x_0 để $f(U) \subset V$. Như vậy

$$h(U) = (g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W.$$

Điều này chứng tỏ $h = g \circ f$ là ánh xạ liên tục tại $x_0 \in X$. ∎

2.4 Phép đồng phôi.

Cho X, Y là hai không gian tôpô. Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh sao cho f và ánh xạ ngược f^{-1} của nó cùng liên tục thì f được gọi là một *phép đồng phôi* (hay *phép biến đổi tôpô*) từ X lên Y. Hai không gian tôpô được gọi là đồng phôi với nhau nếu có một phép đồng phôi từ không gian này lên không gian kia. Ta còn gọi hai không gian này là *tương đương tôpô*. Nếu một tính chất nào có đối với không gian tôpô X thì nó cũng có đối với không gian tôpô Y đồng phôi với nó thì tính chất ấy được gọi là một *bất biến tôpô*. Nói một cách nôm na, tôpô là môn học nghiên cứu về các bất biến tôpô.

2.5 Nhận xét.

1. Theo quan điểm tôpô thì hai không gian tôpô đồng phôi với nhau được đồng nhất với nhau.

2. Cho $\mathcal{T}$ và $\mathcal{T}'$ là hai tôpô trên cùng tập X. Ta có $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ khi và chỉ khi ánh xạ đồng nhất $id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T}')$ là phép đồng phôi.

BÀI TẬP

2.1. Cho X, Y là hai không gian tôpô, $f : X \to Y$ là một ánh xạ. Chứng minh rằng ba mệnh đề sau đây là tương đương :

a) f liên tục.

b) Với mọi $B \subset X$ ta có $f^{-1}(\mathring{B}) \subset \inf f^{-1}(B)$.

c) $f^{-1}(B)$ là một tập mở với mọi B thuộc một cơ sở của tôpô trong Y.

2.2. Kí hiệu $\mathcal{T}$ là tôpô thông thường trên $\mathbf{R}$ và $\mathcal{U}$ là tôpô xác định bởi cơ sở $\mathcal{B} = \{[a, b), a, b \in \mathbf{R}\}$. Xét ánh xạ $f : (\mathbf{R}, \mathcal{U}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{T})$ xác định bởi công thức

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{nếu } x<0,\\ x+1, & \text{nếu } x\geq 0.\end{cases}$$

Chứng minh f là ánh xạ liên tục.

2.3. Kí hiệu như bài tập 2.2, ta xét ánh xạ $g:(\mathbf{R},\ \mathcal{T})\to(\mathbf{R},\ \mathcal{U})$ xác định bởi công thức

$$g(x)=\begin{cases} x, & x<0,\\ x+1, & x\geq 0.\end{cases}$$

Chứng minh rằng ánh xạ g không liên tục.

2.4. Giả sử $\mathcal{T},\ \mathcal{U}$ là hai tôpô được cho trên cùng một tập X và $id: X\to X$ là ánh xạ đồng nhất. Chứng minh rằng id liên tục khi và chỉ khi $\mathcal{U}\subset\mathcal{T}$.

2.5. Giả sử X là một không gian tôpô, $F_1,\ F_2$ là hai tập con đóng của X sao cho $X=F_1\cap F_2$. Chứng minh rằng nếu $f: X\to Y$ là một ánh xạ sao cho $f\big|_{F_1},\ f\big|_{F_2}$ liên tục thì f liên tục trên X.

§ 3. KHÔNG GIAN TÍCH – KHÔNG GIAN THƯƠNG

3.1 Xác định tôpô bởi một họ các ánh xạ.

3.1.1 Định nghĩa. Giả sử X là một tập tuỳ ý, $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ các không gian tôpô và mỗi $\alpha\in I$ ta có một ánh xạ $f_\alpha: X\to X_\alpha$ từ tập X vào tập X_α. Nếu trên X ta xét tôpô mạnh nhất (tức là tôpô rời rạc) thì hiển nhiên tất cả các ánh xạ f_α đều liên tục. Trường hợp này là tầm thường. Ta sẽ chứng tỏ rằng trên X sẽ tồn tại một tôpô yếu nhất $\mathcal{T}$ sao cho tất cả các ánh xạ f_α đều liên tục.

Kí hiệu $\mathcal{T}_\alpha$ là tôpô trong X_α. Đặt $G=\bigcap\limits_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}\left(G_{\alpha_i}\right)\subset X$, trong đó $G_{\alpha_i}\in\mathcal{T}_{\alpha_i}$ và n là một số nguyên dương nào đó. Kí hiệu $\mathcal{B}$ là họ tất cả các tập G có dạng như trên. Khi ấy tồn tại một tôpô $\mathcal{T}$ trên X nhận $\mathcal{B}$ làm cơ sở : Tập $A \subset X$ là $\mathcal{T}$ - mở khi và chỉ khi A là hợp của một họ các tập thuộc $\mathcal{B}$.

Giả sử Σ là một tôpô trên X sao cho tất cả các f_α đều liên tục. Khi ấy nếu $G_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ thì $f_\alpha^{-1}(G_\alpha)$ là một tập mở trong X, nghĩa là $f_\alpha^{-1}(G) \in \Sigma$. Do đó nếu các G_{α_i} là các tập mở trong các tập X_{α_i}, $(i = 1, \ldots, n)$ thì $f_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i})$ là tập mở trong Σ nên $G \in \Sigma$ nghĩa là $\mathcal{T} \subset \Sigma$.

Như vậy $\Sigma \supset \mathcal{T}$ hay $\mathcal{T}$ là tôpô yếu nhất làm cho tất cả các f_α liên tục. $\mathcal{T}$ được gọi là *tôpô đầu* trên X xác định nhờ họ ánh xạ $(f_\alpha)_\alpha$.

3.1.2 Định lí. *Giả sử $\mathcal{T}$ là tôpô đầu trên X xác định bởi họ ánh xạ $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$, $f_\alpha : X \to X_\alpha$, Y là một không gian tôpô và $f : Y \to X$ là một ánh xạ. Khi đó f liên tục khi và chỉ khi với mọi $\alpha \in I$, các ánh xạ $f_\alpha \circ f$ liên tục.*

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên. Ta chứng minh điều kiện đủ. Giả sử $U = f_\alpha^{-1}(G)$, $G \in \mathcal{T}_\alpha$. Khi đó

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(f_\alpha^{-1}(G)\right) = (f_\alpha \circ f)^{-1}(G)$$

là một tập mở trong Y. Do đó nếu V là một tập thuộc cơ sở của $\mathcal{T}$ thì $V = \bigcap_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ ta có

$$f^{-1}(V) = \bigcap_{i=1}^{n} f^{-1}\left(U_{\alpha_i}\right) \in \mathcal{T}.$$

Từ đây suy ra f liên tục. ∎

Bây giờ cho X là một tập và $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ các không gian tôpô. Với mỗi $\alpha \in I$, ta có ánh xạ $g_\alpha : X_\alpha \to X$. Nếu trang bị cho X tôpô yếu nhất (tức là tôpô thô) thì tất cả các ánh xạ g_α đều liên tục. Vấn đề là hãy tìm trên X một tôpô mạnh nhất làm cho tất cả các ánh xạ g_α đều liên tục. Đặt ξ là họ tất cả các tập con $G \subset X$ sao cho $g_\alpha^{-1}(G)$ là tập mở trong X_α với mọi $\alpha \in I$. Khi đó ta kiểm tra được ξ là một tôpô trên X. Nếu η là một tôpô trên X sao cho g_α liên tục và G là một $\eta-$ mở thì $g_\alpha^{-1}(G)$ mở trong X_α với mọi $\alpha \in I$ nên $G \in \xi$ và do đó $\eta \leq \xi$. Vậy ξ là tôpô mạnh nhất trên X làm cho tất cả các g_α liên tục.

3.1.3 Định nghĩa. Tôpô ξ mô tả ở trên được gọi là *tôpô cuối* trên X xác định bởi họ các ánh xạ (g_α).

3.1.4 Định lí. *Giả sử ξ là tôpô cuối xác định trên X bởi họ ánh xạ $(g_\alpha)_{\alpha \in I}$,*

$$g_\alpha : X_\alpha \to X$$

và $g : X \to Y$ là một ánh xạ. Lúc đó g liên tục khi và chỉ khi $(g \circ g_\alpha)$ liên tục với mọi $\alpha \in I$.

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên vì tích các ánh xạ liên tục là liên tục. Ngược lại, cho G là một tập mở trong Y, khi ấy ta có

$$(g \circ g_\alpha)^{-1}(G) = g_\alpha^{-1}\left(g^{-1}(G)\right)$$

là mở trong X_α với mọi $\alpha \in I$. Do vậy $g^{-1}(G)$ là mở trong X theo định nghĩa của tôpô cuối. ∎

3.2 Không gian tích.

3.2.1 Định nghĩa. Cho $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ những không gian tôpô. Đặt X là tích Descartes của họ các tập hợp (X_α):

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \left\{(x_\alpha)_{\alpha \in I} : x_\alpha \in X_\alpha\right\}$$
$$= \left\{x : I \to \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \,/\, x(\alpha) = x_\alpha \in X_\alpha\right\}.$$

Các x_α, $\alpha \in I$ là các thành phần (toạ độ) của phần tử $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$. Với mỗi $\alpha_0 \in I$, ta xét phép chiếu $p_{\alpha_0} : X \to X_{\alpha_0}$, cho bởi

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha \ni (x_\alpha)_{\alpha \in I} \to x_{\alpha_0} \in X_{\alpha_0}.$$

Tôpô yếu nhất trên X làm cho tất cả các phép chiếu này liên tục (tôpô đầu trên X xác định bởi họ $(p_\alpha)_{\alpha\in I}$), được gọi là *tôpô Tikhonov* trên X và X cùng với tôpô này trở thành một không gian tôpô gọi là *không gian tích* (hay *tích Tikhonov*) của các không gian tôpô X_α.

Ta hãy xác định rõ hơn tôpô Tikhonov trên X như sau. Nếu G_{α_0} là một tập mở trong X_{α_0} thì tập hợp

$$p_{\alpha_0}^{-1}(G_{\alpha_0}) = G_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha\neq\alpha_0} X_\alpha$$

là tập mở trong X.

Một tập hợp thuộc vào cơ sở của tôpô tích sẽ có dạng

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} p_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i}),$$

trong đó G_{α_i} là tập mở trong X_{α_i}. Ta có thể viết lại như sau

$$V = \bigcap_{i=1}^{n}(G_{\alpha_i} \times \prod_{\alpha\neq\alpha_i} X_\alpha) = \prod_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} \times (\prod_{\alpha\neq\alpha_1,\ldots,\alpha_n} X_\alpha).$$

Từ Định lí 3.1.2 ta có :

3.2.2 Hệ quả. *Giả sử Y là một không gian tôpô, $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ là tích Tikhonov của các không gian tôpô X_α, $\alpha \in I$. Điều kiện cần và đủ để ánh xạ $f : Y \to X$ liên tục là với mọi $\alpha \in I$, các ánh xạ $p_\alpha \circ f : Y \to X_\alpha$ liên tục.*

3.3 Không gian thương.

3.3.1 Định nghĩa. Cho X là một không gian tôpô. Giả sử trên X có một quan hệ tương đương $\mathcal{R}$. Kí hiệu $\tilde{X} = X/\mathcal{R} = \{\, \tilde{x} : \tilde{x}$ là lớp tương đương$\}$ và g là ánh xạ thương, đó là phép chiếu từ X lên $\tilde{X}$ cho bởi công thức

$$X \ni x \to g(x) = \tilde{x} = \{y \in X \,/\, y\mathcal{R}x\}.$$

Tôpô mạnh nhất trong các tôpô trên $\tilde{X}$ sao cho g liên tục (tôpô cuối xác định bởi ánh xạ g) được gọi là *tôpô thương* trên $\tilde{X}$. Khi ấy $\tilde{X}$ cùng với tôpô này được gọi là *không gian tôpô thương* của X theo quan hệ $\mathcal{R}$.

Từ định nghĩa ta có định lí sau đây :

3.3.2 Định lí. Cho X là không gian tôpô và $\mathcal{R}$ là quan hệ tương đương trên X. Khi ấy :

a) *Tập hợp $V \subset X$ là tập mở khi và chỉ khi $g^{-1}(V) = \bigcup_{\tilde{x} \in V} \tilde{x}$ là tập mở trong X.*

b) *Tập hợp $F \subset X$ là đóng khi và chỉ khi $g^{-1}(F)$ là tập đóng trong X.*

Định lí sau là một hệ quả của Định lí 3.1.4.

3.3.3 Định lí. *Cho X, Y là hai không gian tôpô, $X/\mathcal{R}$ là không gian thương theo quan hệ tương đương $\mathcal{R}$ và $f : X/\mathcal{R} \to Y$. Khi ấy f liên tục khi và chỉ khi $f \circ g : X \to Y$ liên tục.*

BÀI TẬP

3.1. Kí hiệu X là tập số thực với tôpô thông thường và $Y = (\mathbf{R}, \mathcal{U})$ trong đó $\mathcal{U}$ là tôpô rời rạc trên X.

a) Chứng minh rằng tập $\mathcal{C} = \{(a, b) \times \{c\} : a, b, c \in \mathbf{R}\}$ là một cơ sở của tôpô tích trên $Z = X \times Y$.

b) Tìm phần trong và bao đóng các tập sau đây trong Z :

$A = \{(x, 0) \in Z : x \in [0, 1)\}$.

$B = \{(0, y) \in Z : y \in [0, 1)\}$.

$C = [0, 1) \times [0, 1) \subset Z$.

3.2. Cho X, Y là hai không gian tôpô $A \subset X$ và $B \subset Y$. Chứng minh rằng :

a) $\inf(A \times B) = \mathring{A} \times \mathring{B}$.

b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

3.3. Cho $(X, \mathcal{T})$ là một không gian tôpô, Y là một tập và f là một ánh xạ từ X vào Y. Kí hiệu ξ là tôpô cuối trên Y xác định bởi f. Với $A \subset X$ ta kí hiệu $A^* = f^{-1}(f(A))$. Chứng minh :

a) Với mọi $A \subset X$ ta có $f(X \setminus A^*) = f(X) \setminus f(A)$.

b) $f(A) \in \xi \Leftrightarrow A^* \in \mathcal{T}$.

§ 4. CÁC TIÊN ĐỀ TÁCH

Không gian tôpô theo định nghĩa là một cấu trúc toán học khá đơn giản và rất tổng quát nên có thể ứng dụng vào nhiều tình huống khác nhau. Tuy nhiên nếu không bổ sung các yêu cầu khác thì nó ít có những tính chất thú vị. Chẳng hạn, trong các không gian thô thì ta không thể phân biệt các điểm với nhau, còn không gian rời rạc thì mỗi điểm lại thu về từng ốc đảo nên chúng không có gì để nghiên cứu thêm. Mục này dành để nghiên cứu việc tách các điểm cũng như các tập đóng.

4.1 Các định nghĩa và tính chất.

4.1.1 Không gian tôpô $(X,\mathcal{T})$ được gọi là *không gian thoả mãn tiên đề tách* T_1 (hay T_1- *không gian*) nếu với hai điểm khác nhau trong X thì sẽ tồn tại một lân cận của điểm này mà không chứa điểm kia.

4.1.2 Định lí. *Không gian tôpô X là một T_1- không gian khi và chỉ khi mỗi phần tử $x \in X$, tập hợp $\{x\}$ là tập đóng.*

Chứng minh. Cho X là một T_1- không gian và $x \in X$, ta chứng minh $X\setminus\{x\}$ là tập mở. Thật vậy, nếu $y \in X\setminus\{x\}$ tức là $y \neq x$, khi đó tồn tại một lân cận V của y nhưng $x \notin V$. Vậy $V \subset X\setminus\{x\}$ hay $\{x\}$ là tập đóng. Ngược lại, do $\{x\}$ đóng và $y \neq x$ nên $y \in X\setminus\{x\}$ là tập mở nên phải có một lân cận V của y chứa trong $X\setminus\{x\}$ nên $x \notin V$. Vậy X là một T_1- không gian. ∎

4.1.3 Không gian tôpô X được gọi là một T_2- *không gian* hay là *không gian Hausdorff* nếu với 2 điểm $x, y \in X$, $x \neq y$ thì sẽ tồn tại các lân cận U của x, lân cận V của y sao cho $U \cap V = \emptyset$.

4.1.4 Ví dụ.

1. Các không gian mêtric đều là các không gian Hausdorff.

2. Mọi T_2- không gian đều là T_1- không gian.

4.1.5 Không gian tôpô X được gọi là một T_3- *không gian* hay là *không gian chính quy* nếu X là T_1- không gian và với mọi $x \in X$ và mọi tập đóng $F \subset X$ sao cho $x \notin F$ thì tồn tại các tập mở $U \ni x$ và $V \supset F$ sao cho $U \cap V = \emptyset$.

4.1.6 Định lí. *Cho X là một T_1 – không gian. Lúc đó X là T_3 – không gian khi và chỉ khi với mọi $x \in X$, với mọi lân cận V của x, tồn tại một lân cận U của x sao cho $x \in U \subset \overline{U} \subset V$.*

Chứng minh.

Điều kiện cần. Cho $x \in X$ và V là một lân cận của x. Theo định nghĩa, tồn tại tập mở G sao cho $x \in G \subset V$. Như vậy $x \notin G^c = F$ là tập đóng. Theo giả thiết T_3 của X, tồn tại các tập mở U, W sao cho $x \in U$, $W \supset F$ và $W \cap U = \emptyset$. Suy ra

$$U \subset W^c \subset F^c = G \subset V.$$

Vậy

$$U \subset \overline{U} \subset W^c \subset V.$$

Điều kiện đủ. Cho $x \in X$ và F là tập đóng trong X sao cho $x \notin F$. Khi đó $V = F^c$ là một lân cận của x nên tồn tại U mở để $x \in U \subset \overline{U} \subset V$. Đặt $W = \overline{U}^c$, ta có $\overline{U}^c \supset V^c$ hay $F \subset W$ và $x \in U$, $U \cap W = \emptyset$.

Định lí được chứng minh. ∎

4.1.7 Không gian tôpô X được gọi là một T_4 – *không gian* hay là *không gian chuẩn tắc*, nếu nó là một T_1 – không gian và với hai tập đóng A, B không giao nhau, sẽ tồn tại hai tập mở $U \supset A$, $V \supset B$ sao cho $U \cap V = \emptyset$.

4.1.8 Định lí. *Để không gian tôpô X là không gian chuẩn tắc, điều kiện cần và đủ là với mọi tập đóng A và mọi tập mở $G \supset A$ đều tồn tại một tập mở U sao cho $A \subset U \subset \overline{U} \subset G$.*

Chứng minh.

Điều kiện cần. Đặt $B = X \setminus G$. Khi ấy B là tập đóng và $A \cap B = \emptyset$. Theo định nghĩa của không gian chuẩn tắc, lúc đó tồn tại 2 tập mở rời nhau U, V sao cho $A \subset U$ và $B \subset V$. Tập hợp $X \setminus V$ là đóng và chứa U (vì $U \cap V = \emptyset$) nên $\overline{U} \subset \overline{X \setminus V} = X \setminus V \subset X \setminus B = G$. Vậy điều kiện cần được chứng minh.

Điều kiện đủ. Cho A, B là hai tập đóng trong X thoả mãn $A \cap B = \emptyset$. Lúc đó tập hợp $G = X \setminus B$ là mở và $A \subset G$. Theo giả thiết, tồn tại một tập mở $U \subset X$ sao cho $A \subset U \subset \overline{U} \subset G$. Đặt $V = X \setminus \overline{U}$. Lúc đó V là tập mở và $V \cap U = \emptyset$, hơn nữa $B = X \setminus G \subset X \setminus \overline{V} = V$. ∎

4.1.9 Định lí. *Cho X là một không gian tôpô chính quy. Giả sử X thoả mãn tiên đề đếm được thứ hai. Lúc đó X là một không gian chuẩn tắc.*

Chứng minh. Gọi $\mathcal{B}$ là một cơ sở đếm được trong X. Cho A, B là hai tập đóng trong X và $A \cap B = \emptyset$. Như vậy $X \setminus B$ là một tập mở chứa A nên nó là lân cận của mọi điểm thuộc A. Với mỗi điểm $x \in A$, theo Định lí 4.1.6 và định nghĩa của cơ sở tôpô $\mathcal{B}$, tồn tại tập hợp $V(x) \in \mathcal{B}$ sao cho

$$x \in V(x) \subset \overline{V}(x) \subset X \setminus B.$$

Cho x chạy khắp tập A thì do họ $\mathcal{B}$ đếm được nên có một số hữu hạn hoặc đếm được các tập $V(x_n) = V_n$, $n \in I \subset \mathbf{N}$ sao cho

$$A \subset \bigcup_{n \in I} V_n,\ V_n \in \mathcal{B} \text{ và } \overline{V}_n \subset X \setminus B.$$

lí luận tương tự đối với tập B, ta cũng có

$$B \subset \bigcup_{m \in J} W_m,\ W_m \in \mathcal{B} \text{ và } \overline{W}_m \in X \setminus A,\ J \subset \mathbf{N}.$$

Đặt

$$P_1 = V_1,\ Q_1 = W_1 \setminus \overline{P}_1,$$

$$P_2 = V_2 \setminus \overline{Q}_1,\ Q_2 = W_2 \setminus (\overline{P}_1 \cup \overline{P}_2)$$

....

$$P_n = V_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{Q}_i),\ Q_n = W_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{P}_i),$$

$$\text{và } P = \bigcup_{n \in I}^{\infty} P_n,\ Q = \bigcup_{n \in J}^{\infty} Q_n,$$

Do các tập P_n và Q_n là những tập mở nên P và Q cũng là những tập mở. Với mọi m, n ta có $P_n \cap Q_m = \emptyset$. Thật vậy, nếu $n \leq m$, thì

$$Q_m = W_m \setminus (\bigcup_{i=1}^{m} \overline{P}_i) \subset W_m \setminus \overline{P}_n \subset W_m \setminus P_n$$

nên $P_n \cap Q_m = \emptyset$. Nếu $n > m$ thì

$$P_n = V_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} Q_i) \subset V_n \setminus \overline{Q}_m \subset V_n \setminus Q_m$$

nên $P_n \cap Q_m = \emptyset$. Suy ra $P \cap Q = \emptyset$.

Ta chứng minh $A \subset P$. Thật vậy, nếu $x \in A$ thì tồn tại $n_0 \in I$ sao cho $x \in V_{n_0}$. Ngoài ra $x \notin \overline{W}_n$ do $\overline{W}_n \subset X \setminus A$ nên $x \notin \overline{Q}_n$ với mọi $n \in I$. Như vậy $x \in V_{n_0} \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{Q}_i = P_{n_0}$ dẫn đến $x \in \bigcup_n P_n = P$. Do đó $A \subset P$. Chứng minh tương tự ta có $B \subset Q$. Theo định nghĩa thì X là một không gian chuẩn tắc. ∎

4.2 Sự tồn tại các hàm liên tục.

4.2.1 Định lí. (Bổ đề Uryshon) *Giả sử X là một không gian tôpô chuẩn tắc, A và B là hai tập con đóng của X sao cho $A \cap B = \emptyset$. Khi đó tồn tại một hàm số liên tục $f : X \to \mathbf{R}$ sao cho*

a) $f(x) \in [0, 1]$, với mọi $x \in X$.

b) $f(x) = 0$ khi $x \in A$.

c) $f(x) = 1$ khi $x \in B$.

Chứng minh.

Bước 1. Ta hãy xây dựng hàm số thoả mãn a) – c).

Kí hiệu r là các số hữu tỉ nhị phân trong khoảng $(0, 1)$, tức là các số có dạng $r = \dfrac{k}{2^n}$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$, với $n = 1, 2, \ldots$

Với $n = 1$, theo Định lí 4.1.8 tồn tại một tập mở kí hiệu $A_{1/2}$ sao cho $A \subset A_{1/2} \subset \overline{A_{1/2}} \subset X \setminus B = G$, trong đó G là một tập mở chứa A.

Giả sử khi $n = p$ ta xây dựng được một dãy tập mở A_r có tính chất nếu $r < s$ $\left(r = \dfrac{k}{2^p}, s = \dfrac{k'}{2^p} \right)$ thì

$$A \subset A_r \subset \overline{A_r} \subset A_s \subset \overline{A_s} \subset G.$$

Khi $n = p+1$, ta xét các số dạng $r = \dfrac{k}{2^{p+1}}$. Với các số k chẵn, ($1 < k < 2^{p+1} - 1$, thì các tập A_r đã được xây dựng ở bước thứ p. Nếu k lẻ, lúc đó

$$\frac{k-1}{2^{p+1}} < \frac{k}{2^{p+1}} < \frac{k+1}{2^{p+1}}.$$

Cũng theo Định lí 4.1.8, tồn tại các tập mở $A_{\frac{k}{2^{p+1}}}$ sao cho

$$\overline{A}_{\frac{k-1}{2^{p+1}}} \subset A_{\frac{k}{2^{p+1}}} \subset \overline{A}_{\frac{k}{2^{p+1}}} \subset A_{\frac{k+1}{2^{p-1}}} \subset \overline{A}_{\frac{k+1}{2^{p+1}}},$$

với k là số lẻ và $1 \le k \le 2^{p+1} - 1$.

Bây giờ ta đặt một hàm số $f(x)$ xác định trên không gian X theo công thức sau :

- Nếu $x \in \bigcap\limits_r A_r$ thì $f(x) = 0$.
- Nếu $x \notin \bigcap\limits_r A_r$ thì $f(x) = \sup\{r : x \notin A_r\}$.

Theo định nghĩa của $f(x)$, ta thấy ngay là $0 \le f(x) \le 1$, với mọi $x \in X$. Mặt khác, $A \subset A_r$ với mọi r nên $A \subset \bigcap\limits_r A_r$. Do đó nếu $x \in A$ thì $f(x) = 0$.

Nếu $x \in B$ tức là $x \notin X \setminus B$ nên $x \notin A_r$ với mọi r. Như vậy

$$f(x) = \sup\left\{r = \frac{k}{2^n},\ n \in \mathbf{N},\ 1 \le k \le 2^n - 1\right\} = 1.$$

Bước 2. Ta chứng minh f liên tục tại mọi điểm $x_0 \in X$.

Nếu $x_0 \in \bigcap\limits_r A_r$ thì $f(x_0) = 0$. Với $\epsilon > 0$ cho trước, ta chọn r_0 đủ nhỏ sao cho $0 < r_0 < \epsilon$. Đặt $U = A_{r_0}$ là một lân cận của x_0. Khi đó với mọi $y \in U$ ta có $f(y) \le r_0$. Thật vậy, nếu $r > r_0$ thì $y \in A_r$, y chỉ có thể không thuộc A_r với $r < r_0$. Như vậy

$$|f(y) - f(x_0)| = |f(y) - 0| = f(y) \le r_0 < \epsilon.$$

Nếu $x \notin \bigcap_r A_r$, khi đó $0 < f(x) = c$. Giả sử $c < 1$. Với $\epsilon > 0$ cho trước $(\epsilon < 1)$ ta chọn các số hữu tỉ nhị phân r và s sao cho

$$c - \frac{\epsilon}{2} < r < c < s < c + \frac{\epsilon}{2}.$$

Do $c = \sup\{t : x_0 \notin A_t\}$, nên $x_0 \notin \overline{A}_r$ và $x_0 \in A_s$ nghĩa là $x_0 \in A_s \setminus \overline{A}_r = U$. Khi đó U là một lân cận mở của x_0. Với mọi $y \in A_s \setminus \overline{A}_r$, theo định nghĩa của $f(y)$, ta có $r \le f(y) \le s$. Lúc ấy

$$|f(y) - f(x_0)| = |f(y) - c| < \epsilon.$$

Bây giờ xét trường hợp $f(x_0) = 1$. Lúc đó $x_0 \notin \overline{A}_r$ với mọi $r \in (0, 1)$. Lấy r sao cho $1 - \epsilon < r < 1$, ta có $x_0 \in X \setminus \overline{A}_r = U$ là một lân cận mở của x_0. Nếu $y \in U$ thì $y \notin \overline{A}_r$ nên $f(y) \ge r$. Thành thử $1 - \epsilon < r \le f(y) \le 1$ và suy ra được

$$|f(y) - f(x_0)| = 1 - f(y) < \epsilon.$$

Như vậy trong cả 3 trường hợp ta đều có f liên tục tại x_0. ∎

4.2.2 Hệ quả. *Giả sử X là một không gian chuẩn tắc. Khi đó họ $\mathbf{C}(X)$ các hàm số liên tục trên X tách các điểm của X, nghĩa là với mọi $x_1, x_2 \in X, x_1 \ne x_2$ thì tồn tại một hàm số $f \in \mathbf{C}(X)$ sao cho $f(x_1) \ne f(x_2)$.*

Chứng minh. Vì X là T_1- không gian nên tập một điểm là tập đóng. Áp dụng Định lí 4.2.1, ta thấy tồn tại một hàm số liên tục trên X sao cho $f(x_1) = 0, f(x_2) = 1$.

4.2.3 Định lí. (Định lí Tietze-Uryshon) *Cho X là một không gian chuẩn tắc và M là một tập đóng chứa trong X. Giả sử $f : M \to \mathbf{R}$ là một hàm số thực liên tục sao cho $\sup_{x \in M} |f(x)| < +\infty$. Lúc đó tồn tại một hàm số thực liên tục F trên X thoả mãn $F|_M = f$ và*

$$\sup_{x\in X}|F(x)| = \sup_{x\in M}|f(x)|.$$

Chứng minh. Đặt $c = \sup_{x\in M}|f(x)|$. Nếu $c = 0$ thì ta chỉ cần lấy $F(x) = 0$ với mọi $x \in X$ là xong. Nếu $c > 0$, ta kí hiệu các tập hợp $A = \left\{x \in M : f(x) \le -\frac{c}{3}\right\}$ và $B = \left\{x \in M : f(x) \ge \frac{c}{3}\right\}$. Ta có $A \cap B = \emptyset$. Mặt khác do f liên tục trên M nên A và B là hai tập đóng trong M và chúng cũng đóng trong X vì M là một không gian con đóng của X. Theo bổ đề Uryshon, tồn tại một hàm số $h : X \to [0, 1]$ sao cho $h(x) = 0$ với mọi $x \in A$ và $h(x) = 1$ khi $x \in B$. Đặt $h_1(x) = \frac{2}{3}c\left(h(x) - \frac{1}{2}\right)$. Khi đó

1) $|h_1(x)| = \frac{2}{3}c\left|h(x) - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{3}c,\ \forall x \in X.$

2) $\forall x \in M,\ |f(x) - h_1(x)| \le \frac{2}{3}c.$ (Bằng cách xét các trường hợp $x \in A$, $x \in B$ và $x \in M \setminus (A \cup B)$, ta sẽ nhận được đánh giá này).

Bây giờ thay cho $f(x)$ và c, ta xét hàm số $f(x) - h_1(x)$ và số $\frac{2}{3}c$, ta nhận được hàm số $h_2(x)$ liên tục trên X và thoả mãn

$$|h_2(x)| \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}c\right), \text{ với mọi } x \in X, \text{ và}$$

$$|f(x) - h_1(x) - h_2(x)| \le \left(\frac{2}{3}\right)^2 c, \text{ với mọi } x \in M.$$

Bằng quy nạp, ta thu được một dãy hàm số $(h_n(x))_n$ xác định liên tục trên X thoả mãn các điều kiện

a) $|h_n(x)| \le \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n c$ với mọi $x \in X$.

b) $\left|f(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i(x)\right| \le \left(\frac{2}{3}\right)^n c$, với mọi $x \in M$.

Từ điều kiện a) ta suy ra chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$ hội tụ đều trên X đến hàm số $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)$. Vì các hàm $h_n(x)$ liên tục trên X nên $F(x)$ là hàm liên tục trên X. Cho $n \to \infty$ trong điều kiện b), ta có

$$\left|f(x)-\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x)\right| \le 0,$$

hay $f(x)=F(x)$ với mọi $x \in M$. Như thế $F|_M = f$. Hơn nữa,

$$\sup_{x\in X}|F(x)| \ge \sup_{x\in M}|F(x)| = \sup_{x\in M}|f(x)|.$$

Mặt khác, với mọi $x \in X$ ta có

$$|F(x)| \le \sum_{n=1}^{\infty}|h_n(x)| \le \frac{1}{3}c\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = c$$

nên $\sup_{x\in X}|F(x)| \le c = \sup_{x\in M}|f(x)|$. Như vậy

$$\sup_{x\in X}|F(x)| = \sup_{x\in M}|f(x)|$$

và định lí được chứng minh. ∎

4.2.4 Hệ quả. *Cho f là một hàm số thực liên tục trên tập đóng M trong không gian chuẩn tắc X. Khi ấy tồn tại một hàm số thực liên tục F trên X sao cho $F|_M = f$.*

BÀI TẬP

4.1. Cho X là một không gian tôpô. Kí hiệu $\Delta\{(x, x): x \in X\}$ là tập con của $X \times X$. Chứng minh rằng X là một T_2 – không gian khi và chỉ khi Δ là một tập đóng trong không gian tích $X \times X$.

4.2. Hãy tìm một ví dụ về một không gian tôpô thoả tiên đề T_2 nhưng không thoả T_3.

4.3. Cho X là một T_3- không gian và Y là một không gian con của X. Chứng minh Y cũng là T_3- không gian.

4.4. Cho $(X,\mathcal{T})$ là một không gian tôpô và $\mathcal{R} \subset X\times X$ là một quan hệ tương đương trong X. Chứng minh :

a) Nếu không gian thương $X/\mathcal{R}$ là T_2- không gian thì $\mathcal{R}$ là tập đóng trong không gian tích $X\times X$.

b) Nếu $\mathcal{R}$ đóng trong $X\times X$ và $g(A)$ là mở trong $X/\mathcal{R}$ với mọi $A\in\mathcal{T}$ thì $X/\mathcal{R}$ là T_2- không gian. ($g: X\to X/\mathcal{R}$ là ánh xạ chiếu).

§ 5. KHÔNG GIAN COMPACT

5.1 Định nghĩa và các tính chất cơ bản.

5.1.1 Định nghĩa. Tập $K\subset X$ của không gian tôpô X được gọi là một tập compact nếu mỗi phủ mở của nó đều có chứa một phủ con hữu hạn. Nói cách khác, giả sử $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ là họ các tập mở thoả mãn $K\subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ thì tồn tại các $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2},\dots, G_{\alpha_n}$ sao cho $K\subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$. Không gian tôpô X được gọi là compact nếu bản thân tập hợp X là compact.

5.1.2 Ví dụ. Từ định nghĩa ta có ngay là các tập hợp gồm một số hữu hạn điểm trong không gian tôpô tuỳ ý là tập compact. Hợp một số hữu hạn tập compact là tập compact.

5.1.3 Định lí. *Giả sử X là không gian compact. Khi ấy mọi tập con đóng của X đều là tập compact.*

Chứng minh. Cho A là tập con đóng của X. Giả sử $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một phủ mở của A. Khi ấy $(G_\alpha)_{\alpha\in I}\cup\{(X\setminus A)\}$ là một phủ mở của X. Do X compact nên tồn tại phủ con hữu hạn $G_{\alpha_1},\dots, G_{\alpha_n}$ sao cho

$$X=(X\setminus A)\cup(\bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i})$$

Lúc ấy $A\subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$ nên A là tập compact. ∎

Điều ngược lại của định lí chỉ đúng nếu như X là một T_2- không gian.

5.1.4 Định lí. *Nếu X là một T_2- không gian thì mọi tập con compact của X đều là tập đóng.*

Chứng minh. Cho K là tập compact chứa trong X. Ta chứng minh $X \setminus K$ là tập mở. Lấy $y \in X \setminus K$. Với mọi $x \in K$ đều tồn tại các lân cận mở $V(x)$ của x và lân cận $V_x(y)$ của y sao cho $V(x) \cap V_x(y) = \emptyset$. Họ $\mathcal{U} = \{V(x)\}_{x \in K}$ là một phủ mở của K nên tồn tại phủ con hữu hạn :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(x_i) = V.$$

Đặt $U = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}(y)$ thì V là một lân cận mở của điểm y. Hơn nữa

$$K \cap U \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} V(x_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}(y)\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(V(x_i) \cap V_{x_i}(y)\right) = \emptyset.$$

Như thế $U \subset X \setminus K$ nên $X \setminus K$ mở tức là K đóng. ∎

Từ việc chứng minh định lí trên ta suy ra :

5.1.5 Hệ quả. *Nếu X là một T_2- không gian, K là tập con compact của X và $x \notin K$ thì tồn tại tập mở $U \ni x$,* tập mở $V \supset K$ sao cho $U \cap V = \emptyset$.

5.1.6 Định lí. *Cho X là một T_2- không gian và A, B là hai tập compact của X và $A \cap B = \emptyset$. Lúc đó tồn tại hai tập mở U, V trong X sao cho $A \subset U$, $B \subset V$ và $U \cap V = \emptyset$.*

Chứng minh. Với mỗi $x \in A$ tồn tại các tập mở U_x và V_x sao cho $x \in U_x$, $B \subset V_x$ và $U_x \cap V_x = \emptyset$. Họ $(U_x)_{x \in A}$ là một phủ mở của tập compact A nên tồn tại phủ con hữu hạn $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Đặt

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i},\ V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}.$$

Lúc đó $U \cap V = \emptyset$ và $U \supset A$, $V \supset B$. ∎

5.1.7 Hệ quả. *Giả sử X là một T_2 – không gian và đồng thời X còn là compact. Lúc đó X là một T_4 – không gian (tức là không gian chuẩn tắc).*

Chứng minh. Giả sử A, B là hai tập đóng của T_2 – không gian compact X và $A \cap B = \emptyset$. Khi đó A, B là hai tập compact trong X. Theo Định lí 5.1.6, tồn tại các tập mở U, V trong X sao cho $A \subset U, B \subset V$ và $U \cap V = \emptyset$. Vậy X là không gian chuẩn tắc. ∎

5.1.8 Định nghĩa. Họ $\mathcal{F} = (F_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathcal{P}(X)$ gọi là một họ có tâm nếu $\mathcal{F} \neq \emptyset$ và giao hữu hạn bất kì các phần tử của $\mathcal{F}$ đều khác rỗng, nghĩa là với bất kì tập hữu hạn $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset I$ ta đều có $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} \neq \emptyset$.

5.1.9 Định lí. *Điều kiện cần và đủ để không gian tôpô X compact là mọi họ có tâm các tập đóng của X đều có giao khác rỗng.*

Chứng minh.

Điều kiện cần. Giả sử X compact và $\mathcal{F}$ là một họ có tâm các tập đóng. Nếu $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F = \emptyset$ thì $X \setminus \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F = X$. Suy ra $\bigcup\limits_{F \in \mathcal{F}} (X \setminus F) = X$ nghĩa là $(X \setminus F)_{F \in \mathcal{F}}$ là một phủ mở của X nên tồn tại hữu hạn các $F_{\alpha_1}, ..., F_{\alpha_n}$ sao cho $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} (X \setminus F_{\alpha_i}) = X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{\alpha_i}$. Vậy $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \emptyset$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa họ có tâm.

Điều kiện đủ. Giả sử $(G_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một phủ mở của X. Khi ấy $X = \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ nên

$$\bigcap_{\alpha \in I} (X \setminus G_\alpha) = X \setminus (\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha) = \emptyset.$$

Theo giả thiết ta suy ra họ $(X \setminus G_\alpha)_{\alpha \in I}$ không phải là họ có tâm. Vậy tồn tại hữu hạn $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$ để $\bigcap\limits_{i=1}^{n} (X \setminus G_{\alpha_i}) = \emptyset$. Như thế $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}$, nên X là compact. ∎

5.1.10 Định lí. *Cho X, Y là hai không gian tôpô và f là một ánh xạ liên tục từ X vào Y. Nếu $K \subset X$ là một tập hợp compact thì $f(K) \subset Y$ cũng là một tập compact.*

Chứng minh. Giả sử $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một phủ mở của $f(K): F(K) \subset \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$. Lúc đó $K \subset f^{-1}(f(K)) \subset \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(G_\alpha)$. Vì f liên tục và G_α mở nên $f^{-1}(G_\alpha)$ mở. Vậy $(f^{-1}(G_\alpha))_{\alpha\in I}$ là một phủ mở của K nên tồn tại phủ con hữu hạn :

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i}).$$

Lúc đó

$$f(K) \subset f(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(G_{\alpha_i})) = \bigcup_{i=1}^{n} f\left(f^{-1}(G_{\alpha_i})\right) \subset \bigcup_{i=1}^{n} G_{\alpha_i}.$$

Vậy $f(K)$ là tập compact trong Y. ∎

5.1.11 Định lí. (Định lí Tikhonov) *Để tích $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ của họ các không gian tôpô $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ là compact, điều kiện cần và đủ là mọi $\alpha \in I$, X_α là các không gian compact.*

Chứng minh.

1. Điều kiện cần. Với mọi $\alpha \in I$, các phép chiếu $p_\alpha : \prod_{\alpha\in I} X_\alpha \to X_\alpha$ là một toàn ánh liên tục. Do đó nếu $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ compact thì X_α phải là không gian compact.

2. Điều kiện đủ. Giả sử với mọi $\alpha \in I$, X_α là không gian compact. Cho $\mathcal{F}$ là một họ có tâm các tập đóng trong X. Ta chứng minh rằng $\mathcal{F}$ có giao khác rỗng. Thật vậy, dùng bổ đề Zorn, ta có thể gọi $\mathcal{F}_0$ là họ có tâm tối đại gồm các tập con của X sao cho $\mathcal{F}_0 \supset \mathcal{F}$. Vì

$$\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{A} \supset \bigcap_{A\in\mathcal{F}_0} \overline{A}$$

nên để chứng minh họ F có giao khác rỗng, ta chỉ cần chứng minh rằng $\bigcap_{A\in F_0} \overline{A} \neq \emptyset$. Do tính tối đại của F_0, ta có

a) Nếu $A_1,..., A_m \in F_0$ thì $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in F_0$.

b) Nếu $A_0 \subset X$ và $A_0 \cap A \neq \emptyset$ với mọi $A \in F_0$ thì $A_0 \in F_0$.

Vì F_0 là một họ có tâm nên với mỗi $\alpha \in I$, họ $\left(\overline{p_\alpha(A)}\right)_{A\in F_0}$ cũng là một họ có tâm các tập con của X_α. Vì X_α compact nên $\bigcap_{A\in F_0} \overline{p_\alpha(A)} \neq \emptyset$ với mọi $\alpha \in I$. Trong mỗi tập $\bigcap_{A\in F_0} \overline{p_\alpha(A)}$ ta chọn một phần tử x_α. Ta sẽ chứng minh $x = (x_\alpha) \in \overline{A}$ với mỗi $A \in F_0$. Nếu V là một lân cận tuỳ ý của x, theo định nghĩa không gian tích, tồn tại các lân cận $W_1,..., W_m$ của các điểm $x_{\alpha_1},..., x_{\alpha_m}$ trong các không gian $X_{\alpha_1},..., X_{\alpha_m}$ sao cho $\bigcap_{i=1}^{m} p_{\alpha_i}^{-1}(W_i) \subset V$. Vì $x_{\alpha_i} \in \bigcap_{A\in F_0} \overline{p_\alpha(A)}$ nên $W_i \cap p_{\alpha_i}(A) \neq \emptyset$ với mọi $A \in F_0$ và $i = 1,..., m$. Theo tính chất b) của F_0, ta có $p_{\alpha_i}^{-1}(W_i) \in F_0$, $i = 1,..., m$. Theo a) ta có $\bigcap_{i=1}^{m} p_{\alpha_i}^{-1}(W_i) \in F_0$. Như vậy với mọi $A \in F_0$ thì $V \cap A \neq \emptyset$. Như thế $x \in \overline{A}$ với mọi $A \in F_0$ hay $\bigcap_{A\in F_0} \overline{A} \neq \emptyset$. Theo Định lí 5.1.9, ta kết thúc chứng minh. ▮

Ta nhắc lại rằng trong không gian Euclide $\mathbf{R}^n$ (với tôpô thông thường, mỗi tập $A \subset \mathbf{R}^n$ là compact khi và chỉ khi A đóng và bị chặn. Ta cũng có các mệnh đề sau :

5.1.12 Định lí. *1) Để một tập con A trong $\mathbf{R}^n$ là compact, điều kiện cần và đủ là mọi dãy bất kì trong A đều tồn tại một dãy con của nó hội tụ về một điểm trong tập A.*

2) Đối với mỗi tập đóng trong $\mathbf{R}^n$, các khái niệm compact, bị chặn và hoàn toàn bị chặn là tương đương.

