

LÊ QUANG MINH - NGUYỄN VĂN VƯỢNG

# SỨC BỀN VẬT LIỆU

TẬP MỘT



NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LÊ QUANG MINH – NGUYỄN VĂN VƯỢNG

# **SỨC BỀN VẬT LIỆU**

TẬP MỘT

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



## *Lời nói đầu*

Cuốn giáo trình Sức bền vật liệu (S.B.V.L) xuất bản tại NXB Giáo dục từ năm 1984 đến 2006 được tái bản chín lần. Điều đó chứng tỏ nội dung của sách đã đáp ứng được chương trình giảng dạy của các trường Đại học kỹ thuật và đã có tác dụng giúp đỡ sinh viên trong việc học tập và nghiên cứu môn học.

Do chương trình, nội dung và phương pháp giảng dạy đang dần được chuẩn hoá nên lần xuất bản này chúng tôi đã biên soạn lại như sau :

Ba tập Sức bền vật liệu trước đây nay dồn thành hai tập gồm 25 chương :

*Tập một gồm 13 chương (Từ chương 1 đến chương 13) :* Mở đầu, Trạng thái ứng suất ; Trạng thái biến dạng ; Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng ; Đặc trưng hình học của một hình phẳng ; Thanh, nội lực trong thanh ; Bài toán uốn cộng kéo ; Bài toán uốn ngang phẳng; Đường đàn hồi ; Bài toán xoắn thuần túy ; Tính các mối nối ghép ; Bài toán chịu lực phức tạp ; Dầm trên nền đàn hồi.

*Tập hai gồm 12 chương (Từ chương 14 đến chương 25) :* Dây mềm ; Tính chuyển vị theo phương pháp năng lượng ; Giải bài toán siêu tĩnh bằng phương pháp tĩnh lực ; Ma trận chuyển ; Phương pháp phân tử hữu hạn ; Tải trọng động ; Tính độ bền khi ứng suất biến đổi có chu kì ; Ổn định ; Thanh thành mỏng ; Ống dày ; Vò ; Ứng suất tiếp xúc.

Chắc chắn trong quá trình viết không tránh khỏi những thiếu sót, mong độc giả lượng thứ và rất mong sự góp ý của độc giả để lần tái bản tới sách có thể phục vụ độc giả tốt hơn. Các góp ý xin gửi về Công ty Cổ phần Sách Đại học – Dạy nghề, 25 Hàn Thuyên, Hà Nội.

Các tác giả  
**LÊ QUANG MINH**  
**NGUYỄN VĂN VƯỢNG**



## Phần I

# CÁC PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG

---

## Chương 1

### MỞ ĐẦU

#### §1-1. NHIỆM VỤ CỦA MÔN HỌC

Nhiệm vụ của môn học là cung cấp cho sinh viên những kiến thức cơ bản về phương pháp tính toán độ bền, độ cứng và ổn định của thanh dưới tác dụng của ngoại lực. Môn học cũng đề cập đến một số kiến thức để tính toán cho hệ thanh, cho các tấm, các vỏ, thanh thành mỏng..., đề cập đến các bài toán về ứng suất tiếp xúc về các loại ống v.v... nghĩa là bao gồm một số kiến thức cơ bản của các môn "Sức bền vật liệu", "Cơ học kết cấu" và "Lí thuyết đàn hồi ứng dụng" như quan niệm sẵn có từ trước đến nay.

Như chúng ta đã biết, ngày nay với sự phát triển nhanh chóng của các môn Sức bền vật liệu, Lí thuyết đàn hồi và Cơ học kết cấu, ranh giới giữa chúng đã dần dần bị xóa bỏ [15]. Do yêu cầu cần phải cung cấp một số lượng kiến thức tối thiểu cần thiết về tính toán độ bền, độ cứng và sự ổn định của những chi tiết có những loại hình khác nhau cho sinh viên cơ khí, buộc chúng ta phải đề cập đến một số kiến thức cơ bản của các môn học trên, hay nói một cách khác, chúng ta đã xóa bỏ ranh giới giữa chúng.

Môn học còn có nhiệm vụ cung cấp cho sinh viên ngành cơ khí những kiến thức cơ bản của môn "Cơ học vật rắn biến dạng" vì với các kiến thức đó người kĩ sư chế tạo máy dễ dàng đi sâu vào lí thuyết dẻo, lí thuyết từ biến, dễ dàng nghiên cứu lí thuyết gia công áp lực, nghiên cứu thủy khí động lực v.v...

Khi nói đảm bảo yêu cầu về độ bền có nghĩa là phải thiết kế các chi tiết máy, hay kết cấu công trình có kích thước vừa đủ để có thể chịu tác dụng của ngoại lực mà không bị phá hỏng.

Đảm bảo yêu cầu về độ cứng có nghĩa là kích thước của chi tiết hay kết cấu đủ lớn để dưới tác dụng của ngoại lực chi tiết hay kết cấu có biến dạng hay chuyển vị nhỏ theo một giới hạn nhất định để đảm bảo cho chi tiết hay công trình làm việc bình thường dưới tác dụng của ngoại lực.

Yêu cầu đảm bảo điều kiện ổn định là các bộ phận công trình hay chi tiết máy phải có kích thước sao cho dưới tác dụng của ngoại lực chúng không mất hình dạng cân bằng ban đầu.

Đối tượng của môn học là vật rắn biến dạng, song để đơn giản việc tính toán chúng ta thường đưa ra các giả thuyết và các mô hình của vật liệu. Giả thuyết chung nhất là *giả thuyết về tính liên tục và đồng nhất của vật liệu*.

Tính liên tục có nghĩa là ta xem rằng ở mọi nơi trong vật thể đều có vật liệu. Rõ ràng điều đó là mâu thuẫn với thực tế vì vật liệu thực luôn luôn có cấu trúc nhất định. Giữa các tinh thể là một khoảng không gian "rỗng lớn". Cũng đã có nhiều công trình chú ý đến khoảng không gian này, thừa nhận giả thuyết về cấu trúc các hạt rời rạc, giữa chúng có lực hút và lực đẩy trong nhiệt độ thông thường. Lí thuyết này gọi là *lí thuyết đàn hồi rời rạc*. Song lí thuyết đó đã gặp rất nhiều khó khăn về phương diện toán học và ngay những lí thuyết đó đã cho thấy giả thuyết về vật liệu liên tục là có thể chấp nhận được.

Tính đồng nhất có nghĩa là tất cả mọi nơi trong vật thể vật liệu có tính chất lí hóa như nhau.

Ta cũng thừa nhận rằng khi không có ngoại lực tác dụng lên vật thể thì trong lòng vật thể không có ứng suất. Giả thuyết này được gọi là giả thuyết về trạng thái không có ứng suất ban đầu. Ứng suất mà ta sẽ xác định là phần ứng suất tăng lên tại điểm đang xét do ngoại lực sinh ra chứ không kể đến ứng suất có sẵn ban đầu tại điểm đó.

## §1-2. NHỮNG NGÀNH KHÁC NHAU CỦA CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG

Ngành phát triển đầu tiên của Cơ học vật rắn biến dạng là ngành Lí thuyết đàn hồi. Đối tượng nghiên cứu của lí thuyết đàn hồi là vật thể đàn hồi lí tưởng ; mô hình này do Húc (Hooke) đề ra nên được gọi là mô hình vật rắn của Húc. Tính đàn hồi lí tưởng là khả năng của vật thể lấy lại toàn vẹn hình dạng ban đầu khi nguyên nhân gây ra biến dạng đã bị loại bỏ. Công của ngoại lực được tích lũy dưới dạng thế năng đàn hồi trong vật thể. Hình dạng của vật thể chỉ phụ thuộc vào tải trọng đang tác động, không phụ thuộc vào quá trình đặt tải trọng quá khứ.

Lí thuyết đàn hồi được xem là một bộ môn của vật lí toán. Nhiệm vụ của môn học là tìm cách xác định ứng suất và biến dạng trong vật thể đàn hồi dưới tác dụng của ngoại lực ở trạng thái cân bằng tĩnh cũng như ở trạng thái cân bằng động như dao động. Phương pháp giải của môn học là đi từ điều kiện chuyển vị hay ngoại lực ở bề mặt để suy ra trạng thái ứng suất ở mọi nơi trong vật thể. Với phương pháp đó lí thuyết đàn hồi có thể đề cập đến các bài toán với vật thể có hình dạng đa dạng. Kết quả của lí thuyết đàn hồi đã được sử dụng trong nhiều lĩnh vực : trong xây dựng, trong ngành chế tạo máy, trong địa chấn học và trong vật lí.

Những bài toán của thủy động học, khí động học cũng dẫn đến những phương trình gần giống hoặc giống hần các phương trình của lí thuyết đàn hồi và lí thuyết dẻo.

Ở đây ta phân biệt hai ngành của lí thuyết đàn hồi : lí thuyết đàn hồi toán học và lí thuyết đàn hồi ứng dụng.

Lí thuyết đàn hồi toán học cố gắng tìm thấy các nghiệm hoàn toàn bằng phương pháp toán học. Trên thực tế với phương pháp này một số bài toán không giải nổi vì rất nhiều khó khăn về mặt toán học thuần túy. Để đáp ứng với nhu cầu thực tế, khi giải các bài toán phức

tạp, người ta thường đưa vào một số giả thuyết, ví dụ trong bài toán tấm và vỏ phải đưa vào giả thuyết về đoạn thẳng vuông góc với mặt trung bình của tấm sau khi biến dạng vẫn vuông góc với mặt đó chẳng hạn. Từ đó phát sinh một ngành được gọi là lí thuyết đàn hồi ứng dụng.

Sức bền vật liệu có thể xem là lí thuyết đàn hồi ứng dụng ; ở đây vật thể được xét chủ yếu có dạng thanh. Với hình dáng đặc biệt đó sức bền vật liệu đã đưa vào giả thuyết về tiết diện phẳng để giải quyết các bài toán. Căn cứ vào những nhận xét trực quan trong quá trình làm thí nghiệm với các thanh chịu uốn chịu kéo hoặc xoắn ; sức bền vật liệu còn đưa ra một giả thuyết thứ hai là giả thuyết về các thớ dọc không ép lên nhau và tách xa nhau trong quá trình thanh biến dạng. Với các giả thuyết đó Sức bền vật liệu dễ dàng tìm thấy nghiệm của bài toán mà không cần gì đến những phương trình cơ bản của đàn hồi. Nhưng đó cũng là mặt yếu của Sức bền vật liệu vì cách suy luận đó không đủ sức để giải các bài toán tìm ứng suất và biến dạng của các vật thể có dạng tấm, vỏ hay khối...

Một ngành học gắn với lí thuyết đàn hồi và sức bền vật liệu là ngành cơ học kết cấu hay là lí thuyết công trình hiểu theo nghĩa rộng là bao gồm nhiều môn học : lí thuyết đàn hồi, lí thuyết dẻo, lí thuyết từ biến, sức bền vật liệu... Cơ học kết cấu theo nghĩa hẹp là môn học nhằm tính ứng suất và biến dạng trong hệ thanh dưới tác dụng của tải trọng tĩnh cũng như động.

Quyển "Sức bền vật liệu" này viết theo quan điểm ý nghĩa rộng. Chúng tôi đã xóa bỏ ranh giới giữa lí thuyết đàn hồi, sức bền vật liệu và cơ học kết cấu. Sự xóa bỏ ranh giới đó không đứng trên ý nghĩa đơn thuần về các hình dạng vật thể được xét mà có một sự thay đổi sâu sắc về phương pháp giải quyết bài toán : Khai thác triệt để các phương trình cơ bản của lí thuyết đàn hồi và sử dụng ít nhất các giả thuyết. Bỏ đi giả thuyết về các thớ dọc mà các tác giả cho rằng không hợp lí. Tuy nhiên sách giữ lại nguyên vẹn cách giải của sức bền vật liệu trong một số bài toán như uốn ngang phẳng, uốn thanh cong... Ý nghĩa của việc làm đó là mong muốn trong một số giờ hạn chế của nhà trường, môn học có thể cung cấp cho sinh viên ngành cơ khí khả năng tự đọc sâu về lí thuyết đàn hồi, lí thuyết dẻo và giải quyết được những bài toán đa dạng của ngành cơ khí.

### **Sự phát triển của lí thuyết đàn hồi đã dẫn đến lí thuyết đàn hồi phi tuyến.**

Trong lí thuyết đàn hồi tuyến tính hay còn gọi là lí thuyết đàn hồi cổ điển, quan hệ giữa các thành phần biến dạng và ứng suất biến dạng là quan hệ bậc nhất. Quan hệ đó được biểu diễn bằng định luật Húc tổng quát. Điều đó chỉ đúng trong một chừng mực nào đó khi ứng suất chưa vượt quá một giới hạn nhất định. Thí nghiệm đã chứng tỏ rằng khi ứng suất vượt quá giới hạn đàn hồi thì quan hệ giữa ứng suất và biến dạng không còn là bậc nhất nữa. Quan hệ đó là một đường cong. Trong thực tế có nhiều loại vật liệu không tuân theo định luật Húc. Khi đó tương quan giữa ứng suất và biến dạng được biểu diễn dưới dạng một hàm số nào đó :

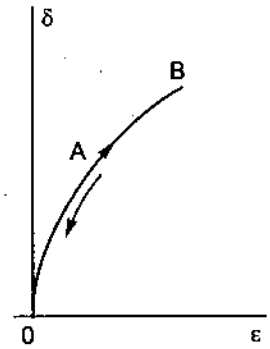
$$\sigma = f(\epsilon)$$

Lí thuyết đàn hồi viết trên tương quan đó được gọi là lí thuyết đàn hồi phi tuyến vật lí. Ở đây quá trình đặt tải và cất tải là thuận nghịch nghĩa là khi đặt tải tương quan giữa  $\sigma$

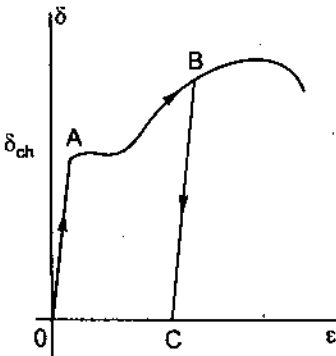
và  $\epsilon$  là đường cong OAB (h.1-1) thì khi cắt tải tương quan đó cũng giảm theo BAO. Biến dạng sẽ mất đi khi tải đã giảm hoàn toàn.

Với lí thuyết đàn hồi dù rằng tương quan giữa ứng suất và biến dạng là tương quan tuyến tính, nhưng nếu biến dạng không thể xem là bé được, các phương trình hình học là phi tuyến thì ta gọi đó là lí thuyết đàn hồi phi tuyến hình học.

Trong các thí nghiệm đối với sắt cũng như đối với hợp kim của chúng cho thấy khi ứng suất vượt quá giới hạn chảy thì tương quan giữa biến dạng và ứng suất là một đường cong (h.1-2), quá trình đó là một quá trình không thuận nghịch. Giả dụ khi tăng tải lên đến B rồi giảm tải đi thì quá trình giảm tải không theo đường cong OAB nữa mà theo đường BC nghĩa là sau khi giảm tải hoàn toàn vẫn còn một lượng biến dạng còn dư thể hiện bằng đoạn thẳng OC. Biến dạng đó được gọi là biến dạng dẻo. Lí thuyết nghiên cứu quy luật hình thành biến dạng dẻo và trạng thái ứng suất với quá trình biến dạng đó được gọi là Lí thuyết dẻo. Với lí thuyết dẻo ta cũng có hai ngành : ngành lí thuyết dẻo toán học mang tính chất chặt chẽ của toán học và lí thuyết dẻo ứng dụng mà trong đó các phương pháp tính được đơn giản hóa nhờ dựa vào các giả thuyết về mặt hình học hay về mặt vật lí.



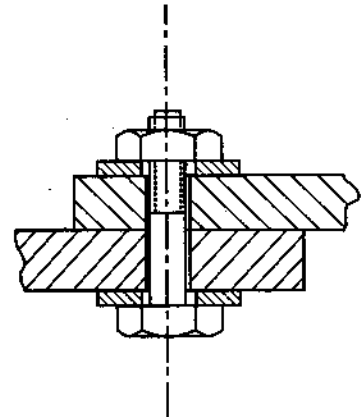
Hình 1-1



Hình 1-2



Hình 1-3



Hình 1-4

Chúng ta hãy để ý đến một tính chất sau đây của vật liệu. Ví dụ xét một thanh thép treo chịu tác dụng của lực kéo (h.1-3), khi đặt tải, lực P gây nên độ giãn  $\Delta l$  nào đó. Nếu ta để lực P tác dụng lâu dài thì độ giãn  $\Delta l$  vẫn tiếp tục tăng lên mặc dù rất chậm. Hiện tượng đó càng rõ khi thanh phải làm việc ở nhiệt độ cao mà ta gọi là hiện tượng sau tác dụng. Xét một ví dụ thứ hai : Xiết chặt êcu để ghép hai tấm phẳng (h.1-4). Nếu lực xiết đạt đến một giá trị nào đó và để tấm ghép làm việc lâu dài thì đến một lúc nào đó ta nhận thấy êcu bị lỏng ra, nghĩa là ứng suất trong bulông sẽ bị giảm đi. Hiện tượng đó được gọi là hiện tượng nới.

Hiện tượng sau tác dụng và hiện tượng nới thể hiện cùng một bản chất của vật liệu đó là hiện tượng xuất hiện biến dạng dẻo khi vật liệu làm việc dưới tác dụng lâu dài của



tải trọng. Hiện tượng đó được gọi là từ biến. Từ đó sinh ra một ngành cơ học là lí thuyết từ biến.

Hiện tượng từ biến xảy ra không những trong giai đoạn vật liệu đã bước vào giai đoạn chảy dẻo mà còn xảy ra ngay trong giai đoạn đàn hồi vì vậy lí thuyết từ biến đã sử dụng các phương trình của lí thuyết đàn hồi và lí thuyết dẻo.

Gần đây đã phát sinh một ngành mới là lí thuyết lưu biến. Lí thuyết này nghiên cứu những định luật chung về sự phát sinh và phát triển của biến dạng theo thời gian của vật liệu do những nguyên nhân khác nhau trong những điều kiện nhiệt độ và hóa lí khác nhau. Lí thuyết lưu biến cho phép ta xác định được biến dạng và ứng suất tại một điểm bất kì trong vật thể ở một thời điểm xác định khi biết được các thông số của yếu tố tác động bên ngoài và quá trình biến đổi của các thông số đó trong quá khứ.

### §1-3. LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN CỦA MÔN HỌC

Trong thế kỉ thứ 18 chúng ta đã có những công trình quan trọng được xem là những sự khởi đầu của môn học.

Năm 1729 Buyphighe đưa ra dạng quan hệ phi tuyến giữa ứng suất và biến dạng. Sau đó năm 1768 Húc đã đưa ra quy luật cơ bản của vật thể đàn hồi với dạng đơn giản tuyến tính. Gần như đồng thời với Húc ta có các công trình :

- Lí thuyết toán học về uốn của thanh đàn hồi của Óle và Becnuli.
- Tính ổn định của Óle.
- Dao động ngang của thanh đàn hồi (Óle và Becnuli)
- Nghiên cứu về lí thuyết lực đàn hồi của không khí (Lômônôxốp)

Cuối thế kỉ 18 và vào đầu thế kỉ 19 đã có ba nhà toán học nổi tiếng là Oxstrôgratxki, Côi và Poátxông đã nghiên cứu về bài toán truyền sóng trong môi trường đàn hồi. Nhà bác học người Pháp Naviê xuất phát từ quan điểm về lực tương tác giữa các phân tử của Niuton đã đề xuất ra lí thuyết đàn hồi rời rạc. Năm 1822 Côi đã đưa ra khái niệm về trạng thái ứng suất tại một điểm và viết các phương trình cân bằng cùng với các biểu thức biểu diễn sự tương quan giữa ứng suất và biến dạng cho vật thể đẳng hướng. Ta có thể kết luận rằng Naviê, Côi, Ostrôgratxki, Poátxông là những người đã đặt nền móng cho lí thuyết đàn hồi toán học.

Vào giữa và cuối thế kỉ 19, nhu cầu về phát triển công nghiệp lớn đã thôi thúc các nhà bác học tìm cách tính toán nhanh chóng những bài toán trong thực tế, do đó đã phát sinh ra ngành lí thuyết đàn hồi ứng dụng và lí thuyết về sức bền vật liệu. Những người có công trong lĩnh vực này là Óle, Becnuli, Giurapxki, Iaxinxki, Kiêcpisep Lamê, Culông, Clapâyron, Gadôlin, Xanhvonăng và các nhà bác học khác. Vào cuối thế kỉ 19 và sang đầu thế kỉ 20 ngành cơ học vật rắn biến dạng đã phát triển vô cùng rộng lớn : Trong lĩnh vực bài toán phẳng Cólôxốp và Muskhêlisvili đã đề ra phương pháp tìm nghiệm bằng lí thuyết hàm phức, lí thuyết về tấm của Búp-nốp và Galiocin, tính mái che không có dầm của Lâybenzôn, lí thuyết uốn thanh cong của Gôlôvin, kết cấu tàu thủy của Corulốp và

Papcovich, lí thuyết hệ thanh mỏng của Vlasov. Các tác phẩm về sức bền vật liệu, về tấm vỏ và lí thuyết đàn hồi của Timoshenko v.v...

Gần đây nhiều công trình đã phát triển sang lí thuyết đàn hồi dị hướng và nhất là từ khi có những máy tính lớn đã xuất hiện nhiều phương pháp tính như phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp siêu phần tử, phương pháp phần tử biên v.v...

Thành tựu đáng kể trong lĩnh vực mới của lí thuyết đàn hồi là lí thuyết đàn hồi phi tuyến. Trong lĩnh vực chính xác hóa ta có lí thuyết đàn hồi mômen.

Vào đầu nửa sau của thế kỉ XX đã phát triển mạnh các lí thuyết dẻo, lí thuyết từ biến và lưu biến...

Số tác phẩm, số công trình cũng như số các nhà bác học trên toàn thế giới đã lên đến con số khá lớn đến mức ta không thể thống kê vào đây được.

## §1-4. NGUYÊN LÍ XANH VONĂNG

Trong tất cả những phần tính toán sau đây chúng ta thường sử dụng một nguyên lí quan trọng đó là nguyên lí Xanh Vonăng.

**Nguyên lí được phát biểu như sau :** Nếu trên một phần nhỏ nào đó của vật thể có tác động của một hệ lực cân bằng thì ứng suất phát sinh sẽ tắt dần khá nhanh ở những điểm xa miền đặt lực. Ví dụ khi dùng kìm để cắt một sợi dây thép, ta thấy rằng trên sợi dây tại chỗ cắt tác động một hệ lực cân bằng. Dù cho lực cắt khá lớn thì tại những điểm xa chỗ cắt của sợi dây hầu như ứng suất bằng không.

Với nguyên lí Xanh Vonăng ta có thể thay thế một hệ lực cân bằng bằng một hệ lực tương đương khác để tính ứng suất trong vật thể, ví dụ như chuyển lực từ mặt phía trên của dầm xuống mặt dưới, hoặc thay lực tập trung đặt tại đầu mút của dầm bằng một nhóm lực phân bố có giá trị tương đương và ngược lại bằng cách thêm các hệ phụ tự cân bằng. Sự thay thế đó chỉ làm thay đổi sự phân bố của ứng suất ở vùng lân cận, còn tại những điểm cách xa vị trí đặt lực sự phân bố của ứng suất là như nhau. Ta có thể phát biểu nguyên lí như sau : Tại những điểm của vật thể cách xa điểm đặt lực thì ứng suất phụ thuộc rất ít vào cách tác dụng của lực.

## Chương 2

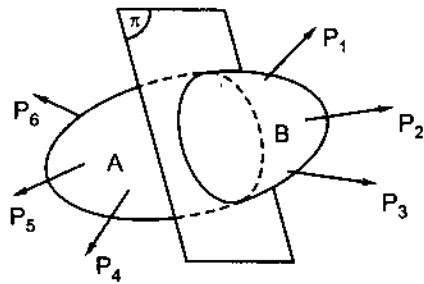
# TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

### §2-1. ỨNG SUẤT

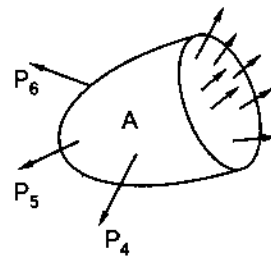
Xét vật thể đàn hồi ở trạng thái cân bằng dưới tác dụng của ngoại lực (h.2-1).

Tưởng tượng cắt qua vật thể một mặt cắt  $\pi$  bất kì. Mặt cắt chia vật thể thành hai phần A và B.

Tưởng tượng vứt bỏ phần B và xét điều kiện cân bằng của phần A (h.2-2). Sở dĩ A giữ được trạng thái cân bằng là nhờ phần B đã tác động lên phần A một hệ lực phân bố trên khắp mặt cắt. Ngược lại nếu xét sự cân bằng của phần B; A sẽ tác động lên B một hệ lực tương tự nhưng có chiều ngược lại. Hệ lực đó được gọi là hệ nội lực hay ứng lực trong lòng của vật thể.



Hình 2-1



Hình 2-2

Hệ lực đó sinh ra để chống lại biến dạng do ngoại lực gây nên.

Sự phân bố của hệ lực trên mặt cắt là chưa xác định, nhưng dễ dàng tính được hợp lực của chúng vì chúng phải cân bằng với ngoại lực tác động lên mỗi phần.

Chúng ta sẽ nói kĩ hơn về các hợp lực đó khi đề cập đến bài toán thanh. Ở đây chúng ta hãy xét ứng suất tại một điểm M bất kì trên mặt cắt  $\pi$  (h.2-3). Lấy một phần tử diện tích  $dF$  chung quanh M. Gọi ứng lực trên  $dF$  là  $d\vec{P}_i$ . Phương của  $d\vec{P}_i$  nói chung không vuông góc với  $\pi$ . Ta gọi ứng suất tại M là tỉ số :

$$\vec{p} = \frac{d\vec{P}_i}{dF} \quad (\text{N/cm}^2) \quad (2-1)$$

khi  $dF$  tiến đến không. Vector  $\vec{p}$  có phương chiều của  $d\vec{P}_i$ .

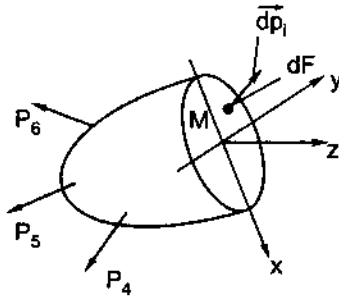
Nếu trên mặt cắt  $\pi$  ta chọn một hệ trục tọa độ thuận Oxyz với Oz vuông góc với  $\pi$  và gọi  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  là các vector đơn vị trên các trục thì  $\vec{p}$  được biểu diễn qua các thành phần hình chiếu của nó như sau :

$$\vec{p} = \sigma_z \vec{k} + \tau_{zy} \vec{j} + \tau_{zx} \vec{i} \quad (2-2)$$

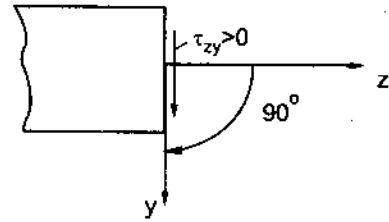
$\sigma_z$  được gọi là ứng suất pháp ;

$\tau_{zy}$  và  $\tau_{zx}$  được gọi là ứng suất tiếp : Chỉ số z để chỉ  $\tau$  nằm trên mặt cắt vuông góc với trục z và chỉ số thứ hai để chỉ phương song song của  $\tau$ .

Ta quy định dấu của ứng suất pháp và ứng suất tiếp như sau :



Hình 2-3



Hình 2-4

$\sigma_z$  được xem là dương khi vectơ biểu diễn nó có chiều trùng với chiều của pháp tuyến ngoài của mặt cắt ;

$\tau_{zy}$  được xem là dương khi đứng về phía dương của trục x nhìn vào mặt yOz thấy chiều của vectơ biểu diễn  $\tau_{zy}$  là chiều của z quay theo chiều kim đồng hồ một góc  $90^\circ$  trong mặt yOz (h.2-4).

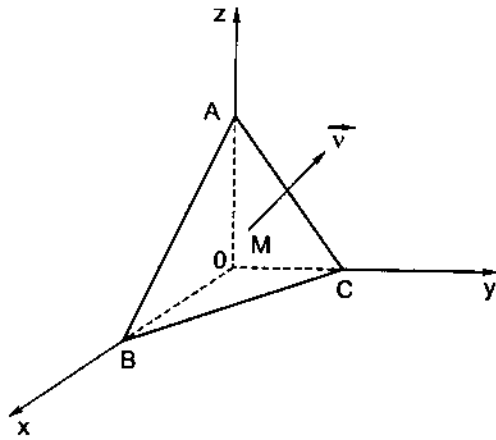
## §2-2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT

Nếu cho qua M những mặt cắt  $\pi$  khác nhau thì tương ứng với mỗi vị trí của  $\pi$  ta được một vectơ ứng suất  $\vec{p}$ . Tập hợp tất cả mọi vectơ ứng suất  $\vec{p}$  của tất cả các mặt cắt qua M được gọi là trạng thái ứng suất tại M.

Tập hợp đó không phải là một tập hợp những vectơ độc lập. Quả vậy, tưởng tượng tách ra khỏi M một phần tử vô cùng bé bằng những mặt cắt  $\pi$ . Phần tử bé đến mức thể tích của nó tiến tới không. Khi đó có thể xem như các mặt cắt  $\pi$  đi qua M. Vì phần tử phải ở trong trạng thái cân bằng nên ứng lực do ứng suất  $\vec{p}$  trên một mặt nào đó gây nên phải cân bằng với các ứng lực trên các mặt cắt còn lại. Xét trường hợp phần tử có hình dáng đơn giản nhất là một hình tứ diện.

Giả sử bốn mặt cắt  $\pi$  qua M có ba mặt song song với các mặt tọa độ và mặt thứ tư là một mặt nghiêng bất kỳ. Ứng lực trên mặt nghiêng phải cân bằng với ứng lực tác dụng trên





Hình 2-5

ba mặt song song với các mặt tọa độ. Ta được một tứ diện vuông MABC như trên hình 2-5. Ở đây các cạnh của tứ diện là song song với các trục tọa độ nên để thuận lợi ta dời góc tọa độ về M. Vậy Oxyz sẽ trùng với MBCA. Gọi  $\vec{v}$  là vectơ đơn vị trên pháp tuyến của mặt cắt nghiêng.

Các cosin chỉ phương của  $\vec{v}$  được kí hiệu như sau :

$$\left. \begin{aligned} \cos(v, x) &= l \\ \cos(v, y) &= m \\ \cos(v, z) &= n \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

Gọi  $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$  và  $\vec{p}_v$  là ứng suất trên các mặt cắt yOz, xOz, xOy và ABC. Ta có thể biểu diễn chúng qua các thành phần hình chiếu của chúng trên các trục tọa độ như sau :

$$\left. \begin{aligned} \vec{p}_x &= \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} \\ \vec{p}_y &= \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k} \\ \vec{p}_z &= \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{j} + \sigma_z \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (2-4)$$

$$\vec{p}_v = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k} \quad (2-5)$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  là các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.

và X, Y, Z là các thành phần của ứng suất  $\vec{p}_v$ , song song với các trục tọa độ. Nếu gọi dS là diện tích của tam giác ABC và lần lượt dS', dS'', dS''' là diện tích của các mặt AOC, AOB, BOC thì :

$$dS' = dS l ; dS'' = dS m ; dS''' = dS n$$

Từ điều kiện cân bằng của phần tử ta có :

$$\vec{p}_x dS l + \vec{p}_y dS m + \vec{p}_z dS n + \vec{p}_v dS = 0$$

Hay :

$$\vec{p}_x \cdot l + \vec{p}_y \cdot m + \vec{p}_z \cdot n + \vec{p}_v = 0 \quad (2-6)$$

Chiếu xuống các trục ta có các hệ thức :

$$\left. \begin{aligned} X &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

Hay viết dưới dạng ma trận :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

*Chú ý* : Phép nhân nối tích hai ma trận ở phía phải cho ta một ma trận cột ở về trái với ba thành phần.

Ngoài điều kiện vectơ chính bằng không ta phải có mômen chính bằng không. Gọi  $O'$  là trọng tâm của ABC. Xác định hệ trục tọa độ  $O'x'y'z'$  song song với hệ trục cũ. Các thành phần mômen chính tại  $O'$  sẽ là tổng mômen của các lực đối với các trục  $O'x'$ ,  $O'y'$ ,  $O'z'$  (h.2-6).

Ví dụ tính tổng mômen của các lực đối với trục  $O'x'$ . Ta nhận thấy tất cả các mômen do các lực khác gây nên là bằng không, trừ mômen do lực của hai thành phần  $\tau_{yz}$  và  $\tau_{zy}$ . Ta giả sử chiều các vectơ ứng suất  $\tau_{yz}$  và  $\tau_{zy}$  như trên hình 2-6 và gọi  $h$ ,  $h'$  là các chiều cao của tứ diện tương ứng với các mặt OBC và OAB. Ta phải có :

$$dS''' \frac{h}{3} \tau_{zy} - dS''' \frac{h'}{3} \tau_{yz} = 0$$

Vì

$$dS''' \frac{h}{3} = dS''' \frac{h'}{3} = dV$$

$dV$  – thể tích của tứ diện.

nên :

$$|\tau_{zy}| = |\tau_{yz}| \quad (2-8)$$

Viết các phương trình mômen đối với các trục  $O'y'$  và  $O'z'$  ta được các biểu thức tương tự :

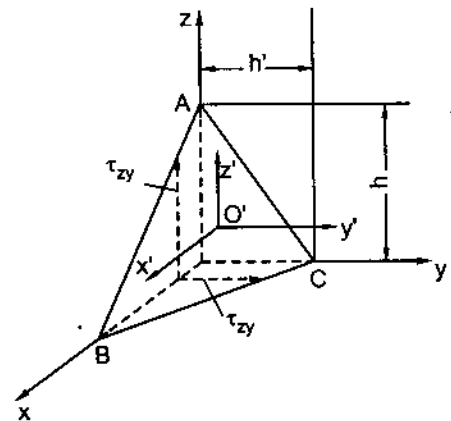
$$|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}| ; |\tau_{xz}| = |\tau_{zx}|$$

Từ đó ta có thể phát biểu như sau :

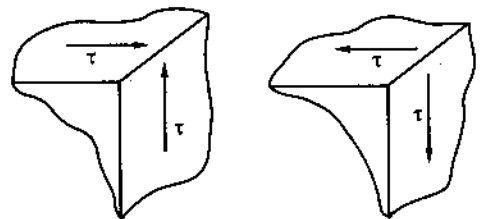
*Các thành phần ứng suất tiếp trên các mặt cắt vuông góc với nhau thì có chiều cùng hướng vào cạnh chung hoặc cùng hướng ra khỏi cạnh chung và về trị số là bằng nhau (h.2-7).*

Mệnh đề đó được gọi là định luật đối ứng của ứng suất tiếp.

Như vậy trong chín thành phần ứng suất trên các mặt của tam diện vuông chỉ có sáu thành phần độc lập. Chúng là các thành phần của một đại lượng vật lí không biến đổi khi hệ trục tọa độ thay đổi và được gọi là tenxơ ứng suất, đó là một tenxơ hạng hai đối xứng :



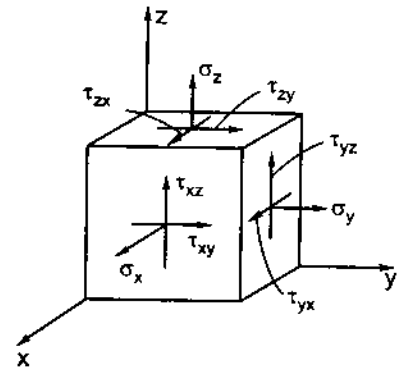
Hình 2-6



Hình 2-7

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (2-9)$$

Chúng đặc trưng cho trạng thái ứng suất tại M vì các thành phần đó đủ xác định được mọi ứng suất trên các mặt cắt khác đi qua M. Cũng từ đó để biểu diễn trạng thái ứng suất tại M, ta tách ra khỏi M một phân tố hình hộp vô cùng bé mà thể tích có thể xem là không và kí hiệu các thành phần ứng suất trên các mặt cắt như trên hình 2-8.



Hình 2-8

Ở đây, chúng ta chú ý rằng trị số ứng suất trên hai mặt cắt song song là khác nhau, nếu thể tích của phân tố tiến đến không thì có thể xem ứng suất trên hai mặt song song đó là bằng nhau.

Để thuận lợi cho cách viết thu gọn hay khi phải tính toán với nhiều ẩn số người ta còn sử dụng các ký hiệu sau đây : Hệ trục Oxyz được kí hiệu là  $Ox_1x_2x_3$ . Các ứng suất pháp trên các mặt cắt vuông góc với  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  được ký hiệu là  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ . Các ứng suất tiếp được ký hiệu với hai chỉ số khác nhau.  $\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$ , chỉ số thứ nhất để chỉ phương pháp tuyến của mặt cắt và chỉ số thứ hai để chỉ phương song song của ứng suất tiếp đó.

Các thành phần của tenxơ ứng suất  $T_{\sigma}$  được viết lại như sau :

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

Hay một cách gọn hơn :

$$T_{\sigma} = [\sigma_{ij}] \text{ với } i, j = 1, 2, 3 \quad (2-11)$$

Chỉ số thứ nhất để chỉ cột và chỉ số thứ 2 để chỉ hàng.

Định luật đối ứng của ứng suất tiếp được diễn đạt với biểu thức :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{với } i \neq j \text{ và } i, j \text{ lần lượt lấy các trị số } 1, 2, 3 \quad (2-12)$$

Các cosin chỉ phương của một trục  $v$  nào đó đối với hệ trục  $Ox_1x_2x_3$  được ký hiệu là  $n_{v_1}, n_{v_2}, n_{v_3}$ . Chỉ số thứ nhất để chỉ phương pháp tuyến của mặt cắt và chỉ số thứ hai để chỉ phương của trục tọa độ.

### Bài toán quay trục

Giả sử tại một điểm trong vật thể đàn hồi chịu lực ta đã biết các thành phần của tenxơ ứng suất đối với hệ trục ban đầu  $Ox_1x_2x_3$ . Vấn đề đặt ra là xoay hệ trục đó đến một vị trí mới  $Ox'_1x'_2x'_3$  ta phải xác định được các thành phần của tenxơ ứng suất tại điểm đó đối với hệ trục mới  $Ox'_1x'_2x'_3$ .

### Bài giải

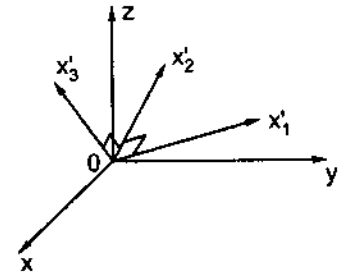
Các thành phần tenxơ ứng suất đối với hệ trục  $Ox_1x_2x_3$  là các ứng suất trên các mặt nghiêng lần lượt có pháp tuyến là  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$ .

Gọi các cosin chỉ phương của các trục đó đối với  $Ox_1x_2x_3$  là như sau :

đối với  $Ox_1$  là  $n_{11}, n_{12}, n_{13}$

đối với  $Ox_2$  là  $n_{21}, n_{22}, n_{23}$

đối với  $Ox_3$  là  $n_{31}, n_{32}, n_{33}$



Hình 2 - 9

Ba thành phần song song với hệ trục  $Ox_1x_2x_3$  của ứng suất trên mặt cắt nghiêng vuông góc với  $Ox_1$  sẽ là :

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

Ứng suất pháp trên mặt cắt chẳng qua là tổng hình chiếu của  $X_1X_2X_3$  lên  $Ox_1$ . Vậy ta có :

$$\sigma_{11} = [X_1 \ X_2 \ X_3] \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

Đem (2-13) thay vào (2-14) với chú ý ma trận cột (2-13) phải đổi thành ma trận hàng trong phép nhân nội tích (2-14). Ta có :

$$\sigma_{11} = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

Ứng suất tiếp trên mặt cắt đó có phương song song với  $Ox_2$  là tổng hình chiếu  $X_1X_2$  và  $X_3$  lên phương  $Ox_2$ . Vậy

$$\sigma_{12} = [X_1 \ X_2 \ X_3] \begin{bmatrix} n_{21} \\ n_{22} \\ n_{23} \end{bmatrix}$$

Thay (2-13) vào ta có :

$$\sigma_{12} = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} n_{21} \\ n_{22} \\ n_{23} \end{bmatrix} \quad (2-16)$$



Một cách tổng quát các công thức (2-15) và (2-16) có thể viết lại dưới dạng rút gọn như sau :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \{[\sigma_{ij}][n_{\alpha j}]\}^T [n_{\beta i}] \quad \text{với } i, j = 1, 2, 3 \quad (2-17)$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

Với chú ý phép nhân nội tích thứ nhất trong ngoặc cho ta ma trận cột của ba thành phần vectơ ứng suất. Ta phải đổi thành ma trận hàng để thực hiện tiếp phép nhân nội tích thứ hai.

Như vậy (2-17) cho ta tất cả các thành phần của tenxơ ứng suất trong hệ trục mới  $Ox_1x_2x_3$ .

*Ví dụ :* Cho các thành phần của một tenxơ ứng suất như sau :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 100 \text{ N/cm}^2 & \sigma_y &= 150 \text{ N/cm}^2 & \sigma_z &= 200 \text{ N/cm}^2 \\ \tau_{xy} &= 150 \text{ N/cm}^2 & \tau_{yz} &= 100 \text{ N/cm}^2 & \tau_{zx} &= 50 \text{ N/cm}^2. \end{aligned}$$

Pháp tuyến của mặt cắt nghiêng ABC so với các trục tọa độ có các cosin chỉ phương như sau :

$$\cos(n, x) = \cos 30^\circ \quad \cos(n, y) = \cos 70^\circ$$

1. Xác định ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt.
2. Giả sử chọn phương của pháp tuyến đó làm một trục tọa độ mới. Tự chọn hai trục còn lại và xác định các thành phần của tenxơ ứng suất đó trong hệ trục mới.

### *Bài giải*

#### 1. Tính $\cos(n, z)$

$$\cos(n, x) = \cos 30^\circ = 0,866$$

$$\cos(n, y) = \cos 70^\circ = 0,342$$

với biểu thức  $\cos^2(n, x) + \cos^2(n, y) + \cos^2(n, z) = 1$  ta tính được

$$\cos(n, z) = \cos 68^\circ = 0,365.$$

2. Gọi  $\vec{p}$  là vectơ ứng suất trên ABC các thành phần song song với các trục tọa độ Oxyz của  $\vec{p}$  là  $p_x, p_y, p_z$ . Các trị số đó được tính với biểu thức :

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 50 \\ 150 & 150 & 100 \\ 50 & 100 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,866 \\ 0,342 \\ 0,365 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 156,15 \\ 217,7 \\ 150,5 \end{bmatrix}$$

Trị số ứng suất pháp trên mặt cắt sẽ là :

$$\sigma_n = [156,15 ; 217,7 ; 150,5] \begin{bmatrix} 0,866 \\ 0,342 \\ 0,365 \end{bmatrix} = 264,6118 \text{ N/cm}^2.$$



Tương tự như vậy ta sẽ tìm thấy :

$$\begin{aligned} \sigma'_{21} &= 259,8 \text{ N/cm}^2; & \sigma'_{31} &= 222,2 \text{ N/cm}^2 \\ \sigma'_{22} &= 245,70 \text{ N/cm}^2; & \sigma'_{32} &= 189,47 \text{ N/cm}^2 \\ \sigma'_{23} &= 189,47 \text{ N/cm}^2; & \sigma'_{33} &= 257,62 \text{ N/cm}^2. \end{aligned}$$

Như vậy tenxơ ứng suất là :

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 264,62 & 259,8 & 222,2 \\ 259,8 & 245,7 & 189,47 \\ 222,2 & 189,47 & 257,626 \end{bmatrix}$$

### §2-3. PHƯƠNG CHÍNH VÀ ỨNG SUẤT CHÍNH

Ta gọi mặt cắt trên đó không có ứng suất tiếp là mặt chính. Nếu trên đó có ứng suất pháp thì ứng suất đó được gọi là ứng suất chính. Trường hợp không có ứng suất pháp thì ta xem giá trị ứng suất chính là bằng không. Như vậy trên mặt chính ứng suất toàn phần  $\vec{p}_v$  có phương trùng với phương của pháp tuyến của mặt cắt. Vậy ta có.

$$\vec{p}_v = \sigma_v \cdot \vec{v} \quad (2-18)$$

Chiếu cả hai vế xuống các trục tọa độ ta có :

$$X = \sigma_v l; \quad Y = \sigma_v m; \quad Z = \sigma_v n \quad (2-19)$$

Đem hệ thức đó vào (2-7). Sau khi chuyển vế và thu gọn ta được :

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_v)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n &= 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma_v)m + \tau_{zy}n &= 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma_v)n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

trong đó  $\sigma_v$  và  $l, m, n$  là các ẩn số phải tìm, vì ta phải có :

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

nên  $l, m, n$  không thể đồng thời triệt tiêu và như vậy định thức của hệ phương trình thuần nhất (2-20) phải bằng không.

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma_v) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_v) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_v) \end{vmatrix} = 0 \quad (2-21)$$

Khai triển định thức ta có :

$$\sigma_v^3 - I_1 \sigma_v^2 - I_2 \sigma_v - I_3 = 0 \quad (2-22)$$

trong đó :

$$\left. \begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
 I_2 &= - \left| \begin{array}{cc|cc}
 \sigma_x & \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{zy} \\
 \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} & \sigma_z \\
 \hline
 \tau_{xz} & \tau_{xz} & \sigma_z & \tau_{xz} \\
 \hline
 \sigma_z & \tau_{xz} & \tau_{xz} & \sigma_x
 \end{array} \right| \\
 I_3 &= \left| \begin{array}{ccc}
 \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{xz} \\
 \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\
 \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z
 \end{array} \right|
 \end{aligned} \right\} \quad (2-23)$$

Phương trình (2-21) cho phép ta xác định được các giá trị ứng suất chính. Ta nhận thấy các phương chính luôn luôn vuông góc với nhau từng đôi một.