5.2 Không gian compact địa phương.

5.2.1 Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *compact địa phương* nếu mọi $x \in X$ đều tồn tại một lân cận đóng và compact.

5.2.2 Định lí. *a) Không gian con đóng của một không gian compact địa phương là một không gian compact địa phương.*

b) Không gian con mở của một không gian Hausdorff compact địa phương là compact địa phương.

Chứng minh. a) Giả sử X là không gian compact địa phương và F là một không gian con đóng của X. Với $x \in F$ tồn tại một lân cận U của x sao cho $\overline{U}$ là compact trong X. Lúc đó $F \cap \overline{U}$ là một lân cận đóng của x trong F (và trong $\overline{U}$) nên $\overline{U} \cap F$ là tập compact và như thế F là compact địa phương

b) Tiếp theo, giả sử M là một tập mở trong T_2 không gian X. Theo định nghĩa, với mọi $x \in M$ tồn tại lân cận $U = \overline{U}$ compact sao cho $x \in \mathring{U} \subset U \subset M$. Như vậy U là một không gian chuẩn tắc, do đó phải tồn tại một lân cận mở V của x sao cho $x \in V \subset \overline{V} \subset \mathring{U} \subset M$. Ta có $\overline{V}$ là lân cận phải tìm. ∎

5.3 Compact hoá.

5.3.1 Định nghĩa. Cho X là một không gian tôpô không compact và cho cặp (Y, φ) trong đó Y là một không gian compact, $\varphi : X \to \varphi(X) \subset Y$ là một phép đồng phôi sao cho $\overline{\varphi(X)} = Y$. Khi đó ta gọi cặp (Y, φ) là một *compact hoá* của không gian tôpô X.

Bây giờ giả sử $(X, \mathcal{T})$ là một không gian compact địa phương nhưng không compact. Kí hiệu ∞ là một điểm không thuộc X. Đặt $X_\infty = X \cup \{\infty\}$. Ta xác định $\mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{P}(X_\infty)$ gồm tất cả các phần tử của $\mathcal{T}$ và những tập con $G \subset X_\infty$ có chứa ∞ sao cho $G = U \cup \{\infty\}$, $U \in \mathcal{T}$ và $X \setminus U$ là tập compact của X. Kí hiệu $i : X \to X_\infty$ là phép nhúng đồng nhất.

5.3.2 Định lí. (Alexandrov) *Với các kí hiệu trình bày ở trên ta có (X_∞, i) là một compact hoá của X.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh X_∞ là tập compact. Giả sử $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một phủ mở của X_∞ và $\infty\in G_{\alpha_0}$ với $\alpha_0\in I$. Theo định nghĩa, $X\setminus G_{\alpha_0}=X_\infty\setminus G_{\alpha_0}$. Để ý rằng, họ $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ cũng phủ $X\setminus G_{\alpha_0}$ nên tồn tại $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in I$ để $G_{\alpha_1},\dots,G_{\alpha_n}$ phủ $X\setminus G_{\alpha_0}$. Vậy $G_{\alpha_0},\dots,G_{\alpha_n}$ phủ X_∞.

Ta kiểm tra $(X,\mathcal{T})$ là không gian con của X_∞. Điều này hiển nhiên vì với mọi $G\in\mathcal{T}$ ta có $G=X_\infty\cap G$. Hơn nữa, $i:X\to X_\infty$ rõ ràng là phép đồng phôi từ X lên $i(X)=X\subset X_\infty$. Ta còn chứng minh $\overline{X}=X_\infty$. Thật vậy, một lân cận của ∞ trong X_∞ có dạng $\{\infty\}\cup U$ trong đó $U\neq\emptyset$ do $X\setminus U$ compact. Định lí được chứng minh. ▮

Ta gọi compact hoá vừa xây dựng ở trên là *compact hoá một điểm* hay *compact hoá Alexandrov*.

5.3.3 Định lí. *Cho X là một không gian compact địa phương và đồng thời là T_2- không gian. Khi đó với mọi tập compact $K\subset X$ và mọi tập mở $U\supset K$ đều tồn tại hàm $f:X\to\mathbf{R}$ liên tục, thoả các điều kiện sau :*

a) $f(x)\in[0,\ 1]$ với mọi $x\in X$.

b) $f(x)=1$ khi $x\in K$.

c) $f(x)=0$ khi $x\notin U$.

Chứng minh. Kí hiệu X_∞ là compact hoá Alexandrov của X. Do K compact trong X nên nó cũng là tập compact trong X_∞. Vậy K là tập đóng. Mặt khác U là mở trong X nên theo định nghĩa nó cũng mở trong X_∞ thành thử $X_\infty\setminus U$ là đóng trong X_∞. Ta có $K\cap(X_\infty\setminus U)=\emptyset$. Do X_∞ là không gian chuẩn tắc nên tồn tại $f^*:X_\infty\to\mathbf{R}$ liên tục, sao cho

a) $f^*(x)\in[0,\ 1]$.

b) $f^*(x)=1$ khi $x\in K$.

c) $f^*(x)=0$ khi $x\in X_\infty\setminus U$.

Đặt $f=f^*|_X$ là hàm liên tục phải tìm. ▮

5.3.4 Hệ quả. *Cho X là một T_2- không gian và compact địa phương. Với mọi tập đóng $F \subset X$ và* ***mọi*** $x_0 \notin F$ ***đều tồn*** *tại hàm liên tục f xác định trên X sao cho*

a) $f(x) \in [0, 1]$.

b) $f(x_0) = 1$.

c) $f(F) = \{0\}$.

BÀI TẬP

5.1. Cho $(C_n)_n$ là một dãy các tập con compact khác rỗng của không gian tôpô X sao cho $C_{i+1} \subset C_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i \neq \emptyset$.

5.2. Cho $\mathcal{T}$ và $\mathcal{T}'$ là hai tôpô Hausdorff trên X sao cho $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ và $(X, \mathcal{T})$ là không gian compact. Chứng minh $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$!

5.3. Cho X là một T_2- không gian và compact. Giả sử $f : X \to X$ là một ánh xạ liên tục. Chứng minh rằng tồn tại $A \subset X$ sao cho $f(A) = A$.

5.4. Cho $f : X \to Y$ là một toàn ánh.

a) Giả sử X là T_2- không gian và compact, Y là không gian tôpô và f liên tục. Chứng minh Y cũng là T_2- không gian.

b) Giả sử cả X và Y là hai không gian compact. Chứng minh rằng f liên tục khi và chỉ khi $\mathrm{Gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ là một tập đóng trong không gian tích $X \times Y$.

§ 6. KHÔNG GIAN LIÊN THÔNG

6.1 Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *liên thông* nếu trong X chỉ có hai tập $\emptyset$ và X là đồng thời vừa mở và vừa đóng.

Nói cách khác, X là một không gian liên thông nếu không tồn tại hai tập mở khác rỗng A, B sao cho $A \cap B = \emptyset$ và $X = A \cup B$.

Tập $Y \subset X$ được gọi là tập liên thông nếu Y, xem như là không gian con của X, là không gian liên thông.

6.2 Các định lí.

6.2.1 Định lí. *Nếu A là tập liên thông trong không gian tôpô X thì mọi tập B thoả mãn $A \subset B \subset \overline{A}$ đều liên thông.*

Chứng minh. Giả sử B không liên thông, khi đó có hai tập mở khác rỗng trong B sao cho $U \cup V = B$ và $U \cap V = \emptyset$. Vì A trù mật trong B nên $U \cap A$, $V \cap A$ là các tập khác rỗng và mở trong không gian con A, đồng thời $(U \cap A) \cap (V \cap A) = (U \cap V) \cap A = \emptyset$, hơn nữa $(U \cap A) \cup (V \cap A) = A$. Điều này mâu thuẫn với A là tập liên thông. ∎

6.2.2 Định lí. *Giả sử $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ những tập liên thông trong không gian tôpô X sao cho $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \neq \emptyset$. Khi đó $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ là tập liên thông trong X.*

Chứng minh. Giả sử $A = B \cup C$, B, C khác rỗng và mở trong A, $B \cap C = \emptyset$. Lấy $a \in \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$, $a \in A = B \cup C$ nên $a \in B$ chẳng hạn, do đó $a \in B \cap A_\alpha$ với mọi $\alpha \in I$. Mặt khác có $\alpha_0 \in I$ để $C \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset$. Như thế ta có hai tập khác rỗng và mở trong A_{α_0} là $B \cap A_{\alpha_0}$ và $C \cap A_{\alpha_0}$, hơn nữa $\left(B \cap A_{\alpha_0}\right) \cap \left(C \cap A_{\alpha_0}\right) = \emptyset$ và $A_{\alpha_0} = \left(B \cap A_{\alpha_0}\right) \cup \left(C \cap A_{\alpha_0}\right)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết A_{α_0} liên thông. Vậy tập A phải là tập liên thông. ∎

6.2.3 Định lí. *Cho $A_1, \dots, A_n$ là các tập liên thông trong không gian tôpô X sao cho $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ với $i = 1, 2, \dots, n-1$. Khi đó $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ cũng là một tập liên thông trong X.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp. Với $n=1$ là hiển nhiên. Giả sử định lí đúng với $n=k$. Cho $A_1,\dots, A_k, A_{k+1}$ liên thông và $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, $i=1,\dots,k$. Lúc đó $A=\bigcup_{i=1}^{k} A_i$ liên thông theo giả thiết quy nạp, hơn nữa $\emptyset \neq A_k \cap A_{k+1}$. Vậy theo Định lí 6.2.2, $A \cup A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i$ liên thông. ∎

6.2.4 Định nghĩa. Cho X là không gian tôpô, $x \in X$. Kí hiệu $C(x)$ là hợp tất cả các tập liên thông A sao cho $x \in A$ và ta gọi $C(x)$ là *thành phần liên thông* của x trong X. Nếu $C(x)=\{x\}$ với mọi $x \in X$ thì X được gọi là không gian *hoàn toàn bất liên thông.*

Từ định nghĩa ta có :

6.2.5 Định lí. *Cho X là một không gian tôpô. Khi đó :*

1) Thành phần liên thông $C(x)$ là tập liên thông lớn nhất trong X có chứa x.

2) Với $x, y \in X$ ta có một trong hai trường hợp $C(x)=C(y)$ hoặc $C(x) \cap C(y)=\emptyset$.

3) Với mọi $x \in X$ ta có $C(x)$ là một tập đóng.

Chứng minh. 1) là hiển nhiên từ định nghĩa.

2) Nếu $z \in C(x) \cap C(y)$ thì $C(x)=C(z)=C(y)$.

3) Ta có $\overline{C(x)}$ cũng là tập liên thông chứa x nên $C(x)=\overline{C(x)}$. ∎

6.2.6 Định lí. *Giả sử f là một ánh xạ liên tục từ X vào Y và A là một tập liên thông trong X. Khi đó $f(A)$ là tập liên thông trong Y.*

Chứng minh. Giả sử $f(A)$ không liên thông, như vậy $f(A)=M \cup N$, với M, N là các tập mở khác rỗng trong $f(A)$, $M \cap N=\emptyset$. Khi đó ta có $f^{-1}(M) \cap A$, $f^{-1}(N) \cap A$ là các tập mở khác rỗng, không giao nhau trong A và $A=\left(f^{-1}(M) \cap A\right) \cup \left(f^{-1}(N) \cap A\right)$. Như vậy A không liên thông nên trái với giả thiết. Do đó $f(A)$ phải là liên thông. ∎

Định lí sau đây nên lên đặc trưng của tập liên thông trong **R**.

6.2.7 Định lí. *Tập con $E \subset \mathbf{R}$ là liên thông khi và chỉ khi E thoả mãn tính chất : Với mọi $x, y \in E$ nếu $x < z < y$ thì $z \in E$.*

Chứng minh. Giả sử tồn tại $x, y \in E$ và có z thoả mãn $x < z < y$ nhưng $z \notin E$. Ta đặt

$$A = \{\alpha \in E : \alpha < z\} = E \cap (-\infty, z)$$
$$B = \{\beta \in E : z < \beta\} = E \cap (z, +\infty)$$

Khi đó ta có A, B là các tập mở trong E, khác rỗng vì chúng lần lượt có chứa x, y tương ứng. Hơn nữa $A \cup B = E$, hoá ra E không liên thông.

Ngược lại, giả sử E không liên thông. Theo định nghĩa và tính chất của không gian con, tồn tại các tập mở khác rỗng A, B trong $\mathbf{R}$, $A \cap B = \emptyset$, $(A \cap E) \cup (B \cap E) = E$. Chọn $x \in A \cap E$, $y \in B \cap E$, giả sử $x < y$. Đặt

$$S = A \cap [x, y] \text{ và } z = \sup S,$$

ta chứng minh $z \notin E$.

Trước hết vì $y \in B$ mở nên $z < y$. Thật vậy, nếu $x \geq y$ thì $z = y$, sẽ có dãy (x_n) trong A, $x_n \to y$ nên $A \cap B \neq \emptyset$ vì có chứa các x_n. Mâu thuẫn !

Tiếp theo, ta thấy vì A mở và z là cận trên của S nên $z \notin A$ và $x < z$. Nếu $z \in B$ thì cũng do B mở nên có một khoảng mở (c, d) sao cho $z \in (c, d) \subset B$. Theo định nghĩa của supremum, có $a \in A \cap [x, y]$ để $c < a < z < d$. Điều này mâu thuẫn với $A \cap B = \emptyset$. Vậy $z \notin B$ do đó $z \notin E$. ∎

6.2.8 Hệ quả. *Tập E trong $\mathbf{R}$ là liên thông khi và chỉ khi E là một khoảng (tức là một trong các tập có dạng sau : $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(a, b]$, (a, b) với mọi $a, b \in \mathbf{R}$.*

6.3 Liên thông cung.

6.3.1 Định nghĩa. Không gian tôpô X được gọi là *liên thông cung* nếu với mọi $a, b \in X$, tồn tại một ánh xạ liên tục $f : [0, 1] \to X$ sao cho $f(0) = a, f(1) = b$.

Ánh xạ f được gọi là *cung* nối điểm đầu a, điểm cuối b.

6.3.2 Định lí. *Nếu không gian tôpô X liên thông cung thì nó liên thông.*

Chứng minh. Lấy $a \in X$ là một điểm cố định. Với mọi $x \in X$ tồn tại một ánh xạ liên tục $f_x : [0, 1] \to X$ sao cho $f_x(a) = 0$, $f_x(1) = x$. Ta có $A_x = f_x([0, 1])$ là tập liên thông. Ta có $X = \bigcup_{x \in X} A_x$ và ngoài ra $a \in \bigcap_{x \in X} A_x \neq \emptyset$ nên X là không gian liên thông theo Định lí 6.2.2. ∎

BÀI TẬP

6.1. Giả sử A, B là hai tập liên thông trong không gian tôpô X sao cho $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$. Chứng minh rằng $A \cup B$ cũng là tập liên thông.

6.2. Cho X là một không gian tôpô liên thông và f là một hàm số liên tục từ X vào $\mathbf{R}$. Giả sử $a, b \in f(X)$, $a < b$. Chứng minh rằng với mọi $c \in (a, b)$ tồn tại $x \in X$ để $f(x) = c$.

6.3. Chứng minh rằng không gian tôpô X không liên thông nếu và chỉ nếu tồn tại một toàn ánh liên tục $f : X \to Y$ trong đó Y là không gian rời rạc có đúng hai phần tử.

6.4. Cho $(X_\alpha)_{\alpha \in I}$ là một họ các không gian liên thông. Chứng minh rằng không gian tôpô tích $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ liên thông khi và chỉ khi X_α liên thông với mọi $\alpha \in I$.

6.5. Chứng minh rằng không gian thương của một không gian liên thông cũng là liên thông.

§ 7. KHÔNG GIAN TÔPÔ KHẢ MÊTRIC

7.1 Không gian giả mêtric.

7.1.1 Định nghĩa. Giả sử X là một tập khác rỗng. Một hàm số $d : X \times X \to \mathbf{R}$ được gọi là một *giả mêtric* trên X nếu nó thoả mãn ba tiên đề sau đây.

1) $d(x, y) \geq 0$, với mọi $x, y \in X$.

2) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$.

3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ với mọi $x, y, z \in X$.

Tương tự trong không gian mêtric, ta có các khái niệm

Hình cầu mở (t.ư., đóng), tâm $x_0 \in X$, bán kính r là tập hợp

$$B(x_0, r) = \left\{x \in X : d(x, x_0) < r\right\},$$

$$(\text{t.ư., } B'(x_0, r) = \left\{x \in X : d(x, x_0) \leq r\right\}.$$

Tập hợp $A \subset X$ được gọi là mở nếu $\forall x \in A,\ \exists r_x > 0 : B(x, r_x) \subset A$.

Gọi $\mathcal{T}$ là họ các tập mở vừa mới xác định. Khi đó $\mathcal{T}$ là một tôpô trên X. $\mathcal{T}$ được gọi là tôpô sinh bởi giả mêtric d. Hiển nhiên ta có :

Nếu x_0 là một điểm bất kì của không gian giả mêtric X thì họ (đếm được) các hình cầu mở tâm x_0, bán kính $r \in \mathbf{Q}^+$ là một cơ sở lân cận của điểm x_0. Như vậy tôpô sinh bởi giả mêtric thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất.

7.1.2 Định lí. *Không gian giả mêtric (X, d) trở thành không gian mêtric khi và chỉ khi tôpô $\mathcal{T}$ sinh bởi giả mêtric d thoả mãn tiên đề T_1.*

Chứng minh. Nếu (X, d) là không gian mêtric thì khi $x \neq y$ thì sẽ tồn tại hai lân cận $B(x, \epsilon)$ và $B(y, \epsilon)$ với $\epsilon = \frac{1}{2}d(x, y) > 0$ sao cho $B(x, \epsilon) \cap B(y, \epsilon) = \emptyset$.

Ngược lại, giả sử $(X, \mathcal{T})$ là $T_1 -$ không gian. Nếu $x \neq y$, khi ấy tồn tại hình cầu $B(x, r)$ sao cho $y \notin B(x, r)$. Lúc đó $d(x, y) \geq r$ hay là $d(x, y) \neq 0$. ∎

Bạn đọc chú ý rằng phần lớn các tính chất đúng với không gian mêtric thì cũng đúng với không gian giả mêtric. Tuy nhiên trong không gian giả mêtric, giới hạn của một dãy nếu tồn tại thì chưa chắc là duy nhất.

7.2 Vài liên hệ giữa không gian tôpô và không gian giả mêtric.

Nhắc lại rằng do không gian giả mêtric thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất nên một số tính chất tôpô có thể diễn đạt theo ngôn ngữ của dãy, chẳng hạn :

1) x là điểm dính của A trong không gian giả mêtric X khi và chỉ khi tồn tại một dãy $(x_n)_n \subset A$ sao cho $x_n \to x (n \to \infty)$ (nghĩa là $d(x_n, x) \to 0$).

Thật vậy, nếu x là một điểm dính của A thì trong mỗi lân cận $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ ta chọn một điểm $x_n \in B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \cap A$. Dãy $(x_n)_n$ sẽ hội tụ đến x. Ngược lại, nếu có một dãy $(x_n) \subset A$ sao cho $x_n \to x$. Gọi V là một lân cận tuỳ ý của x. Lúc đó có hình cầu $B(x, \epsilon) \subset V$. Lấy $x_n \in A$ sao cho $d(x_n, x) < \epsilon$. Lúc đó $x_n \in A \cap V$. Vậy x là một điểm dính của tập A.

2) Cho X, Y là hai không gian giả mêtric và ánh xạ $f : X \to Y$. Khi đó ta có

$$(f \text{ liên tục tại } x_0 \in X) \Leftrightarrow \left(\forall (x_n)_n \subset X,\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0).\right)$$

3) Cho d_1, d_2 là hai giả mêtric trên cũng một tập hợp X. Ta nói rằng hai giả mêtric này *tương đương tôpô* nếu chúng sinh ra cùng một tôpô trên X nghĩa là ánh xạ đồng nhất $\mathrm{id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$ là một phép đồng phôi.

Giả mêtric d trên X được gọi là *bị chặn* nếu $\sup\limits_{x,y \in X} d(x, y) < \infty$. Ta có định lí sau :

7.2.1 Định lí. *Cho giả mêtric tuỳ ý d trên tập X. Khi đó tồn tại một giả mêtric bị chặn d_1 tương đương tôpô với d.*

Chứng minh. Đặt $d_1(x, y) = \min(d(x, y), 1)$. Dễ dàng kiểm tra d_1 là một giả mêtric trên X và d_1 bị chặn. Cho $(x_n)_n$ là một dãy trong X và $x_n \to x_0 \in X$. Ta thấy

$$\left(d(x_n, x_0) \to 0\right) \Leftrightarrow d_1(x_n, x_0) = \min\left(1, d(x_n, x_0)\right) \to 0$$

khi $n \to \infty$. Vậy ánh xạ đồng nhất $id : (X, d) \to (X, d_1)$ là phép đồng phôi. Nói cách khác d và d_1 là tương đương tôpô. ∎

Cũng như trong không gian mêtric, giả sử E là một tập con của không gian giả mêtric (X, d). Với $x \in X$, ta đặt

$$d(x, E) = \inf_{y \in E} d(x, y).$$

Dễ dàng chứng minh được rằng

$$|d(x, E) - d(y, E)| \leq d(x, y), \forall x, y \in X.$$

Như vậy hàm số $x \to d(x, E)$ là một hàm số liên tục trên X.

7.2.2 Định lí. *Cho (X, d) là một không gian giả mêtric và A, B là hai tập đóng trong X sao cho $A \cap B = \emptyset$. Lúc ấy tồn tại các tập mở U, V chứa trong X sao cho $U \cap V = \emptyset$ và $A \subset V, B \subset V$.*

Chứng minh. Các hàm số $f(x) = d(x, A)$ và $g(x) = d(x, B)$ là những hàm số liên tục trên X. Do đó hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ cũng liên tục trên X. Đặt

$$U = \{x \in X : h(x) < 0\} = h^{-1}(-\infty, 0)$$
$$V = \{x \in X : h(x) > 0\} = h^{-1}(0, +\infty)$$

Lúc đó hiển nhiên U, V là những tập mở trong X, $U \cap V = \emptyset$. Hơn nữa, nếu $x \in A$ thì $d(x, A) = 0$, $x \notin B$ thì $d(x, B) > 0$ nên $h(x) = d(x, A) - d(x, B) < 0$ hay $A \subset U$. Tương tự $B \subset V$. ∎

7.2.3 Hệ quả. *Không gian mêtric là một không gian chuẩn tắc.*

7.3 Không gian khả mêtric hoá.

7.3.1 Định nghĩa. Không gian tôpô $(X, \mathcal{T})$ được gọi là *khả mêtric hoá* nếu tồn tại một mêtric d trên X sao cho tôpô sinh bởi d trùng với tôpô $\mathcal{T}$.

Để ý rằng, mọi không gian mêtric đều thoả mãn tiên đề đếm được thứ nhất. Như vậy đây là một điều kiện cần để $(X, \mathcal{T})$ khả mêtric hoá. Sau đây là một điều kiện đủ.

7.3.2 Định lí. *Giả sử X là một không gian chính quy và có một cơ sở đếm được. Khi đó X là khả mètric hoá được.*

Chứng minh. Kí hiệu $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ...\}$ là một cơ sở đếm được của X. Giả sử $x \in B_j$ khi đó tồn tại $B_i \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in B_i \subset \overline{B_i} \subset B_j$. Kí hiệu $\mathcal{A} = \{(B_i, B_j) \mid \overline{B_i} \subset B_j\} \subset \mathcal{B} \times \mathcal{B}$. Khi đó $\mathcal{A}$ là tập đếm được và có thể viết được dưới dạng

$$\mathcal{A} = \{(B_{n_1}, B_{m_1}), (B_{n_2}, B_{m_2}), ...\}$$

Vì X chính quy có một cơ sở đếm được nên nó là một không gian chuẩn tắc. Như vậy với mỗi $k \in \mathbf{N}$ các tập $\overline{B}_{n_k}$ và $B_{m_k}^c = X \setminus B_{m_k}$ là đóng và không có điểm chung nên tồn tại các hàm liên tục $f_k : X \to [0, 1]$ sao cho $f(\overline{B}_{n_k}) = \{1\}$ và $f(B_{m_k}^c) = \{0\}$. Ta đặt

$$d : X \times X \to \mathbf{R},\ d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{2^k}$$

thì d là một mêtric trên X. Thật vậy, $d(x, y) \geq 0$ là hiển nhiên. Nếu $x \neq y$ thì tồn tại $B_j \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in B_j$ và $y \in B_j^c$, theo trên sẽ tồn tại $B_i \in \mathcal{B}$ sao cho $x \in B_i \subset \overline{B}_i \subset B_j$. Vậy (B_i, B_j) là một cặp dạng $(B_{n_k}, B_{m_k}) \in \mathcal{A}$ nào đó nên $f_k(x) = 1$, $f_k(y) = 0$ và khi ấy $d(x, y) > 0$. Tiên đề 2 và 3 hiển nhiên. Bây giờ ta chứng minh tôpô sinh bởi mêtric d trùng với $\mathcal{T}$ nghĩa là chứng minh ánh xạ

$$id : (X, \mathcal{T}) \to (X, d),\ x \to x$$

là một phép đồng phôi. Cho $x_0 \in X$ và $\varepsilon > 0$. Chọn $k \in \mathbf{N}$ sao cho $\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$. Các hàm $f_1, f_2, ..., f_k$ liên tục trên $(X, \mathcal{T})$ nên tồn tại lân cận mở V của x_0 sao cho nếu $x \in V$ thì $\sum_{i=1}^{k} \frac{|f_i(x) - f_i(x_0)|}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Từ đó với mọi $x \in V$ thì

$$d(x_0, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|f(x_0) - f_i(x)|}{2^i} < \epsilon,$$

nghĩa là $id : (X, \mathcal{T}) \to (X, d)$ liên tục tại x_0. Ngược lại, giả sử $V \in \mathcal{T}$ là lân cận của x_0. Khi ấy tồn tại cặp $(B_{n_i}, B_{m_i}) \in \mathcal{A}$ sao cho

$$x \in B_{n_k} \subset \overline{B}_{n_i} \subset B_{m_i} \subset V.$$

Nếu $x \in X$ và $d(x, x_0) < \delta = \frac{1}{2^k}$ ta suy ra được

$$\frac{|f_k(x_0) - f_k(x)|}{2^k} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|f_i(x_0) - f_i(x)|}{2^i} = d(x, x_0) < \frac{1}{2^k}$$

do đó

$$|f_k(x_0) - f_k(x)| < 1. \tag{*}$$

Vì $x_0 \in B_{n_k}$ nên $f_k(x_0) = 1$ còn $f_k(x) \in [0, 1]$ như thế từ (*) ta có $f_k(x) > 0$ nên $x \notin B_{m_i}^c \supset V^c$ hay $x \in V$. Vậy $id^{-1} : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ liên tục nên id là phép đồng phôi. Định lí được chứng minh. ∎

BÀI TẬP

7.1. Chứng minh rằng nếu X là một không gian giả mêtric khả li thì tôpô tương ứng sinh ra bởi mêtric này sẽ có cơ sở đếm được.

7.2. Giả sử $f : X \to Y$ là một ánh xạ từ không gian giả mêtric X vào không gian tôpô Y. Nếu $X \supset (x_n)_n$ hội tụ đến x trong X dẫn đến $(f(x_n))_n$ hội tụ đến $f(x)$ trong Y thì f là liên tục. (Ta nói $y_n \to y$ trong không gian tôpô Y nếu mọi lân cận của y chứa tất cả y_n ngoại trừ một số hữu hạn y_n).

Chương 3.

LÍ THUYẾT ĐỘ ĐO

Vào đầu thế kỉ 20 để có thể hiểu về cấu trúc của các hàm nhằm mở rộng lớp các hàm liên tục và mở rộng khái niệm tích phân, các nhà toán học nghiên cứu các tập trong không gian Euclide. Trong quá trình này họ đã nhận thấy rằng các khái niệm như "độ dài", "diện tích" cần thiết phải được chính xác hoá và mở rộng. Điều này đưa tới việc hình thành khái niệm độ đo và nó gắn liền với các tên tuổi của các nhà toán học lỗi lạc như E. Borel, H. Lebesgue, C. Carathéodory.

Chương này dành cho việc trình bày lí thuyết độ đo trên nửa vành, cách thác triển nó lên một $\sigma-$ đại số (bằng cách sử dụng độ đo ngoài theo Carathéodory) và khái niệm hàm đo được. Phần cuối của chương được dành cho việc tìm hiểu về cấu trúc của các hàm đo được, làm cơ sở cho việc định nghĩa tích phân Lebesgue ở Chương 4.

Nhiều tác giả định nghĩa độ đo trên đại số các tập hợp. Tuy nhiên ở đây chúng tôi xây dựng độ đo trên nửa vành các tập(*). Chúng tôi chọn cách xây dựng độ đo trên nửa vành là vì các lí do sau : (i) Để xây dựng độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$ hay trên $\mathbb{R}^n$ dù bằng cách nào thì cũng phải xuất phát từ họ các gian trên $\mathbb{R}$ hay trên $\mathbb{R}^n$. Tuy nhiên các họ tập này là các nửa vành mà không là các đại số. Như vậy theo một nghĩa nào đó xây dựng độ đo trên nửa vành là "tự nhiên" và "tiết kiệm" hơn. (ii) Vì tích các đại số hay $\sigma-$ đại số là một nửa vành (mà không là đại số) nên khi xây dựng độ đo tích trên tích các không gian độ đo, xuất phát từ nửa vành rõ ràng tỏ ra thuận tiện hơn. (iii) Một thuận lợi nữa là trên không gian $\mathbb{R}^{n+p}$ (xem như $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$), độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^{n+p}$ sẽ trùng với độ đo tích của hai độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R}^p$ nếu xây dựng độ đo trên nửa vành (mà không phải bổ sung như khi xây dựng độ đo trên các đại số.

(*) Nhiều tác giả cũng đã làm như vậy, chẳng hạn, B.Z. Vulikh, A.N Kolmogorov-S.V Fomin, C.D. Aliprantis và Owen Burkinshaw, ...

§ 1. NỬA VÀNH, VÀNH VÀ ĐẠI SỐ CÁC TẬP

Trong chương này khi nói đến họ tập (hay hệ tập) ta hiểu là một họ các tập con của một tập X nào đó cho trước.

1.1 Vành, đại số và $\sigma-$ đại số.

1.1.1 Định nghĩa. Một họ tập $\mathcal{R}$ không rỗng (các tập con của X) được gọi là một *vành* nếu nó có các tính chất sau :

(a) $\forall A, B \in \mathcal{R}, A \cup B \in \mathcal{R}$,

(b) $\forall A, B \in \mathcal{R}, A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Một vành chứa $X (X \in \mathcal{R})$ thì được gọi là một *đại số*.

1.1.2 Nhận xét.

(i) Nếu $\mathcal{R}$ là một vành thì $\emptyset \in \mathcal{R}$. Thật vậy, vì $\mathcal{R} \neq \emptyset$ nên có $A \in \mathcal{R}$. Khi đó $A \setminus A = \emptyset \in \mathcal{R}$.

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{R}$ thì $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$ theo (b). Như vậy vành đóng kín đối với phép lấy giao, hợp hữu hạn các tập hợp.

(iii) $\mathcal{R}$ là một đại số thì

(b') $A \in \mathcal{R}$ kéo theo $A^c \in \mathcal{R}$.

Từ đây dễ thấy rằng :

$\mathcal{R}$ là một đại số khi và chỉ khi $\mathcal{R} \neq \emptyset$ và thoả mãn các điều kiện (a) và (b').

1.1.3 Ví dụ.

(i) Các họ $\mathcal{R}_1 = \{\emptyset\}$, $\mathcal{R}_2 = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{R}_3 = \mathcal{P}(X)$ là các vành.

(ii) Họ $\mathcal{R}_4$ tất cả các tập con hữu hạn của X là một vành.

(iii) Họ $\mathcal{R}_5$ tất cả các tập con bị chặn của đường thẳng thực IR là một vành.

Trong các họ trên, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ là các đại số. $\mathcal{R}_1$ là đại số khi và chỉ khi $X = \emptyset$. $\mathcal{R}_4$ là đại số khi và chỉ khi X là tập hữu hạn. $\mathcal{R}_5$ không phải là một đại số.

1.1.4 Định nghĩa. Một họ tập $\mathcal{R} \neq \emptyset$ được gọi là một $\sigma-$ *vành* nếu nó thoả mãn các điều kiện sau :

(a') $A_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, 2, ..., n, ...$ thì $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$,

(b) $\forall A, B \in \mathcal{R}$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$.

Một $\sigma-$ vành chứa X được gọi là một $\sigma-$ *đại số*.

1.1.5 Nhận xét.

(i) Một $\sigma-$ vành đóng kín với phép lấy giao đếm được. Nghĩa là $A_i \in \mathcal{R}$, $i \in \mathbf{N}$ thì $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$. Thật vậy, vì $A = A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_i)$ nên $A \in \mathcal{R}$ do (b) và (a').

(ii) Mọi $\sigma-$ vành $\mathcal{R}$ là một vành. Thật vậy, do (b) (xem Nhận xét 1.1.2.) $\emptyset \in \mathcal{R}$. Khi đó với $A, B \in \mathcal{R}$, đặt $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_n = \emptyset$, mọi $n \geq 3$. Khi đó $A \cup B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$.

1.1.6 Định lí. *Một họ $\mathcal{R}$ khác rỗng các tập con của X là một $\sigma-$ đại số khi và chỉ khi nó thoả mãn các điều kiện (a') và (b').*

Chứng minh. Điều kiện cần là hiển nhiên. Ta chứng minh điều kiện đủ. Giả sử $\mathcal{R} \neq \emptyset$ và thoả mãn (a'), (b'). Khi đó có $A \in \mathcal{R}$ và do (b') thì $A^c \in \mathcal{R}$. Đặt $A_1 = A$, $A_i = A^c$, mọi $i \geq 2$ thì theo (a'), $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = X \in \mathcal{R}$. Do đó theo (b') thì $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{R}$.

Bây giờ nếu $A_i \in \mathcal{R}$, mọi $i \in \mathbf{N}$ thì $A_i^c \in \mathcal{R}$ nên theo (a').

$$(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{R}.$$

Vì $\emptyset \in \mathcal{R}$ nên $\mathcal{R}$ cũng đóng kín đối với phép lấy giao hữu hạn. Cuối cùng nếu $A, B \in \mathcal{R}$ thì $B^c \in \mathcal{R}$ và $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{R}$. Vậy $\mathcal{R}$ thoả mãn Định nghĩa 1.1.4 và do đó là một $\sigma-$ đại số. ∎

1.1.7 Định lí. *Giao của một họ bất kì các vành (đại số, $\sigma-$ đại số, $\sigma-$ vành) là một vành (đại số, $\sigma-$ đại số, $\sigma-$ vành).*

Chứng minh.

Ta chỉ cần chứng minh cho họ các vành. Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Giả sử $(\mathcal{R}_\alpha)_{\alpha\in I}$ là một họ các vành. Gọi $\mathcal{R} = \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{R}_\alpha$. Vì $\emptyset \in \mathcal{R}_\alpha$ mọi $\alpha \in I$ nên $\emptyset \in \mathcal{R}$. Nếu $A, B \in \mathcal{R}$ thì $A, B \in \mathcal{R}_\alpha$ mọi $\alpha \in I$ thì $A \cup B \in \mathcal{R}_\alpha$ và $A \setminus B \in \mathcal{R}_\alpha$ mọi $\alpha \in I$. Do đó $A \cup B$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$. Vậy $\mathcal{R}$ là một vành. ∎

1.1.8 Định lí. *Với mọi họ tập $\mathcal{C}$, tồn tại một vành (đại số, $\sigma-$ vành, $\sigma-$ đại số) duy nhất chứa $\mathcal{C}$ và chứa trong mọi vành (đại số, $\sigma-$ vành, $\sigma-$ đại số) chứa $\mathcal{C}$. Ta sẽ gọi nó là vành (đại số, $\sigma-$ vành, $\sigma-$ đại số, tương ứng) sinh bởi họ $\mathcal{C}$ và kí hiệu $\mathcal{F}(\mathcal{C})$*(*)

Chứng minh. Thật vậy, dễ thấy $\mathcal{F}(C) = \bigcap_{\varepsilon\in\mathcal{S}} \varepsilon$, trong đó $\mathcal{S}$ là họ tất cả các vành (đại số, $\sigma-$ vành, $\sigma-$ đại số) chứa $\mathcal{C}$ (không rỗng vì $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{S}$). ∎

1.1.9 Ví dụ. Giả sử (X, d) là một không gian mêtric và τ là họ tất cả các tập mở trong X (hay (X, τ) là một không gian tôpô). τ nói chung không phải là một $\sigma-$ đại số trên X. $\sigma-$đại số sinh bởi τ, $\mathcal{F}(\tau)$, được gọi là $\sigma-$ đại số Borel trên X và thường được kí hiệu là $\mathcal{B}(X)$. Mỗi tập thuộc $\mathcal{B}(X)$ được gọi là tập Borel. Chẳng hạn, các tập dạng F_σ, G_δ trong X đều là các tập Borel. Để ý $\sigma-$ đại số Borel cũng là $\sigma-$đại số sinh ra bởi họ tất cả các tập đóng trong X.

1.2 Nửa vành.

1.2.1 Định nghĩa. Họ $\mathcal{R}$ không rỗng các tập con của X được gọi là *nửa vành* nếu nó thoả mãn các điều kiện sau :

(a1) $A, B \in \mathcal{R}$ thì $A \cap B \in \mathcal{R}$,

(b1) $A, B \in \mathcal{R}$ và $A \subset B$ thì tồn tại một số hữu hạn các tập $C_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, \cdots, n$ rời nhau từng đôi một sao cho

$$B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i.$$

(*) Tuỳ từng trường hợp cụ thể mà ta gọi $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ là đại số, $\sigma-$ vành hay $\sigma-$ đại số sinh bởi họ $\mathcal{C}$.

1.2.2 Nhận xét.

(i) Dễ thấy rằng mọi vành là nửa vành.

(ii) Mọi nửa vành đều chứa tập $\emptyset$. Thật vậy, vì $\mathcal{R} \neq \emptyset$ nên có $A \in \mathcal{R}$. Theo (b1), tồn tại $C_1, \cdots, C_n \in \mathcal{R}$ sao cho $\emptyset = A \setminus A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$. Từ đó $C_i = \emptyset$, $i = 1, \cdots, n$ và $\emptyset \in \mathcal{R}$.

1.2.3 Các ví dụ.

(i) Họ $\mathcal{R} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathrm{IR}\}$ là một nửa vành. Thật vậy, rõ ràng là $\mathcal{R} \neq \emptyset$ và $\emptyset \in \mathcal{R}$. Nếu $A = [a, b)$, $B = [c, d)$ thì hoặc $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{R}$ hoặc $A \cap B = [s, t)$ trong đó $s = \max\{a, c\}$ còn $t = \min\{b, d\}$. Giả sử $[a, b) \subset [c, d)$. Khi đó hoặc $[a, b) = \emptyset$ thì (b1) thoả còn nếu $[a, b) \neq \emptyset$ thì $[c, d) \setminus [a, b) = [c, a) \cup [b, d)$ và hai tập ở vế phải đẳng thức này rời nhau. Vậy (b1) thoả mãn.

(ii) Ta gọi một gian trong IR là một trong các tập có dạng sau, (với $a, b \in \mathrm{IR}$), $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, a]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, +\infty)$. Từ đây ta sẽ dùng kí hiệu $< a, b >$, $\left(a, b \in \overline{\mathrm{IR}} = \mathrm{IR} \cup \{+\infty, -\infty\}\right)$ để chỉ một gian trong IR (a, b gọi là hai đầu mút của gian $< a, b >$). Gọi

$$\mathcal{R} = \{< a, b > \mid a, b \in \overline{\mathrm{IR}}\}.$$

Khi đó $\mathcal{R}$ là một nửa vành và gọi là nửa vành các gian trên IR (để ý rằng $\mathcal{R}$ không là một vành).

(iii) $X = \{a, b\}, \mathcal{R} = \{\emptyset, \{a\}\}$ là một nửa vành.

Để ý rằng các họ ở trong các ví dụ (i), (ii) là các nửa vành nhưng không là vành. Bổ đề sau đây đóng vai trò quan trọng trong các mục sau.

1.2.4 Bổ đề. *Giả sử $\mathcal{R}$ là một nửa vành và $A, A_1, \cdots, A_p \in \mathcal{R}$, $(p \in \mathbf{N})$. Khi đó tồn tại một số hữu hạn các tập $C_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, 2, \cdots, r$ $(r \in \mathbf{N})$ đôi một không giao nhau và sao cho*

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{p} A_i = \bigcup_{i=1}^{r} C_i. \tag{1.1}$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp. Khi $p = 1$ ta có :

$$A \setminus A_1 = A \setminus (A \cap A_1) = \bigcup_{j=1}^{s} C_j, \ C_j \in \mathcal{R} \text{ và } C_j \cap C_{j'} = \emptyset, \ j \neq j'$$

theo định nghĩa của nửa vành.

Giả sử (1.1) đúng khi $p = n$. Ta chứng minh nó cũng đúng khi $p = n+1$. Xét các tập $A_1, \cdots, A_{n+1} \in \mathcal{R}$. Khi đó

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = (A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i) \setminus A_{n+1}. \tag{1.2}$$

Theo giả thiết quy nạp,

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{k} E_j, \ E_j \cap E_{j'} = \emptyset, \ j \neq j'. \tag{1.3}$$

Từ (1.2) – (1.3) ta có :

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = (\bigcup_{j=1}^{k} E_j) \setminus A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{k} (E_j \setminus A_{n+1}). \tag{1.4}$$

Với mỗi $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, theo trên (khi $p = 1$), ta có :

$$E_j \setminus A_{n+1} = \bigcup_{l=1}^{r_j} D_{jl}, \ D_{jl} \cap D_{jl'} = \emptyset \text{ nếu } l \neq l'.$$

Do đó từ (1.4) ta suy ra :

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \bigcup_{\substack{1 \le j \le k \\ 1 \le l \le r_j}} D_{jl}.$$

Vì các E_j đôi một không giao nhau và D_{jl} cũng đôi một không giao nhau nên các D_{jl} với mọi $j = 1, \cdots, k$; $l = 1, \cdots, r_j$ cũng đôi một không giao nhau và bổ đề được chứng minh. ∎

BÀI TẬP

1.1. X, Y là hai tập cho trước và $f : X \to Y$ là một ánh xạ, $\mathcal{R}$ là một vành (tương ứng, $\sigma-$ vành, $\sigma-$ đại số) trên Y. Chứng minh rằng $f^{-1}(\mathcal{R})$ là một vành (tương ứng, $\sigma-$ vành, $\sigma-$ đại số) trên X. Ở đây

$$f^{-1}(\mathcal{R}) = \{A \subset X \mid \exists B \in \mathcal{R}, A = f^{-1}(B)\}.$$

1.2. Cho $\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số trên X. $\mathcal{O}$ là một họ các tập con của một tập S và $\mathcal{B}$ là $\sigma-$ đại số sinh bởi $\mathcal{O}$. Giả sử $f : X \to S$ là một ánh xạ sao cho với mọi $G \in \mathcal{O}$ ta đều có $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$. Chứng minh rằng $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ với mọi $B \in \mathcal{B}$.