Thật vậy gọi các nghiệm đó là  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Các cosin chỉ phương tương ứng với ba nghiệm đó là  $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$ ; Từ (2-20) ta có thể viết : (ví dụ đối với phương chính thứ nhất) :

$$\begin{cases}
 (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{yx}m_1 + \tau_{zx}n_1 = 0 \\
 \tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{zy}n_1 = 0 \\
 \tau_{xz}l_1 + \tau_{yz}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 = 0
 \end{cases}$$

Nhân phương trình thứ nhất với  $l_2$ , phương trình thứ hai với  $m_2$  và phương trình thứ ba với  $n_2$  rồi cộng các vế với nhau ta được :

$$\begin{aligned}
 & [(\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{yx}m_1 + \tau_{zx}n_1]l_2 + [\tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \\
 & \quad + \tau_{zy}n_1]m_2 + [\tau_{xz}l_1 + \tau_{yz}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1]n_2 = 0
 \end{aligned} \quad (2-24)$$

Một cách tương tự viết đảo lại :

$$\begin{aligned}
 & [(\sigma_x - \sigma_2)l_2 + \tau_{yx}m_2 + \tau_{zx}n_2]l_1 + [\tau_{xy}l_2 + (\sigma_y - \sigma_2)m_2 + \\
 & \quad + \tau_{zy}n_2]m_1 + [\tau_{xz}l_2 + \tau_{yz}m_2 + (\sigma_z - \sigma_2)n_2]n_1 = 0
 \end{aligned} \quad (2-25)$$

Đem trừ (2-24) và (2-25) cho nhau và chú ý  $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ , sau khi rút gọn ta được :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) = 0$$

Điều đó đúng với mọi  $\sigma_1$  và  $\sigma_2$ , nghĩa là :

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \quad (2-26)$$

Vậy hai phương  $v_1$  và  $v_2$  tương ứng với  $\sigma_1$  và  $\sigma_2$  vuông góc với nhau. Tương tự ta có thể chứng minh  $v_2$  và  $v_3$  cũng như  $v_1$  và  $v_3$  là vuông góc với nhau.

Từ đó ta cũng chứng minh được rằng phương trình (2-22) chỉ có ba nghiệm thực.



Thực vậy giả sử phương trình có hai nghiệm ảo liên hợp

$$\sigma_1 = a + bi \text{ và } \sigma_2 = a - bi$$

Sau khi thay các trị số đó vào (2-20) ta sẽ tìm thấy các giá trị của  $l_1l_2$ ,  $m_1m_2$ ,  $n_1n_2$  là các lượng liên hợp. Tích

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$$

phải là một trị số dương. Điều đó trái với điều kiện (2-26). Vậy phương trình (2-22) chỉ có thể có ba nghiệm thực. (Xem cách giải phương trình bậc ba ở cuối sách).

Tóm lại tại mỗi điểm của vật thể đàn hồi ta tìm thấy ba mặt cắt vuông góc với nhau mà trên ba mặt đó các vectơ ứng suất trùng với pháp tuyến của mặt cắt. Các mặt đó là các mặt cắt chính và ứng suất chính. Các ứng suất chính được kí hiệu như sau  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  với quy ước  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  về trị số đại số.

Vừa qua chúng ta đã sử dụng các thành phần ứng suất trên ba mặt cắt bất kì để xác định phương chính và ứng suất chính. Xét về ý nghĩa vật lí ta nhận thấy rằng phương chính ứng suất không tùy thuộc các mặt cắt đã chọn ban đầu, nghĩa là không phụ thuộc tọa độ ban đầu. Chúng chỉ phụ thuộc vào điều kiện chịu lực của vật thể; dù ta chọn tọa độ ban đầu như thế nào thì phương chính và ứng suất chính chỉ là một. Nói một cách khác phương chính và ứng suất chính là những đại lượng vật lí không thay đổi khi thay đổi hệ trục tọa độ. Vì vậy sáu thành phần ứng suất mà chúng ta đã nêu trên đây là những thành phần của một tenxơ ứng suất. Khi đưa về trục chính thì chỉ còn ba thành phần :

$$T_\sigma = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Tenxơ đó thể hiện trạng thái chịu lực của điểm đang xét. Điều đó có nghĩa là các hệ số của phương trình (2-22) là không đổi khi thay đổi hệ trục tọa độ. Cũng vì vậy các hệ số đó được gọi là các lượng bất biến của trạng thái ứng suất. Nếu ta chọn các mặt cắt trùng với các phương chính thì ta phải có :

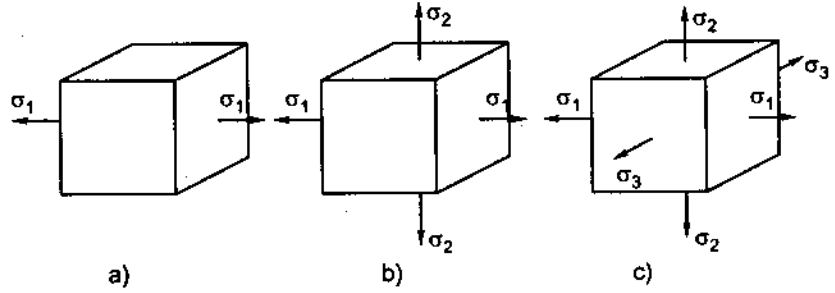
$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = -\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 - 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{aligned} \right\} \quad (2-27)$$

$I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  được gọi là lượng bất biến bậc nhất, bậc hai và bậc ba của trạng thái ứng suất. Các bất biến được xem là các đặc trưng cơ bản của trạng thái ứng suất tại điểm đang xét.

Không phải lúc nào trên các mặt chính cũng tồn tại ứng suất chính có thể có mặt chính trên đó ứng suất chính bằng không. Vì vậy ta phân ba loại trạng thái ứng suất như sau :

Nếu chỉ có một mặt chính chịu ứng suất, giả sử đó là  $\sigma_1$  thì trạng thái ứng suất được gọi là trạng thái ứng suất đơn (h.2-11a). Nếu trên hai mặt chính chịu ứng suất, giả sử đó là  $\sigma_1$ ,

$\sigma_2$  thì trạng thái ứng suất được gọi là trạng thái ứng suất phẳng (h.2-11b). Nếu trên cả ba mặt chính đều có ứng suất thì được gọi là trạng thái ứng suất khối (h.2-11c).

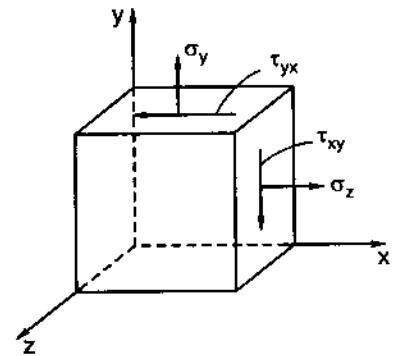


Hình 2-11

Điều kiện bền của các loại trạng thái ứng suất là hoàn toàn khác nhau. Đối với trạng thái ứng suất đơn ta có thể tìm được điều kiện bền từ thí nghiệm nhưng đối với các trạng thái ứng suất phẳng và khối ta không thể xác định được điều kiện bền từ thí nghiệm, mà phải sử dụng đến các thuyết bền để tính độ bền của chúng. Vấn đề này chúng ta sẽ đề cập lại ở một chương sau.

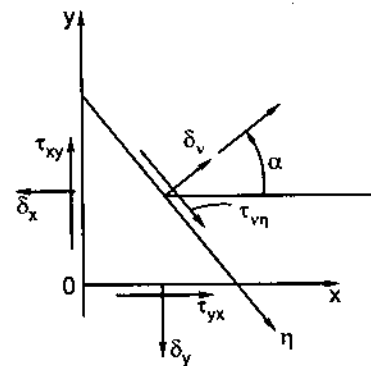
### §2-4. VÒNG TRÒN MO (MOHR) ỨNG SUẤT

Phần lớn các bài toán thường gặp trong kĩ thuật là những bài toán đã xác định được một mặt chính và biết chắc trên mặt chính đó ứng suất bằng không. Ta cũng dễ dàng tính được ứng suất trên hai mặt cắt bất kì vuông góc với mặt chính. Vấn đề đặt ra là làm thế nào xác định rõ phân bố ứng suất đơn hay phẳng. Muốn đạt được điều đó buộc ta phải tìm thấy các mặt chính và ứng suất chính còn lại.



Hình 2-12

Giả sử trạng thái ứng suất của phân tử được biểu diễn như trên hình 2-12. Mặt cắt vuông góc với trục z là một mặt chính. Và ứng suất trên mặt chính đó là bằng không ; còn hai mặt cắt vuông góc với các trục x và y là hai mặt cắt bất kì. Trên các mặt cắt đó có các thành phần ứng suất  $\sigma_x, \sigma_y$  và  $\tau_{yx}, \tau_{xy}$  ( $\tau_{xz} = \tau_{yx} = 0$  vì mặt vuông góc với z là một mặt chính) :



Hình 2-13

Ta hãy xác định ứng suất trên một mặt nghiêng bất kì song song với z. Gọi pháp tuyến trên mặt đó là v và trục vuông góc với nó là  $\eta$  (h.2-13). v,  $\eta$  và z lập thành hệ trục tọa độ mới. Để xác định trị số ứng suất pháp  $\sigma_v$  và ứng suất tiếp  $\tau_{v\eta}$  chúng ta chỉ cần thực hiện phép xoay trục. Các côsin chỉ phương của v và  $\eta$  so với hệ trục tọa độ cũ là như sau :

$$\nu \begin{cases} \cos(\nu, x) = -\cos \alpha \\ \cos(\nu, y) = \sin \alpha \end{cases} \quad \eta \begin{cases} \cos(\eta, x) = \sin \alpha \\ \cos(\eta, y) = -\cos \alpha \end{cases}$$

Trị số của  $\sigma_\nu$  và  $\tau_{\nu\eta}$  là :

$$\sigma_\nu = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\tau_{\nu\eta} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{bmatrix}$$

Sau khi khai triển ra ta có :

$$\sigma_\nu = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - 2\tau_{yx} \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\tau_{\nu\eta} = (\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (2-28)$$

Sử dụng các công thức đối cung ta dễ dàng đưa (2-28) về dạng sau đây :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\nu &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_{\nu\eta} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-29)$$

Với các biểu thức đó ta dễ dàng xác định được phương chính và ứng suất chính. Theo định nghĩa mặt chính là mặt trên đó ứng suất tiếp bằng không. Vậy từ biểu thức thứ 2 của (2-29) ta có :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2-30)$$

Đem (2-30) thay vào cho phương trình đầu của (2-29) ta sẽ tìm thấy hai nghiệm :

$$\sigma_2^1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2-31)$$

Chỉ số 1, 2 ở đây để chỉ nghiệm thứ nhất và nghiệm thứ hai.

Để thuận lợi cho việc xác định phương chính và ứng suất chính chúng ta dùng phương pháp họa đồ được trình bày sau đây :

Chuyển số hạng  $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$  ở phương trình đầu của (2-29) sang vế trái rồi bình phương cả hai vế của cả hai phương trình và đem cộng lại, ta được :

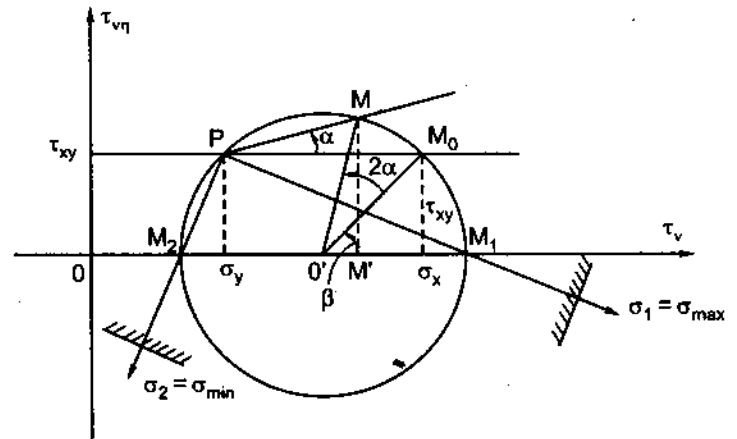
$$\left(\sigma_\nu - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{\nu\eta}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \quad (2-32)$$

Nếu chọn một hệ trục tọa độ với trục tung biểu diễn giá trị của  $\tau_{v\eta}$  và trục hoành biểu diễn giá trị của  $\sigma_v$  thì tương quan giữa  $\sigma_v$  và  $\tau_{v\eta}$  là tương quan của một đường tròn. Tâm vòng tròn nằm trên trục hoành tại hoành độ  $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$  và bán kính là :

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2-33)$$

Vòng tròn đó được gọi là vòng tròn MO (Mohr) ứng suất (h.2-14).

Để ý đến điểm  $M_0$  trên đường tròn. Tọa độ của  $M_0$  là  $\sigma_x$  và  $\tau_{xy}$ , vậy  $M_0$  là điểm tượng trưng cho các thành phần ứng suất trên mặt cắt vuông góc với trục x. Do đó  $M_0$  được gọi là điểm gốc, bán kính  $O'M_0$  được gọi là bán kính gốc. Nếu quay bán kính gốc



Hình 2-14

$O'M_0$  một góc  $2\alpha$  ta sẽ đến được vị trí điểm  $M$  là điểm tượng trưng cho ứng suất trên mặt nghiêng có pháp tuyến  $v$  nghĩa là hoành độ của  $M$  là trị số  $\sigma_v$  và tung độ của  $M$  là ứng suất tiếp  $\tau_{v\eta}$ .

Thực vậy, gọi  $\beta$  là góc giữa trục hoành và  $O'M_0$ , gọi  $M'$  là hình chiếu của  $M$  trên trục hoành ; thì tọa độ của  $M$  được xác định bởi các biểu thức :

$$\overline{OM'} = \overline{OO'} + \overline{O'M'} = \overline{OO'} + \overline{O'M} \cos(\beta + 2\alpha) \quad (2-34)$$

$$\overline{M'M} = \overline{O'M} \sin(\beta + 2\alpha)$$

Để ý rằng :  $\overline{O'M} \cos\beta = \overline{O'M_0} \cos\beta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$

và  $\overline{O'M} \sin\beta = \overline{O'M_0} \sin\beta = \tau_{xy}$ .

Các biểu thức (2-34) được viết lại như sau :

$$\left. \begin{aligned} \overline{OM'} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \overline{M'M} &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (2-35)$$

So sánh (2-35) và (2-29) ta thấy rõ ràng :

$$\overline{O'M} = \dot{\sigma}_v$$

$$\overline{M'M} = \tau_{v\eta}$$

Để thuận tiện cho việc xác định các góc ta xem trục hoành  $\sigma_v$  là song song với trục x của phân tố. Từ  $M_0$  kẻ một đường song song với trục hoành, giao điểm P của đường đó với đường tròn được gọi là điểm cực. Ta chỉ cần quay  $PM_0$  một góc  $\alpha$  theo ngược chiều kim đồng hồ là ta sẽ tìm thấy M (h.2-14).

Các điểm trọng tâm cho ứng suất trên mặt chính phải là những điểm có tung độ bằng không (vì ứng suất tiếp trên mặt chính có trị số bằng không). Như vậy các điểm đó là các giao điểm  $M_1, M_2$  của đường tròn với trục hoành. Phương pháp tuyến của các mặt chính là phương  $PM_1$  và  $PM_2$ .

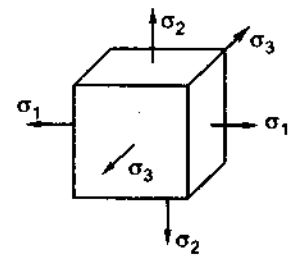
Đối với trạng thái ứng suất phẳng với vòng tròn ứng suất ta nhận thấy dễ dàng mặt cắt trên đó có ứng suất cực đại và cực tiểu. Khi vòng tròn nằm hoàn toàn về phía dương của trục hoành, ứng suất tại  $M_1$  và  $M_2$  đều dương thì ứng suất cực đại của trạng thái ứng suất là ứng suất được tượng trưng bởi điểm M. Còn ứng suất cực tiểu là ứng suất có trị số bằng không. Ứng suất đó nằm trên mặt chính thứ ba. Trường hợp vòng tròn cắt trục tung thì  $M_1$  là ứng suất cực đại và  $M_2$  là ứng suất cực tiểu. Trường hợp vòng tròn nằm về phía âm của trục hoành thì  $\sigma_1 = 0$  và  $\sigma_2$  và  $\sigma_3$  là âm. Dĩ nhiên  $\sigma_3$  là cực tiểu. Từ vòng tròn ứng suất ta lại tìm thấy các công thức đã xác định trước đây bằng giải tích.

$$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (2-36)$$

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (2-37)$$

Chỉ số max và min ở đây là so với mọi mặt cắt cùng song song với trục z.

Trường hợp tổng quát khi ta có trạng thái ứng suất khối với ba ứng suất chính  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  như biểu diễn trên hình 2-15.

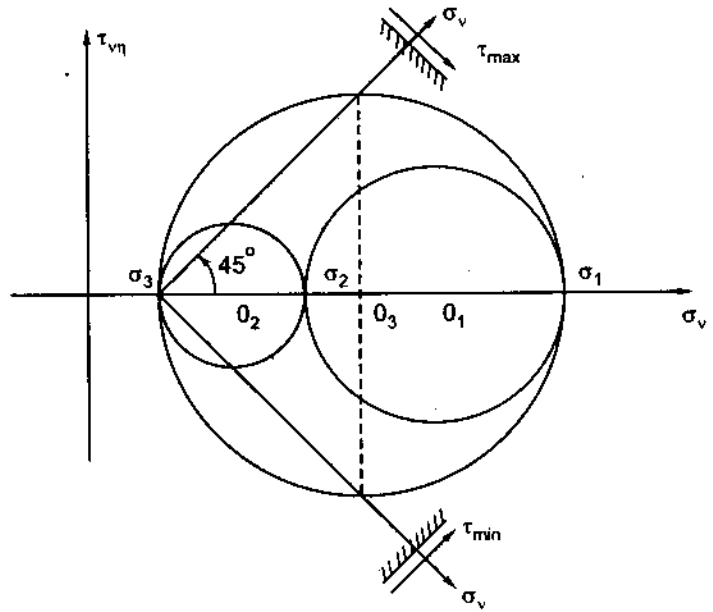


Hình 2-15

Để xác định các trị số ứng suất trên những mặt phẳng nghiêng song song với  $\sigma_3$  ta có thể sử dụng vòng Mo ứng suất tạo bởi  $\sigma_1, \sigma_2$ . Với mặt nghiêng song song với  $\sigma_2$  ta dùng vòng Mo tạo bởi  $\sigma_1\sigma_3$  và với các mặt nghiêng song song với  $\sigma_1$  thì dùng vòng Mo tạo bởi  $\sigma_2\sigma_3$ . Các vòng đó được vẽ trên cùng một mặt tọa độ  $\sigma_v$  và  $\tau_{v\eta}$  (h.2-16).

Như vậy là ta có ba vòng Mo để biểu diễn cho trạng thái ứng suất. Người ta cũng chứng minh được rằng : một điểm bất kì trong miền giới hạn bởi ba vòng tròn có tọa độ là các trị số ứng suất trên một mặt cắt nghiêng bất kì không song song với các phương chính.

Qua ba vòng Mo ứng suất ta nhận thấy ngay mặt nghiêng có ứng suất tiếp cực đại là mặt song song với  $\sigma_2$  và có pháp tuyến tạo với  $\sigma_1$  một góc  $45^\circ$ . Dĩ nhiên mặt cắt có ứng suất tiếp cực tiểu là mặt vuông góc với mặt trên. Trị số của ứng suất tiếp cực đại là :



Hình 2-16

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (2-38)$$

Ứng suất pháp trên mặt đó có giá trị là

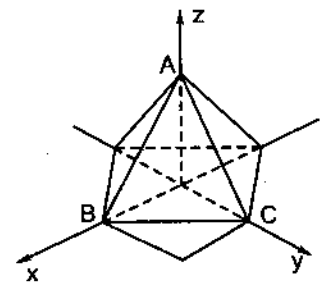
$$\sigma_v = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (2-39)$$

## §2-5. ỨNG SUẤT BÁT DIỆN

Ta hãy khảo sát một mặt cắt đặc biệt : mặt nghiêng đều đối với các phương chính. Tách ra khỏi M một phần tử bởi các mặt cắt này ta sẽ được một hình bát diện h.2-17. Các cosin chỉ phương của pháp tuyến một mặt cắt có trị số là :

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Từ (2-7) ta có các thành phần song song với các trục tọa độ của ứng suất toàn phần trên mặt cắt ABC là



Hình 2-17

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Vậy ứng suất pháp trên mặt cắt nghiêng đó sẽ là :

$$\sigma_{bd} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2-40)$$

Ứng suất tiếp có trị số là :

$$\tau_{bd} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 - \sigma_{bd}^2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{\sigma_2^2}{3} + \frac{\sigma_3^2}{3} - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}$$

$$\tau_{bd} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2-41)$$

Nếu sử dụng các mặt cắt ban đầu là những mặt bất kì thì nhờ trị số các lượng bất biến ta dễ dàng tính được các trị số của các thành phần ứng suất bất diện như sau :

$$\sigma_{bd} = \frac{1}{3}[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z] \quad (2-42)$$

$$\tau_{bd} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \quad (2-43)$$

Từ các biểu thức đó trong lí thuyết dẻo người ta đã đưa ra hai đại lượng :

*Cường độ ứng suất tiếp :*

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \quad (2-44)$$

*Cường độ ứng suất :*

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)} \quad (2-45)$$

Hai đại lượng đó đóng vai trò quan trọng trong lí thuyết chảy dẻo.

## §2-6. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT CẦU VÀ TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT LỆCH

Một cách tổng quát, một trạng thái ứng suất bất kì có thể xem là sự cộng tác dụng của hai trạng thái ứng suất :

Trạng thái ứng suất cầu và trạng thái ứng suất lệch.

*Trạng thái ứng suất cầu* là trạng thái ứng suất mà trên mọi mặt cắt trị số ứng suất pháp là bằng giá trị ứng suất trung bình :

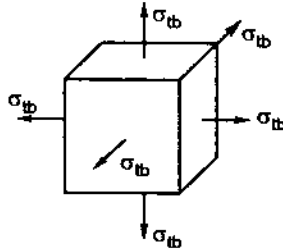
$$\sigma_{tb} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2-46)$$

nghĩa là bằng trị số của ứng suất pháp bất diện (h.2-18).

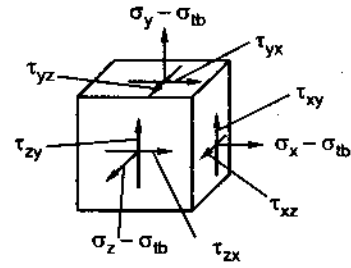
Trong trường hợp này mặt nào cũng là chính vì ba vòng tròn Mo ứng suất thu về một điểm.

Tenxơ ứng suất cầu có dạng :

$$T_{\sigma}^c = \begin{Bmatrix} \sigma_{tb} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{tb} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{tb} \end{Bmatrix} \quad (2-47)$$



Hình 2-18



Hình 2-19

Trạng thái ứng suất lệch là trạng thái ứng suất có trị số ứng suất pháp trên các mặt trừ đi ứng suất trung bình (h.2-18) ; còn các trị số ứng suất tiếp vẫn giữ nguyên.

Các thành phần của tenxơ ứng suất như sau :

$$D_{\sigma} = \begin{Bmatrix} (\sigma_x - \sigma_{tb}) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma_{tb}) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma_{tb}) \end{Bmatrix} \quad (2-48)$$

Tenxơ đó được gọi là *tenxơ lệch* hay *độ lệch của ứng suất*.

Ta nhận thấy ứng suất cầu chỉ gây nên biến dạng thể tích. Còn chính tenxơ lệch đã gây nên các biến dạng góc nghĩa là gây nên các biến dạng hình dáng.

Tenxơ lệch đóng một vai trò quan trọng trong việc xét độ bền vững, độ biến dạng dẻo của vật liệu.

## §2-7. MẶT ỨNG SUẤT PHÁP

Để có một hình tượng về sự biến thiên của ứng suất tại một điểm trên những mặt cắt khác nhau trong không gian ta xét đến các mặt ứng suất pháp.

Lấy lại biểu thức (2-7). Biểu thức đó xác định các thành phần theo các trục Ox, Oy, Oz của ứng suất \$p\_v\$ trên mặt nghiêng ABC (h.2-5). Thành phần của ứng suất pháp trên mặt nghiêng đó là tổng hình chiếu của X, Y, Z lên phương pháp tuyến \$v\$.

$$\sigma_v = Xl + Ym + Zn$$



Thay trị số của X, Y, Z vào ta có :

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} + 2lm\tau_{xy} \quad (2-49)$$

Nếu ta chọn một đoạn thẳng r có phương trùng với pháp tuyến v và có gốc là gốc của hệ trục tọa độ với độ dài là :

$$r = \frac{k}{\sqrt{|\sigma_v|}} \quad (2-50)$$

thì khi v thay đổi, nghĩa là khi mặt cắt thay đổi, đầu mút của r sẽ vạch ra một mặt bậc hai mà ta gọi là mặt ứng suất.

Thực vậy, gọi x, y, z là tọa độ của đầu mút của r. Các tọa độ đó được xác định bởi các biểu thức :

$$x = rl, \quad y = rm, \quad z = rn \quad (2-51)$$

Thay trị số của l, m, n được tính từ (2-51) vào (2-49) ta được :

$$\sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{yz}yz + 2\tau_{zx}zx + 2\tau_{xy}xy = \pm k^2 \quad (2-52)$$

trong đó : k là một hằng số tỉ lệ tùy ý chọn. Mặt bậc hai đó được gọi là mặt ứng suất côsi (Cauchy).

Để dàng nhận thấy rằng nếu như các mặt tọa độ ban đầu Oxyz trùng với các mặt chính thì (2-52) có dạng thu gọn như sau :

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 + \sigma_3 z^2 = \pm k^2 \quad (2-53)$$

Từ đó ta có các trường hợp sau đây :

a) Nếu  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 > 0$  khi đó (2-53) sẽ được viết lại dưới dạng :

$$\frac{x^2}{\frac{k^2}{\sigma_1}} + \frac{y^2}{\frac{k^2}{\sigma_2}} + \frac{z^2}{\frac{k^2}{\sigma_3}} = 1 \quad (2-54)$$

Mặt côsi sẽ là một mặt elip.

Tương tự khi  $\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 < 0$ .

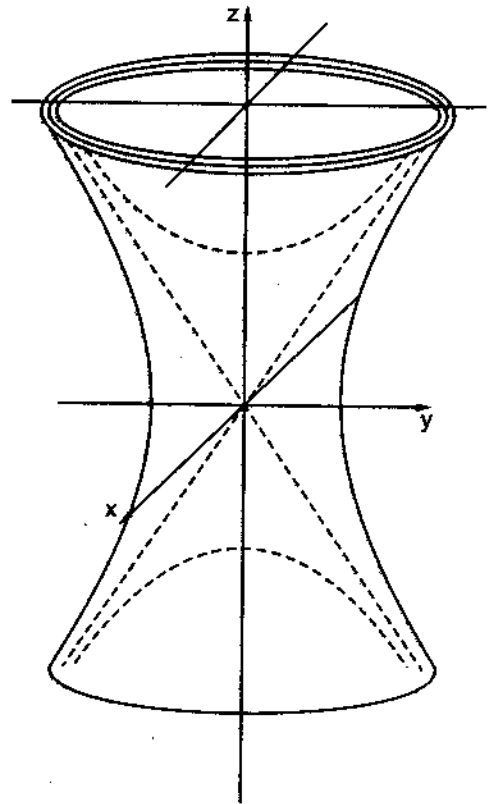
b) Khi các ứng suất chính có dấu khác nhau. Giả sử ta có  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 < 0$ .

Phương trình (2-53) được viết lại dưới dạng :

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 - |\sigma_3| z^2 = \pm k^2 \quad (2-55)$$

Đó là mặt hypecbôn một nhánh và hai nhánh (h.2-20). Các mặt đó được phân chia bởi mặt nón tiệm cận :

$$\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2 - |\sigma_3| z^2 = 0 \quad (2-56)$$



Hình 2 - 20

Ngoài mặt ứng suất pháp Còsi ta còn có thể biểu diễn hình học trạng thái ứng suất một cách khác. Nếu lấy từ gốc tọa độ một đoạn thẳng có độ dài tương ứng cho trị số ứng suất toàn phần trên mặt cắt nghiêng và có phương là phương của ứng suất đó thì khi xoay mặt cắt nghiêng theo những phương khác nhau đầu mút của đoạn thẳng sẽ vạch ra một mặt elip mà ta gọi là mặt elip ứng suất. Ta dễ dàng viết phương trình của mặt elip đó.

Giả sử hệ trục tọa độ ban đầu chọn trùng với các phương chính ứng suất. Các thành phần hình chiếu của  $\vec{p}_v$ , được tính bởi (2-7) sẽ là :

$$X = \sigma_1 l, Y = \sigma_2 m, Z = \sigma_3 n$$

Nếu gọi  $x, y, z$  là tọa độ của đầu mút đoạn thẳng ta đã chọn thì ta dễ dàng thấy ngay :

$$x = X = \sigma_1 l, \quad y = Y = \sigma_2 m, \quad z = Z = \sigma_3 n \quad (2-57)$$

Nhưng giữa  $l, m, n$  ta lại có biểu thức :

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

Thay các trị số  $l, m, n$  tính từ (2-55) vào ta được :

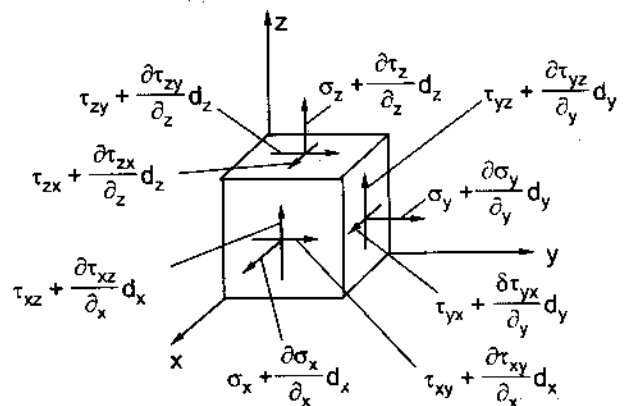
$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (2-58)$$

Và đó là phương trình của một mặt elip.

## §2-8. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÂN BẰNG

Trên hình 2-8 ta đã sử dụng một phân tố được tách ra bởi các mặt cắt song song vuông góc với nhau để tượng trưng cho trạng thái ứng suất tại điểm đang xét.

Ta đã nói rằng thể tích của phân tố là vô cùng bé, tiến tới không vì vậy trị số ứng suất trên các mặt song song có thể xem là bằng nhau và có chiều ngược nhau. Để nghiên cứu trường ứng suất trong vật thể dưới tác dụng của ngoại lực chúng ta phải xét các thành phần ứng suất trên những mặt cắt song song với nhau cách nhau một lượng vô cùng bé. Trị số ứng suất trên mặt đó phải khác nhau. Ví dụ xét hai mặt cắt vuông góc với trục  $x$ . Nếu trên mặt cắt đi qua gốc tọa độ có trị số ứng suất pháp là  $\sigma_x$  thì trên mặt cắt song song cách nó một khoảng  $dx$  ứng suất pháp phải có trị số là  $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ . Suy luận tương tự với các thành phần ứng suất khác ta có thể biểu diễn sự biến thiên của các ứng suất như trên hình 2-21.



Hình 2 - 21

Ngoài các lực bề mặt do các ứng suất gây nên còn có các lực thể tích tác động trên toàn bộ thể tích của phân bố.

Nếu gọi X, Y, Z là các thành phần hình chiếu của lực thể tích trên một đơn vị khối lượng của phân tố và gọi là  $\rho$  và khối lượng riêng của vật thể thì từ điều kiện cân bằng ta có các phương trình hình chiếu của các lực theo các phương x, y, z như sau :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-59)$$

Khi phân tố có chuyển động với gia tốc thì ngoài các lực trên ta còn có thêm lực quán tính. Gọi u, v và w là các thành phần chuyển vị của phân tố theo các trục tọa độ x, y, z thì phương trình (2-59) phải có dạng :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-60)$$

Các phương trình cân bằng đó được gọi là những phương trình của Navier.

## Bài tập

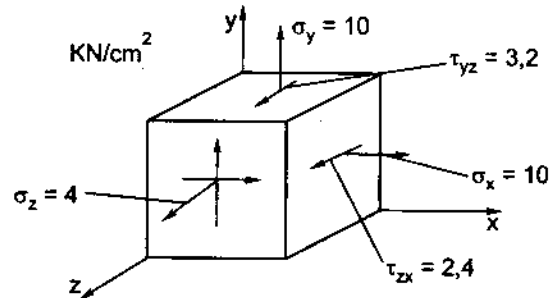
### 2.1. Trạng thái ứng suất tại M trong vật thể đàn hồi chịu lực cho bởi tenxơ ứng suất

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}^2$$

Hãy xác định giá trị các ứng suất chính và phương các mặt chính.

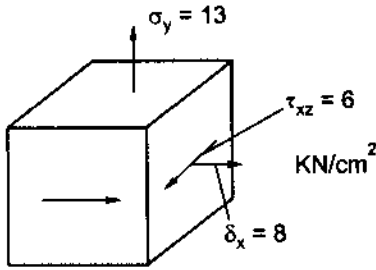
### 2.2. Cho trạng thái ứng suất như hình vẽ (h.2-22)

Xác định các trị số của ứng suất chính và ứng suất bất diện.

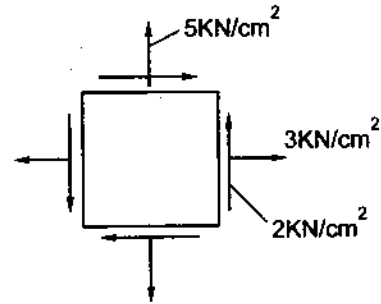


Hình 2-22

2.3. Xác định ứng suất chính cho trạng thái ứng suất như hình 2-23.



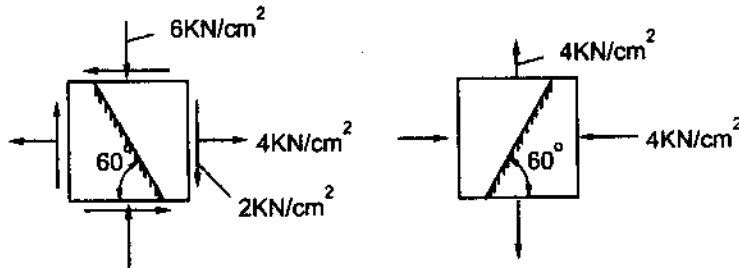
Hình 2-23



Hình 2-24

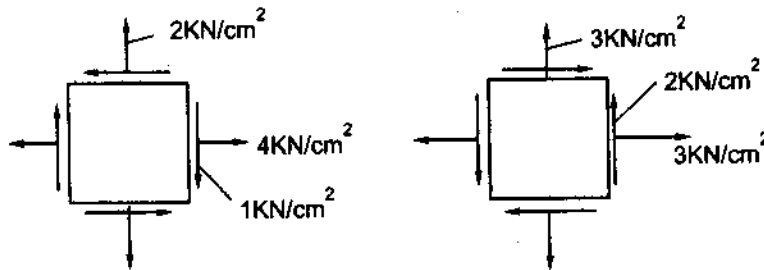
2.4. Tìm ứng suất chính và phương chính của phân tử ở trạng thái ứng suất phẳng như hình 2-24 bằng phương pháp giải tích và phương pháp đồ thị.

2.5. Tìm giá trị ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên các mặt cắt xiên của phân tử biểu diễn trạng thái ứng suất như trên các hình 2-25.



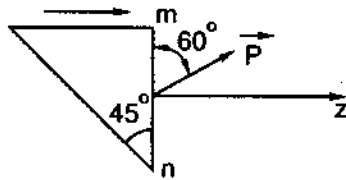
Hình 2-25

2.6. Tìm ứng suất chính và phương chính của các trạng thái ứng suất đã cho bằng phương pháp họa đồ (h.2-26).

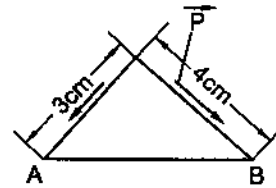


Hình 2-26

2.7. Ứng suất toàn phần  $\vec{p}$  tại điểm M trên mặt cắt m - n cắt qua vật thể đàn hồi chịu lực có phương nghiêng so với mặt cắt là  $60^\circ$ . Được biết trạng thái ứng suất tại đó là trạng thái ứng suất phẳng. Trên mặt cắt vuông góc với m - n chỉ có ứng suất tiếp  $\tau$ . Hãy xác định ứng suất trên mặt nghiêng so với m - n một góc  $45^\circ$  như hình 2-27. Cho biết trị số của p là  $3 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình 2-27



Hình 2-28

2.8. Một lăng trụ hình tam giác có chiều dày là đơn vị được gắn vào một vật thể khác ở mặt AB như trên hình 2-28. Lăng trụ chịu các lực tiếp xúc phân bố đều ở mặt bên  $p = 1 \text{ kN/cm}^2$ .

Tính áp lực và lực tiếp xúc trên mặt AB.

2.9. Trạng thái ứng suất tại một điểm trong vật thể đàn hồi chịu lực được cho bởi tenxơ ứng suất.

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}^2$$

Hãy xác định vectơ ứng suất trên mặt nghiêng đi qua P và song song với mặt phẳng :

$$3x + 6y + 2z = 12.$$

2.10. Cho tenxơ ứng suất

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{bmatrix} \text{ kN/cm}^2$$

Hãy xác định vectơ ứng suất tại điểm P trên mặt cắt song song với mặt phẳng BGE, BGFC (h.2-29)

2.11. Trạng thái ứng suất tại điểm bất kì cho bởi tenxơ ứng suất

$$T_{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & Cx_3 & 0 \\ Cx_3 & 0 & -Cx_1 \\ 0 & -Cx_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ với } C = C^{te} \neq 0$$

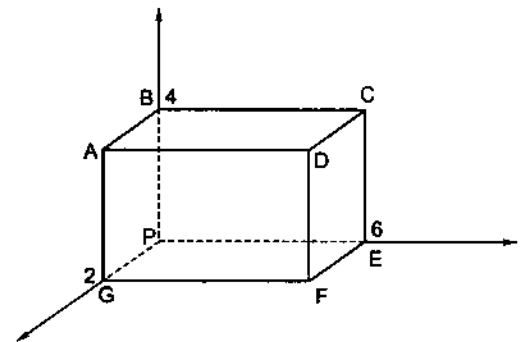
a) Tính vectơ ứng suất tại điểm  $P(4, -4, 7)$  trên mặt phẳng

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$$

b) Tại điểm  $P(4, -4, 7)$  trên mặt cầu

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 81$$

c) Xác định các ứng suất chính, ứng suất tiếp cực đại tại P.



Hình 2-29

## Chương 3

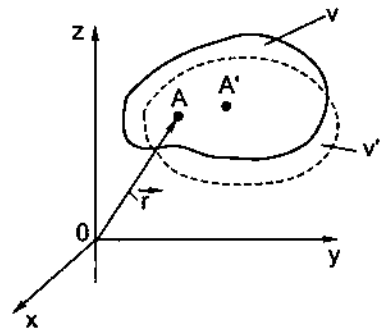
# TRẠNG THÁI BIẾN DẠNG

### §3-1. CHUYỂN VỊ

Xét một vật thể đàn hồi chịu lực.

Giả sử ở thời điểm ban đầu  $t_0$  vật thể chưa chịu lực. Vật thể chiếm trong không gian một thể tích  $V$ . Đến thời điểm  $t$ , sau khi chịu tác dụng của ngoại lực vật thể chiếm một thể tích mới  $V'$ .

Gọi  $A$  là một điểm trong  $V$ . Vị trí của  $A$  được xác định bởi vectơ  $\vec{r}$  ( $x, y, z$ ). Sau khi chịu lực  $A$  đến một vị trí mới  $A'$  trong  $V'$  và được xác định bởi  $\vec{r}'$  ( $x', y', z'$ ) (h.3-1).



Hình 3-1

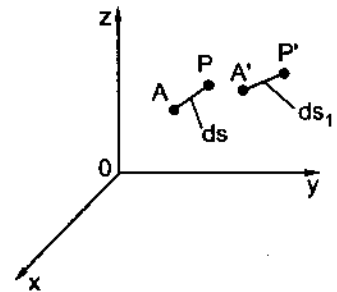
Ta gọi vectơ  $\overrightarrow{AA'}$  là vectơ chuyển vị của  $A$ . Nếu gọi  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  là các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ thì :

$$\overrightarrow{AA'} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (3-1)$$

$u, v, w$  là các thành phần chuyển vị của  $A$ . Như vậy  $u, v, w$  là các hàm số phụ thuộc ba biến số  $x, y, z$ .

Tọa độ của  $A'$  được xác định theo các thành phần chuyển vị của  $A$  như sau :

$$A' \begin{cases} x' = u + x \\ y' = v + y \\ z' = w + z \end{cases} \quad (3-2)$$



Hình 3-2

### §3-2. BIẾN DẠNG

#### a) Tính biến dạng dài

Xét thêm một điểm  $P$  lân cận  $A$ . Tọa độ của  $P$  được xác định bởi các biểu thức :

$$P \begin{cases} x + dx \\ y + dy \\ z + dz \end{cases} \quad (3-3)$$

$dx, dy, dz$  là các vi phân của  $x, y, z$ .

Sau biến dạng P đến một vị trí mới P' trong V'. Tọa độ của P' sẽ là

$$P' \begin{cases} x + dx + u_1 \\ y + dy + v_1 \\ z + dz + w_1 \end{cases} \quad (3-4)$$

Trong đó  $u_1, v_1$  và  $w_1$  được xác định theo  $u, v, w$  như sau :

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v_1 &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w_1 &= w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (3-5)$$

Gọi chiều dài của AP là  $ds$  và chiều dài của A'P' là  $ds_1$  thì tỉ số

$$\epsilon = \frac{ds_1 - ds}{ds} \quad (3-6)$$

được gọi là biến dạng dài theo phương của AP.

Chúng ta tìm cách xác định  $\epsilon$  theo các hàm số  $u, v, w$ .

Các thành phần hình chiếu của  $ds_1$  lên các trục tọa độ là như sau

$$\begin{aligned} ds_{1/x} &= (x + dx + u_1) - (u + x) = dx + u_1 - u \\ ds_{1/y} &= (y + dy + v_1) - (v + y) = dy + v_1 - v \\ ds_{1/z} &= (z + dz + w_1) - (w + z) = dz + w_1 - w \end{aligned}$$

Thay các trị số  $u_1, v_1, w_1$  từ (3-5) vào đây ta sẽ có :

$$\begin{aligned} ds_{1/x} &= dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ ds_{1/y} &= dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ ds_{1/z} &= dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (3-7)$$

Vậy độ dài bình phương của  $ds_1$  sẽ là :

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= \left( dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right)^2 + \left( dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right)^2 \\ &\quad + \left( dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right)^2 \end{aligned} \quad (3-8)$$

Từ biểu thức (3-6) ta có :

$$\frac{ds_1^2}{ds^2} = 1 + 2\epsilon + \epsilon^2 \approx 1 + 2\epsilon \quad (3-9)$$

Chia cả hai vế của (3-8) cho  $ds^2$ , chú ý đến các tỷ số  $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$  chúng là các cosin chỉ phương  $l, m, n$  của đoạn thẳng AP đối với hệ trục tọa độ. Kết hợp với (3-9) ta có :

$$1 + 2\varepsilon = \left( l + l \frac{\partial u}{\partial x} + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( m + l \frac{\partial v}{\partial x} + m \frac{\partial v}{\partial y} + n \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( m + l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2$$

Thực hiện phép bình phương, bỏ qua những số hạng vô cùng bé bậc cao, chú ý tổng  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  ta đi đến kết quả :

$$\varepsilon = l^2 \frac{\partial u}{\partial x} + m^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n^2 \frac{\partial w}{\partial z} + lm \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + ln \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + m.n \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3-10)$$

*Xét những trường hợp riêng :*

Lần lượt cho AP song song với các trục tọa độ, nghĩa là lần lượt lấy  $l = 1, m = 1, n = 1$  còn những hệ số còn lại là bằng không ta sẽ được :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ và } \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3-11)$$

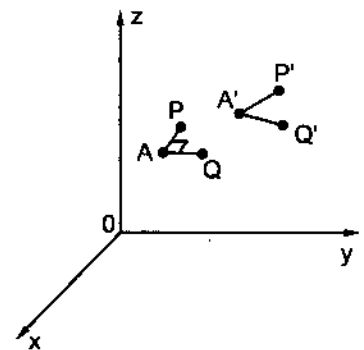
Như vậy, đạo hàm riêng phần của  $u, v$  và  $w$  theo các biến số là các biến dạng dài theo phương của các trục.

*b) Tính biến dạng góc*

Xét thêm điểm thứ hai Q lân cận điểm A sao cho AQ vuông góc với AP. Nếu xem góc vuông là đơn vị góc thì biến dạng của  $\widehat{PAQ}$  được xem là biến dạng góc tỷ đối. Gọi Q' là vị trí của Q sau biến dạng.

Ta tìm cách xác định các cosin chỉ phương  $l_1, m_1, n_1$  của A'P' và  $l_2, m_2, n_2$  của A'Q' theo với các hàm  $u, v, w$  và các cosin chỉ phương  $l, m, n$  và  $l', m', n'$  của AP và AQ, vì chúng vuông góc nên ta có điều kiện :  $ll' + mm' + nn' = 0$ . Ví dụ tính  $l_1$ . Từ (3-7) ta có :

$$ds_1.l_1 = ds_1/x = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$



Hình 3-3



Thay trị số  $ds_1$  tính từ (3-6) vào ta được :

$$(1 + \varepsilon)ds_1 = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Chia cả hai vế cho  $ds$  và nhân với  $(1 - \varepsilon)$ . Xem  $1 - \varepsilon^2 \approx 1$  ta được :

$$l_1 = l \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) (1 - \varepsilon) + m \frac{\partial u}{\partial y} (1 - \varepsilon) + n \frac{\partial u}{\partial z} (1 - \varepsilon)$$

Thực hiện phép nhân và bỏ các số hạng vô cùng bé bậc cao ta sẽ được biểu thức của  $l_1$ . Cùng một cách làm ta sẽ tính được  $m_1$  và  $n_1$ . Các biểu thức đó là như sau :

$$\begin{aligned} l_1 &= l \left( 1 - \varepsilon + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m \frac{\partial u}{\partial y} + n \frac{\partial u}{\partial z} \\ m_1 &= l \frac{\partial v}{\partial x} + m \left( 1 - \varepsilon + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n \frac{\partial v}{\partial z} \\ n_1 &= l \frac{\partial w}{\partial x} + m \frac{\partial w}{\partial y} + n \left( 1 - \varepsilon + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3-12)$$

Cùng cách tính tương tự ta sẽ tìm thấy các côsin chỉ phương của  $A'Q'$  theo với các côsin chỉ phương  $l'm'n'$  của  $AQ$ .

$$\begin{aligned} l_2 &= l' \left( 1 - \varepsilon + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + m' \frac{\partial u}{\partial y} + n' \frac{\partial u}{\partial z} \\ m_2 &= l' \frac{\partial v}{\partial x} + m' \left( 1 - \varepsilon + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n' \frac{\partial v}{\partial z} \\ n_2 &= l' \frac{\partial w}{\partial x} + m' \frac{\partial w}{\partial y} + n' \left( 1 - \varepsilon + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3-13)$$

Góc gồm giữa hai đường  $(A'P', A'Q')$  được xác định bởi biểu thức :

$$\cos(A'P', A'Q') = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 \quad (3-14)$$

Đem (3-12) và (3-13) thay vào (3-14) với chú ý (3-11) ta sẽ được :

$$\begin{aligned} \cos(A'P', A'Q') &= 2(\varepsilon_x l l' + \varepsilon_y m m' + \varepsilon_z n n') + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (l m' + m l') + \\ &+ \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) (m n' + n m') + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) (n l' + n' l) \end{aligned} \quad (3-15)$$

Vì biến dạng là vô cùng bé nên ta có thể xem góc  $\left[ \frac{\pi}{2} - (A'P', A'Q') \right] = \gamma$  là bé. Do đó có thể viết :

$$\cos(A'P', A'Q') = \sin \left[ \frac{\pi}{2} - (A'P', A'Q') \right] \approx \gamma$$

Vậy (3-14) có thể viết lại như sau :

$$\begin{aligned} \gamma = & 2(\varepsilon_x ll' + \varepsilon_y mm' + \varepsilon_z nn') + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (lm' + ml') + \\ & + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) (mm' + m'n) + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) (nl' + n'l) \end{aligned} \quad (3-16)$$

$\gamma$  là biến dạng của góc vuông (AP, AQ). Nếu lần lượt lấy AP và AQ song song với các trục tọa độ, nghĩa là lần lượt cho  $l = 1$  và  $m' = 1$ ,  $m = 1$  và  $n' = 1$ ,  $n = 1$  và  $l' = 1$ , ta sẽ tìm thấy các biến dạng của các góc vuông xOy, yOz và zOx.

Ta được các biểu thức

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3-17)$$

Qua (3-17) ta thấy  $\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$ ,  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$ ,  $\gamma_{zy} = \gamma_{yz}$ .

Nếu chúng ta sử dụng  $u_i$  để chỉ các hàm chuyển vị theo các trục  $Ox_i$  và  $\varepsilon_{ij}$  để chỉ các biến dạng dài và góc thì sáu biểu thức của (3-10) và (3-17) được viết chung lại một công thức sau đây :

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (3-18)$$

Trong đó  $\varepsilon_{ii}$  để chỉ các biến dạng dài theo phương  $i$  và  $\varepsilon_{ij}$  với  $i \neq j$  để chỉ  $\frac{\gamma_{ij}}{2}$ .

Thay (3-18) vào (3-10) và (3-16) ta được các biểu thức sau đây

$$\varepsilon = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + n^2 \varepsilon_z + lm \gamma_{xy} + ln \gamma_{xz} + mn \gamma_{yz} \quad (3-19)$$

$$\frac{\gamma}{2} = \varepsilon_x ll' + \varepsilon_y mm' + \varepsilon_z nn' + \frac{\gamma_{xy}}{2} (lm' + ml') + \frac{\gamma_{yz}}{2} (mn' + m'n) + \frac{\gamma_{xz}}{2} (nl' + n'l) \quad (3-20)$$

Như vậy, với ba biến dạng dài trên các trục tọa độ và ba biến dạng góc của các mặt tọa độ ta có thể tính biến dạng theo mọi phương và độ biến dạng góc của mọi góc vuông xác định bởi hai đoạn dài vô cùng bé vuông góc. Sáu thành phần biến dạng đó lập thành một tenxơ biến dạng.

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{zy} \\ \frac{1}{2} \gamma_{xz} & \frac{1}{2} \gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

Hay dưới ký hiệu thu gọn.

$$T_\varepsilon = [\varepsilon_{ij}] \text{ với } i, j = 1, 2, 3 \quad (3-22)$$

Đó là một tenxơ đối xứng hạng hai.

Ta có nhận xét sau đây về các biểu thức (3-19) và (3-20) : Các công thức đó thực sự chỉ là hai phép nội tích liên tiếp giữa tenxơ biến dạng với các cosin chỉ phương của AP và của AQ. Thực vậy, ta thực hiện các phép nhân liên tiếp đó :

$$I = \left[ \begin{array}{ccc} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} l \\ m \\ n \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} l \\ m \\ n \end{array} \right]^T$$

$$= \left[ \left( \varepsilon_x l + \frac{1}{2}\gamma_{yx} m + \frac{1}{2}\gamma_{zx} n \right), \left( \frac{1}{2}\gamma_{xy} l + \varepsilon_y m + \frac{1}{2}\gamma_{zy} n \right), \left( \frac{1}{2}\gamma_{xz} l + \frac{1}{2}\gamma_{yz} m + \varepsilon_z n \right) \right] \left[ \begin{array}{c} l \\ m \\ n \end{array} \right]$$

Sau khi khai triển ta có :

$$I = l^2 \varepsilon_x + m^2 \varepsilon_y + n^2 \varepsilon_z + l.m.\gamma_{xy} + l.n.\gamma_{xz} + m.n.\gamma_{yz}$$

$$II = \left[ \begin{array}{ccc} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} l' \\ m' \\ n' \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} l \\ m \\ n \end{array} \right]^T$$

$$II = \varepsilon_x l l' + \varepsilon_y m m' + \varepsilon_z n n' + \frac{\gamma_{xy}}{2} (l m' + m l') + \frac{\gamma_{yz}}{2} (m n' + m' n) + \frac{\gamma_{xz}}{2} (n l' + n' l)$$

So sánh hai biểu thức đó với (3-19) và (3-20) ta thấy rõ chúng là một. Vậy ta có thể viết (3-19) và (3-20) vào chung biểu thức như sau :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \{[\varepsilon_{ij}][n_{\alpha j}]\}^T [n_{\beta j}] \quad (3-23)$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

### §3-3. PHƯƠNG CHÍNH - BIẾN DẠNG CHÍNH

Tính chất chung của những tenxơ hạng hai đối xứng là có thể đưa về dạng đường chéo chính. Các thành phần trên đường chéo chính được gọi là số hạng chính. Đối với tenxơ biến dạng các số hạng chính là những biến dạng dài trên các trục chính và nếu hệ tọa độ trùng với trục chính thì không còn các biến dạng góc.

Gọi  $\varepsilon^*$  là một biến dạng chính và  $l, m, n$  là các cosin chỉ phương của trục chính đối với hệ trục Oxyz đã chọn ban đầu. Ta phải có điều kiện :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^* & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^* & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

Thực vậy vì đó là phép nội tích thứ nhất trong phép xoay trục. tenxơ bên trái và bên phải muốn tương đương thì phép xoay trục của tenxơ bên trái và bên phải phải cho cùng một kết quả. Đối với tenxơ bên phải trong phép quay trục đó phải về lại chính mình. Ta hãy tính các thành phần của tenxơ trong phép quay đó

$$\left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon^* & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^* & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon^* l, \varepsilon^* m, \varepsilon^* n] \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \varepsilon^* l^2 + \varepsilon^* m^2 + \varepsilon^* n^2$$

Hay  $\varepsilon^* [l^2 + m^2 + n^2] = \varepsilon^*$

Vậy từ (3-24), sau khi khai triển và đưa tất cả về bên trái ta có hệ thống phương trình :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_x - \varepsilon^*)l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n &= 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx}l + (\varepsilon_y - \varepsilon^*)m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n &= 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx}l + \frac{1}{2}\gamma_{zy}m + (\varepsilon_z - \varepsilon^*)n &= 0 \end{aligned} \quad (3-25)$$

Trong đó  $\varepsilon^*$  và  $l, m, n$  là các ẩn số. Vì  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$  nên muốn  $l, m, n$  có nghiệm thì định thức phải bằng 0. Từ đó ta đi đến phương trình bậc 3 như ta đã giải trong trạng thái ứng suất :

$$\varepsilon^*{}^3 - J_1\varepsilon^*{}^2 - J_2\varepsilon^* - J_3 = 0 \quad (3-26)$$

Trong đó  $J_1, J_2, J_3$  là các lượng bất biến :

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3-27)$$

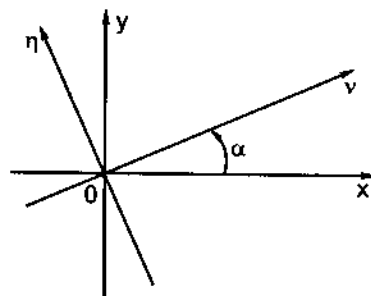
$$J_2 = - \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_x \end{vmatrix} \quad (3-28)$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \epsilon_z \end{vmatrix} \quad (3-29)$$

Ta lại trở về những lập luận tương tự như trạng thái ứng suất. Phương trình bậc 3 (3-26) có ba nghiệm thực  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  được gọi là ba biến dạng chính. Chúng nằm trên ba trục chính vuông góc với nhau từng đôi một tạo nên một hệ trục vuông góc. Các góc vuông tạo nên bởi hệ trục đó là không biến đổi trong quá trình vật thể bị biến dạng.

### §3-4. VÒNG TRÒN MO (MOHR) BIẾN DẠNG

Ở trạng thái ứng suất ta đã phân chia ba trạng thái ứng suất : trạng thái ứng suất đơn, trạng thái ứng suất phẳng và trạng thái ứng suất khối. Trong biến dạng ta không thể tách biệt ba trạng thái như vậy được. Vì có biến dạng theo một phương nào đó thì lập tức có ngay biến dạng theo hai phương chính còn lại, trừ trường hợp có những liên kết cản trở. Tuy nhiên trong thực tế kỹ thuật, nhiều khi ta có thể đo được biến dạng dài trong một mặt phẳng và không cần để ý đến biến dạng theo phương vuông góc với mặt phẳng đó. Trong trường hợp như vậy ta có thể xem đó là một bài toán phẳng. tenxơ biến dạng chỉ còn lại ba thành phần



Hình 3 - 4

$$T_\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y \end{bmatrix}$$

Trong phép xoay trục đưa hệ trục Oxy sang vị trí mới Ovx' trong phép quay  $\alpha$ , tương quan giữa biến dạng dài  $\epsilon_{v'}$  và biến dạng góc  $\epsilon_{v'\eta}$  là quan hệ một vòng tròn như trong trường hợp ứng suất. Vòng tròn đó được gọi là vòng tròn Mo biến dạng.

Thực vậy theo công thức xoay trục (3-23) ta có :

$$\epsilon_{v'\eta} = \{[\epsilon_{ij}][n_{vj}]\}^T [n_{\eta i}]$$

Ở đây  $n_{vj}$  là  $n_{vx} = -\cos\alpha, n_{vy} = \sin\alpha$

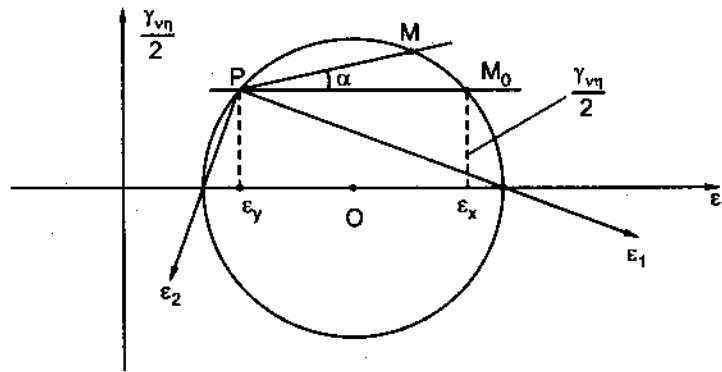
$n_{\eta i}$  là  $n_{\eta x} = -\sin\alpha, n_{\eta y} = -\cos\alpha$

Thay các kí hiệu thường và khai triển ta sẽ được :

$$\epsilon_{v'} = \epsilon_x \cos^2\alpha + \epsilon_y \sin^2\alpha - \gamma_{xy} \cos\alpha \sin\alpha$$

$$\frac{\gamma_{v'\eta}}{2} = (\epsilon_x - \epsilon_y) \sin\alpha \cos\alpha + \gamma_{xy} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

Đúng về mặt toán học là hoàn toàn giống (2-28). Vậy ta có vòng tròn biến dạng như hình 3-5.



Hình 3-5

### §3-5. TENXƠ BIẾN DẠNG CẦU VÀ BIẾN DẠNG LỆCH

Tương tự như trước đây với ứng suất, tenxơ biến dạng luôn chia được thành hai tenxơ : Tenxơ biến dạng cầu và tenxơ biến dạng lệch. Kí hiệu lần lượt là  $T_{\epsilon}^c$  và  $D_{\epsilon}$ . Ta có tenxơ biến dạng cầu :

$$T_{\epsilon}^c = \begin{bmatrix} \epsilon_{tb} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{tb} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{tb} \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

trong đó :

$$\epsilon_{tb} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z}{3} \quad (3-31)$$

và tenxơ biến dạng lệch :

$$D_{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_{tb} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y - \epsilon_{tb} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z - \epsilon_{tb} \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

### §3-6. PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG THÍCH

Ở phần trên chúng ta đã thiết lập được sự tương quan giữa biến dạng và chuyển vị. Các tương quan đó được thể hiện bởi các biểu thức (3-11) và (3-17). Nhưng các biểu thức đó chưa nói lên được tương quan giữa biến dạng dài và biến dạng góc. Như ta đã biết, giữa biến dạng dài và biến dạng góc phải có một tương quan thích ứng vì nếu không có sự thích

ứng đó thì vật thể sau biến dạng có thể có những phần rỗng. Điều đó hoàn toàn trái với giả thuyết của chúng ta về môi trường liên tục. Do đó điều kiện tương quan giữa biến dạng dài và biến dạng góc để đảm bảo điều kiện liên tục của môi trường được gọi là điều kiện tương thích. Biểu thức thể hiện sự tương quan đó được gọi là phương trình tương thích.

Lấy đạo hàm riêng phân của  $\gamma_{xy}$  trong biểu thức (3-17) theo x và y ta được :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Chú ý đến hai biểu thức đầu của (3-11) ta được :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \quad (3-33)$$

Tương tự ta có thể viết tiếp :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (3-34)$$

Bây giờ ta lấy đạo hàm của  $\epsilon_x$  từ (3-11) theo y và z. Ta được :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} \quad (3-35)$$

Lần lượt lấy đạo hàm của  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$  và  $\gamma_{zx}$  theo z, x, y. Từ (3-17) ta có :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \end{aligned} \right\} \quad (3-36)$$

Cộng hai phương trình đầu và cuối của (3-36) và đem trừ cho phương trình thứ hai ta sẽ được :

$$-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \quad (3-37)$$

Đem (3-37) thay vào (3-35) ta có :

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad (3-38)$$

Tương tự ta có thể thiết lập được thêm hai phương trình khác :

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-39)$$

Sáu phương trình (3-33) và (3-39) được gọi là sáu phương trình tương thích giữa biến dạng dài và biến dạng góc của Xanh Vơ-năng (Saint Venant)

**Một số ví dụ cụ thể về xác định phương chính và biến dạng chính như sau :**

**Ví dụ 1 :** Cho tenxơ biến dạng tại M của vật thể đàn hồi chịu lực

$$T_\epsilon = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} 10^{-2}$$

- a) Xác định biến dạng chính và phương chính biến dạng
- b) Trạng thái biến dạng tại M là gì ?

*Bài giải*

a) Sử dụng phương trình (3-36) để xác định các biến dạng chính. Các lượng bất biến được xác định như sau :

$$\begin{aligned} J_1 &= 2 + 2 + 2 = 6 \\ J_2 &= - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -9 \\ J_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \end{aligned}$$

Vậy phương trình có dạng :

$$\epsilon^{*3} - 6\epsilon^{*2} + 9\epsilon^* - 4 = 0 \quad (*)$$

Các hệ số của phương trình là :  $a_1 = -6$ ,  $a_2 = 9$  và  $a_3 = -4$ .

Đặt  $\epsilon^* = x + \alpha$

với  $\alpha = -\frac{a_1}{3} = 2$

ta chuyển được (\*) về dạng :

$$x^3 + px + q = 0$$



với

$$p = -\frac{a_1^3}{3} + a_2 = -3$$

$$q = \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3 = -2$$

Tính  $\Delta$ .

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$$

Ta được nghiệm kép  $x = -\sqrt{-\frac{p}{3}} = -1$

Từ đó ta có nghiệm kép của (\*) là

$$\varepsilon^* = -1 + 2 = 1$$

Nghiệm thứ hai được xác định bởi biểu thức.

$$x = \frac{3q}{p} = 2$$

Vậy :

$$\varepsilon^* = 2 + 2 = 4$$

Như vậy các biến dạng chính là  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = 4$ .

Phương trình của  $\varepsilon_3$  là nghiệm của hệ phương trình (3-25)

$$(2-4)l + 1.m + 1.n = 0$$

$$1.l + (2-4)m + 1.n = 0$$

$$1.l + 1.m + (2-4)n = 0$$

Hay :

$$-2l + m + n = 0 \quad (1)$$

$$l - 2m + n = 0 \quad (2)$$

$$l + m - 2n = 0 \quad (3)$$

$l, m, n$  phải đáp ứng điều kiện :

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (4)$$

Từ phương trình đầu ta có :

$$n = 2l - m \quad (5)$$

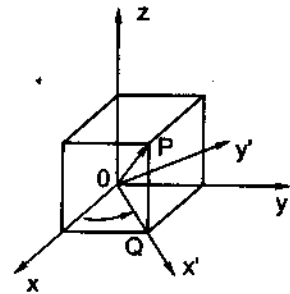
Đem thay (5) vào cho (2) ta được :

$$l - 2m + 2l - m = 0$$

Hay  $3(l - m) = 0$  vậy  $m = l$

Tương tự từ (2) ta có  $l = 2m - n$  và đem thay vào (3) ta được :

$$3(m - n) = 0 \text{ vậy } m = n$$



Hình 3-6

Ta kết luận  $l = m = n$  như vậy trục của  $\varepsilon_3$  phải nghiêng đều đối với các trục tọa độ. Từ điều kiện (4) ta có

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Lấy trị số  $\varepsilon_1 = 1$  hoặc  $\varepsilon_2 = 1$  thay vào hệ (3-25) ta được phương trình vô định

$$l + m + n = 0$$

$l, m, n$  được chọn sao cho thỏa mãn điều kiện  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ . Tất nhiên phương của  $\varepsilon_1$  và  $\varepsilon_2$  phải vuông góc với  $\varepsilon_3$ . Ta thực hiện phép quay trục sau đây :

Gọi Oxyz là hệ trục ban đầu của tenxơ biến dạng.  $\overline{OP}$  là vectơ đơn vị trên trục nghiêng đều của phương  $\varepsilon_3$ . Q là hình chiếu của P trên mặt xOy. Quay hệ trục Oxyz quanh Oz sao cho Ox đến trùng với OQ. Ta kí hiệu vị trí đó của Ox là Ox'. Trục Oy sẽ có vị trí mới là Oy'. Các côsin chỉ phương của Oy' là như sau.  $l = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$  và  $n = 0$ . Ta xét xem Oy' có thể là trục biến dạng chính thứ II không. Tính biến dạng trong phép xoay trục đó. Ta có :

$$\varepsilon_{oy'}^* = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Thực hiện hai phép nội tích liên tiếp ta được :

$$\varepsilon_{oy'}^* = 1$$

Đúng bằng trị số của  $\varepsilon_1 = 1$ . Vậy Oy' đúng là trục thứ II. Để có được trục thứ III ta chỉ còn phải xoay x'Oz chung quanh Oy' để Ox' đến trùng với OP. Vị trí mới của Oz được kí hiệu là Oz'. Trục đó chính là trục chính thứ III. Vị trí đó là vị trí duy nhất vuông góc với OP và Oy'. Các côsin chỉ phương của Oz' được kí hiệu là  $l', m', n'$ . Chúng phải thỏa mãn điều kiện vuông góc với OP và Oy', nghĩa là :

$$\begin{cases} l' \frac{1}{\sqrt{3}} + m' \frac{1}{\sqrt{3}} + n' \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \\ l' \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + m' \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases}$$

và điều kiện quan hệ giữa chúng :

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1$$

Từ hai điều kiện đó và từ hình vẽ ta tìm thấy :

$$n = \frac{2}{\sqrt{6}} ; m = l = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

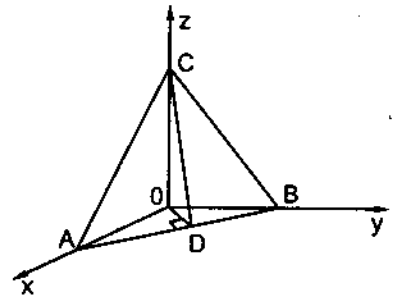
b) Trạng thái biến dạng tại M được trưng trưng bởi tenxơ biến dạng :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Đó là trạng thái biến dạng khối.

Ví dụ 2. Cho trường biến dạng xác định bởi tenxơ :

$$T_{\epsilon} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$$



Hình 3-7

Góc  $\widehat{ADC}$  sẽ thay đổi thế nào sau khi biến dạng. Cho biết  $OA = OB = OC = a$ ,  $AD = BD$ .

*Bài giải*

Xác định các cosin chỉ phương của AD và CD.

Tính độ dài của CD :

$$\overline{OD} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Vậy :

$$\begin{aligned} \overline{DC}^2 &= \overline{OD}^2 + \overline{OC}^2 \\ &= \frac{a^2}{2} + a^2 = \frac{3a^2}{2} \end{aligned}$$

$$DC = a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$l = \cos(DC, x) = -\frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$m = \cos(DC, y) = -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

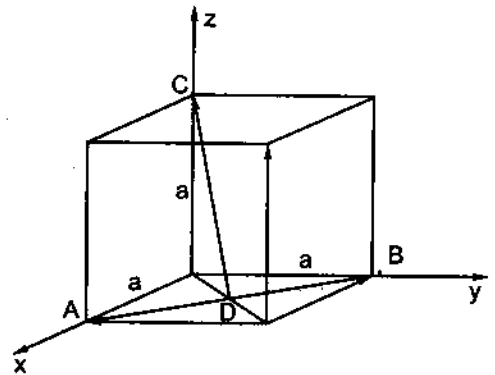
$$n = \cos(DC, z) = \frac{a}{a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

Các cosin chỉ phương của AD.

$$l' = \cos(AD, x) = -\frac{a}{a\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$m' = \cos(AD, y) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n' = 0$$



Hình 3-8

Vậy ta có: 
$$\gamma_{ADC} = \left[ \begin{matrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{matrix} \right] \left[ \begin{matrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ +\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{matrix} \right]^T \left[ \begin{matrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[ +\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}} \right] = 0$$

Góc  $\widehat{AOC}$  không thay đổi.

### Bài tập

3.1. Cho tenxơ biến dạng tại điểm M của vật thể đàn hồi

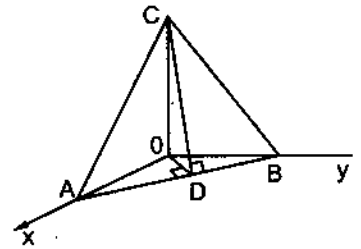
$$T_e = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$$

- Xác định biến dạng chính và phương chính biến dạng.
- Trạng thái biến dạng tại M là gì?

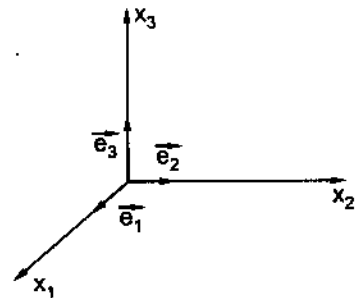
3.2. Cho trường biến dạng (h.3-9) xác định bởi tenxơ :

$$T_e = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -3 \end{bmatrix}$$

Góc  $\widehat{ADC}$  sẽ thay đổi thế nào sau khi biến dạng  
 Cho biết  $OA = OB = OC = a$   
 $AD = BD$ .



Hình 3-9



Hình 3-10

3.3. Trường chuyển vị của vật thể đàn hồi theo quy luật  $\vec{u} = 4x_1^2 \vec{e}_1 + x_2 x_3^2 \vec{e}_2 + x_1 x_3^2 \vec{e}_3$

Các vectơ  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  là các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ.

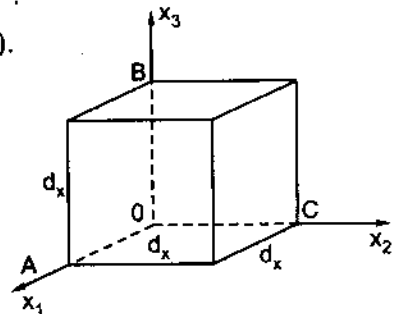
Tìm vị trí mới của các điểm A(1 ; 0 ; 2) và B(-1 ; 2 ; 1).

Xác định độ dài của  $\overline{AB}$  sau biến dạng (h.3-10).

3.4. Trường chuyển vị của vật thể đàn hồi cho bởi quy luật

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \\ x_2 &= x_2 + Ax_3 \\ x_3 &= x_3 + Ax_2 \end{aligned}$$

- Tìm các thành phần của tenxơ biến dạng tại 0.
- Tìm chuyển vị của các cạnh trong hình lập phương với A là hằng số.



Hình 3-11

## Chương 4

# QUAN HỆ GIỮA ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG

Trong chương hai và chương ba ta đã đề cập đến trạng thái ứng suất và trạng thái biến dạng. Trong chương này ta đề cập đến quan hệ giữa ứng suất và biến dạng.

### §4-1. CÁC HẰNG SỐ ĐÀN HỒI

Xét môi trường đàn hồi tuyến tính của Húc.

Khi vật thể đàn hồi là dị hướng, nghĩa là tính đàn hồi của vật thể theo những phương khác nhau là không giống nhau, thì tương quan giữa sáu thành phần ứng suất và sáu thành phần biến dạng phải thông qua 36 hằng số đàn hồi như sau :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} \\ a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

Trong trường hợp tổng quát đó ta cũng sẽ chứng minh rằng tenxơ ứng suất và tenxơ biến dạng phải có cùng phương chính.

Thực vậy, giả sử chọn trục tọa độ là trục chính của biến dạng, khi đó ta có các biến dạng chính là  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$  và  $\epsilon_{33}$ . Các biến dạng góc  $\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_{23}$  và  $\epsilon_{31}$  là bằng không. Từ (4-1) ta tìm thấy trị số của ứng suất  $\sigma_{23}$  là như sau :

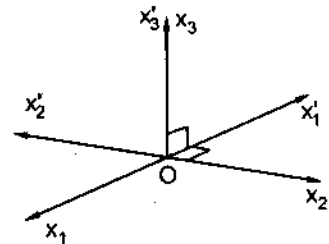
$$\sigma_{23} = a_{15}\epsilon_{11} + a_{25}\epsilon_{22} + a_{35}\epsilon_{33} \quad (4-2)$$

Bây giờ chúng ta sử dụng một phép quay trục tọa độ với  $Ox_3$  cố định còn  $Ox_1$  và  $Ox_2$  quay quanh  $Ox_3$  một góc  $180^\circ$  để đến chiều ngược lại như hình 4-1. Như vậy các cosin chỉ phương của các trục tọa độ trong hệ trục tọa độ  $Ox_1x_2x_3$  là như sau :

$$Ox_1(-1, 0, 0)$$

$$Ox_2(0, -1, 0)$$

$$Ox_3(0, 0, 1)$$



Hình 4-1

Theo công thức xoay trục (3-23) ta tính được các biến dạng dài theo  $Ox_1$ ,  $Ox_2$  và  $Ox_3$  là như sau :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} &= \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} &= \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \varepsilon_{33}\end{aligned}\quad (4-3)$$

Như vậy các biến dạng dài trên ba trục đó là không đổi dù chiều trục tọa độ thay đổi.

Bây giờ ta tính trị số của ứng suất  $\sigma_{23}$  theo hai cách. Theo bảng (4-1) nếu thay cột bên trái là các ứng suất  $\sigma_{ij}$  thì cột bên phải cũng phải thay là  $\varepsilon_{ij}$ . Vậy ta có :

$$\sigma_{23} = a_{15}\varepsilon_{11} + a_{25}\varepsilon_{22} + a_{35}\varepsilon_{33} \quad (4-4)$$

(Chú ý hệ trục tọa độ mới  $Ox_1x_2x_3$  cũng là hệ trục chính, biến dạng góc là bằng không).

Đưa (4-3) vào (4-4) ta tìm thấy :

$$\sigma_{23} = \sigma_{23} \quad (4-5)$$

Mặt khác sử dụng công thức xoay trục (2-12) ta tính được  $\sigma_{23}$  như sau :

$$\sigma_{23} = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\sigma_{23} \quad (4-6)$$

So sánh (4-5) và (4-6) ta có :

$$\sigma_{23} = -\sigma_{23}$$

Điều kiện đó chỉ thỏa mãn khi  $\sigma_{23} = 0$ .

Cùng một cách lập luận tương tự ta đi đến kết luận là  $\sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$ . Nói một cách khác trục chính của trạng thái biến dạng và trục chính của trạng thái ứng suất tại một điểm là trùng nhau. Điều kiện này không đòi hỏi  $a_{15}$ ,  $a_{25}$  và  $a_{35}$  phải bằng nhau, nghĩa là vật liệu không nhất thiết phải đẳng hướng. Điều yêu cầu ở đây chỉ cần là vật thể có tính đàn hồi tuyến tính. Nghĩa là tương quan giữa ứng suất và biến dạng là tuyến tính như được biểu diễn trong biểu thức (4-1).

Nếu chọn hệ tọa độ là các trục chính thì tương quan giữa ứng suất và biến dạng là :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

Đối với vật liệu đẳng hướng thì quan hệ giữa ứng suất và biến dạng dài trên bất cứ phương nào cũng như nhau, nghĩa là thay phương chịu lực đi thì biến dạng tương ứng với lực không thay đổi. Muốn đạt điều đó ta phải có :

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = C_1$$

$$a_{12} = a_{21} = a_{31} = a_{33} = a_{23} = a_{32} = C_2$$

Vậy quan hệ (4-7) được viết dưới dạng khai triển như sau :

$$\sigma_{11} = C_1 \varepsilon_{11} + C_2 (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

$$\sigma_{22} = C_1 \varepsilon_{22} + C_2 (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33})$$

$$\sigma_{33} = C_1 \varepsilon_{33} + C_2 (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11})$$

Nếu đặt  $C_1 = 2\mu$ ,  $C_2 = \lambda$  và  $\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  thì có thể viết gọn lại dưới dạng :

$$\sigma_{kk} = 2\mu \varepsilon_{kk} + \lambda \cdot \theta \quad (4-8)$$

Trong đó lượng  $\theta$  không phụ thuộc vào phép quay tọa độ.

Trong biểu thức(4-8) ta chỉ mới nói đến các tương quan giữa ứng suất chính và biến dạng chính. Để có được các tương quan giữa ứng suất và biến dạng góc ta xoay hệ trục  $Ox_1x_2x_3$  có phương trùng với các trục chính đến một vị trí mới  $Ox'_1x'_2x'_3$  bất kì. Các cosin chỉ phương của các trục  $Ox'_1$ ,  $Ox'_2$ ,  $Ox'_3$  đối với  $Ox_1x_2x_3$  được kí hiệu là  $n_{ij}$ , chỉ số thứ nhất chỉ vị trí trục mới và chỉ số thứ hai để chỉ hệ trục cũ.

Vậy ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên mặt cắt vuông góc với  $Ox'_1$  và song song với  $Ox'_2$  được tính với các biểu thức sau :

$$\sigma'_{11} = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

$$\sigma'_{12} = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} n_{21} \\ n_{22} \\ n_{23} \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

Thay (4-8) vào (4-9) và khai triển ta có :

$$[(2\mu \varepsilon_{11} \cdot n_{11} + \lambda \theta n_{11}), (2\mu \varepsilon_{22} \cdot n_{12} + \lambda \theta \cdot n_{12}), (2\mu \varepsilon_{33} \cdot n_{13} + \lambda \theta n_{13})] \cdot \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix}$$

Thực hiện phép nhân nội tích một lần nữa ta được

$$2\mu[\varepsilon_{11} \cdot n_{11}^2 + \varepsilon_{22} \cdot n_{12}^2 + \varepsilon_{33} \cdot n_{13}^2] + \lambda\theta[n_{11}^2 + n_{12}^2 + n_{13}^2]$$

Vì tổng :  $n_{11}^2 + n_{12}^2 + n_{13}^2 = 1$

$$\text{và} \quad \varepsilon_{11} \cdot n_{11}^2 + \varepsilon_{22} \cdot n_{12}^2 + \varepsilon_{33} \cdot n_{13}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} = \varepsilon_{11}$$

Nên (4-9) có thể viết lại dưới dạng :

$$\sigma_{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\theta \quad (4-11)$$

Hình thức hoàn toàn giống như (4-8) nhưng chú ý ở đây  $\sigma_{11}$  là ứng suất pháp trên mặt cắt có cả ứng suất tiếp.

Cùng một cách lập luận tương tự, ta viết (4-10) dưới dạng :

$$\sigma_{12} = 2\mu \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} n_{21} \\ n_{22} \\ n_{23} \end{bmatrix} + \lambda\theta [n_{11}n_{21} + n_{12}n_{22} + n_{13}n_{23}]$$

Vì  $n_{11}n_{21} + n_{12}n_{22} + n_{13}n_{23} = 0$  (hai trục vuông góc với nhau). Nên biểu thức trên có dạng :

$$\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} \quad (4-12)$$

Đây là quan hệ giữa ứng suất tiếp và biến dạng góc.

Qua (4-11) và (4-12) ta nhận thấy ứng suất pháp gây nên biến dạng dài và ứng suất tiếp gây nên biến dạng góc. Cả hai biểu thức đó có thể viết gộp lại một như sau :

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta \cdot \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (4-13)$$

Trong đó  $\delta_{ij}$  là toán tử Krô-nec-ke. Khi  $i = j$  thì  $\delta_{ij} = 1$ , khi  $i \neq j$  thì  $\delta_{ij} = 0$ .

(4-13) cho ta quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong môi trường đàn hồi tuyến tính đẳng hướng. Trong môi trường đó ta chỉ còn lại hai hệ số đàn hồi là  $\lambda$  và  $\mu$ . Các hệ số đó được gọi là các hằng số Lamé.

Bây giờ ta hãy tìm biểu thức ngược lại, tính biến dạng qua ứng suất :

Gọi :

$$\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (4-14)$$

Thay trị số  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  và  $\sigma_{33}$  được tính từ (4-13) vào, ta có :

$$\sigma = 2\mu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 3\lambda\theta = (2\mu + 3\lambda)\theta$$

Vậy :

$$\theta = \frac{\sigma}{2\mu + 3\lambda} \quad (4-15)$$



Đem trị số  $\theta$  đó thay vào (4-13) ta được :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{ij} - \lambda \frac{\sigma_{\delta_{ij}}}{3\lambda + 2\mu} \right] \quad (4-16)$$

Đó là biểu thức chúng ta cần tìm.

Biểu thức đó tách thành hai nhóm :

a) Khi  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 1$  ta có :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2\mu} \left[ \sigma_{ii} - \lambda \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3\lambda + 2\mu} \right] \quad (4-17)$$

$i = 1, 2, 3$ .

b) Với  $i \neq j$   $\delta_{ij} = 0$

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu}$$

Đặt  $\mu = G$  và gọi  $G$  là môđun trượt của vật liệu biểu thức đó được viết lại dưới dạng :

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{G} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4-18)$$

với  $i \neq j$

## §4-2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT ĐƠN

Ta gọi trạng thái ứng suất đơn là khi trên một phương chính ứng suất khác không, còn trên hai phương chính còn lại trị số ứng suất là bằng không.

Ta giả sử  $\sigma_{11} \neq 0$  còn  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ .

Gọi môđun đàn hồi là tỷ số  $E$  giữa ứng suất  $\sigma_{11}$  và  $\varepsilon_{11}$ . Vậy ta có :

$$\sigma_{11} = E \cdot \varepsilon_{11} \quad (4-19)$$

Từ (4-17) ta có ngay các biểu thức :

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\mu} \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11} \quad (4-20)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\frac{1}{2\mu} \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{11} \quad (4-21)$$

Ta nhận thấy giữa  $\varepsilon_{11}$  và  $\varepsilon_{22}$  hay  $\varepsilon_{33}$  luôn luôn ngược dấu nhau. Nếu  $\varepsilon_{11}$  là dương nghĩa là vật liệu chịu giãn thì  $\varepsilon_{22}$  và  $\varepsilon_{33}$  là co lại. Nếu  $\varepsilon_{11}$  là âm, nghĩa là co lại thì  $\varepsilon_{22}$  và  $\varepsilon_{33}$  sẽ giãn ra. Tỷ số  $\nu$  giữa  $\varepsilon_{22}$  và  $\varepsilon_{11}$  được gọi là hệ số Poát xông. Ta dễ dàng xác định tương quan giữa  $E$  và  $\nu$  với các hằng số đàn hồi  $\lambda$  và  $\mu$  của Lamé.

Thực vậy thay (4-20) vào (4-19) ta được :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (4-22)$$

Đem chia (4-21) cho (4-20) ta có :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (4-23)$$

Nếu thay  $\mu = G$  vào (4-23) ta dễ dàng xác định được  $\lambda$  theo  $\nu$  và  $G$ . Ta có :

$$\lambda = \frac{2\nu G}{1 - \nu} \quad (4-24)$$

Thay (4-24) vào (4-22) với chú ý  $\mu = G$  ta tìm thấy tương quan giữa  $G$  và  $E$ .

$$G = \frac{E}{2(\nu + 1)} \quad (4-25)$$

Như vậy, một cách tổng quát công thức (4-16) có thể viết lại dưới dạng

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma \delta_{ij} \quad \text{với } i, j = 1, 2, 3 \quad (4-26)$$

$$\text{và } \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

### §4-3. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT KHỐI ĐỊNH LUẬT HÚC TỔNG QUÁT

Là khi ba ứng suất chính đều khác không.

Ta hãy xét trong hệ tọa độ Oxyz, với trạng thái ứng suất khối có đầy đủ sáu thành phần của tenxơ ứng suất và biến dạng. Công thức (4-26) được viết thành hai nhóm như sau :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases} \quad (4-27)$$

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \end{cases} \quad (4-28)$$

Các biểu thức đó được gọi là các biểu thức của định luật Húc tổng quát.

Công thức (4-13) biểu diễn tương quan giữa ứng suất và biến dạng được viết như sau :

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda\theta + 2G\varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda\theta + 2G\varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz}$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz}$$

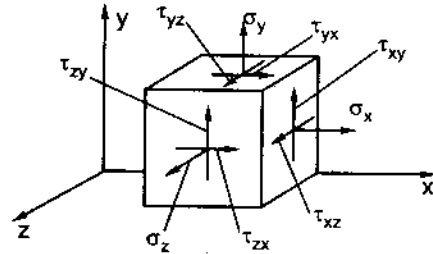
Trong đó  $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

Các biểu thức này được gọi là các biểu thức của Lamé.

#### §4-4. THỂ NĂNG BIẾN DẠNG ĐÀN HỒI

Trong tương quan của Húc ta có thể tính được thể năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong đơn vị thể tích.

Ta hãy tưởng tượng ngoại lực gây nên biến dạng đàn hồi tăng dần từ không đến một trị số xác định trong khoảng thời gian nào đó. Xét ở một thời điểm  $t$ , trạng thái ứng suất tại một điểm nào đó trong vật thể đàn hồi có các trị số ứng suất như được biểu diễn trên hình 4-2. Đối với phân tố đang xét, ứng lực do các ứng suất gây nên trở thành ngoại lực tác động lên phân tố. Giả sử trong khoảng thời gian  $\delta t$  phân tố có các biến dạng  $\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \delta \varepsilon_z, \delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{yz}, \delta \gamma_{xz}$ . Bỏ qua lượng vô cùng bé bậc cao ta có thể xem công của ngoại lực tác động lên phân tố như tổng cộng của các thành phần ứng lực riêng lẻ trong các độ chuyển dời tương ứng. Ta có :



Hình 4-2

$$\begin{aligned} dA = & \sigma_x \delta \varepsilon_x dx dy dz + \sigma_y \delta \varepsilon_y dx dy dz + \sigma_z \delta \varepsilon_z dx dy dz + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} dx dy dz \\ & + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} dx dy dz + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} dx dy dz \end{aligned} \quad (4-29)$$

Nếu không có sự mất mát về năng lượng công đó được chuyển hóa hoàn toàn thành thể năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong phân tố :

$$\delta(dU) = [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}] dx dy dz \quad (4-30)$$

Kí hiệu  $u = \frac{dU}{dV}$  là thể năng tích lũy trong một đơn vị thể tích thì (4-30) có thể viết lại :

$$\delta u = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} \quad (4-31)$$

Trong trường hợp biến dạng là thuận nghịch thì ta dễ dàng chứng minh được rằng  $\delta u$  là một vi phân toàn phần. Thực vậy, trong quá trình đó sự biến thiên của thể năng  $U$  trong quá trình đặt tải và bỏ tải là bằng không ; nghĩa là thể năng tích lũy được trong hệ sẽ hoàn toàn biến đổi thành công trong quá trình giảm tải vậy :

$$\oint \delta U = 0 \quad (4-32)$$

Từ định nghĩa ta có :

$$U = \int_V u dv$$

Vậy :

$$\delta U = \int_V \delta u dv$$

Dem thay biểu thức đó vào (4-32) ta được :

$$\oint_V \delta u dv = 0$$

Điều đó chứng tỏ rằng  $\delta u$  là một vi phân toàn phần. Do đó ta có thể biểu diễn  $\delta u$  dưới dạng :

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial \epsilon_x} \delta \epsilon_x + \frac{\partial u}{\partial \epsilon_y} \delta \epsilon_y + \frac{\partial u}{\partial \epsilon_z} \delta \epsilon_z + \frac{\partial u}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial \gamma_{xz}} \delta \gamma_{xz} + \frac{\partial u}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz} \quad (4-33)$$

So sánh với biểu thức (4-31) ta có các liên hệ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial u}{\partial \epsilon_x}, \sigma_y = \frac{\partial u}{\partial \epsilon_y}, \sigma_z = \frac{\partial u}{\partial \epsilon_z} \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial \gamma_{xy}}, \tau_{yz} = \frac{\partial u}{\partial \gamma_{yz}}, \tau_{xz} = \frac{\partial u}{\partial \gamma_{xz}} \end{aligned} \right\} \quad (4-34)$$

Các biểu thức này rất cần thiết cho chúng ta trong mục tới. Bây giờ ta hãy quay lại biểu thức (4-31), tích phân biểu thức (4-31) trong quá trình đặt tải ta được thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong đơn vị thể tích của quá trình đó là :

$$u = \int (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}) \quad (4-35)$$

Vì tương quan giữa ứng suất và biến dạng là tương quan bậc nhất nên ta dễ dàng tìm thấy biểu thức tích phân đó như sau :

$$u = \frac{1}{2} [\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{yz} \tau_{yz} + \gamma_{zx} \tau_{zx}] \quad (4-36)$$

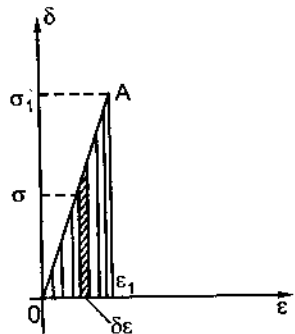
Thực vậy giả sử ta xét với trạng thái ứng suất đơn chẳng hạn. Khi đó tương quan giữa  $\sigma$  và  $\epsilon$  được biểu diễn như trên hình 4-6 : Tích phân trong quá trình đặt tải từ 0 đến  $\sigma_1$  ta có thế năng tích lũy trong đơn vị thể tích là :

$$u_1 = \int \sigma \delta \epsilon = \frac{\sigma_1 \epsilon_1}{2}$$

Trị số của  $u_1$  được tượng trưng bằng diện tích của tam giác OAB.

Thay trị số của  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  bằng các biểu thức (4-27) và (4-28) ta được :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x)] \\ &\quad + \frac{1}{2G} [\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2] \end{aligned} \quad (4-37)$$



Hình 4-3

Nếu phân tố được tách ra bằng các mặt chính thì biểu thức của  $u$  có dạng :

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \quad (4-38)$$

Nếu xem trạng thái ứng suất như tổng của ứng suất cầu với  $\sigma_1^* = \sigma_2^* = \sigma_3^* = \sigma_{tb}$  và ứng suất lệch thì thế năng trên đây sẽ là tổng của hai thế năng, thế năng biến dạng thể tích  $U_{tt}$  và thế năng biến dạng hình dáng  $U_{hd}$  :

$$U = U_{tt} + U_{hd}$$

Ta dễ dàng tính được  $U_{tt}$  với biểu thức :

$$U_{tt} = 3 \frac{1-2\nu}{2E} \sigma_{tb}^2$$

hay :

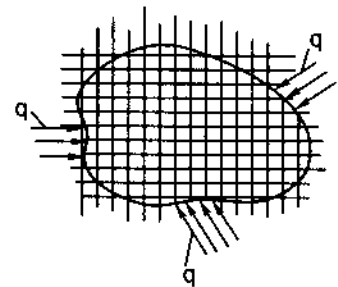
$$U_{tt} = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (4-39)$$

Vậy thế năng biến đổi hình dáng tích lũy trong đơn vị thể tích là :  $U_{hd} = U - U_{tt}$ . Công thức của nó sẽ là :

$$U_{hd} = \frac{1+\nu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1] \quad (4-40)$$

## §4-5. CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN GIẢI BÀI TOÁN ĐÀN HỒI

Giả sử có vật thể đàn hồi chịu lực (h.4-4). Mong muốn của chúng ta là xác định được trạng thái ứng suất tại mọi điểm trong vật thể đàn hồi, vì khi biết được trạng thái ứng suất tại mọi điểm trong vật thể ta mới biết chỗ nào vật thể có trạng thái ứng suất nguy hiểm nhất. Ta gọi chỗ đó là những điểm nguy hiểm và nếu như tại những điểm đó vật liệu vẫn đủ bền thì rõ ràng vật thể sẽ bền dưới tác dụng của ngoại lực.



Hình 4-4

Với phương pháp của đàn hồi người ta đề ra cách giải quyết bài toán như sau. Chia nhỏ vật thể đàn hồi ra thành những phân tố vô cùng bé. Nếu bài toán được giải quyết trong hệ tọa độ Đêcác thì những phân tố đó có hình dáng là những hình hộp, nếu trong tọa độ trụ thì chúng là những phân hình trụ. Rõ ràng giữa chúng có sự liên kết với nhau về ứng suất, về chuyển vị và có sự tương quan giữa ứng suất và biến dạng như ta đã xét trên đây. Dựa vào điều kiện đã biết các phân tố ở ngoài cùng, trên sát bề mặt của vật thể, vì tại đó có sự cân bằng giữa nội lực và ngoại lực, hay các điều kiện chuyển vị đã biết, ta suy dẫn cho các lớp phân tố bên trong. Với cách đó ta biết trạng thái ứng suất trên toàn vật thể.