1.3. Cho $\mathcal{R}$ là một vành trên X. Gọi $\mathcal{A}$ là lớp tất cả các tập $E \subset X$ sao cho hoặc $E \in \mathcal{R}$ hoặc $E^c = X \setminus E \in \mathcal{R}$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{A}$ là một đại số

1.4. Cho X là một tập tuỳ ý khác rỗng. Gọi $\mathcal{R}$ là lớp tất cả các tập chỉ gồm một điểm của X và tập $\emptyset$. Chứng tỏ rằng $\mathcal{R}$ là một nửa vành.

1.5. Cho $\mathcal{R}$ là một nửa vành trên X và $C \subset X$ sao cho $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Chứng tỏ rằng C có thể được biểu diễn dưới dạng $C = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$ trong đó $(B_m)_m \subset \mathcal{R}$, các tập B_m rời nhau từng đôi một và với mỗi m, B_m được chứa trong ít nhất một tập A_n nào đó.

Hướng dẫn. Đặt $E_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ rồi sử dụng Bổ đề 1.2.4.

1.6. $\mathcal{R}$ là một lớp khác rỗng các tập con của X thoả mãn các điều kiện sau đây :

(a) $A, B \in \mathcal{R}$ thì $A \cap B \in \mathcal{R}$,

(b) $A, B \in \mathcal{R}$, $A \subset B$ thì tồn tại một số hữu hạn các tập $C_0, C_1, \cdots, C_n \in \mathcal{R}$ sao cho $C_0 = A \subset C_1 \subset C_2 \subset \cdots \subset C_n = B$ và $D_i = C_i \setminus C_{i-1} \in \mathcal{R}$, $i = 1, 2, \ldots n$.

Chứng tỏ rằng $\mathcal{R}$ là một nửa vành.

1.7. Một lớp $\mathcal{A}$ các tập con của X được gọi là một lớp đơn điệu nếu mọi dãy $(E_n)_n \subset \mathcal{A}$ đơn điệu tăng hay đơn điệu giảm ta đều có : $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ nếu $(E_n)_n$ đơn điệu tăng và $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ nếu $(E_n)_n$ đơn điệu giảm. Chứng tỏ rằng :

a) Mọi $\sigma-$ vành đều là một lớp đơn điệu,

b) Mọi vành đơn điệu đều là $\sigma-$ vành.

1.8. Cho $\mathcal{R}$ là một $\sigma-$ đại số trên X, $A \subset X$. Chứng tỏ rằng

$$\mathcal{R}_A = \{Z \cap A \mid Z \in \mathcal{R}\}$$

là một $\sigma-$ đại số các tập con của A.

1.9. Giả sử X là một tập không đếm được. Gọi $\mathcal{A}$ là họ gồm các tập $E \subset X$ sao cho E là tập không quá đếm được hoặc $X \setminus E$ không quá đếm được. Chứng minh rằng $\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số (gọi là $\sigma-$ đại số các tập đếm được hoặc "đối đếm được").

1.10. Chứng minh rằng $\sigma-$ đại số Borel $\mathcal{B}(\mathrm{IR})$ trên IR được sinh ra bởi mỗi họ trong các họ tập hợp sau :

(a) $\varepsilon_1 := \{(a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathrm{IR}\}$,

(b) $\varepsilon_2 := \{[a, b] \mid a < b,\ a, b \in \mathrm{IR}\}$,

(c) $\varepsilon_3 := \{(a, b] \mid a < b,\ a, b \in \mathrm{IR}\}$,

(d) $\varepsilon_4 := \{[a, b) \mid a < b,\ a, b \in \mathrm{IR}\}$,

(e) $\varepsilon_5 := \{(a, \infty) \mid a \in \mathrm{IR}\}$,

(g) $\varepsilon_6 := \{(-\infty, a) \mid a \in \mathrm{IR}\}$,

(h) $\varepsilon_7 := \{[a, \infty) \mid a \in \mathrm{IR}\}$,

(i) $\varepsilon_8 := \{(-\infty, a] \mid a \in \mathrm{IR}\}$.

§ 2. ĐỘ ĐO TRÊN NỬA VÀNH

2.1 Hàm tập.

2.1.1 Các quy ước về các phép toán trên $\overline{\mathrm{IR}}$.

Trong chương này và Chương 4 chúng ta sẽ làm việc với tập số thực mở rộng $\overline{\mathrm{IR}} = \mathrm{IR} \cup \{+\infty, -\infty\}$ (ta thường viết ∞ thay cho $+\infty$). Để thuận tiện cho việc tính toán, ta nhắc lại một số quy ước khi thực hiện các phép tính trên $\overline{\mathrm{IR}}$.

* $\forall x \in \mathrm{IR}, -\infty < x < +\infty,$

* $\forall x \in \mathrm{IR},\ x \pm \infty = \pm\infty,$

* $0 \times \infty = \infty \times 0 = 0,\ 0 \times (-\infty) = (-\infty) \times 0 = 0,$

* $\forall a \in \mathrm{IR},\ a \neq 0$ thì

$$a \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times a = \begin{cases} \pm\infty \text{ nếu } a > 0, \\ \mp\infty \text{ nếu } a < 0, \end{cases}$$

* $+\infty \times (+\infty) = +\infty,$

* $\infty + \infty = \infty,\ -(-\infty) = \infty,$

* $+\infty \times (-\infty) = -\infty \times (+\infty) = -\infty$ và $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty,$

* Các biểu thức $\infty - \infty,\ \dfrac{\infty}{\infty}$ không được định nghĩa trong $\overline{\mathrm{IR}}$.

Ta cũng quy ước $\inf \emptyset = +\infty$.

Bây giờ cho X là một tập khác rỗng và $\mathcal{C}$ là một họ không rỗng các tập con của X.

2.1.2 Định nghĩa. Một ánh xạ $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathrm{IR}}$ được gọi là một *hàm tập*.

Để thuận tiện cho việc sử dụng sau này, trong suốt chương này ta chỉ xét những hàm tập μ chỉ nhận một trong hai giá trị $+\infty$ hay $-\infty$ và không đồng nhất bằng $+\infty$ hay $-\infty$. Nghĩa là miền giá trị của μ là $(-\infty,\ +\infty]$ hay $[-\infty,\ +\infty)$ và tồn tại $A \in \mathcal{C}$ sao cho $\mu(A) \in (-\infty,\ +\infty)$. Đối với một hàm tập μ, sau này nhiều khi ta cũng viết μA thay cho $\mu(A)$. Hàm tập μ gọi là *không âm* trên $\mathcal{C}$, kí hiệu $\mu \geq 0$, nếu $\mu A \geq 0$ mọi $A \in \mathcal{C}$.

2.1.3 Định nghĩa. Hàm tập $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathrm{IR}}$ được gọi là *cộng tính (cộng tính hữu hạn)* nếu $A_1,\ A_2 \in \mathcal{C},\ A_1 \cap A_2 = \emptyset$ và $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{C}$ thì

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

2.1.4 Định nghĩa. Hàm tập $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathrm{IR}}$ được gọi là $\sigma-$ *cộng tính* (hay *cộng tính đếm được*) nếu $A_i \in \mathcal{C},\ i = 1, 2, \ldots,\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$ và $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$ thì

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

2.1.5 Nhận xét. Dễ dàng chứng minh được rằng

(i) Nếu $\emptyset \in \mathcal{C}$ và hàm tập μ là cộng tính hay $\sigma-$ cộng tính thì $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) Nếu μ là $\sigma-$ cộng tính và $\emptyset \in \mathcal{C}$ thì μ là cộng tính.

2.2 Định nghĩa độ đo và ví dụ.

2.2.1 Định nghĩa.

• Cho $\mathcal{R}$ là một nửa vành trên X. Một hàm tập $m : \mathcal{R} \to \overline{\mathrm{IR}}$ được gọi là một *độ đo* nếu m thoả mãn các điều kiện sau :

(i) $m(\emptyset) = 0$,

(ii) m không âm,

(iii) m là $\sigma-$ cộng tính.

Lúc này $(X,\ \mathcal{R},\ m)$ được gọi là một *không gian độ đo.*

• Độ đo m được gọi là *hữu hạn* nếu với mọi $A \in \mathcal{R}$, $m(A) < +\infty$.

• Độ đo m được gọi là $\sigma-$ *hữu hạn* nếu với mọi $A \in \mathcal{R}$, tồn tại một dãy $(A_n)_n \subset \mathcal{R}$ sao cho $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, và $mA_n < +\infty$, mọi $n \in \mathbf{N}$.

2.2.2 Nhận xét. Dễ dàng thấy rằng nếu m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$ thì

(i) m là cộng tính,

(ii) Nếu $A, B \in \mathcal{R}$ và $A \subset B$ thì $mA \le mB$. Nếu hơn nữa, $mB < +\infty$ thì $mA < +\infty$ và lúc này ta sẽ có $m(B \setminus A) = mB - mA$ nếu $B \setminus A \in \mathcal{R}$.

Thật vậy, vì $\mathcal{R}$ là nửa vành nên tồn tại $C_1, C_2, \ldots, C_k \in \mathcal{R}$, $C_i \cap C_j = \emptyset$ nếu $i \neq j$ sao cho $B \setminus A = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$. Khi đó

$$B = A \cup (\bigcup_{i=1}^{k} C_i),\ \ mB = mA + \sum_{i=1}^{k} mC_i.$$

Từ đây $mA \le mB$ và nếu mB hữu hạn thì mA cũng hữu hạn. Hơn nữa nếu mA hữu hạn và $B \setminus A \in \mathcal{R}$ thì

$$m(B\setminus A)=\sum_{i=1}^{k} mC_i = mB - mA.$$

2.2.3 Các ví dụ.

(i) $X=\{a, b\}$; $\mathcal{R}=\{\emptyset, \{a\}\}$, $m(\emptyset)=0$, $m(\{a\})=1$ là một độ đo trên $\mathcal{R}$.

(ii) Trên nửa vành $\mathcal{R}$ ở Ví dụ 1.2.3 (i), $[a, b)\in\mathcal{R}$, ta định nghĩa $m([a, b))=b-a$ thì m là một độ đo trên $\mathcal{R}$ (xem (v)).

(iii) *(Độ đo đếm)* Giả sử X là một tập và $\mathcal{R}=\mathcal{P}(X)$. Ta định nghĩa $\mu:\mathcal{R}\to[0,+\infty]$ bởi $\mu A=+\infty$ nếu A là tập con vô hạn của X và μA bằng số phần tử của A nếu A là một tập con hữu hạn của X. Khi đó $(X, \mathcal{R}, \mu)$ là một không gian độ đo. Độ đo μ lúc này được gọi là *độ đo đếm* trên X.

(iv) *(Độ đo Dirac)* Cho X là một tập khác rỗng tuỳ ý. Cố định một phần tử $a\in X$ và định nghĩa $\delta_a:\mathcal{P}(X)\to[0, \infty]$ bởi $\delta_a(A)=1$ nếu $a\in A$ và $\delta_a(A)=0$ nếu $a\notin A$. Dễ dàng thấy rằng $(X, \mathcal{P}(X), \delta_a)$ là một không gian độ đo. Độ đo δ_a được gọi là *độ đo Dirac* tại điểm $a\in X$.

(v) Giả sử $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ là một hàm không giảm và liên tục bên trái (nghĩa là $\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$, mọi $a\in\mathrm{IR}$). Xét nửa vành $\mathcal{S}=\{[a, b)\mid a,b\in\mathrm{IR} \text{ và } a\le b\}$. Ta định nghĩa $\mu:\mathcal{S}\to[0, +\infty]$ bởi $\mu([a, b))=f(b)-f(a)$ nếu $a\le b$ và $\mu(\emptyset)=0$. Khi đó μ là một độ đo trên $\mathcal{S}$.

Ta chỉ còn phải kiểm tra tính $\sigma-$ cộng tính của μ. Giả sử rằng $[a, b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n)$ với $([a_n, b_n))_n$ là dãy gồm các nửa đoạn rời nhau từng đôi một. Để ý rằng có thể sắp xếp dãy $([a_n, b_n))_n$ lại dưới dạng $([c_n, c_{n+1}))_n$ với $c_1=a$ và $c_n\nearrow b$. Khi đó

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu([a_n, b_n))=\sum_{n=1}^{\infty}\mu([c_n, c_{n+1}))=\lim_{i\to\infty}\sum_{n=1}^{i-1}\mu([c_n, c_{n+1}))$$
$$=\lim_{i\to\infty} f(c_i)-f(a)=f(b)-f(a)=\mu([a, b)).$$

Để ý rằng ở đây ta có $\lim_{i\to\infty} f(c_i) = f(b)$ vì f là liên tục trái tại b. ∎

Ví dụ (ii) ở trên là trường hợp đặc biệt của ví dụ này khi $f(x) = x$.

2.3 Một số tính chất của độ đo.

2.3.1 Định lí. *Giả sử $m : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ là một hàm tập trên nửa vành $\mathcal{R}$. Khi đó m là một độ đo trên $\mathcal{R}$ khi và chỉ khi các điều kiện sau thoả mãn :*

(i) $m(\emptyset) = 0$,

(ii) Nếu $A, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{R}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset A$ và $A_i \cap A_j = \emptyset$ với $i \neq j$ thì

$$\sum_{i=1}^{\infty} mA_i \le mA,$$

(iii) Nếu $A, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{R}$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ thì $mA \le \sum_{i=1}^{\infty} mA_i$.

Tính chất nêu ở (iii) gọi là $\sigma-$ nửa cộng tính của độ đo m. Cũng để ý rằng trong Định lí 2.3.1 chúng ta không đòi hỏi $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$.

Chứng minh.

Giả sử m là một độ đo trên $\mathcal{R}$. Hiển nhiên (i) đúng. Ta chứng minh m nghiệm đúng (ii) và (iii).

* Chứng minh (ii). Lấy tuỳ ý $p \in \mathbf{N}$. Rõ ràng là $\bigcup_{i=1}^{p} A_i \subset A$. Theo Bổ đề 1.2.4, tồn tại $C_1, \cdots, C_r \in \mathcal{R}$, $C_i \cap C_j = \emptyset$, nếu $i \neq j$ và

$$A \setminus \bigcup_{i=1}^{p} A_i = \bigcup_{j=1}^{r} C_j. \tag{2.1}$$

Đặt $A_i' = A_i$, $i = 1, \cdots, p$ và $A_{p+j}' = C_j$, $j = 1, \cdots, r$. Khi đó ta có $A_i' \in \mathcal{R}$, $A_i' \cap A_j' = \emptyset$, mọi $i, j = 1, 2, \cdots, p, p+1, \cdots, p+r$, $i \neq j$, và $A = \bigcup_{i=1}^{p+r} A_i'$. Do đó

$$mA = \sum_{i=1}^{p+r} mA_i' \ge \sum_{i=1}^{p} mA_i' = \sum_{i=1}^{p} mA_i. \tag{2.2}$$

Vì (2.2) đúng với mọi $p \in \mathbf{N}$ nên khi cho $p \to \infty$, ta được

$$mA \geq \sum_{i=1}^{\infty} mA_j.$$

* Chứng minh (iii). Dễ thấy rằng $A = A \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)$. Đặt $B_i = A \cap A_i$. Khi đó

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Lại đặt $C_1 = B_1$, $C_n = B_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} B_i)$, $n = 2, 3, \cdots$. Lúc đó

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \text{ và } C_n \cap C_{n'} = \emptyset \text{ nếu } n \neq n'. \tag{2.3}$$

Để ý rằng $\mathcal{R}$ là nửa vành nên $B_i \in \mathcal{R}$, mọi $i \in \mathbf{N}$. Một lần nữa, theo Bổ đề 1.2.4, mỗi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại một số hữu hạn các tập đôi một không giao nhau $D_{n\ell} \in \mathcal{R}$, $\ell = 1, \cdots, \ell_n$ sao cho

$$C_n = \bigcup_{\ell=1}^{\ell_n} D_{n\ell}, \ n \in \mathbf{N}.$$

Từ đây và (2.3) ta được :

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{\ell=1}^{\ell_n} D_{n\ell}), \ D_{n\ell} \cap D_{n'\ell'} = \emptyset \text{ nếu } (n, \ell) \neq (n', \ell').$$

Do đó

$$mA = \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{\ell=1}^{\ell_n} mD_{n\ell}). \tag{2.4}$$

Vì $C_n = \bigcup_{\ell} D_{n\ell} \subset B_n$ nên $\sum_{\ell} mD_{n\ell} \leq mB_n \leq mA_n$. Do đó (2.4) cho ta :

$$mA \leq \sum_{n=1}^{\infty} mB_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} mA_n.$$

Ngược lại, nếu m. thoả mãn các điều kiện (i) – (iii) thì dễ chứng minh được rằng m là độ đo (tính $\sigma-$ cộng tính có được từ sự kết hợp (ii) và (iii)). ∎

2.3.2 Nhận xét. Dễ thấy rằng trong phần chứng minh kết luận (iii) của Định lí 2.3.1 (điều kiện cần), nếu $\mathcal{R}$ là một vành thì $C_n \in \mathcal{R}$ mọi $n \in \mathbf{N}$ và từ (2.3) có thể suy ra kết luận của định lí.

Từ đây về sau để cho gọn, đôi khi ta sẽ dùng kí hiệu $A_n \uparrow A$ để chỉ dãy tập $(A_n)_n$ trong X có tính chất $A_n \subset A_{n+1}$, với mọi $n \in \mathbf{N}$ và $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Tương tự, kí hiệu $A_n \downarrow A$ được hiểu là $A_n \supset A_{n+1}$, với mọi $n \in \mathbf{N}$ và $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Định lí sau đây rất thuận tiện trong nhiều trường hợp. Khẳng định đảo lại của nó theo một nghĩa nào đó cũng đúng (xem Bài tập 2.3).

2.3.3 Định lí. *Giả sử $\mathcal{R}$ là một vành và m là một độ đo trên $\mathcal{R}$. Khi đó các khẳng định sau là đúng.*

(a) Nếu $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $A \in \mathcal{R}$ và $A_n \uparrow A$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} mA_n = mA$.

(b) Nếu $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $A \in \mathcal{R}$, $A_n \downarrow A$ và $mA_1 < +\infty$ (hay tồn tại n_0 để cho $mA_{n_0} < +\infty$) thì $\lim\limits_{n\to\infty} mA_n = mA$.

Chứng minh.

(a) Đặt $B_1 = A_1$, $B_n = A_{n+1} \setminus A_n$, $n = 2, 3, \ldots$ Khi đó $B_n \in \mathcal{R}$, mọi $n \in \mathbf{N}$, $B_n \cap B_{n'} = \emptyset$, $n \neq n'$ và

$$A_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i,\ \ A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Từ tính $\sigma-$ cộng tính (và do đó cộng tính) của m ta được :

$$mA_n = \sum_{i=1}^{n} mB_i,\ \ mA = \sum_{i=1}^{\infty} mB_i.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n) = m(A)$.

(b) Giả sử $mA_1 < +\infty$ (trường hợp còn lại được chứng minh tương tự). Để ý rằng

$$B := A_1 \setminus A = A_1 \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

với $B_n = A_1 \setminus A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Dễ dàng nhận thấy rằng $B_n \subset B_{n+1}$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Ngoài ra, vì mA_1 hữu hạn nên $mB = mA_1 - mA$ và $mB_n = mA_1 - mA_n$ với mọi n. Từ đây và (a) ta có

$$mB = mA_1 - mA = \lim_{n\to\infty} mB_n = \lim_{n\to\infty}\left[mA_1 - mA_n\right]$$
$$= mA_1 - \lim_{n\to\infty} mA_n.$$

Kết luận (b) được suy ra từ các đẳng thức này và giả thiết mA_1 hữu hạn. ∎

BÀI TẬP

2.1. Cho μ là một hàm tập cộng tính trên một họ tập $\mathcal{C}$. Giả sử $A, B \in \mathcal{C}$, $A \subset B$ và $B \setminus A \in \mathcal{C}$. Chứng minh rằng nếu μB hữu hạn thì μA cũng hữu hạn và ta có $\mu(B \setminus A) = \mu B - \mu A$. Hơn nữa, nếu $\mu \geq 0$ thì $\mu A \leq \mu B$.

2.2. Cho m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$. Chứng minh rằng

(i) Nếu $mA_i = 0$, mọi $i \in \mathbf{N}$ và $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$ thì

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0,$$

(ii) Nếu $A, B \in \mathcal{R}$, $A \cup B \in \mathcal{R}$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$ và $mB = 0$ thì $m(A \cup B) = m(A \setminus B) = mA$.

2.3. Cho m là một hàm tập không âm, cộng tính trên một vành $\mathcal{R}$, $m(\emptyset) = 0$ và thoả mãn một trong các điều kiện sau :

(i) $(A_i)_{i\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $A_n \subset A_{n+1}$, mọi $n \in \mathbf{N}$ và $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$ thì

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} mA_i,$$

(ii) $(A_i)_{i\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $A_n \supset A_{n+1}$, mọi $n \in \mathbf{N}$ và $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ thì

$$\lim_{i\to\infty} mA_i = 0.$$

Chứng minh rằng m là một độ đo trên $\mathcal{R}$.

2.4. Giả sử μ là một hàm tập $\sigma-$ cộng tính trên vành $\mathcal{R}$. Chứng minh rằng

(a) Nếu $A_n \in \mathcal{R}$, $A_n \subset A_{n+1}$, mọi $n \in \mathbf{N}$, và $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

(b) Nếu $A_n \in \mathcal{R}$, $A_n \supset A_{n+1}$, mọi $n \in \mathbf{N}$, $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ và $\mu(A_1)$ hữu hạn (hay tồn tại n_0 để cho $\mu(A_{n_0})$ hữu hạn) thì $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

2.5. Giả sử μ là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$. Chứng minh rằng nếu $(A_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $A \in \mathcal{R}$ và $A_n \uparrow A$ thì $\lim\limits_{n \to \infty} mA_n = mA$.

2.6. Giả sử $X \neq \emptyset$ là một tập tuỳ ý. Gọi $\mathcal{R}$ là họ tất cả các tập con hữu hạn của X.

a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{R}$ là một vành.

b) $f : X \to \overline{\mathrm{IR}}$ là một ánh xạ với giá trị không âm. Đặt $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathrm{IR}}$ xác định bởi

$$\mu(\{x_1, x_2, ..., x_n\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i), \ \mu(\emptyset) = 0.$$

Chứng tỏ rằng μ là một độ đo trên $\mathcal{R}$.

2.7. Cho μ là một độ đo đủ (Định nghĩa 3.3.2) trên $\sigma-$ đại số $\mathcal{R}$, $E \subset X$. Giả sử rằng với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại $A \in \mathcal{R}$ sao cho $E \subset A$ và $\mu A < \epsilon$. Chứng tỏ rằng $E \in \mathcal{R}$ và $\mu E = 0$.

2.8. m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$, $A, B \in \mathcal{R}$, $mA < +\infty$. Chứng tỏ rằng tồn tại hữu hạn các tập $C_1, C_2, \cdots, C_n \in \mathcal{R}$ sao cho

$$mA - m(A \cap B) = \sum_{i=1}^{n} mC_i.$$

2.9. Giả sử m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$. Một họ hữu hạn $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ các tập của $\mathcal{R}$ được gọi là một *phân hoạch* của $E \in \mathcal{R}$ nếu $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ và $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$. Họ $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ được gọi là một $m-$*phân hoạch* của E nếu với mọi $A \in \mathcal{R}$ ta đều có

$$m(E \cap A) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i \cap A).$$

Chứng tỏ rằng

a) Nếu $E = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_n = F$, $C_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ và $D_i := C_i \setminus C_{i-1} \in \mathcal{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ thì $\{E, D_1, D_2, ..., D_n\}$ là một m phân hoạch của F,

b) Mọi phân hoạch của $E \in \mathcal{R}$ đều là một $m-$ phân hoạch.

2.10. Cho $\mathcal{B}$ là một đại số các tập con của X và m_n, $n \in \mathbf{N}$ là các độ đo hữu hạn trên $\mathcal{B}$. Giả sử rằng $(\lambda_n)_n$ là một dãy các số dương sao cho $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n m_n(X) < +\infty$. Chứng tỏ rằng hàm tập xác định bởi

$$E \to m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n m_n E, \; E \in \mathcal{B}$$ là một độ đo hữu hạn trên $\mathcal{B}$.

2.11. Xét nửa vành

$$\mathcal{S} = \{A \subset \mathrm{IR} \mid A = \emptyset \text{ hay } A \text{ là không quá đếm được}\}$$

và định nghĩa $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ bởi công thức $\mu A = 0$ nếu $A = \emptyset$ hay A là tập hữu hạn và $\mu A = +\infty$ nếu A là đếm được. Chứng tỏ rằng μ là hàm tập cộng tính (hữu hạn) nhưng không là một độ đo trên $\mathcal{S}$.

§ 3. THÁC TRIỂN ĐỘ ĐO

Khi làm việc với các độ đo m trên nửa vành chúng ta thường gặp nhiều khó khăn vì nửa vành không đóng kín đối với một số phép toán, chẳng hạn, phép lấy hợp hữu hạn hay đếm được các tập thuộc nó. Vì thế mà người ta muốn thác triển (mở rộng) m "thành" một độ đo μ trên một $\sigma-$ đại số $\mathcal{L} \supset \mathcal{R}$. Mục này được dành để thực hiện ý tưởng nói trên.

3.1 Độ đo ngoài, độ đo ngoài sinh bởi một độ đo.

3.1.1 Định nghĩa. Một hàm tập ν xác định trên $\mathcal{P}(X)$ được gọi là một *độ đo ngoài* trên X nếu thoả mãn các điều kiện sau :

(a) ν không âm,

(b) $\nu(\emptyset) = 0$,

(c) Nếu $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ thì $\nu A \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu A_i$.

3.1.2 Nhận xét. Giả sử ν là một độ đo ngoài trên X. Khi đó dễ chứng minh được rằng :

(i) Nếu $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ thì $\nu(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \nu A_i$ (nửa cộng tính).

(ii) Nếu $A \subset B$ thì $\nu A \leq \nu B$.

Các định lí sau đây là cơ sở để chúng ta thác triển một độ đo m trên nửa vành lên một $\sigma-$ đại số.

3.1.3 Định lí. *Giả sử m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$. Khi đó nếu đặt, mỗi $A \subset X$,*

$$m^* A = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} mE_i \mid E_i \in \mathcal{R},\ i \in \mathbf{N} \text{ và } \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset A \right\} \tag{3.1}$$

thì m^* là một độ đo ngoài trên X (để ý quy ước $\inf \emptyset = +\infty$). Ngoài ra nếu $A \in \mathcal{R}$ thì $m^* A = mA$. Ta sẽ gọi m^* là độ đo ngoài sinh bởi độ đo m.

Chứng minh.

α) Dễ thấy rằng m^* thoả mãn các điều kiện (a) và (b) của Định nghĩa 3.1.1 do m là một độ đo.

β) Ta chứng minh m^* là $\sigma-$ nửa cộng tính. Giả sử $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ta sẽ chứng minh rằng $m^* A \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n$.

- Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n = +\infty$ thì kết luận là rõ ràng.

- Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} m^* A_n < +\infty$. Như vậy $m^* A_n < +\infty$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Lấy $\epsilon > 0$ tuỳ ý. Từ định nghĩa của m^* với mỗi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại một họ đếm được $(A_{nj})_{j \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{nj} \supset A_n$ sao cho

$$\sum_{j=1}^{\infty} mA_{nj} < m^* A_n + \frac{\epsilon}{2^n}. \tag{3.2}$$

Họ $\left(A_{nj}\right)_{(n,j)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$ và $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n,j\in\mathbf{N}} A_{nj}$. Do đó, từ định nghĩa của m^* ta có :

$$m^*A \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} mA_{nj}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(m^*A_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*A_n + \varepsilon.$$

Vì $\varepsilon > 0$ tuỳ ý nên

$$m^*A \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*A_n.$$

γ) $A \in \mathcal{R}$, ta chứng minh $m^*A = mA$.

• Đặt $A_1 = A$, $A_i = \emptyset$, $i \geq 2$ thì $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Do đó theo (3.1), $m^*A \leq \sum_{i=1}^{\infty} mA_i = mA$.

• Ngược lại, mọi họ đếm được $\left(A_i\right)_{i\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A$ thì (để ý m là $\sigma -$ nửa cộng tính)

$$mA \leq \sum_{i=1}^{\infty} mA_i.$$

Từ đó ta có $mA \leq m^*A$.

Vậy $mA = m^*A$ và định lí đã được chứng minh. ∎

3.1.4 Nhận xét. Trong định nghĩa độ đo ngoài m^* sinh ra bởi độ đo m (công thức (3.1)), họ $\left(E_i\right)_{i\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$ có thể được chọn sao cho các E_i rời nhau từng đôi một (Bài tập 3.1).

3.2 Tập m^*- đo được và định lí Carathéodory(*).

3.2.1 Định nghĩa. Cho m^* là một độ đo ngoài trên X. Một tập $A \subset X$ được gọi là $m^* -$ *đo được* (hay đo được theo Carathéodory) nếu

(*) Constantin carathéodory (1873 – 1950), người đề xuất độ đo ngoài, nhà toán học xuất sắc người Đức (gốc Hy Lạp), có nhiều đóng góp quan trọng trong giải tích hiện đại.

$$m^*E = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A),\ \forall E \subset X. \tag{3.3}$$

Họ tất cả các tập m^*- đo được được kí hiệu là $\mathcal{L}$.

3.2.2 Nhận xét.

(i) Dễ thấy rằng điều kiện (3.3) trong Định nghĩa 3.2.1 tương đương với một trong hai điều kiện sau :

$$m^*E \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A),\ \forall E \subset X, \qquad (3.3')$$

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c),\ \text{mọi } E \subset X. \qquad (3.3'')$$

Từ (3.3'') ta thấy ngay nếu $A \in \mathcal{L}$ thì $A^c \in \mathcal{L}$. Đặc biệt, dễ thấy $\emptyset \in \mathcal{L}$ nên $X \in \mathcal{L}$.

(ii) Nếu $m^*A = 0$ thì $A \in \mathcal{L}$. Thật vậy, lúc đó với mọi $E \subset X$, $m^*(A \cap E) = 0$ và do đó,

$$m^*E \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) = m^*(E \setminus A) \leq m^*E.$$

Với các kí hiệu như trên ta có định lí sau.

3.2.3 Định lí. (Carathéodory) *$\mathcal{L}$ là một $\sigma-$ đại số và thu hẹp μ của m^* trên $\mathcal{L}$, $\mu = m^*_{|\mathcal{L}}$, là một độ đo.*

Ta sẽ gọi μ là độ đo *sinh bởi độ đo ngoài m^**.

Để chứng minh Định lí 3.2.3 ta cần bổ đề sau.

3.2.4 Bổ đề. *Giả sử m^* là một độ đo ngoài trên X và $E_1, E_2, \ldots, E_n$ là các tập m^*- đo được (thuộc $\mathcal{L}$), rời nhau từng đôi một. Khi đó,*

$$m^*\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^n E_i\right]\right) = \sum_{i=1}^n m^*(A \cap E_i),\ \textit{mọi } A \subset X. \tag{*}$$

Chứng minh. Ta chứng minh quy nạp theo n. Hiển nhiên (*) đúng khi $n = 1$. Giả sử (*) đúng với n. Ta chứng minh (*) đúng với $n+1$. Giả sử $E_1, E_2, \ldots, E_n, E_{n+1}$ là các tập m^*- đo được, rời nhau từng đôi một. Nếu $A \subset X$ thì

$$A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right] \cap E_{n+1} = A \cap E_{n+1},$$

$$A\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n+1}E_i\right]\cap E_{n+1}^c=A\cap(\bigcup_{i=1}^{n}E_i).$$

Vì E_{n+1} là m^*- đo được nên (để ý Nhận xét 3.2.2 và giả thiết quy nạp)

$$m^*\left(A\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n+1}E_i\right]\right)=m^*\left(A\cap\left[\cup_{i=1}^{n+1}E_i\right]\cap E_{n+1}\right)+m^*\left(A\cap\left[\cup_{i=1}^{n+1}E_i\right]\cap E_{n+1}^c\right)$$

$$=m^*\left(A\cap E_{n+1}\right)+m^*\left(A\cap\left(\cup_{i=1}^{n}E_i\right)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1}m^*\left(A\cap E_i\right)\ \blacksquare$$

Chứng minh Định lí 3.2.3.

α) Ta chứng minh $\mathcal{L}$ là một $\sigma-$đại số. Trước hết để ý rằng theo Nhận xét 3.2.2 thì $\emptyset\in\mathcal{L}$, $X\in\mathcal{L}$ và nếu $A\in\mathcal{L}$ thì $A^c\in\mathcal{L}$. Do đó để chứng minh $\mathcal{L}$ là một $\sigma-$đại số ta chỉ còn phải chứng minh $\mathcal{L}$ đóng kín đối với phép hợp đếm được. Trước hết ta chứng minh $\mathcal{L}$ đóng kín với phép hợp hữu hạn.

Giả sử $A_1, A_2\in\mathcal{L}$. Gọi $A=A_1\cup A_2$. Để ý rằng lúc này $A=A_1\cup\left(A_1^c\cap A_2\right)$. Với mọi tập $E\subset X$ ta có

$$m^*E\le m^*(E\cap A)+m^*\left(E\cap A^c\right)$$

$$\le\left[m^*\left(E\cap A_1\right)+m^*\left(\left(E\cap A_1^c\right)\cap A_2\right)\right]+m^*\left(\left(E\cap A_1^c\right)\cap A_2^c\right)$$

$$=m^*\left(E\cap A_1\right)+\left[m^*\left(\left(E\cap A_1^c\right)\cap A_2\right)+m^*\left(\left(E\cap A_1^c\right)\cap A_2^c\right)\right]$$

$$=m^*\left(E\cap A_1\right)+m^*\left(E\cap A_1^c\right)=m^*E,$$

chứng tỏ $A=A_1\cup A_2\in\mathcal{L}$. Từ đây, $A_1, A_2\in\mathcal{L}$ thì $A_1\cap A_2=\left(A_1^c\cup A_2^c\right)^c\in\mathcal{L}$ và $A_1\setminus A_2=A_1\cap A_2^c\in\mathcal{L}$ (vậy $\mathcal{L}$ là một đại số).

Bây giờ giả sử $\left(A_n\right)_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathcal{L}$. Gọi $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ và định nghĩa $G_1=A_1$, $G_{n+1}=A_{n+1}\setminus\bigcup_{i=1}^{n}A_i$, với $n\ge 1$. Khi đó $\left(G_n\right)_n\subset\mathcal{L}$ (vì $\mathcal{L}$ là một đại số),

$G_n \cap G_m = \emptyset$ nếu $m \neq n$ và $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Đặt $F_n = \bigcup_{j=1}^{n} G_j$, $n \in \mathbf{N}$ thì $F_n \in \mathcal{L}$ và $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Nếu $E \subset X$ thì

$$\begin{aligned} m^* E &= m^*(E \cap F_n) + m^*(E \cap F_n^c) \\ &\geq m^*(E \cap F_n) + m^*(E \cap A^c) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m^*(E \cap G_i) + m^*(E \cap A^c) \end{aligned}$$

mọi $n \in \mathbf{N}$ (đẳng thức sau cùng đúng do Bổ đề 3.2.4). Từ đây và đẳng thức $E \cap A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap G_i)$ ta nhận được

$$\begin{aligned} m^* E &\geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E \cap G_i) + m^*(E \cap A^c) \\ &\geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c), \end{aligned}$$

chứng tỏ $A \in \mathcal{L}$.

β) Ta chứng minh $\mu = m^*_{|\mathcal{L}}$ là một độ đo trên $\mathcal{L}$. Ta chỉ còn phải chứng minh μ là $\sigma-$cộng tính. Giả sử $(E_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{L}$ là một họ tập rời nhau từng đôi một. Đặt $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Khi đó $E \in \mathcal{L}$ và do m^* là $\sigma-$nửa cộng tính nên

$$\mu E = m^* E \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^* E_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n.$$

Mặt khác, theo Bổ đề 3.2.4

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} \mu E_n &= \sum_{n=1}^{k} m^* E_n = \sum_{n=1}^{k} m^*(E \cap E_n) \\ &= m^*\left(E \cap \left[\bigcup_{n=1}^{k} m^* E_n\right]\right) \leq m^* E = \mu E \end{aligned}$$

với mọi $k \in \mathbf{N}$. Do đó $\mu E \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n$.

Như vậy $\mu E = \sum_{n=1}^{\infty} \mu E_n$ và định lí đã được chứng minh hoàn toàn ∎

3.2.5 Ví dụ. Trên IR xét nửa vành $\mathcal{R}=\{[a,\, b) \mid a,b\in \text{IR} \text{ và } a\le b\}$ với độ đo λ xác định bởi $\lambda(\emptyset)=0$, $\lambda([a,\, b))=b-a$, mọi $[a,\, b)\in\mathcal{R}$. Gọi λ^* là độ đo ngoài sinh bởi λ, $\overline{\mathcal{L}}$ là $\sigma-$ đại số các tập λ^*- đo được và $\overline{\mu}=\lambda^*_{|\overline{\mathcal{L}}}$. Khi đó mọi gian $I\subset \text{IR}$ (xem Ví dụ 1.2.3) đều λ^*- đo được và $\lambda^*(I)=|I|$ với

$$|I|=\begin{cases} b-a & \text{nếu gian } I=<a,b> \text{ bị chặn,}\\ +\infty & \text{nếu gian } I \text{ không bị chặn.}\end{cases}$$

Rõ ràng nếu $I=[a,b)$, $a,\, b\in\text{IR}$ thì $I\in\overline{\mathcal{L}}$ và

$$\lambda^*(I)=\lambda(I)=b-a.$$

Giả sử $I=[a,b]$, $a,\, b\in\text{IR}$, $a\le b$. Khi đó, $I=[a,\, b]=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ với $I_n=\left[a,\, b+\dfrac{1}{n}\right)\in\mathcal{R}$. Vì $I_n\downarrow I$, $\overline{\mu}I_n=\lambda I_n=b-a+\dfrac{1}{n}<+\infty$ nên $I\in\overline{\mathcal{L}}$ và

$$\lambda^*(I)=\overline{\mu}I=\lim_{n\to\infty}\lambda^*\left(\left[a,\, b+\frac{1}{n}\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(b+\frac{1}{n}-a\right)=b-a=|I|.$$

Nếu $I=[a,+\infty)$, $a\in\text{IR}$. Đặt $I_n=[a,\, a+n)$, $n\in\mathbf{N}$. Khi đó $I_n\in\mathcal{R}$, $I_n\uparrow I$ nên $I\in\mathcal{L}$ và $\overline{\mu}(I)=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(I_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(n)=\infty=|I|$.

Các trường hợp còn lại có thể được chứng minh tương tự.

3.3 Định lí thác triển.

Định lí sau đây tổng kết các kết quả vừa nêu ở các Mục 3.1, 3.2, gọi là định lí thác triển độ đo.

3.3.1 Định lí. *(Thác triển độ đo) Giả sử m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$, m^* là độ đo ngoài sinh bởi m, còn μ là độ đo sinh bởi độ đo ngoài m^*. Khi đó μ là một thác triển của m lên $\sigma-$ đại số $\mathcal{L}$ các tập m^*-đo được, nghĩa là $\mathcal{R}\subset\mathcal{L}$ và $\mu A=mA$, mọi $A\in\mathcal{R}$.*

Cách thác triển một độ đo nêu trên thường được gọi là *thác triển tiêu chuẩn* (hay thác triển theo Carathéodory) còn μ gọi là *thác triển tiêu chuẩn* của m.

Chứng minh. Ta chỉ còn phải chứng minh quan hệ $\mathcal{R}\subset\mathcal{L}$ vì đẳng thức $\mu A=mA$, mọi $A\in\mathcal{R}$ được suy ra từ Định lí 3.1.3 và định nghĩa của độ đo μ.

Giả sử $A \in \mathcal{R}$ và E là một tập con bất kì của X. Chúng ta hãy kiểm tra bất đẳng thức (3.3''). Rõ ràng là nếu $m^*E = +\infty$ thì (3.3'') đúng.

Giả sử $m^*E < +\infty$. Với mọi $\epsilon > 0$, theo định nghĩa của độ đo ngoài m^*, tồn tại $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$ sao cho

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ và } \sum_{n=1}^{\infty} mA_n < m^*E + \epsilon.$$

Khi đó,

$$E \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A),$$

$$E \cap A^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A^c) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [A_n \setminus (A_n \cap A)].$$

Vì A_n, $A_n \cap A \in \mathcal{R}$ mọi $n \in \mathbf{N}$ và $\mathcal{R}$ là nửa vành nên với mọi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại một số hữu hạn các tập $C_{nk} \in \mathcal{R}$, đôi một không giao nhau sao cho :

$$A_n \setminus (A_n \cap A) = \bigcup_{k=1}^{k_n} C_{nk}.$$

Ngoài ra,

$$\sum_{k=1}^{k_n} mC_{nk} = mA_n - m(A_n \cap A). \tag{3.4}$$

Như vậy,

$$E \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A),\ E \cap A^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{k_n} C_{nk}. \tag{3.5}$$

Bây giờ (3.4) – (3.5) và tính σ – nửa cộng tính của m^* cho

$$\begin{aligned} m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) &\le \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \cap A) + \sum_{k=1}^{k_n} mC_{n_k} \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} mA_n - \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n \cap A) \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} mA_n < m^*E + \epsilon. \end{aligned}$$

Vì $\epsilon > 0$ tuỳ ý nên ta được (3.3''). Vậy $A \in \mathcal{L}$ và định lí đã được chứng minh. ∎

3.3.2 Định nghĩa. Giả sử m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$. Độ đo m được gọi là *đủ* nếu từ $A \in \mathcal{R}$, $mA = 0$ và $E \subset A$ kéo theo $E \in \mathcal{R}$ (và do đó $mE = 0$). Lúc này ta cũng nói không gian độ đo $(X, \mathcal{R}, m)$ là *đủ*.

Một số tính chất đáng lưu ý của độ đo thác triển tiêu chuẩn μ được nêu lên trong định lí sau.

3.3.3 Định lí. *Giả sử m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$, μ là thác triển tiêu chuẩn của m lên $\sigma-$ đại số $\mathcal{L}$ các tập m^*- đo được. Khi đó*

(i) Nếu $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ với $A_n \in \mathcal{R}$ mọi $n \in \mathbf{N}$ và $mA_n < +\infty$ thì không những m là $\sigma-$ hữu hạn mà mở rộng tiêu chuẩn μ của nó cũng vậy.

(ii) μ là độ đo đủ.

(iii) $\mathcal{L} \supset \mathcal{F}(\mathcal{R})$. Ngoài ra, nếu μ là $\sigma-$ hữu hạn thì $A \in \mathcal{L}$ khi và chỉ khi

$$A = B \setminus N \ \ hay \ \ A = B \cup N \tag{3.6}$$

trong đó $B \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$, $\mu N = 0$ với m^* là độ đo ngoài sinh bởi m ($\mathcal{F}(\mathcal{R})$ là $\sigma-$ đại số sinh bởi $\mathcal{R}$).