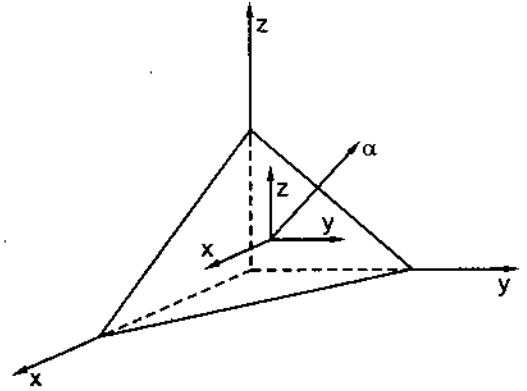
Tóm lại ta phải giải quyết bài toán với các phương trình sau đây :

a) Điều kiện cân bằng của phân tử (phương trình Naviê) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= 0 \left( = \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

b) Quan hệ giữa chuyển vị và biến dạng (các phương trình Còsi) :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \gamma_{yz} = \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; \gamma_{zx} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \epsilon_z &= \frac{\partial \omega}{\partial z}; \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (II)$$



Hình 4-5

c) Các phương trình tương thích (phương trình Xanh - Vonăng)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\ 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (III)$$

d) Tương quan giữa biến dạng và ứng suất. Định luật Húc tổng quát :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_z + \sigma_y)]; \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]; \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_z + \sigma_y)]; \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \right\} \quad (IV)$$

Hoặc dùng hệ thống phương trình của Lamê (4-27) :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z & \tau_{zy} &= G\gamma_{zy} \end{aligned} \right\} \quad (V)$$

Ngoài những hệ phương trình trên các nghiệm phải thỏa mãn điều kiện bề mặt. Nếu như xét một phần tử sát ngay trên bề mặt của vật thể thì có thể xem bề mặt của vật thể là một mặt nghiêng nào đó có pháp tuyến  $\nu$  (h.4-5). Ngoại lực tác dụng tại đó được chia thành ba thành phần  $X_\nu, Y_\nu, Z_\nu$ , (trên đơn vị diện tích). Điều kiện mặt ngoài được viết hoàn toàn giống như các biểu thức (2-7). Ta có :

$$\left. \begin{aligned} X_\nu &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_\nu &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_\nu &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (4-41)$$

Giải quyết một lúc bốn hệ thống phương trình vi phân đó là một điều khó khăn lớn. Cũng vì vậy không phải bất cứ bài toán nào ta cũng giải được. Nói chung ta có hai cách giải. Cách thứ nhất xem ẩn số phải tìm ban đầu là các thành phần ứng suất  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$  và  $\tau_{zx}$  và cách thứ hai xem các chuyển vị  $u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$  là ẩn. Ta sẽ lần lượt trình bày hai cách đó :

### 1. Cách giải thứ nhất : Xem các thành phần ứng suất là ẩn

Bài toán đưa về việc lấy tích phân chín phương trình (I) và (III) với sáu hàm chưa biết. Như vậy trong nghiệm tổng quát sẽ có mặt các hàm tùy ý. Các hàm này được xác định từ điều kiện mặt ngoài (4-42).

Vì ta đã lấy ứng suất làm ẩn nên ta phải chuyển hệ phương trình (III) sang dạng ứng suất. Để làm được điều đó ta sử dụng hệ phương trình (IV) và hệ phương trình (I) lấy đạo hàm các phương trình đó và thay vào (III) ta sẽ tìm thấy :

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 \sigma_x + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{tb}}{\partial x^2} &= 0 \\
 \nabla^2 \sigma_y + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{tb}}{\partial y^2} &= 0 \\
 \nabla^2 \sigma_z + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{tb}}{\partial z^2} &= 0 \\
 \nabla^2 \tau_{yx} + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{tb}}{\partial y \partial z} &= 0 \\
 \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{tb}}{\partial z \partial x} &= 0 \\
 \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{tb}}{\partial x \partial y} &= 0
 \end{aligned} \right\} (4-42)$$

Trong đó  $\nabla^2$  là toán tử Laplace (Laplace) với định nghĩa :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Các phương trình đó được thiết lập khi xem các lực thể tích bằng không và được gọi là phương trình của Bentrani Misen. Khi có kể đến lực thể tích thì các phương trình đó có dạng như sau :

$$\left. \begin{aligned}
 \nabla^2 \sigma_x + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{tb}}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{1-\gamma} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial X}{\partial x} &= 0 \\
 \nabla^2 \sigma_y + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{tb}}{\partial y^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial Y}{\partial y} &= 0 \\
 \nabla^2 \sigma_z + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{tb}}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial Z}{\partial z} &= 0 \\
 \nabla^2 \tau_{yx} + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{tb}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} &= 0 \\
 \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{tb}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} &= 0 \\
 \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{3}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_{tb}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} &= 0
 \end{aligned} \right\} (4-41)$$

## 2. Cách giải thứ hai : xem các thành phần chuyển vị là ẩn

Ta phải chuyển tất cả hệ phương trình cân bằng (I) và các điều kiện trên mặt ngoài (4-41) viết theo các thành phần chuyển vị  $u, v$  và  $w$ .



Từ các phương trình của Lamê (4-13) ta có thể viết :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{xy} &= G \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-44)$$

Lấy đạo hàm theo x, theo y và theo z sau đó thay vào phương trình thứ nhất của hệ phương trình cân bằng (I) với chú ý :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Phương trình cân bằng thứ nhất sẽ có dạng :

$$(\lambda + g) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u + \rho X = 0 \quad \left( = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \quad (4-45)$$

Cùng cách thiết lập tương tự ta có hai phương trình khác :

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 v + \rho Y &= 0 \quad \left( = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 \omega + \rho Z &= 0 \quad \left( = \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-46)$$

Những phương trình đó được gọi là các phương trình Lamê.

Các điều kiện bề mặt sẽ được viết như sau : Từ phương trình đầu ta có

$$X_v = \lambda \theta l + G \left[ \frac{\partial u}{\partial u} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right] + G \left[ \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial \omega}{\partial x} n \right]$$

Chú ý rằng biểu thức ở trong dấu ngoặc vuông thứ nhất biểu thị đạo hàm của hàm số u theo pháp tuyến v của mặt ngoài vật :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n$$

Cũng tính toán tương tự với các phương trình thứ hai và thứ ba ta có :

$$\left. \begin{aligned} X_v &= \lambda \theta l + G \frac{\partial u}{\partial v} + G \left[ \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial \omega}{\partial x} n \right] \\ Y_v &= \lambda \theta m + G \frac{\partial v}{\partial v} + G \left[ \frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial \omega}{\partial y} n \right] \\ Z_v &= \lambda \theta n + G \frac{\partial \omega}{\partial v} + G \left[ \frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial \omega}{\partial z} n \right] \end{aligned} \right\} \quad (4-47)$$

Từ các phương trình Lamé và các điều kiện mặt ngoài (4-41) ta sẽ tìm thấy các chuyển vị  $u$ ,  $v$  và  $\omega$ . Sau khi đã có các chuyển vị ta dễ dàng xác định được các biến dạng và từ các biểu thức của Húc ta sẽ tìm được ứng suất.

Ngoài hai cách giải trên đây ta còn một cách giải thứ ba được gọi là cách giải hỗn hợp, nghĩa là trên một phần này của vật thể thì giải theo chuyển vị và phần khác thì giải theo ứng suất. Ta không trình bày kỹ cách giải này nhưng những phương trình cơ bản thì ta đã thiết lập xong.

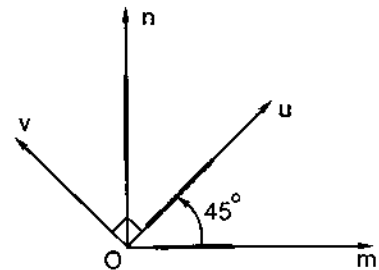
Ta nhận thấy theo cách giải trên đây sẽ gặp rất nhiều khó khăn, nhiều bài toán trong thực tế hầu như không giải được. Để có thể áp dụng tính toán cho những bài toán ứng dụng trong kĩ thuật người ta thường đưa ra một số giả thuyết. Nhờ những giả thuyết đó mà ta đã đơn giản được các phương trình vi phân trên đây và đã tìm ra nghiệm dễ dàng. Tất nhiên nghiệm đó không phải là nghiệm chính xác, nhưng độ chính xác của nó cũng đủ đáp ứng đối với yêu cầu trong thực tế. Chúng ta sẽ dùng các giả thuyết đó để tính toán về thanh mà ta sẽ đề cập tới trong các chương sau.

Ta lấy một số ví dụ về tính toán tương quan giữa biến dạng và ứng suất :

**Ví dụ 1.** Tại một điểm trên mặt vật thể chịu lực người ta đo được biến dạng tỉ đối theo các phương  $O_m$ ,  $O_n$  và  $O_u$  như sau (hình 4-6).

$$\epsilon_m = 2,81 \cdot 10^{-4}, \epsilon_n = -2,81 \cdot 10^{-4}, \epsilon_u = 1,625 \cdot 10^{-4}$$

Xác định phương chính và ứng suất chính tại điểm đang xét. Cho biết hệ số Poát xng  $\nu = 0,3$ , môđun đàn hồi  $E = 2 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình 4-6

### Bài giải

Ta nhận thấy phương vuông góc với bề mặt của vật thể là một phương biến dạng chính vì theo phương này vật thể không chịu lực. Do đó ta có thể bỏ qua biến dạng của phương này và bài toán được xem là bài toán phẳng.

Sử dụng công thức (4-27) ta có thể viết :

$$\epsilon_m = \frac{1}{E} [\sigma_m - \nu \sigma_n] = \frac{1}{2 \cdot 10^4} [\sigma_m - 0,3 \sigma_n] = 2,81 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_n = \frac{1}{E} [\sigma_n - \nu \sigma_m] = \frac{1}{2 \cdot 10^4} [\sigma_n - 0,3 \sigma_m] = -2,81 \cdot 10^{-4}$$

Từ các biểu thức đó ta tính được  $\sigma_m = 4,32 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_n = -4,32 \text{ kN/cm}^2$ .

Sử dụng công thức xoay trục (2-29) và xem  $O_{mn}$  như tọa độ góc ta có :

$$\sigma_u = \frac{\sigma_m + \sigma_n}{2} + \frac{\sigma_m - \sigma_n}{2} \cos(2 \cdot 45^\circ) - \tau_{nm} \cdot \sin(2 \cdot 45^\circ)$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_m + \sigma_n}{2} + \frac{\sigma_m - \sigma_n}{2} \cos(2 \cdot 135^\circ) - \tau_{nm} \cdot \sin(2 \cdot 135^\circ)$$

Với chú ý  $\sigma_m + \sigma_n = 0$ ,  $\cos(2.45^\circ) = 0$ ,  $\cos(2.135^\circ) = 0$ ,  $\sin(2.45^\circ) = 1$ ,  $\sin(2.135^\circ) = -1$  ta tìm thấy :

$$\sigma_u = -\tau_{nm} \quad (1)$$

$$\sigma_v = -\sigma_u \quad (2)$$

Vậy ta có thể viết :

$$\varepsilon_u = \frac{1}{E} [\sigma_u + \nu\sigma_u] = 1,625 \cdot 10^{-4}$$

Từ đó ta có :

$$\sigma_u = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1,625 \cdot 10^{-4}}{1,3} = 2,5 \text{ kN/cm}^2$$

Trị số của ứng suất tiếp  $\tau_{nm}$  là :

$$\tau_{nm} = -\sigma_u = -2,5 \text{ kN/cm}^2$$

Phương của trục chính ứng suất được xác định từ biểu thức (2-30)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{nm}}{\sigma_m - \sigma_n} = \frac{2 \cdot 2,5}{4,32 + 4,32} = 0,5787$$

Vậy :  $2\alpha = 30^\circ$  và  $\alpha_1 = 15^\circ$ ,  $\alpha_2 = 105^\circ$ .

Trị số của ứng suất chính được tính từ công thức (2-37). Ta có :

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_n + \sigma_m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_m - \sigma_n}{2}\right)^2 + \tau_{nm}^2}$$

Thay số vào ta được :

$$\sigma_{\max}^{\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4,32 + 4,32)^2 + 4(2,5)^2} = \pm 5 \text{ kN/cm}^2$$

Ghi chú :

Ta có thể tính  $\sigma_u$  và  $\sigma_v$  theo các công thức xoay trục như sau :

$$\sigma_u = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_m & \tau_{nm} \\ \tau_{nm} & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -\cos 45^\circ \\ \sin 45^\circ \end{bmatrix}$$

Với trị số của  $\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  và chú ý tổng  $\sigma_m + \sigma_n = 0$ . Tích trên dẫn đến biểu thức :

$$\sigma_u = \sigma_m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \tau_{nm} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \tau_{nm} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma_n \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

và từ đó ta có :

$$\sigma_u = -\tau_{nm} \quad (1)$$

Tương tự ta có :

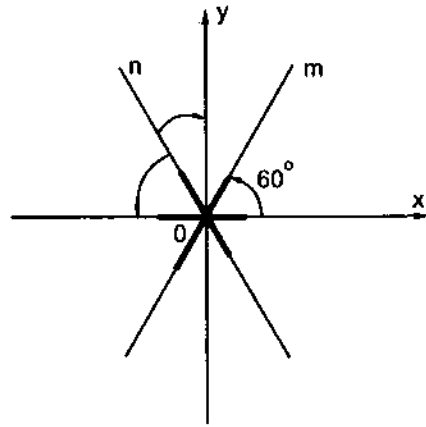
$$\sigma_v = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_m & \tau_{mn} \\ \tau_{nm} & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_v = \sigma_m \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \tau_{mn} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \tau_{nm} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sigma_n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\sigma_v = \tau_{mn}$  vậy theo biểu thức (1) ta có :

$$\sigma_v = -\sigma_u \tag{2}$$

**Ví dụ 2.** Tại điểm A trên mặt một vật thể đàn hồi chịu lực, người ta đo được các biến dạng tỉ đối theo ba phương xếp theo hình sao góc  $60^\circ$  (hình 4-7). Ta ký hiệu các biến dạng đó là  $\epsilon_x, \epsilon_m, \epsilon_n$ . Lập công thức tính những ứng suất chính và phương chính tại điểm đó.



Hình 4-7

*Bài giải*

Từ công thức (4-26) :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma \cdot \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

với  $\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ .

Ta có thể tính ứng suất theo biến dạng :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{1+\nu} E \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \cdot \delta_{ij} \tag{1}$$

Vì bề mặt của vật thể không chịu lực nên ở đây ta có thể xem như bài toán phẳng với  $\sigma_{33} = 0$ . Trường hợp đang xét chỉ có các biến dạng dài nên ta có thể viết biểu thức (1) dưới dạng :

$$\sigma_{ii} = \frac{1}{1+\nu} [E \cdot \epsilon_{ii} + \nu \sigma] \tag{2}$$

Lấy tọa độ Oxy làm tọa độ gốc, tenxơ ứng suất được viết trong tọa độ đó là :

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Như vậy ứng suất pháp theo phương m được tính với công thức xoay trục :

$$\sigma_m = \frac{1}{1+\nu} [E \epsilon_m + \nu \sigma] = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} l \\ m \end{bmatrix}$$

Ở đây  $l = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$  (vì tính từ trục m sang x ngược với chiều từ x sang m).

$$m = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sau khi thực hiện phép nhân ta có :

$$\sigma_m = \frac{1}{1+\nu} [E\varepsilon_m + \nu\sigma] = \frac{\sigma_x}{4} - \tau_{xy} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sigma_y}{4} \quad (3)$$

Tương tự như vậy với  $\sigma_n$ . Ta có :

$$\sigma_n = \frac{1}{1+\nu} [E\varepsilon_n + \nu\sigma] = \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{1+\nu} [E\varepsilon_n + \nu\sigma] = \frac{\sigma_x}{4} + \tau_{xy} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}\sigma_y \quad (4)$$

Tương quan giữa  $\sigma_x$  và  $\varepsilon_x$  cũng được viết dưới dạng :

$$\frac{1}{1+\nu} [E\varepsilon_x + \nu\sigma] = \sigma_x \quad (5)$$

Ba phương trình (3), (4), (5) lập thành hệ thống ba phương trình với ba ẩn số  $\sigma = \sigma_x + \sigma_y$ ,  $\sigma_y$  và  $\tau_{xy}$  như sau :

$$\begin{cases} \frac{1}{1+\nu} E\varepsilon_m + \frac{\nu}{1+\nu} \sigma = \frac{\sigma}{4} - \tau_{xy} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sigma_y}{2} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1+\nu} E\varepsilon_n + \frac{\nu}{1+\nu} \sigma = \frac{\sigma}{4} + \tau_{xy} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sigma_y}{2} & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1+\nu} E\varepsilon_x + \frac{\nu}{1+\nu} \sigma = \sigma_x & (5) \end{cases}$$

Cộng vế với vế của cả ba phương trình với chú ý  $\sigma = \sigma_x + \sigma_y$  ta sẽ tìm thấy nghiệm thứ nhất  $\sigma$  :

$$\sigma = \frac{2E}{3(1-\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_m + \varepsilon_n)$$

Lấy (4) trừ (3) ta được :

$$\tau_{xy} = \frac{E}{\sqrt{3}(1+\nu)} (\varepsilon_n - \varepsilon_m)$$

Nhân (5) lên đôi lần và trừ cho (4) và (3) ta sẽ tìm thấy :

$$\sigma_x - \sigma_y = \frac{2E}{3(1+\nu)} (2\varepsilon_x - \varepsilon_m - \varepsilon_n)$$

Từ đó ta tìm thấy phương chính với biểu thức :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{\sqrt{3}(\varepsilon_n - \varepsilon_m)}{2\varepsilon_x - \varepsilon_m - \varepsilon_n}$$

Trị số của các ứng suất cực đại và cực tiểu là :

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{E}{3(1-\nu)}(\epsilon_x + \epsilon_m + \epsilon_n) \pm \frac{\sqrt{3}E}{3(1+\nu)}\sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_m)^2 + (\epsilon_m - \epsilon_n)^2 + (\epsilon_n - \epsilon_x)^2}$$

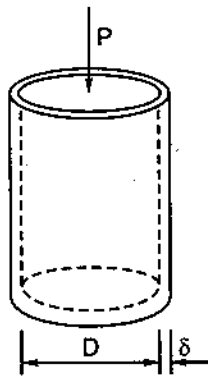
Chú ý. Chúng ta cũng có thể dùng công thức xoay trục :

$$\sigma_u = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

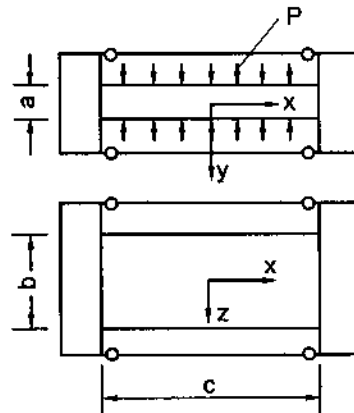
để thiết lập các phương trình (3) và (4).

## Bài tập

4.1. Một hình trụ tròn đặc bằng thép có đường kính  $D = 50 \text{ mm}$  đặt vừa khít vào một ống đồng có bề dày  $\delta = 1 \text{ mm}$ . Hình trụ thép bị nén với lực  $P = 150 \text{ kN}$  (hình 4-8). Xác định phương chính và ứng suất chính tại điểm ống. Cho  $\nu = 0,3$ ,  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình 4-8

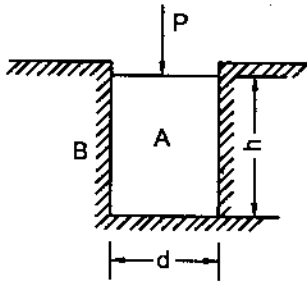


Hình 4-9

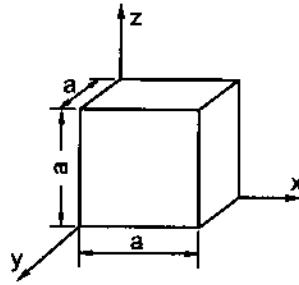
4.2. Một tấm thép kích thước  $a \times b \times c$  đặt giữa hai tấm tuyệt đối cứng, 2 tấm này được liên kết với nhau bằng 4 thanh (hình 4-9). Khi tấm thép chịu áp lực  $P$  phân bố đều trên hai mặt bên thì ứng suất kéo của thanh là bao nhiêu ?

Tính ứng suất trong tấm thép. Cho  $E_{\text{tấm}} = E_{\text{thanh}}$ .

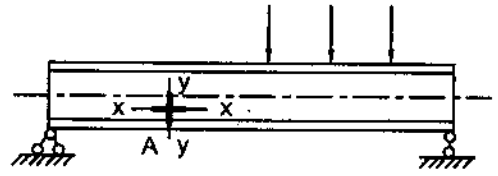
4.3. Một khối hình trụ tròn A bằng đồng được nhét khít vào một lỗ khoét của một vật cứng tuyệt đối B và chịu lực nén  $P = 50 \text{ kN}$ . Xác định áp lực nén vào vách lỗ khoét. Xác định biến dạng  $\Delta h$  và  $\Delta V$  của khối đồng. Cho đường kính của khối  $d = 4 \text{ cm}$ , chiều cao  $h = 10 \text{ cm}$ ,  $\nu = 0,31$ ,  $E = 1,1.10^4 \text{ kN/cm}^2$  (h.4-10).



Hình 4-10



Hình 4-11



Hình 4-12

4.4. Xác định giá trị các ứng suất trên mặt bên của phân tố hình lập phương có cạnh  $a = 5\text{cm}$ . Cho biết biến dạng dài tuyệt đối  $\Delta x = 5.10^{-2}\text{mm}$ ,  $\Delta y = 1.10^{-2}\text{mm}$ ,  $\Delta z = 7,5.10^{-2}\text{mm}$ , và biến dạng góc  $\gamma_{xy} = 2.10^{-2}$ ,  $v_{yz} = v_{zx} = 0$ ,  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\mu = 0,3$ ;  $G = 8.10^3$ .

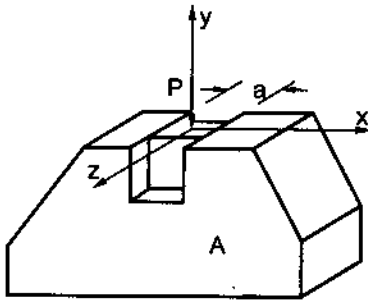
Tìm giá trị các ứng suất chính của phân tố (h.4-11).

4.5. Nhờ dụng cụ đo biến dạng (Tenxômét) người ta đo được độ giãn dài tỷ đối tại điểm A của dầm dọc theo cầu khi có tải trọng như sau :

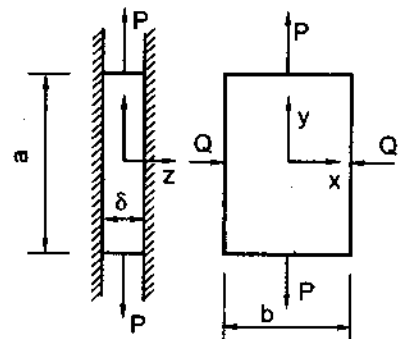
$$\epsilon_x = 0,0004. \quad \epsilon_y = -0,00012.$$

Xác định ứng suất pháp theo phương x và y (h.4-12).

4.6. Một khối lập phương bằng bê tông đặt vào vừa khít rãnh của vật thể A chịu áp suất phân bố đều ở mặt trên  $p = 1\text{kN/cm}^2$ . Xác định áp lực nén vào vách rãnh và độ biến dạng thể tích tuyệt đối. Cho cạnh  $a = 5\text{cm}$ ,  $\nu = 0,36$ ,  $E = 8.10^2 \text{ kN/cm}^2$ . Vật thể A coi như tuyệt đối cứng (h.4-13).



Hình 4-13



Hình 4-14

4.7. Một phân tố không bị biến đổi thể tích, có hai ứng suất chính  $\sigma_1 = 100 \text{ kN/cm}^2$ ,  $\sigma_2 = 60 \text{ kN/cm}^2$ . Hỏi ứng suất chính thứ ba phải bằng bao nhiêu ?

4.8. Một tấm mỏng hình chữ nhật bề dày  $\delta$  đặt giữa hai vách cứng song song. Tấm chịu lực kéo P và lực nén Q như trên (h.4-14). Tính áp lực nén của tấm vào vách và độ biến đổi thể tích của tấm. Bỏ qua lực ma sát giữa vách và tấm.

**Phần II**

**CÁC BÀI TOÁN THUỘC VỀ THANH**

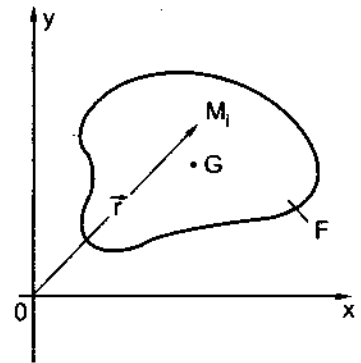
**Chương 5**

**ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MỘT HÌNH PHẪNG**

Trong quá trình tính độ bền của thanh ta luôn luôn phải đề cập đến các đặc trưng hình học của mặt cắt ngang vì vậy ở đây ta phải đưa ra các định nghĩa về các đặc trưng đó.

**§5-1. ĐỊNH NGHĨA**

Ta có một hình phẳng diện tích  $F$  được biểu diễn như trên hình 5-1. Gọi Oxy là hệ trục tọa độ vuông trong mặt phẳng của hình.  $M_i(x, y)$  là một điểm bất kì trên hình. Khoảng cách từ O đến  $M_i$  là  $r$ .



**1. Mômen tĩnh.** Ta gọi mômen tĩnh của  $F$  đối với O là biểu thức tích phân :

$$\vec{S}_o = \int_F \vec{OM}_i dF \quad (5-1)$$

Thành phần hình chiếu của biểu thức đó xuống các trục tọa độ là :

$$S_x = \int_F y dF \text{ và } S_y = \int_F x dF \quad (5-2)$$

Hình 5-1

Các thành phần đó được gọi là mômen tĩnh của  $F$  đối với các trục Ox và Oy.

Ta luôn luôn có thể tìm thấy một điểm G sao cho :

$$\vec{S}_G = \int_F \vec{GM}_i dF = 0 \quad (5-3)$$

Điểm G đó được gọi là trọng tâm của hình phẳng. Tọa độ của G được xác định như sau :

Vì rằng :  $\vec{OM}_i = \vec{OG} + \vec{GM}_i$

nên ta có : 
$$\vec{S}_o = \int_F (\vec{OG} + \vec{GM}_i) dF = \vec{OG} \cdot F \quad (5-4)$$

Từ đó ta có : 
$$x_G = \frac{S_x}{F} ; y_G = \frac{S_y}{F} \quad (5-5)$$

Một trục đi qua trọng tâm G của hình được gọi là trục trung tâm. Mômen tĩnh của hình đối với trục đó là bằng không.



**2. Mômen quán tính.** Gọi mômen quán tính của F đối với O là biểu thức tích phân :

$$J_p = \int_F r^2 dF \quad (5-6)$$

$J_p$  còn được gọi là mômen quán tính độc cực đối với O. Nếu thay r bằng khoảng cách từ  $M_i$  đến một trục nào đó thì ta sẽ có mômen quán tính của F đối với trục đó. Ví dụ thay r bằng x hoặc y ta sẽ được mômen quán tính của F đối với trục y hoặc trục x :

$$J_y = \int_F x^2 dF, \quad J_x = \int_F y^2 dF \quad (5-7)$$

Vì rằng  $r^2 = x^2 + y^2$  nên ta có :

$$J_p = J_x + J_y \quad (5-8)$$

**3. Mômen quán tính li tâm.** Gọi mômen quán tính li tâm của F đối với hệ trục tọa độ Oxy là biểu thức tích phân :

$$J_{xy} = \int_F xy dF \quad (5-9)$$

Một hệ trục tọa độ mà mômen quán tính li tâm của F đối với hệ đó là bằng không thì hệ được gọi là hệ trục quán tính chính.

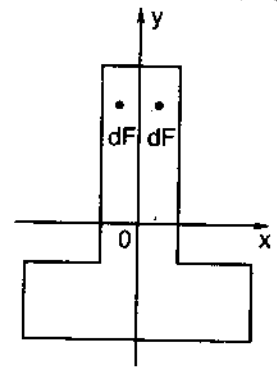
Tại mỗi điểm trên mặt phẳng của F ta đều tìm thấy một hệ trục tọa độ như vậy. Ta sẽ chứng minh điều này ở phần sau. Một hệ trục tọa độ quán tính chính đi qua G thì được gọi là hệ trục quán tính chính trung tâm.

Ta dễ dàng nhận thấy rằng khi hình có một trục đối xứng thì mọi trục vuông góc với trục đối xứng đó lập thành một hệ trục quán tính chính (h.5-2).

Thực vậy vì ta luôn luôn tìm thấy một cặp diện tích  $dF$  đối xứng để :

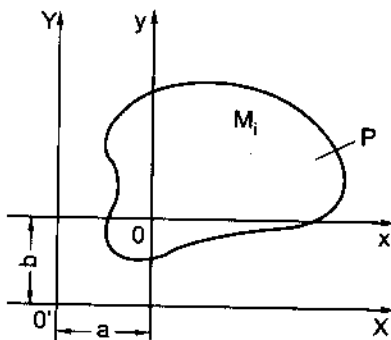
$$J_{xy} = \int_F yx dF = \int_F (xy - yx) dF = 0$$

Trong quá trình tính toán sau này ta luôn luôn cần thiết đến hệ trục tọa độ quán tính chính trung tâm vì vậy sau đây ta sẽ nói rõ cách xác định hệ trục tọa độ đó.



Hình 5-2

## §5-2. CÔNG THỨC CHUYỂN TRỤC SONG SONG



Hình 5-3

Giả sử ta đã tính được các mômen quán tính của F đối với hệ trục tọa độ Oxy. Xác định các mômen quán tính của F đối với hệ trục O'XY song song với hệ trục Oxy (h.5-3).

Gọi a, b là tọa độ của O trong hệ trục O'XY. Tương quan giữa các tọa độ như sau :

$$\overrightarrow{O'M_i} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_i}$$

Vậy :  $X = a + x$  ;  $Y = b + y$

Theo định nghĩa :

$$J_X = \int_F Y^2 dF = \int_F (b + y)^2 dF$$

Sau khi khai triển biểu thức đó ta có :

$$J_X = J_x + 2bS_x + b^2F \quad (5-10a)$$

Tương tự ta có :

$$J_Y = J_y + 2bS_y + a^2F \quad (5-10b)$$

Mômen quán tính li tâm là :

$$J_{XY} = \int_F XY dF = \int_F (a + x)(b + y) dF$$

$$J_{XY} = J_{xy} + bS_y + aS_x + abF \quad (5-11)$$

Nếu hệ trục Oxy là hệ trục trung tâm thì các công thức (5-10) và (5-11) sẽ có dạng :

$$\left. \begin{aligned} J_X &= J_x + b^2F \\ J_Y &= J_y + a^2F \\ J_{XY} &= J_{xy} + abF \end{aligned} \right\} \quad (5-12)$$

### §5-3. CÔNG THỨC XOAY TRỤC

Giả sử ta đã tính được các mômen quán tính của F đối với hệ trục tọa độ Oxy. Xác định các mômen quán tính đối với hệ trục Ouv xoay đi so với Oxy một góc  $\alpha$  (h.5-4).

Gọi  $M'_i$  là hình chiếu của  $M_i$  trên trục Ox. Ta có biểu thức vectơ :

$$\overrightarrow{OM}_i = \overrightarrow{OM}'_i + \overrightarrow{M}'_iM_i$$

Các thành phần hình chiếu của phương trình đó trên các trục Ou và Ov là :

$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

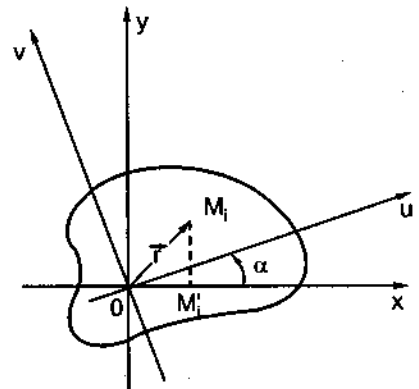
$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

Theo định nghĩa ta có :

$$J_u = \int_F v^2 dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF$$

$$J_v = \int_F u^2 dF = \int_F (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dF$$

$$J_{uv} = \int_F uv dF = \int_F (y \cos \alpha - x \sin \alpha)(x \cos \alpha + y \sin \alpha) dF$$



Hình 5-4

Sau khi khai triển ta được :

$$\begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha + 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ J_v &= J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha + 2J_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ J_{uv} &= (J_x - J_y) \sin \alpha \cos \alpha + J_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{aligned}$$

Sau khi đổi cung cuối cùng ta có :

$$\left. \begin{aligned} J_u &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_v &= \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha \\ J_{uv} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \right\} \quad (5-13)$$

Nếu hệ trục Ouv là một hệ trục quán tính chính thì  $J_{uv} = 0$ . Từ biểu thức cuối cùng của (5-13) ta có được công thức để xác định phương của trục quán tính chính như sau :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \quad (5-14)$$

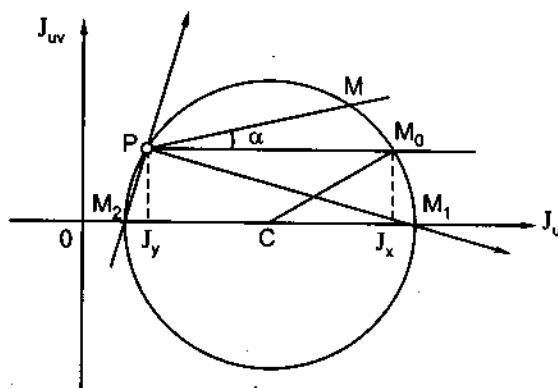
Phương trình đó luôn luôn có hai nghiệm, nghĩa là luôn xác định được hai trục quán tính chính vuông góc với nhau. Đó là điều mà ta đã phát biểu trên đây.

Các công thức của  $J_u$  và  $J_{uv}$  trong (5-13) về mặt toán học hoàn toàn giống các công thức (2-21). Vậy nếu dùng một hệ trục tọa độ với trục hoành biểu diễn cho trị số của  $J_u$  và trục tung biểu diễn cho trị số của  $J_{uv}$  thì tương quan giữa  $J_u$  và  $J_{uv}$  là tương quan của một đường tròn. Phương trình của đường tròn đó có dạng như sau :

$$\left( J_u - \frac{J_x + J_y}{2} \right)^2 + J_{uv}^2 = \left( \frac{J_x - J_y}{2} \right)^2 + J_{xy}^2 \quad (5-15)$$

Vòng tròn được biểu diễn trên hình 5-5. Nếu chọn phương của trục hoành song song với phương của Ox thì lập luận tương tự như vòng MO ứng suất ta sẽ tìm thấy phương các trục quán tính chính là  $PM_1$  và  $PM_2$ , như trên hình 5-5.

Vòng tròn đó được gọi là vòng Mo quán tính. Điểm  $M_0$  với tọa độ là  $J_x$  và  $J_y$  được gọi là điểm gốc vì nó tượng trưng cho trị số quán tính của trục Ox và quán tính li tâm của hệ trục Oxy. Bán kính  $CM_0$  là bán kính gốc và P là điểm cực.



Hình 5-5

Ở đây, khác với vòng tròn ứng suất, vòng tròn quán tính luôn luôn nằm về bên phải của trục tung vì  $J_x$ ,  $J_y$  và  $J_w$  luôn luôn dương.

*Ghi chú :*

Bản chất ở đây cũng là bài toán xoay trục tọa độ đối với ma trận gồm ba thành phần.

$$\begin{bmatrix} J_x & J_{xy} \\ J_{xy} & J_y \end{bmatrix}$$

Với chú ý các cosin chỉ phương của các trục  $Ou$  và  $Ov$  đối với hệ trục  $Oxy$  là :  
 $l = -\cos\alpha$ ,  $m = \sin\alpha$  ;  $l' = -\sin\alpha$ ,  $m' = -\cos\alpha$  ta có thể viết :

$$J_u = \left\{ \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} \\ J_{xy} & J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$J_v = \left\{ \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} \\ J_{xy} & J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$J_{uv} = \left\{ \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} \\ J_{xy} & J_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

Thực hiện các phép nhân đó ta sẽ tìm thấy :

$$J_u = J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - 2J_{xy} \sin\alpha \cos\alpha$$

$$J_v = J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha + 2J_{xy} \sin\alpha \cos\alpha$$

$$J_{uv} = (J_x - J_y) \sin\alpha \cos\alpha + J_{xy} (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

Trong trường hợp tổng quát, trình tự để xác định một hệ trục quán tính chính trung tâm là như sau :

1. Chọn một hệ trục  $Oxy$  bất kì ban đầu. Tính các trị số mômen tĩnh cũng như mômen quán tính của hình đối với hệ trục đó.
2. Xác định trọng tâm của hình.
3. Chuyển trục song song về trọng tâm của hình.
4. Xoay trục để xác định phương chính đi qua trọng tâm.

## §5-4. MỘT SỐ VÍ DỤ

**1. Bài toán về tam giác vuông ABC.** Tính mômen tĩnh của tam giác đối với các cạnh của góc vuông AB, AC. Tính mômen quán tính và mômen quán tính li tâm của tam giác đối với hệ trung tâm song song với các cạnh của góc vuông (h.5-6).

**Bài giải:**

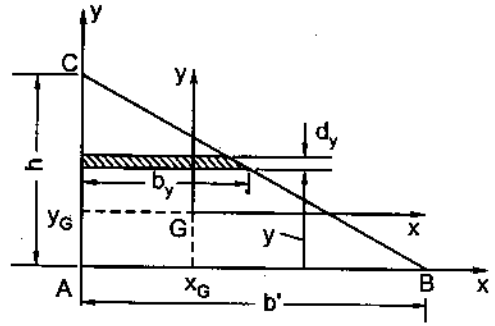
1. Chọn hệ trục tọa độ Axy như hình vẽ.  
Tọa độ trọng tâm của tam giác ta đã biết:

$$x_G = \frac{b}{3}; \quad y_G = \frac{h}{3}$$

Vậy mômen tĩnh của tam giác ABC đối với các trục x, y là:

$$S_x = Fy_G = \frac{bh^2}{6}$$

$$S_y = Fx_G = \frac{hb^2}{6}$$



Hình 5-6

2. Để tính mômen quán tính ta chọn phần tử diện tích dF như hình vẽ. Từ định nghĩa ta có:

$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_0^h y^2 b_y dy$$

trong đó  $b_y$  được tính với biểu thức:

$$b_y = b \frac{b-y}{h}$$

$$\text{Vậy: } J_x = b \int_0^h y^2 \left( \frac{h-y}{h} \right) dy = \frac{bh^3}{12} \quad (5-16a)$$

$$\text{Tương tự ta có: } J_y = \frac{b^3h}{12} \quad (5-16b)$$

3. Mômen quán tính li tâm đối với hệ trục Axy được tính với biểu thức:

$$J_{xy} = \int_F xy dF = \int_0^b x dx \int_0^{y=\frac{h}{b}x+h} y dy = \frac{b^2h^2}{24} \quad (5-17)$$

Chuyển sang hệ trục trung tâm GXY song song với Axy:

$$J_x = J_X + \left( \frac{h}{3} \right)^2 F$$

$$J_y = J_Y + \left( \frac{b}{3} \right)^2 F$$

$$\text{Từ đó ta có: } J_X = \frac{bh^3}{36}; \quad J_Y = \frac{hb^3}{36} \quad (5-18)$$

$$J_{xy} = J_{XY} + \frac{h}{3} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{bh}{2}. \quad \text{Vậy } J_{XY} = -\frac{b^2h^2}{72} \quad (5-19)$$

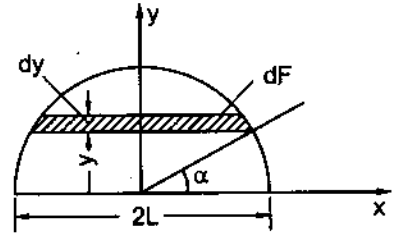
**2. Xác định tọa độ trọng tâm của nửa hình tròn (h.5-7).**

*Bài giải:*

Chọn hệ trục tọa độ như hình 5-7.

Trọng tâm đó phải nằm trên trục đối xứng, vậy  $x_G = 0$ . Ta chỉ còn phải tính tung độ  $y_G$ . Ta có :

$$y_G = \frac{S_x}{F} = \frac{\int_F y dF}{F}$$



**Hình 5-7**

Sử dụng giải phân tố  $dF$  như hình vẽ. Ta có :

$$y = R \sin \alpha$$

$$dy = R \cos \alpha d\alpha$$

$$by = 2R \cos \alpha$$

nên

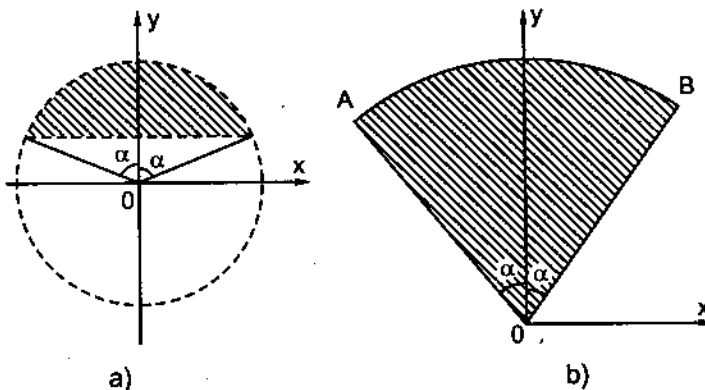
$$dF = 2R^2 \cos^2 \alpha d\alpha$$

$$\text{Vậy } S_x = \int_F y dF = \int_0^{\pi} R \sin \alpha 2R^2 \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{2R^3}{3}$$

$$\text{Và : } y_G = \frac{S_x}{F} = \frac{\frac{2R^3}{3}}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0,4244R \quad (5-20)$$

**3. Xác định tọa độ trọng tâm của các diện tích được xác định bởi một phần cung tròn như hình vẽ**

a) Tìm trọng tâm của diện tích được xác định bởi cung tròn và giây cung như hình vẽ (h.5-8a).



**Hình 5-8**

*Bài giải*

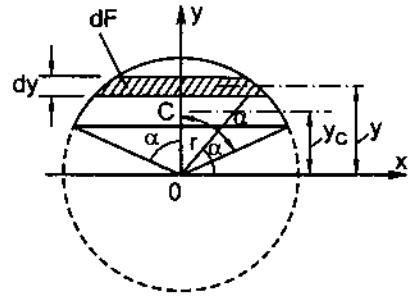
Tính  $S_x$ .

$$S_x = \int_F y dF \text{ với } dF = 2r \cos\varphi dy$$

$$y = r \sin\varphi$$

$$dy = r \cos\varphi d\varphi$$

$$S_x = \int_{\pi-\alpha}^{\pi} r \cdot \sin\varphi \cdot 2r \cdot \cos\varphi \cdot r \cos\varphi d\varphi$$



Hình 5-9

mặt khác ta có :

$$F = \frac{r^2}{2} (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

Vậy tung độ của trọng tâm là :

$$y_o = \frac{S_x}{F} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r \sin^3 \alpha}{(2\alpha - \sin 2\alpha)} \quad (5-21)$$

b) Tìm trọng tâm của diện tích được xác định bởi cung tròn và hai bán kính tạo với nhau một góc  $2\alpha$  như hình 5-8b.

*Bài giải*

Tính  $S_x$

Lấy  $dF$  như hình 5-10 :

$$dF = \rho d\varphi \cdot \rho dp$$

$$y = \rho \cos\varphi$$

$$S_x = 2 \int_0^r \int_0^\alpha \rho \cos\varphi \cdot \rho d\varphi dp = \frac{2r^3 \sin \alpha}{3}$$

Diện tích của hình là :  $F = \alpha \cdot r^2$

Vậy tung độ của trọng tâm là :

$$y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha} \quad (5-22)$$

Với  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ta sẽ tìm lại nghiệm như ví dụ 2.

**4. Tính mômen quán tính đối với các trục quán tính trung tâm của hình chữ nhật (h.5-11)**

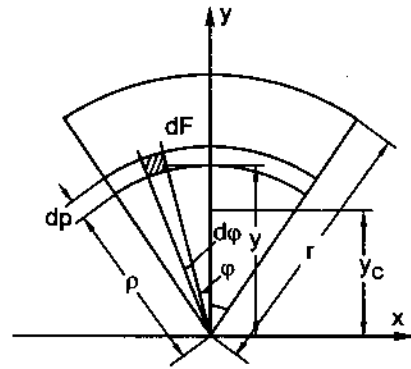
*Bài giải:*

Sử dụng phân tố  $dF$  như hình vẽ ta có :

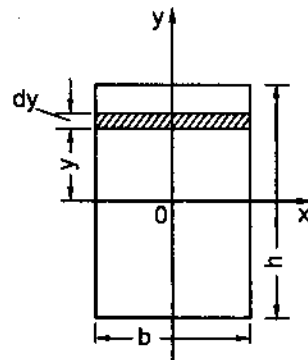
$$J_x = \int_F y^2 dF = \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} \quad (5-23)$$

Tương tự ta có :  $J_y = \frac{b^3 h}{12} \quad (5-24)$



Hình 5-10



Hình 5-11

**5. Tính mômen quán tính độc cực đối với tâm O và mômen quán tính đối với các trục Ox, Oy của hình tròn (h.5-12)**

*Bài giải:*

$J_p = \int_F r^2 dF$ ; phân tố  $dF$  được xác định như hình vẽ.

$$\text{Vậy: } J_p = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 d\varphi dr$$

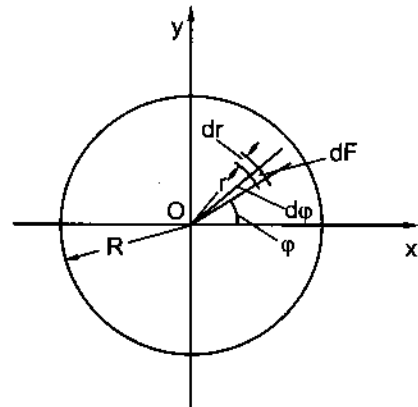
Giải tích phân ta được:

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} \quad (5-25)$$

Vì lí do đối xứng nên ta có:  $J_x = J_y$

$$\text{Do đó: } J_p = J_x + J_y = 2J_x = 2J_y$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi R^4}{4} \quad (5-26)$$



Hình 5-12

**6. Xác định hệ trục quán tính chính trung tâm và các mômen quán tính của hình phẳng (h.5-13) đối với các trục quán tính chính trung tâm đó.**

*Bài giải:*

Chọn hệ trục Oxy ban đầu như hình vẽ. Chia hình thành một hình chữ nhật ABEO và một hình tam giác CDE. Trọng tâm  $G_1$  và  $G_2$  của mỗi hình ta đã biết:  $G_1(1,5; 3,5)$ ,  $G_2(3 + \frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ .

Mômen tĩnh của hình đối với Ox và Oy được tính như sau:

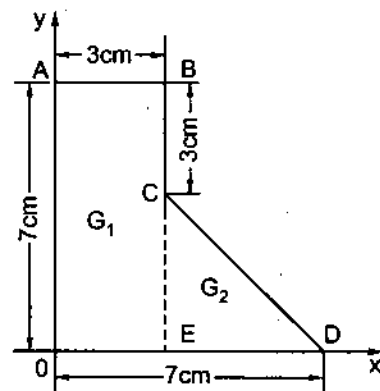
$$S_x = 3 \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = 84,16 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 3 \cdot 7 \cdot \frac{3}{2} + \frac{4 \cdot 4}{2} \left( 3 + \frac{4}{3} \right) = 66,16 \text{ cm}^3$$

Tọa độ của trọng tâm hình:

$$y_G = \frac{S_x}{F} = \frac{84,16}{29} = 2,9 \text{ cm}$$

$$x_G = \frac{S_y}{F} = \frac{66,16}{29} = 2,28 \text{ cm}$$



Hình 5-13



Xác định một hệ trục tọa độ GXY song song với hệ trục tọa độ cũ (h.5-14). Gọi  $G_1x_1y_1$  và  $G_2x_2y_2$  là các trục tọa độ song song với GXY tại trọng tâm của hình chữ nhật ABEO và tam giác CDE.

Tọa độ của  $G_1$  và  $G_2$  đối với hệ trục GXY như sau :

$$G_1(-0,78 ; 0,6) ; G_2(2,05 ; -2,17)$$

Các mômen quán tính của hình đối với hệ trục trung tâm GXY là :

$$J_X = J_{x_1} + a_1^2 F_1 + J_{x_2} + a_2^2 F_2$$

$$J_X = \frac{3.7^3}{12} + 0,6^2 \cdot 3.7 + \frac{4.4^3}{36} + 2,17^2 \cdot \frac{4.4}{2} = 138,09 \text{ cm}^4$$

$$J_Y = J_{y_1} + b_1^2 F_1 + J_{y_2} + b_2^2 F_2$$

$$J_Y = \frac{7.3^3}{12} + 0,78^2 \cdot 3.7 + \frac{4.4^3}{36} + 2,05^2 \cdot \frac{4.4}{2} = 69,25 \text{ cm}^4$$

$$J_{XY} = J_{x_1 y_1} + a_1 b_1 F_1 + J_{x_2 y_2} + a_2 b_2 F_2$$

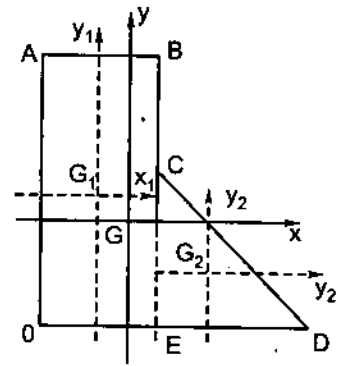
$$J_{XY} = -0,78 \cdot 0,6 \cdot 3.7 - \frac{4^2 \cdot 4^2}{72} - 2,05 \cdot 2,17 \cdot \frac{4.4}{2} = -48,97 \text{ cm}^4$$

Phương của các trục quán tính chính trung tâm được xác định bởi phương trình :

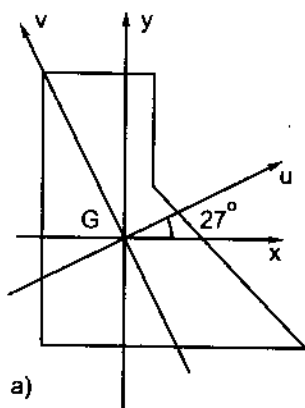
$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{XY}}{J_X - J_Y} = \frac{2 \cdot 48,97}{138,09 - 69,25} = 1,42$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha \approx \operatorname{tg} 55^\circ ; 2\alpha \approx 55^\circ + K\pi ; \alpha \approx 27^\circ + K \frac{\pi}{2}$$

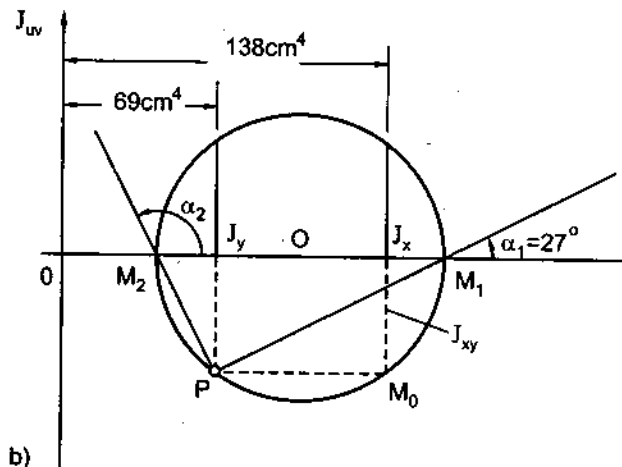
Ta có thể sử dụng vòng tròn quán tính để xác định các phương đó như trên hình 5-15b. Các phương đó được vẽ trực tiếp trên mặt phẳng như trên hình 5-15a.



Hình 5-14



a)



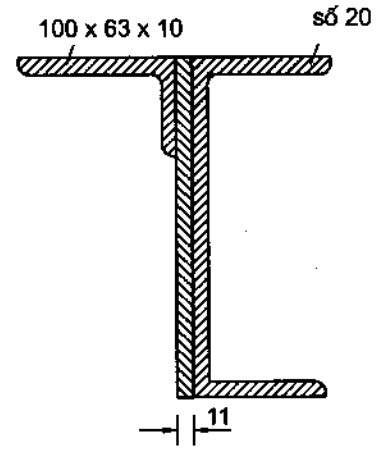
b)

Hình 5-15

## 7. Xác định hệ trục quán tính chính mặt ghép

Một thanh ghép gồm hai thanh định hình có mặt cắt ngang như trên hình 5-16.

Xác định các mômen quán tính chính và phương của hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt.



Hình 5-16

### Bài giải

Số liệu về đặc trưng hình học của thép chữ [ số 20 và thép góc 100. 63. 10.

|                   |                          |                                       |
|-------------------|--------------------------|---------------------------------------|
| [ số 20 :         | $h = 200 \text{ mm}$     | $J_x = 1520 \text{ cm}^4$             |
|                   | $F = 23,4 \text{ cm}^2$  | $J_y = 113 \text{ cm}^4$              |
|                   | $Z_o = 2,07 \text{ cm},$ |                                       |
| L 100 x 63 x 10 : | $F = 15,5 \text{ cm}^2,$ | $J_y = 154 \text{ cm}^4$              |
|                   | $x_o = 3,4 \text{ cm}$   | $J_x = 47,1 \text{ cm}^4$             |
|                   | $y_o = 1,58 \text{ cm},$ | $J_u = J_{\min} = 28,3 \text{ cm}^4.$ |

Ta có đối với thép góc :

$$J_v = J_{\max} = J_x + J_y - J_{\min} = 47,1 + 154 - 28,3 = 172,8 \text{ cm}^4$$

Mômen quán tính li tâm  $J_{xy}$  có thể tính ra từ những quan hệ :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\max}}, \operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right) = \frac{J_{xy}}{J_y - J_{\min}}$$

hay :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = -1 = \frac{J_{xy}^2}{(J_y - J_{\max})(J_y - J_{\min})}$$

hay :

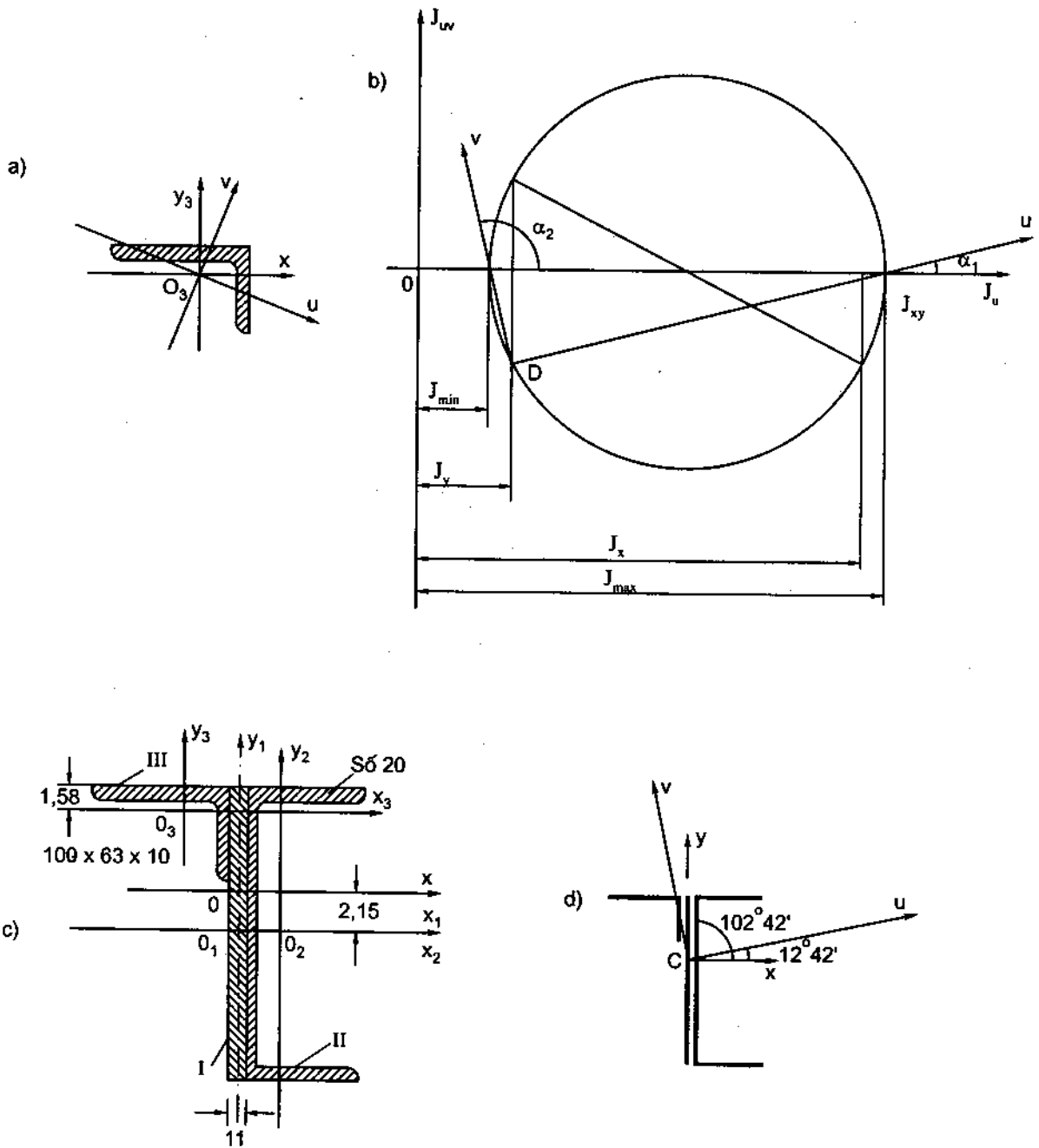
$$\begin{aligned} J_{xy} &= -\sqrt{-(J_y - J_{\max})(J_y - J_{\min})} \\ &= -\sqrt{-(154 - 172,8)(154 - 28,3)} = -48,7 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

(Lấy dấu trừ cho  $J_{xy}$  vì trục chính max nằm trong góc phần tư thứ nhất và thứ ba).

1. Xác định trọng tâm mặt cắt (h.5-17a, c) :

$$y_o = \frac{S_{x1}}{F} = \frac{8,42 \cdot 15,5}{22 + 15,5 + 23,4} = 2,15 \text{ cm}$$

$$x_o = \frac{S_{y1}}{F} = \frac{2,62 \cdot 23,4 + (-3,95) \cdot 15,5}{22 + 15,5 + 23,4} \approx 0 \text{ cm}.$$



Hình 5-17

Tọa độ trọng tâm của các hình thành phần đối với hệ trục trung tâm :

Hình I :  $x = 0, \quad y = -2,15 \text{ cm}$

Hình II :  $x = 2,62 \text{ cm}, \quad y = -2,15 \text{ cm}$

Hình III :  $x = -3,95 \text{ cm}, \quad y = 6,27 \text{ cm}.$

2. Mômen quán tính đối với hệ trục trung tâm :

$$J_x = \sum J_x^i = \frac{1,1 \cdot 20^3}{12} + 2,61^2 \cdot 1,1 \cdot 10 + 1520 + 2,61^2 \cdot 23,4 + 47,1 + 5,81^2 \cdot 15,5 = 3055 \text{ cm}^4.$$

$$J_y = \sum J_y^i = \frac{20 \cdot 1,1^3}{12} + 113 + 2,62^2 \cdot 23,4 + 154 + 3,95^2 \cdot 15,5 = 670 \text{ cm}^4$$

$$J_{xy} = \sum J_{xy}^i = 0 + 2,62 \cdot (-2,15) \cdot 23,4 + (-3,95) \cdot 6,27 \cdot 15,5 - 48,7 = -566 \text{ cm}^4.$$

3. Phương của hệ trục quán tính chính (h.5-17a, d) :

$$\text{tg}2\alpha = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} = -\frac{2 \cdot 566}{3055 - 670} = 0,475$$

$$2\alpha = 25^\circ 24' \pm k \cdot 180^\circ;$$

$$\alpha_1 = 12^\circ 42'; \alpha_2 = 102^\circ 42'$$

4. Mômen quán tính chính :

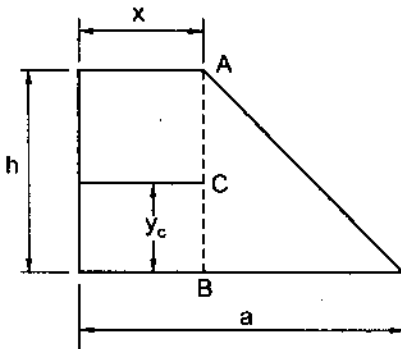
$$J_{\max/\min} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} = \frac{3055 + 670}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3055 - 670}{2}\right)^2 + (-566)^2}$$

$$J_{\max} = 3183 \text{ cm}^4; J_{\min} = 543 \text{ cm}^4.$$

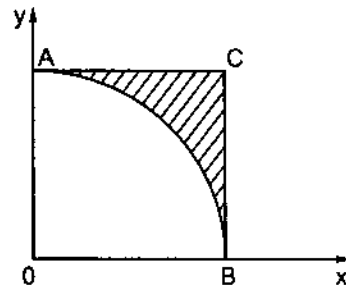
Vòng Mo quán tính cho trên hình 5-17a, b.

## Bài tập về đặc trưng hình học

5.1. Xác định đáy nhỏ  $x$  của hình thang sao cho trọng tâm  $C$  của hình nằm trên đường thẳng  $AB$  (h.5-18). Xác định tung độ  $y_c$  của trọng tâm.



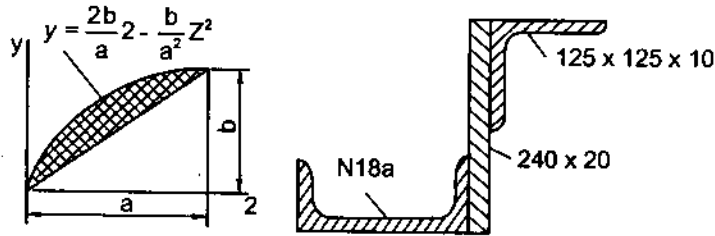
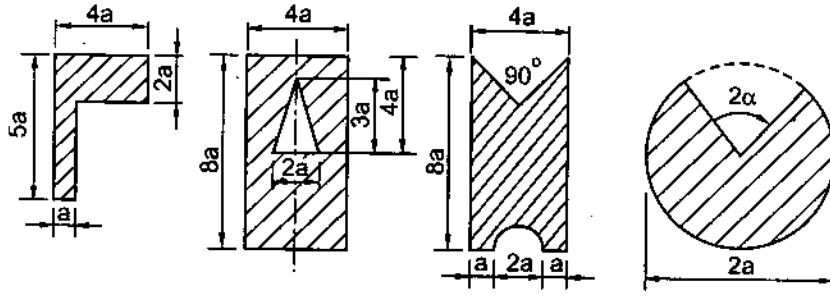
Hình 5-18



Hình 5-19

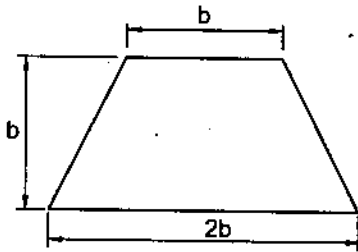
5.2. Tìm tọa độ trọng tâm của hình tam giác cong ABC như trên hình 5-19.

5.3. Xác định tọa độ trọng tâm của các mặt cắt cho trên hình 5-20.

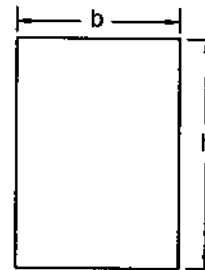


Hình 5-20

5.4. Xác định trọng tâm và mômen quán tính đối với trục trung tâm song song với cạnh đáy của hình thang cân (h.5-21).



Hình 5-21



Hình 5-22

5.5. Xác định hệ trục quán tính chính có gốc tại A của hình chữ nhật (h.5-22). Cho biết  $b = 4\text{cm}$ ,  $h = 6\text{cm}$ . Tính các mômen quán tính chính.

## Chương 6

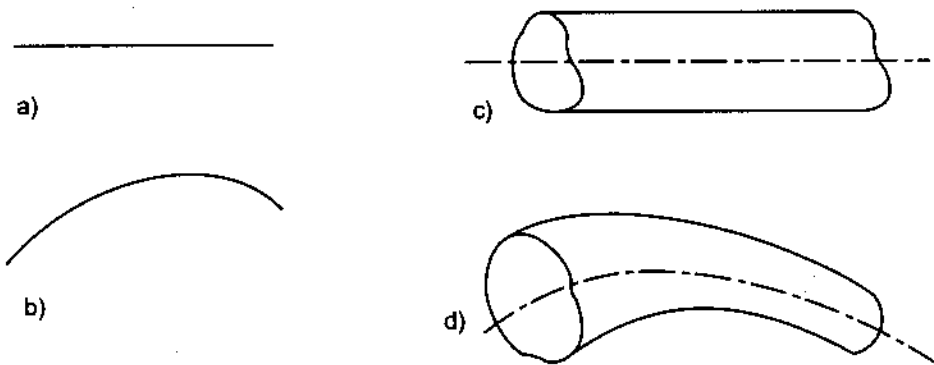
# THANH, NỘI LỰC TRONG THANH

### §6-1. ĐỊNH NGHĨA VỀ THANH VÀ LIÊN KẾT

Cho một hình phẳng và một đoạn đường cong trong không gian. Độ dài của đoạn đường cong đó lớn hơn kích thước lớn nhất của hình phẳng rất nhiều lần. Cho hình phẳng di chuyển trong không gian sao cho mặt phẳng của hình luôn luôn vuông góc với đường cong và trọng tâm của hình luôn luôn nằm trên đường cong, hình phẳng sẽ quét ra trong không gian một hình mà ta gọi là thanh. Đoạn đường cong được gọi là trục của thanh và hình phẳng được gọi là mặt cắt ngang của thanh.

Nếu trục của thanh là một đoạn thẳng thì ta gọi là thanh thẳng (h.6-1a) nếu trục của thanh là một đoạn đường cong thì ta gọi là thanh cong (h.6-1b). Trong sơ đồ tính toán, thanh thường được biểu diễn bằng đường trục của nó.

Trong quá trình hình phẳng di chuyển, hình dáng cũng như kích thước của hình có thể thay đổi. Khi đó ta có thanh với mặt cắt ngang thay đổi (h.6-1d). Nếu trong quá trình di chuyển, hình phẳng giữ nguyên hình dáng và kích thước thì ta gọi thanh là thanh có mặt cắt ngang không đổi (h.6-1c).



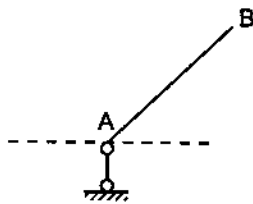
Hình 6-1

Trong không gian, thanh có sáu bậc tự do : Tự do di chuyển theo ba phương vuông góc bất kì nào đó và tự do quay chung quanh ba phương đó. Trong xây dựng cũng như trong chế tạo máy thường các thanh được liên kết với nhau và những liên kết đó chỉ cho phép thanh di động, hay biến dạng trong một mặt phẳng chứa trục thanh. Cũng vì vậy, với sơ đồ tính toán, ta có thể xem như thanh chỉ di động trong một mặt phẳng. Ngoại lực cũng chỉ tác dụng trong mặt phẳng đó. Bài toán đó được gọi là bài toán phẳng và thanh chỉ còn ba bậc tự do. Xét bài toán phẳng : Ví dụ với thanh thẳng AB chỉ có thể di chuyển trong mặt phẳng của hình vẽ (h.6-2), tại đầu A ta dùng một liên kết đơn, nghĩa là một mối nối có hai khớp thì

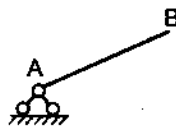
liên kết đó chỉ hạn chế sự di chuyển của thanh theo phương của liên kết, nghĩa là nó chỉ tạo nên phản lực theo phương này. Liên kết đó không hạn chế được chuyển dịch của thanh theo phương vuông góc với liên kết và không hạn chế được sự quay của thanh trong mặt phẳng của hình vẽ.

Nếu tại A ta đặt một liên kết cố định (h.6-3), liên kết đó hạn chế hai bậc tự do của thanh vì nó không cho phép thanh di chuyển theo bất cứ phương nào, nhưng liên kết đó không hạn chế được sự quay của thanh. Vì vậy liên kết này tương đương với hai liên kết đơn và nó có thể tạo nên một phản lực theo một phương bất kì nào đó. Phản lực đó được chia thành hai thành phần : thành phần thẳng đứng và thành phần ngang.

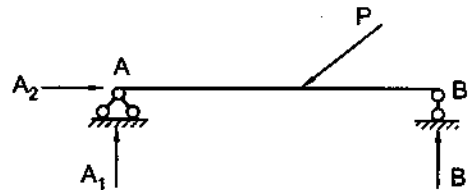
Nếu như trên thanh AB ta đặt ba liên kết (h.6-4) thì ba liên kết đó giữ thanh cố định. Một ngoại lực nào tác động lên thanh sẽ tạo nên ba thành phần phản lực như hình vẽ.



Hình 6-2

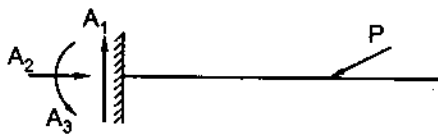


Hình 6-3

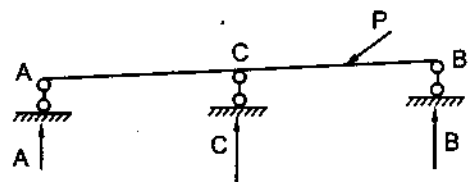


Hình 6-4

Ta còn có thể dùng một loại liên kết thứ ba là ngàm (h.6-5). Ví dụ đóng chặt thanh vào tường, hay hàn chặt thanh vào một kết cấu cố định nào đó. Liên kết này hạn chế hoàn toàn các bậc tự do của thanh, do đó liên kết tương đương với ba liên kết đơn. Khi có ngoại lực tác động, liên kết sẽ tạo nên ba thành phần phản lực : hai lực  $A_1$ ,  $A_2$  và một mômen  $A_3$ .



Hình 6-5



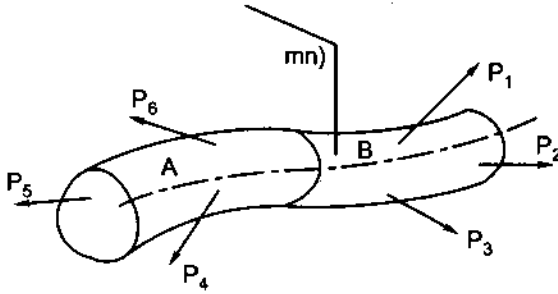
Hình 6-6

Tất nhiên nếu như ba liên kết đơn đặt không đúng chỗ cũng không hạn chế hết các bậc tự do của thanh. Với kết cấu như hình vẽ (h.6-6) ta thấy rõ ràng không có thành phần phản lực nào chống lại các lực xô ngang. Thanh AB có thể di chuyển theo phương ngang dễ dàng.

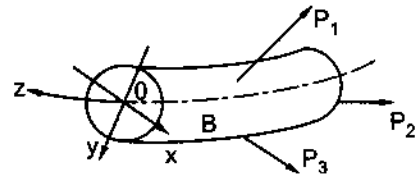
Tóm lại với bài toán phẳng ta cần có ba liên kết đơn đặt đúng chỗ để giữ cho thanh cố định. Từ đó, ta cũng có thể suy ra, với thanh trong không gian, ta cần phải có 6 liên kết đơn đặt đúng chỗ để hạn chế hết các bậc tự do của thanh.

## §6 -2. NỘI LỰC

Xét thanh chịu lực như hình 6-7. Tường tượng cắt thanh bởi mặt cắt ngang (m - n). Mặt cắt chia thanh thành hai phần A và B. Vứt bỏ phần A và xét sự cân bằng của phần B (h.6-8). Như đã nói ở phần đầu trong chương trạng thái ứng suất, ta có thể xác định ngay được hợp lực của nội lực trên mặt cắt vì hợp lực đó phải cân bằng với ngoại lực tác dụng lên phần đang xét.



Hình 6-7



Hình 6-8

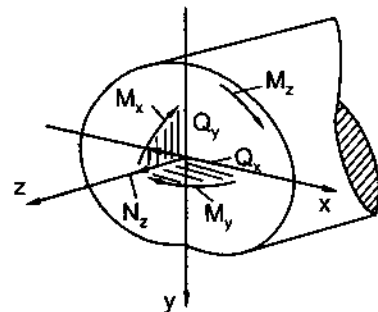
Gọi O là trọng tâm của mặt cắt. Xác định một hệ trục tọa độ vuông Oxyz với Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm của mặt cắt ngang và Oz nằm trên đường tiếp tuyến của trục thanh. Hệ nội lực được thu về O bằng một vectơ chính và một mômen chính. Các thành phần hình chiếu của vectơ chính xuống các trục tọa độ được kí hiệu như sau :

- Trên trục z kí hiệu là  $N_z$  và gọi là lực dọc.
  - Trên trục x và y kí hiệu là  $Q_x, Q_y$  và gọi là lực cắt theo phương x và theo phương y.
- Các thành phần hình chiếu của mômen chính là các mômen quay xung quanh các trục.
- Mômen quay xung quanh trục z kí hiệu là  $M_z$  và gọi là mômen xoắn.
  - Mômen quay xung quanh trục x và y kí hiệu là  $M_x, M_y$  và gọi là mômen uốn.

Ta quy ước dấu của các thành phần nội lực như sau :  $N_z$  được gọi là dương khi nó có chiều đi ra khỏi mặt cắt,  $Q_y$  được xem là dương khi đứng nhìn theo phương x thấy  $Q_y$  cùng với ngoại lực tạo nên một ngẫu lực làm quay phần đang xét theo chiều kim đồng hồ. Tương tự như vậy đối với  $Q_x$  khi nhìn theo phương của y :  $M_x$  và  $M_y$  được xem là dương khi nó uốn căng phía dương của các trục x và y.

$M_z$  là dương khi nhìn vào mặt cắt thấy chiều của  $M_z$  là chiều của kim đồng hồ.

Các chiều dương đó được biểu diễn như trên hình 6-9.



Hình 6-9



Từ điều kiện cân bằng của phần đang xét ta tìm thấy dễ dàng các trị số của các thành phần nội lực như sau :

$$N_z = \sum P_i/z \text{ (tổng hình chiếu của } P_i \text{ lên phương z)}$$

$$Q_x = \sum P_i/x \text{ (tổng hình chiếu của } P_i \text{ lên phương x)}$$

$$Q_y = \sum P_i/y \text{ (tổng hình chiếu của } P_i \text{ lên phương y)}$$

$$M_x = \sum m(P_i)/x \text{ (tổng mômen của } P_i \text{ đối với trục x)}$$

$$M_y = \sum m(P_i)/y \text{ (tổng mômen của } P_i \text{ đối với trục y)}$$

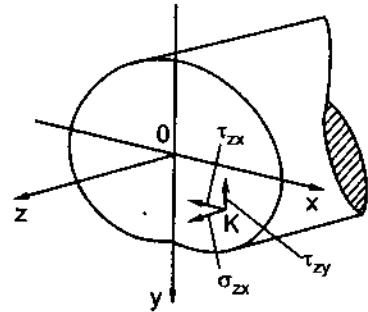
$$M_z = \sum m(P_i)/z \text{ (tổng mômen của } P_i \text{ đối với trục z)}$$

$P_i$  là các lực tác dụng lên phần đang xét.

Ngoại lực mà chúng ta nói đây là bao gồm cả phản lực, vì vậy để xác định nội lực, việc làm đầu tiên là phải xác định các phản lực tác dụng lên thanh.

### §6-3. TƯƠNG QUAN GIỮA NỘI LỰC VÀ ỨNG SUẤT

Gọi  $\vec{p}$  là ứng suất tại một điểm  $K(x, y)$  bất kì trên mặt cắt (h.6-10). Các thành phần hình chiếu của  $\vec{p}$  là  $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ . Lấy một phần tử diện tích  $dF$  chung quanh  $K$ . Các thành phần lực tác động theo ba phương  $z, y, x$  trên phần tử  $dF$  sẽ là  $\sigma_z dF, \tau_{zy} dF$  và  $\tau_{zx} dF$ . Tổng cộng tất cả các lực đó trên toàn thể mặt cắt chính là các thành phần của nội lực. Tổng mômen của các lực đó đối với các trục là các thành phần mômen của nội lực. Do đó ta có :



Hình 6-10

$$N_z = \int_F \sigma_z dF ; Q_y = \int_F \tau_{zy} dF ; Q_x = \int_F \tau_{zx} dF$$

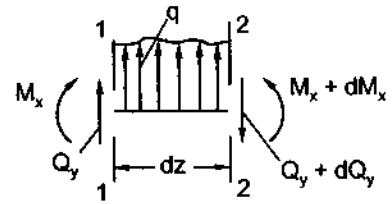
$$M_x = \int_F y \sigma_z dF ; M_y = \int_F x \sigma_z dF ; M_z = \int_F (\tau_{yz} x - \tau_{zx} y) dF \quad (6-1)$$

Các biểu thức đó thể hiện sự tương quan giữa các thành phần nội lực và ứng suất. Nếu xét một đoạn thanh với các mặt cắt ngang đã định thì các biểu thức trên có thể xem là các điều kiện biên của bài toán.

### §6-4. TƯƠNG QUAN GIỮA NỘI LỰC VÀ CƯỜNG ĐỘ TẢI TRỌNG PHÂN BỐ

Ta hãy xét đối với bài toán phẳng. Giả sử ngoại lực tác dụng lên thanh nằm trong mặt phẳng  $yOz$  và có phương vuông góc với trục  $z$ . Như vậy trên các mặt cắt ngang chỉ có các

thành phần nội lực  $Q_y$  và  $M_x$ . Xét một đoạn thanh được tách ra bởi hai mặt cắt (1 - 1) và (2 - 2) cách nhau một khoảng cách vô cùng bé  $dz$  (h.6-11).  $q$  là lực phân bố trên thanh và có chiều như hình vẽ. Vì  $dz$  là vô cùng bé nên có thể xem như  $q$  phân bố đều trên  $dz$ . Gọi  $Q_y$  và  $M_x$  là lực cắt và mômen uốn trên mặt cắt (1 - 1) thì trị số của chúng trên mặt cắt (2 - 2) sẽ là :



Hình 6-11

$$Q_y + dQ_y, M_x + dM_x$$

Xét điều kiện cân bằng của phân tố. Viết phương trình hình chiếu theo phương thẳng đứng và tổng mômen của các lực đối với trục  $Ox$  đi qua mặt cắt (2 - 2), ta có :

$$Q_y + qdz - (Q_y + dQ_y) = 0 \quad (1)$$

$$M_x - (M_x + dM_x) + Q_y dz + q \frac{dz^2}{2} = 0 \quad (2)$$

Nếu bỏ qua lượng vô cùng bé bậc cao  $q \frac{dz^2}{2}$  ta tìm thấy các liên hệ vi phân sau đây :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_y}{dz} &= q \\ \frac{dM_x}{dz} &= Q_y \end{aligned} \right\} \quad (6-2)$$

Ta có thể phát biểu như sau : *Đạo hàm của lực cắt là bằng cường độ của lực phân bố* (để phù hợp với quy ước dấu của  $Q_y$  ta phải thừa nhận rằng  $q$  là dương khi  $q$  có chiều hướng đi lên).

*Đạo hàm của mômen  $M_x$  là bằng lực cắt  $Q_y$ .*

Từ các liên hệ đó ta có thể viết :

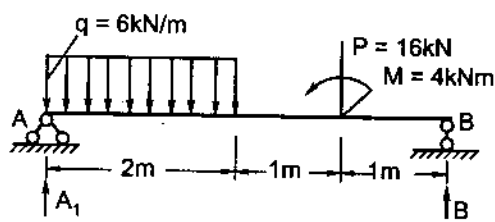
$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q \quad (6-3)$$

Vậy : *Đạo hàm bậc hai của mômen uốn là bằng cường độ của lực phân bố.* Nhưng điều ta vừa nói trên đây có thể mở rộng cho  $Q_x$  và  $M_y$ .

## §6-5. BIỂU ĐỒ NỘI LỰC

### 1. Trường hợp thanh thẳng

Một thanh chủ yếu chịu uốn được gọi là dầm. Ví dụ đòi hỏi ta phải vẽ biểu đồ nội lực của dầm chịu lực như hình 6-12.



Hình 6-12

Bài giải:

Ở đây vì các lực đều vuông góc với trục của thanh nên phản lực tại A chỉ có thành phần phản lực thẳng đứng. Cũng vì vậy lực dọc trên các mặt cắt là bằng không. Ta chỉ còn phải vẽ biểu đồ lực cắt  $Q_y$  và mômen uốn  $M_x$ . Trước hết ta phải xác định các phản lực tại A và B. Viết phương trình tổng mômen đối với điểm A và phương trình hình chiếu thẳng đứng ta có:

$$\sum M_A = B \cdot 4 - 16 \cdot 3 + 4 - 6 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

$$\sum Y = A_1 + B - 6 \cdot 2 - 16 = 0$$

Từ đó ta tìm thấy các trị số của các phản lực là:

$$A_1 = B = 14 \text{ kN.}$$

Biểu đồ lực cắt  $Q_y$ . Ta xét trên từng đoạn dầm. Trên đoạn AD. Lực phân bố là hằng vậy lực cắt phải biến thiên theo đường bậc nhất vì  $\frac{dQ_y}{dz} = q$ .

Dùng mặt cắt (1-1) (h.6-13a) tương tự bỏ phần bên phải và xét sự cân bằng của phần bên trái. Trị số lực cắt  $Q_y$  trên mặt cắt (1-1) là bằng:

$$Q_y = 14 - 6z \quad (1)$$

Ta chỉ cần biết hai điểm:

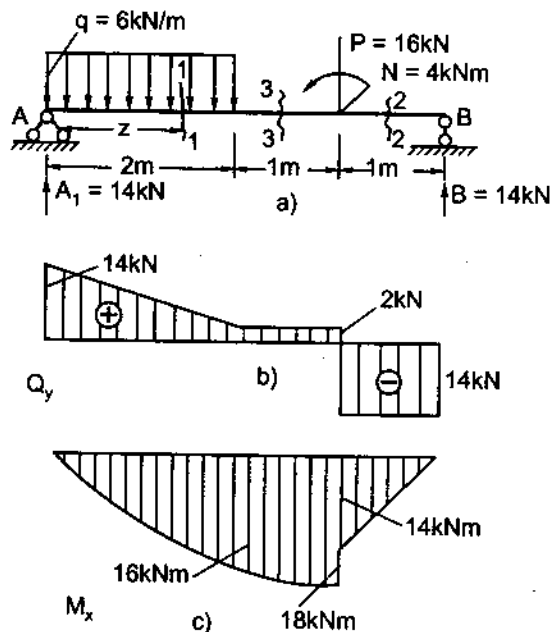
$$\text{Cho } z = 0; \quad Q_y = 14 \text{ kN}$$

$$\text{Cho } z = 2; \quad Q_y = 2 \text{ kN}$$

Với một tỉ lệ xích nhất định các trị số đó được biểu diễn bằng những đoạn thẳng vuông góc với trục của thanh (h.6-13a).

Ta được các điểm 1, 2. Nối các điểm đó ta có biểu đồ lực cắt trong đoạn AD. Trong đoạn DC vì  $q = 0$  nên  $Q_y$  phải là hằng. Biểu đồ là đoạn thẳng 2-3 song song với trục của thanh. Sử dụng mặt cắt (2-2) trong đoạn CB, ta tìm thấy lực cắt trong đoạn đó là 14 kN và mang dấu âm. Trên đoạn đó  $q = 0$  nên biểu đồ cũng là một đoạn thẳng (4-5) song song với trục của thanh.

Ta có nhận xét sau đây: Nơi nào có lực tập trung thì nơi đó biểu đồ lực cắt có bước nhảy.



Hình 6-13

Biểu đồ mômen uốn  $M_x$ . Trong đoạn AD vì lực cắt là đường bậc nhất nên biểu đồ mômen uốn phải là đường bậc hai. Vì  $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$ .

Dùng mặt cắt (1 - 1) (h.6-13a) ta dễ dàng viết được biểu thức mômen uốn như sau :

$$M_x = 14z - \frac{6z^2}{2} \quad (2)$$

Trong các đoạn CD và CB vì  $Q_y$  là hằng nên  $M_x$  là đường bậc nhất. Sử dụng các mặt cắt (2 - 2) và (3 - 3). Cho các mặt cắt đó đi qua những vị trí nhất định ta sẽ tìm thấy trị số mômen uốn tại những vị trí đó. Mỗi đoạn chỉ cần có hai điểm, ta sẽ vẽ được các biểu đồ của mômen uốn  $M_x$  (h.6-13c). Biểu đồ mômen được vẽ về phía thớ căng do mômen uốn gây nên.

Ta cũng có nhận xét sau đây :

Nơi nào có mômen tập trung thì nơi đó có bước nhảy của biểu đồ mômen. Trị số của bước nhảy là bằng trị số của mômen tập trung.

Qua biểu đồ nội lực chúng ta nhìn thấy ngay những mặt cắt có giá trị mômen và lực cắt lớn nhất.

## 2. Trường hợp khung

Vẽ biểu đồ nội lực của khung chịu lực như hình 6-14.

*Bài giải:*

a) *Tính phản lực.* Các thành phần phản lực được biểu diễn như hình 6-14.

Viết các phương trình cân bằng hình chiếu theo phương thẳng đứng và phương ngang, đồng thời viết phương trình cân bằng tổng mômen đối với các điểm A ta có :

$$\sum m_A = B \cdot 2 + 6 - 6 \cdot 2 \cdot 1 = 0 \quad (1)$$

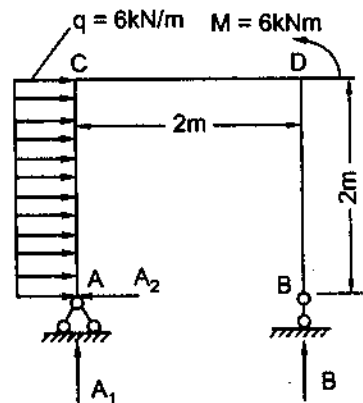
$$\sum Y = A_1 + B = 0 \quad (2)$$

$$\sum X = A_2 - 6 \cdot 2 = 0 \quad (3)$$

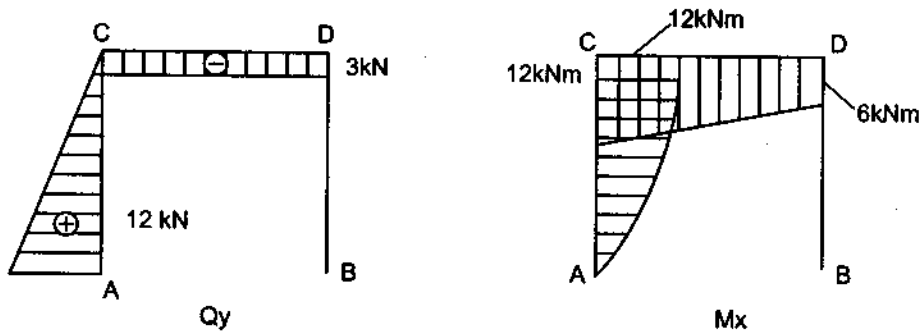
Từ ba phương trình đó ta tìm thấy :

$$B = 3\text{kN}, A_1 = -3\text{kN}, A_2 = 12\text{kN}.$$

Dấu trừ ở  $A_1$  có nghĩa là chiều chọn của ta ban đầu là không đúng với thực tế. Chiều thực của phản lực phải ngược lại.

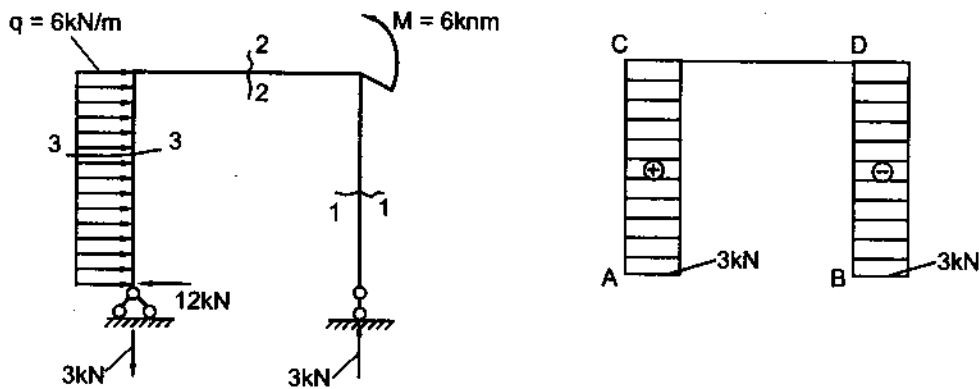


Hình 6-14



Hình 6-15

b) Các biểu đồ nội lực. Sau khi đã có phản lực, dùng các mặt cắt khác nhau trên từng đoạn thanh như đã làm đối với thanh thẳng trên đây, ta sẽ tìm thấy các biểu đồ như được biểu diễn trên hình 6-16.



Hình 6-16

### 3. Trường hợp thanh cong

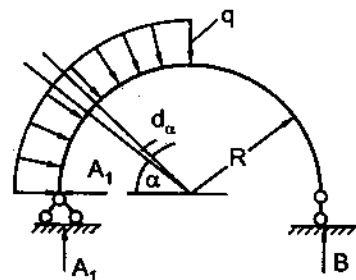
Vẽ biểu đồ nội lực của thanh cong chịu lực như hình 6-17, q phân bố đều trên chiều dài của thanh.

*Bài giải:* Các phản lực được xác định từ các phương trình cân bằng;

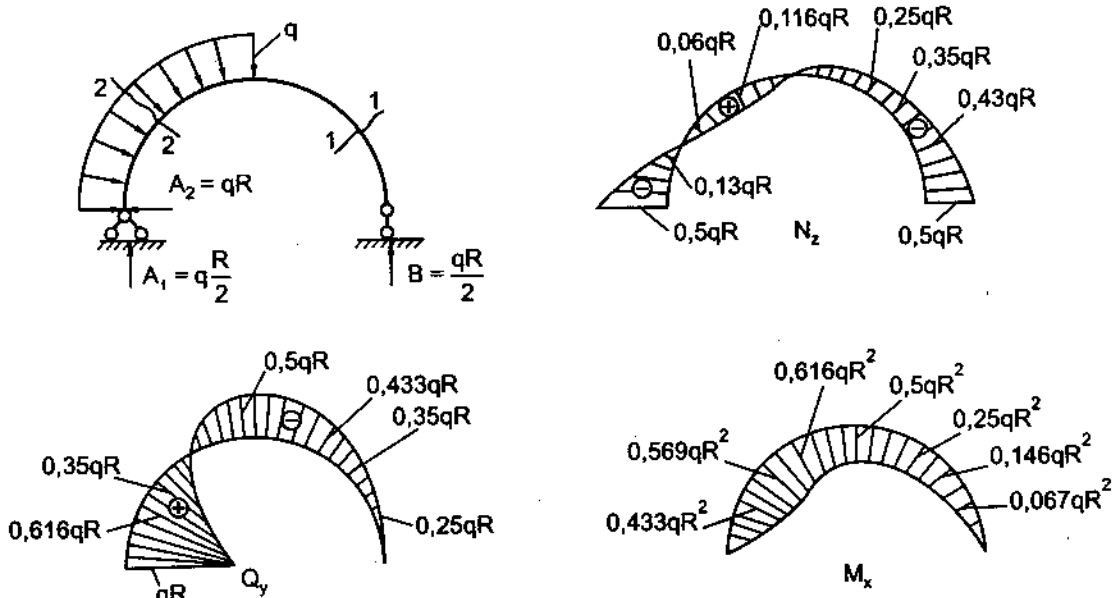
$$\sum m_A = B \cdot 2R - \int_0^{\pi} \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha q d\alpha = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = B + A_1 - \int_0^{\pi} R \sin \alpha q d\alpha = 0 \quad (2)$$

$$\sum X = A_2 - \int_0^{\pi} R \cos \alpha q d\alpha = 0 \quad (3)$$



Hình 6-17



Hình 6-18

Từ đó ta có :  $B = \frac{qR}{2}$  ;  $A_1 = \frac{qR}{2}$  ;  $A_2 = qR$

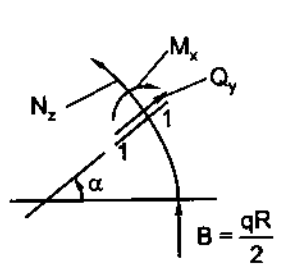
Các biểu thức của nội lực như sau :

Trên đoạn BC (h.6-19)

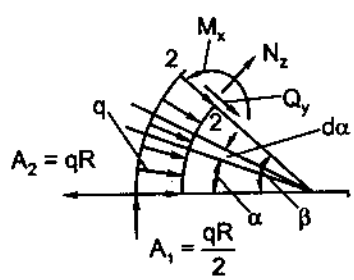
$$N_z = -\frac{qR}{2} \cos\varphi \tag{1}$$

$$Q_y = -\frac{qR}{2} \sin\varphi \tag{2}$$

$$M_x = -\frac{qR^2}{2} (1 - \cos\varphi) \tag{3}$$



Hình 6-19



Hình 6-20

Trên đoạn AC (h.6-20)

$$N_z + qR \int_0^\beta \sin(\beta - \alpha) d\alpha - qR \sin\beta + \frac{qR}{2} \cos\beta = 0 \tag{1}$$

$$Q_y + qR \int_0^\beta \cos(\beta - \alpha) d\alpha - qR \cos\beta - \frac{qR}{2} \sin\beta = 0 \tag{2}$$

$$M_x - \frac{qR^2}{2} (1 - \cos\beta) - qR^2 \sin\beta + qR^2 \int_0^\beta \sin(\beta - \alpha) d\alpha = 0 \tag{3}$$

Trị số các biểu thức tích phân như sau :

$$\int_0^\beta \sin(\beta - \alpha) d\alpha = 1 - \cos\beta ; \int_0^\beta \cos(\beta - \alpha) d\alpha = \sin\beta$$

$$\text{Vậy } N_z = \frac{qR}{2} (\cos\beta + 2\sin\beta - 2) \quad (1)$$

$$Q_y = \frac{qR}{2} (2\cos\beta - \sin\beta) \quad (2)$$

$$M_x = \frac{qR^2}{2} (2\sin\beta + \cos\beta - 1) \quad (3)$$

Bảng biến thiên của các trị số nội lực như sau :

*Trên đoạn BC*

| $\varphi$ | $0^\circ$       | $30^\circ$   | $45^\circ$   | $60^\circ$ | $90^\circ$      |
|-----------|-----------------|--------------|--------------|------------|-----------------|
| $N_z$     | $-\frac{qR}{2}$ | $-0,433 qR$  | $-0,35qR$    | $-0,25qR$  | $0$             |
| $Q_y$     | $0$             | $-0,25qR$    | $-0,35qR$    | $-0,433qR$ | $-\frac{qR}{2}$ |
| $M_x$     | $0$             | $0,067 qR^2$ | $0,146 qR^2$ | $0,25 R^2$ | $0,5 qR^2$      |

*Trên đoạn AC*

| $\beta$ | $0^\circ$       | $30^\circ$  | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ |
|---------|-----------------|-------------|------------|------------|------------|
| $N_z$   | $-\frac{qR}{2}$ | $-0,067qR$  | $0,06qR$   | $0,116qR$  | $0$        |
| $Q_y$   | $qR$            | $0,616qR$   | $0,353qR$  | $0,067qR$  | $-0,5qR$   |
| $M_x$   | $0$             | $0,433qR^2$ | $0,56qR^2$ | $0,616R^2$ | $0,5 qR^2$ |

Các biểu đồ đó được biểu diễn trên hình 6-18.