Chứng minh. Khẳng định (i) là rõ ràng. Ta chứng minh (ii) và (iii).

(ii) μ là đủ. Thật vậy, nếu $A \subset B$ mà $\mu B = 0$ thì $0 \le m^* A \le m^* B = \mu B = 0$. Do đó $m^* A = 0$ và $A \in \mathcal{L}$.

(iii) $\mathcal{L} \supset \mathcal{F}(\mathcal{R})$ vì $\mathcal{L}$ là $\sigma-$ đại số và $\mathcal{L} \supset \mathcal{R}$. Giả sử μ là $\sigma-$ hữu hạn. Nếu A có dạng (3.6) thì hiển nhiên $A \in \mathcal{L}$. Ngược lại, giả sử $A \in \mathcal{L}$. Ta xét các trường hợp :

* Nếu $\mu A < +\infty$, với mỗi $k \in \mathbf{N}$, tồn tại một họ $\left(P_{k_i}\right)_{i \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$ sao cho $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_{k_i} \supset A$ và

$$\sum_{i=1}^{\infty} mP_{k_i} < \mu A + \frac{1}{k}.$$

Đặt $B_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_{k_i}$ và $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$. Khi đó $B \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ và $B \supset A$. Ngoài ra,

$$\mu B \le \mu B_k \le \sum_{i=1}^{\infty} mP_{k_i} < \mu A + \frac{1}{k}, \text{ mọi } k \in \mathbf{N}.$$

Như vậy $\mu B \le \mu A$ nhưng vì $A \subset B$ nên $\mu A \le \mu B$ và ta được $\mu A = \mu B$. Đặt $N = B \setminus A$ thì $\mu N = 0$ và

$$A = B \setminus N.$$

Vậy A có dạng nêu trong (3.6).

* Nếu $\mu A = +\infty$, vì μ là $\sigma-$ hữu hạn nên $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ với $\mu X_n < +\infty$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Do vậy

$$A = A \cap X = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap X_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

với $A_n = A \cap X_n \in \mathcal{L}$ và $\mu A_n < +\infty$.

Theo chứng minh trên, mỗi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại $B_n \supset A_n$ sao cho $\mu(B_n \setminus A_n) = 0$, $B_n \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \subset \mathcal{L}$.

Đặt $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ thì $B \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$, $B \supset A$ và (để ý $B_n \setminus A \in \mathcal{L}$)

$$N = B \setminus A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A),$$

$$\mu N = \mu(B \setminus A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \setminus A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \setminus A_n) = 0.$$

Như vậy trong trường hợp này A cũng có dạng (3.6). Định lí được chứng minh hoàn toàn ▮

Chú ý. Để ý rằng nếu $A \in \mathcal{L}$ thì $X \setminus A \in \mathcal{L}$ và ta cũng có $X \setminus A = B' \setminus N'$ với $B' \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ và $\mu N' = 0$. Từ đó

$$A = (X \setminus B') \cup N' = B'' \cup N',$$

với $B'' = X \setminus B' \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$. Đây là dạng thứ hai trong (3.6).

Đến đây, một cách tự nhiên các câu hỏi sau nảy sinh.

(α) Nếu ta tiếp tục thác triển tiêu chuẩn μ thì ta có nhận được điều gì mới không ?

(β) Thác triển tiêu chuẩn như trên có là duy nhất (theo một nghĩa nào đó) không ?

Các vấn đề nêu trên được giải quyết trong các định lí sau.

3.3.4 Định lí. *Giả sử m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$ và μ là thác triển tiêu chuẩn của nó. Nếu m^*, μ^* tương ứng là các độ đo ngoài sinh bởi m và μ thì $m^*E = \mu^*E$ với mọi $E \subset X$. Hệ quả là mở rộng tiêu chuẩn của μ trùng với chính nó.*

3.3.5 Định lí. *Giả sử μ là thác triển tiêu chuẩn của độ đo m trên nửa vành $\mathcal{R}$ lên $\sigma-$ đại số $\mathcal{L}$ và μ là $\sigma-$ hữu hạn. Nếu ν cũng là một thác triển của m lên một $\sigma-$ đại số $\mathcal{S} \supset \mathcal{R}$ thì $\nu A = \mu A$ với mọi $A \in \mathcal{L} \cap \mathcal{S}$. Nếu thêm nữa, ν là độ đo đủ thì $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}$.*

BÀI TẬP

Từ đây về sau các kí hiệu m^*, μ^* được dùng để chỉ độ đo ngoài sinh ra bởi các độ đo m hay μ tương ứng.

3.1. Cho m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$ (các tập con của một tập X nào đó), $A \subset X$. Chứng tỏ rằng

$$m^*A = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} mA_n \mid (A_n)_n \subset \mathcal{R},\ A_n \cap A_{n'} = \emptyset$$

$$\text{nếu } n \neq n',\ \bigcup_n A_n \supset A\}.$$

Hướng dẫn. Sử dụng Bài 1.5.

3.2. Cho $\mathcal{R}$ là một nửa vành các tập con của X và $(X, \mathcal{R}, \mu)$ là một không gian độ đo. μ^* là độ đo ngoài sinh bởi μ. Chứng tỏ rằng tập $A \subset X$ là $\mu^* -$ đo được khi và chỉ khi

$$\mu(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c), \text{ mọi } E \in \mathcal{R} \text{ và } \mu(E) < +\infty.$$

3.3. Cho μ là một độ đo ngoài trên X, $(E_n)_n$ là một dãy các tập $\mu-$ đo được (Định nghĩa 3.2.1) và rời nhau từng đôi trong X. Chứng tỏ rằng với mọi $A \subset X$ thì

$$\mu\left(A\cap\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}E_i\right]\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A\cap E_i),\text{ mọi } A\subset X.$$

3.4. Cho μ là một độ đo ngoài trên X, $A\subset X$. Gọi $\mathcal{L}$ là $\sigma-$ đại số các tập $\mu-$ đo được. Hãy chứng tỏ rằng $A\in\mathcal{L}$ khi và chỉ khi :

$$\forall\epsilon>0,\ \exists E\in\mathcal{L},\ E\subset A \text{ sao cho } \mu(A\setminus E)<\epsilon.$$

3.5. Cho μ là một độ đo ngoài trên X và $(A_n)_n$ là một dãy các tập con của X. Giả sử rằng tồn tại một dãy $(B_n)_n$ các tập $\mu-$ đo được, đôi một rời nhau sao cho $A_n\subset B_n$ với mọi $n\in\mathbf{N}$. Chứng tỏ rằng

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

Hướng dẫn. Đặt $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$. Sử dụng Bài 3.3 và lưu ý rằng $A\cap B_n=A_n$.

3.6. Cho μ là một độ đo ngoài trên X và A là một tập con $\mu-$ đo được của X. Chứng tỏ rằng với mọi tập con E của X ta đều có

$$\mu(A\cup E)+\mu(A\cap E)=\mu(A)+\mu(E).$$

Hướng dẫn. Sử dụng tính $\mu-$ đo được của A để có $\mu(A\cup E)=\mu(A)+\mu(E\cap A^c)$. Cộng hai vế đẳng thức này với $\mu(A\cap E)$ thì được điều phải chứng minh.

3.7. Cho $\mathcal{F}$ là một họ khác rỗng những tập con của X và $f:\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ là một hàm tập. Định nghĩa $\mu:\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ bởi $\mu(\emptyset)=0$ và

$$\mu(A)=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}f(A_n)\mid(A_n)_n\subset\mathcal{F}\text{ và }A\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}$$

với mọi tập con $A\neq\emptyset$ của X (để ý rằng ta luôn quy ước $\inf\emptyset=+\infty$). Chứng minh rằng μ là một độ đo ngoài trên X.

3.8. Cho m là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$ và μ là thác triển tiêu chuẩn của m lên $\sigma-$ đại số $\mathcal{L}$ các tập m^*- đo được. Giả sử $A\in\mathcal{L}$ và

$\mu A < +\infty$. Chứng tỏ rằng khi đó tồn tại một họ $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{L}$ sao cho với mỗi $n \in \mathbf{N}$, $A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{ni}$, $(E_{ni})_{i\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $E_{ni} \cap E_{nj} = \emptyset$ khi $i \neq j$ và sao cho $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supset A$ và $\mu(H \setminus A) = 0$.

3.9. Cho m là một độ đo trên $\sigma-$ vành $\mathcal{R}$, $A \subset X$. Hãy chứng minh rằng

a) Nếu $m^*A < +\infty$ thì $\forall \epsilon > 0$, $\exists B \in \mathcal{R}$, $B \supset A$ sao cho $mB \leq m^*A + \epsilon$,

b) $m^*A = \inf\{mE \mid E \in \mathcal{R},\ E \supset A\}$,

c) Tồn tại $C \in \mathcal{R}$ sao cho $C \supset A$ và $m^*A = mC$ nếu $m^*A < +\infty$.

3.10. Cho m, μ, $\mathcal{L}$ như ở Bài 3.8. Giả sử $A \subset X$ thoả mãn $m^*A < +\infty$. Chứng tỏ rằng tồn tại $B \in \mathcal{F}(\mathcal{R})$ ($\mathcal{F}(\mathcal{R})$ là $\sigma-$ đại số sinh bởi $\mathcal{R}$) sao cho $B \supset A$ và $m^*A = \mu B$. Nếu thêm $A \in \mathcal{L}$ thì có thể kết luận $\mu(B \setminus A) = 0$. Chứng tỏ rằng lúc này A^c cũng có thể được viết dưới dạng

$$A^c = B' \cup N' \text{ với } B' \in \mathcal{F}(\mathcal{R}) \text{ và } m^*N' = 0.$$

3.11. Giả sử X là một tập khác $\emptyset$, $\mathcal{R} = \{\emptyset, X\}$. Đặt $m : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ với $m(\emptyset) = 0$, $m(X) = 1$.

a) Chứng tỏ rằng m là một độ đo trên $\mathcal{R}$.

b) Xác định độ đo ngoài m^* sinh bởi m.

c) Xác định $\sigma-$ đại số $\mathcal{L}$ các tập m^*- đo được và độ đo μ là thác triển tiêu chuẩn của m.

3.12. Cho m, μ, $\mathcal{L}$ như ở Bài 3.8. Chứng tỏ rằng nếu $E \subset X$ thì

$$m^*E = \inf\{\mu A \mid A \supset E,\ A \in \mathcal{L}\}.$$

Từ đó suy ra rằng tồn tại $G \in \mathcal{L}$ sao cho $G \supset E$ và $\mu G = m^*E$.

3.13. Cho m, μ, $\mathcal{L}$ như ở Bài 3.8 và $E \subset X$. Giả sử rằng với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại A, $B \in \mathcal{R}$ sao cho

$$A \subset E \subset B \text{ và } m^*(B \setminus A) < \epsilon.$$

Chứng tỏ rằng

a) tồn tại $H, K \in \mathcal{L}$ sao cho

$$H \subset E \subset K \text{ và } \mu(K \setminus H) = 0,$$

b) $E \in \mathcal{L}$.

3.14. Cho μ là một độ đo ngoài trên X. Giả sử A là một tập không (phải là) $\mu-$ đo được và E là một tập $\mu-$ đo được của X sao cho $A \subset E$. Chứng tỏ rằng khi đó $\mu(E \setminus A) > 0$.

§ 4. ĐỘ ĐO LEBESGUE(*) TRÊN IR^k

Trong mục này chúng ta sẽ sử dụng lược đồ thác triển tiêu chuẩn ở §3 xây dựng độ đo Lebesgue trên IR^k. Để thuận tiện cho việc theo dõi chúng ta sẽ thực hiện một cách chi tiết cho trường hợp $k = 1$. Trường hợp $k > 1$ được thực hiện hoàn toàn tương tự mà không gặp khó khăn nào đáng kể.

4.1 Độ đo Lebesgue trên IR

• Ta nhắc lại rằng một gian trên IR là một tập con của IR có một trong các dạng sau : $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$, (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$, $a, b \in \mathrm{IR}$. Ta sẽ kí hiệu một gian với hai đầu mút $a, b\,(a, b \in \overline{\mathrm{IR}})$ là $\langle a, b \rangle$. Theo Ví dụ 1.2.3 (ii), họ $\mathcal{R}$ tất cả các gian là một nửa vành và được gọi là *nửa vành các gian* trên IR.

• Trên $\mathcal{R}$ ta định nghĩa một hàm tập $m : \mathcal{R} \to \overline{\mathrm{IR}}$ như sau : mọi $P \in \mathcal{R}$, $P = \langle a, b \rangle$(**), $a, b \in \overline{\mathrm{IR}}$

$$mP = \begin{cases} b - a & \text{nếu } P \neq \emptyset, \\ 0 & \text{nếu } P = \emptyset. \end{cases}$$

(lưu ý các phép toán trên $\overline{\mathrm{IR}}$ ở 2.2.1). Khi đó ta có :

(*) Henri Lebesgue (1875 – 1941) là nhà toán học kiệt xuất người Pháp, là một trong những người xây dựng nên lí thuyết độ đo và lí thuyết tích phân trình bày trong giáo trình này.

(**) Nếu $b < a$ thì ta quy ước $P = \emptyset$.

4.1.1 Bổ đề. *m là một độ đo trên nửa vành các gian $\mathcal{R}$.*

Chứng minh. Rõ ràng rằng m không âm và $m(\emptyset)=0$. Ta còn chứng minh m là $\sigma-$ cộng tính.

Giả sử P, $P_i \in \mathcal{R}$, $i \in \mathbf{N}$, $P_i \cap P_j = \emptyset$, nếu $i \neq j$ và $P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$mP = \sum_{i=1}^{\infty} mP_i. \tag{*}$$

Giả sử $P = \langle a, b\rangle \neq \emptyset$ (trường hợp $P=\emptyset$ (*) hiển nhiên đúng), $P_i = \langle a_i, b_i\rangle$, $i \in \mathbf{N}$. Ta xét hai trường hợp sau :

(α) Tồn tại $i \in \mathbf{N}$ sao cho $a_i = a$ hay $b_i = b$. Giả sử có $i \in \mathbf{N}$ với $a_i = a$ (trường hợp còn lại chứng minh tương tự). Lúc này ta có thể coi (nếu cần có thể sắp xếp và đánh số lại) $P_i = \langle c_i, c_{i+1}\rangle$ với $c_1 = a$ và $c_i \nearrow b$ (khi $i \to \infty$). Khi đó

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} mP_i = \sum_{i=1}^{\infty} m\langle c_i, c_{i+1}\rangle &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} m\langle c_i, c_{i+1}\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[c_n - a\right] = b - a = m\langle a, b\rangle = mP.\end{aligned}$$

(β) $a_i \neq a$ và $b_i \neq b$ mọi $i \in \mathbf{N}$. Tương tự như trên, ta có thể đánh số lại để có $P_i = \langle c_i, c_{i+1}\rangle$, $i \in \mathbf{Z}$ với $c_i \searrow a$ khi $i \to -\infty$ và $c_i \nearrow b$ khi $i \to +\infty$. Lúc này

$$\begin{aligned}\sum_{i=-\infty}^{+\infty} mP_i = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} m\langle c_i, c_{i+1}\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=-n}^{n} m\langle c_i, c_{i+1}\rangle \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left[c_{n+1} - c_{-(n+1)}\right] = b - a = m\langle a, b\rangle = mP \ \blacksquare\end{aligned}$$

4.1.2 Định nghĩa. Thác triển tiêu chuẩn μ của độ đo m trên nửa vành các gian $\mathcal{R}$ lên $\sigma-$ đại số $\mathcal{L}$ các tập m^*- đo được (Định lí 3.3.1) gọi là *độ đo Lebesgue* trên IR. $\mathcal{L}$ gọi là *$\sigma-$ đại số các tập đo được Lebesgue* trên IR. Mỗi tập thuộc $\mathcal{L}$ gọi là tập *đo được Lebesgue* hay *$(L)-$ đo được*.

Nhắc lại rằng nếu $A \subset \mathrm{IR}$ thì

$$m^*A = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} mP_i \mid P_i \text{ là gian, } i \in \mathbf{N},\ \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A\right\}. \tag{4.1}$$

Hơn nữa theo Nhận xét 3.1.4 họ các gian $(P_i)_i$ trong (4.1) có thể được chọn sao cho chúng rời nhau từng đôi một. Tập A là đo được Lebesgue khi và chỉ khi

$$m^*E \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A), \ \forall E \subset \mathrm{IR}$$

và lúc này $m^*A = \mu A$.

Tuy được xây dựng theo lược đồ tổng quát ở §3 nhưng do tính đặc thù riêng của tập số thực IR, độ đo Lebesgue trên IR có một số tính chất đặc biệt nêu trong các hệ quả và định lí dưới đây. Tuy nhiên ta bắt đầu với các nhận xét sau.

4.1.3 Nhận xét.

(i) Độ đo Lebesgue trên IR là một độ đo đủ và $\sigma-$ hữu hạn.

(ii) Dễ thấy rằng $\sigma-$ đại số sinh bởi nửa vành các gian $\mathcal{R}$ cũng là $\sigma-$ đại số Borel trên IR. Do đó mọi tập Borel đều đo được Lebesgue. Đặc biệt, mọi tập mở, tập đóng, các tập dạng G_δ, F_σ đều là những tập đo được. Hơn nữa mọi tập đo được Lebesgue đều bằng một tập Borel trong IR thêm vào hay bớt đi một tập có độ đo 0.

4.1.4 Bổ đề. *Với mọi* $A \subset IR$,

$$m^*A = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} m\Delta_k \mid \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A, \ \Delta_k \textit{ là khoảng mở}\right\}. \tag{4.2}$$

Chứng minh. Thật vậy, gọi α, β lần lượt là các số xác định bởi vế phải của (4.1) và (4.2). Khi đó vì mỗi khoảng mở đều là một gian (thuộc $\mathcal{R}$) nên $\alpha \leq \beta$.

Nếu $\alpha = +\infty$ thì $\beta = +\infty$ và $\alpha = \beta$.

Giả sử $\alpha < +\infty$ và $(P_i)_{i \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \supset A$. Khi đó không mất tính tổng quát có thể coi $\sum_{i=1}^{\infty} mP_i < +\infty$. Lấy $\epsilon > 0$ tuỳ ý. Với mỗi $i \in \mathbf{N}$, ta chọn khoảng mở $\Delta_i \supset P_i$ sao cho :

$$m\Delta_i < mP_i + \frac{\epsilon}{2^i}.$$

Rõ ràng là $\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_i \supset A$ và

$$\sum_{i=1}^{\infty} m\Delta_i \le \sum_{i=1}^{\infty} mP_i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} \le \sum_{i=1}^{\infty} mP_i + \epsilon.$$

Từ đây suy ra $\beta \le \alpha + \epsilon$ và do $\epsilon > 0$ tuỳ ý ta có $\beta \le \alpha$. Như vậy $\alpha = \beta$ ∎

Từ Bổ đề 4.1.4 ta suy ra ngay các hệ quả sau, trong đó Hệ quả 4.1.5 nêu lên đặc trưng của một tập có độ đo không trong IR.

4.1.5 Hệ quả. *Tập $N \subset IR$ có độ đo 0 khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một số hữu hạn hay đếm được các khoảng mở $(\Delta_k)_k$ phủ N và có tổng độ dài bé hơn ϵ, nghĩa là $\bigcup_k \Delta_k \supset N$ và $\sum_k m\Delta_k < \epsilon$.*

4.1.6 Hệ quả. *Mọi tập hữu hạn hay đếm được trong IR đều đo được và có độ đo 0.*

Như vậy tập các số hữu tỉ **Q** là đo được Lebesgue và có độ đo bằng 0. Định lí sau đây cho ta các đặc trưng của tập đo được Lebesgue trên IR và cũng là một kết quả quan trọng và sâu sắc của mục này.

4.1.7 Định lí. *Giả sử $A \subset IR$. Ba mệnh đề sau là tương đương.*

(i) A là đo được Lebesgue.

(ii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists G \supset A$, G mở và sao cho $m^*(G \setminus A) < \epsilon$.

(iii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists F \subset A$, F đóng và sao cho $m^*(A \setminus F) < \epsilon$.

Chứng minh.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Ta xét các trường hợp :

a) $\mu A < +\infty$. Theo Bổ đề 4.1.4, với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại một họ các khoảng mở $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sao cho

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k \supset A, \ \sum_{k=1}^{\infty} m\Delta_k < \mu A + \epsilon.$$

Đặt $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k$ thì G mở, $G \supset A$ và

$$\mu G \le \sum_{k=1}^{\infty} m\Delta_k < \mu A + \epsilon.$$

Vì $\mu A < +\infty$ nên $\mu(G \setminus A) = \mu G - \mu A < \epsilon$.

b) $\mu A = +\infty$. Vì $\mathrm{IR} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n; n]$ nên

$$A = A \cap \mathrm{IR} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap [-n, n]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

với $A_n = A \cap [-n, n]$ đo được và có độ đo hữu hạn. Do đó theo a), với mỗi $n \in \mathbf{N}$ tồn tại G_n mở, $G_n \supset A_n$ và $\mu(G_n \setminus A_n) < \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$. Khi đó $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ là mở và $G \supset A$. Ngoài ra,

$$\mu(G \setminus A) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại $G_n \supset A, G_n$ mở và $m^*(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}$. Đặt $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ thì $B \in \mathcal{L}$ và $B \supset A$. Vì

$$m^*(B \setminus A) \le m^*(G_n \setminus A) < \frac{1}{n}, \text{ mọi } n \in \mathbf{N}$$

nên $m^*(B \setminus A) = 0$. Vậy $B \setminus A \in \mathcal{L}$ và do đó $A = B \setminus (B \setminus A) \in \mathcal{L}$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii).

$A \in \mathcal{L} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{L}$

$\Leftrightarrow \left(\forall \epsilon > 0, \exists G \supset A^c, G \text{ mở và } m^*(G \setminus A^c) < \epsilon\right)$

$\Leftrightarrow \left(\forall \epsilon > 0, \exists F = G^c \subset A, F \text{ đóng}, m^*(A \setminus F) = m^*(G \setminus A^c) < \epsilon\right)$ ∎

4.1.8 Nhận xét.

(i) Người ta có thể xây dựng độ đo Lebesgue trên IR bằng nhiều cách khác nhau, chẳng hạn :

(α) Gọi $\mathcal{R}$ nửa vành các gian trên IR và $\mathcal{C}$ là họ gồm hợp một số hữu hạn các gian rời nhau. Khi đó $\mathcal{C}$ là một đại số trên $\mathcal{R}$. Trên $\mathcal{C}$ ta định nghĩa một độ đo như sau : nếu $A \in \mathcal{C}$, $A = \bigcup_{i=1}^{n} \langle a_i, b_i \rangle$ thì

$$\lambda A = \sum_{i=1}^{n} m\langle a_i, b_i \rangle$$

(để ý rằng ở đây các gian $\langle a_i, b_i\rangle$ rời nhau từng đôi và $m\langle a_i, b_i\rangle$ chỉ độ dài của gian $\langle a_i, b_i\rangle$). Gọi λ^* là độ đo ngoài sinh bởi λ và $\overline{\lambda}$ là thác triển tiêu chuẩn của λ lên $\sigma-$ đại số $\overline{\mathcal{L}}$ các tập λ^*- đo được. Khi đó $\overline{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$ và $\overline{\lambda} = \mu$ (μ và $\mathcal{L}$ chỉ độ đo Lebesgue và $\sigma-$ đại số các tập đo được Lebesgue trên IR như thường lệ).

(3) Gọi $\mathcal{R} = \{[a, b) \mid a, b \in \mathrm{IR}, a \le b\}$. Thác triển tiêu chuẩn của độ đo λ định nghĩa ở Ví dụ 2.2.3 $(\lambda([a, b)) = b - a)$ cũng chính là độ đo Lebesgue trên IR.

(ii) Độ đo Lebesgue trên IR bất biến đối với các phép dời hình. Tuy nhiên phép chứng minh khẳng định này không đơn giản và sẽ không được trình bày ở đây.

(iii) Không phải mọi tập của IR đều đo được Lebesgue, nghĩa là $\mathcal{L} \ne \mathcal{P}(\mathrm{IR})$. Sau đây là ví dụ về một tập như thế. Ví dụ này thuộc về G. Vitali

4.1.9 Ví dụ. (Tập không đo được Lebesgue trên IR)(*) Gọi μ là độ đo Lebesgue trên IR. Trên $[0, 1]$ ta xét quan hệ $\sim$ xác định như sau : $x, y \in [0, 1]$, $x \sim y$ khi và chỉ khi $x - y$ là một số hữu tỉ. Dễ thấy rằng $\sim$ là một quan hệ tương đương trên $[0, 1]$. Khi đó $[0, 1]$ được phân hoạch thành các lớp tương đương. Gọi E là tập con của $[0, 1]$ sao cho giao của nó với mỗi lớp tương đương nói trên gồm đúng một điểm (tập E như thế tồn tại theo tiên đề chọn). Khi đó E không đo được Lebesgue.

Chứng minh. Giả sử E là đo được Lebesgue. Ta đánh số tất cả các số hữu tỉ trong $[-1, 1]$ là $r_1, r_2, r_3, \ldots$ Với mỗi $n \in \mathbf{N}$ đặt $E_n = \{r_n + x \mid x \in E\}$ và nhận xét rằng E_n là đo được Lebesgue. Bây giờ dễ thấy rằng $E_n \cap E_m = \emptyset$ nếu $n \ne m$ và $\mu E_n = \mu E$ mọi $n \in \mathbf{N}$ (vì μ bất biến đối với phép tịnh tiến). Hơn nữa, $[0, 1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset [-1, 2]$. Theo tính $\sigma-$ cộng tính của μ ta có

(*) Mọi ví dụ về tập không đo được Lebesgue trên IR^k đều được xây dựng dựa vào tiên đề chọn. Năm 1965 R. Solovay (Notices Amer. Math. Soc. 12, 217) chỉ ra rằng nếu không sử dụng tiên đề chọn người ta không thể xây dựng được ví dụ về tập không đo được Lebesgue trên IR^k.

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \lim_{n\to\infty} n\mu E \le \mu([-1,\ 2]) = 3.$$

Từ đây ta được $\mu E = 0$ và do đó $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$ nhưng điều này không thể xảy ra vì $[0,\ 1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ và $\mu[0,\ 1] = 1$. Vậy E không đo được Lebesgue ∎

4.2 Độ đo Lebesgue trên IR^k $(k > 1)$.

Trong mục này ta sẽ trình bày vắn tắt cách xây dựng độ đo Lebesgue trên IR^k. Ta sẽ gọi một gian trên IR^k là một tập có dạng

$$\begin{aligned}\Delta &= \prod_{i=1}^{k} \langle a_i,\ b_i\rangle \\ &= \left\{(\xi_1, \cdots, \xi_k) \in \mathrm{IR}^k \mid \xi_i \in \langle a_i,\ b_i\rangle,\ i = 1, \ldots, k\right\}\end{aligned}$$

trong đó $\langle a_i,\ b_i\rangle$ là một gian trên IR, mọi $i \in \mathbf{N}$. Ta có thể chứng minh trực tiếp rằng họ tất cả các gian trên IR^k, kí hiệu là $\mathcal{R}^k$, là một nửa vành. Tuy nhiên, ta sẽ chứng minh một kết quả tổng quát hơn.

Giả sử cho $\mathcal{R}_1, \cdots, \mathcal{R}_n$ là n nửa vành nào đó các tập hợp. Tập

$$\mathcal{R} = \left\{A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{R},\ i = 1, \cdots, n\right\}$$

gọi là tích của các nửa vành $\mathcal{R}_1, \cdots, \mathcal{R}_n$ và kí hiệu là

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \cdots \times \mathcal{R}_n = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i.$$

4.2.1 Bổ đề. *Tích của một số hữu hạn các nửa vành là một nửa vành.*

Chứng minh. Chúng ta chỉ cần chứng minh tích của hai nửa vành là một nửa vành là đủ. Giả sử $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ là hai nửa vành. Gọi $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2$. Vì cả $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$ đều khác $\emptyset$ nên $\mathcal{R} \ne \emptyset$.

* Giả sử $A, B \in \mathcal{R}$, khi đó $A = A_1 \times A_2$, $B = B_1 \times B_2$ với A_1, $B_1 \in \mathcal{R}_1$ còn A_2, $B_2 \in \mathcal{R}_2$. Khi đó

$$A \cap B = (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{R}$$

vì $A_1 \cap B_1 \in \mathcal{R}_1$ còn $A_2 \cap B_2 \in \mathcal{R}_2$.

* Giả sử $A, B \in \mathcal{R}$, có biểu diễn như trên và hơn nữa $A \supset B$. Khi đó $A_1 \supset B_1$ và $A_2 \supset B_2$. Vì $\mathcal{R}_1$ và $\mathcal{R}_2$ là các nửa vành nên có $C_1, \cdots, C_p \in \mathcal{R}_1$ và $D_1, \cdots, D_q \in \mathcal{R}_2$ với $C_i \cap C_j = \emptyset$, $D_i \cap D_j = \emptyset$ khi $i \neq j$ sao cho

$$A_1 \setminus B_1 = \bigcup_{i=1}^{p} C_i, \; A_2 \setminus B_2 = \bigcup_{j=1}^{q} D_j.$$

Từ đây

$$A_1 = \bigcup_{i=0}^{p} C_i, \; A_2 = \bigcup_{j=0}^{q} D_j, \text{ với } C_0 = B_1, \; D_0 = B_2$$

và do đó

$$A_1 \times A_2 = \bigcup_{i=0}^{p} C_i \times \bigcup_{j=0}^{q} D_j = \bigcup_{\substack{i=0,\dots,p \\ j=0,\dots,q}} E_{ij}.$$

Để ý rằng các tập E_{ij} đôi một không giao nhau $\left(E_{ij} = C_i \times D_j\right)$ và $E_{00} = B_1 \times B_2$ nên

$$\left(A_1 \times A_2\right) \setminus \left(B_1 \times B_2\right) = A \setminus B = \bigcup_{\substack{i=0,\dots,p \\ j=0,\dots,q \\ (i,j) \neq (0,0)}} E_{ij}.$$

Do đó $\mathcal{R}$ là một nửa vành ∎

4.2.2 Hệ quả. *Họ $\mathcal{R}^k$ tất cả các gian trên IR^k là một nửa vành.*

Chứng minh. Là hệ quả trực tiếp của Bổ đề 4.2.1 (để ý rằng họ các gian $\mathcal{R}$ trên IR là một nửa vành và $\mathcal{R}^k = \mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \cdots \mathcal{R}$ (k lần)) ∎

Bây giờ trên nửa vành các gian $\mathcal{R}^k$, ta định nghĩa một hàm tập $v : \mathcal{R}^k \to \overline{\mathrm{IR}}$ như sau : $v(\emptyset) = 0$ và nếu $\Delta \in \mathcal{R}^k$, $\Delta = \prod_{i=1}^{k} \langle a_i, b_i \rangle \neq \emptyset$ thì

$$v(\Delta) = \prod_{i=1}^{k} m\langle a_i, b_i \rangle,$$

trong đó $m\langle a_i, b_i \rangle$ là độ đo của gian $\langle a_i, b_i \rangle$ định nghĩa ở Mục 4.1 (lưu ý các quy ước về các phép toán trong $\overline{\mathrm{IR}}$). $v(\Delta)$ thường được gọi là "thể tích" của gian Δ trong IR^k. Ta có kết quả sau.

4.2.3 Bổ đề. *Hàm tập v là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}^k$.*

4.2.4 Định nghĩa. Thác triển tiêu chuẩn μ^k của v trên nửa vành các gian $\mathcal{R}^k$ lên $\sigma-$ đại số các tập v^*- đo được $\mathcal{L}^k$ được gọi là *độ đo Lebesgue* trên IR^k. Lúc này $\mathcal{L}^k$ được gọi là $\sigma-$ *đại số các tập đo được Lebesgue* còn mỗi tập thuộc $\mathcal{L}^k$ được gọi là một tập *đo được Lebesgue* (hay $(L)-$ *đo được*) trong IR^k.

Độ đo Lebesgue trên IR^k có những tính chất tương tự như độ đo Lebesgue trong IR cho trong Nhận xét 4.1.3, Bổ đề 4.1.4, Hệ quả 4.1.5 – 4.1.6 (các khoảng mở Δ_i được thay bởi các hình hộp mở trong IR^k), Nhận xét 4.1.8. Chẳng hạn, μ^k là đủ và $\sigma-$ cộng tính ; $\sigma-$ đại số $\mathcal{F}(\mathcal{R}^k)$ chính là $\sigma-$ đại số Borel trên IR^k và ta có $\mathcal{F}(\mathcal{R}^k) \subset \mathcal{L}^k$. Như vậy mọi tập Borel đều đo được Lebesgue. Các kết luận trong Định lí 4.1.7 cũng còn đúng cho các tập thuộc IR^k. Cụ thể ta có :

4.2.5 Định lí. *Giả sử $A \subset IR^k$. Khi đó ba mệnh đề sau là tương đương.*

(i) A là đo được Lebesgue,

(ii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists G \supset A$, G mở và sao cho $v^*(G \setminus A) < \epsilon$,

(iii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists F \subset A$, F đóng và sao cho $v^*(A \setminus F) < \epsilon$.

BÀI TẬP

4.1. Gọi $\mathcal{S}$ là nửa vành các tập dạng $[a, b)$, $a, b \in \mathrm{IR}$. Trên $\mathcal{S}$ ta định nghĩa một hàm tập m với $m(\emptyset) = 0$ và $m([a, b)) = +\infty$ nếu $[a, b) \neq \emptyset$.

a) Chứng tỏ rằng m là một độ đo trên $\mathcal{S}$.

b) Xác định m^* và $\sigma-$ đại số $\mathcal{L}$ các tập m^*- đo được.

c) Chứng tỏ độ đo đếm λ trên $\mathcal{L}$ là một mở rộng của m lên $\mathcal{L}$ nhưng $\lambda \neq m^*$ (mở rộng lên $\mathcal{L}$ là không duy nhất).

4.2. Gọi m^* là độ đo ngoài sinh bởi độ đo m trên nửa vành các gian trên IR^k. Giả sử $E \subset \mathrm{IR}^k$. Chứng tỏ rằng ba mệnh đề sau là tương đương.

(i) E là đo được Lebesgue,

(ii) Tồn tại tập K loại G_δ, $K \supset E$ sao cho $m^*(K \setminus E) = 0$,

(iii) Tồn tại tập H loại F_σ, $H \subset E$ sao cho $m^*(E \setminus H) = 0$.

4.3. Cho $A \subset \mathrm{IR}$. Chứng minh rằng A đo được Lebesgue và có độ đo 0 khi và chỉ khi với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại một dãy các khoảng mở $(\Delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sao cho mỗi $x \in A$ đều thuộc về vô số khoảng Δ_n và sao cho

$$\sum_{n=1}^{\infty} m\Delta_n < \epsilon.$$

4.4. Gọi $\mathcal{R}$ là nửa vành các gian trên IR. Ta xét hàm tập $m : \mathcal{R} \to \overline{\mathrm{IR}}$ xác định như sau, mọi $P \in \mathcal{R}$, $P = \langle a, b \rangle$ (nếu $b < a$ thì ta quy ước $P = \emptyset$), $a, b \in \overline{\mathrm{IR}}$

$$mP = \begin{cases} b - a & \text{nếu } P \neq \emptyset, \\ 0 & \text{nếu } P = \emptyset. \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng

(a) Nếu $P, P_1, \cdots, P_k \in \mathcal{R}$, $\bigcup_{i=1}^{k} P_i = P$ và $P_i \cap P_j = \emptyset$, $i \neq j$ thì $\sum_{i=1}^{k} mP_i = mP$,

(b) Nếu $P, P_1, \cdots, P_k, \cdots \in \mathcal{R}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i \subset P$ và $P_i \cap P_j = \emptyset$, $i \neq j$ thì $\sum_{i=1}^{\infty} mP_i \leq mP$,

(c) Nếu $P, P_1, \cdots, P_k \in \mathcal{R}$ mà $P \subset \bigcup_{i=1}^{k} P_i$ thì $mP \leq \sum_{i=1}^{k} mP_i$,

(d) m là $\sigma-$ cộng tính.

4.5. Trên IR ta xét độ đo Lebesgue. Chứng tỏ rằng nếu $A \subset \mathrm{IR}$ thì

$$m^* A = \inf \{\mu G \mid G \text{ mở và } G \supset A\}.$$

4.6. Trên IR ta xét độ đo Lebesgue μ.

a) Giả sử A là một tập con đo được của $[a, b]$. Xét hàm số $f : [a, b] \to \mathrm{IR}$ xác định bởi

$$f(x) = \mu(A \cap [a, x]), \ x \in [a, b].$$

Chứng tỏ rằng f liên tục trên $[a, b]$.

b) Giả sử $A \subset \mathrm{IR}$ là tập đo được, $\mu A = p > 0$. Chứng tỏ rằng khi đó với mọi $q \in (0, p)$, tồn tại một tập con B đo được của A sao cho $\mu B = q$.

4.7. Trên IR ta xét độ đo Lebesgue μ. Cho $A \subset \mathrm{IR}$.

(i) Chứng minh rằng nếu $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ thì với mọi $x \in \mathrm{IR}$ ta có

$$x + A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (x + a_n, x + b_n), \ -A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (-b_n, -a_n).$$

(ii) Sử dụng kết quả câu (i) để chứng minh rằng nếu A đo được Lebesgue thì $\mu(x + A) = \mu A = \mu(-A)$.

4.8. Cho $a, b \in \mathrm{IR}$ và $A \subset \mathrm{IR}$. Đặt $aA + b = \{ax + b \mid x \in A\}$. Chứng tỏ rằng

a) $m^*(aA + b) = |a| m^*(A)$ (m^* là độ đo ngoài sinh bởi độ đo m trên nửa vành các gian),

b) Nếu A đo được Lebesgue thì $aA + b$ cũng vậy và ta có $\mu(aA + b) = |a| \mu A$ (μ là độ đo Lebesgue).

§ 5. HÀM ĐO ĐƯỢC

Trong các giáo trình giải tích cổ điển ta đã biết là các hàm liên tục có khá nhiều tính chất tốt. Tuy nhiên lớp hàm này lại không đóng kín đối với phép lấy giới hạn. Nghĩa là giới hạn f của một dãy các hàm liên tục (chẳng hạn trên một khoảng $I \subset \mathrm{IR}$) không nhất thiết là hàm liên tục(*). Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu các hàm số được gọi là "hàm đo được". Lớp các hàm này rộng hơn lớp các hàm liên tục đồng thời lại đóng kín đối với các phép toán giải tích, khắc phục những hạn chế của lớp các hàm liên tục. Các hàm đo được sẽ đóng một vai trò quan trọng trong lí thuyết tích phân Lebesgue (Chương 4).

Cho X là một tập tuỳ ý khác rỗng và $\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số trên X. Lúc này cặp $(X, \mathcal{A})$ sẽ được gọi là một *không gian đo được* và mỗi tập $A \in \mathcal{A}$ sẽ được gọi là một *tập đo được* (hay $\mathcal{A}-$ *đo được*) trong X.

Giả sử $A \subset X$ và $f : A \to \overline{\mathrm{IR}}$. Để ngắn gọn, từ đây về sau ta sẽ sử dụng kí hiệu $A[f > a]$, $(a \in \mathrm{IR})$ để chỉ tập hợp $\{x \in A \mid f(x) > a\}$. Các kí hiệu $A[f \geq a], A[f < a]$, $A[f \leq a], A[f = g]$, ... cũng được hiểu cùng một cách như vậy.

5.1 Định nghĩa hàm đo được.

5.1.1 Định nghĩa. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$ và $f : A \to \overline{\mathrm{IR}}$. Hàm f được gọi là *đo được* trên A đối với $\sigma-$ đại số $\mathcal{A}$ (hay f là $\mathcal{A}-$ *đo được*(**) trên A) nếu

$$A[f > a] \in \mathcal{A}, \text{ mọi } a \in \mathrm{IR}. \tag{5.1}$$

5.1.2 Bổ đề. *Hàm $f : A \to \overline{IR}$ là đo được khi và chỉ khi một trong ba điều kiện sau thoả mãn*

(*) Một điều khá thú vị là chính Cauchy cũng đã nhầm lẫn khi cho là hàm giới hạn f là liên tục và đã đưa ra một phép chứng minh (hiển nhiên là không đúng !) trong tập Bình giảng về Giải tích của mình xuất bản năm 1821.

(**) Khi $\mathcal{A}$ đã được chỉ rõ và không sợ nhầm lẫn ta cũng nói đơn giản f là *đo được*.

$$A[f \geq a] \in \mathcal{A},\ \forall a \in IR, \tag{5.2}$$

$$A[f \leq a] \in \mathcal{A},\ \forall a \in IR, \tag{5.3}$$

$$A[f < a] \in \mathcal{A},\ \forall a \in IR. \tag{5.4}$$

Chứng minh. Để ý rằng do

$$A[f < a] = A \setminus A[f \geq a],$$

$$A[f \leq a] = A \setminus A[f > a]$$

và $\mathcal{A}$ là $\sigma-$ đại số nên (5.1) tương đương với (5.3) và (5.2) tương đương với (5.4). Để chứng minh bổ đề ta chỉ còn phải chứng minh (5.1) tương đương với (5.2). Giả sử có (5.1). Vì $[a,\ +\infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n},\ +\infty\right]$ nên

$$A[f \geq a] = f^{-1}([a, +\infty]) = f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, +\infty\right]\right)$$

$$= \bigcap_{n} f^{-1}\left(\left(a - \frac{1}{n}, +\infty\right]\right) = \bigcap_{n} A\left[f > a - \frac{1}{n}\right] \in \mathcal{A}.$$

Chiều ngược lại được suy ra bằng một lập luận tương tự với lưu ý rằng

$$(a,\ +\infty] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a + \frac{1}{n},\ +\infty\right].$$

5.1.3 Nhận xét.

(i) Rõ ràng rằng định nghĩa hàm đo được ở trên chỉ phụ thuộc chủ yếu vào $\sigma-$ đại số $\mathcal{A}$ trên X mà không phụ thuộc vào bất cứ độ đo nào trên $\mathcal{A}$.

(ii) Dễ chứng minh được rằng nếu $f : A \to \mathrm{IR}$ (f chỉ nhận giá trị thực) thì f đo được trên $A \in \mathcal{A}$ khi và chỉ khi $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$, với mọi tập Borel B trong IR.

(iii) Nếu X là một không gian tôpô, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$ ($\sigma-$ đại số Borel trên X) và f là $\mathcal{B}(X)-$ đo được thì ta cũng nói f là *đo được Borel* trên X hay f là *hàm Borel*.

Trường hợp $X = \mathrm{IR}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{L}^n$ và f là $\mathcal{L}^n -$ đo được thì ta cũng nói là f *đo được Lebesgue* hay $(L)-$ *đo được*. Một hàm f đo được Borel thì đo được Lebesgue. Cũng để ý rằng nếu $f : \mathrm{IR}^n \to \mathrm{IR}$ thì

$$(f \text{ liên tục}) \Leftrightarrow \left(f^{-1}((a,\ b)) \text{ là mở, } a,\ b \in \mathrm{IR}\right),$$

$$(f \text{ là } (\mathrm{L}) - \text{đo được}) \Leftrightarrow \left(f^{-1}((a,\ b)) \in \mathcal{L}^n,\ a,\ b \in \mathrm{IR}\right).$$

Như vậy các khái niệm liên tục và đo được rất "gần" nhau và rõ ràng rằng nếu f là liên tục thì f là $(\mathrm{L})-$ đo được (điều ngược lại nói chung là không đúng, xem Ví dụ 5.1.4).

Ta kết thúc nhận xét này bằng lưu ý nhỏ sau : cho dù $f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ là liên tục thì cũng có thể tồn tại tập đo được Lebesgue $C \subset \mathrm{IR}$ sao cho $f^{-1}(C)$ không đo được Lebesgue.

5.1.4 Ví dụ.

(a) $(X,\ \mathcal{A})$ là không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$ và f là hàm hằng, nghĩa là $f(x) = c \in \mathrm{IR}$, mọi $x \in A$ thì f là hàm đo được.

(b) $(X,\ \mathcal{A})$ là không gian đo được $A \subset X$. Từ định nghĩa *hàm đặc trưng* của tập A, kí hiệu là $XA(.)$, như sau :

$$XA(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in A, \\ 0 \text{ nếu } x \notin A. \end{cases}$$

Khi đó $_{XA}(.)$ đo được khi và chỉ khi $A \in \mathcal{A}$. Thật vậy, vì với mọi $a \in \mathrm{IR}$,

$$X[XA > a] = \begin{cases} \emptyset & \text{nếu } a \geq 1, \\ X & \text{nếu } a < 0, \\ A & \text{nếu } 0 \leq a < 1, \end{cases}$$

nên khẳng định được suy ra từ định nghĩa của hàm đo được.

(c) Nếu $f : \mathrm{IR}^k \to \mathrm{IR}$ là hàm nửa liên tục dưới trên X (theo định nghĩa, với mọi $a \in \mathrm{IR}$, $\{x \in \mathrm{IR}^k \mid f(x) \leq a\}$ là đóng) thì f đo được Lebesgue.

5.1.5 Một số tính chất đơn giản của hàm đo được.

Các tính chất sau đây được suy ra ngay từ Định nghĩa 5.1.1.

(i) Nếu $f : A \to \overline{\mathrm{IR}}$ là $\mathcal{A}-$ đo được thì f là $\mathcal{A}-$ đo được trên mọi tập con đo được của A. Thật vậy nếu $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ thì với mọi $a \in \mathrm{IR}$,

$$B[f > a] = B \cap A[f > a] \in \mathcal{A}.$$

(ii) Nếu $(E_i)_{i \in \mathrm{N}} \subset \mathcal{A}$, $A = \bigcup_i E_i$ và $f : A \to \overline{\mathrm{IR}}$ là đo được trên mỗi E_i, $i \in \mathbf{N}$ thì f đo được trên A. Điều này được suy ra từ

$$A[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_i[f > a] \in \mathcal{A} \text{ mọi } a \in \mathrm{IR}.$$

(iii) Nếu $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo với μ là một độ đo đủ. Khi đó nếu $A \in \mathcal{A}$ và $\mu A = 0$ thì mọi hàm $f : A \to \overline{\mathrm{IR}}$ đều $\mathcal{A}-$ đo được. Thật vậy, vì với mọi $a \in \mathrm{IR}$, tập $A[f > a] \subset A$ mà μ đủ nên $A[f > a] \in \mathcal{A}$.

5.2 Các phép toán trên các hàm đo được.

Trong mục nhỏ này chúng ta sẽ chứng minh rằng lớp các hàm đo được đóng kín đối với các phép toán số học, phép lấy supremum, infimum, giới hạn, limsup, liminf. Nghĩa là khi thực hiện các phép toán vừa nêu trong lớp các hàm đo được thì ta lại nhận được các hàm đo được.

5.2.1 Định lí. *Giả sử $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$ và $f, g : A \to \overline{IR}$. Khi đó*

(i) Nếu f đo được trên A, $\alpha \in IR$ thì $\alpha.f$ đo được trên A. Nếu $\alpha > 0$ thì $|f|^\alpha$ cũng đo được trên A.

(ii) Nếu f, g hữu hạn (nghĩa là $f(A) \subset IR$ và $g(A) \subset IR$) và đo được trên A thì các hàm số $f \pm g$, $f.g$ cũng đo được và nếu $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in A$ thì $\dfrac{f}{g}$ cũng đo được trên A.

Trong phát biểu ở (i) ta hiểu rằng nếu với $x \in A$ nào đó mà $f(x) = +\infty$ hay $f(x) = -\infty$ thì $|f(x)|^\alpha(x) = +\infty$. Nhắc lại rằng $|f|^\alpha$ là hàm xác định trên A bởi công thức $|f|^\alpha(x) = |f(x)|^\alpha$, mọi $x \in A$.

Chứng minh.

(i) Lấy tuỳ ý $a \in \mathrm{IR}$.

* Nếu $a \leq 0$ thì rõ ràng là $A\left[|f|^{\alpha}(x) < a\right] = \emptyset \in \mathcal{A}$ còn nếu $a > 0$ thì

$$A\left[|f|^{\alpha} < a\right] = A\left[|f| < a^{\frac{1}{\alpha}}\right]$$
$$= A\left[f < a^{\frac{1}{\alpha}}\right] \cap A\left[f > -a^{\frac{1}{\alpha}}\right] \in \mathcal{A}$$

do f là đo được trên A. Vậy $|f|^{\alpha}$ là đo được trên A.

* Dễ thấy rằng nếu $\alpha = 0$ thì $\alpha.f$ là $\mathcal{A}-$ đo được trên A (để ý quy ước $0 \times (\pm\infty) = 0$). Nếu $\alpha \neq 0$ thì do

$$A[\alpha.f < a] = \begin{cases} A\left[f < \dfrac{a}{\alpha}\right] & \text{nếu } \alpha > 0, \\ A\left[f > \dfrac{a}{\alpha}\right] & \text{nếu } \alpha < 0. \end{cases}$$

ta được $A[\alpha.f < a] \in \mathcal{A}$, mọi $a \in \mathrm{IR}$. Vậy $\alpha.f$ là đo được trên A.

(ii) * Giả sử $a \in \mathrm{IR}$ và $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n, \ldots$ là dãy tất cả các số hữu tỉ. Để ý rằng với $x \in A$ thì (do f, g hữu hạn)

$$\big(f(x) + g(x)\big) < a \Leftrightarrow \big(f(x) < a - g(x)\big)$$
$$\Leftrightarrow \big(\exists n \in \mathbf{N} : f(x) < r_n < a - g(x)\big).$$

Do đó

$$A\big[(f+g) < a\big] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\big(A[f < r_n] \cap A[g < a - r_n]\big) \in \mathcal{A}$$

(vì f, g đo được và $\mathcal{A}$ là $\sigma-$ đại số). Ta đã chứng minh được $f + g$ là đo được trên A. Vì g đo được nên theo (i), $-g$ cũng đo được và vì $f - g = f + (-g)$ nên từ điều vừa chứng minh ta cũng suy ra $f - g$ là hàm đo được trên A.

* Từ chứng minh trên và (i) ta suy ra $(f+g)^2$ và $(f-g)^2$ là đo được trên A. Do đó $f.g = \dfrac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$ cũng là hàm đo được trên A.

* Cuối cùng, nếu g hữu hạn, đo được trên A và $g(x) \neq 0$ với mọi $x \in A$ thì g^2 cũng đo được (do (i)). Hệ quả là $\dfrac{1}{g^2}$ cũng đo được trên A vì tập

$$A\left[\frac{1}{g^2} < a\right] = \begin{cases} \emptyset & \text{nếu } a \leq 0, \\ A\left[g^2 > \dfrac{1}{a}\right] & \text{nếu } a > 0 \end{cases}$$

thuộc $\mathcal{A}$, mọi $a \in \mathrm{IR}$. Từ đây $\dfrac{f}{g} = f.g.\dfrac{1}{g^2}$ cũng đo được trên A ∎

Đến đây một câu hỏi thật tự nhiên được đặt ra là nếu các hàm f, g không phải là hữu hạn trên A thì có thể thực hiện các phép toán số học trên chúng được không và nếu được thì trong trường hợp này có thể thiết lập được kết quả tương tự như ở (ii) của Định lí 5.2.1 không ? Câu trả lời là khẳng định. Tuy nhiên có một trở ngại nhỏ là có thể có các điểm $x \in A$ mà các phép toán trên không thực hiện được (không có nghĩa, chẳng hạn tại những x mà $f(x) + g(x)$ có dạng $\infty - \infty$, ...). Một cách vượt qua trở ngại này là tại những x như thế ta đặt $(f+g)(x) = \alpha$, $(\alpha \in \overline{\mathrm{IR}})$. Ta sẽ không đi sâu vào chi tiết vấn đề này ở đây (xem Bài tập O21).

Nhắc lại rằng với dãy $(f_n)_n$ các hàm xác định trên A và nhận giá trị trong $\overline{\mathrm{IR}}$, người ta định nghĩa, với $x \in A$,

$$\sup_n f_n(x) = \sup\{f_n(x) \mid n \in \mathbf{N}\},$$

$$\inf_n f_n(x) = \inf\{f_n(x) \mid n \in \mathbf{N}\},$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_k(\inf_{n\geq k} f_n(x)), \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_k(\sup_{n\geq k} f_n(x)).$$

5.2.2 Định lí. *Giả sử $(f_n)_n$ là một dãy các hàm đo được (không nhất thiết hữu hạn) trên $A \in \mathcal{A}$. Khi đó các hàm số $\inf_n f_n$, $\sup_n f_n$, $\underline{\lim}_n f_n$, $\overline{\lim}_n f_n$ cũng đo được trên A.*

Chứng minh. Với mọi $a \in \mathrm{IR}$, ta có

$$A\left[\sup_n f_n > a\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty} A\left[f_n > a\right] \in \mathcal{A}.$$

Do đó $\sup_n f_n$ là đo được. Từ đây ta cũng suy ra $\inf_n f_n$ là đo được vì $\inf_n f_n = -\sup_n(-f_n)$ (để ý rằng $-(-\infty) = +\infty$, $-(+\infty) = -\infty$). Cuối cùng, tính đo được của các hàm $\underline{\lim}_n f_n$, $\overline{\lim}_n f_n$ được suy ra từ chứng minh trên và định nghĩa của các hàm này ∎

5.2.3 Hệ quả.

(i) Giả sử $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m$ là các hàm đo được trên $A \in \mathcal{A}$. Khi đó các hàm

$$\max\{f_1, f_2, \ldots, f_m\},\ \min\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$$

cũng là đo được.

(ii) Nếu $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là một dãy các hàm đo được trên A và nếu giới hạn $\lim_n f_n(x)$ tồn tại trong $\overline{IR}$ với mọi $x \in A$ thì hàm $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ là đo được.

Chứng minh.

* Đặt $f_n = f_m$ mọi $n \in \mathbf{N}$ và $n > m$ rồi áp dụng Định lí 5.2.2 ta được (i).

* Vì $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \underline{\lim}_n f_n = \overline{\lim}_n f_n$ nên (ii) là hệ quả trực tiếp của Định lí 5.2.2 ∎

Trong Hệ quả 5.2.3 giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ được đòi hỏi phải tồn tại với mọi $x \in A$. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp khi trên $\mathcal{A}$ có cho một độ đo μ, kết luận (nên trong hệ quả trên) vẫn còn đúng nếu các hàm f_n chỉ cần xác định trên $A \setminus N$ trong đó N là tập có độ đo không $(\mu N = 0)$ và giới hạn $\lim_n f_n(x)$ cũng chỉ cần đòi hỏi tồn tại trên $A \setminus N$. Khái quát điều này ta đi đến khái niệm "hầu khắp nơi" sau đây.

5.3 Tập có độ đo không và tính chất "hầu khắp nơi".

Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo ($\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số) và $A \in \mathcal{A}$. Ta nói một tính chất $P(x)$ (phụ thuộc vào x) nào đó thoả mãn *hầu khắp nơi (h.k.n.)* trên A (hay $P(x)$ thoả mãn với *hầu hết* các $x \in A$) nếu tồn tại một tập $B \in \mathcal{A}$ sao cho $\mu B = 0$ và $P(x)$ thoả mãn với mọi $x \in A \setminus B$. Nói một cách khác, tập C gồm tất cả những $x \in A$ mà tại đó $P(x)$ không thoả mãn được chứa trong một tập hợp có độ đo không (mà trên quan điểm độ đo coi như "không đáng kể"). Cũng để ý rằng định nghĩa này không đòi hỏi tập hợp C đo được. Đôi khi để chỉ rõ độ đo μ (trường hợp đang xét nhiều độ đo) ta viết "$\mu -$h.k.n." thay cho "h.k.n.".

Bây giờ chúng ta nêu ra một số ví dụ về tính chất hầu khắp nơi thường gặp trong giáo trình này.

5.3.1 Ví dụ.

(a) Hàm $f : A \to \overline{\mathrm{IR}}$ là hữu hạn hầu khắp nơi trên A nếu $f(x) \in \mathrm{IR}$ mọi $x \in A$ ngoại trừ trên một tập $B \subset A$ mà $B \subset B_0$ và $\mu(B_0) = 0$.

(b) Dãy $(f_n)_n$ các hàm xác định trên A là hội tụ hầu khắp nơi trên A về hàm f nếu có tập $B \subset A$ sao cho $\mu B = 0$ và $f_n(x) \to f(x)$ khi $n \to \infty$ với mọi $x \in A \setminus B$.

(c) Hai hàm f, g xác định trên A là bằng nhau, hầu khắp nơi trên A nếu $\{x \in A \mid f(x) \neq g(x)\} \subset B$ mà $\mu B = 0$. Hai hàm bằng nhau h.k.n. trên A được gọi là *tương đương* trên A và thường được kí hiệu là $f \sim g$. Nói một cách khác, hai hàm tương đương nhau thì chúng chỉ khác nhau trên một tập con của một tập có độ đo không. Cũng để ý rằng quan hệ "$\sim$" là một quan hệ tương đương trên lớp các hàm xác định trên A.

5.3.2 Nhận xét.

(i) Vì hợp của một số hữu hạn hay đếm được các tập có độ đo không là một tập có độ đo không nên nếu có một số hữu hạn hay đếm được các tính chất thoả mãn h.k.n. trên A thì tất cả các tính chất này sẽ thoả mãn (đồng thời) h.k.n. trên A. Chẳng hạn, nếu dãy $(f_n)_n$ mà mỗi $n \in \mathbf{N}$, $f_n > 0$ h.k.n. trên A thì $f_n > 0$ mọi $n \in \mathbf{N}$ h.k.n. trên A.

(ii) Nếu μ là một độ đo đủ thì khái niệm h.k.n. trở nên đơn giản hơn. Cụ thể, $P(x)$ thoả mãn h.k.n. trên A có nghĩa là tập các $x \in A$ mà $P(x)$ không thoả mãn là một tập có đo được và có độ đo không.

(iii) Một trường hợp ngoại lệ : nếu f là một hàm xác định trên A và có $B \subset A$, $\mu B = 0$ sao cho f bị chặn trên $A \setminus B$ thì ta nói f *bị chặn cốt yếu* trên A (mà không nói là f bị chặn h.k.n. trên A).

5.3.3 Định lí. *Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo với μ là một độ đo đủ, $A \in \mathcal{A}$ và $f, g : A \to \overline{IR}$. Nếu f tương đương với g trên A và f là đo được thì g cũng đo được.*

Chứng minh. Gọi $E_1 = A[f \neq g]$, và $E_2 = A[f = g]$. Khi đó do μ là đủ nên $E_1 \in \mathcal{A}$, $\mu(E_1) = 0$ và $E_2 = A \setminus E_1 \in \mathcal{A}$. Vì f đo được trên A và $E_2 \in \mathcal{A}$ nên f và do đó g đo được trên E_2. Bây giờ tính đo được của g trên $A = E_1 \cup E_2$ được suy ra dễ dàng từ định nghĩa hàm đo được và tính đủ của μ ∎

5.3.4 Nhận xét.

(i) Trong Định lí 5.3.3 giả thiết μ đủ là quan trọng. Kết luận của định lí nói chung không còn đúng nữa nếu μ không đủ. Chẳng hạn nếu $E \subset X$ mà $\mu E = 0$ và $F \subset E$ mà F không là tập đo được. Khi đó hàm

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in F, \\ 0 & \text{nếu } x \in E \setminus F \end{cases}$$

rõ ràng là tương đương với hàm đo được $f(x) \equiv 0$ trên E nhưng g không đo được. Tuy nhiên giả thiết này (μ đủ) không phải là một hạn chế quá lớn vì các độ đo có được bằng cách thác triển tiêu chuẩn đều đầy đủ. Hơn nữa nếu $(X, \mathcal{A}, \mu)$ không đủ thì ta có thể "bổ sung" để được một không gian đầy đủ (Bài tập O7).

(ii) Để ý rằng nếu một hàm f liên tục trên $[a, b] \subset \mathrm{IR}$, $x_0 \in [a, b]$ thì hàm $g = f$ trên $[a, b] \setminus \{x_0\}$ và $g(x_0) = r_0 \neq f(x_0)$ không còn liên tục trên $[a, b]$ nữa. Nói khác đi, nếu ta thay đổi giá trị của một hàm liên tục trên $[a, b]$ dù chỉ tại một điểm thì tính liên tục của nó sẽ bị phá vỡ. Đối với hàm đo được thì không như thế. Định lí 5.3.3 nói lên rằng nếu độ đo μ là đủ thì dù ta thay đổi giá trị của hàm đo được f (bởi các giá trị mới, ngay cả thuộc tập số thực mở rộng $\overline{\mathrm{IR}}$) trên một tập có độ đo không thì tính đo được của "nó" vẫn không bị phá vỡ (nghĩa là hàm mới nhận được vẫn là hàm đo được). Điều này nói lên tính "ổn định" hay "mềm dẻo" của lớp các hàm đo được. Cùng với các kết luận của Định lí 5.2.2, Hệ quả 5.2.3 nó cho thấy các ưu điểm của lớp các hàm đo được so với lớp các hàm liên tục.

(iii) Trên cơ sở của Định lí 5.3.3, nếu μ đủ thì ta cũng có thể nói tới tính đo được của một hàm f trên A cho dù f chỉ xác định h.k.n. trên A. Chẳng hạn, nếu f xác định trên $B \subset A$ với $B \in \mathcal{A}$, $\mu(A \setminus B) = 0$ thì ta đặt $\tilde{f}(x) = \alpha \in \overline{\mathrm{IR}}$ với $x \in A \setminus B$ và $\tilde{f}(x) = f(x)$, $x \in B$. Khi đó nếu $\tilde{f}$ đo được trên A thì ta cũng nói f *đo được* trên A.

5.4 Cấu trúc của hàm đo được.

Mục nhỏ này được dành cho việc nghiên cứu cấu trúc của các hàm đo được mà kết quả chủ yếu được nêu lên trong Định lí 5.4.1 và là cơ sở để chúng ta định nghĩa tích phân Lebesgue ở Chương 4.

Một hàm số $s : A \to \overline{\mathrm{IR}}$ chỉ lấy một số hữu hạn giá trị thuộc IR gọi là một hàm *đơn giản* trên A.

Giả sử $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ là các giá trị (khác nhau từng đôi) của hàm đơn giản s trên A. Đặt

$$A_i = \{x \in X \mid s(x) = \alpha_i\},\ i = 1,\ 2, ...,\ n.$$

Khi đó $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$. Rõ ràng là

$$s(x) = \sum_{n=1}^{n} \alpha_i \mathcal{X}A_i(x),\ x \in A \tag{5.5}$$

và mọi hàm s có dạng (5.5) với các A_i đôi một rời nhau và $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ đều là các hàm đơn giản trên A.

Dễ dàng chứng minh được rằng s là đo được khi và chỉ khi các A_i, $i = 1,\ 2, ...,\ n$ đều là các tập đo được (nghĩa là thuộc $\mathcal{A}$). Hàm đơn giản s được gọi là *không âm* nếu $\alpha_i \geq 0$ với mọi $i = 1,\ 2,\ 3, ...\ n$.

5.4.1 Định lí. *Cho $f : A \to \overline{IR}$ là hàm đo được không âm. Tồn tại một dãy các hàm đơn giản đo được $(s_n)_n$ trên A thoả mãn các điều kiện sau :*

(i) $0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le f$,

(ii) $s_n(x) \to f(x)$ *khi* $n \to \infty$, *với mọi* $x \in A$.

Ngoài ra, nếu f *là hàm bị chặn trên* A *thì dãy* $(s_n)_n$ *có thể được chọn sao cho* $(s_n)_n$ *hội tụ đều đến* f *trên* A *và* $s_n \le n$, *mọi* $n \in \mathbf{N}$.

Chứng minh. Với mọi $n \in \mathbf{N}$, ta đặt

$$s_n(x) = \begin{cases} n & \text{nếu } f(x) \ge n, \\ \dfrac{m-1}{2^n}, & f(x) \in \left[\dfrac{m-1}{2^n}, \dfrac{m}{2^n}\right), \ m \in \{1, 2, \ldots, n.2^n\}. \end{cases}$$

Dễ dàng chứng minh được rằng $(s_n)_n$ là dãy đơn điệu không giảm và $s_n \le f$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Ngoài ra, s_n là đo được trên A, mọi $n \in \mathbf{N}$. Để thấy điều này hãy để ý rằng

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n.2^n} \frac{k-1}{2^n} . XA_{n,k}(x) + n.XB_n(x),\ x \in A$$

trong đó, với $1 \le k \le n.2^n$,

$$A_{n,k} = A\left[\frac{k-1}{2^n} \le f < \frac{k}{2^n}\right] \in \mathcal{A},$$

$$B_n = A[f \ge n] \in \mathcal{A}.$$

Bây giờ ta chứng tỏ $(s_n)_n$ thoả mãn (ii). Giả sử $x \in A$. Nếu $f(x) < \infty$ thì với n đủ lớn ta có $f(x) < n$. Do đó tồn tại một số tự nhiên m sao cho $\dfrac{m-1}{2^n} \le f(x) < \dfrac{m}{2^n}$. Theo định nghĩa của s_n, với n đủ lớn thì $|f(x) - s_n(x)| \le \dfrac{1}{2^n}$. Nếu $f(x) = +\infty$ thì $s_n(x) = n$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Do đó, $\lim\limits_{n \to \infty} s_n(x) = f(x)$.

Ngoài ra, nếu tồn tại $\beta > 0$ sao cho $f(x) < \beta$, mọi $x \in A$ thì

$$\sup_{x \in A} |f(x) - s_n(x)| \le \frac{1}{2^n}, \text{ với mọi } n > \beta.$$

Điều này cho thấy $(s_n)_n$ hội tụ đều đến f trên A. Khẳng định cuối cùng được chứng minh ∎

5.5 Hội tụ theo độ đo.

Cho tới nay ta đã biết được một số kiểu hội tụ của các dãy hàm : hội tụ khắp nơi (hội tụ điểm), hội tụ đều, hội tụ hầu khắp nơi. Trong phần này ta sẽ xét một kiểu hội tụ mới của dãy hàm xác định trên một không gian độ đo. Đó là hội tụ theo độ đo.

Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo ($\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số), $A \in \mathcal{A}$.

5.5.1 Định nghĩa. Giả sử $f, f_n : A \to \overline{\mathrm{IR}}$, $n \in \mathbf{N}$ là các hàm đo được trên A. Ta nói dãy $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *hội tụ theo độ đo* đến hàm f, kí hiệu $f_n \xrightarrow{\mu} f$, nếu với mọi số $\delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left\{x \in A \middle| |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\right\} = 0. \tag{5.6}$$

5.5.2 Nhận xét. Nếu ta không phân biệt các hàm tương đương (theo μ) thì giới hạn của một dãy hàm hội tụ theo độ đo là duy nhất. Điều này được thể hiện qua hai khẳng định sau. Giả sử μ là đủ.

(i) Nếu $f_n \xrightarrow{\mu} f$ và $f_n \xrightarrow{\mu} g$ trên A thì $f \sim g$ trên A.

Với $\delta > 0$ tuỳ ý, mọi $n \in \mathbf{N}$,

$$A\big[|f - g| \geq \delta\big] \subset \left(A\left[|f_n - f| \geq \frac{\delta}{2}\right] \cup A\left[|f_n - g| \geq \frac{\delta}{2}\right]\right). \tag{*}$$

Thật vậy, nếu x không thuộc vào tập hợp ở vế phải của $(*)$ thì hoặc là $f_n(x) = f(x) = g(x) = +\infty$ (hay $-\infty$) và lúc này x không thuộc tập ở vế trái ; hoặc là

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\delta}{2} \text{ và } |f_n(x) - g(x)| < \frac{\delta}{2},$$

và như vậy $|f(x) - g(x)| < \delta$ tức là x không thuộc vào tập hợp ở vế trái của $(*)$. Từ $(*)$ và các giả thiết $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $f_n \xrightarrow{\mu} g$ ta suy ra

$$\mu A\big[|f - g| \geq \delta\big] = 0.$$

Dễ thấy rằng

$$A\big[|f-g|>0\big]=\bigcup_{n=1}^{\infty} A\left[|f-g|\geq\frac{1}{n}\right].$$

Từ đây và $\mu A\left[|f-g|\geq\frac{1}{n}\right]=0$, mọi n, ta có

$$\mu A[f\neq g]=\mu A\big[|f-g|>0\big]=0,$$

nghĩa là $f\sim g$.

(ii) f_n, f, g đo được trên A, $f_n\xrightarrow{\mu} f$ và $f\sim g$ trên A thì $f_n\xrightarrow{\mu} g$.

Thật vậy, nếu đặt $B=A[f\neq g]$ thì $\mu B=0$ ($B\in\mathcal{A}$ vì f và g đo được). Khi đó với mọi $n\in\mathbf{N}$ và với mọi $\delta>0$, ta có :

$$\begin{aligned}A\big[|f_n-g|\geq\delta\big]&\subset\big\{x\in A\setminus B\,\big|\,|f_n(x)-f(x)|\geq\delta\big\}\cup B\\&\subset A\big[|f_n-f|\geq\delta\}\cup B.\end{aligned}$$

Do đó

$$0\leq\mu\Big(A\big[|f_n-g|\geq\delta\big]\Big)\leq\mu\Big(A\big[|f_n-f|\geq\delta\big]\Big)\to 0$$

khi $n\to\infty$. Vậy $f_n\xrightarrow{\mu} g$.

Mối quan hệ giữa hội tụ theo độ đo và hội tụ hầu khắp nơi được thể hiện trong các định lí sau.

5.5.3 Định lí. *Giả sử μ là độ đo đủ, $(f_n)_n$ là dãy các hàm đo được và $f_n\to f$ h.k.n. trên $A\in\mathcal{A}$. Khi đó f đo được trên A và nếu $\mu A<+\infty$ thì $f_n\xrightarrow{\mu} f$.*

Chứng minh. (i) Chứng minh f đo được.

Gọi $B=\{x\in A\mid f_n(x)\not\to f(x)\}$ thì B đo được và do đó $\mu B=0$[(*)]. Vì μ đủ nên f đo được trên B. Ngoài ra, với mọi $x\in A\setminus B$, $f_n(x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$ nên f đo được trên $A\setminus B$. Do vậy f đo được trên $A=(A\setminus B)\cup B$.

(*) Ta có thể chứng minh $B\in\mathcal{A}$ mà không sử dụng giả thiết μ là đủ (Bài tập 5.5.)

(ii) Chứng minh $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A. Lấy tuỳ ý $\delta > 0$. Với mỗi $i \in \mathbf{N}$, ta đặt

$$A_i = A\left[|f_i - f| \geq \delta\right].$$

Để ý rằng nếu tại $x \in A$ mà

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists i > n \text{ sao cho } |f_i(x) - f(x)| \geq \delta$$

thì $f_n(x) \not\to f(x)$ và do đó $x \in B$. Vậy

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A\left[|f_i - f| \geq \delta\right] \subset B.$$

Do đó nếu ta đặt $C_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$ và $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ thì $C \in \mathcal{A}$, $C \subset B$ và $\mu C = 0$.

Mặt khác, để ý rằng $C_n \supset C_{n+1}$, mọi $n \in \mathbf{N}$ và $\mu C_1 \leq \mu A < +\infty$ nên

$$\lim_{n\to\infty} \mu C_n = \mu C = 0.$$

Từ đây, vì $\mu A_n \leq \mu C_n$, mọi $n \in \mathbf{N}$ nên $\lim_{n\to\infty} \mu A_n = 0$, nghĩa là $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ∎

5.5.4 Nhận xét.

(i) Giả thiết $\mu A < +\infty$ trong Định lí 5.5.3 là quan trọng và không thể bỏ được. Nghĩa là sự hội tụ h.k.n. của một dãy hàm đo được trên A với $\mu A = +\infty$ nói chung không kéo theo sự hội tụ theo độ đo của dãy hàm này. Ta hãy xem một ví dụ.

Lấy $E = (0, +\infty) \subset \mathrm{IR}$ với độ đo Lebesgue. Mỗi $k \in \mathbf{N}$, đặt

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 < x \leq k, \\ 1 & \text{nếu } x > k. \end{cases}$$

Khi đó rõ ràng $f_k(x) \to 0$ mọi $x \in (0, \infty)$. Tuy nhiên, với mọi $k \in \mathbf{N}$,

$$\mu A\left[f_k > \frac{1}{2}\right] = +\infty,$$

và do đó $(f_k)_k$ không hội tụ theo độ đo về hàm $f \equiv 0$.

(ii) Một dãy hội tụ theo độ đo có thể không hội tụ hầu khắp nơi. Chẳng hạn, xét $A = [0, 1]$ và với mỗi $n \in \mathbf{N}$ ta lập n hàm số như sau

$$f_{ni}(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \dfrac{i-1}{n} \le x < \dfrac{i}{n}, \\ 0 & \text{tại mọi điểm còn lại.} \end{cases}$$

Sắp xếp các hàm này lại $(n \in \mathbf{N}, i = 1, \dots, n)$, ta được dãy $\varphi_1 = f_{11}$, $\varphi_2 = f_{21}$, $\varphi_3 = f_{22}$, $\varphi_4 = f_{31}$, $\varphi_5 = f_{32}$, $\varphi_6 = f_{33}$, $\varphi_7 = f_{41}, \dots$

Đặt $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$. Khi đó với mọi $n \in \mathbf{N}$,

$$\mu A[f_{nm} \ne f] = \frac{1}{n}$$

nên $(\varphi_n)_n$ hội tụ theo độ đo về f nhưng dễ thấy rằng tại mỗi $x \in A$ trong dãy $(\varphi_n)_n$ có vô số hàm nhận giá trị 1 tại x và cũng có vô số hàm nhận giá trị 0 tại điểm này. Nghĩa là $(\varphi_n(x))_n$ không có giới hạn. Tuy nhiên ta có định lí sau.

5.5.5 Định lí. *Giả sử $(f_n)_n$ là dãy các hàm đo được trên A, $f_n \xrightarrow{\mu} f$, $n \to \infty$. Khi đó có một dãy con $(f_{n_k})_{k \in \mathbf{N}}$ của dãy $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sao cho $f_{n_k} \to f$ h.k.n. trên A.*

Chứng minh. Ta chọn một dãy số $(\eta_n)_n$ sao cho $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \eta_n < +\infty$. Khi đó do $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A nên với mỗi $k \in \mathbf{N}$, tồn tại $n(k) \in \mathbf{N}$ sao cho với mọi $n \ge n(k)$, ta có :

$$\mu A\left[|f_n - f| \ge \frac{1}{k}\right] < \eta_k.$$

Ta hãy lập dãy con $(f_{n_k})_k$ của $(f_n)_n$ bằng cách lấy các chỉ số n_k như sau :

$$n_1 = n(1),\ n_2 = \max\{n_1 + 1, n(2)\}, \dots,$$
$$n_k = \max\{n_{k-1} + 1, n(k)\}, \dots$$

Khi đó

$$\mu A\left[|f_{n_k} - f| \ge \frac{1}{k}\right] < \eta_k, \text{ mọi } k \in \mathbf{N}.$$

Đặt

$$B_i = \bigcup_{k=i}^{\infty} A\left[\left|f_{n_k} - f\right| \geq \frac{1}{k}\right] \text{ và } B = \bigcap_{i=1}^{\infty} B_i$$

thì

$$\mu B \leq \mu B_i \leq \sum_{k=i}^{\infty} \mu A\left[\left|f_{n_k} - f\right| \geq \frac{1}{k}\right] \leq \sum_{k=i}^{\infty} \eta_k.$$

Vì $\lim\limits_{i\to\infty} \sum\limits_{k=i}^{\infty} \eta_k = 0$ nên $\mu B = 0$.

Bây giờ nếu $x \in A \setminus B$ thì $x \notin B$ và do đó có $i_0 \in \mathbf{N}$ để $x \notin B_{i_0}$. Nghĩa là với mọi $k \geq i_0$ thì $\left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| \leq \frac{1}{k}$. Vậy $f_{n_k}(x) \to f(x)$ khi $k \to \infty$. Vì $\mu B = 0$ nên $f_{n_k} \to f$ hầu khắp nơi trên A ∎

BÀI TẬP

Trong tất cả các bài tập sau đây khi ta nói đến không gian đo được $(X, \mathcal{A})$ hay không gian độ đo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ thì $\mathcal{A}$ luôn được hiểu là một $\sigma-$ đại số.

5.1. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$ và $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm số. Chứng tỏ rằng các mệnh đề sau là tương đương.

(a) f đo được trên A,

(b) $\forall r \in \mathbf{Q},\ A[f(x) > r] \in \mathcal{A}$,

(c) $\forall r \in \mathbf{Q},\ A[f(x) \geq r] \in \mathcal{A}$,

(d) $\forall r \in \mathbf{Q},\ A[f(x) < r] \in \mathcal{A}$,

(e) $\forall r \in \mathbf{Q},\ A[f(x) \leq r] \in \mathcal{A}$.

5.2. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$ và $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ là các hàm đo được. Chứng tỏ rằng các tập sau đều là các tập đo được (nghĩa là thuộc $\mathcal{A}$).

(i) $\{x \in A \mid f(x) < g(x)\}$,

(ii) $\{x \in A \mid f(x) \geq g(x)\}$,

(iii) $\{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$.

5.3. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$, $f : A \to \overline{\text{IR}}$ là một hàm đo được và p là một số nguyên dương. Chứng tỏ rằng hàm số sau là đo được trên A

$$h(x) = \begin{cases} |f(x)|^p & \text{nếu } f(x) \text{ hữu hạn,} \\ \beta- & \text{nếu } f(x) = -\infty, \\ \beta+ & \text{nếu } f(x) = +\infty \end{cases}$$

trong đó $\beta-$, $\beta+$ là các số tuỳ ý trong $\overline{\text{IR}}$.

5.4. Giả sử rằng f, f_k, $(k \in \mathbf{N})$ là các hàm đo được trên $A \in \mathcal{A}$. Chứng tỏ rằng

$$\{x \in A \mid f_n(x) \to f(x),\ n \to \infty\} \in \mathcal{A}.$$

5.5. Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo $E \in \mathcal{A}$ và $(f_n)_n$ là một dãy các hàm đo được trên E. Giả sử $f_n \to f$ h.k.n. trên $E (n \to \infty)$. Chứng tỏ rằng :

a) Tồn tại một hàm g đo được trên E và $g \sim f$.

b) Tập $\{x \in E \mid f_n(x) \not\to f(x)\}$ là đo được và có độ đo bằng không.

5.6. Giả sử $\mu A < +\infty$ và $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ là một dãy các hàm đo được, hội tụ h.k.n. trên A về một hàm đo được f và $\epsilon > 0$ là một số cho trước. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$ ta đặt

$$A_k = \bigcup_{p=k} A\left[|f_p - f| \geq \epsilon\right].$$

Chứng tỏ rằng $\mu A_k \to 0$ khi $n \to \infty$.

5.7. Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được với $\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số, $A \in \mathcal{A}$ và $f : A \to \text{IR}$. Chứng minh rằng các mệnh đề sau tương đương.

(a) f là $\mathcal{A}-$ đo được,

(b) $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ với mọi tập Borel B trong IR,

(c) $\forall r \in \mathbf{Q}$, $\{x \in A \mid f(x) \geq r\} \in \mathcal{A}$.

5.8. Cho X là một tập khác rỗng, $(S, \mathcal{D}, \mu)$ là một không gian độ đo với $\mathcal{D}$ là một $\sigma-$ đại số và $f : X \to S$ là một song ánh. Đặt

$$\mathcal{A} = f^{-1}(\mathcal{D}) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{D}\},$$

$$\tilde{\mu}(B) = \mu A \text{ nếu } B = f^{-1}(A).$$

a) Chứng tỏ rằng $\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số và $(X, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$ là một không gian độ đo.

b) Chứng tỏ rằng nếu $g : S \to \overline{\text{IR}}$ là một hàm $\mathcal{D}-$ đo được thì hàm hợp $g \circ f : X \to \overline{\text{IR}}$ là $\mathcal{A}-$đo được.

5.9. Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo, $A \in \mathcal{A}$. Giả sử f là một hàm đo được, hữu hạn hầu khắp nơi trên A. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, đặt

$$A_n = \{x \in A \mid |f(x)| \leq n\}.$$

(a) Chứng tỏ rằng $A_n \in \mathcal{A}$, mọi $n \in \mathbf{N}$ và $\lim\limits_{n \to \infty} \mu A_n = \mu A$.

(b) Giả sử $\mu A < +\infty$. Chứng tỏ rằng với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$ sao cho f bị chặn trên B và $\mu(A \setminus B) < \epsilon$.

5.10. Chứng tỏ rằng nếu f đo được trên mọi đoạn $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ thì f đo được trên $[a, b]$.

5.11. Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo và $A \in \mathcal{A}$. Chứng tỏ rằng

(a) Nếu $f \sim g$ trên A và $(f_n)_n$ hội tụ h.k.n. đến f trên A thì $(f_n)_n$ hội tụ h.k.n. đến g trên A,

(b) $(f_n)_n$ hội tụ h.k.n. đến f và $(f_n)_n$ hội tụ h.k.n. đến g trên A thì $f \sim g$ trên A.

5.12. Cho $(f_n)_n$ là dãy các hàm đo được trên A. Giả sử rằng $f_n \xrightarrow{\mu} 0$ khi $n \to \infty$. Chứng minh rằng

$$\frac{|f_n|}{1+|f_n|} \xrightarrow{\mu} 0.$$

5.13. Giả sử $(f_n)_n$ là dãy các hàm đo được trên A và $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A. Chứng tỏ rằng nếu $f_n \geq 0$ h.k.n. trên A thì $f \geq 0$ h.k.n. trên A.

5.14. Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo, $A \in \mathcal{A}$ và $\mu A < +\infty$. $(f_n)_n$ và $(g_n)_n$ là các dãy gồm các hàm đo được, hữu hạn trên A thoả mãn $f_n \xrightarrow{\mu} f$ và $g_n \xrightarrow{\mu} g$. Chứng tỏ rằng $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$. Khẳng định còn đúng không khi $\mu A = +\infty$.

5.15. Giả sử $(f_n)_n$ và $(g_n)_n$ là các dãy gồm các hàm đo được, hữu hạn trên A thoả mãn $f_n \xrightarrow{\mu} f$ và $g_n \xrightarrow{\mu} g$ (f, g cũng đo được, hữu hạn trên A). Chứng minh rằng

$$\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{\mu} \alpha f + \beta g, \text{ mọi } \alpha, \beta \in \mathrm{IR}$$

5.16. A là tập đo được, $f_n, f : A \to \mathrm{IR}$ là những hàm đo được, $n \in \mathbf{N}$ và $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Chứng tỏ rằng các khẳng định sau là đúng.

(a) $f_n^+ \xrightarrow{\mu} f^+$,

(b) $f_n^- \xrightarrow{\mu} f^-$,

(c) $|f_n| \xrightarrow{\mu} |f|$

trong đó các hàm f_n^+, f_n^- được định nghĩa như sau (f^+, f^- cũng được định nghĩa tương tự).

$f_n^+(x) = \max\{f_n(x), 0\}$; $f_n^-(x) = -\min\{f_n(x), 0\}$, $x \in A$.

5.17. Trên IR^n ta xét độ đo Lebesgue μ. Giả sử $A \subset \mathrm{IR}^n$, $\mu A < +\infty$ và $f : A \to \mathrm{IR}$ là một hàm số (hữu hạn). Chứng tỏ rằng nếu với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một tập đóng $F \subset A$ sao cho $\mu(A \setminus F) < \epsilon$ và f liên tục trên F thì f đo được trên A[*].

---

[*] Đây cũng là điều kiện cần và đủ để f đo được trên A.

BÀI TẬP ÔN

Bài O1.

Cho X là một tập khác rỗng tuỳ ý và $(S, \Im, \mu)$ là một không gian độ đo với $\Im$ là một $\sigma-$ đại số. Giả sử $f: X \to S$ là một song ánh. Đặt

$$\mathcal{A} = f^{-1}(\Im) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \Im\},$$

và $\tilde{\mu}: \mathcal{A} \to \overline{\mathrm{IR}}$ xác định với mọi $B \in \mathcal{A}$, $B = f^{-1}(A)$, $\tilde{\mu}(B) = \mu A$.

a) Chứng minh rằng $\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số và $(X, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$ là một không gian độ đo.

b) Với mọi hàm $\Im-$ đo được $g: S \to \overline{\mathrm{IR}}$, hàm $g \circ f: X \to \overline{\mathrm{IR}}$ là $\mathcal{A}-$ đo được.

Bài O2.

Cho $((S, \Sigma, \mu_i))_{i \in \mathbf{N}}$ là một họ các không gian độ đo với Σ là một $\sigma-$ đại số và có một số $c \in \mathrm{IR}$ sao cho $\mu_i(S) \le c < +\infty$, mọi $i \in \mathbf{N}$. Giả sử $\mu: \Sigma \to \overline{\mathrm{IR}}$ là một hàm tập xác định bởi

$$\mu A = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \mu_i A, \ A \in \Sigma.$$

Chứng minh rằng μ là một độ đo trên Σ.

Bài O3.

(Độ đo trên một tập đo được) Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo với $\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số và $A \in \mathcal{A}$. Gọi $\mathcal{A}_A$ là $\sigma-$ đại số định nghĩa ở Bài 1.8 và μ_A là thu hẹp của μ lên $\mathcal{A}_A$. Chứng tỏ rằng $(X, \mathcal{A}_A, \mu_A)$ là một không gian độ đo.

Bài O4.

Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được và (S, d) là một không gian mêtric. Một ánh xạ $f: X \to S$ sẽ được gọi là *đo được* nếu với mọi tập mở $G \subset S$ ta đều có $f^{-1}(G) \in \mathcal{A}$.

a) Chứng tỏ rằng $f : X \to S$ là đo được khi và chỉ khi $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ với mọi tập Borel B trong S.

b) Giả sử Y là một không gian mêtric và $g : S \to Y$ liên tục còn $f : X \to S$ đo được. Chứng tỏ rằng $g \circ f$ là một ánh xạ đo được.

Bài O5.

Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $u, v : X \to \mathrm{IR}$ là các hàm số đo được còn $\Phi : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}$ là một hàm số liên tục.

a) Chứng tỏ rằng ánh xạ $f : X \to \mathrm{IR}^2$ xác định bởi $f(x) = (u(x), v(x))$ mọi $x \in X$ là đo được.

b) Hàm $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$ là một hàm đo được từ X vào IR.

c) Bằng cách đặt $\Phi_1(s, t) := t + s$, $\Phi_2(s, t) := t.s$ hãy sử dụng các kết quả trên để suy ra rằng các hàm $u + v$, $u.v$ đều đo được.

[Hướng dẫn :

a) Chú ý kết quả : mỗi tập mở trong IR^2 là hợp của một số không quá đếm được các tập có dạng $I_1 \times I_2$ (hình hộp mở) trong đó I_1, I_2 là các khoảng mở trong IR (các hình hộp mở này không nhất thiết rời nhau từng đôi).

b) Để chứng minh h là đo được, hãy sử dụng kết quả Bài O4].

Bài O6.