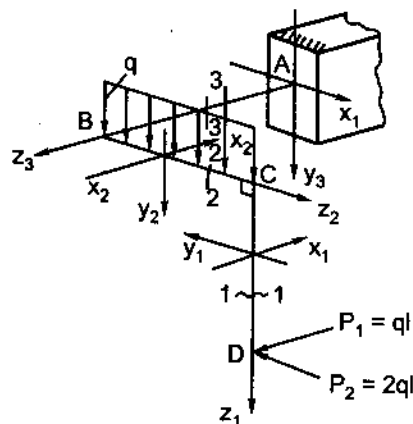
#### 4. Trường hợp khung không gian

Vẽ các biểu đồ nội lực của khung không gian chịu lực như hình 6-21.

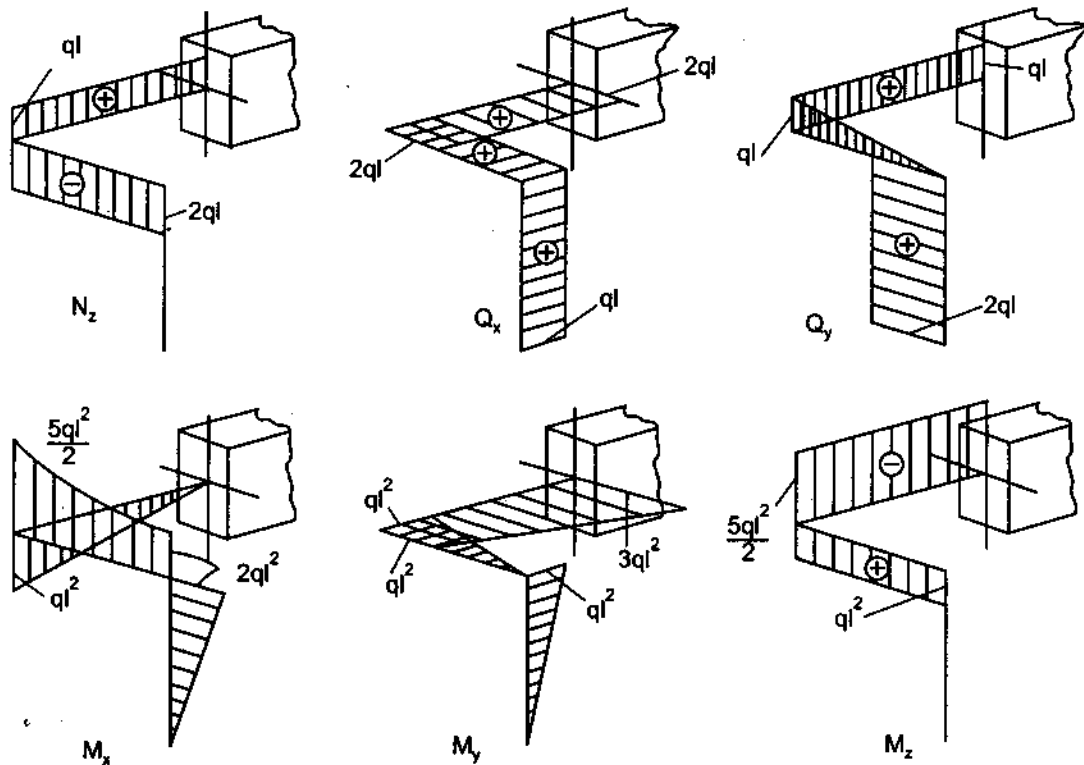
Cho biết  $AB = BC = CD = 1$

*Bài giải*

Lần lượt dùng các mặt cắt (1 - 1), (2 - 2), (3 - 3) với các hệ trục tọa độ trên từng đoạn thanh được chọn như hình 6-21 ; các biểu đồ nội lực được biểu diễn trên hình 6-22.



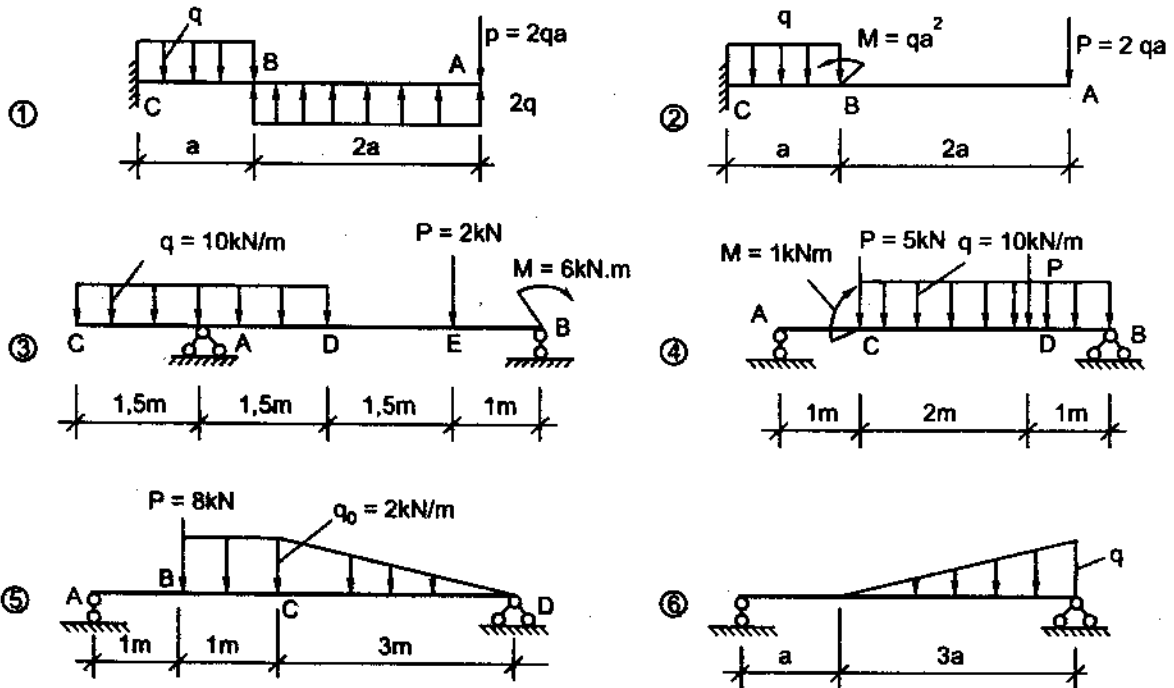
Hình 6-21



Hình 6-22

### Bài tập

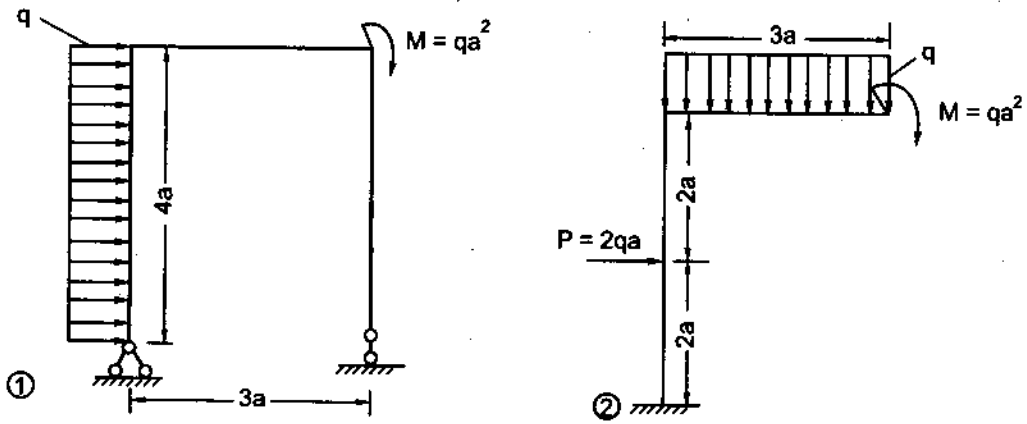
6.1. Vẽ biểu đồ nội lực của dầm cho trên các hình vẽ dưới đây :



Hình 6-23

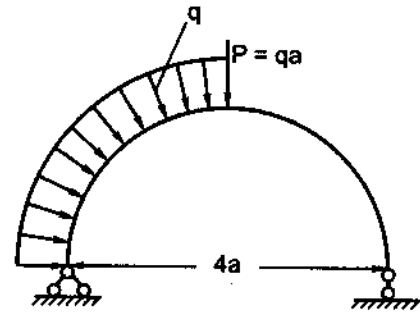


6.2. Vẽ biểu đồ nội lực của khu chịu lực như hình vẽ :



Hình 6-24

6.3. Vẽ biểu đồ nội lực của khung tròn chịu lực phân bố hướng tâm và lực tập trung  $P$  như hình 6-25.



Hình 6-25

## Chương 7

# BÀI TOÁN UỐN CỘNG KÉO (hoặc nén)

### §7-1. CÔNG THỨC ỨNG SUẤT

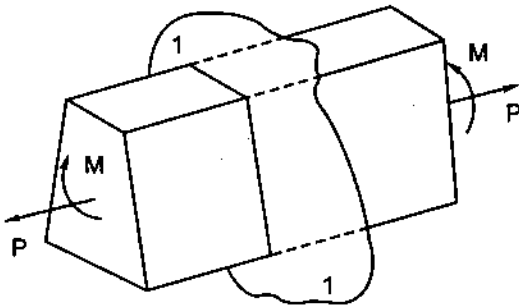
Ta hãy xét trường hợp thanh chịu kéo bởi lực  $P$  và chịu uốn bởi mômen  $M$  như hình 7-1. Từ điều kiện cân bằng, trên mặt cắt (1 - 1), chúng ta có ba thành phần nội lực  $N_z$ ,  $M_x$  và  $M_y$  (h.7-2). Hệ trục Oxy xác định trên mặt cắt là hệ trục quán tính chính trung tâm.

Vấn đề đặt ra là ta phải tìm thấy quy luật phân bố của ứng suất do các thành phần nội lực đó gây nên.

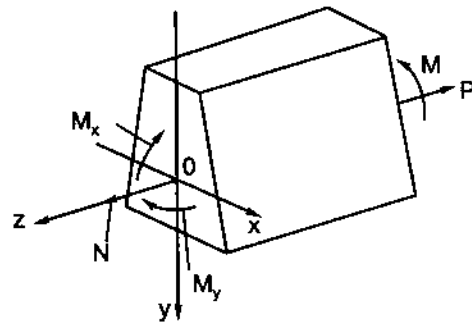
Để đơn giản bài toán ta thừa nhận giả thuyết về mặt cắt phẳng của Becnuli như sau :

Mặt cắt ngang của thanh ban đầu phẳng và thẳng góc với trục của thanh thì trong quá trình biến dạng cũng như sau biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục của thanh.

Ta cũng thừa nhận rằng vì biến dạng là vô cùng bé nên có thể xem hình dáng của mặt cắt ngang không thay đổi trong quá trình biến dạng.



Hình 7-1



Hình 7-2

Xét trạng thái ứng suất tại một điểm bất kì nào đó trong thanh. Tại đó, tách một phần tử hình hộp vô cùng bé bằng các mặt cắt song song với các mặt tọa độ Oxyz. Phần tử được biểu diễn trên hình 7-3.

Với các giả thuyết trên ta có thể khẳng định rằng trên các mặt cắt của phần tử không có ứng suất tiếp.

Thực vậy, vì thanh không có sự xoắn và không có sự trượt do lực cắt nên các mặt cắt ngang không bị xoay đi đối với nhau. Các cạnh (1 - 5), (2 - 6), (3 - 7) và (4 - 8) phải luôn luôn song song với trục thanh. Mặt cắt ngang lại phải vuông góc với trục của thanh như vậy các góc vuông  $\widehat{126}$  và  $\widehat{326}$  không thay đổi trong quá trình thanh biến dạng. Điều đó đưa đến kết luận  $\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$ . Mặt khác vì hình dạng mặt cắt ngang

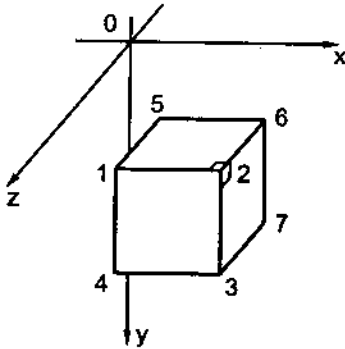
không thay đổi nên góc vuông  $\widehat{123}$  cũng không thay đổi trong quá trình thanh biến dạng. Do đó  $\tau_{yx} = \tau_{xy} = 0$ .

Nói một cách khác các mặt của phân tố là các mặt chính.

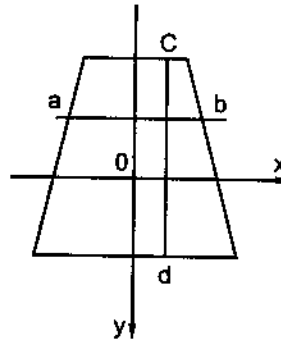
Nếu bỏ qua lực thể tích thì từ hai phương trình đầu của hệ phương trình vi phân cân bằng (2 - 45) ta có được các biểu thức sau đây :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (7-1)$$

Như vậy  $\sigma_x$  chỉ phụ thuộc vào  $y$  và ngược lại  $\sigma_y$  chỉ phụ thuộc vào  $x$  ; nghĩa là những điểm nằm trên đường thẳng  $ab$  nào đó của mặt cắt ngang song song với  $x$  phải có cùng



Hình 7-3



Hình 7-4

trị số  $\sigma_x$  như nhau (h.7-4). Cũng như vậy, với những điểm nằm trên một đường  $cd$  nào đó song song với  $y$  phải có cùng trị số  $\sigma_y$ . Từ điều kiện mặt ngoài không chịu lực, nghĩa là tại  $a, b$  và  $c, d$  ;  $\sigma_x$  và  $\sigma_y$  bằng không nên ta suy ra tất cả mọi điểm trên  $ab$  cũng như trên  $cd$   $\sigma_x = \sigma_y = 0$ . Ta có thể kết luận rằng trạng thái ứng suất phân tố đang xét là trạng thái đơn. Vậy chỉ còn thành phần ứng suất  $\sigma_z$  ;

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7-2)$$

Từ giả thuyết mặt cắt ngang phẳng của Becnuli hàm chuyển vị  $w$  theo phương của trục  $z$  có thể biểu diễn dưới dạng :

$$w = A(z) + B(z)y + C(z)x \quad (7-3)$$

Khi lấy  $Z$  với một trị số nhất định thì phương trình trên là phương trình của một mặt phẳng.

Các hàm  $A(z), B(z), C(z)$  là các hàm ta phải xác định.

Lấy đạo hàm theo  $z$  ta có :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = A'(z) + B'(z)y + C'(z)x \quad (7-4)$$

Thay (7-4) vào (7-2) ta sẽ được biểu thức của ứng suất :

$$\sigma_z = E[A'(z) + B'(z)y + C'(z)x] \quad (7-5)$$

Mặt khác các biểu thức tương quan giữa nội lực và ứng suất (6-1) ta có :

$$N_z = \int_F \sigma_z dF ; M_x = \int_F y \sigma_z dF ; M_y = \int_F x \sigma_z dF \quad (7-6)$$

Thay (7-5) vào (7-6) ta được :

$$N_z = E[A'(z)F + B'(z) \int_F y dF + C'(z) \int_F x dF]$$

$$M_x = E[A'(z) \int_F y dF + B'(z) \int_F y^2 dF + C'(z) \int_F xy dF] \quad (7-7)$$

$$M_y = E[A'(z) \int_F x dF + B'(z) \int_F xy dF + C'(z) \int_F x^2 dF]$$

Vì hệ trục Oxy là hệ trục quán tính chính trung tâm nên ta có :

$$S_x = \int_F y dF = 0 ; S_y = \int_F x dF = 0 ; J_{xy} = \int_F xy dF = 0$$

Từ đó ta tìm thấy dễ dàng :

$$A'(z) = \frac{N_x}{EF} ; B'(z) = \frac{M_x}{EJ_x} ; C'(z) = \frac{M_y}{EJ_y} \quad (7-8)$$

Thay vào (7-8) vào (7-5) ta được biểu thức của ứng suất pháp trên mặt cắt ngang như sau :

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \quad (7-9)$$

Nếu bỏ qua lực thể tích, phương trình vi phân cân bằng thứ ba có dạng :

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (7-10)$$

Điều đó có nghĩa là trên mọi mặt cắt ngang của thanh luật phân bố của  $\sigma_z$  là như nhau.

## §7-2. CÁC TRƯỜNG HỢP RIÊNG QUAN TRỌNG

**1. Kéo nén đúng tâm :** Khi trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có một thành phần lực dọc  $N_z$ , ta gọi thanh chịu kéo hoặc nén đúng tâm. Khi đó trị số ứng suất pháp được tính với công thức :

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} \quad (7-11)$$

Như vậy ứng suất pháp phân bố đều trên mặt cắt. Biến dạng dài theo phương của z có trị số là :

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N_z}{EF} \quad (7-12)$$

So sánh (7-12) và biểu thức  $A'(z)$  của (7-8) ta thấy rõ  $A'(z) = \epsilon_z$ . Tích số EF được gọi là độ cứng của thanh khi kéo (hoặc nén).

$$\epsilon_z = \frac{\delta dz}{dz} = \frac{N_z}{EF}$$

Vậy độ giãn của toàn thanh là :

$$\Delta l = \int_0^l \delta dz = \int_0^l \frac{N_z dz}{EF} \quad (7-13)$$

Nếu EF là hằng và  $N_z$  là hằng trên suốt chiều dài  $l$  ta có :

$$\Delta l = \frac{N_z l}{EF} \quad (7-14)$$

**2. Uốn thuần túy :** Khi trên mặt cắt ngang của thanh chỉ có mômen uốn  $M_x$  hoặc  $M_y$  ta gọi là thanh chịu uốn thuần túy. Để khẳng định, ví dụ chỉ có  $M_x$ , khi đó trị số ứng suất pháp được tính với công thức :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_z} y \quad (7-15)$$

Ta nhận thấy khi  $y = 0$ ,  $\sigma_z = 0$  do đó  $\epsilon_z = 0$ , nói một cách khác các điểm trên đường Ox không có ứng suất và biến dạng. Đường đó được gọi là đường trung hòa. Vậy đường trung hòa trùng với một trục quán tính chính trung tâm. Với các điểm nằm trên đường song song với trục Ox vì cùng có  $y$  như nhau nên trị số ứng suất pháp là bằng nhau. Các điểm càng xa trục trung hòa trị số tuyệt đối của ứng suất càng lớn. Nếu gọi  $y_{\max}^-$  và  $y_{\max}^+$  là tọa độ của các điểm xa nhất đối với đường trung hòa ở về miền chịu nén và chịu kéo thì trị số ứng suất tại những điểm đó là :

$$\sigma_{\min} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^- = \frac{M_x}{W_x^-} \quad (7-15)'$$

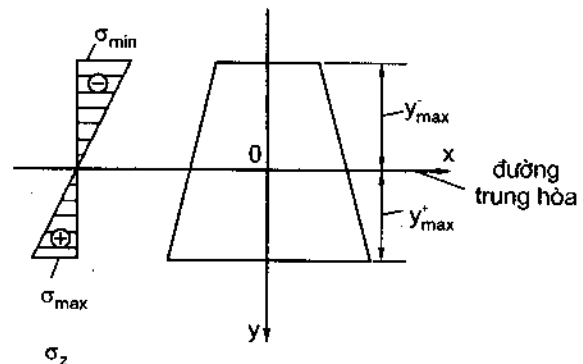
$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^+ = \frac{M_x}{W_x^+} \quad (7-15)''$$

trong đó :

$$W_x^- = \frac{J_x}{y_{\max}^-} \quad \text{và} \quad W_x^+ = \frac{J_x}{y_{\max}^+}$$

được gọi là các mômen chống uốn của mặt cắt ngang. Trị số của  $W_x$  càng lớn khả năng chống uốn của thanh càng lớn.

Biểu đồ biến thiên của ứng suất theo chiều cao được biểu diễn như trên hình 7-5.



Hình 7-5

Tách một đoạn thanh  $dz$  bằng hai mặt cắt (1 - 1) và (2 - 2) rất gần nhau. Sau biến dạng vì trục thanh trở nên cong nên các mặt cắt tạo với nhau một góc  $d\varphi$ . Nếu gọi  $\rho$  là bán kính cong của trục thanh thì vì trục không bị biến dạng nên ta có  $\rho d\varphi = dz$ . Một đường nào đó song song với  $z$  và đi qua tung độ  $y$  sẽ có biến dạng là (h.7-6) :

$$\epsilon_z = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho} \quad (7-16)$$

vì :  $\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{M_x y}{J_x E}$  nên ta rút ra được :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E J_x} \quad (7-17)$$

So sánh (7-8) với (7-17) ta có :  $B'(z) = \frac{1}{\rho}$

Tích  $E J_x$  biểu hiện khả năng chống uốn của thanh nên được gọi là độ cứng khi uốn.

Cùng một cách lập luận với  $M_y$  ta có :

$$\sigma_z = \frac{M_y}{J_y} x; \quad \frac{1}{\rho_x} = \frac{M_y}{E J_y} = C'(z)$$

**3. Uốn xiên.** Ta gọi uốn xiên là khi trên mặt cắt ngang của thanh có hai thành phần mômen uốn  $M_x$  và  $M_y$  cùng tác dụng. Trị số ứng suất pháp được tính với công thức :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x \quad (7-18)$$

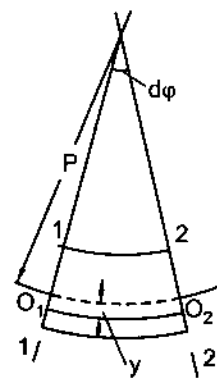
Trên một mặt cắt ngang, đường trung hòa là quỹ tích những điểm tại đó ứng suất pháp bằng không. Vậy phương trình đường trung hòa là :

$$\frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0 \quad (7-19)$$

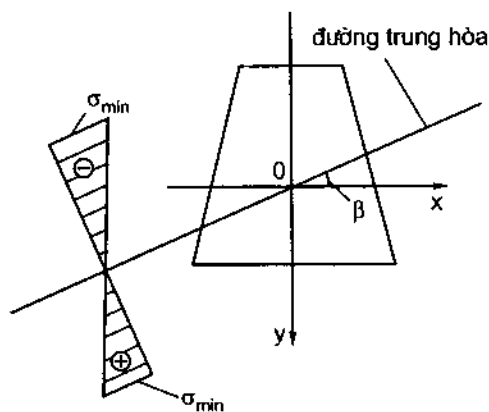
đó là một đường thẳng đi qua gốc tọa độ với hệ số góc :

$$\text{tg}\beta = - \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_x}{J_y} \quad (7-20)$$

Biểu đồ ứng suất pháp được biểu diễn như trên hình 7-7. Vậy điểm xa đường trung hòa nhất là nguy hiểm nhất.



Hình 7-6



Hình 7-7

**4. Kéo nén lệch tâm.** Một dạng riêng của bài toán uốn cộng kéo (hoặc nén) là bài toán kéo (hoặc nén) lệch tâm. Ta gọi một thanh chịu kéo hoặc nén lệch tâm khi hợp lực của ngoại lực có thể thu về một lực  $N$  song song với trục thanh nhưng không nằm trên trục thanh. Hợp lực của nội lực trên mặt cắt cũng là  $N$  và hợp lực đó có điểm đặt là  $K$  lệch so với trọng tâm mặt cắt một khoảng cách  $e$  (h.7-8).

Gọi tọa độ  $K$  là  $x_K$  và  $y_K$  thì các thành phần nội lực trên mặt cắt sẽ là :

$$N_x = N ; M_x = N y_K ; M_y = N x_K$$

Công thức của ứng suất pháp trên mặt cắt ngang có thể viết lại dưới dạng :

$$\sigma_z = \frac{N}{F} + \frac{N y_K y}{J_x} + \frac{N x_K x}{J_y}$$

Hay :

$$\sigma_z = \frac{N}{F} \left[ 1 + \frac{y_K y}{I_x^2} + \frac{x_K x}{I_y^2} \right] \quad (7-21)$$

trong đó :  $i_x^2 = \frac{J_x}{F}$  và  $i_y^2 = \frac{J_y}{F}$ ,  $i_x$  và  $i_y$  được gọi là các bán kính quán tính.

Khi sử dụng công thức (7-21) phải chú ý đến dấu của  $N$ .

Phương trình đường trung hòa được viết lại dưới dạng :

$$1 + \frac{y_K y}{i_x^2} + \frac{x_K x}{i_y^2} = 0 \quad (7-22)$$

hay

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (7-23)$$

trong đó :

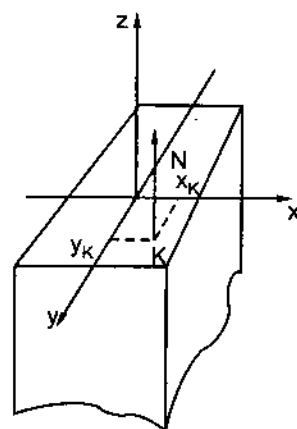
$$a = -\frac{i_y^2}{x_K} ; b = -\frac{i_x^2}{y_K} \quad (7-24)$$

Ta nhận thấy một số đặc tính của đường trung hòa như sau :

- Vì  $a$  và  $b$  luôn luôn ngược dấu với  $x_K$  và  $y_K$  nên đường trung hòa không cắt qua góc phần tư chứa điểm đặt lực. Nếu điểm đặt lực nằm trên một trục nào đó thì đường trung hòa song song với trục kia.

- Vị trí đường trung hòa chỉ phụ thuộc vào tọa độ  $x_K$ ,  $y_K$  và  $i_x$ ,  $i_y$ , không phụ thuộc vào trị số của  $N$ .

- Khi điểm đặt của tải trọng di chuyển trên một đường nào đó không qua gốc tọa độ thì đường trung hòa tương ứng sẽ quay quanh một điểm cố định.



Hình 7-8

Thực vậy trong phương trình (7-22) ta xem xét  $x$  và  $y$  là các trị số đã xác định. Nghĩa là vị trí của một điểm có ứng suất bằng không. Khi đó  $x_K$  và  $y_K$  sẽ là tọa độ quỹ tích của những điểm đặt lực để sao cho ứng suất tại điểm  $x, y$  có trị số bằng không. Ta thấy ngay quỹ tích đó là một đường. Hay nói một cách khác, khi di chuyển điểm đặt lực trên đường đó thì mọi đường trung hòa đều phải đi qua  $(x, y)$ .

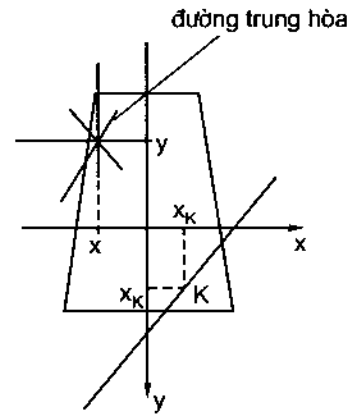
– Nếu điểm đặt tải trọng di chuyển trên đường thẳng đi qua gốc tọa độ thì đường trung hòa sẽ dịch chuyển song song với chính nó :

Thực vậy, khi đó ta có :  $\frac{y_K}{x_K} = m = \text{const}$ . Vậy :

$$\frac{b}{a} = \frac{i_x^2}{i_y^2} \cdot \frac{x_K}{y_K} = n = \text{const}$$

Điều đó chứng tỏ rằng các đường trung hòa tương ứng song song với nhau.

Ta nhận thấy  $a$  và  $b$  càng lớn khi  $x_K, y_K$  càng nhỏ hoặc ngược lại, điều đó có nghĩa là : nếu điểm đặt tải trọng gần vào trọng tâm thì đường trung hòa lui ra khỏi trọng tâm và ngược lại, khi điểm đặt tải trọng dịch ra xa khỏi trọng tâm thì đường trung hòa dịch gần lại trọng tâm (h.7-9).



Hình 7-9

**Ví dụ 1.** Tính ứng suất trong thanh có mặt cắt thay đổi chịu lực như hình vẽ (h.7-10). Tính biến dạng dài của thanh cho biết  $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$ ;  $F_1 = 10 \text{ cm}^2$ ,  $F_2 = 20 \text{ cm}^2$  và các trị số của các lực như sau :  $P_1 = 2000 \text{ N}$ ,  $P_2 = 5000 \text{ N}$ ,  $P_3 = 7000 \text{ N}$ .

*Bài giải :*

Sử dụng phương pháp mặt cắt để tính nội lực trên từng đoạn thanh. Biểu đồ lực dọc được biểu diễn như trên hình 7-10b.

Ứng suất trên các mặt cắt trong đoạn DH có trị số là :

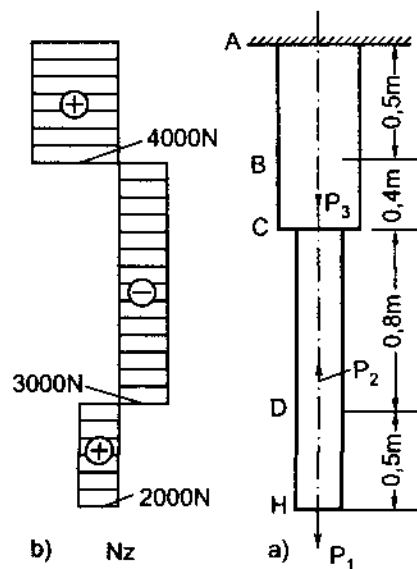
$$\sigma_I = \frac{2000}{10} = 200 \text{ N/cm}^2$$

Ứng suất trên các mặt cắt trong đoạn DC có trị số là :

$$\sigma_{II} = -\frac{3000}{10} = -300 \text{ N/cm}^2$$

Ứng suất trên các mặt cắt trong đoạn BC có trị số là :

$$\sigma_{III} = -\frac{3000}{20} = -150 \text{ N/cm}^2$$



Hình 7-10



Ứng suất trên các mặt cắt trong đoạn AB có trị số là :

$$\sigma_{IV} = \frac{4000}{20} = 200 \text{ N/cm}^2$$

Độ giãn dài của thanh là :

$$\Delta l = \frac{2000 \cdot 50}{2 \cdot 10^7 \cdot 10} - \frac{3000 \cdot 80}{2 \cdot 10^7 \cdot 10} - \frac{3000 \cdot 40}{2 \cdot 10^7 \cdot 20} + \frac{4000 \cdot 50}{2 \cdot 10^7 \cdot 20}$$

$$\Delta l = -0,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

**Ví dụ 2.** Thanh chịu lực như hình 7-11, tính thế năng biến dạng đàn hồi trong thanh.

*Bài giải:*

Thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong đơn vị thể tích là :

$$u = \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2}$$

Vậy thế năng biến dạng đàn hồi trên một đoạn thanh dz là :

$$dU = \frac{N_z^2}{2EF} dz$$

Thế năng biến dạng đàn hồi tính trong toàn thanh là :

$$U = \int_V dU = \int_0^l \frac{N_z^2}{2EF} dz$$

$$U = \frac{J_z^2 l}{2EF} = \frac{P^2 l}{2EF} \quad (7-25)$$

**Ví dụ 3.** Cho thanh chịu lực như trên hình 7-11 ; tính ứng suất trên mặt cắt bất kì nào đó khi có kể cả trọng lượng bản thân của thanh. Gọi  $\gamma$  là trọng lượng riêng của thanh.

*Bài giải:*

Xét mặt cắt (1 - 1) cách đầu mút tự do một khoảng cách z. Lực dọc trên mặt cắt có trị số là :

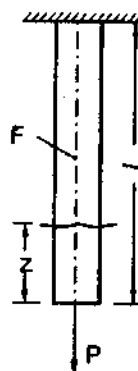
$$N_z = P + \gamma F z$$

Vậy ứng suất trên mặt cắt là :

$$\sigma_z = \frac{N_z}{F} = \frac{P}{F} + \gamma z$$

Trị số ứng suất cực đại là tại ngàm :

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F} + \gamma l$$



Hình 7-11

Biến dạng dọc của thanh được tính với biểu thức :

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EF} = \int_0^l \frac{P + \gamma Fz}{EF} dz$$

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{Pl}{EF} + \frac{Ql}{2EF}$$

Q là trọng lượng bản thân của thanh.

**Ví dụ 4.** Cho dầm chịu lực như trên hình 7-12. Mặt cắt ngang của dầm là một hình chữ nhật bề rộng b, bề cao h. Vẽ biểu đồ ứng suất trên mặt cắt ngang đoạn dầm chịu uốn thuần túy và tính trị số ứng suất cực đại.

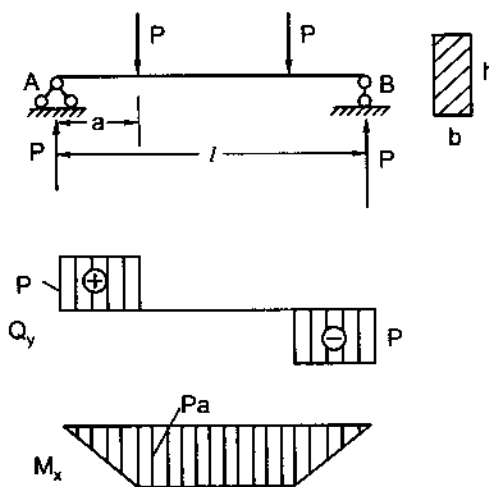
*Bài giải*

Biểu đồ  $Q_y$  và  $M_x$  được biểu diễn như trên hình 7-12b, c. Trên mọi mặt cắt ngang trong đoạn CD chỉ có một thành phần mômen uốn  $M_x$ . Nên đoạn đó chịu uốn thuần túy. Ứng suất pháp trên mặt cắt ngang được xác định bởi biểu thức :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y. \text{ Vậy trị số của ứng suất cực}$$

đại là :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x \frac{h}{2}}{\frac{bh^2}{12}} = \frac{6Pa}{bh^2}$$



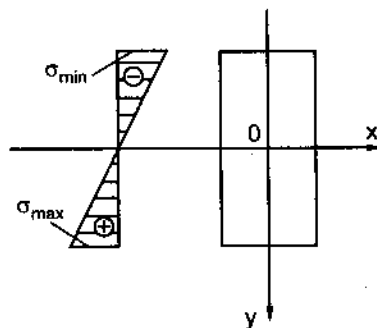
Hình 7-12

Biểu đồ ứng suất được biểu diễn như trên hình 7-13. Trục trung hòa là trục Ox. Nửa phần dưới của mặt cắt chịu kéo và nửa phần trên chịu nén. Điểm xa nhất đối với đường trung hòa của miền chịu nén là các điểm có tung độ là  $\pm \frac{h}{2}$ . Trị số tuyệt đối của  $\sigma_{\max}$  và  $\sigma_{\min}$  là bằng nhau và bằng :

$$\sigma_{\max} = |\sigma_{\min}| = \frac{M_x}{W_x} \quad (7-26)$$

với 
$$W_x = \frac{bh^2}{6} \quad (7-27)$$

ở đây ta có : 
$$W_x^+ = W_x^- = \frac{bh^2}{6}$$



Hình 7-13

**Ví dụ 5.** Trên một mặt cắt ngang hình chữ nhật, mômen uốn  $M_x$  và  $M_y$  có chiều hướng như hình 7-14. Trị số của chúng như sau :

$$M_x = 45 \text{ kNm}, M_y = 25 \text{ kNm}.$$

Vẽ biểu đồ ứng suất trên mặt cắt.

*Bài giải:*

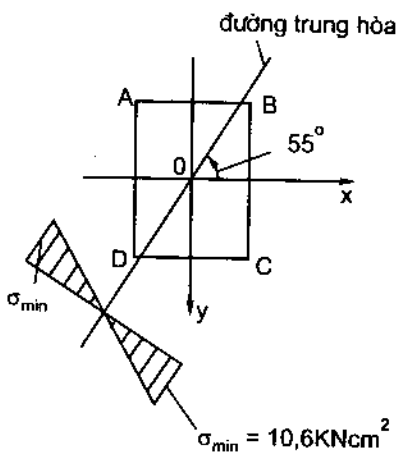
Đây là bài toán uốn xiên ứng suất pháp trên mặt cắt được xác định bởi biểu thức :

$$\sigma_z = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x$$

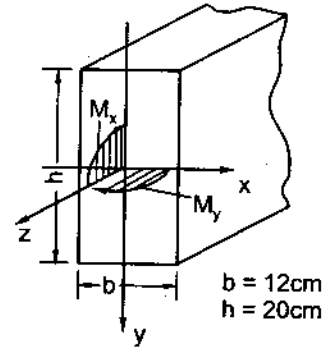
Phương trình đường trung hòa là :

$$\frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0$$

Thay trị số vào ta được :  $4,68y + 6,9x = 0$



Hình 7-15



Hình 7-14

Đường trung hòa được biểu diễn như trên hình 7-15. Các điểm có trị số tuyệt đối của ứng suất lớn nhất là những điểm A và C vì chúng xa nhất đối với đường trung hòa. Điểm C nằm trong miền kéo A nằm trong miền nén. Trị số của các ứng suất đó là :

$$\sigma_c = \frac{M_x}{W_k} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{4500000}{800} + \frac{2400000}{480}$$

$$= 10,625 \text{ kN/cm}^2$$

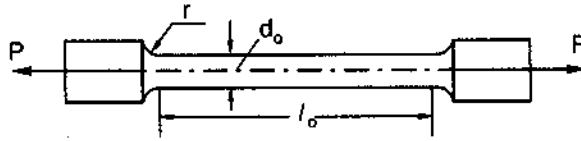
$$\sigma_A = -12,625 \text{ kN/cm}^2$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{bh^2}{6}$$

### §7-3. THÍ NGHIỆM KÉO VÀ NÉN VẬT LIỆU

Trong những bài toán ta vừa xét trên đây, như chúng ta đã nói trạng thái ứng suất của phân tố là trạng thái ứng suất đơn. Vấn đề đặt ra cho chúng ta là phải tìm điều kiện bền cho trạng thái ứng suất đó. Để đạt được điều đó chúng ta chỉ việc tiến hành các thí nghiệm về kéo và nén vật liệu.

**1. Thí nghiệm kéo.** Mẫu thí nghiệm xem tiêu chuẩn (TCVN), ví dụ ta dùng mẫu kéo bằng thép như trên hình 7-16. Kí hiệu  $l_0$  là chiều dài phần thí nghiệm và  $d_0$  là đường kính ban đầu của mẫu.



Hình 7-16

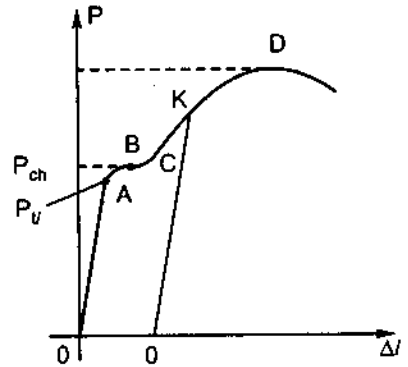
Trong quá trình mẫu chịu kéo, đoạn dài \$l\_0\$ có một độ giãn \$\Delta l\$. Dùng bút ghi trên máy ta tìm thấy tương quan giữa \$\Delta l\$ và \$P\$ như biểu diễn bằng đồ thị trên hình 7-17. Qua biểu đồ đó ta nhận thấy sự làm việc của vật liệu có ba giai đoạn :

a) *Giai đoạn tương quan tỉ lệ bậc nhất.* Khi bắt đầu tăng lực cho đến một giá trị xác định mà ta kí hiệu là \$P\_U\$. Trong giai đoạn này tương quan giữa \$P\$ và \$\Delta l\$ là đoạn thẳng OA. Nếu chúng ta thực hiện kéo mẫu đạt đến một giá trị nào đó nhỏ thua \$P\_U\$, mẫu sẽ có một độ giãn dài \$\Delta l\$ tương ứng, sau đó ta lại từ từ giảm lực đi thì ta nhận thấy bút ghi trên biểu đồ sẽ theo đường OA đi về lại gốc O. Nghĩa là trên mẫu không biến dạng nữa. Điều đó thể hiện rằng định luật Húc hoàn toàn đúng trong giai đoạn này. Cũng vì vậy ta gọi giai đoạn này là giai đoạn đàn hồi tỉ lệ. Cách làm việc của vật liệu giống như mô hình một lò xo chịu kéo. Ta gọi giới hạn tỉ lệ quy ước là tỉ số :

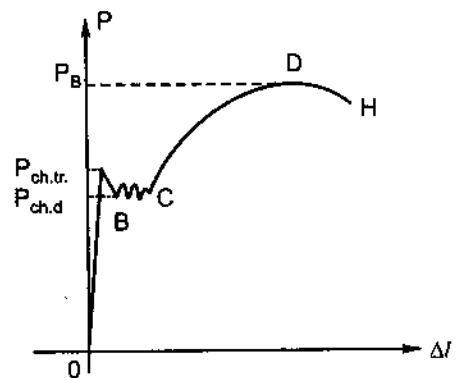
$$\sigma_U = \frac{P_U}{F_0} \quad (\text{N/cm}^2)$$

\$F\_0\$ là diện tích mặt cắt ngang của mẫu thí nghiệm lúc ban đầu khi chưa biến dạng (trị số đó không phải là ứng suất thực trên thanh vì khi đó diện tích của mặt cắt ngang không còn là \$F\_0\$ nữa).

b) *Giai đoạn chảy.* Ta để ý đến điểm B, điểm bắt đầu của một giai đoạn đường biểu diễn nằm ngang BC. Tất nhiên từ A đến B cũng là một giai đoạn. Tương quan giữa \$\Delta l\$ và \$P\$ được biểu diễn bởi đoạn cong AB ; song giai đoạn này hết sức ngắn nên ta không cần xét đến. Đôi khi trong thí nghiệm không có cả đoạn cong này. Do tốc độ thí nghiệm không đủ chậm, bút ghi sẽ vạch đường thẳng OA lên một điểm quá B rồi hạ xuống và tạo nên một đường zích - zắc trong cả độ dài BC (h.7-18). Tương ứng với B ta có lực \$P\_{ch}\$ và gọi giới hạn chảy quy ước là tỉ số :



Hình 7-17



Hình 7-18

$$\sigma_{ch} = \frac{P_{ch}}{F_0} \text{ (N/cm}^2\text{)} \quad (7-28)$$

Trong trường hợp của hình 7-18 ta có hai điểm : Một điểm chảy trên và một điểm chảy dưới. Ta thấy điểm chảy dưới mới là điểm thể hiện tính chất thực của vật liệu. Do đó giới hạn chảy bao giờ cũng tính từ giới hạn chảy dưới.

Ta nhận thấy cách làm việc của vật liệu trong giai đoạn này là lực không tăng nhưng biến dạng tiếp tục tăng lên. Mô hình biểu diễn cách làm việc đó giống như vật trượt trên mặt có ma sát (h.4-1) mà ta đã trình bày trong chương IV. Đoạn thẳng BC trên biểu đồ được gọi là diện chảy, vật liệu càng dẻo thì diện chảy càng lớn. Cũng vì vậy đối với vật liệu ta xem là dẻo lí tưởng có nghĩa là xem như BC kéo dài ra vô cùng.

c) *Giai đoạn cứng cổ.* Giai đoạn này được biểu diễn bằng đoạn cong CDH (h.7-17). Trong giai đoạn này nếu lực có tăng lên thì biến dạng mới tăng lên, nhưng tương quan giữa lực và  $\Delta l$  không còn là tương quan bậc nhất nữa. Nếu tăng lực đến một điểm K nào đó và nếu từ từ giảm lực đi thì bút sẽ vạch từ K một đường song song với OA đến vị trí O'. Điều đó có nghĩa là trên thanh có một biến dạng OO' không triệt tiêu sau khi bỏ hết lực. Biến dạng đó được gọi là biến dạng dẻo hay biến dạng vĩnh cửu hay còn gọi là biến dạng còn dư. Nếu bây giờ ta lại tăng lực lên thì bút sẽ vạch theo đường O'KDH. O'K xem như một giai đoạn tỉ lệ. Hiện tượng giới hạn tỉ lệ tăng lên được gọi là hiện tượng biến cứng nguội. Khi P đạt đến giá trị cao nhất  $P_B$  thì trên mẫu xuất hiện một chỗ thắt. Trên biểu đồ ta thấy lực giảm xuống nhưng ứng suất thực trên mặt cắt ngang ở chỗ thắt tăng lên vì diện tích thu hẹp. Khi ứng suất này đạt đến một trị số nào đó thì thanh bị đứt.

Như vậy khi lực đạt đến  $P_B$  ta có thể xem như vật liệu đã bị phá hỏng do đó ta định nghĩa giới hạn bền quy ước là tỉ số :

$$\sigma_B = \frac{P_B}{F_0} \text{ (N/cm}^2\text{)} \quad (7-29)$$

Ba giới hạn : giới hạn tỉ lệ, giới hạn chảy và giới hạn bền thể hiện tính chịu lực của vật liệu. Trong thực tế ba giới hạn đó được tính theo tiêu chuẩn (xem TCVN). Trong chế tạo máy ta muốn các chi tiết làm việc không có biến dạng dư vì nếu có biến dạng này thì kích thước của chi tiết sẽ thay đổi sau khi chịu lực do đó ta chỉ cho phép ứng suất thực trong chi tiết nhỏ hơn  $\sigma_{ch}$ . Để có được một độ an toàn chắc chắn ta thường lấy :

$$\sigma_z \leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \quad (7-30)$$

$n$  là hệ số an toàn tự chọn với giá trị lớn hơn 1. Tỉ số  $\frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma]$  được gọi là ứng suất cho phép. Trong xây dựng nếu ta không cần để ý đến sự chịu lực lớn nhất của vật liệu, khi đó ta tính ứng suất cho phép từ giới hạn bền :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n} \quad (7-30)'$$

Đối với vật liệu giòn, biểu đồ tương quan giữa  $P$  và  $\Delta l$  được biểu diễn như hình 7-19. Ta không thể xác định được giới hạn tỉ lệ và không xuất hiện giới hạn chảy. Ứng suất cho phép xác định từ giới hạn bền :

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n} \text{ (N/cm}^2\text{)} \quad (7-30)$$

Tuy nhiên người ta cũng có thể chọn một trị số thích hợp mà với trị số đó ta có thể xem là giới hạn tỉ lệ, nghĩa là khi ứng suất chưa đạt đến trị số đó thì ta thừa nhận là vật liệu làm việc tuân theo định luật Húc.

Để đánh giá tính dẻo của vật liệu chúng ta sử dụng hai đặc trưng sau đây.

Độ giãn dài tỉ đối (tính theo phần trăm) :

$$\delta = \frac{l_d - l_0}{L_0} \cdot 100\% \quad (7-31)$$

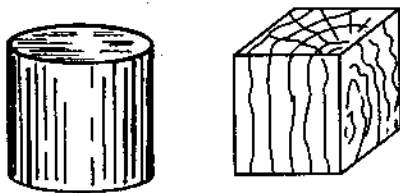
Độ thắt tỉ đối (tính theo phần trăm) :

$$\Psi = \frac{F_0 - F_d}{F_0} \cdot 100\% \quad (7-32)$$

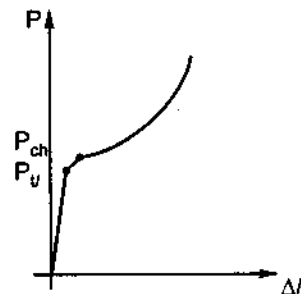
Trong đó  $l_d$  chiều dài đứt,  $F_d$  diện tích mặt cắt ngang tại chỗ đứt

Ta thấy vật liệu càng dẻo thì trị số  $\delta$  và  $\Psi$  càng lớn.

**2. Thí nghiệm nén.** Hình dáng mẫu thí nghiệm là một hình trụ tròn hoặc một hình hộp (h.7-20). Chiều cao của mẫu nén thường lấy từ 1 đến 1,5 lần đường kính hay kích thước lớn nhất của đáy. Đối với vật liệu dẻo, mẫu thường có dạng hình trụ, biểu đồ quan hệ giữa  $\Delta l$  và  $P$  như trên hình 7-21.



Hình 7-20

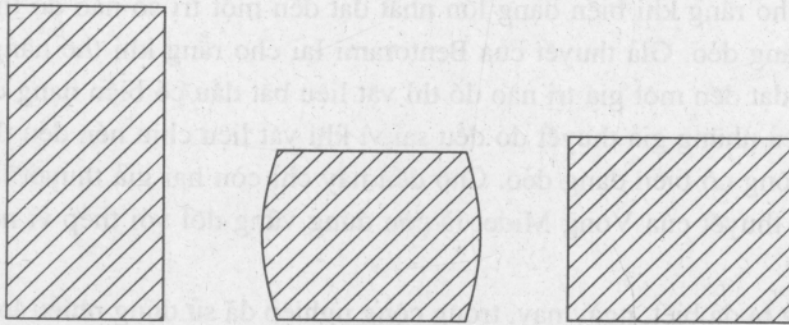


Hình 7-21

Qua biểu đồ ta nhận thấy quá trình chịu lực của vật liệu cũng có ba giai đoạn.

Giai đoạn tỉ lệ, giai đoạn chảy và giai đoạn cứng. Chỉ khác một điều là ta không có giới hạn bền. Càng nén mẫu càng phình ra theo chiều ngang và bẹp xuống mà không vỡ.

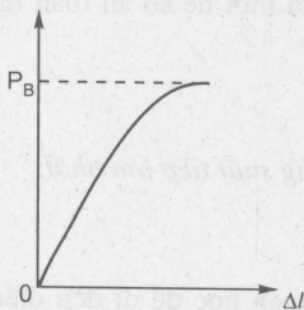
Nếu giữa mẫu nén và bàn ép có lực ma sát thì hình dáng của mẫu trong quá trình biến dạng là một hình trống (h.7-22). Nếu trên các mặt tiếp xúc được bôi trơn thì sự phình ra theo chiều ngang là như nhau đối với mọi mặt cắt ngang.



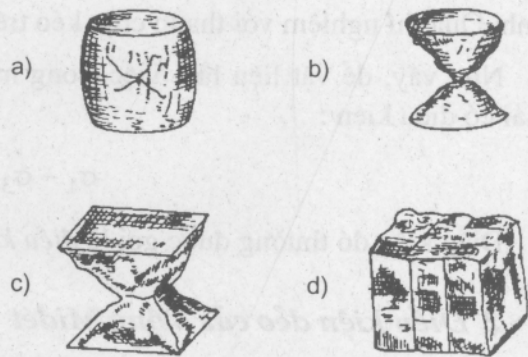
Hình 7-22

Trong trường hợp vật liệu giòn biểu đồ tương quan giữa  $\Delta l$  và  $P$  là một đường cong (h.7-23) gần giống như khi kéo ; nhưng  $P_B$  lớn hơn nhiều so với khi kéo.

Khi  $P$  đạt đến trị số  $P_B$  thì mẫu bị phá vỡ. Nếu trên các bề mặt tiếp xúc giữa mẫu và bàn nén không có bôi trơn thì các vết nứt nghiêng một góc  $45^\circ$  so với phương của trục. Vật liệu sẽ bị bóc dần chung quanh, để cuối cùng còn lại hình chóp với hai đáy là những mặt tiếp xúc với bàn nén (h.7-24a), (h.7-24c). Nếu trên các bề mặt có bôi trơn thì các vết nứt là song song với trục của mẫu nén (h.7-24d).



Hình 7-23



Hình 7-24

#### §7-4. CÁC ĐIỀU KIỆN DẸO – ĐIỀU KIỆN BỀN

Với trạng thái ứng suất đơn, vật liệu bắt đầu có biến dạng dẻo khi ứng suất trong thanh đạt đến giới hạn dẻo. Với trạng thái ứng suất phẳng và khối ta không thể xác định giới hạn đó một cách tổng quát bằng thí nghiệm vì giới hạn đó không những phụ thuộc vào độ lớn của các ứng suất mà còn phụ thuộc vào các tỉ lệ giữa các ứng suất. Cũng vì vậy đã có

nhiều giả thuyết suy đoán một cách tổng quát giới hạn mà bắt đầu từ đó, vật liệu có biến dạng dẻo ; ví dụ với giả thuyết của Răngkin. Giả thuyết đó cho rằng khi ứng suất pháp cực đại đạt đến một giá trị nào đó thì vật liệu bắt đầu có biến dạng dẻo. Giả thuyết của Xanhvonăng cho rằng khi biến dạng lớn nhất đạt đến một trị số nào đó thì vật liệu sẽ bắt đầu có biến dạng dẻo. Giả thuyết của Bentorami lại cho rằng khi thế năng biến dạng đàn hồi toàn phần đạt đến một giá trị nào đó thì vật liệu bắt đầu có biến dạng dẻo. Người ta đã nhận thấy tất cả những giả thuyết đó đều sai vì khi vật liệu chịu nén đều theo mọi phương thì vật liệu không có biến dạng dẻo. Cho đến nay chỉ còn hai giả thuyết là giả thuyết của Culông và giả thuyết của Vông Midet là còn đứng vững đối với thép vì nó tương đối phù hợp với thực tế.

Như chúng ta đã biết, ngày nay, trong công nghiệp đã sử dụng nhiều loại vật liệu khác, ví dụ các loại chất dẻo v.v.. Điều kiện dẻo phù hợp với từng loại vật liệu ở đây không đề cập đến.

**1. Điều kiện dẻo của Culông – Toretka**

Qua các thí nghiệm Culông và Toretka nhận thấy trạng thái dẻo của vật liệu phát sinh khi hiệu của  $\sigma_1$  và  $\sigma_3$  đạt đến một giới hạn nhất định. Hiệu của  $\sigma_1$  và  $\sigma_3$  lại bằng hai lần trị số ứng suất tiếp cực đại cho nên điều kiện dẻo của Culông và Toretka cũng còn được gọi là điều kiện dẻo về ứng suất tiếp cực đại. Điều kiện đó viết như sau :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau_{max} = 2K$$

2K là một giới hạn mà ta có thể dựa vào thí nghiệm của trạng thái ứng suất đơn để xác định. Qua thí nghiệm với thanh chịu kéo trên dây ta thấy ngay  $2K = \sigma_{ch}$ .

Như vậy, để vật liệu làm việc trong miền đàn hồi với một hệ số an toàn nhất định ta phải có điều kiện :

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \frac{\sigma_{ch}}{n} = [\sigma] \tag{7-33}$$

Điều kiện đó thường được gọi là *điều kiện bền theo ứng suất tiếp lớn nhất*.

**2. Điều kiện dẻo của Vông Midét**

Vông Midét đã suy luận hoàn toàn bằng đường lối toán học để đi đến điều kiện dẻo như sau :

Trong điều kiện vật liệu và đồng nhất đẳng hướng điều kiện dẻo không phụ thuộc vào phương của tọa độ. Như vậy điều kiện dẻo là một biểu thức tương quan giữa các bất biến của ứng suất :  $f(I_1, I_2, I_3)$ . Nhưng nó phải độc lập đối với tenxơ ứng suất cầu ; vậy biểu thức đó là một sự tương quan giữa các bất biến của tenxơ ứng suất lệch  $f(I_1, I_2, I_3)$  ; vì  $I_1 = 0$  nên mối tương quan đó là mối liên hệ giữa  $I_2$  và  $I_3$ . Nếu xem giới hạn chảy khi kéo và giới hạn chảy khi nén là như nhau thì mối tương quan đó lại phải độc lập đối với  $I_3$ . Thực vậy ta hãy suy cho trường hợp kéo nén đơn. Khi đó ta có  $I_3 = \frac{2}{27}\sigma_1^3$ . Trị số này phải đổi



dấu khi thay  $\sigma_1 = \sigma_{ch}$  và  $\sigma_1 = -\sigma_{ch}$ . Như vậy nếu có  $I_3$  thì mối tương quan f không như nhau khi vật liệu chịu kéo và chịu nén. Do đó điều kiện dẻo chỉ còn phụ thuộc vào  $I_2$ . Vòng Misede cho rằng vật liệu bắt đầu có biến dạng dẻo khi :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 4K^2$$

Biểu thức vế bên trái là trị số của  $I_2$  sai kém một hằng số tỉ lệ.

Ở trạng thái ứng suất đơn vật liệu bước vào biến dạng dẻo khi  $\sigma_1 = \sigma_{ch}$  do đó ta có :  $2K^2 = \sigma_{ch}^2$ . Điều kiện để vật liệu làm việc trong điều kiện bền và an toàn là khi :

$$\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \leq \frac{\sigma_{ch}^2}{n^2}$$

Hay :

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} \leq [\sigma] \quad (7-34)$$

Biểu thức ở vế trái của (7-34) là trị số của thế năng biến đổi hình dáng sai kém một hằng số tỉ lệ. Vì vậy điều kiện (7-34) còn được gọi là điều kiện bền theo thế năng biến đổi hình dáng. Khi thế năng đó đạt đến một giá trị nhất định thì vật liệu bước vào giai đoạn chảy và ta xem như không sử dụng được nữa.

### 3. Biểu diễn hình học của điều kiện dẻo

Điều kiện dẻo của một thuyết nào đó thường được biểu diễn bằng một mặt trong không gian  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Gọi  $\overline{OP}$  là một vectơ có các thành phần  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  biểu diễn cho trạng thái ứng suất tại một điểm trong vật thể ; ta có thể phân tích  $\overline{OP}$  thành hai thành phần : thành phần  $\overline{OH}$  tượng trưng cho trạng thái ứng suất cầu với  $\sigma_{tb} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$  và thành phần  $\overline{OD}$  tượng trưng cho trạng thái ứng suất lệch với :

$$\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_{tb}$$

$$\sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_{tb}$$

$$\sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_{tb}$$

Ta nhận thấy vectơ  $\overline{OH}$  phải nằm trên đường nghiêng đều đối với các trục tọa độ. Các cosin chỉ phương của  $\overline{OH}$  là bằng  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Mặt khác nếu cộng các biểu thức trên đây ta có :

$$\sigma_1' + \sigma_2' + \sigma_3' = 0$$

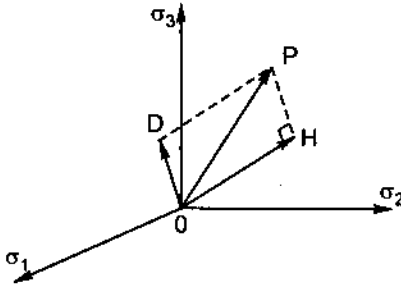
nghĩa là điểm D phải nằm trong mặt phẳng  $\pi$  có phương trình là :

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

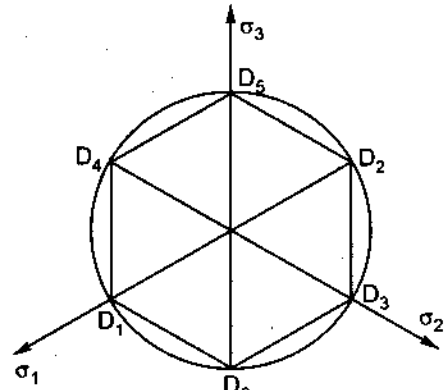
Ta nhận thấy ngay pháp tuyến của  $\pi$  tại 0 chính là đường OH (h.7-25).

Hãy xét mặt giới hạn của Culông. Theo (7-32) ta có :

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{ch} \quad (a)$$



Hình 7-25



Hình 7-26

Như vậy trên phương của mỗi trục, ví dụ trên phương của  $\sigma_1$  chẳng hạn ta tìm thấy hai điểm giới hạn, một điểm giới hạn  $\sigma_{ch}$  khi kéo vật liệu theo phương đó và một điểm  $-\sigma_{ch}$  khi nén vật liệu cũng theo phương đó. Nếu bỏ qua hiệu ứng Bausinhghe nghĩa là xem rằng giới hạn chảy khi nén bằng giới hạn chảy khi kéo thì hình chiếu của hai điểm này trên  $\pi$  cho ta hai điểm chiếu của mặt Culông trên  $\pi$  (h.7-26).

Hai điểm đó được kí hiệu là  $D_1, D_2$ . Độ dài của vectơ  $\overline{OD_1}$  chính là :

$$\sigma_{ch} \sin(\overline{O\sigma_1}, \overline{OH}) = \sigma_{ch} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Trên hình 7-26 ta đã biểu diễn hình chiếu của các trục  $O\sigma_1, O\sigma_2$  và  $O\sigma_3$  trên mặt  $\pi$ , vậy vectơ  $\overline{OH}$  là vectơ vuông góc với mặt phẳng của hình vẽ. Tương tự như vậy ta tìm thấy bốn điểm khác trên  $\sigma_2$  và  $\sigma_3$ . Để ý đến biểu thức (a) trên đây ta thấy ngay hình chiếu của mặt giới hạn trên  $\pi$  là hình sáu cạnh đều nối các điểm  $D_1, D_4, D_5, D_2, D_3, D_6$ .

Như vậy mặt giới hạn của Culông là một hình lăng trụ sáu mặt đều có trục  $\overline{OH}$  nội tiếp trong mặt trụ có bán kính là  $\sigma_{ch} \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Những trạng thái ứng suất được tượng trưng bằng những điểm trên mặt giới hạn là những trạng thái ứng suất bất đầu có biến dạng dẻo. Ta gọi trạng thái đó là trạng thái giới hạn.

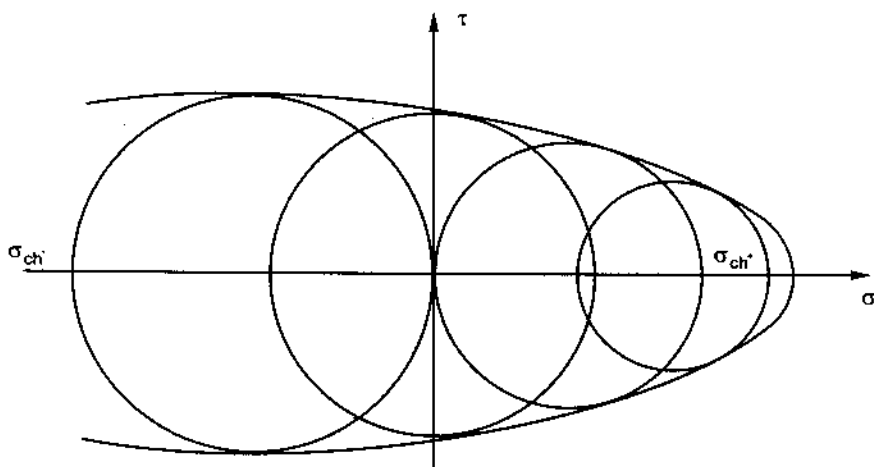
Theo điều kiện dẻo của Vòng Midet ta có :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{ch}^2 \quad (b)$$

Đó là phương trình của hình trụ tròn xoay với  $\overline{OH}$  là trục. Mặt trụ đó cắt  $\pi$  bởi đường tròn, bán kính của đường tròn cũng chính là hình chiếu của  $\sigma_{ch}$  lên  $\pi$  nên đúng bằng  $\sigma_{ch} \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Nói một cách khác mặt trục của Vòng Midet là mặt trụ ngoại tiếp của lăng trụ Culông.

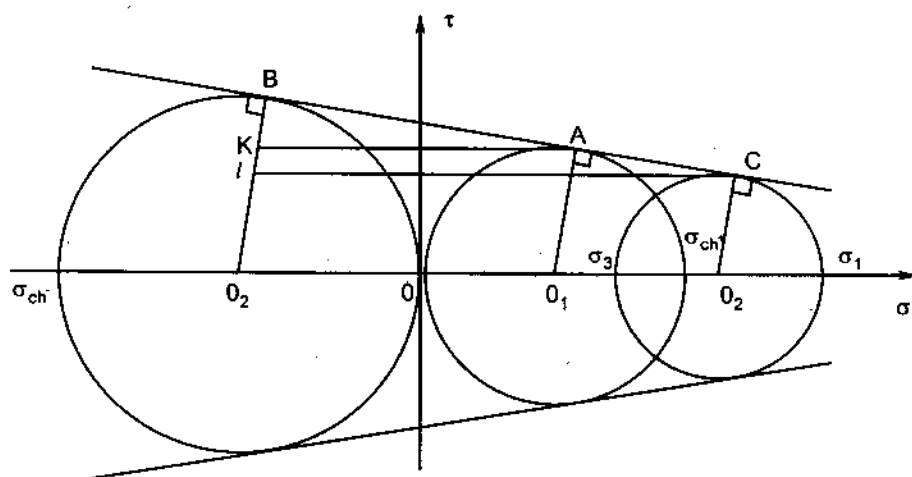
#### 4. Đường nội tại – Thuyết bên của Mo

Hai giả thuyết của Culông và Vông Midet đều bỏ qua ảnh hưởng của ứng suất cầu đến giới hạn dẻo của vật liệu. Vào năm 1880 Mo đã chỉ ra rằng khi một vật thể chịu kéo theo các phương như nhau, lực không thể tăng lên vô hạn được. Nếu ta biểu diễn các trạng thái ứng suất bằng những vòng tròn Mo ứng suất trong mặt  $\sigma, \tau$  thì chắc chắn ta sẽ tìm thấy một điểm giới hạn về phía dương của trục  $\sigma$  tương ứng cho trạng thái kéo đều theo các phương mà khi đó vật liệu đã bắt đầu có biến dạng dẻo (h.7-27).



Hình 7-27

Thực hiện nhiều thí nghiệm khác với các trạng thái ứng suất khác nhau ta sẽ được các vòng Mo giới hạn, nghĩa là những vòng Mo tương ứng với trạng thái ứng suất đã bắt đầu có biến dạng dẻo. Đường bao là những vòng Mo đó được gọi là đường nội tại. Một cách gần đúng đường nội tại có thể xem như hai đường tiếp tuyến với hai vòng Mo giới hạn của trạng thái kéo đơn và nén đơn (h.7-28).



Hình 7-28

Giả sử một trạng thái ứng suất nào đó với  $\sigma_1$  và  $\sigma_3$  là một trạng thái giới hạn, nghĩa là vòng ứng suất tiếp xúc với đường nội tại tại C. Ta hãy tìm mối tương quan giữa  $\sigma_1$  và  $\sigma_3$  với các giới hạn chảy khi kéo và khi nén. Gọi A và B là các điểm tiếp xúc của các vòng tròn giới hạn khi kéo và nén với đường nội tại. Kẻ các đường song song với trục hoành từ A và từ C. Các đường đó cắt  $O_2B$  tại K và l. Từ điều kiện đồng dạng của tam giác ta có :

$$\frac{Bl}{BK} = \frac{Cl}{AK}$$

Nếu gọi  $v$  là tỉ số giữa  $\sigma_{ch}$  khi kéo và  $\sigma_{ch}$  khi nén, sau khi tính các độ dài  $Bl$ ,  $BK$ ,  $Cl$ ,  $AK$  và thay vào trên ta được :

$$\sigma_1 - v\sigma_3 = \sigma_{ch}^+$$

Như vậy để đạt được điều kiện vừa bền vừa an toàn ta phải có :

$$\sigma_1 - v\sigma_3 \leq [\sigma] \tag{7-35}$$

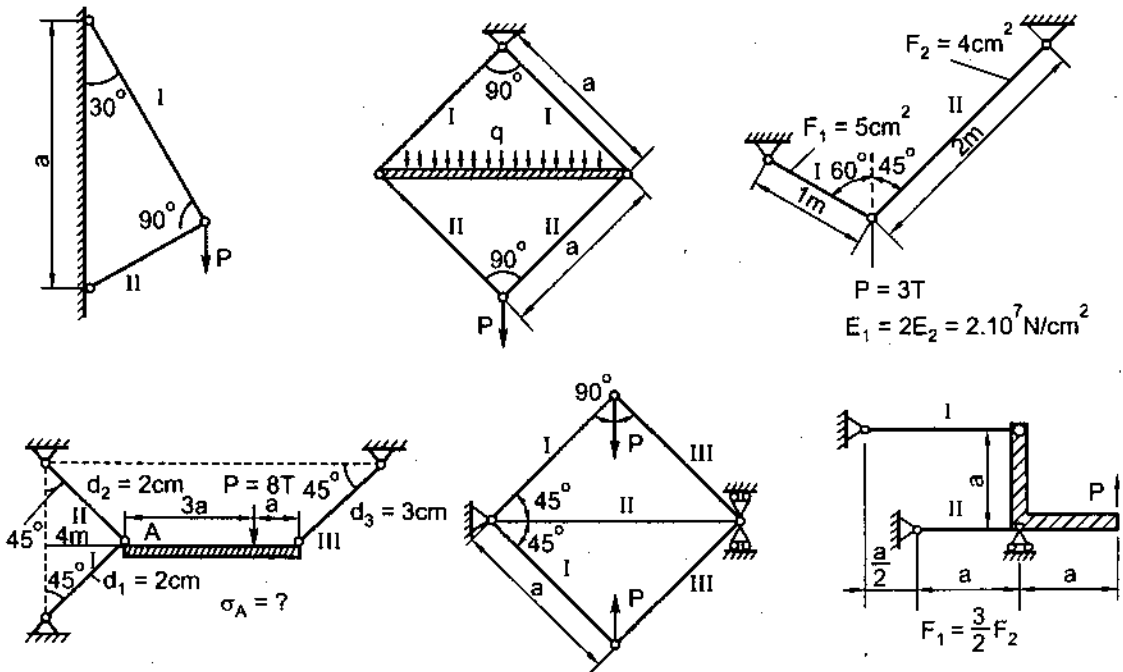
trong đó

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{ch}^+}{n}$$

Ta nhận thấy ngay khi  $v = 1$  thì thuyết bền của Mo trùng với thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất. Thuyết bền này được áp dụng rộng rãi đối với vật liệu giòn vì vật liệu này có giới hạn bền khi kéo và khi nén khác nhau.

### Bài tập

7.1. Tính nội lực trong các thanh giằng I, II của các hệ chịu lực như trong hình vẽ.



Hình 7-29

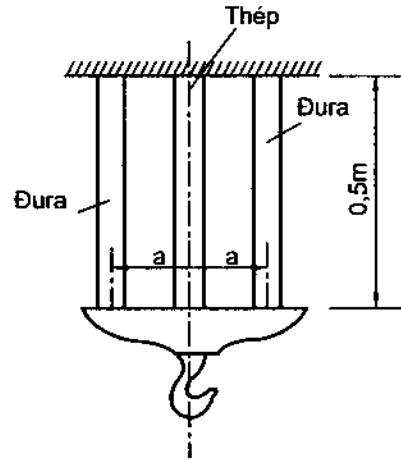
7.2. Một cái móc treo trọng lượng 42 kN như trên hình 1-55. Thanh treo ở giữa bằng thép, có mặt cắt ngang hình chữ nhật kích thước 0,5cm × 2cm. Các thanh bên bằng Đura, có mặt cắt ngang hình chữ nhật kích thước 1,5cm × 2cm.

Xác định ứng suất và biến dạng của các thanh treo.

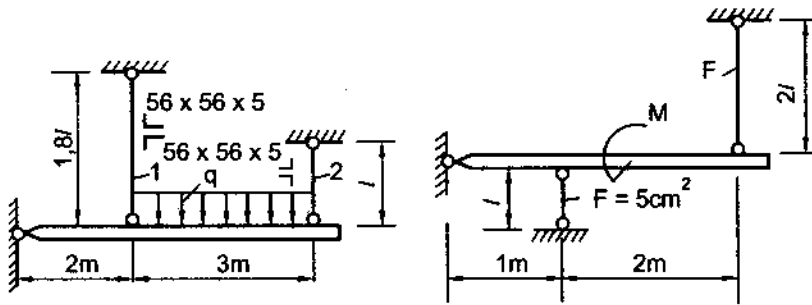
Cho :  $E_{th} = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ ,  $E_{Đura} = 0,7.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

7.3. Dầm tuyệt đối cứng được giữ bởi các thanh treo bằng thép có giới hạn chảy  $\sigma_{ch} = 24 \text{ kN/cm}^2$ .

Xác định giá trị cho phép của tải trọng tác dụng lên dầm. Hệ số an toàn  $n = 1,6$  môđun đàn hồi của thép :  $E = 2.10^4 \text{ kN/cm}^2$ .

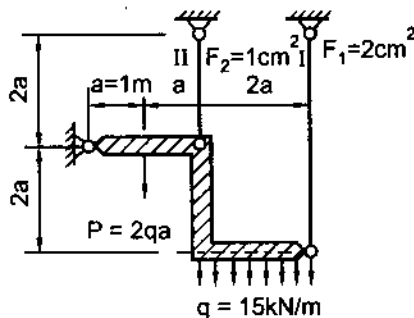


Hình 7-30

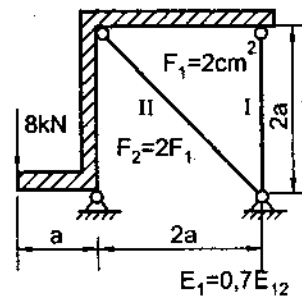


Hình 7-31

7.4. Tính ứng suất pháp trong các dây treo I, II của các hệ chịu lực như hình vẽ.

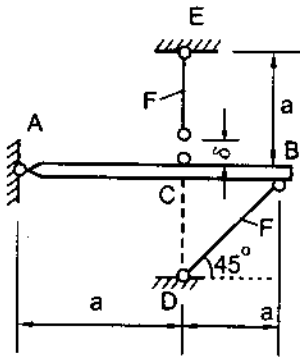


Hình 7-32

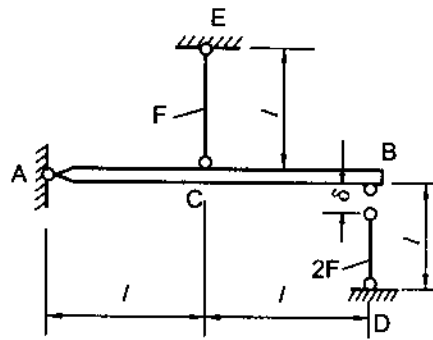


Hình 7-33

- 7.5. Xác định  $[\delta]$  sao cho ứng suất trong các thanh BD và CE không vượt quá ứng suất cho phép  $[\tau]$ . Giả thiết AB là tuyệt đối cứng và các thanh đều cùng một loại vật liệu có môđun đàn hồi E.

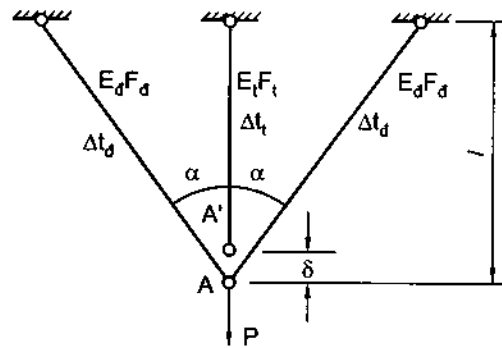


Hình 7-34



Hình 7-35

- 7.6. Một hệ thống gồm ba thanh, hai thanh bên bằng đồng có độ cứng chống kéo  $E_d F_d$ , thanh giữa bằng thép có độ cứng chống kéo  $E_t F_t$ , treo một trọng lượng P. Thanh giữa ngắn hơn chiều dài cần thiết một đoạn nhỏ  $\delta$ . Khi lắp xong hệ thống và đặt lực các thanh còn bị tăng nhiệt độ lên là  $\Delta t_d$  đối với thanh bằng đồng,  $\Delta t_t$  đối với thanh bằng thép. Hệ số giãn nở của đồng và của thép là  $\alpha_d, \alpha_t$ . Tính nội lực ở các thanh hình 7-36.



Hình 7-36

- 7.7. Một bulông bằng thép dùng để ghép 2 ống đũa có vòng đệm bằng đồng ở giữa. Lực kéo trước trong bulông bằng  $N_0 = 20\text{kN}$ . Tính ứng suất trong bulông và trong ống đũa khi nhiệt độ tăng lên  $\Delta t = 20^\circ\text{C}$  (h.7-37).

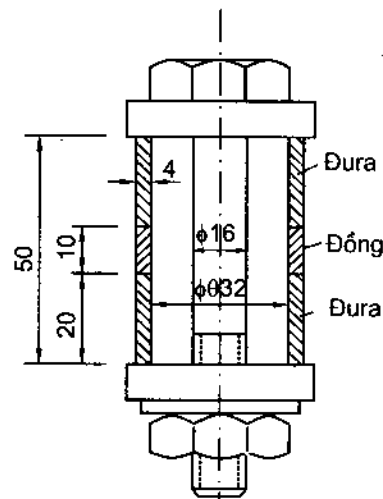
Hai tấm đệm ở đầu hai ống đũa được coi là tuyệt đối cứng.

Hệ số giãn nở :

$$\alpha_{\text{đũa}} = 22,5 \cdot 10^{-6};$$

$$\alpha_d = 16,5 \cdot 10^{-6};$$

$$\alpha_{\text{th}} = 12,5 \cdot 10^{-6}$$



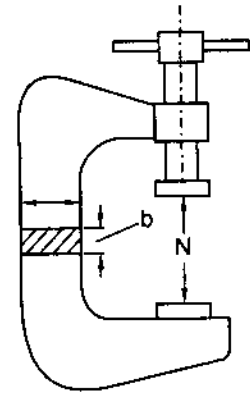
Hình 7-37

$$E_{\text{đuyra}} = 0,7 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2};$$

$$E_{\text{đồng}} = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2};$$

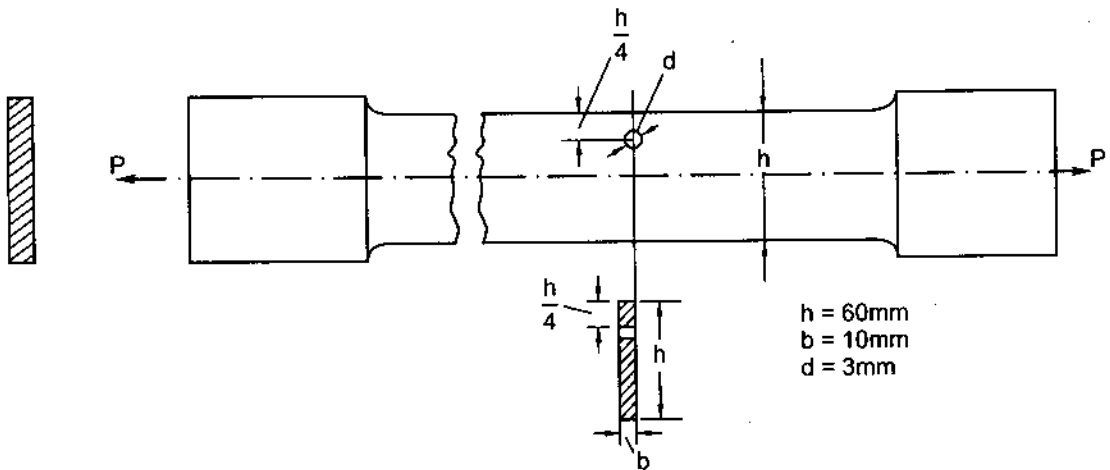
$$E_{\text{thép}} = 2 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

- 7.8. Một dụng cụ để kẹp có dạng như hình vẽ. Thân dụng cụ có mặt cắt ngang là hình chữ nhật với kích thước như sau :  $h = 15\text{mm}$ ,  $b = 5\text{mm}$ ,  $e = 50\text{mm}$ . Ứng suất cho phép của vật liệu là  $[\sigma] = 160 \text{ MN/cm}^2$ . Tính lực ép  $N$  lớn nhất có thể đạt được.



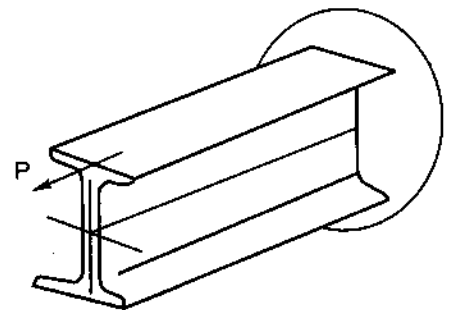
Hình 7-38

- 7.9. Một thanh thép có mặt cắt ngang hình chữ nhật (h.7-39), chịu tác dụng một lực  $P$  theo chiều trục. Sau đó thanh bị khoan thủng một lỗ nhỏ với đường kính  $d$  như hình vẽ. Tính lại trị số lực  $[P]$  cho phép. Cho biết  $[\sigma] = 1600 \text{ kg/cm}^2$ .



Hình 7-39

- 7.10. Một thanh sắt định hình hình chữ I số hiệu  $N^{\circ}10$  được ngàm chặt vào tường và chịu một lực song song với đường trục như hình 7-40. Tính lực kéo cho phép tối đa của thanh.  $[\sigma] = 1600 \text{ kG/cm}^2$ .



Hình 7-40

## Chương 8

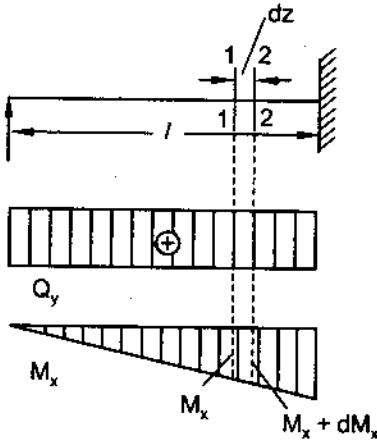
# BÀI TOÁN UỐN NGANG PHẪNG

### §8-1. CÔNG THỨC CỦA ỨNG SUẤT TIẾP

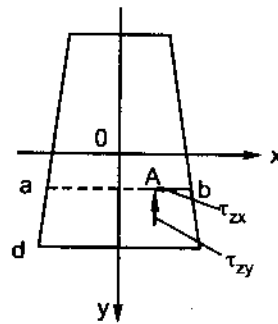
Xét dầm chịu uốn như hình 8-1. Qua các biểu đồ nội lực ta nhận thấy trên mọi mặt cắt ngang đều có hai thành phần  $Q_y$  và  $M_x$ .

Giả sử dầm có một mặt đối xứng và tải trọng cũng nằm trong mặt đối xứng của dầm. Với cách chịu lực như vậy ta gọi là dầm *chịu uốn ngang phẳng* vì trục võng của dầm là một đường cong phẳng.

Ví dụ mặt cắt ngang của dầm có hình dáng như hình 8-2. Tại một điểm A nào đó trên mặt cắt phải có cả thành phần ứng suất pháp  $\sigma_z$  do mômen uốn gây nên và ứng suất tiếp do lực cắt gây nên. Ứng suất tiếp được phân thành hai phần :  $\tau_{zy}$  và  $\tau_{zx}$ .



Hình 8-1



Hình 8-2

Bằng một phương pháp nào đó ta có thể xác định được  $\tau_{zy}$  thì cũng với phương pháp đó ta có thể xác định được  $\tau_{zx}$ . Do đó, ở đây ta chỉ cần trình bày cách xác định  $\tau_{zy}$ . Mặt khác, trong một số trường hợp cụ thể của thực tế mà ta sẽ trình bày dưới đây, thành phần  $\tau_{zx}$  là rất bé có thể bỏ qua được.

Để xác định  $\tau_{zy}$  ta hãy tách ra khỏi thanh một phân tố bằng các mặt cắt như sau :

- Hai mặt cắt ngang (1 - 1) và (2 - 2) rất gần nhau cách nhau một khoảng dz. Nội lực trên mặt cắt (1 - 1) là  $M_x$  và  $Q_y$ . Nội lực trên mặt cắt (2 - 2) là  $M_x + dM_x$  và  $Q_y$ .

- Một mặt cắt qua A vuông góc với  $\tau_{zy}$ .

Phân tố được biểu diễn như trên hình 8-3. Trên phân tố đó mặt *abcd* là phần mặt cắt (1 - 1) và *efgh* là phần của mặt cắt (2 - 2). Hai phần mặt cắt này có diện tích như nhau và được kí hiệu là  $F_{cắt}$ . Xét các lực tác dụng lên phân tố.



Trên các mặt  $abcd$  và  $efgh$  có các hợp lực do ứng suất pháp  $\sigma_{z1}$  và  $\sigma_{z2}$  gây nên. Các lực này có phương song song với trục  $z$ .

Vì định luật đối xứng nên trên mặt  $abfe$  có hệ ứng suất tiếp  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ . Hệ ứng suất này tạo nên lực song song với trục  $z$ . Nếu xem  $\tau_{zy}$  là phân bố đều theo chiều dài  $b_{\text{cắt}}$  của  $ab$  thì trị số của lực là  $\tau_{yz} dz b_{\text{cắt}}$ .

Vấn đề đặt ra là phải tính  $\sigma_{z1}$  và  $\sigma_{z2}$ .

Ta biết rằng vì có ứng suất tiếp nên mặt cắt ngang không còn phẳng nữa vậy công thức ứng suất pháp như phần trên ta đã xác định là không còn đúng nữa, song vì biến dạng là vô cùng bé nên ta thừa nhận rằng : ngay cả trong trường hợp này công thức đó vẫn đúng. Vậy ta có :

$$\sigma_{z1} = \frac{M_x}{J_x} y ; \quad \sigma_{z2} = \frac{M_x + dM_x}{J_x} y \quad (1)$$

Xét điều kiện cân bằng của phần tử. Chiều tất cả các lực lên phương của trục  $z$  ta có :

$$\int_{F_{\text{cắt}}} \sigma_{z1} dF - \int_{F_{\text{cắt}}} \sigma_{z2} dF + \tau_{yz} dz b_{\text{cắt}} = 0 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) với chú ý rằng  $\frac{dM_x}{dz} = Q_y$  và biểu thức tích phân  $\int_{F_{\text{cắt}}} y dF$  là mômen tĩnh của diện tích  $F_{\text{cắt}}$  đối với trục  $x$  kí hiệu là  $S_x^{\text{cắt}}$  ta có :

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{Q_y S_x^{\text{cắt}}}{J_x b_{\text{cắt}}} \quad (8-1)$$

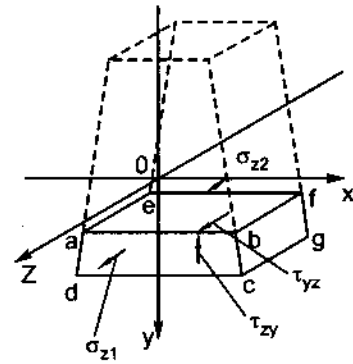
Công thức đó được gọi là công thức Durápxki.

Ta xét một số trường hợp cụ thể thường gặp trong thực tế :

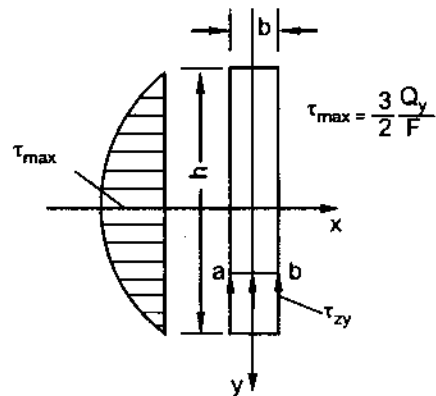
### 1. Mặt cắt hình chữ nhật hẹp

Ta gọi mặt cắt chữ nhật hẹp là khi chiều cao lớn hơn bề rộng nhiều lần  $\left(\frac{h}{b} \geq 5\right)$  (h.8-4).

Xét sự phân bố ứng suất trên đường  $ab$  song song với trục  $x$  và có tung độ  $y$ . Tại các điểm  $a$  và  $b$  thành phần ứng suất  $\tau_{zx}$  phải bằng không vì  $\tau_{xz} = 0$  (mặt ngoài của thanh không chịu lực) (h.8-5). Vậy tại đó  $\tau_{zy}$  là ứng suất toàn phần.



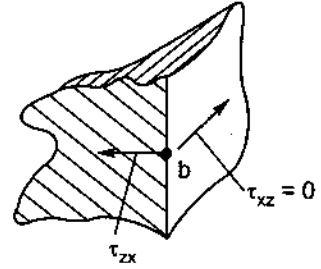
Hình 8-3



Hình 8-4

Vì lí do đối xứng ứng suất tiếp tại i, điểm đối xứng của mặt cắt, cũng phải có phương của y, vậy ta có thể giả thiết ứng suất tiếp ở mọi nơi trên đường ab có phương song song với y và phân bố đều theo ab.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } S_x^{\text{cắt}} &= b \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( \frac{h}{2} + y \right) \frac{1}{2} \\ b_{\text{cắt}} &= b; J_x = \frac{bh^3}{12} \end{aligned}$$



Hình 8-5

Thay vào công thức của Durápxki ta được :

$$\tau_{zy} = \frac{6Q_y}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (8-2)$$

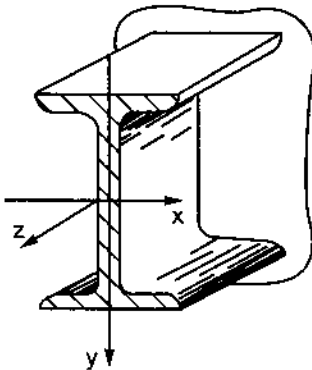
Ứng suất tiếp lớn nhất là tại các điểm trên đường trung hòa ( $y = 0$ )

$$\tau_{zy} = \tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{F} \quad (8-3)$$

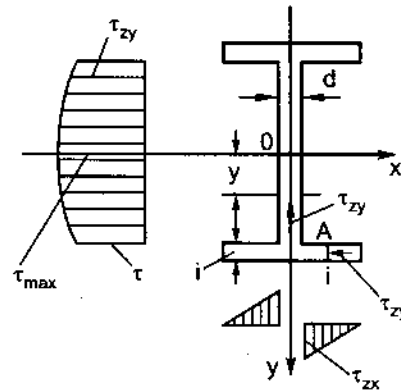
## 2. Mặt cắt hình chữ I

Giả sử dầm có mặt cắt ngang hình dáng chữ I như trên hình 8-6. Để đơn giản, người ta thường xem hai đế của mặt cắt là hai hình chữ nhật hẹp nằm ngang và phần lòng là một hình chữ nhật hẹp đặt thẳng đứng (h.8-7).

Các loại thép dẹt định hình thường được sản xuất theo tiêu chuẩn và vì vậy thép đã có sẵn các đặc trưng về hình học của mặt cắt ngang. Các đặc trưng đó được cho trong các phụ lục ở cuối sách. Trong đó có trị số của mômen tĩnh  $S_x$  của một nửa mặt cắt đối với trục x.



Hình 8-6



Hình 8-7

Cũng như đối với hình chữ nhật hẹp,  $\tau_{zy}$  tại ab là ứng suất tiếp toàn phần. Trị số của nó được tính với công thức của Durápxki, trong đó  $S_x^{\text{cắt}}$  được tính với biểu thức :

$$S_x^{\text{cắt}} = S_x - \frac{dy^2}{2}$$

và  $b_{\text{cát}} = d$ .

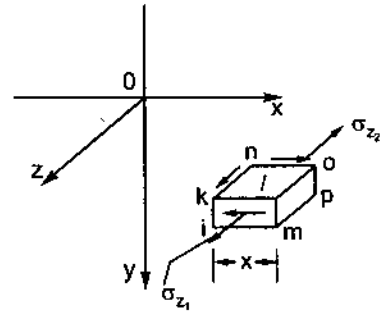
Vậy :

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y \left( S_x - \frac{d}{2} y^2 \right)}{J_x d} \quad (8-4)$$

Các trị số  $\tau_{\text{max}}$  và  $\tau_1$  là :

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_y S_x}{J_x d} \quad (8-5)$$

$$\tau_1 = \frac{Q_y \left[ S_x - \frac{d}{2} \left( \frac{h}{2} - t \right)^2 \right]}{J_x d} \quad (8-6)$$



Hình 8-8

Cùng cách lập luận như ở trên ta thấy ở đây chỉ có thành phần  $\tau_{zx}$ . Để tính  $\tau_{zx}$  ta dùng mặt cắt thứ ba ik vuông góc với  $\tau_{zx}$  (h.8-8).

Mômen tĩnh  $S_x^{\text{cát}}$  là mômen tĩnh của diện tích iklm đối với trục x. Trị số mômen tĩnh đó là :

$$S_x^{\text{cát}} = tx \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

Chiều dài  $b_{\text{cát}}$  là bằng chiều rộng của đế  $b_{\text{cát}} = t$ . Vậy :

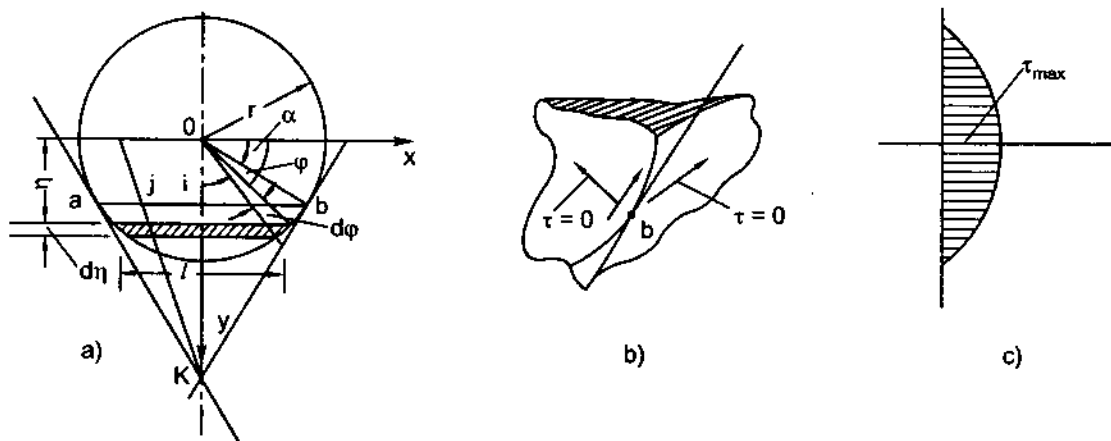
$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \frac{Q_y (h - t)}{2J_x} x \quad (8-7)$$

Biểu đồ phân bố của chúng được biểu diễn như trên hình 8-7. Ta không xét ứng suất tiếp ở phần giao giữa lòng và đế.