Cho (X, Σ, μ) là một không gian độ đo với Σ là một $\sigma -$ đại số và $(E_k)_{k \in N} \subset \Sigma$ sao cho

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < +\infty.$$

Gọi A là tập gồm tất cả những $x \in X$ sao cho x thuộc vào một số vô hạn những tập E_k của họ nói trên.

a) Chứng tỏ rằng $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$. Từ đây suy ra rằng A là đo được.

b) Chứng tỏ rằng $\mu A = 0$. Hãy phát biểu lại kết quả này dưới ngôn ngữ "h.k.n." hay "với hầu hết các $x \in X$ ".

Bài O7.

(Đầy đủ hoá một độ đo) Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo ($\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số). Gọi

$\mathcal{A}' = \{Z \in \mathcal{P}(X) \mid \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A}, A_1 \subset Z \subset A_2$ và $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0\}$.

Khi đó mỗi $Z \in \mathcal{A}'$ có $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ sao cho $A_1 \subset Z \subset A_2$ và $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$. Ta đặt $\mu' Z = \mu A_1$. Chứng tỏ rằng

a) $\mathcal{A}'$ là một $\sigma-$ đại số,

b) μ' là một độ đo trên $\mathcal{A}'$,

c) μ' là độ đo đủ và μ' là một mở rộng của μ lên $\mathcal{A}'$.

d) $(X, \mathcal{A}', \mu')$ là mở rộng đầy đủ tối tiểu của $(X, \mathcal{A}, \mu)$ theo nghĩa : Nếu (X, Σ, ν) là một mở rộng khác của $(X, \mathcal{A}, \mu)$ và ν là độ đo đủ thì $\mathcal{A}' \subset \Sigma$ và $\nu_{|\mathcal{A}'} = \mu'$.

Bài O8.

Gọi N là tập các số tự nhiên và $\mathcal{A} = \mathcal{P}(N)$. Xét hàm tập $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ định nghĩa bởi :

$$\mu(A) = \begin{cases} n & \text{nếu } A \text{ có } n \text{ phần tử,} \\ +\infty & \text{nếu } A \text{ vô hạn.} \end{cases}$$

a) Chứng minh μ là một độ đo $\sigma-$ hữu hạn trên $\mathcal{A}$.

b) Hãy chỉ ra trong không gian độ đo $(\mathbf{N}, \mathcal{A}, \mu)$ một dãy $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ sao cho $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$ nhưng $\mu(\bigcap_n A_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$.

Bài O9.

Giả sử X là một không gian mêtric mà họ các tập mở tạo thành một $\sigma-$ đại số. Hãy xác định họ các tập mở của không gian này.

Bài O10.

Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo và $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$. Chứng minh rằng

(i) $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n)) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu A_n$,

(ii) $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n)) \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \mu A_n$ nếu $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n) < \infty$,

(iii) Giả sử thêm rằng

$$(\bigcup_{k=1}^{\infty}(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n)) = (\bigcap_{k=1}^{\infty}(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n)) = B \text{ và } \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n) < \infty.$$

Hãy chứng tỏ $\lim_{n\to\infty} \mu A_n$ tồn tại và $\lim_{n\to\infty} \mu A_n = \mu B$.

[Hướng dẫn : (i) Để ý rằng

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n=2}^{\infty} A_n \subset \cdots \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \subset \cdots$$

và $\mu(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n) \leq \mu A_k$ mọi $k \in \mathrm{N}$].

Bài O11.

Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được và hàm $f : X \to [0, \infty]$. Hàm tập hợp $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ được định nghĩa bởi $\mu(A) = \sum_{x\in A} f(x)$ nếu $A \neq \emptyset$ và A hữu hạn hoặc đếm được, $\mu(\emptyset) = 0$ và $\mu(A) = \infty$ nếu A không đếm được. Chứng minh rằng μ là một độ đo trên $\mathcal{A}$.

Bài O12.

Cho $(E_n)_n$ là một dãy các tập con đo được Lebesgue của $[0, 1]$ thoả mãn $\lim_{n\to\infty} \mu E_n = 1$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha < 1$, tồn tại một dãy con $(E_{n_k})_k \subset (E_n)_n$ sao cho $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_k}) > \alpha$.

Bài O13.

Trên IR ta xét độ đo Lebesgue μ. Giả sử $E \subset \mathrm{IR}$. Chứng minh các khẳng định sau

a) $m^* E = \inf\{\mu G \mid G \text{ mở}, G \supset E\}$,

b) Nếu E đo được Lebesgue thì

$$\mu E = \sup\{\mu F \mid F \text{ đóng}, F \subset E\}.$$

c) Nếu E đo được Lebesgue thì

$$\mu E = \sup\{\mu K \mid K \text{ compact}, K \subset E\}.$$

Bài O14.

(Steinhaus) Chứng minh rằng nếu $A \subset \mathrm{IR}$ là tập đo được Lebesgue và $\mu A > 0$ thì 0 là một điểm trong của tập $A - A$, trong đó $A - A = \{x - y \mid x, y \in A\}$.

[Hướng dẫn. Sử dụng Bài O13 để có $K \subset A$, $U \supset K$, U mở, K compact sao cho $\mu U < 2\mu K$. Gọi $\delta = d(K, \mathrm{IR} \setminus U) > 0$. $(-\delta, \delta)$ là lân cận của 0 cần tìm].

Bài O15.

Cho (X, Σ) là một không gian đo được, $f : X \to \overline{\mathrm{IR}}$ và $Y = f^{-1}(\mathrm{IR})$. Khi đó f là đo được khi và chỉ khi $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \Sigma$, $f^{-1}(\{\infty\}) \in \Sigma$ và f là đo được trên Y.

Bài O16.

Giả sử $(f_k)_k$ là một dãy các hàm đo được hội tụ theo độ đo về hàm f trên A. Chứng minh rằng $(f_k)_k$ là dãy cơ bản theo độ đo, nghĩa là

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{k, i \to \infty} \mu\left\{x \in A \middle| \left|f_k(x) - f_i(x)\right| \geq \epsilon\right\} = 0.$$

Bài O17.

Giả sử $(f_k)_k$ là một dãy các hàm đo được trên A với giá trị trong IR, thoả mãn điều kiện

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{k, i \to \infty} \mu\left\{x \in A \middle| \left|f_k(x) - f_i(x)\right| \geq \epsilon\right\} = 0.$$

Chứng tỏ rằng khi đó tồn tại một dãy con $(f_{k_i})_i$ của $(f_k)_k$ sao cho $(f_{k_i})_i$ hội tụ h.k.n. trên A về một hàm có giá trị hữu hạn và đo được trên A.

Bài O18.

Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được với $\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số và $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ là một dãy các hàm số đo được trên X và nhận giá trị thực. Chứng tỏ rằng tập hợp E gồm những $x \in X$ sao cho dãy $(f_n(x))_n$ hội tụ là một tập đo được (nghĩa là $E \in \mathcal{A}$).

[Hướng dẫn : E là tập tất cả những điểm $x \in X$ sao cho $(f_n(x))_n$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$].

Bài O19.

Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi. Hãy chứng tỏ rằng đạo hàm f' của nó là một hàm đo được (Borel hay Lebesgue).

[Hướng dẫn : Xét dãy hàm $(g_n)_n$ xác định bởi

$$g_n(x) = n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right],\ n \in \mathbf{N}].$$

Bài O20.

Giả sử $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$ và $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Khi đó f là $\mathcal{A}-$ đo được (trên A) khi và chỉ khi

(i) $f^{-1}(\{-\infty\}) \in \mathcal{A}$ và $f^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathcal{A}$.

(ii) $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ với mọi tập Borel B trong $\mathbb{R}$.

Bài O21.

Cho $(X, \mathcal{A})$ là một không gian đo được, $A \in \mathcal{A}$ và $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ là các hàm đo được. Gọi $h, k, l : A \to \overline{\mathbb{R}}$ là các hàm xác định lần lượt như sau, $x \in A$,

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(x)} & \text{nếu } f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \beta_0 & \text{nếu } f(x) = 0, \\ \beta+ & \text{nếu } f(x) = +\infty, \\ \beta- & \text{nếu } f(x) = -\infty, \end{cases}$$

$$k(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{nếu } f(x) + g(x) \text{ có nghĩa,} \\ \beta & \text{tất cả các trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

$$l(x)=\begin{cases} f(x).g(x) & \text{nếu } f(x).g(x) \text{ có nghĩa,} \\ \beta & \text{các trường hợp còn lại,} \end{cases}$$

trong đó β, β_-, β_+ là các số tuỳ ý thuộc $\overline{\text{IR}}$. Chứng tỏ rằng h, k, l là các hàm đo được trên A.

Bài O22.

Cho $f:\text{IR}\to\text{IR}$. Giả sử rằng tồn tại $C>0$ sao cho

$$|f(x)-f(y)|\le C|x-y|, \text{ mọi } x,y\in\text{IR}.$$

Chứng tỏ rằng nếu $A\subset\text{IR}$ và $\mu A=0$ thì $\mu(f(A))=0$ (μ là độ đo Lebesgue).

[Hướng dẫn. Trước hết hãy chứng tỏ rằng nếu I là một khoảng mở bị chặn thì $\mu(f(I))\le C.\mu I$.]

Bài O23.

Giả sử $f:\text{IR}\to\text{IR}$ là hàm thoả mãn điều kiện

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \text{ với mọi } x,\ y\in\text{IR}.$$

Chứng minh các khẳng định sau

a) $f(rx)=rf(x)$ mọi $x\in\text{IR}$ và mọi $r\in\mathbf{Q}$,

b) Nếu f bị chặn ở trên một khoảng không rỗng nào đó thì f liên tục tại 0,

c) Nếu f liên tục tại một điểm nào đó, chẳng hạn tại 0, thì f liên tục trên IR,

d) Nếu f liên tục trên IR thì $f(x)=ax$ với mọi $x\in\text{IR}$, trong đó $a=f(1)$.

e) Nếu f là hàm đo được Lebesgue thì $f(x)=ax$ với mọi $x\in\text{IR}$.

[Hướng dẫn. a) Cố định $x\in\text{IR}$, xét lần lượt các trường hợp $r=0$, $r\in\mathbf{N}$, $r\in\mathbf{Z}$, và $r\in\mathbf{Q}$,

b) Không mất tính tổng quát, có thể giả sử f bị chặn trên một khoảng $(-\epsilon,\ \epsilon)$ nào đó.

c) Sử dụng câu a).

e) Hãy chứng tỏ rằng tồn tại một số $n\in\mathbf{N}$ sao cho $E=f^{-1}([-n,\ n])$ có độ đo dương. Sau đó áp dụng Bài tập O14 và câu b).

Chương 4.

TÍCH PHÂN LEBESGUE

Khái niệm tích phân Riemann chỉ có thể áp dụng được cho những hàm bị chặn, xác định trên các tập trong $\mathbb{R}^n$ và không có "quá nhiều" các điểm gián đoạn. Những hạn chế này làm cho tích phân Riemann không đáp ứng được những yêu cầu của nhiều vấn đề khoa học. Năm 1902, H. Lebesgue, trong công trình của mình[*], đã đưa ra một khái niệm tích phân đặt cơ sở trên lí thuyết độ đo (ngày nay ta gọi là tích phân Lebesgue) mở rộng khái niệm tích phân Riemann. Ý tưởng cơ bản của tích phân Lebesgue là ở chỗ thay vì nhóm các điểm gần nhau của biến x như ở tích phân Rieman mà nhóm các điểm mà tại đó các giá trị của hàm gần nhau. Tích phân Lebesgue có những thuận lợi cơ bản là ta có thể định nghĩa tích phân cho các hàm đo được, bị chặn cũng như không bị chặn và cho phép miền xác định của hàm có thể là các tập rất tổng quát (trong các không gian độ đo, không nhất thiết là $\mathbb{R}^n$). Hơn nữa, và cũng là quan trọng nhất, đối với tích phân Lebesgue ta có các định lí chuyển qua giới hạn dưới dấu tích phân mạnh hơn và thuận tiện hơn so với tích phân Riemann.

Trong suốt chương này $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo với $\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số và A là một tập đo được nào đó $(A \in \mathcal{A})$.

---

[*] H. Lebesgue (1902) Intégrale, longeur, aire, *Annali Math. Pura Appl., ser. 3,7* pp. 231 259

§ 1. KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN LEBESGUE

1.1 Tích phân các hàm đơn giản không âm.

Ta sẽ kí hiệu $\mathcal{S}_A^+$ là tập tất cả các hàm đơn giản không âm (đo được) trên $A \in \mathcal{A}$. Giả sử $f \in \mathcal{S}_A^+$ thì f có thể biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{X} A_i(x),\ x \in A \tag{1.1}$$

trong đó các số $\alpha_i \geq 0$, các tập A_i đo được, rời nhau từng đôi một, $i = 1, 2, \dots, n$ và $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$.

1.1.1 Định nghĩa. *Tích phân* của hàm đơn giản không âm f trên A theo độ đo μ, kí hiệu là $\int_A f(x)d\mu(x)$ hay $\int_A f(x)d\mu$ hay gọn hơn $\int_A fd\mu$, là số $\sum_1^n \alpha_i \mu A_i$. Vậy

$$\int_A f(x)d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu A_i. \tag{1.2}$$

Rõ ràng rằng nếu $\mu A = 0$ thì $\int_A fd\mu = 0$.

Nếu $f \in \mathcal{S}_A^+$ và E là một tập con đo được của A thì $f_{|E}$ là hàm đơn giản không âm trên E và ta định nghĩa *tích phân của f trên E* là tích phân của $f_{|E}$ trên E.

$$\int_E fd\mu := \int_E f_{|E} d\mu.$$

Dễ thấy rằng nếu f có biểu diễn (1.1) thì

$$\int_E fd\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \int_A f\mathcal{X}_E d\mu. \tag{1.3}$$

1.1.2 Nhận xét. Định nghĩa 1.1.1 là hợp lí vì nếu f có một biểu diễn khác, chẳng hạn :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mathcal{X} B_j(x),\ x \in A$$

($\beta_j \geq 0$, β_j đo được, rời nhau từng đôi một và $\bigcup_{j=1}^{m} B_j = A$) thì

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu A_i = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu B_j.$$

Thật vậy, với mỗi $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ta có

$$A_i = A_i \cap A = A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{m} \left(A_i \cap B_j\right).$$

Các tập $A_i \cap B_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ là rời nhau từng đôi và nếu $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ thì $\alpha_i = \beta_j$. Do đó $\mu A_i = \sum_{j=1}^{m} \mu\left(A_i \cap B_j\right)$ và

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu A_i &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \mu\left(A_i \cap B_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu\left(A_i \cap B_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \beta_i \mu\left(A_i \cap B_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu\left(A_i \cap B_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mu\left(A_i \cap B_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu B_j.\end{aligned}$$

Từ đây về sau để cho gọn nếu $(f_n)_n$ là một dãy đơn điệu không giảm (không tăng) các hàm trên A, nghĩa là $f_n \leq f_{n+1}$ trên A, $n \in \mathbf{N}$ $(f_n \geq f_{n+1}$ trên $A)$ và hội tụ đến hàm g trên A thì ta sẽ viết $f_n \nearrow g\left(f_n \searrow g\right)$. Một số tính chất đơn giản khác của tích phân các hàm đơn giản không âm được cho trong mệnh đề sau.

1.1.3 Mệnh đề. *Với mọi* $f, g \in S_A^+$, $(f_n)_n$, $(g_n)_n \subset S_A^+$, *mọi* $\alpha, \beta \in IR$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, *các khẳng định sau là đúng.*

(i) $\int_A (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_A f d\mu + \beta \int_A g d\mu$,

(ii) Nếu $A = B \cup C$ *và* $B \cap C = \emptyset$ *thì*

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu + \int_C f d\mu,$$

(iii) Nếu $f \leq g$ *trên* A *thì* $\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$.

(iv) Nếu $f_n \nearrow g$ *thì*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A g d\mu.$$

(v) Nếu $f_n \le f_{n+1}$ *và* $g_n \le g_{n+1}$ *mọi* $n \in \mathbf{N}$ *và* $\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$ *thì tồn tại các giới hạn* $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$, $\lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu$ *và*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu. \tag{1.4}$$

Chứng minh.

(i) Dễ thấy rằng nếu $c \in \mathrm{IR}$ và $c \ge 0$ thì $cf \in \mathcal{S}_A^+$ và $\int_A cf d\mu = c\int_A f d\mu$. Do đó để chứng minh công thức ở (i) ta chỉ cần phải chứng minh

$$\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu. \tag{1.5}$$

Giả sử f, g lần lượt có biểu diễn

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi A_i(x),\ g(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}(x),\ x \in A.$$

Với các kí hiệu, lập luận tương tự như trong Nhận xét 1.1.2 với lưu ý rằng trên tập $A_i \cap B_j$ hàm $f+g$ nhận giá trị $\alpha_i + \beta_j$. Ta được

$$\begin{aligned}
\int_A (f+g) d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu A_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu B_j \\
&= \int_A f d\mu + \int_A g d\mu.
\end{aligned}$$

chính là (1.5).

(ii) Giả sử f có biểu diễn (1.1) với $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A = B \cup C$. Khi đó, mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$, $A_i = (B \cap A_i) \cup (C \cap A_i)$ và do B và C rời nhau nên $B \cap A_i$, $C \cap A_i$ cũng rời nhau. Bây giờ khẳng định ở (ii) được suy ra từ (1.2) và (1.3).

(iii) Chứng minh hoàn toàn tương tự như ở (i) và chỉ cần lưu ý rằng trên mỗi tập $A_i \cap B_j$ (kí hiệu như trong chứng minh (i)) thì $f(x) = \alpha_i \le g(x) = \beta_j$.

(iv) Giả sử $g(x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i XA_i$, với $A_i\cap A_j=\emptyset$, $i\neq j$ và $A=\bigcup_{i=1}^{m}A_i$. Cố định $t\in(0,1)$ và đặt, với mỗi $k\in\mathbf{N}$, mỗi $i=1, 2, ..., m$,

$$A_{i,k}:=\left\{x\in A_i \mid f_k(x)\geq t\alpha_i\right\}.$$

Rõ ràng rằng với mỗi i, k tập $A_{i,k}$ là tập đo được. Hơn nữa do $f_k\leq f_{k+1}$ nên $A_{i,k}\subset A_{i,k+1}$. Hiển nhiên rằng $\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{i,k}\subset A_i$. Còn nếu $x\in A_i$ thì do $f_n(x)\to g(x)=\alpha_i$ và $t\in(0,1)$ nên có $k\in\mathbf{N}$ sao cho $f_k(x)>t\alpha_i$. Nghĩa là $x\in A_{i,k}$ và do đó $x\in\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{i,k}$. Vậy $A_i=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{i,k}$, $i=1, 2, ..., m$. Theo tính chất của độ đo, mỗi $i=1, 2, ..., m$,

$$\mu A_i=\lim_{k\to\infty}\mu A_{i,k}. \tag{*}$$

Bây giờ ta đặt $s_n(x):=\sum_{i=1}^{m}t\alpha_{iXA_{i,n}}(x)$, $x\in A$, $n\in\mathbf{N}$. Khi đó với mọi $n\in\mathbf{N}$, $x\in A$, ta có $s_n(x)\leq f_n(x)\leq g(x)$.

Theo (iii) ta được

$$\int_A s_n d\mu=t\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu A_{i,n}\leq\int_A f_n d\mu\leq\int_A g d\mu. \tag{**}$$

Cho $n\to\infty$ trong (**) và để ý đến (*), ta được

$$t\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mu A_i=t\int_A g d\mu\leq\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu\leq\int_A g d\mu.$$

Lại cho $t\to 1$ trong bất đẳng thức này ta được

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu=\int_A g d\mu.$$

(v) Trước hết để ý rằng theo (iii), các dãy $\left(\int_A f_n d\mu\right)_n$ và $\left(\int_A g_n d\mu\right)_n$ là đơn điệu không giảm nên $\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu$ và $\lim_{n\to\infty}\int_A g_n d\mu$ tồn tại. Ta còn chứng minh (1.4)

Cố định $m\in\mathbf{N}$ và đặt $h_n(x)=\min\{f_n, g_m\}$, $n\in\mathbf{N}$. Dễ thấy rằng $h_n\in\mathcal{S}_A^+$ mọi $n\in\mathbf{N}$ và $(h_n)_n$ đơn điệu không giảm do $(f_n)_n$ không giảm. Mặt khác vì $f_n\nearrow\lim_n f_n=\lim_n g_n$ và $\lim_n g_n\geq g_m$ nên $h_n\nearrow g_m$ khi $n\to\infty$. Theo (iv),

$$\lim_{n\to\infty} \int_A h_n d\mu = \int_A g_m d\mu.$$

Lại vì $h_n \le f_n$ mọi $n \in \mathbf{N}$ nên $\int_A h_n d\mu \le \int_A f_n d\mu$ và do đó

$$\int_A g_m d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A h_n d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Bất đẳng thức này đúng với bất kì $m \in \mathbf{N}$ nên khi $m \to \infty$ ta được

$$\lim_{m\to\infty} \int_A g_m d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có bất đẳng thức ngược lại và (1.4) được chứng minh ∎

1.2 Tích phân của hàm đo được không âm.

Cho $f : A \to \overline{\mathrm{IR}}$ là một hàm đo được và không âm trên A. Theo định lí về cấu trúc của hàm đo được, tồn tại một dãy các hàm đơn giản không âm $(f_n)_n$ trên A sao cho

$$0 \le f_n \le f_{n+1} \text{ mọi } n \in \mathbf{N} \text{ và } f_n \nearrow f,\ n \to \infty.$$

Giới hạn $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$ tồn tại và là một số thực không âm hay $+\infty$. Ta đi đến định nghĩa sau.

1.2.1 Định nghĩa. Ta định nghĩa *tích phân* của hàm đo được không âm f trên A theo độ đo μ, kí hiệu là $\int_A f d\mu$ hay $\int_A f(x) d\mu(x)$, là số $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$. Vậy

$$\int_A f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Định nghĩa trên là hợp lí vì $\int_A f d\mu$ không phụ thuộc vào việc chọn các dãy hàm đơn giản không âm hội tụ đến f (Mệnh đề 1.1.3 (v)). Cũng để ý rằng tích phân của một hàm đo được $f \ge 0$ luôn tồn tại và thuộc $[0, \infty]$.

1.3 Tích phân của hàm đo được.

Bây giờ giả sử $f : A \to \overline{\mathrm{IR}}$ là hàm đo được bất kì.

Khi đó nếu đặt $f^+ := \max\{f, 0\}$, $f^- := -\min\{f, 0\}$ thì f^+ và f^- là những hàm đo được không âm trên A và $f = f^+ - f^-$,

$|f| = f^+ + f^-$. Theo Định nghĩa 1.2.1, các tích phân $\int_A f^+ d\mu$ và $\int_A f^- d\mu$ tồn tại và là các số thực không âm hay $+\infty$. Một cách tự nhiên ta đi đến định nghĩa sau.

1.3.1 Định nghĩa. Nếu một trong hai tích phân $\int_A f^+ d\mu$ và $\int_A f^- d\mu$ là hữu hạn thì ta định nghĩa *tích phân* của f trên A (theo độ đo μ), kí hiệu là $\int_A f d\mu$ hay $\int_A f(x) d\mu(x)$, là số

$$\int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

Vậy

$$\int_A f d\mu := \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

Để ý là nếu tích phân của f trên A tồn tại thì $\int_A f d\mu \in \overline{\mathrm{IR}}$.

Nếu $\int_A f d\mu \in \mathrm{IR}$ (nghĩa là $\int_A f d\mu$ tồn tại và hữu hạn) thì ta nói f *khả tích* trên A. Lúc này cả hai tích phân $\int_A f^+ d\mu$ và $\int_A f^- d\mu$ đều là những số hữu hạn.

Giả sử E là một tập con đo được của A. Khi đó tích phân của f trên E được định nghĩa là tích phân của hàm $f_{|E}$ trên E. Dễ thấy rằng

$$\int_E f d\mu := \int_E f_{|E} d\mu = \int_A f \cdot \chi_E d\mu.$$

1.3.2 Ví dụ. (i) $f(x) = c$, mọi $x \in A$ (c là hằng số) thì

$$\int_A f d\mu = c\mu A.$$

(ii) Xét hàm Dirichlet $f : [0, 1] \to \mathrm{IR}$ xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \text{ hữu tỉ,} \\ 0 & \text{nếu } x \text{ vô tỉ.} \end{cases}$$

Khi đó

$$\int_{[0,1]} f d\mu = 1.\mu([0, 1] \cap \mathbf{Q}) + 0.\mu([0, 1] \cap \mathbf{I}) = 0.$$

Để ý rằng hàm Dirichlet không khả tích Rieman (ở đây kí hiệu $\mathbf{I}$ chỉ tập tất cả các số vô tỉ).

(iii) Nếu $\mu A = 0$ thì mọi hàm đo được $f : A \to \overline{\mathrm{IR}}$ đều khả tích và

$$\int_A f d\mu = 0. \tag{1.6}$$

Thật vậy, vì $\mu A = 0$ nên mọi tập con đo được của A đều có độ đo 0 và do đó (1.6) đúng khi f là hàm đơn giản không âm. Từ đó (1.6) cũng đúng khi f là hàm đo được không âm cũng như khi f là hàm đo được bất kì.

BÀI TẬP

1.1. Cho A là một tập đo được và $(B_n)_n$ là một dãy các tập con đo được của A thoả mãn điều kiện

$$B_n \subset B_{n+1},\ n \in \mathbf{N} \text{ và } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A.$$

Chứng minh rằng nếu $g \in \mathcal{S}_A^+$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} g d\mu = \int_A g d\mu.$$

1.2. Cho $(f_n)_n \subset \mathcal{S}_A^+$, $g \in \mathcal{S}_A^+$ với $f_n \le f_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$ và $g \le \lim_n f_n$. Chứng tỏ rằng

$$\int_A g d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

1.3. Cho A là tập đo được và $f : A \to \overline{\mathrm{IR}}$ là một hàm đo được không âm. Chứng tỏ rằng

$$\int_A f d\mu = \sup\left\{\int_A \phi d\mu \mid \phi \text{ là đơn giản không âm và } \phi \le f\right\} \tag{*}$$

§ 2. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA TÍCH PHÂN

Để khỏi phải nhắc lại, từ đây ta quy ước rằng các tập đề cập đến đều là các tập đo được còn các hàm nói đến đều đo được (trên các tập xác định tương ứng) và nhận giá trị trong tập số thực mở rộng $\overline{\mathrm{IR}}$.

2.1 Tính cộng tính.[*]

2.1.1 Định lí. *Nếu* $A \cap B = \emptyset$ *thì*

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu \tag{2.1}$$

miễn là một trong hai vế của đẳng thức trên có nghĩa.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.1.3, (2.1) đúng khi f là hàm đơn giản.

Giả sử f (đo được) không âm trên $A \cup B$ và $(f_n)_n$ là dãy các hàm đơn giản không âm trên $A \cup B$ thoả mãn $f_n \nearrow f$. Khi đó với mỗi $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_{A\cup B} f_n d\mu = \int_A f_n d\mu + \int_B f_n d\mu.$$

Cho $n \to \infty$ ta được (2.1).

Giả sử f là hàm đo được tuỳ ý. Khi đó $f = f^+ - f^-$ với f^+ và f^- là các hàm không âm trên $A \cup B$. Theo điều vừa chứng minh ở trên thì

$$\int_{A\cup B} f^+ d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^+ d\mu, \tag{2.2}$$

$$\int_{A\cup B} f^- d\mu = \int_A f^- d\mu + \int_B f^- d\mu. \tag{2.3}$$

Nếu vế trái của (2.1) có nghĩa thì vế trái của một trong hai đẳng thức trên phải hữu hạn. Chẳng hạn, nếu vế trái của (2.2) hữu hạn thì cả hai tích phân trong vế phải của (2.2) cũng hữu hạn và do đó hai hiệu số

$$\int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu, \ \int_B f^- d\mu - \int_B f^- d\mu$$

đều có nghĩa và khác $+\infty$. Bây giờ trừ vế theo vế (2.2) cho (2.3) ta được (2.1).

Tương tự như vậy, (2.1) cũng được chứng minh cho trường hợp $\int_A f d\mu + \int_B f d\mu$ có nghĩa ∎

2.1.2 Hệ quả. *Nếu* $B \subset A$ *và tích phân* $\int_A f d\mu$ *tồn tại thì* $\int_B f d\mu$ *cũng tồn tại. Đặc biệt, nếu* f *khả tích trên* A *thì* f *cũng khả tích trên* B.

Chứng minh. Vì $A = B \cup (A \setminus B)$ và $B \cap (A \setminus B) = \emptyset$ nên theo Định lí 2.1.1 tồn tại $\int_B f d\mu$ và ta có

---

[*] Ý nghĩa của thuật ngữ "cộng tính" sẽ được giải thích rõ trong Mục 3.2 dưới đây.

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu + \int_{A\setminus B} f d\mu. \qquad (2.4)$$

Nếu f khả tích thì $\int_A f d\mu$ hữu hạn. Từ (2.4) ta suy ra $\int_B f d\mu$ hữu hạn, nghĩa là f khả tích trên B ∎

2.1.3 Hệ quả.

(i) Nếu $f \geq 0$ trên A và $B \subset A$ thì $\int_B f d\mu \leq \int_A f d\mu$.

(ii) Nếu $\mu B = 0$ và $\int_A f d\mu$ tồn tại thì

$$\int_{A\cup B} f d\mu = \int_{A\setminus B} f d\mu = \int_A f d\mu.$$

(iii) Nếu $f \sim g$ trên A thì $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ miễn là một trong hai tích phân trên tồn tại. Đặc biệt nếu $f = 0$ h.k.n. trên A thì $\int_A f d\mu = 0$.

Chứng minh. Dễ thấy rằng (i) được suy ra trực tiếp từ Hệ quả 2.1.2 với lưu ý rằng $\int_{A\setminus B} f d\mu \geq 0$.

Với (ii), đẳng thức $\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu$ dễ dàng được suy ra từ Định lí 2.1.1 và nếu $A \cap B = \emptyset$. Nếu $A \cap B \neq \emptyset$ thì ta có thể đưa về trường hợp trên bằng cách đặt $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ và lưu ý rằng $\mu(B \setminus A) = 0$. Đẳng thức còn lại có thể được chứng minh theo cách như vậy còn (iii) là hệ quả của (ii) ∎

2.1.4 Nhận xét. Hệ quả 2.1.3 (cũng như Hệ quả 2.1.2 với $\mu(A \setminus B) = 0$) cho thấy rằng nếu ta thay đổi giá trị của một hàm có tích phân trên một tập có độ đo 0 thì vẫn không làm thay đổi tích phân của nó. Chính vì thế mà sau này (trong việc nghiên cứu tích phân) nếu một hàm f xác định và đo được trên một tập con đo được $E \subset A$ mà $\mu(A \setminus E) = 0$ thì ta cũng định nghĩa $\int_A f d\mu := \int_E f d\mu$.

2.2 Tính bảo toàn thứ tự.

2.2.1 Định lí. *Nếu $f \leq g$ trên A và các tích phân $\int_A f d\mu$, $\int_A g d\mu$ tồn tại thì*

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu. \qquad (2.5)$$

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.1.3, bất đẳng thức (2.5) đúng khi f và g là các hàm đơn giản không âm. Nếu $f, g \geq 0$ thì tồn tại các dãy $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ các hàm đơn giản không âm trên A sao cho $f_n \nearrow f$ và

$g_n \nearrow g$. Đặt $h_n = \min(f_n, g_n)$, $n \in \mathbf{N}$ thì h_n là hàm đơn giản không âm, mọi $n \in \mathbf{N}$. Vì $f \le g$ nên dễ thấy rằng $h_n \nearrow f$. Ngoài ra vì với mỗi $n \in \mathbf{N}$, $h_n \le g_n$ nên $\int_A h_n d\mu \le \int_A g_n d\mu$. Do đó

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_A h_n d\mu \le \lim_{n \to \infty} \int_A g_n d\mu = \int_A g d\mu.$$

Bây giờ nếu f, g là các hàm đo được tuỳ ý và $f \le g$ thì $f^+ \le g^+$ và $f^- \ge g^-$. Theo trên ta có

$$\int_A f^+ d\mu \le \int_A g^+ d\mu, \ \int_A f^- d\mu \ge \int_A g^- d\mu. \tag{2.6}$$

Vì $\int_A f d\mu$ và $\int_A g d\mu$ tồn tại nên một trong hai tích phân $\int_A f^+ d\mu$, $\int_A f^- d\mu$ hữu hạn và một trong hai tích phân $\int_A g^+$, $\int_A g^-$ cũng hữu hạn. Bất đẳng thức (2.5) được suy ra từ điều này và (2.6) ∎

Dễ dàng nhận thấy rằng kết luận ở Định lí 2.2.2 cũng đúng nếu ta thay "$f \le g$ trên A" bởi giả thiết "$f \le g$ h.k.n. trên A".

2.2.2 Hệ quả. *Giả sử $\mu A < +\infty$. Nếu f bị chặn cốt yếu(*) trên A thì f khả tích trên A.*

Chứng minh. Nếu $f \ge 0$ và bị chặn cốt yếu trên A thì có $K > 0$, $B \subset A$, $\mu B = 0$ sao cho $0 \le f \le K$ trên $A \setminus B$. Theo Định lí 2.2.1 thì

$$0 \le \int_A f d\mu = \int_{A \setminus B} f d\mu \le \int_{A \setminus B} K d\mu = K\mu(A \setminus B) < +\infty.$$

Trường hợp f đo được tuỳ ý thì $f = f^+ - f^-$. Vì f bị chặn cốt yếu trên A nên f^+ và f^- cũng vậy (để ý là các hàm này không âm). Theo điều vừa chứng minh $\int_A f^+ d\mu$ và $\int_A f^- d\mu$ hữu hạn. Do đó f khả tích trên A ∎

2.2.3 Hệ quả. *Nếu f khả tích trên A thì f hữu hạn h.k.n. trên A.*

Chứng minh. Đặt $B := \{x \in A \mid f(x) = +\infty\}$. Khi đó B là đo được và f cũng khả tích trên B. Để ý rằng với mọi $N > 0$ thì $f(x) > N$, mọi $x \in B$. Do đó

(*) Định nghĩa ở Nhận xét 5.3.2, Chương 3.

$$+\infty > \int_B f d\mu \geq \int_B N d\mu = N\mu B, \text{ mọi } N > 0.$$

Từ đây ta có $\mu B = 0$. Hoàn toàn tương tự ta cũng chứng minh được $\mu(\{x \in A \mid f(x) = -\infty\}) = 0$. Vậy f hữu hạn h.k.n. trên A ∎

2.2.4 Hệ quả. *Nếu $f \geq 0$ trên A và $\int_A f d\mu = 0$ thì $f = 0$ h.k.n. trên A.*

Chứng minh. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$ ta đặt $A_n := \left\{x \in A \mid f(x) > \frac{1}{n}\right\}$. Khi đó với mọi $n \in \mathbf{N}$

$$A_n \subset A_{n+1} \text{ và } B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in A \mid f(x) > 0\}$$

nên $\mu B = \lim\limits_{n\to\infty} \mu A_n$. Mặt khác, theo giả thiết ta được

$$0 = \int_A f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu A_n, \text{ mọi } n \in \mathbf{N}.$$

Vậy $\mu A_n = 0$ mọi $n \in \mathbf{N}$ và do đó $\mu B = 0$, nghĩa là $f = 0$ h.k.n. trên A ∎

2.3 Tính tuyến tính.

2.3.1 Định lí. *Các đẳng thức sau đây là đúng miễn là các vế phải có nghĩa.*

(i) $\int_A cf d\mu = c\int_A f d\mu$, $(c \in IR)$,

(ii) $\int_A (f+g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.1.3, (i), (ii) đúng khi f là đơn giản không âm và $c \geq 0$.

α) Chứng minh (i). Giả sử $f \geq 0$ trên A. Theo định lí về cấu trúc hàm đo được, tồn tại một dãy các hàm đơn giản $(f_n)_n$ sao cho $0 \leq f_n \nearrow f$ trên A.

Nếu $c \geq 0$ thì $cf_n \nearrow cf$ và (i) được suy ra từ đẳng thức $\int_A cf_n d\mu = c\int_A f_n d\mu$ bằng cách cho $n \to \infty$.

Nếu $c < 0$ thì $cf \leq 0$ nên $(cf)^+ = 0$ còn $(cf)^- = -cf$. Từ đây theo định nghĩa của tích phân và điều vừa chứng minh ta có

$$\int_A cfd\mu = \int_A (cf)^+ - \int_A (cf)^- = 0 - \int_A (-cf) = c\int_A fd\mu.$$

Trường hợp f là hàm đo được tuỳ ý và $f = f^+ - f^-$ thì (i) được suy ra từ chứng minh trên với lưu ý rằng

$(cf)^+ = cf^+$, $(cf)^- = cf^-$ nếu $c \geq 0$ và

$(cf)^+ = -cf^-$, $(cf)^- = -cf^+$ nếu $c < 0$.

B) Chứng minh (ii). Giả sử f, g là các hàm đo được không âm và $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ là các dãy gồm những hàm đơn giản sao cho $0 \leq f_n \nearrow f$ và $0 \leq g_n \nearrow g$ trên A. Khi đó mỗi $n \in \mathbf{N}$, $f_n + g_n$ là hàm đơn giản không âm và $0 \leq (f_n + g_n) \nearrow (f + g)$ trên A. Ta có :

$$\begin{aligned}
\int_A (f+g)d\mu &:= \lim_{n\to\infty} \int_A (f_n + g_n)d\mu \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\int_A f_n d\mu + \int_A g_n d\mu\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu \\
&= \int_A fd\mu + \int_A gd\mu.
\end{aligned}$$

Vậy (ii) được chứng minh cho trường hợp này. Từ đây cũng dễ dàng thấy rằng (bằng quy nạp) nếu $h_1, h_2, ..., h_m$ $(m \in \mathbf{N})$ là các hàm không âm trên A thì ta cũng có :

$$\int_A \sum_{i=1}^m h_i d\mu = \sum_{i=1}^m \int_A h_i d\mu. \tag{2.7}$$

Bây giờ giả sử f, g là các hàm đo được trên A và tổng $\int_A fd\mu + \int_A gd\mu$ có nghĩa. Lúc này phải có $\int_A f^+ d\mu$ và $\int_A g^+ d\mu$ đều hữu hạn hay $\int_A f^- d\mu$ và $\int_A g^- d\mu$ đều hữu hạn $(f = f^+ - f^-, g = g^+ - g^-)$. Giả sử các tích phân $\int_A f^+ d\mu$ và $\int_A g^+ d\mu$ hữu hạn (trường hợp còn lại được chứng minh tương tự). Khi đó f^+ và g^+ đều hữu hạn h.k.n. trên A (Hệ quả 2.2.3) và do đó $f < +\infty$, $g < +\infty$ h.k.n. trên A. Vậy $f + g$ xác định h.k.n. trên A. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $f(x) < +\infty$

và $g(x) < +\infty$ khắp nơi trên A (nếu không ta xét các hàm $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ lần lượt tương đương với f và g và thoả mãn điều kiện trên rồi sử dụng Hệ quả 2.1.4 (iii)).

Đặt $h = f + g$. Khi đó vì $h^+ \le f^+ + g^+$ nên các hàm h^+, f^+, g^+ đều hữu hạn và ta có :

$$h = h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-,$$

$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^-.$$

Áp dụng (2.7) cho đẳng thức thứ hai ta được

$$\int_A h^+ d\mu + \int_A f^- d\mu + \int_A g^- d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int h^- d\mu. \quad (2.8)$$

Để ý rằng

$$\int_A h^+ d\mu \le \int_A f^+ d\mu + \int_A g^+ d\mu < +\infty.$$

Do đó cả ba tích phân $\int_A f^+ d\mu$, $\int_A g^+ d\mu$, $\int h^+ d\mu$ đều hữu hạn. Đẳng thức cần chứng minh được suy ra từ (2.8). Định lí đã được chứng minh hoàn toàn ▮

2.3.2 Nhận xét. Nếu ta kí hiệu $L^1(A, \mu)$ là tập hợp gồm tất cả những hàm khả tích trên A (trên tập này ta không phân biệt các hàm tương đương) thì theo Định lí 2.3.1, $L^1(A, \mu)$ là một không gian vectơ trên trường IR. Lúc này, cũng theo Định lí 2.3.1, hàm $I : L^1(A, \mu) \to \mathrm{IR}$ (thường cũng gọi là phiếm hàm tích phân) xác định bởi $I(f) := \int_A f(x) d\mu$, $f \in L^1(A, \mu)$ là một phiếm hàm tuyến tính trên $L^1(A, \mu)$. Điều này giải thích thuật ngữ "tính tuyến tính" sử dụng ở trên.

2.4 Tính khả tích.

2.4.1 Định lí. *Các khẳng định sau là đúng*

(i) Nếu $\int_A f d\mu$ *có nghĩa thì* $\left|\int_A f d\mu\right| \le \int_A |f| d\nu$,

(ii) f *khả tích trên* A *khi và chỉ khi* $|f|$ *khả tích trên* A,

(iii) Nếu $|f| \le g$ *h.k.n. trên* A *và* g *khả tích trên* A *thì* f *cũng khả tích trên* A,

(iv) Nếu f, g *khả tích trên* A *thì* $f \pm g$ *cũng khả tích trên* A. *Hơn nữa nếu* f *khả tích còn* g *bị chặn trên* A *thì* $f.g$ *khả tích trên* A.

Chứng minh.

(i) Vì $\int_A f d\mu$ có nghĩa nên đẳng thức $\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$ có nghĩa và một trong hai đẳng thức này là hữu hạn. Do vậy ta có

$$\left|\int_A f d\mu\right| = \left|\int_A f^+ - \int_A f^-\right| \le \int_A f^+ + \int_A f^- = \int_A |f| d\mu.$$

(ii) Nếu $|f|$ khả tích trên A thì theo (i) f cũng khả tích trên A. Ngược lại, nếu f khả tích trên A thì cả hai tích phân $\int_A f^+ d\mu$ và $\int_A f^- d\mu$ đều hữu hạn. Từ đẳng thức $|f| = f^+ + f^-$ ta có

$$0 \le \int_A |f| d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_A f^- d\mu < +\infty.$$

Nghĩa là $|f|$ khả tích trên A.

(iii) Nếu $|f| \le g$ h.k.n. trên A thì $\int_A |f| d\mu \le \int_A g d\mu < +\infty$ nên $|f|$ cũng khả tích trên A và do đó theo (ii) f cũng khả tích trên A.

(iv) Nếu f, g khả tích trên A thì tính khả tích của $f \pm g$ được suy ra từ Định lí 2.3.1, còn nếu f khả tích và g bị chặn trên A, chẳng hạn, $|g| \le K$, thì từ đẳng thức $|f.g| \le K.|f|$ ta suy ra

$$\int_A |f.g| d\mu \le K \int_A |f| d\mu < +\infty.$$

Điều này có nghĩa là $|f.g|$ khả tích và do đó $f.g$ cũng khả tích. Định lí đã được chứng minh ▮

BÀI TẬP

2.1. Cho $f : A \to \overline{\mathrm{IR}}$ là hàm đo được không âm. Chứng tỏ rằng nếu $B \subset A$ thì

$$\int_B f d\mu \le \int_A f d\mu.$$

2.2. Gọi $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbf{N})$, $\sigma-$ đại số tất cả các tập con của $\mathbf{N}$. Với mỗi $A \in \mathcal{A}$ ta đặt $\mu(\emptyset) = 0$ và

$$\mu A = \begin{cases} n & \text{nếu } A \text{ có } n \text{ phần tử,} \\ +\infty & \text{nếu } A \text{ vô hạn.} \end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng μ là một độ đo trên $\mathcal{A}$ và μ là $\sigma-$ hữu hạn.

b) Giả sử $A \in \mathcal{A}$, A hữu hạn $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ và $f(x) \neq -\infty$ mọi $x \in A$. Chứng tỏ f là đo được trên A và tích phân $\int_A f d\mu$ tồn tại. Tìm điều kiện cần và đủ để f khả tích trên A.

2.3. Cho A là một tập đo được và $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm khả tích (theo độ đo μ). Ta đặt

$$B_n = \{x \in A \mid |f(x)| \geq n\},$$

$$A_n = \{x \in A \mid n \leq |f(x)| < n+1\},\ n \in \mathbf{N}.$$

Chứng minh rằng

a) $\mu B_n < +\infty$, mọi $n \in \mathbf{N}$,

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \mu B_n = 0$,

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=n}^{\infty} \mu A_k = 0$.

2.4. Cho X là một tập không rỗng, $a \in X$ và δ_a là độ đo Dirac tại a trên $\mathcal{P}(X)$. Giả sử $A \subset X$ và $f: A \to \overline{\mathbb{R}}$ là một hàm tuỳ ý. Hãy tính $\int_A f d\mu$ và tìm điều kiện cần và đủ để f khả tích trên A.

2.5. Cho A là một tập đo được và $\mu A < \infty$, $f_n, f: A \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbf{N}$, là các hàm đo được. Hãy chứng tỏ rằng nếu $\int_A |f_n - f|^3 d\mu \to 0$ thì $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A, $n \to \infty$.

2.6. Giả sử f là hàm đo được trên A. Chứng tỏ rằng nếu có hai hàm g, h khả tích trên A sao cho $g \leq f \leq f$ h.k.n. thì f khả tích trên A.

2.7. Giả sử μ là một độ đo đủ, f khả tích và $f > 0$ h.k.n. trên X. Chứng tỏ rằng nếu A là một tập con đo được của X thoả mãn $\int_A f d\mu = 0$ thì $\mu A = 0$.

2.8. Giả sử f là hàm khả tích trên A. Chứng tỏ rằng khi đó tập $\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$ có thể biểu diễn thành hợp của một họ đếm được các tập có độ đo hữu hạn và rời nhau từng đôi.

§ 3. QUA GIỚI HẠN DƯỚI DẤU TÍCH PHÂN

Bây giờ chúng ta chuyển sang khảo sát một tính chất quan trọng thường gặp trong giải tích và lí thuyết xác suất. Đó là việc qua giới hạn dưới dấu tích phân Lebesgue. Đây là một trong những ưu điểm nổi bật của tích phân Lebesgue so với tích phân Riemann.

3.1 Qua giới hạn dưới dấu tích phân.

Các Định lí 3.1.1, 3.1.2 sau đây thường được gọi là các định lí về sự hội tụ đơn điệu của Beppo Levi. Cũng như trong mục trước, các hàm nói đến trong mục này đều đo được trên tập đo được A và nhận giá trị trong tập số thực mở rộng $\overline{\mathrm{IR}}$.

3.1.1 Định lí. (Levi) *Nếu* $0 \le f_n \nearrow f$ *trên* A *thì* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$.

Chứng minh. Trước hết để ý rằng từ giả thiết ta có ngay $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$ cũng như $\int_A f d\mu$ tồn tại.

Theo định lí về cấu trúc hàm đo được, với mỗi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại một dãy các hàm đơn giản không âm $(f_{n,k})_{k\in\mathbf{N}}$ sao cho $f_{n,k} \nearrow f_n$ trên A, $(k \to \infty)$. Bây giờ ta đặt, với mỗi $n \in \mathbf{N}$,

$$h_n := \max\{f_{1,n}, f_{2,n}, ..., f_{n,n}\}.$$

Khi đó dễ thấy rằng $(h_n)_n$ là dãy các hàm đơn giản không âm trên A. Ngoài ra, vì $f_{m,n} \le f_{m,n+1}$, mọi $m \le n$ nên $h_n \le h_{n+1}$, $n \in \mathbf{N}$. Vậy $(h_n)_n$ là dãy không giảm. Hơn nữa rõ ràng là

$$h_n \le f_n \le f, \text{ mọi } n \in \mathbf{N}. \tag{3.1}$$

Do đó $\lim_n h_n \le f$ trên A. Mặt khác, nếu $m \le n$ thì $f_{m,n} \le h_n$. Do vậy $f_m = \lim\limits_{n\to\infty} f_{m,n} \le \lim\limits_{n\to\infty} h_n$, mọi $m \in \mathbf{N}$. Cho $m \to \infty$ ta được $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f \le \lim\limits_{n\to\infty} h_n$. Kết hợp với bất đẳng thức vừa chứng minh ở trên ta được

$$\lim_{n\to\infty} h_n = f. \tag{3.2}$$

Từ định nghĩa tích phân của hàm đo được không âm, (3.1) và tính bảo toàn thứ tự của tích phân ta được

$$\lim_{n\to\infty}\int_A h_n d\mu = \int_A f d\mu \le \lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu \le \int_A f d\mu.$$

Từ đây ta suy ra đẳng thức cần chứng minh ∎

3.1.2 Định lí. (Levi) *Giả sử $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là một dãy đơn điệu (tăng hay giảm) các hàm đo được trên A và tồn tại một số $k_0 \in \mathbf{N}$ sao cho f_{k_0} khả tích. Khi đó*

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n d\mu. \tag{3.3}$$

Chứng minh. Ta chỉ cần xét trường hợp $(f_n)_n$ là dãy đơn điệu tăng (trường hợp còn lại được xét tương tự) và không mất tính tổng quát ta cũng có thể giả sử f_1 khả tích. Như vậy $\int_A f_1^- d\mu < +\infty$ và do đó f_1^- hữu hạn h.k.n. trên A. Bằng cách thay đổi giá trị của f_1^- trên một tập có độ đo không (nếu cần) ta có thể xem f_1^- hữu hạn trên A và $f_n^- \le f_1^-$ trên A. Như vậy, $0 \le (f_n + f_1^-) \nearrow (f + f_1^-)$ trên A. Định lí 3.1.1 cho ta

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu + \int_A f_1^- d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_A (f_n + f_1^-) d\mu =$$
$$= \int_A \lim_{n\to\infty}(f_n + f_1^-) d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} f_n + \int_A f_1^- d\mu.$$

(3.3) được suy ra từ đẳng thức này với lưu ý rằng $\int_A f_1^- d\mu$ là hữu hạn ∎

3.1.3 Nhận xét.

(i) Qua phép chứng minh Định lí 3.1.2 chúng ta nhận thấy rằng trong trường hợp $(f_n)_n$ là dãy đơn điệu tăng thì chỉ cần $\int_A f_1^- d\mu < +\infty$ là đủ. Tương tự như vậy, nếu $(f_n)_n$ là dãy đơn điệu giảm thì chỉ cần giả thiết $\int_A f_1^+ d\mu < +\infty$ là đủ.

(ii) Để ý rằng Định lí 3.1.2 cũng đúng nếu $f_n \nearrow f$ và f khả tích trên A.

3.1.4 Hệ quả. *Nếu $g_n \ge 0$ trên A, mọi $n \in \mathbf{N}$ thì $\int_A \sum_{n=1}^{\infty} g_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_A g_n d\mu$. Nếu thêm $\sum_{n=1}^{\infty}\int_A g_n d\mu < +\infty$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) < +\infty$ h.k.n. trên A và hàm số $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ khả tích trên A.*

Chứng minh. Đặt $f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$, $n \in \mathbf{N}$. Khi đó $0 \leq f_n \nearrow \sum_{k=1}^{\infty} g_k$. Đẳng thức cần chứng minh được suy trực tiếp từ Định lí Levi. Khẳng định còn lại được suy ra từ Hệ quả 2.2.3 và giả thiết $\sum_{k=1}^{\infty} \int_A g_k d\mu < +\infty$ ∎

3.1.5 Định lí. (Bổ đề Fatou) *Nếu* $f_n \geq 0$ *trên* A, *mọi* $n \in \mathbf{N}$ *thì*

$$\int_A \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\nu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu. \tag{3.4}$$

Chứng minh.

Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, đặt $g_n = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots\}$. Khi đó theo định nghĩa của giới hạn dưới ta có $0 \leq g_n \nearrow \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$.

Định lí 3.1.1 cho

$$\lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu = \int_A \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu. \tag{*}$$

Mặt khác, mỗi $n \in \mathbf{N}$, $g_n \leq f_n$ trên A và $\int_A g_n d\mu \leq \int_A f_n d\mu$. Do đó,

$$\lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu = \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu. \tag{**}$$

Các hệ thức (*) và (**) cho ta điều phải chứng minh ∎

3.1.6 Nhận xét.

(i) Bất đẳng thức (3.4) còn đúng nếu $f_n \geq g$, $n \in \mathbf{N}$ và g khả tích trên A. Thật vậy, để thấy điều này chỉ cần áp dụng Bổ đề Fatou cho dãy $(f_n - g)_n$.

(ii) Nếu $f_n \leq g$ mọi $n \in \mathbf{N}$ và g khả tích thì

$$\int_A \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \geq \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu. \tag{3.5}$$

Thật vậy, lúc này $-f_n \geq -g$ mọi $n \in \mathbf{N}$. Áp dụng Bổ đề Fatou (cùng với (i)) cho dãy $(-f_n)_n$ và để ý rằng với mọi dãy $(\alpha_n)_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty}(-\alpha_n) = -\overline{\lim}_{n\to\infty} \alpha_n$.

3.1.7 Định lí. (Định lí hội tụ bị chặn Lebesgue) *Giả sử* $(f_n)_n$ *là dãy các hàm đo được trên* A *thoả mãn* $|f_n| \leq g$, *mọi* $n \in \mathbf{N}$ *và* g *là hàm khả tích trên* A. *Nếu* $(f_n)_n$ *hội tụ hầu khắp nơi hay hội tụ theo độ đo về một hàm* f *trên* A *thì*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu. \tag{3.6}$$

Chứng minh. (i) Trường hợp $f_n \to f \ (n \to \infty)$ h.k.n. trên A. Để ý rằng do tích phân của một hàm không thay đổi khi ta thay đổi giá trị của hàm đó trên một tập có độ đo không nên ta có thể giả sử $f_n \to f$ khắp nơi trên A. Vì g khả tích trên A và $-g \le f_n \le g$ nên Bổ đề Fatou cùng với Nhận xét 3.1.6 cho ta

$$\int_A \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n \le \int_A \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n.$$

Từ đây (với lưu ý rằng $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n = f$) ta suy ra (3.6).

(ii) Trường hợp $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A. Giả sử $(f_{n_k})_k$ là một dãy con của $(f_n)_n$ sao cho $\int_A f_{n_k} d\mu \to \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$ (một dãy như thế bao giờ cũng tồn tại). Để ý rằng ta cũng có $f_{n_k} \xrightarrow{\mu} f$. Do đó có một dãy con của dãy này, $(f_{n_{k_i}})_i$, hội tụ đến f h.k.n. trên A. Từ chứng minh trên ta có

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n = \lim_{k\to\infty} \int_A f_{n_k} = \lim_{i\to\infty} \int_A f_{nk_i} = \int_A f.$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

Từ đây ta nhận được (3.6) ∎

Hệ quả sau đây tỏ ra hữu ích trong nhiều trường hợp.

3.1.8 Hệ quả. *Giả sử $\mu A < +\infty$, $|f_n| \le K$ mọi $n \in \mathbf{N}$ (K là một hằng số nào đó). Khi đó nếu $(f_n)_n$ hội tụ về f theo độ đo hay hầu khắp nơi trên A thì*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu \ ∎$$

3.2 Tính $\sigma-$ cộng tính và tính liên tục tuyệt đối của tích phân.

Chúng ta vẫn làm việc với không gian độ đo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ và giả sử f là một hàm xác định trên X với giá trị trong $\overline{\mathbb{R}}$ và có tích phân trên X. Xét hàm tập định nghĩa bởi

$$\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$A \mapsto \lambda(A) = \int_A f d\mu.$$

Hàm tập λ thường được gọi là *tích phân bất định* của f. Từ tính cộng tính của tích phân (Định lí 2.1), hàm tập λ là cộng tính. Thực ra λ còn là $\sigma-$ cộng tính. Ta có định lí sau.

3.2.1 Định lí. *Hàm tập λ (định nghĩa như trên) là $\sigma-$ cộng tính, nghĩa là nếu $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$ $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ thì*

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu. \tag{3.7}$$

Hơn nữa, f khả tích trên A khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| d\mu < +\infty$.

Chứng minh. (i) Giả sử $f \geq 0$ trên A. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$ ta đặt $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Khi đó $B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset A$ và $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Dễ thấy rằng $0 \leq_{XB_n} f \nearrow f$ trên A và Định lí Levi cho

$$\lim_{n\to\infty} \int_A XB_n f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f d\mu = \int_A f d\mu. \tag{*}$$

Mặt khác, để ý đến tính cộng tính của tích phân và định nghĩa của tập B_n ta có

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu. \tag{**}$$

Kết hợp (*) và (**) ta được (3.7).

(ii) Bây giờ nếu f là hàm đo được tuỳ ý thì áp dụng kết quả vừa chứng minh ở (i) cho f^+ và f^- ta được :

$$\int_A f^+ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^+ d\mu, \ \int_A f^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f^- d\mu. \tag{***}$$

Vì $\int_A f d\mu$ có nghĩa nên một trong hai tích phân $\int_A f^+ d\mu$ và $\int_A f^- d\mu$ phải hữu hạn, chẳng hạn, $\int_A f^- d\mu < +\infty$. Khi đó $\int_{A_n} f^- d\mu < +\infty$ mọi $n \in \mathbf{N}$. Do đó từ (***) ta được

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} (f^+ - f^-) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Khẳng định cuối cùng của định lí được suy ra từ đẳng thức

$$\int_A |f| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| d\mu \ \blacksquare$$

3.2.2 Hệ quả. *Giả sử f đo được không âm trên X. Khi đó λ là một độ đo trên $\mathcal{A}$. Lúc này λ được gọi là độ đo xác định bởi f và μ.*

3.2.3 Ví dụ. Tính tích phân $\int_{[0,\infty)} \frac{1}{x^2+1} d\mu$ (μ là độ đo Lebesgue trên IR).

Gọi $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $A = [0, \infty)$ và $A_n = [0, n]$, $n \in \mathbf{N}$ thì $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ và $A_n \subset A_{n+1}$, mọi n. Vì $f > 0$ trên A nên hàm tập λ sinh bởi f và μ là một độ đo trên $\sigma-$ đại số các tập đo được trên $[0, \infty)$. Do đó $\lambda A = \lim_n \lambda A_n$. Để ý rằng $\lambda A_n = \int_{[0,n]} \frac{1}{x^2+1} d\mu$ và trên mỗi đoạn $[0, n]$ hàm f liên tục nên khả tích Riemann và ta có (xem Định lí 3.15 dưới đây)

$$\int_{[0,n]} \frac{1}{x^2+1} d\mu = (R)\int_0^n \frac{1}{x^2+1} dx = \text{arctg}\, n.$$

Do vậy

$$\int_{[0,\infty)} \frac{1}{x^2+1} d\mu = \lambda A = \lim_n (R)\int_{[0,n]} \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \lim_n \text{arctg}\, n = \frac{\pi}{2}.$$

3.2.4 Nhận xét. Dễ thấy rằng nếu $A \in \mathcal{A}$ mà $\mu A = 0$ thì $\lambda A = 0$. Một độ đo tuỳ ý $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\text{IR}}$ được gọi là *liên tục tuyệt đối* đối với μ (kí hiệu $\nu \ll \mu$) nếu với mọi $E \in \mathcal{A}$ mà $\mu E = 0$ thì ta có $\nu E = 0$. Như vậy nếu độ đo λ xác định bởi một hàm đo được không âm $f : X \to \overline{\text{IR}}$ và μ thì $\lambda \ll \mu$. Nếu μ là $\sigma-$ hữu hạn thì điều ngược lại cũng đúng. Nghĩa là khi đó với mọi độ đo $\nu : \mathcal{A} \to \overline{\text{IR}}$ mà $\nu \ll \mu$ đều tồn tại (duy nhất theo một nghĩa nào đó) một hàm đo được không âm $f : X \to \overline{\text{IR}}$ sao cho

$$\nu A = \int_A f d\mu, \text{ mọi } A \in \mathcal{A}$$

(đây là nội dung Định lí Radon – Nikodym, độc giả quan tâm xin xem chẳng hạn [HU]).

Định lí quan trọng sau đây đôi khi cũng được gọi là định lí về tính liên tục tuyệt đối của tích phân.

3.2.5 Định lí. *Nếu* f *khả tích trên* A *thì với mọi* $\varepsilon > 0$, *tồn tại* $\delta > 0$ *sao cho*

$$\int_E |f| d\mu < \varepsilon$$

với mọi tập đo được $E \subset A$ *mà* $\mu E < \delta$.

Chứng minh. Cho trước $\varepsilon > 0$. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, ta đặt

$$f_n(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{nếu } x \in A \text{ và } |f(x)| \le n, \\ n & \text{nếu } x \in A \text{ và } |f(x)| > n. \end{cases}$$

Khi đó rõ ràng $(f_n)_n$ là đo được trên A và $0 \le f_n \nearrow |f|$. Từ Định lí Levi, ta có

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A |f| d\mu.$$

Vì $\int_A |f| d\mu$ hữu hạn (do f khả tích) nên ta có thể chọn $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $\int_A (|f| - f_{n_0}) d\mu < \dfrac{\varepsilon}{2}$ và chọn δ là số dương thoả mãn $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2n_0}$. Khi đó nếu $E \in \mathcal{A}$, $E \subset A$ và $\mu E < \delta$ thì

$$\int_E |f| d\mu = \int_E (|f| - f_{n_0}) d\mu + \int_E f_{n_0} d\mu \le$$

$$\le \int_A (|f| - f_{n_0}) d\mu + n_0 . \mu E < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \blacksquare$$

3.3 Quan hệ giữa tích phân Lebesgue và tích phân Riemann.

Trong mục này trước hết chúng ta sẽ chứng minh rằng tích phân Lebesgue thật sự là một sự mở rộng của tích phân Riemann. Sau đó trong điều kiện chín muồi, chúng ta sẽ thiết lập Định lí Lebesgue chỉ rõ lớp các hàm khả tích Riemann trên các hình hộp trong IR^k, điều mà trong giải tích cổ điển ta chưa có điều kiện để thực hiện.

Để thuận tiện cho việc theo dõi, ta sẽ chỉ tiến hành cho trường hợp $k=1$. Trường hợp tổng quát phép chứng minh hoàn toàn tương tự.

3.3.1 Định lí. *Mọi hàm $f:[a,b]\to IR$ khả tích Riemann đều khả tích Lebesgue và hai tích phân đó trùng nhau, nghĩa là*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f d\mu.$$

Chứng minh. Với mỗi $n\in\mathbf{N}$, ta hãy xét phân hoạch $P_n:=\{x_0, x_1, x_2,\ldots x_{2^n}\}$ của $[a,b]$ với $x_i=a+i(b-a)2^{-n}$, $i=0, 1, 2,\ldots 2^n$. Đặt

$$\varphi_n:=\sum_{i=1}^{2^n} m_i\chi_{[x_{i-1},x_i)} \text{ và } \psi_n:=\sum_{i=1}^{2^n} M_i\chi_{[x_{i-1},x_i)},$$

$m_i:=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}$, $M_i:=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}$. Khi đó rõ ràng rằng

$$\int_a^b\varphi_n d\mu=\omega_n,\ \int_a^b\psi_n d\mu=\Omega_n,\ \varphi_n\le f\le\psi_n \text{ trên } [a,b]. \qquad (*)$$

Ở đây ω_n và Ω_n lần lượt là các tổng Darboux dưới và trên của f trên $[a,b]$ ứng với phân hoạch P_n. Để ý rằng $(\varphi_n)_n$ là dãy các hàm đơn giản không giảm còn $(\psi_n)_n$ là dãy hàm đơn giản không tăng. Do đó nếu gọi φ, ψ lần lượt là giới hạn của chúng thì

$$\varphi_n\nearrow\varphi\le f,\ \psi_n\searrow\psi\ge f \text{ h.k.n. trên } [a,b].$$

Bây giờ vì $(\psi_n-\varphi_n)\searrow\psi-\varphi\ge 0$ nên từ Định lí Levi và tính khả tích Riemann của f ta suy ra

$$0\le\int_a^b(\psi-\varphi)\,d\mu=\lim_n\int_a^b(\psi_n-\varphi_n)\,d\mu=$$
$$\le\lim_n\int_a^b\psi_n d\mu-\lim_n\int_a^b\varphi_n d\mu=\lim_n\Omega_n-\lim_n\omega_n=0.$$

Từ đây và (*) ta được $\psi=\varphi=f$ h.k.n. trên $[a,b]$. Điều này cũng có nghĩa là $\varphi_n\nearrow f$ h.k.n.. Ngoài ra, vì $\int_a^b\varphi_n=\omega_n\to(R)\int_a^b f(x)\,dx\in\mathrm{IR}$ nên có $n_0\in\mathbf{N}$ để φ_{n_0} khả tích Lebesgue trên $[a,b]$. Cuối cùng, Định lí Levi về sự hội tụ đơn điệu cho ta

$$\int_a^b fd\mu = \lim_n \int_a^b \varphi_n d\mu = \lim_n \omega_n = (R)\int_a^b f(x)dx.$$

Định lí đã được chứng minh hoàn toàn ∎

Định lí sau đây thuộc về H. Lebesgue, nêu ra đặc trưng của lớp các hàm khả tích Riemann trên một đoạn trong IR (quan hệ h.k.n. ở đây được hiểu là theo độ đo Lebesgue).

3.3.2 Định lí. *Một hàm bị chặn $f:[a,\ b]\to IR$ là khả tích Riemann khi và chỉ khi nó liên tục hầu khắp nơi trên $[a,\ b]$.*

Chứng minh. Với mỗi $n\in\mathbf{N}$, Gọi P_n, φ_n, ψ_n là các phân hoạch và các hàm định nghĩa như trong chứng minh của Định lí 3.3.1.

Giả sử f là hàm khả tích Riemann trên $[a,\ b]$. Từ ghép chứng minh của Định lí 3.3.1, ta suy ra rằng tồn tại một tập $A\subset[a,\ b]$ mà $\mu A=0$ (độ đo Lebesgue) và sao cho $\varphi_n(x)\nearrow f(x)$, $\psi_n(x)\searrow f(x)$ (khi $n\to\infty$), mọi $x\notin A$. Rõ ràng rằng khi đó tập $D:=A\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}P_n)$ có độ đo Lebesgue bằng 0. Chúng ta sẽ chứng minh rằng f liên tục trên $[a,\ b]\setminus D$.

Lấy tuỳ ý $x_0\notin D$ và $\epsilon>0$. Khi đó có $n\in\mathbf{N}$ sao cho $f(x_0)-\varphi_n(x_0)<\epsilon$ và $\psi_n(x_0)-f(x_0)<\epsilon$. Trong phân hoạch P_n có đoạn $[x_{i-1},\ x_i]$ sao cho $x_0\in(x_{i-1},\ x_i)$. Hiển nhiên là $\varphi_n(x_0)=m_i$ và $\psi_n(x_0)=M_i$. Lúc này với mọi $x\in(x_{i-1},\ x_i)$ (lân cận của x_0) ta có

$$-\epsilon<m_i-f(x_0)\le f(x)-f(x_0)\le M_i-f(x_0)<\epsilon$$

chứng tỏ f liên tục tại x_0 và do đó f liên tục h.k.n. trên $[a,\ b]$.

Ngược lại, giả sử f liên tục h.k.n. trên $[a,\ b]$. Lấy tuỳ ý $x_0\in[a,\ b]$, $x_0\ne b$ và là điểm liên tục của f. Khi đó với $\epsilon>0$, tồn tại $\delta>0$ sao cho với mọi $x\in[a,\ b]$ mà $|x-x_0|<\delta$ thì

$$f(x_0)-\epsilon<f(x)<f(x_0)+\epsilon. \tag{*}$$

Bây giờ ta hãy chọn $k\in\mathbf{N}$ sao cho đường kính của phân hoạch P_k bé hơn δ (cụ thể, chọn k để cho $(b-a)2^{-k}<\delta$). Khi đó $x_0\in[x_{i-1},\ x_i)$ với một i nào đó và lúc này với mọi $x\in[x_{i-1},\ x_i)$ (sẽ có $|x-x_0|<\delta$) thì (để ý (*))

$$f(x_0)-\epsilon < m_i = \varphi_k(x_0) < f(x_0)+\epsilon.$$

Vì $(\varphi_n(x_0))_n$ là dãy đơn điệu không giảm nên dễ thấy rằng $\varphi_n(x_0) \nearrow f(x_0)$. Tương tự ta cũng có $\psi_n(x_0) \searrow f(x_0)$. Vì f liên tục h.k.n. nên điều này chứng tỏ rằng $\varphi_n \nearrow f$ và $\psi_n \searrow f$ h.k.n. trên $[a, b]$. Vì các hàm φ_n đo được (rõ ràng) nên f đo được, hơn nữa f bị chặn nên f khả tích Lebesgue. Một lần nữa Định lí Levi cho

$$\lim_n \omega_n = \lim_n \int_a^b \varphi_n = \int_a^b f d\mu = \lim_n \int_a^b \psi_n = \lim_n \Omega_n \in \mathrm{IR}$$

chứng tỏ $\lim_n(\Omega_n - \omega_n) = 0$. Điều này có ý nghĩa là với $\epsilon > 0$ bất kì, bao giờ cũng tồn tại ít nhất một phân hoạch P_n của $[a, b]$ sao cho $\Omega_n - \omega_n < \epsilon$ (điều kiện đủ để f khả tích Riemann trong giải tích cổ điển). Vậy f khả tích Riemann trên $[a, b]$ ∎

Để ý rằng một hàm không bị chặn thì không khả tích Riemann. Tuy nhiên nhiều hàm như thế lại có tích phân Riemann suy rộng. Liệu các hàm như thế có khả tích Lebesgue không ? Nói chung là không. Tuy nhiên định lí sau đây cho thấy rằng câu trả lời là khẳng định nếu tích phân Riemann suy rộng của $|f|$ tồn tại.

3.3.3 Định lí. *Giả sử $f:[a, +\infty) \to IR$, $(a \in IR)$ khả tích Riemann trên mọi đoạn con đóng của $[a, +\infty)$. Khi đó f là khả tích Lebesgue trên $[a, +\infty)$ khi và chỉ khi tích phân Riemann suy rộng $\int_a^\infty |f(x)|dx$ tồn tại(*). Hơn nữa, trong trường hợp này*

$$\int_{[a,\infty)} f d\mu = \int_a^\infty f(x)dx.$$

Chứng minh.

(*) Nghĩa là $\lim_{b\to\infty} \int_a^b |f(x)|dx$ tồn tại và là một số thực. Cũng để ý rằng lúc này từ bất đẳng thức $\left|\int_t^s f(x)dx\right| \le \int_t^s |f(x)|dx$ mọi $t < s$ và điều kiện đủ để tồn tại tích phân Riemann suy rộng (xem, chẳng hạn, [N]) ta suy ra tích phân suy rộng $\int_a^\infty f(x)dx$ cũng tồn tại.

(α) Giả sử tích phân Riemann suy rộng $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ tồn tại. Để ý rằng f và $|f|$ đo được trên mỗi đoạn $[a, a+n]$ và $[a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a, a+n]$ nên f và $|f|$ đo được trên $[a, \infty)$. Theo Hệ quả 3.2.2, hàm tập sinh bởi $|f|$ và μ là một độ đo trên $\sigma-$ đại số các tập con đo được của $[a, \infty)$ nên

$$\begin{aligned}\int_{[a,\infty)}|f|d\mu &= \lim_n \int_{[a,a+n]}|f|d\mu \\ &= \lim_n \int_a^{a+n}|f(x)|dx = \int_a^{\infty}|f(x)|dx < +\infty\end{aligned}$$

chứng tỏ $|f|$ khả tích và do đó f cũng khả tích Lebesgue trên $[a, \infty)$.

(β) Giả sử f khả tích Lebesgue trên $[a, \infty)$. Khi đó f^+ cũng khả tích Lebesgue trên $[a, \infty)$. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, đặt $f_n(x) = f^+(x)$ nếu $x \in [a, a+n]$ và $f_n(x) = 0$ nếu $x > a+n$. Khi đó $\lim_n f_n(x) = f^+(x)$ và $0 \le f_n(x) \le f^+(x)$ thoả mãn với mọi $x \in [a, \infty)$. Theo Định lí 3.3.1, các hàm f_n, $n \in \mathbf{N}$ khả tích Lebesgue và $\int_{[a,\infty)} f_n d\mu = \int_a^{a+n} f^+(x)dx$. Do đó theo định lí hội tụ bị chặn Lebesgue

$$\int_{[a,\infty)} f^+ d\mu = \lim_n \int_{[a,a+n]} f_n d\mu = \lim_n \int_a^{a+n} f^+(x)dx.$$

Điều này chứng tỏ rằng $\int_a^{\infty} f^+(x)dx$ tồn tại và $\int_a^{\infty} f^+(x)dx = \int_{[a,\infty)} f^+ d\mu$. Tương tự như vậy, tích phân $\int_a^{\infty} f^-(x)dx$ tồn tại và $\int_a^{\infty} f^-(x)dx = \int_{[a,\infty)} f^- d\mu$. Bây giờ từ các đẳng thức $f = f^+ - f^-$ và $|f| = f^+ + f^-$ ta suy ra rằng cả hai tích phân Riemann suy rộng $\int_a^{\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ đều tồn tại. Hơn nữa,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_{[a,\infty)} fd\mu \text{ và } \int_a^{\infty}|f(x)|dx = \int_{[a,\infty)}|f|d\mu \ \blacksquare$$

3.3.4 Nhận xét. Sự tồn tại của tích phân Riemann suy rộng $\int_a^{\infty} f(x)dx$ không đảm bảo tính khả tích (Lebesgue) của hàm f. Một ví dụ kinh điển minh hoạ điều này là hàm $f(x) = (\sin x)/x$ với $f(0) = 1$

trên $[0, \infty)$. Trong giải tích cổ điển ta biết tích phân Riemann suy rộng của f tồn tại và $\int_0^{\infty} (\sin x)/x dx = \frac{\pi}{2}$ nhưng $\int_0^{\infty} (|\sin x|/x) dx$ không tồn tại và f cũng không khả tích Lebesgue trên $[0, \infty)$. Thật vậy, với mỗi $k \in \mathbf{N}$ ta có

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin x| dx.$$

Do đó

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x} = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n},$$

chứng tỏ rằng tích phân Riemann suy rộng $\int_0^{\infty} (|\sin x|/x) dx$ không tồn tại. Điều này và Định lí 3.3.3 cho thấy f không khả tích Lebesgue trên $[0, +\infty)$.

Đối với tích phân Riemann suy rộng với cận hữu hạn (f không bị chặn) ta cũng có kết quả tương tự như Định lí 3.3.3, được phát biểu trong Định lí 3.3.5 sau đây. Phép chứng minh của nó tương tự như phép chứng minh Định lí 3.3.3, xin độc giả tự tiến hành lấy xem như một bài tập nhỏ.

3.3.5 Định lí. *Giả sử $f : [a, b] \to IR$ không bị chặn, khả tích Riemann trên mọi đoạn $[a+\epsilon, b] \subset [a, b]$ $(\epsilon > 0)$. Khi đó f khả tích Lebesgue trên $[a, b]$ khi và chỉ khi tích phân Riemann suy rộng $\int_a^b |f(x)| dx := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{a+\epsilon}^b |f(x)| dx$ tồn tại.*

BÀI TẬP

3.1. Cho $(f_n)_n$ là một dãy các hàm khả tích trên A sao cho $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ mọi $n \in \mathbf{N}$. Chứng tỏ rằng $f_n \to 0$ h.k.n. trên A khi và chỉ khi $\int_A f_n d\mu \to 0$ $(n \to \infty)$.

3.2. Giả sử $(f_n)_n$ là một dãy đơn điệu tăng các hàm khả tích trên A và

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \int_A f_n d\mu < +\infty.$$

Khi đó hầu khắp nơi trên A tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_n f_n(x) = f(x)$, f khả tích trên A và

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

3.3. Xét hàm $f : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ xác định bởi $f(x) = 0$ nếu $x \notin (0, 1]$ và $f(x) = \sqrt{n}$ nếu $x \in A_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ với một $n \in \mathbf{N}$ nào đó. Mỗi $n \in \mathbf{N}$, gọi $f_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.\mathcal{X}A_k$.

a) Chứng minh rằng $f_n \nearrow f$ trên IR.

b) Chứng tỏ rằng f khả tích trên IR và tính $\int_{\mathrm{IR}} f d\mu$ (μ là độ đo Lebesgue),

c) Chứng tỏ rằng f^2 không khả tích trên IR.

3.4. Cho A là một tập đo được và $(B_n)_n$ là một dãy các tập con đo được của A thoả mãn điều kiện

$$B_n \subset B_{n+1},\ n \in \mathbf{N} \text{ và } \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A.$$

Chứng minh rằng nếu $f \geq 0$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n} f d\mu = \int_A f d\mu.$$

3.5. Cho A là một tập đo được và $g, f : A \to \mathrm{IR}$ là các hàm khả tích trên A. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$ ta đặt

$$A_n = \{x \in A \mid n \leq |f(x)| < n+1\}.$$

$$B_n = \{x \in A \mid |f(x)| \geq n\}.$$

Chứng minh rằng :

a) $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} g d\mu = 0,$

b) $\lim_{n\to\infty} n\mu B_n = 0.$

3.6. Chứng minh rằng nếu $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ là một dãy hàm đo được trên A và thoả mãn $\sum_{n=1}^{\infty}\int_A |f_n| d\mu < +\infty$ thì

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_A f_n d\mu = \int_A (\sum_{n=1}^{\infty} f_n) d\mu.$$

3.7. Cho $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mu)$ là không gian độ đo như ở Bài 2.2.

a) Giả sử $x : \mathbf{N} \to \mathrm{IR}$ là một dãy các số thực. Chứng tỏ rằng x là hàm đo được. Chứng tỏ rằng x khả tích trên $\mathbf{N}$ khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|$ hội tụ và trong trường hợp này ta có $\int_{\mathbf{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$.

b) Giả sử với mỗi $n \in \mathbf{N}$, $f_n : \mathbf{N} \to [0, +\infty)$ là một dãy số. Ta kí hiệu $f_n(k) = a_{nk}$, $k \in \mathbf{N}$. Hãy tính $\int_{\mathbf{N}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(k) d\mu$. Từ đó suy ra rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}.$$

3.8. Cho $f \geq 0$ trên A. Đặt

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{nếu } f(x) \leq n, \\ n, & \text{nếu } f(x) > n. \end{cases}$$

Chứng minh

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

3.9. Cho f là một hàm đo được, không âm và hữu hạn h.k.n. trên A. Với mỗi $i \in \mathbf{Z}$, gọi

$$\eta_i = \mu(\{x \in A \mid 2^{i-1} < f(x) \leq 2^i\}).$$

Chứng tỏ rằng f khả tích trên A khi và chỉ khi $\sum_{i=-\infty}^{\infty} 2^i \eta_i < \infty$.

3.10. Cho $(E_k)_{k\in\mathbf{N}}$ là một dãy các tập con đo được của một tập X và thoả mãn $\sum_{k=1}^{\infty} \mu E_k < +\infty$. Gọi A là tập gồm tất cả những $x \in X$ sao cho x thuộc vào một số vô hạn những tập E_k của họ nói trên. Đặt $g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{E_k}(x),\ x \in X$. Chứng tỏ rằng

a) g là hàm đo được, khả tích trên X,

b) $\mu A = 0$.

3.11. Giả sử $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ với $A_n \cap A_m = \emptyset$ nếu $n \neq m$ và A_n là đo được với mọi $n \in \mathbf{N}$. Giả sử thêm rằng $f : A \to \overline{\mathrm{IR}}$ khả tích trên mỗi A_n. Chứng tỏ rằng f khả tích trên A khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| d\mu < +\infty$. Trong trường hợp này ta có

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

3.12. Cho $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mu)$ là không gian độ đo như ở Bài 2.2. Giả sử $f_n : \mathbf{N} \to \mathrm{IR},\ n \in N$ xác định bởi

$$f_n(k) := \begin{cases} \dfrac{1}{k} & \text{nếu } 1 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{nếu } k > n. \end{cases}$$

a) Chứng tỏ rằng dãy $(f_n)_n$ hội tụ đều trên N,

b) Tìm $\lim_n \int_{\mathbf{N}} f_n d\mu$.

3.13. Cho $A = (0, 1)$. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$ ta đặt

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{nếu } 0 < x < \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{nếu } \dfrac{1}{n} \leq x < 1. \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng $f_n \to 0\ (n \to \infty)$ và tìm $\lim_{n \to \infty} \int_A f_n d\mu$.

3.14. Giả sử rằng $\mu A < +\infty$ và $f_n,\ f : A \to \overline{\mathrm{IR}},\ n \in \mathbf{N}$ là các hàm đo được. Chứng tỏ rằng nếu f khả tích trên A và $(f_n)_n$ hội tụ đều về f trên A thì

$$\lim_{n\to\infty}\int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

Hãy chỉ ra một ví dụ chứng tỏ rằng kết luận trên không còn đúng nữa nếu $\mu A = \infty$.

3.15. Giả sử rằng $\mu A < +\infty$ và $f_n,\ f : A \to \overline{\mathrm{IR}},\ n \in \mathbf{N}$ là các hàm đo được. Chứng tỏ rằng

$$\int_A \frac{|f_n - f|}{1+|f_n - f|} d\mu \to 0$$

khi và chỉ khi $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên $A(n \to \infty)$.

§ 4. TÍCH CÁC ĐỘ ĐO VÀ ĐỊNH LÍ FUBINI

Trong mục này chúng ta sẽ thiết lập mối quan hệ giữa tích phân trên không gian tích với các tích phân trên các không gian thành phần. Cụ thể là chúng ta sẽ chứng minh rằng việc tính tích phân Lebesgue trên một tập trong không gian tích có thể quy về việc tính các tích phân lặp trên các không gian thành phần (Định lí Fubini). Ta bắt đầu với việc định nghĩa không gian độ đo tích.

4.1 Tích các Độ đo.

Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ và (Y, Σ, ν) là hai không gian với độ đo đủ, $\sigma-$ hữu hạn. Ở đây $\mathcal{A}$ và Σ là những $\sigma-$ đại số. Ta kí hiệu

$$\mathcal{R} := \{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \Sigma\}.$$

Vì $\mathcal{A}$ và Σ đều là những nửa vành nên theo Bổ đề 4.2.1 Chương 3 tích của chúng là một nửa vành các tập con của tích Descartes $X \times Y$.

Xét hàm tập $\pi : \mathcal{R} \to \overline{\mathrm{IR}}$ xác định bởi

$$\pi(A \times B) := \mu A \times \nu B,\ \text{mọi}\ A \times B \in \mathcal{R} \tag{4.1}$$

(để ý quy ước $0.\infty = 0$). Chúng ta có kết quả sau.

4.1.1 Bổ đề. *Hàm tập π là một độ đo trên nửa vành $\mathcal{R}$. Hơn nữa, π là $\sigma-$ hữu hạn.*

Chứng minh. (i) Rõ ràng là $\pi(\emptyset)=0$. và $\pi(A\times B)\geq 0$ mọi $A\times B\in\mathcal{R}$.

(ii) Ta chứng minh π là $\sigma-$ cộng tính. Giả sử $A\times B\in\mathcal{R}$ và $(A_n\times B_n)_{n\in\mathbf{N}}\subset\mathcal{R}$ là một dãy các tập rời nhau từng đôi một sao cho $A\times B=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\times B_n)$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$\mu A\times\nu B=\sum_{n=1}^{\infty}(\mu A_n\times\nu B_n). \tag{4.2}$$

Với mỗi $n\in\mathbf{N}$, ta xét hàm $f_n:B\to\overline{\mathrm{IR}}$ xác định với mỗi $y\in B$,

$$f_n(y):=\begin{cases}\mu A_n & \text{nếu } y\in B_n\\ 0 & \text{nếu } y\in B\setminus B_n.\end{cases}$$

Khi đó $f_n\geq 0$ và f_n là $\Sigma-$ đo được (để ý $f_n=\mu A_n.XB_n$) với mọi $n\in\mathbf{N}$. Ngoài ra, để ý rằng với mỗi $y\in Y$ nếu gọi $K:=\{i\in\mathbf{N}\mid y\in B_i\}$ thì họ $(A_i)_{i\in K}$ rời nhau từng đôi một và $A=\bigcup_{i\in K}A_i$ (độc giả tự lí giải). Do đó $\mu A=\sum_{i\in K}\mu A_i$ và với mọi $y\in B$

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(y)=\sum_{i\in K}\mu A_i X_{B_i}(y)=\mu A.$$

Theo Hệ quả 3.1.4 (của Định lí Levi) ta được :

$$\begin{aligned}\mu A\times\nu B&=\int_B\mu A d\nu=\int_B\sum_{n=1}^{\infty}f_n d\nu\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_B f_n d\nu=\sum_{n=1}^{\infty}(\mu A_n\times\nu B_n).\end{aligned}$$

Vậy (4.2) được chứng minh. Dễ thấy rằng π cũng là độ đo $\sigma-$ hữu hạn. Bổ đề đã được chứng minh ∎

Bây giờ áp dụng quá trình thác triển tiêu chuẩn độ đo trình bày trong §4 Chương 3 cho độ đo π trên $\mathcal{R}$ ta sẽ nhận được một độ đo trên một $\sigma-$ đại số bao hàm $\mathcal{R}$. Ta đi đến định nghĩa sau.

4.1.2 Định nghĩa. Độ đo thác triển tiêu chuẩn của độ đo π trên nửa vành $\mathcal{R}$ lên $\sigma-$ đại số $\mathcal{L}$ các tập π^*- đo được trên $X\times Y$ gọi là *độ đo tích* của hai độ đo μ và ν (theo thứ tự ấy) và được kí hiệu là $\mu\otimes\nu$. Lúc này $\mathcal{L}$ được kí hiệu là $\mathcal{A}\otimes\Sigma$ và một tập $E\in\mathcal{A}\otimes\Sigma$ đôi khi cũng được gọi là $\mu\otimes\nu-$ đo được. Không gian $(X\times Y,\ \mathcal{A}\otimes\Sigma,\ \mu\otimes\nu)$ được gọi là *không gian độ đo tích* của hai không gian độ đo $(X,\ \mathcal{A},\ \mu)$ và $(Y,\ \Sigma,\ \nu)$.

4.1.3 Nhận xét.

(i) Chú ý rằng $\mathcal{A}\otimes\Sigma$ chứa $\sigma-$ đại số sinh bởi $\mathcal{R}$ là $\mathcal{F}(\mathcal{R})$ và $\mu\otimes\nu$ luôn là độ đo đủ.

(ii) Ta hãy xét trường hợp đặc biệt khi $X,\ Y$ là các không gian $\mathrm{IR}^n,\ \mathrm{IR}^p$ với các độ đo Lebesgue $\mu^n,\ \mu^p$ tương ứng. Lúc này $\mathrm{IR}^n\times\mathrm{IR}^p$ có thể coi là IR^{n+p}. Tích của các độ đo μ^n và μ^p là $\mu^n\otimes\mu^p$ và độ đo Lebesgue trên IR^{n+p} là μ^{n+p}.

Gọi $\mathcal{R}$ là nửa vành các tập con của IR^{n+p} có dạng $A\times B$ với A là tập đo được trong IR^n và B là tập đo được trong IR^p. Người ta chứng minh được rằng (phép chứng minh đòi hỏi nhiều chi tiết và hơi dài nên xin được phép không trình bày ở đây) :

* $A\times B$ đo được Lebesgue trong IR^{n+p},

* $\mu^{n+p}(A\times B)=\mu^n(A)\times\mu^p(B)=\pi(A\times B)$.

Trong đó π là độ đo trên $\mathcal{R}$ ($\sigma-$ hữu hạn) xác định bởi μ^n và μ^p như trong (4.1).

Như vậy, π là thu hẹp của μ^{n+p} (cũng chính là thu hẹp của độ đo ngoài sinh bởi độ đo trên nửa vành các gian trên IR^{n+p}, $(m^{n+p})^*$), lên $\mathcal{R}$. Do đó $\pi^*=(m^{n+p})^*$ và từ đây $\mu^n\otimes\mu^p=\mu^{n+p}$, $\mathcal{A}\otimes\Sigma=\mathcal{L}^{n+p}$. Điều này có nghĩa là tích của các độ đo μ^n trên IR^n và μ^p trên IR^p chính là độ đo Lebesgue μ^{n+p} trên IR^{n+p}.

4.2 Biểu diễn độ đo một tập trong không gian tích qua tích phân các thiết diện của nó.

Bây giờ chúng ta sẽ thiết lập mối quan hệ giữa các tập $\mu\otimes\nu-$ đo được trong $X\times Y$ với các tập con đo được trong X và Y. Kết quả chủ yếu được phát biểu trong Định lí 4.2.1 và nó là bước quan trọng trong việc thiết lập Định lí Fubini ở mục sau. Trước tiên ta nêu ra một vài khái niệm cần thiết.

Giả sử $A \subset X \times Y$, $x \in X$ và $y \in Y$. Ta định nghĩa *thiết diện của* A *tại* x (kí hiệu A_x) và *thiết diện của* A *tại* y (kí hiệu là A^y) tương ứng là các tập sau :

$$A_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in A\} \;;\; A^y := \{x \in X \mid (x, y) \in A\}.$$

Rõ ràng rằng $A_x \subset Y$ với mọi $x \in X$, $A^y \subset X$ với mọi $y \in Y$ và các thiết diện của A có thể là $\emptyset$. Ta nêu ra một số đẳng thức liên quan tới những thiết diện của các tập, sẽ được sử dụng thường xuyên trong phép chứng minh của Định lí 4.2.1. Việc kiểm tra các đẳng thức này là đơn giản và xin được nhường cho độc giả xem như là một bài tập nhỏ.

(a) $(\bigcup_{i \in I} A_i)_x = \bigcup_{i \in I} (A_i)_x$ và $(\bigcup_{i \in I} A_i)^y = \bigcup_{i \in I} (A_i)^y$;

(b) $(\bigcap_{i \in I} A_i)_x = \bigcap_{i \in I} (A_i)_x$ và $(\bigcap_{i \in I} A_i)^y = \bigcap_{i \in I} (A_i)^y$;

(c) $(A \setminus B)_x = A_x \setminus B_x$ và $(A \setminus B)^y = A^y \setminus B^y$.

4.2.1 Định lí. *Giả sử* $E \in \mathcal{A} \otimes \Sigma$. *Khi đó* $E_x \in \Sigma$ $\mu-h.k.n.$ *trên* X *và hàm* $x \mapsto \nu(E_x)$ (*) *là đo được trên* X, *thoả mãn*

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu. \tag{4.3}$$

Tương tự như vậy, $E^y \in \mathcal{A}$ $\nu-h.k.n.$ *trên* Y *và hàm* $y \mapsto \mu(E^y)$ *là đo được trên* Y, *thoả mãn*

$$\mu \otimes \nu(E) = \int_Y \mu(E^y) d\nu.$$

Để chứng minh Định lí 4.2.1 ta cần bổ đề sau.

4.2.2 Bổ đề. *Cho* m *là một độ đo trên nửa vành* $\mathcal{R}$, μ *là thác triển tiêu chuẩn của* m. *Giả sử* $A \subset X$ *và* $m^* A < +\infty$. *Khi đó tồn tại một họ* $(A_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{L}$, $A_{n+1} \subset A_n$, *mọi* $n \in \mathbf{N}$ *và thoả mãn các điều kiện sau :*

(i) $A \subset A_n$ *và* $\mu A_n < +\infty$, *mọi* $n \in \mathbf{N}$.

(*) Hàm này xác định $\mu-$ h.k.n. trên X

(ii) Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, $A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n,i}$, $A_{n,i} \in \mathcal{R}$, $A_{n,i} \cap A_{n,i'} = \emptyset$ *khi* $i \neq i'$,

(iii) Nếu $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *thì* $\mu H = m^* A$.

Chứng minh. Từ định nghĩa độ đo ngoài m^* (và Nhận xét 3.1.4) với mỗi $n \in \mathbf{N}$, tồn tại một họ $(C_{n,i})_{i \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{R}$ rời nhau từng đôi sao cho

$C_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{n,i} \supset A$ và

$$\mu C_n = \sum_{i=1}^{\infty} m C_{n,i} < m^* A + \frac{1}{n}.$$

Đặt $A_1 = C_1$, $A_n = A_{n-1} \cap C_n$, $n \in \mathbf{N}$. Ta chứng minh A_n thoả mãn có biểu diễn ở (ii). Rõ ràng A_1 thoả mãn điều kiện này. Giả sử

$$A_{n-1} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n-1,i},\ A_{n-1,i} \cap A_{n-1,j} = \emptyset, \text{ nếu } i \neq j.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} A_n = A_{n-1} \cap C_n &= \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{n-1,i}\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{n,i}\right) \\ &= \bigcup_{i,j \in \mathbf{N}} \left(A_{n-1,i} \cap C_{n,j}\right) = \bigcup_{i,j \in \mathbf{N}} D_{i,j}, \end{aligned}$$

trong đó $D_{i,j} = A_{n-1,i} \cap C_{n,j} \in \mathcal{R}$. Các tập $D_{i,j}$ rời nhau từng đôi $(i, j \in \mathbf{N})$. Vậy A_n cũng có dạng trong (ii). Ngoài ra, $A_n \in \mathcal{L}$, $A_{n+1} \subset A_n$, $A \subset A_n$, $\mu A_n \leq \mu C_n < +\infty$, mọi n. Vậy $(A_n)_n$ nghiệm đúng (i) và (ii).

Nếu $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ thì $H \in \mathcal{L}$, $H \supset A$, $\mu H = \lim_n \mu A_n$ (để ý $\mu A_1 = \mu C_1 < +\infty$). Lúc này với mọi $n \in \mathbf{N}$,

$$m^* A \leq \mu A_n \leq \mu C_n < m^* A + \frac{1}{n}$$

và do đó $\mu H = m^* A$, (iii) cũng được chứng minh ∎

Chứng minh Định lí 4.2.1. Ta chứng minh phần thứ nhất của định lí. Phần thứ hai được chứng minh tương tự. Trước hết, chúng ta nhận xét rằng nếu $E_x \in \Sigma$ $\mu-$h.k.n. trên X thì hàm $x \mapsto \nu(E_x)$ tương đương với hàm $\varphi_E : X \to \overline{\mathrm{IR}}$ xác định bởi

$$\varphi_E(x) = \begin{cases} \nu(E_x) & \text{nếu } E_x \in \Sigma, \\ 0 & \text{nếu } E_x \notin \Sigma. \end{cases}$$

Giả sử $E \in \mathcal{A} \otimes \Sigma$.

(i) Trường hợp $\mu \otimes \nu(E) < +\infty$. Ta tiến hành chứng minh theo các bước sau :

Bước 1. Giả sử $E = A \times B \in \mathcal{R}$. Hiển nhiên là $E_x = B$ nếu $x \in A$ và $E_x = \emptyset$ nếu $x \notin A$. Do đó với mọi $x \in X$, $E_x \in \Sigma$ và

$$\nu(E_x) = \nu B.\mathcal{X}A(x).$$

Điều này chứng tỏ rằng φ_E là đo được trên X và

$$\int_X \nu(E_x) d\mu = \int_X \nu B.\mathcal{X}A(x)\, d\mu = \mu A \times \nu B = \mu \otimes \nu(E). \qquad (*)$$

Bước 2. Giả sử E có dạng $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ với $E_n \in \mathcal{R}$ và $E_n \cap E_m = \emptyset$ nếu $n \neq m$. Vì $E_x = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$ và mỗi n, $(E_n)_x \in \Sigma$ theo Bước 1 nên $E_x \in \Sigma$, mọi $x \in X$.

Bây giờ với $n \in \mathbf{N}$ ta định nghĩa $\varphi_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \nu((E_i)_x)$, $x \in X$. Theo Bước 1, mỗi n, φ_n đều là hàm đo được và ta có :

$$\begin{aligned} \int_X \varphi_n d\mu(x) &= \sum_{i=1}^{n} \int_X \nu((E_i)_x) d\mu(x) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu \otimes \nu(E_i) \to \mu \otimes \nu(E),\ n \to \infty. \end{aligned} \qquad (**)$$

Mặt khác vì họ $((E_n)_x)_{n \in \mathbf{N}}$ rời nhau từng đôi nên $\nu(E_x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu((E_n)_x)$ và do đó $0 \le \varphi_n \nearrow \varphi_E$. Vậy φ_E là đo được. Định lí Levi cùng với (**) cho ta

$$\int_X \nu(E_x) d\mu = \int_X \varphi_E d\mu = \lim_n \int_X \varphi_n d\mu = \mu \otimes \nu(E).$$

Bước 3. Giả sử $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ với $E_{n+1} \subset E_n$, $n \in \mathbf{N}$, $\mu \otimes \nu(E_1) < +\infty$ và với mọi n, E_n có dạng như ở Bước 2. Khi đó $E_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$ và $(E_n)_x \in \Sigma$ mọi $n \in \mathbf{N}$ nên $E_x \in \Sigma$. Ta cũng có $(E_{n+1})_x \subset (E_n)_x$, $n \in \mathbf{N}$ và $\nu(E_1)_x < +\infty$ $\mu-$h.k.n. trên X (Vì $\nu(E_1)_x$, hay cũng vậy φ_1, khả tích theo (*)). Do đó nếu với mỗi $n \in \mathbf{N}$, đặt $\varphi_n(x) := \varphi_{E_n}(x)$, $x \in X$ thì

$$\varphi_E(x) = \nu E_x = \lim_n \nu(E_n)_x = \lim_n \varphi_n(x), \text{ h.k.n. trên } X.$$

Vậy $0 \le \varphi_n \searrow \varphi_E$. Các hàm φ_n là đo được (Bước 2) nên φ_E cũng đo được. Ngoài ra φ_1 khả tích nên Định lí Levi về sự hội tụ đơn điệu cho ta

$$\int_X \nu(E_x)d\mu = \int_X \varphi_E d\mu = \lim_n \int_X \varphi_n d\mu =$$
$$= \lim_n \mu \otimes \nu(E_n) = \mu \otimes \nu(E).$$

Bước 4. Giả sử $\mu \otimes \nu(E) = 0$. Theo Bổ đề 4.2.2, tồn tại một tập $B \in \mathcal{A} \otimes \Sigma$ sao cho $E \subset B$, $\mu \otimes \nu(B) = \mu \otimes \nu(E)$ và B có dạng mô tả ở Bước 3.

Theo Bước 3, $B_x \in \Sigma$ $\mu-$h.k.n. trên X và $\int_X \varphi_B d\mu = \int_X \nu(B_x) d\mu = \mu \otimes \nu(B) = 0$. Để ý $\varphi_B \ge 0$ (φ_B được định nghĩa như φ_E) nên $\varphi_B = 0$ h.k.n. trên X hay $\nu(B_x) = 0$ h.k.n. trên X. Lại vì $E_x \subset B_x$ và ν là đủ nên $E_x \in \Sigma$ và do đó $\nu(E_x) = 0$ h.k.n. trên X. Vậy $\varphi_E = 0$ trên X và cuối cùng ta được

$$\int_X \varphi_E d\mu = 0 = \int_X \nu(E_x) d\mu = \mu \otimes \nu(E).$$

Bước 5. Trường hợp tổng quát : $E \in \mathcal{A} \otimes \Sigma$, $\mu \otimes \nu(E) < +\infty$. Cũng từ Bổ đề 4.2.2, tồn tại hai tập B, $C \in \mathcal{A} \otimes \Sigma$, B có dạng mô tả trong Bước 3, $\mu \otimes \nu(C) = 0$, $\mu \otimes \nu(B) = \mu \otimes \nu(E)$ và $E = B \setminus C$. Bây giờ vì $E_x = B_x \setminus C_x$ và theo các chứng minh trên B_x, $C_x \in \Sigma$ h.k.n. trên X nên $E_x \in \Sigma$ h.k.n. trên X.

Mặt khác, dễ thấy rằng $\phi_E = \phi_B - \phi_C$ h.k.n. trên X mà ϕ_B và ϕ_C là những hàm đo được nên ϕ_E đo được trên X. Hơn nữa $\phi_E = \phi_B$ h.k.n. trên X. Từ đây,

$$\int_X \nu(E_x)d\mu = \int_X \phi_E d\mu = \mu\otimes\nu(B) = \mu\otimes\nu(E).$$

(ii) Trường hợp $\mu\otimes\nu(E) = +\infty$. Để ý rằng do μ và ν đều là các độ đo $\sigma-$ hữu hạn nên $\mu\otimes\nu$ cũng là $\sigma-$ hữu hạn. Vì vậy E có thể được biểu diễn dưới dạng

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,\ E_n \subset E_{n+1},\ E_n \in \mathcal{A}\otimes\Sigma,\ \mu\otimes\nu(E_n) < +\infty,$$

mọi $n\in\mathbf{N}$. Lúc này vì với mọi $n\in\mathbf{N}$, $(E_n)_x \in \Sigma$ h.k.n. trên X và $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n)_x$ nên $E_x \in \Sigma$ h.k.n. trên X. Ngoài ra, để ý rằng $\left((E_n)_x\right)_n$ là dãy đơn điệu không giảm nên $\nu(E_x) = \lim_n \nu(E_n)_x$ $\mu-$ hầu khắp trên X. Từ đây, $0 \le \phi_{E_n} \nearrow \phi_E$ h.k.n. trên X nên ϕ_E đo được. Cuối cùng Định lí Levi cho

$$\int_X \nu(E_x)d\mu = \int_X \phi_E d\mu = \lim_n \int_X \phi_{E_n} d\mu =$$
$$= \lim_n \mu\otimes\nu(E_n) = \mu\otimes\nu(E).$$

Định lí đã được chứng minh ∎

4.2.3 Nhận xét. Định lí 4.2.1 khái quát một kết quả quen biết của tích phân Riemann trên IR^n, chẳng hạn, diện tích một miền G trong IR^2 bằng tích phân (trên IR) các lát cắt G_x của nó.

Đặc biệt nếu $f \ge 0$ thì $\int_a^b f(x)dx$ là diện tích của hình thang cong giới hạn bởi các đường $x = a$, $x = b$, trục hoành và đồ thị hàm $y = f(x)$. Kết quả này thể hiện ý nghĩa hình học của tích phân Riemann. Đối với tích phân Lebesgue ta cũng có kết quả tương tự.

4.3 Ý nghĩa hình học của tích phân Lebesgue.

Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian với độ đo μ đầy đủ và $\sigma-$

hữu hạn, $M \in \mathcal{A}$ và f là hàm không âm, khả tích trên M. *Đồ thị dưới*[(*)] của hàm f là tập

$$Q := \{(x, y) \in X \times \mathrm{IR} \mid x \in M,\ 0 \le y(x)\} (**).$$

Bây giờ ta lấy $Y = \mathrm{IR}$, $\Sigma = \mathcal{L}$ là $\sigma-$ đại số các tập đo được Lebesgue trên IR và ν là độ đo Lebesgue trên IR. Khi đó $Q \subset X \times \mathrm{IR}$. Ý nghĩa hình học của tích phân Lebesgue được thể hiện rõ trong định lí sau đây.

4.3.1 Định lí. *Đồ thị dưới Q của f là tập $\mu \otimes \nu -$ đo được, nghĩa là $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$. Ngoài ra,*

$$\mu \otimes \nu(Q) = \int_M f d\mu. \tag{4.4}$$

Chứng minh. Trước hết để ý rằng nếu $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ thì đẳng thức (4.4) là hệ quả trực tiếp của Định lí 4.2.1 với lưu ý rằng $Q_x = [0, f(x)]$, $\nu Q_x = f(x)$ nếu $x \in M$ và $Q_x = \emptyset$, $\nu Q_x = 0$ nếu $x \notin M$. Do vậy ta chỉ cần chứng minh $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ là đủ.

(i) Giả sử $\mu M < +\infty$.

(α) Nếu f là hàm đơn giản có biểu diễn $f = \sum_{i=1}^{n} c_i X M_i$ thì $Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$ với $Q_i := M_i \otimes [0, c_i]$, $i = 1, 2, ..., n$. Vì $Q_i \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ mọi $i = 1, 2, ..., n$ nên $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$. Để ý rằng trong trường hợp này $\mu \otimes \nu(Q) < +\infty$ và (4.4) đúng theo nhận xét trên.

(β) Nếu f đo được (không âm), bị chặn trên M thì theo định lí về cấu trúc hàm đo được, tồn tại một dãy các hàm đơn giản không âm $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sao cho $0 \le s_n \nearrow f$ và sự hội tụ là đều trên M. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$, ta đặt

---

(*) Thuật ngữ "đồ thị dưới" (subgraph) do nhà toán học Liên Xô I.P. Natanson (1906 – 1964) đưa ra.

(**) Nếu với $x \in M$ mà $f(x) = +\infty$ ta quy ước hiểu thiết diện Q_x tại x là $[0, +\infty)$ thay cho $[0, +\infty]$. Như vậy có thể coi $Q \subset X \times \mathrm{IR}$. Vả lại, với giả thiết f khả tích trên M tập các điểm x như thế có độ đo bằng không.

$$\phi_n(x) := \begin{cases} n+1 & \text{nếu } f(x) \geq n, \\ \dfrac{m}{2^n}, & f(x) \in \left[\dfrac{m-1}{2^n}, \dfrac{m}{2^n}\right), \; m \in \{1, 2, ..., n2^n\}. \end{cases}$$

Dễ dàng chứng minh được rằng (xem Chứng minh Định lí 5.4.1 Chương 3) $(\phi_n)_n$ là dãy đơn điệu không tăng các hàm đơn giản không âm và $\phi_n \geq f$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Ngoài ra, $\phi_n \searrow f$ đều trên M. Do đó với mọi $\epsilon > 0$ có $n_0 \in \mathbf{N}$ sao cho $s_{n_0} \leq f \leq \phi_{n_0}$ trên M và $\phi_{n_0} - s_{n_0} < \epsilon / \mu M$. Do đó

$$\int_M \phi_{n_0} d\mu - \int_M s_{n_0} d\mu < \epsilon.$$

Bây giờ nếu gọi Q_{n_0} và G_{n_0} lần lượt là đồ thị dưới của s_{n_0} và ϕ_{n_0}, thì rõ ràng rằng $Q_{n_0} \subset Q \subset G_{n_0}$. Theo (α) (có sử dụng (4.4)) ta được

$$\begin{aligned} \mu \otimes \nu\left(Q_{n_0} \setminus G_{n_0}\right) &= \mu \otimes \nu\left(Q_{n_0}\right) - \mu \otimes \nu\left(G_{n_0}\right) \\ &= \int_M \phi_{n_0} d\mu - \int_M s_{n_0} d\mu < \epsilon. \end{aligned}$$

Từ đây ta dễ dàng suy ra $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$.

(γ) Giả sử $f \geq 0$ tuỳ ý. Khi đó nếu đặt, $n \in \mathbf{N}$,

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x) & \text{nếu } f(x) \leq n, \\ n & \text{nếu } \mathrm{f(x)} > n \end{cases}$$

thì f_n là đo được, không âm, bị chặn trên M và hơn nữa, $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ (Q_n là đồ thị dưới của f_n). Theo phần (β), $Q_n \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Do vậy $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$.

(ii) Giả sử $\mu M = +\infty$. Vì μ là $\sigma-$ hữu hạn nên có thể viết $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ với $\mu M_n < +\infty$ mọi $n \in \mathbf{N}$. Bây giờ nếu gọi Q_n là đồ thị dưới của hàm f thu hẹp lên M_n thì dễ thấy rằng $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Theo chứng minh trên $Q_n \in A \otimes \mathcal{L}$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Do đó $Q \in A \otimes \mathcal{L}$ ∎

4.4 Định lí Fubini(*).

Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ và (Y, Σ, ν) là hai không gian với các độ đo đủ, $\sigma-$ hữu hạn và $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\Sigma, \mu\otimes\nu)$ là không gian tích của chúng. Giả sử $f: X\times Y \to \overline{\mathrm{IR}}$ là hàm $\mathcal{A}\otimes\Sigma-$ đo được(**). Kết quả cơ bản nhất của Mục §4 này là định lí sau.

4.4.1 Định lí. (Fubini) *Giả sử $f: X\times Y \to \overline{IR}$ là hàm $\mathcal{A}\otimes\Sigma-$ đo được. Khi đó nếu $f\geq 0$ hay f khả tích trên $X\times Y$ thì các tích phân lặp sau tồn tại*

$$\int_X[\int_Y fd\nu]d\mu,\ \int_Y[\int_X fd\mu]d\nu$$

và ta có đẳng thức

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu)=\int_X[\int_Y fd\nu]d\mu=\int_Y[\int_X fd\mu]d\nu. \tag{4.5}$$

Hơn nữa, khi f khả tích trên $X\times Y$ thì với hầu hết các $y\in Y$, hàm $X\ni x\mapsto f(x, y)$ khả tích trên X và với hầu hết các $x\in X$, hàm $Y\ni y\mapsto f(x, y)$ khả tích trên Y.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh đẳng thức thứ nhất trong (4.5).

Nếu $f=\chi_E$ với $E\in\mathcal{A}\otimes\Sigma$ thì từ Định lí 4.2.1 ta được

$$\int_{X\times Y}\chi_E d(\mu\otimes\nu)=\mu\otimes\nu(E)=\int_Y\mu(E^y)d\nu.$$

Mặt khác, với mỗi $y\in Y$ cố định thì $\chi_E(x, y)=1$ nếu $x\in E^y$ và $\chi_E(x, y)=0$ nếu $x\notin E^y$ cho nên

$$\mu(E^y)=\int_X\chi_E(x, y)d\mu.$$

Do đó

$$\int_{X\times Y}\chi_E(x, y)d(\mu\otimes\nu)=\int_Y[\int_X\chi_E(x, y)d\mu]d\nu.$$

Từ đây ta suy ra (4.5) cũng đúng với các hàm đơn giản không âm.

(*) G. Fubini (1879 – 1943), nhà toán học Ý.

(**) Nếu f xác định trên một tập $A\in\mathcal{A}\otimes\Sigma$ thì ta đặt $f(x, y):=0$ khi $(x,y)\notin A$)

Giả sử $f \geq 0$ và $(f_n)_n$ là dãy các hàm đơn giản không âm sao cho $0 \leq f_n \nearrow f$. Khi đó

$$\int_Y [\int_X f_n d\mu] d\nu = \int_{X\times Y} f_n d(\mu \otimes \nu) \to \int_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu),$$

khi $n \to \infty$. Ngoài ra, với mỗi $y \in Y$ cố định thì $0 \leq f_n(x, y) \nearrow f(x, y)$, mọi $x \in X$ nên

$$0 \leq \int_X f_n(x,y) d\mu(x) \nearrow \int_X f(x,y) d\mu(x), \text{ mọi } y \in Y.$$

Định lí Levi về sự hội tụ đơn điệu cho ta

$$\lim_{n\to\infty} \int_Y [\int_X f_n d\mu] d\nu = \int_Y [\int_X f d\mu] d\nu.$$

Vậy

$$\int_{X\times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_Y [\int_X f d\mu] d\nu.$$

Nếu f khả tích trên $X \times Y$ thì áp dụng điều vừa chứng minh ở trên cho các hàm f^+, f^- $\left(f = f^+ - f^-\right)$ ta được :

$$\int_{X\times Y} f^+ d(\mu \otimes \nu) = \int_Y [\int_X f^+ d\mu] d\nu < +\infty, \tag{*}$$

$$\int_{X\times Y} f^- d(\mu \otimes \nu) = \int_Y [\int_X f^- d\mu] d\nu < +\infty. \tag{**}$$

Các hệ thức trên cho thấy các tích phân $\int_X f^+ d\mu(x)$ và $\int_X f^- d\mu(x)$ là hữu hạn với hầu hết các $y \in Y$. Do đó với hầu hết các $y \in Y$, hàm $x \mapsto f(x, y)$ khả tích trên X. (4.5) được suy ra từ (*) và (**).

Đẳng thức thứ hai trong (4.5) và khẳng định còn lại có thể chứng minh được hoàn toàn tương tự ∎

4.4.2 Nhận xét.

(i) Định lí Fubini cho phép ta, dưới các điều kiện đã phát biểu, đưa việc tính một tích phân bội trên không gian tích về việc tính các tích phân lặp trên các không gian thành phần hoặc đổi thứ tự lấy tích phân trong các tích phân lặp.

(ii) Để có thể áp dụng Định lí Fubini cho một hàm không thoả điều kiện $f \geq 0$, trước hết ta phải khẳng định tính khả tích của hàm này trên không gian tích và đây là một vấn đề khó.

Sự tồn tại các tích phân lặp (cho dù là hữu hạn) nói chung không đủ để kéo theo tính khả tích của f. Để minh hoạ chúng ta hãy xét trường hợp $X = Y = [0, 1]$, $\mu = \nu$ là độ đo Lebesgue còn hàm f xác định bởi $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2$ nếu $(x, y) \neq (0, 0)$ và $f(0, 0) = 0$. Dễ dàng thấy rằng

$$\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y)dx]dy = -\frac{\pi}{4} \text{ và } \int_0^1 [\int_0^1 f(x, y)dy]dx = \frac{\pi}{4}.$$

Định lí Fubini chứng tỏ f không khả tích trên $[0, 1]\times[0, 1]$.

Tuy nhiên ta có định lí sau, rất thuận tiện trong áp dụng.

4.4.3 Định lí. (Tonelli) *Cho $f : X\times Y \to \overline{IR}$ là hàm $\mathcal{A}\otimes\Sigma-$ đo được. Nếu một trong hai tích phân lặp*

$$\int_X [\int_Y |f| d\nu] d\mu \text{ hay } \int_Y [\int_X |f| d\mu] d\nu$$

hữu hạn thì f khả tích trên $X\times Y$ và đẳng thức sau nghiệm đúng.

$$\int_{X\times Y} fd(\mu\otimes\nu) = \int_X [\int_Y fd\nu]d\mu = \int_Y [\int_X fd\mu]d\nu.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lí Fubini cho hàm $|f| \geq 0$, ta được

$$\int_{X\times Y} |f| d(\mu\otimes\nu) = \int_X [\int_Y |f| d\nu]d\mu = \int_Y [\int_X |f| d\mu]d\nu.$$

Lúc này nếu một trong hai tích phân lặp đã phát biểu ở định lí hữu hạn (tích phân còn lại cũng hữu hạn) thì $|f|$ khả tích và do đó f cũng khả tích. Khẳng định còn lại được suy từ Định lí Fubini ∎

4.4.4 Ví dụ. Giả sử $X = Y = \mathbf{N}$, $\mathcal{A} = \Sigma = \mathcal{P}(\mathbf{N})$ và $\mu = \nu$ là các độ đo đếm được trên $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ (Ví dụ 2.2.3 Chương 3). Khi đó một hàm $f : \mathbf{N}\times\mathbf{N} \to \mathrm{IR}$ là $(\mu\otimes\nu)-$ khả tích khi và chỉ khi $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |f(n, m)| < +\infty$. Trong trường hợp này ta có

$$\int_{\mathbf{N}\times\mathbf{N}} fd(\mu\otimes\nu) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(n, m) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f(n, m).$$

Thật vậy, khẳng định trên được suy ra từ các định lí Fubini, Tonelli và các đẳng thức sau

$$\int_{\mathbf{N}}[\int_{N}|f(n,m)|d\mu(m)]d\nu(n)=\int_{\mathbf{N}}[\sum_{m=1}^{\infty}|f(n,m)|]d\nu(n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|f(n,m)|.$$

Đẳng thức cần chứng minh là sự thể hiện cụ thể của đẳng thức trong Định lí Tonelli.

BÀI TẬP

4.1. Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ và (S, Σ, ν) là hai không gian độ đo với các độ đo $\sigma-$ hữu hạn. Giả sử $E, F \in \mathcal{A}\otimes\Sigma$ sao cho $\nu(E_x)=\nu(F_x)$ $\mu-$ h.k.n trên X. Chứng tỏ rằng

$$\mu\otimes\nu(E)=\mu\otimes\nu(F).$$

4.2. Giả sử $f:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to[0,+\infty]$. Sử dụng Định lí Fubini để chứng tỏ rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}f(n,m)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f(n,m).$$

4.3. Chứng tỏ rằng nếu $f(x,y)=ye^{-(1+x^2)y^2}$, mọi $x,y\in[0,\infty)$ thì

$$\int_0^{\infty}[\int_0^{\infty}f(x,y)d\mu(x)]d\mu(y)=\int_0^{\infty}[\int_0^{\infty}f(x,y)d\mu(y)]d\mu(x).$$

Từ đây hãy suy ra rằng

$$\int_{[0,\infty)}e^{-x^2}d\mu=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

BÀI TẬP ÔN

Bài O1.

Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo và f là một hàm khả tích trên X. Chứng tỏ rằng μ là độ đo $\sigma-$ hữu hạn.

Bài O2.

Giả sử μ là một độ đo $\sigma-$ hữu hạn trên $\mathcal{A}$.

a) Chứng tỏ rằng tồn tại một họ $(A_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$ thoả mãn các điều kiện

$$A_n \cap A_m = \emptyset \text{ nếu } m \neq n,\ \mu A_n < +\infty,\ n \in \mathbf{N},\ X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

b) Giả sử $(A_n)_n$ là họ tập như ở câu a). Với $x \in X$ ta đặt

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } x \in A_n \text{ mà } \mu A_n = 0, \\ \dfrac{1}{n^2 \mu A_n} & \text{nếu } x \in A_n \text{ mà } \mu A_n > 0. \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng f khả tích trên X.

Bài O3.

Giả sử $(f_n)_n$ là một dãy các hàm đo được, bị chặn trên A và $\mu A < \infty$. Chứng minh rằng nếu f_n hội tụ đều về f trên A thì

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

Hãy chỉ ra một ví dụ chứng tỏ rằng khẳng định trên không còn đúng nữa nếu $\mu A = \infty$.

[Hướng dẫn. Xem bài 3.12].

Bài O4.

Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo, $f : X \to [0, +\infty]$ là một hàm đo được. Gọi ν là độ đo sinh bởi μ và f (nghĩa là ν được xác định bởi

$$\nu(E) = \int_E f d\mu,\ (E \in \mathcal{A})). \tag{*}$$

Chứng tỏ rằng với mọi hàm đo được $g : X \to [0, +\infty]$ ta có :

$$\int_X g d\nu = \int_X g.f d\mu. \tag{**}$$

Bài O5.

Cho I là một gian trong IR và $f : I \to \mathrm{IR}$ khả tích Lebesgue. Giả sử $a, b \in \mathrm{IR},\ a \neq 0$. Đặt $J = \{(x-b)/a \mid x \in I\}$. Chứng tỏ rằng hàm $g : J \to \mathrm{IR}$ xác định bởi $g(x) = f(ax+b),\ x \in J$ là khả tích và ta có

$$\int_I f d\mu = |a| \int_J g d\mu.$$

[Hướng dẫn. Trước hết hãy chứng minh cho trường hợp f là hàm đơn giản không âm và để ý đến Bài tập 4.8 Chương 3.]

Bài O6.

Cho $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo với $\mu(X) < \infty$. Gọi $\mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu)$ là họ tất cả các hàm đo được, hữu hạn h.k.n. trên X. Trong $\mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ta xem hai hàm tương đương chỉ là một. Với $f, g \in \mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu)$ ta đặt

$$d(f,g) = \int_X \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} d\mu.$$

a) Chứng tỏ d là một mêtric trên $\mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu)$.

b) $f, f_n \in \mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $n \in \mathbf{N}$. Khi đó $d(f_n, f) \to 0$ khi và chỉ khi $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên A.

c) Chứng minh rằng $(\mathcal{S}(X, \mathcal{A}, \mu), d)$ là một không gian đầy đủ.

Bài O7.

Giả sử μ là độ đo đủ, f_n, f là các hàm khả tích trên A thoả mãn $\int_E |f_n - f| d\mu \to 0$. Chứng minh rằng $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Hãy chỉ ra một ví dụ chứng tỏ điều ngược lại không đúng.

Bài O8.

Giả sử $(f_k)_k$ là một dãy các hàm đo được trên A. Chứng tỏ rằng nếu

$$\int_A |f_k - f_j| d\mu \to 0 \text{ khi } k, j \to \infty$$

thì tồn tại một dãy con $(f_{k_i})_i$ của $(f_k)_k$ sao cho $(f_{k_i})_i$ hội tụ h.k.n. trên A về một hàm có giá trị hữu hạn và đo được trên A.
[Hướng dẫn. Chứng tỏ rằng

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{k,j \to \infty} \mu\{x \in A \mid |f_k(x) - f_j(x)| \geq \epsilon\} = 0$$

sau đó áp dụng Bài O17 Chương 3].

Bài O9.

Cho E là một tập đo được và gọi $L^1(E, \mu)$ là tập hợp gồm tất cả các hàm khả tích trên E. Trên $L^1(E, \mu)$ các hàm tương đương được xem là một. Với $f, g \in L^1(E, \mu)$, ta đặt

$$d(f, g) = \int_E |f - g| d\mu.$$

Chứng tỏ rằng

a) $(L^1(E, \mu), d)$ là một không gian mêtric,

b) $f_n \to f$ trong $(L^1(E, \mu), d)$ thì $f_n \xrightarrow{\mu} f$ trên E,

c) $(L^1(E, \mu), d)$ là một không gian mêtric đủ.

Bài O10.

Tính các tích phân Lebesgue trên $(0, +\infty)$ của các hàm số sau :

$$f(x) = e^{-x} \ ; \ g(x) = \frac{1}{2^{[x]}}$$

trong đó $[x]$ chỉ phần nguyên của x.

Bài O11.

Cho $(E_n)_n$ là một dãy những tập đo được thoả mãn $E_{n+1} \subset E_n$, mọi $n \in \mathbf{N}$ và f là một hàm khả tích trên E_1. Chứng tỏ rằng

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{E_n} f d\mu.$$

Bài O12.

Cho $(f_n)_n$ là một dãy hàm đo được, hội tụ theo độ đo (Lebesgue) đến hàm f trên $[0, 1]$. Ngoài ra, $|f_n| \leq M$, mọi $x \in [0, 1]$, mọi $n \in \mathbf{N}$ (M là một số dương nào đó). Giả sử $g : [-M, M] \to \mathrm{IR}$ liên tục.

a) Chứng minh rằng $g \circ f_n$ là $(\mathrm{L})-$ đo được trên $[0, 1]$, mọi $n \in \mathbf{N}$ và

$$g \circ f_n \xrightarrow{\mu} g \circ f \text{ trên } [0, 1],$$

b) Chứng tỏ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} g\circ f_n d\mu = \int_{[0,1]} g\circ f d\mu.$$

Bài O13.

Giả sử f là hàm khả tích trên E với $0<\mu E<+\infty$ và $f(x)>0$ với mọi $x\in E$. Chứng minh rằng nếu $0<\alpha<\mu E$ thì

$$\inf\left\{\int_e fd\mu \mid e\subset E,\ \mu e\geq\alpha\right\}>0.$$

Khẳng định trên còn đúng không nếu $\mu E=+\infty$?

Bài O14.

Giả sử $f\in C_{[0,1]}$, $f(0)=0$ và f khả vi tại 0. Chứng minh rằng hàm $g(x)=\dfrac{f(x)}{x\sqrt{x}}$ khả tích Lebesgue trên $[0,1]$.

Bài O15.

Cho $(f_n)_n$ là một dãy các hàm không âm, khả tích trên A và $f_n\to 0$ h.k.n. trên A. Giả sử rằng tồn tại một số thực $M>0$ sao cho $\int_A \max\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}d\mu\leq M$ với mọi $n\in\mathbb{N}$. Chứng tỏ rằng $\int_A f_n d\mu\to 0$ khi $n\to\infty$.

Bài O16.

Cho f là một hàm khả tích trên X và $\int_E fd\mu\leq\alpha$ với mọi tập đo được $E\subset X$ mà $\mu E<+\infty$ (α là một số thực nào đó). Chứng minh rằng $\int_X fd\mu\leq\alpha$. Kết luận còn đúng không nếu bỏ đi giả thiết f khả tích trên X ?

Bài O17.

Cho $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$ sao cho cả f và f^2 đều khả tích trên X. Chứng tỏ rằng

a) Nếu $1\leq p\leq 2$ thì f^p khả tích trên X.

b) $\lim_{p\to 1^+}\left(\int_X f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=\int_X fd\mu.$

[Hướng dẫn. a) Đặt $g = \max\{f, f^2\}$. Chứng minh $f^p \le g$.

b) Xét $(p_n)_n \subset [1, 2]$, $p_n \to 1$ và xét hàm $\varphi(p) = \int_X f^p d\mu$. Chứng minh rằng $\varphi(p_n) \to \varphi(1)$].

Bài O18.

Cho f là một hàm khả tích trên X và có tính chất $\int_X f^n d\mu = \int_X f d\mu$, mọi $n \in \mathbf{N}$. Chứng minh rằng tồn tại một tập đo được $E \subset X$ sao cho $f =_{\chi E}$ h.k.n. trên X.

[Hướng dẫn. Trước hết chứng minh cho trường hợp $f \ge 0$. Đặt

$E = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$, $E_\alpha = \{x \in X \mid f(x) \ge \alpha\}$, $\alpha > 1$.

Chứng minh $\mu E_\alpha = 0$ rồi suy ra $f \le 1$ h.k.n. trên X. Chứng minh $\int_X f(1-f) d\mu = 0$].

Bài O19.

a) Tính $(L)\int_{[0,1]} \dfrac{1}{\sqrt{x-\alpha}} d\mu$, $\alpha \in (0, 1]$.

b) Giả sử $r : \mathbf{N} \to (0, 1] \cap \mathbf{Q}$, $r \mapsto r(n) = r_n$ là một song ánh. Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt{x - r_n}} \text{ hội tụ h.k.n. trên } [0, 1].$$

Bài O20.

Giả sử $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian độ đo ($\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số) và $f : X \times (a, b) \to \mathrm{IR}$ là một hàm số thoả mãn các tính chất sau

(i) Với $t \in (a, b)$, hàm số $f(.,t)$ là đo được,

(ii) Tồn tại một hàm $h : X \to \mathrm{IR}$ và $t_0 \in [a, b]$ sao cho

$$h(x) = \lim_{t \to t_0} f(x, t) = h(x) \text{ với hầu hết } x \in X.$$

Chứng minh rằng h là một hàm khả tích trên X và

$$\lim_{t\to t_0}\int_X f(x,t)\,d\mu=\int_X \lim_{t\to t_0} f(x,t)\,d\mu=\int_X h(x)\,d\mu.$$

Ghi chú. Trong bài này $(a,\ b)$ có thể là khoảng không bị chặn trong IR và t_0 là một điểm tụ của $(a,\ b)$, tức là t_0 có thể là $\pm\infty$.

Bài O21.

Giả sử $(X,\ \mathcal{A},\ \mu)$ là một không gian độ đo đủ ($\mathcal{A}$ là một $\sigma-$ đại số) và $f: X\times(a,\ b)\to \mathrm{IR}$ là một hàm số thoả mãn các tính chất sau

(i) Với mỗi $t\in(a,\ b)$, hàm $f(.,t)$ khả tích trên X,

(ii) Tồn tại $t_0\in(a,\ b)$ sao cho đạo hàm riêng $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,\ t_0)$ tồn tại với hầu hết các $x\in X$,

(iii) Tồn tại một hàm g khả tích trên X và một lân cận V của t_0 sao cho

$$\frac{f(x,\ t)-f(x,\ t_0)}{t-t_0}\le g(x)$$

với mọi $t\in V\setminus\{t_0\}$ và hầu hết các $x\in X$. Chứng minh rằng

a) Hàm số $\dfrac{\partial f}{\partial t}(.,t_0)$ xác định và khả tích trên X,

b) Hàm số $F:(a,\ b)\to \mathrm{IR}$ định nghĩa bởi

$$F(t)=\int_X f(x,\ t)\,d\mu$$

khả vi tại t_0 và

$$F'(t_0)=\int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,\ t_0)\,d\mu.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[B] Michel Bouyssel, Intégrale de Lebesgue : Mesure et intégration, Cépadués Éditions, Toulous, 1997.

[F] Gerald B. Folland, Real analysis – Modern techniques and their applications, John Wiley & Sons, 1984.

[C] Phan Đức Chính, Giải tích hàm, T.1, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà nội 1978.

[C] George L. Cain, Introduction to General Topology, Addison – Wesley, 1994.

[C-F] Cônmôgôrốp, Phômin, Cơ sở lí thuyết hàm và giải tích hàm, T.1,2 (bản dịch tiếng Việt), NXB Giáo dục, Hà nội 1971.

[D] Dieudonné, Cơ sở giải tích hiện đại, T.1, (bản dịch tiếng Việt), NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1973.

[Ha] Lương Hà, Giáo trình Độ đo và tích phân, Đại học Huế, 1997.

[HS] Edwin Hewitt, Karl Stromberg, Real and abstract analysis, Springer – Verlag, Berlin, 1969.

[HU] Sze-Tsen Hu, Cơ sở giải tích toán học, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1978 (bản dịch tiếng Việt).

[K] Paul Krée, Intégration et théorie de la mesure – une approache géométrique, Ellipses, Paris, 1997.

[L] Nguyễn Xuân Liêm, Tôpô đại cương – Độ đo và Tích phân, NXB Giáo dục, Hà Nội, 1994.

[M] Paul Malliavin, Integration and Probability, Springer – Verlag, New York, 1995.

[PT] Nguyễn Viết Phú, Nguyễn Duy Tiến, Cơ sở lí thuyết xác suất, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội, 1983.

[T] Hoàng Tuy, Giải tích hiện đại, T.1,3 NXB Giáo dục, Hà Nội, 1978.

[V] B.Z. Vulikh, A Brief course in the theory of functions of a real variable, Mir Publisher, Moscow, 1976.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :

Phó Tổng Giám đốc kiêm Giám đốc NXBGD tại Tp. Đà Nẵng HUỲNH BÁ VÂN

Biên tập lần đầu :

TRẦN PHƯỚC CHƯƠNG

Biên tập tái bản :

NGUYỄN THỊ MINH CHÂU

Trình bày bìa :

PHAN MINH NHẬT

Sửa bản in :

ĐẶNG THỊ NGỌC DUNG

Chế bản :

PHÒNG MĨ THUẬT – CHẾ BẢN – SỬA BÀI

HÀM SỐ BIẾN SỐ THỰC

(CƠ SỞ GIẢI TÍCH HIỆN ĐẠI)

Mã số: 7K410n7 - DAI

In 1.000 bản, khổ 17 x 24 cm, tại Công ty CP In Phúc Yên.
Số XB: 11 - 2007/CXB/231 - 2119/GD.
In xong nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2007.

CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC - DẠY NGHỀ
HEVOBCO
25 HÀN THUYÊN - HÀ NỘI
Website : www.hevobco.com.vn

8 934980 759295

Giá: 23.700đ