### 3. Mặt cắt tròn

Ta hãy xét phương của ứng suất tiếp tại các điểm trên một đường ab song song với trục Ox. Tại a và b phương của ứng suất tiếp phải là phương của các đường tiếp tuyến tại đó (h.8-9). Thực vậy, giả dụ phương của ứng suất tiếp tại đó là bất kì, ta có thể phân thành hai thành phần : một thành phần vuông góc với tiếp tuyến và thành phần thứ hai song song với tiếp tuyến. Theo định luật đối ứng, ứng suất tiếp ở mặt ngoài bằng không (h.8-9b) nên thành phần vuông góc với tiếp tuyến bằng không. Vậy ứng suất tiếp toàn phần phải hướng theo đường tiếp tuyến.

Vì lí do đối xứng nên ta suy được phương của ứng suất tiếp tại i, giao điểm của trục tung và đường ab là phương của trục y. Gọi K là giao điểm của hai đường tiếp tuyến qua a và b. Ta thừa nhận rằng ứng suất tiếp tại một điểm bất kì nào đó trên ab đều có phương đi qua K và thành phần  $\tau_{zy}$  phân bố đều trên ab. Vậy  $\tau_{zy}$  được tính bởi công thức của Durapxki.



Hình 8-9

Mômen tĩnh của phần diện tích  $F_{\text{cát}}$  đối với trục  $x$  là như sau :

$$S_x^{\text{cát}} = \int_{F_{\text{cát}}} \eta dF = \int_y^r \eta / d\eta$$

Các kí hiệu được biểu diễn như trên hình 8-9.

Thay biến số. Ta có :

$$\eta = r \sin \varphi$$

$$d\eta = r \cos \varphi d\varphi$$

$$b = 2r \cos \varphi$$

Vậy :

$$S_x^{\text{cát}} = -2r^3 \int_{\alpha}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d(\cos \varphi)$$

$$S_x^{\text{cát}} = \frac{2r^3 \cos^3 \alpha}{3}$$

Từ đó ta có :

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y r^2 \cos^2 \alpha}{3J_x}$$

Trị số  $\cos^2 \alpha$  có thể viết lại dưới dạng :

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{y^2}{r^2}$$

Vậy :

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{3J_x} (r^2 - y^2) \quad (8-8)$$

Biểu đồ của  $\tau_{zy}$  được biểu diễn như trên hình 8-9c. Tại các điểm nằm trên trục trung hòa  $Ox$ , trị số ứng suất tiếp là lớn nhất. Khi đó điểm  $K$  chạy ra vô cùng nên có thể xem  $\tau_{zy}$  như trị số ứng suất tiếp toàn phần.

$$\tau_{\text{max}} = \frac{Q_y r^2}{3J_x} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_y}{F} \quad (8-9)$$

## §8-2. ĐIỀU KIỆN BỀN

Ta nhận thấy khi dầm chịu uốn ngang phẳng trên mỗi mặt cắt trạng thái ứng suất ở mỗi nơi là khác nhau. Do đó ta phải chọn ba điểm nguy hiểm trong dầm để kiểm tra bền.

a) Nơi có trạng thái ứng suất đơn với  $\sigma_{\max}$  điều kiện bền sẽ là :

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

Nếu là vật liệu giòn và mặt cắt không đối xứng qua trục x thì ta phải xét cả miền nén. Nghĩa là :

$$|\sigma_{\min}| \leq [\sigma]^- \text{ và } \sigma_{\max} \leq [\sigma]^+$$

b) Nơi có trạng thái trượt thuần túy  $\tau_{zy} = \tau_{\max}$ . Sử dụng các công thức (7-32) và (7-34) với chú ý là  $\sigma_1 = \tau$  và  $\sigma_3 = -\tau$  ta có điều kiện bền là :

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{2} \text{ theo thuyết bền U.S.T.L.N} \quad (8-10)$$

và

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \text{ theo thuyết bền T.N.B.Đ.H.D} \quad (8-11)$$

c) Điểm thứ ba là một điểm có cả ứng suất pháp và ứng suất tiếp. Tại đây trạng thái ứng suất là trạng thái ứng suất phẳng. Điều kiện bền tính theo (7-32) và (7-33) với chú ý :

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Ta sẽ được : Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8-12)$$

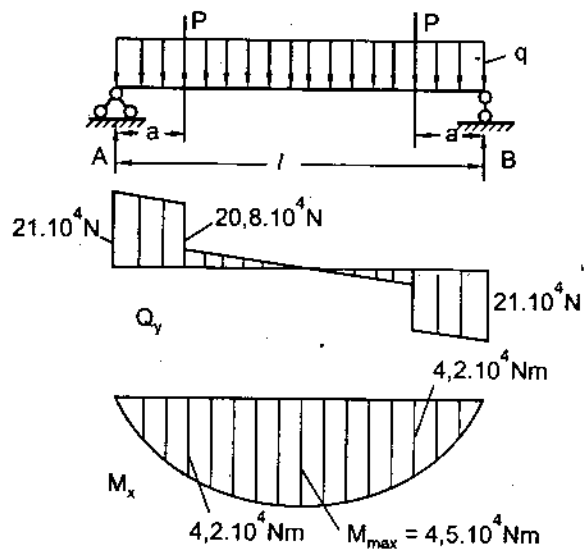
Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (8-13)$$

Kí hiệu  $\sigma_{td}$  là để chỉ ứng suất tương đương.

**Ví dụ :** Kiểm tra bền dầm có mặt cắt ngang hình chữ I số hiệu 36 chịu lực như trên hình 8-10.

Chiều dài của dầm  $l = 2\text{m}$ , cường độ tải trọng phân bố đều  $q = 10 \text{ kN/m}$  ; lực tập trung  $P = 200 \text{ kN}$ ,  $a = 0,2\text{m}$ . Cho biết  $[\sigma] = 15 \text{ kN/cm}^2$ .



Hình 8-10

### Bài giải

Biểu đồ mômen uốn  $M_x$  và lực cắt  $Q_y$  được biểu diễn như trên hình 8–10b.

#### 1. Kiểm tra phân tố ở trạng thái ứng suất đơn

Phân tố đó được chọn trên mặt cắt có mômen uốn lớn nhất, đó là mặt cắt ở giữa dầm. Tại đó ta có  $M_{\max} = 4,5 \text{ kNm}$ . Vậy trị số ứng suất pháp là :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{4500}{734} = 6,05 \text{ kN/cm}^2$$

Ta thấy  $\sigma_{\max} < [\sigma]$

#### 2. Kiểm tra phân tố ở trạng thái trượt thuần túy

Phân tố đó phải được chọn trên mặt cắt có lực cắt lớn nhất. Đó là mặt cắt tại các gối tựa :  $Q_{\max} = 210 \text{ kN}$ .

Ta có :

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x}{J_x d} = \frac{210.423}{13380.0,75} = 8,85 \text{ kN/cm}^2$$

Trị số của ứng suất tiếp cho phép tính theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng lớn nhất là :

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 8,66 \text{ kN/cm}^2$$

So sánh ta thấy  $\tau_{\max}$  vượt quá  $[\tau]2\%$ . Điều đó là cho phép.

#### 3. Kiểm tra với phân tố ở trạng thái ứng suất phẳng

Mặt cắt cần chọn là nơi có trị số mômen uốn và lực cắt đồng thời có trị số đáng kể. Ta chọn ngay mặt cắt ở gần điểm đặt lực tập trung. Tại đó ta có  $Q_y = 2080 \text{ kN}$  và  $M_x = 42 \text{ kNm}$ .

Phân tố được chọn trên mặt cắt là phân tố tại điểm K (h.7–25) tiếp giáp giữa lòng và đế. Tại đó ta có :

$$\sigma_k = \frac{420}{13380} (0,18 - 1,2) = 5,2 \text{ kN/cm}^2$$

$$\tau_k = \frac{2080.318,4}{13380.0,75} = 6,5 \text{ kN/cm}^2$$

trong đó :

$$S_x^{\text{cắt}} = S_x - y_k d \frac{y_k}{2} = 423 - 16,77.0,75. \frac{16,77}{2} = 318,4 \text{ cm}^3$$

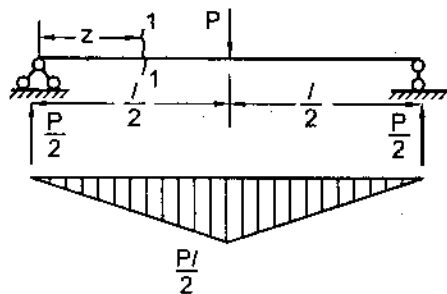
Kiểm tra theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng ta có :

$$\sigma_{\text{id}} = \sqrt{\sigma_k^2 + 3\tau_k^2} = \sqrt{(5,2)^2 + 3.6,5^2} = 12,5 \text{ kN/cm}^2$$

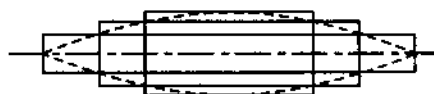
Ứng suất tương đương nhỏ hơn ứng suất cho phép vậy dầm đủ bền.

### §8-3. DÂY CHỐNG UỐN ĐỀU VÀ DÂY CÓ MẶT CẮT HỢP LÍ

Trong trường hợp dây có mặt cắt ngang không đổi, ta đã chọn kích thước của dây theo mặt cắt có mômen uốn lớn nhất. Cách sử dụng vật liệu như vậy chưa hợp lý với ứng suất tại những điểm nguy hiểm trên các mặt cắt khác còn nhỏ hơn rất nhiều so với ứng suất cho phép. Như vậy ta chưa sử dụng hết khả năng chịu lực của vật liệu ở các mặt cắt khác. Để tiết kiệm được vật liệu ta phải tìm hình dáng hợp lý của dây sao cho ứng suất tại những điểm nguy hiểm trên mọi mặt cắt ngang đều cùng đạt đến giá trị ứng suất cho phép. Dây cho hình dáng như vậy gọi là dây chống uốn đều. Ta xét vài ví dụ cụ thể sau đây :



Hình 8-11



Hình 8-12

Giả sử ta có dây chịu lực như trên hình 8-12. Trị số mômen uốn và lực cắt trên mặt cắt ngang (1 - 1) là :

$$M_x = \frac{P}{2} z$$

$$Q_y = \frac{P}{2}$$

Giả sử thanh có mặt cắt ngang là tròn, như vậy trị số của ứng suất pháp lớn nhất trên mặt cắt là :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{P.z}{0,1d^3}$$

Muốn ứng suất đó trên mọi mặt cắt cùng đạt đến  $[\sigma]$  một lúc thì luật biến thiên của đường kính  $d$  theo  $z$  là như sau :

$$d = \sqrt[3]{\frac{Pz}{0,1[\sigma]}}$$

Như vậy hình dáng của thanh phải có dạng đường nét đứt như trên hình 8-12.

Ta thấy tại hai đầu mút, mặt cắt có diện tích bằng không, điều đó hoàn toàn phù hợp với điều kiện biến thiên của mômen uốn, song không thỏa mãn điều kiện bền của lực cắt  $Q_y$  vì ứng suất tiếp cực đại tại đó phải có trị số là :

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{F} \leq [\tau]$$

Nghĩa là đường kính ít nhất cũng phải bằng :

$$d = d_1 \sqrt{\frac{4}{3} \frac{Q_y}{[\tau]\pi}}$$

Trong thực tế người ta thường chế tạo các trục bậc, nghĩa là đường kính của các mặt cắt thay đổi từng đoạn gắn sát với đường chống uốn đều.

Các lò xo có sơ đồ chịu lực như trên hình 8-13 thường được ghép bởi các thép lá và có hình dáng dầm chống uốn đều (h.6-13b) ; với hình dáng đó lò xo có trọng lượng nhỏ và chuyển vị lớn : loại lò xo này thường dùng làm nhíp của các trục bánh xe.

Qua biểu đồ ứng suất pháp và ứng suất tiếp trên một mặt cắt ngang khi dầm chịu uốn ngang phẳng ta thấy phần vật liệu ở xa trục trung hòa chủ yếu chịu uốn, phần vật liệu ở gần trục trung hòa chủ yếu chịu cắt. Như vậy để tăng khả năng chịu uốn thì ta phải đưa vật liệu ra tăng cường cho miền xa đường trung hòa nghĩa là tìm cách tăng  $W_x$ .

Đối với vật liệu giòn vì giới hạn cho phép khi kéo và khi nén khác nhau trên mặt cắt ngang hợp lí là khi trọng tâm của mặt cắt thiên lệch về phía chịu kéo. Ta phải có :

$$\frac{|M_x|}{J_x} y_{\max}^+ = [\sigma]_k$$

$$\frac{|M_x|}{J_x} y_{\max}^- = [\sigma]_n$$

Hay

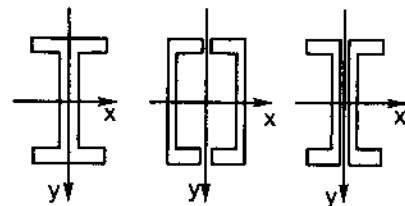
$$\frac{y_{\max}^+}{y_{\max}^-} = \frac{[\sigma]_k}{[\sigma]_n}$$

Đối với vật liệu dẻo ta xem như  $[\sigma]_k = [\sigma]_n$  nghĩa là trọng tâm phải nằm giữa mặt cắt để đạt điều kiện :

$$y_{\max}^+ = y_{\max}^-$$

Vì vậy hình dáng mặt cắt ngang hợp lí khi chịu uốn đối với vật liệu dẻo là những loại mặt có hình chữ I hay chữ [ ghép như trên hình 8-14.

Để đánh giá mức độ tiết kiệm nguyên vật liệu của các loại hình dáng khác nhau người ta thường dùng tỉ số  $W_x/\sqrt{F^3}$  để so sánh.  $W_x$  là mômen chống uốn và  $F$  là diện tích mặt cắt ngang. Hình dáng mặt cắt nào có tỉ số đó cao hơn thì càng hợp lí hơn.



Hình 8-14



Ta lấy một vài ví dụ sau đây :

Với mặt cắt ngang hình tròn  $\frac{W_x}{\sqrt{F^3}} = 0,14$

Với mặt cắt hình chữ nhật  $\frac{W_x}{\sqrt{F^3}} = 0,167$

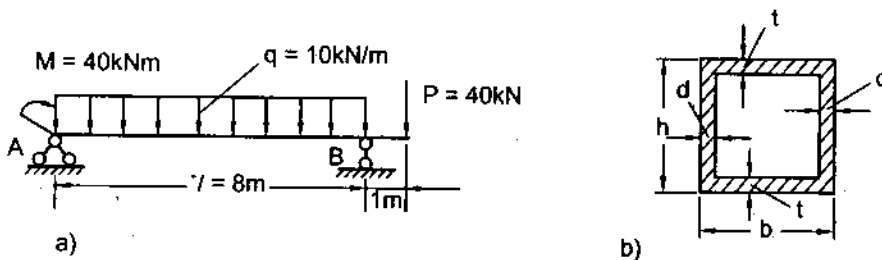
Với mặt cắt hình vành khăn  $\frac{W_x}{\sqrt{F^3}} = 0,73 \div 0,81$

Với mặt cắt hình chữ [  $\frac{W_x}{\sqrt{F^3}} = 0,57 \div 1,35$

Với mặt cắt hình chữ I  $\frac{W_x}{\sqrt{F^3}} = 1,02 \div 1,51$

### Bài tập

- 8.1. Dầm có mặt cắt ngang là hình chữ nhật thành mỏng kín với  $h = 33 \text{ cm}$ ,  $b = 30 \text{ cm}$ ,  $t = 1,5 \text{ cm}$ ,  $d = 2 \text{ cm}$  chịu tải trọng như trên hình 8.15a. Vẽ biểu đồ ứng suất pháp và biểu đồ ứng suất tiếp ở những mặt cắt có nội lực tương ứng lớn nhất của mặt cắt ngang trên hình (h.8-15b).

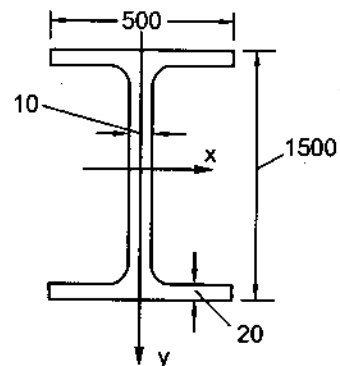


Hình 8-15

- 8.2. Một dầm dài  $l = 12 \text{ m}$  có mặt cắt ngang hình chữ I là sự ghép của ba tấm phẳng : hai đế có chiều dày là  $20 \text{ mm}$  và tấm xương có chiều dày là  $10 \text{ mm}$ . Dầm được đặt lên hai gối tựa đơn và chịu tác dụng của tải trọng  $q = 160 \text{ kN/m}$  phân bố đều dọc theo chiều dài của dầm.

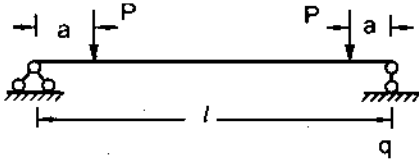
Cho  $[\sigma] = 21 \text{ kN/cm}^2$ ,  $[\tau] = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

Kiểm tra độ bền của dầm.

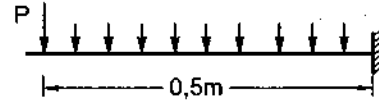


Hình 8-16

- 8.3. Một dầm chịu lực như trên hình 8.17.  $P = 160\text{kN}$ ,  $a = 0,35\text{m}$ . Chọn mặt cắt chữ I. Cho biết  $[\sigma] = 16\text{ kN/cm}^2$ ,  $[\tau] = 10\text{ kN/cm}^2$ .



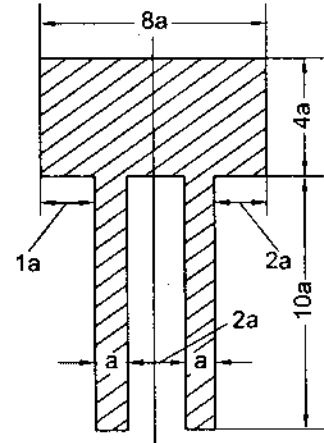
Hình 8-17



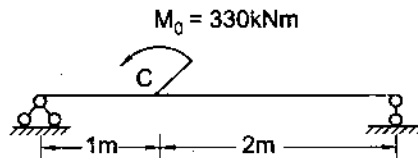
Hình 8-18

- 8.4. Cho dầm chịu lực như hình vẽ (h.8-18). Cho biết  $q = 2,2\text{ kN/m}$ ,  $P = 12\text{ kN}$ ,  $l = 0,5\text{m}$ . Xác định kích thước mặt cắt ngang của dầm khi dầm là tròn, vuông, chữ nhật và chữ I (tự chọn số liệu).

- 8.5. Cho dầm chịu lực như hình 8-19. Ứng suất cho phép khi kéo là  $[\sigma]_k = 9\text{ kN/cm}^2$ . Ứng suất cho phép khi nén là  $[\sigma]_m = 12\text{ kN/cm}^2$ . Kích thước và hình dáng của mặt cắt ngang được biểu diễn như hình 8-20. Dựa vào các ứng suất kéo và nén cho phép ở trên để chọn kích thước a của mặt cắt, sau đó kiểm tra lại theo điều kiện bên của ứng suất tiếp cho phép  $[\tau] = 4,5\text{ kN/cm}^2$ .



Hình 8-19



Hình 8-20

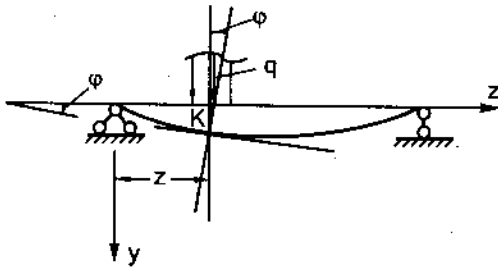
## Chương 9

# ĐƯỜNG ĐÀN HỒI

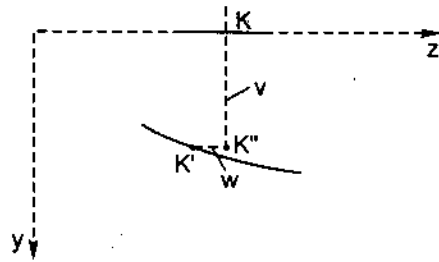
### §9-1. ĐỊNH NGHĨA

Đường cong của trục dầm, sau khi bị uốn được gọi là đường đàn hồi (h.9-1).

Gọi K là một điểm nào đó trên trục dầm, sau biến dạng K có một vị trí K' nào đó, độ dài KK' là chuyển vị của K. Chuyển vị đó có thể phân thành hai thành phần : thành phần theo phương y là v và thành phần theo z là w (h.9-2). Ở đây ta chỉ xét với bài toán phẳng, nghĩa là khi tải trọng đặt trong mặt yOz và do đó chuyển vị u theo phương x được xem là bằng không.



Hình 9-1



Hình 9-2

trong điều kiện biến dạng của dầm là bé, thành phần w là một số vô cùng bé bậc cao so với v, vì vậy ta có thể bỏ qua w và xem rằng vị trí của K sau biến dạng là trên đường thẳng vuông góc với trục thanh đi qua K và với chuyển vị là v. Chuyển vị v được gọi là độ võng tại K của dầm và nó là một hàm số đối với hoành độ z của các mặt cắt ngang. Như vậy phương trình của đường đàn hồi y(z) có thể viết là :

$$y(z) = v(z) \quad (1)$$

Trong kĩ thuật, khi tính toán dầm chịu uốn, người ta thường khống chế không cho độ võng lớn nhất của dầm vượt quá một giới hạn nhất định, điều kiện đó được gọi là điều kiện cứng. Nếu gọi f là độ võng lớn nhất của dầm thì điều kiện cứng thường chọn là :

$$\left[ \frac{f}{l} \right] = \frac{1}{100} \div \frac{1}{1000} \quad (2)$$

trong đó : l là chiều dài của dầm ; tùy loại công trình mà người ta quy định cụ thể trị số của  $\left[ \frac{f}{l} \right]$ .

Bây giờ nếu từ K' ta vẽ một đường thẳng tiếp tuyến với đường đàn hồi thì góc  $\varphi$  giữa đường tiếp tuyến đó với đường nằm ngang (h.9-1) là bằng góc giữa vị trí của mặt cắt ngang

qua điểm K trước và sau khi dầm bị biến dạng. Gọi  $\varphi$  là chuyển vị góc của mặt cắt hay là góc xoay. Ta nhận thấy rằng :

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi \approx y'(z) \quad (3)$$

Vậy đạo hàm của đường đàn hồi là góc xoay của mặt cắt khi dầm bị biến dạng.

## §9-2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA ĐƯỜNG ĐÀN HỒI

Trong chương 7 chúng ta đã thiết lập được liên hệ giữa độ cong của trục dầm sau khi biến dạng và mômen uốn, theo (7-17) thì :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

Mặt khác, độ cong của nó có thể tính với công thức :

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} \quad (4)$$

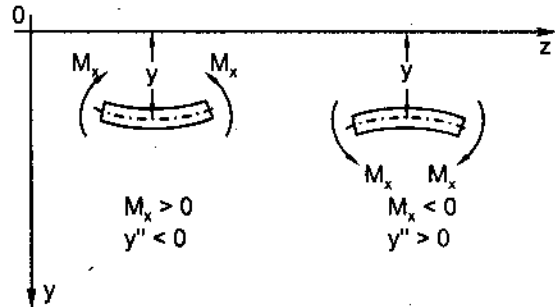
So sánh hai biểu thức đó ta có :

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \pm \frac{M_x}{EJ_x} \quad (5)$$

Đó là phương trình vi phân tổng quát của đường đàn hồi. Ta phải chọn dấu sao cho thỏa mãn hai vế của đẳng thức. Ta nhận thấy các mẫu số trong hai vế đều là những số dương, vậy ta chỉ cần chọn dấu sao cho phù hợp với các tử số. Ta khảo sát một đoạn dầm bị uốn cong trong hai trường hợp như ở các hình 9-3.

Từ hình vẽ, ta thấy giữa  $y''$  và  $M_x$  luôn luôn ngược dấu nhau cho nên phương trình vi phân của đường đàn hồi sẽ có dạng :

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = - \frac{M_x}{EJ_x} \quad (6)$$



Hình 9-3

Trong thực tế không cho phép các công trình hay chi tiết máy có chuyển vị lớn, vì thế, góc xoay cũng là bé và ta có thể bỏ qua  $y'^2$  so với 1.

Phương trình vi phân sẽ có dạng gần đúng như sau :

$$y'' = - \frac{M_x}{EJ_x} \quad (9-1)$$

trong đó tích số  $EJ_x$  được gọi là độ cứng của dầm khi uốn.

### §9-3. XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG ĐÀN HỒI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN KHÔNG ĐỊNH HẠN

Để có được phương trình đàn hồi ta chỉ cần tích phân (9-1) lên hai lần :

Phương trình của góc xoay sẽ là :

$$\varphi = y' = \frac{dy}{dz} = - \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C \quad (9-2)$$

trong đó C là hằng số tích phân.

Tích phân lần thứ hai ta được :

$$y = \int \left( - \int \frac{M_x}{EJ_x} dz + C \right) dz + D \quad (9-3)$$

Các hằng số tích phân được xác định từ các điều kiện liên kết và liên tục của dầm.

**Ví dụ 1 :** Viết phương trình độ võng và góc xoay của dầm chịu lực như hình 9-4.

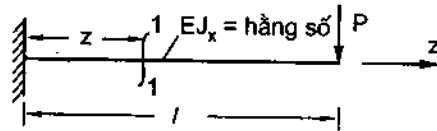
*Bài giải*

Biểu thức mômen uốn trên mặt cắt (1-1) là :

$$M_x = -P(l-z)$$

Vậy phương trình vi phân của đường đàn hồi có dạng :

$$y'' = + \frac{P(l-z)}{EJ_x}$$



Hình 9-4

Vì  $EJ_x$  là hằng số đối với  $z'$  lấy tích phân lần thứ nhất ta có :

$$\varphi = y' = \frac{Pl}{EJ_x} z - \frac{Pz^2}{2EJ_x} + C$$

Tích phân lần thứ hai ta được :

$$y = \frac{Pl}{6EJ_x} z^2 - \frac{Pz^3}{6EJ_x} + Cz + D$$

Các điều kiện liên kết của dầm được xác định như sau :

$$z = 0 ; y' = 0 ; y = 0$$

Từ các điều kiện đó ta tìm thấy dễ dàng :  $C = D = 0$

Vậy phương trình góc xoay và độ võng có dạng

$$\left. \begin{aligned} \varphi = y' &= \frac{Pl}{EJ_x} z - \frac{P}{2EJ_x} z^2 \\ y &= \frac{Pl}{6EJ_x} z^2 \left( 3 - \frac{z}{l} \right) \end{aligned} \right\}$$

Độ võng và góc xoay lớn nhất là tại đầu tự do. Tại đó ta có :

$$f_{\max} = \frac{Pl^3}{3EJ_x} ; \varphi_{\max} = \frac{Pl^2}{2EJ_x}$$

Độ võng hướng xuống dưới và góc xoay theo chiều kim đồng hồ.

**Ví dụ 2 :** Thiết lập phương trình độ võng và góc xoay của dầm đặt trên hai gối tựa chịu tải trọng phân bố  $q$  trên nhịp  $l$  (h.9-5). Độ cứng của dầm là không đổi.

*Bài giải*

Phương trình mômen uốn tại mặt cắt có hoành độ  $z$  là :

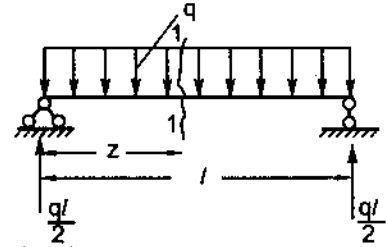
$$M_x = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2} \quad (1)$$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi là :

$$y'' = -\frac{q}{2EJ_x}(lz - z^2)$$

Tích phân hai lần ta được :

$$\left. \begin{aligned} \varphi = y' &= -\frac{q}{2EJ_x} \left( \frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right) + C \\ y &= -\frac{q}{2EJ_x} \left( \frac{lz^3}{6} - \frac{z^4}{12} \right) + Cz + D \end{aligned} \right\}$$



Hình 9-5

Các hằng số tích phân C và D được xác định từ các điều kiện liên kết của dầm :

Với  $z = 0$        $y = 0$

với  $z = l$        $y = 0$

Từ các điều kiện đó ta xác định được các hằng số tích phân như sau :

$$D = 0$$

$$C = \frac{ql^3}{24EJ_x}$$

Phương trình của góc xoay và độ võng là :

$$\varphi = y' = \frac{ql^3}{24EJ_x} \left( 1 - \frac{6z^2}{l^2} + \frac{4z^3}{l^3} \right)$$

$$y = \frac{ql^3}{24EJ_x} z \left( 1 - \frac{2z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3} \right)$$

Độ võng lớn nhất là tại giữa nhịp :

$$y_{\max} = f = \frac{5ql^4}{384EJ_x}$$

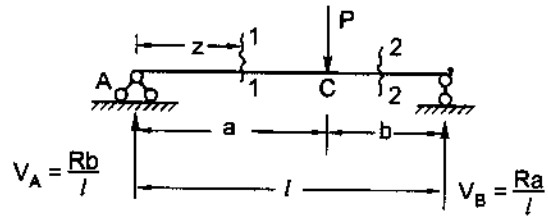
Góc xoay lớn nhất là tại các gối tựa :

$$y_{\max} = \varphi_{\max} = \pm \frac{ql^3}{24EJ_x}$$

**Ví dụ 3 :** Viết phương trình độ võng và góc xoay của dầm chịu lực như hình vẽ (h.9-6)

*Bài giải*

Ở đây ta nhận thấy phương trình của mômen uốn trong hai đoạn AC và CB biến thiên khác nhau, vì vậy các biểu thức của độ võng và góc xoay trong hai đoạn cũng khác nhau. Gọi  $z$  là hoành độ của các mặt cắt (1-1) và (2-2) trong các đoạn AC và CB. Mômen uốn trên các mặt cắt đó có trị số là :



**Hình 9-6**

$$M_x = \frac{Pb}{l}z \quad (0 \leq z \leq a) \quad (1)$$

$$M_x = \frac{Pb}{l}z - P(z - a) \quad (a \leq z \leq l) \quad (2)$$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi trong các đoạn đó là

$$y_1'' = -\frac{Pb}{lEJ_x}z \quad (3)$$

$$y_2'' = -\frac{Pb}{lEJ_x}z + \frac{P}{EJ_x}(z - a) \quad (4)$$

Tích phân liên tiếp hai lần các phương trình (3) và (4) ta được :

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= -\frac{Pb}{2EJ_x}z^2 + C_1 \\ y_1 &= -\frac{Pb}{6EJ_x}z^3 + C_1z + D_1 \end{aligned} \right\} (0 \leq z \leq a) \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} y_2' &= -\frac{Pb}{2EJ_x}z^2 + \frac{P}{2EJ_x}(z - a)^2 + C_2 \\ y_2 &= -\frac{Pb}{6EJ_x}z^3 + \frac{P}{6EJ_x}(z - a)^3 + C_2z + D_2 \end{aligned} \right\} (a \leq z \leq l) \quad (6)$$

Để xác định các hằng số tích phân  $C_1, D_1, C_2, D_2$  ta dựa vào các điều kiện biên sau đây :

tại  $z = 0$  thì  $y_1 = 0$  ;  $z = l$  thì  $y_2 = 0$  và với  $z = a$  thì  $y_1 = y_2$  và  $y_1' = y_2'$ .

Từ bốn điều kiện đó ta có :

$$D_1 = D_2 = 0$$

$$C_1 = C_2 = \frac{Pb}{6IEJ_x} (l^2 - b^2)$$

Do đó ta có các phương trình góc xoay và độ võng như sau :

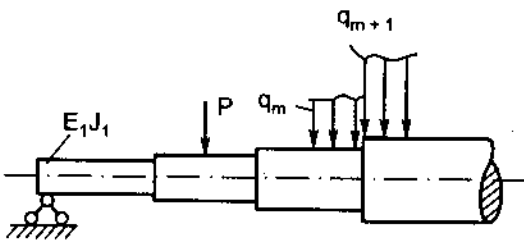
$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 = y_1' &= \frac{Pb}{IEJ_x} \left( \frac{l^2 - b^2}{6} - \frac{z^2}{2} \right) \\ y_1 &= \frac{Pb}{IEJ_x} \left( \frac{l^2 - b^2}{6} z - \frac{z^3}{6} \right) \end{aligned} \right\} (0 \leq z \leq a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2 = y_2' &= \frac{Pb}{IEJ_x} \left[ \frac{z^2}{2} - \frac{l(z-a)^2}{2b} - \frac{l^2 - b^2}{6} \right] \\ y_2 &= \frac{Pb}{IEJ_x} \left[ \frac{(z-a)^3 l}{6b} + \frac{l^2 - b^2}{6} z - \frac{z^3}{6} \right] \end{aligned} \right\} (a \leq z \leq l)$$

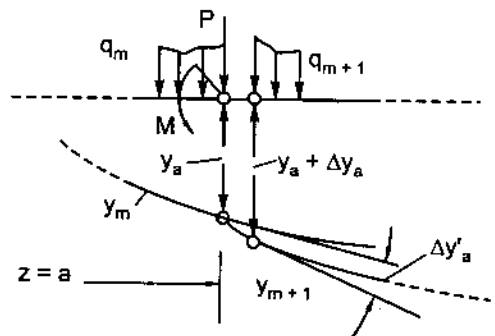
Qua ví dụ này, ta thấy rằng nếu trên dầm mômen uốn chia làm nhiều đoạn khác nhau thì phải thiết lập phương trình vi phân của đường đàn hồi cho nhiều đoạn khác nhau. Ở mỗi đoạn ta phải xác định hai hằng số tích phân. Nếu dầm có  $n$  đoạn thì phải xác định  $2n$  hằng số tích phân, tức là phải tìm  $2n$  phương trình với  $2n$  ẩn số. Bài toán trở nên phức tạp nếu số đoạn chịu lực khác nhau càng lớn, vì vậy phương pháp này ít dùng khi tải trọng phức tạp và dầm có nhiều mặt cắt thay đổi từng đoạn.

### §9-4. PHƯƠNG PHÁP THÔNG SỐ BAN ĐẦU

Xét một dầm có mặt cắt ngang thay đổi từng bậc trong từng đoạn như trên hình 9-7. Đánh số thứ tự các đoạn là 1, 2, 3...  $m$ ,  $m+1$ , ... $n$ . Gọi độ cứng của các đoạn là  $E_1J_1$ ...  $E_mJ_m$ ...  $E_nJ_n$ .



Hình 9-7



Hình 9-8



Giả sử xét hai đoạn kề nhau thứ  $m$  và  $m + 1$ . Để được tổng quát ta giả thiết tại chỗ nối giữa hai đoạn có lực tập trung, mômen tập trung, cường độ của tải trọng phân bố theo chiều dài  $q$  ở hai đoạn là khác nhau và có một liên kết đặc biệt làm cho độ võng và góc xoay tại đó có một bước nhảy  $\Delta y_a$  và  $\Delta y'_a$ . Liên kết đặc biệt đó trong sơ đồ tính toán được biểu diễn bằng hai khớp liên tiếp như trên hình 9-8a.

Đường đàn hồi của hai đoạn được biểu diễn như trên hình 9-8b. Tương tự kéo dài đường đàn hồi  $y_m(z)$  trong đoạn thứ  $m$  sang đoạn thứ  $m + 1$ . Như vậy đường đàn hồi  $y_{m+1}(z)$  trong đoạn thứ  $m + 1$  có thể tính với biểu thức :

$$y_{m+1}(z) = y_m(z) + \Delta y(z) \quad (1)$$

Khai triển  $\Delta y(z)$  theo chuỗi Taylo tại hoành độ  $z = a$ , ta có :

$$\Delta y(z) = \Delta y(a) + \frac{\Delta y'(a)}{1!}(z - a) + \frac{\Delta y''(a)}{2!}(z - a)^2 + \dots + \frac{\Delta y^{(5)}(a)}{5!}(z - a)^5 + \dots \quad (2)$$

trong đó :  $\Delta y(a)$  và  $\Delta y'(a)$  là bước nhảy của độ võng và góc xoay tại mặt cắt có hoành độ  $z = a$ .

$$\Delta y(a) = \Delta y_z$$

$$\Delta y'(a) = \Delta y'_a \quad (3)$$

Các hệ số của những số hạng khác có thể xác định như sau :

Đẳng thức (1) có thể viết lại dưới dạng :

$$\Delta y(z) = y_{m+1}(z) - y_m(z) \quad (4)$$

Lấy đạo hàm hai lần cả hai vế của (4) ta được :

$$\Delta y''(z) = y''_{m+1}(z) - y''_m(z) \quad (5)$$

Hay :

$$\Delta y''(z) = -\frac{M_{m+1}(z)}{E_{m+1}J_{m+1}} + \frac{M_m(z)}{E_m J_m} \quad (6)$$

trong đó  $M_{m+1}(z)$  và  $M_m(z)$  là phương trình của mômen uốn  $M_x$  trong đoạn  $m + 1$  và  $m$  đã kéo dài sang đoạn thứ  $m + 1$ .

Bây giờ ta chọn một độ cứng qui ước  $EJ$  nào đó sao cho

$$K_m = \frac{EJ}{E_m J_m} ; \quad K_{m+1} = \frac{EJ}{E_{m+1} J_{m+1}}, \dots$$

thì đẳng thức (6) có thể viết lại dưới dạng :

$$\Delta y''(z) = -\frac{1}{EJ} [K_{m+1} M_{m+1}(z) - K_m M_m(z)] \quad (7)$$

Lấy đạo hàm của (7) liên tiếp và chú ý đến các liên hệ vi phân giữa nội lực và ngoại lực ta lần lượt được các đẳng thức sau đây :

$$\left. \begin{aligned} \Delta y'''(z) &= -\frac{1}{EJ} [K_{m+1} Q_{m+1}(z) - K_m Q_m(z)] \\ \Delta y^{IV}(z) &= -\frac{1}{EJ} [K_{m+1} q_{m+1}(z) - K_m q_m(z)] \\ \Delta y^V(z) &= -\frac{1}{EJ} [K_{m+1} q'_{m+1}(z) - K_m q'_m(z)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

trong đó  $Q_{m+1}(z)$ ,  $q_{m+1}(z)$ ,  $q'_{m+1}(z)$  là phương trình lực cắt, cường độ lực phân bố, đạo hàm của đường độ lực phân bố trong đoạn thứ  $m + 1$  và  $Q_m(z)$ ,  $q_m(z)$ ,  $q'_m(z)$  là phương trình của các trị số đó ở đoạn  $m$  đã kéo dài sang đoạn thứ  $m + 1$ .

Tại hoành độ  $z = a$ , ta có :

$$\left. \begin{aligned} \Delta y''(a) &= -\frac{1}{EJ} [K_{m+1} M_{m+1}(a) - K_m M_m(a)] \\ \Delta y'''(a) &= -\frac{1}{EJ} [K_{m+1} Q_{m+1}(a) - K_m Q_m(a)] \\ \Delta y^{IV}(a) &= -\frac{1}{EJ} [K_{m+1} q_{m+1}(a) - K_m q_m(a)] \\ \Delta y^V(a) &= -\frac{1}{EJ} [K_{m+1} q'_{m+1}(a) - K_m q'_m(a)] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Đem (9) thay vào cho (2) rồi thay vào cho (1) ta có :

$$\begin{aligned} y_{m+1}(z) &= y_m(z) + \Delta y_a + \Delta y'_a (z - a) - \frac{1}{EJ} [K_{m+1} M_{m+1}(a) - K_m M_m(a)] \frac{(z - a)^2}{2!} - \\ &- \frac{1}{EJ} [K_{m+1} Q_{m+1}(a) - K_m Q_m(a)] \frac{(z - a)^3}{3!} - \frac{1}{EJ} [K_{m+1} q_{m+1}(a) - K_m q_m(a)] \times \\ &\times \frac{(z - a)^4}{4!} - \frac{1}{EJ} [K_{m+1} q'_{m+1}(a) - K_m q'_m(a)] \frac{(z - a)^5}{5!} \dots \end{aligned} \quad (9-4)$$

Để thiết lập phương trình đường đàn hồi của đoạn thứ nhất ta tưởng tượng thêm một đoạn thứ 0 mà đường đàn hồi của đoạn này trùng với  $z$  của dầm nghĩa là  $y_0(z) = 0$ . Nội lực và ngoại lực trong đoạn này cũng bằng không. Chọn gốc tọa độ là đầu mút của dầm, khi đó ta có (với  $z = a = 0$ ) :

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_a &= \Delta y_0 = y_0; & \Delta y'_a &= \Delta y'_0 = y'_0 \\ M_1(0) &= M_0; & Q_1(0) &= Q_0 \\ q_1(0) &= q_0; & q'_1(0) &= q'_0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$M_0$ ,  $Q_0$ ,  $q_0$ ,  $q'_0$  là mômen tập trung, lực tập trung, cường độ lực phân bố và đạo hàm của lực phân bố tại đầu mút của dầm (tại  $z = 0$ ).

Trong trường hợp đặc biệt khi trên suốt chiều dài của dầm có độ cứng là không đổi, nghĩa là :

$$E_1 J_1 = E_m J_m = \dots, \text{ thì } K_1 = K_2 = \dots = K_m = 1$$

Phương trình đường đàn hồi đoạn 1 và đoạn thứ  $m + 1$  tính theo đoạn thứ  $m$  được viết như sau :

$$y_1(z) = y_0 + y_0' z - \frac{M_0}{EJ} \frac{z^2}{2!} - \frac{1}{EJ} Q_0 \frac{z^3}{3!} - \frac{1}{EJ} q_0 \frac{z^4}{4!} - \frac{1}{EJ} q_0 \frac{z^5}{5!} \dots \quad (9-5)$$

$$\begin{aligned} y_{m+1}(z) = & y_m(z) + \Delta y_a + \Delta y_a' \frac{(z-a)}{1!} - \frac{1}{EJ} [M_{m+1}(a) - M_m(a)] \times \frac{(z-a)^2}{2!} - \\ & - \frac{1}{EJ} [Q_{m+1}(a) - Q_m(a)] \frac{(z-a)^3}{3!} - \frac{1}{EJ} [q_{m+1}(a) - q_m(a)] \frac{(z-a)^4}{4!} - \\ & - \frac{1}{EJ} [q_{m+1}(a) - q_m(a)] \frac{(z-a)^5}{5!} = \dots \end{aligned} \quad (9-6)$$

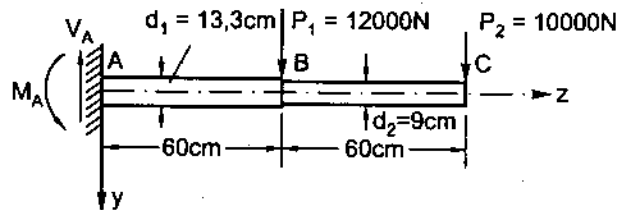
Các trị số  $y_0, y_0', M_0, Q_0, q_0, q_0'$  được gọi là các thông số ban đầu.

Các hiệu số trong các dấu ngoặc là bước nhảy của biểu đồ mômen, lực cắt, cường độ lực phân bố và đạo hàm của lực phân bố... tại mặt cắt có hoành độ  $z = a$ . Vì vậy các hiệu số đó có trị số bằng mômen tập trung, lực tập trung v.v.. tại mặt cắt đó.

**Ví dụ 4 :** Tính độ võng tại đầu mút tự do của thanh chịu lực như hình 9-9.

Thanh có mặt cắt ngang là tròn, được cấu tạo thành hai bậc với các đường kính là  $d_1 = 13,3\text{cm}$  ;  $d_2 = 9\text{cm}$ .

Hai đoạn thanh đều cùng cấu tạo bằng một loại vật liệu có môđun đàn hồi  $E = 2.10^7 \text{ N/cm}^2$ .



Hình 9-9

### Bài giải

Các phản lực tại ngàm có trị số là :

$$V_A = P_1 + P_2 = 22000\text{N}$$

$$M_A = 12000 \cdot 0,6 + 10000 \cdot 0,6 \cdot 2 = 19200 \text{ Nm.}$$

Chiều các phản lực được biểu diễn như trên hình vẽ.

Theo cấu tạo và sự phân bố của tải trọng, ta chia dầm thành hai đoạn AB, BC. Chọn độ cứng của đoạn AB làm độ cứng quy ước. Ta có các trị số của hệ số  $K$  như sau :

$$K_1 = 1$$

$$K_2 = \frac{E_1 J_1}{E_2 J_2} = \frac{J_1}{J_2} = \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^4 = \left( \frac{13,3}{9} \right)^4 = 4,769$$

mômen quán tính của mặt cắt ngang trong đoạn AB là :

$$J_1 = \frac{\pi d_1^4}{64} = \frac{\pi(13,3)^4}{64} = 1535 \text{ cm}^4$$

Các biểu đồ nội lực được biểu diễn trên hình 9-10

Qua sơ đồ chịu lực và các biểu đồ nội lực ta có các trị số các thông số ban đầu và các trị số nội lực tại B như sau :

| Tại mặt cắt A(z = 0)           | Tại mặt cắt B(z = 0,6 m)  |
|--------------------------------|---------------------------|
| $y_0 = 0$                      | $M_2(a) = -6000\text{Nm}$ |
| $y_0' = 0$                     | $M_1(a) = -6000\text{Nm}$ |
| $M_0 = -M_A = -19200\text{Nm}$ | $Q_2(a) = 10000\text{N}$  |
| $Q_0 = V_A = 22000\text{N}$    | $Q_1(a) = 22000\text{N}$  |
| $q_0 = 0$                      | $q_2(a) = 0$              |
| $q_0' = 0$                     | $q_2'(a) = 0$             |
|                                | $q_1(a) = 0$              |
|                                | $q_1'(a) = 0$             |

Phương trình đường đàn hồi trong đoạn 1 :

$$y_1(z) = -\frac{1}{EJ} K_1 M_0 \frac{z^2}{2!} - \frac{1}{EJ} K_1 Q_0 \frac{z^3}{3!}$$

Thay số vào ta có :

$$y_1(z) = \frac{1920000}{2 \cdot 10^7 \cdot 1535} \frac{z^2}{2} - \frac{22000}{2 \cdot 10^7 \cdot 1535} \frac{z^3}{3!}$$

$$y_1(z) = 3,127 \cdot 10^{-5} \cdot z^2 - 119,4 \cdot 10^{-5} \cdot z^3$$

Phương trình đường đàn hồi trong đoạn 2 :

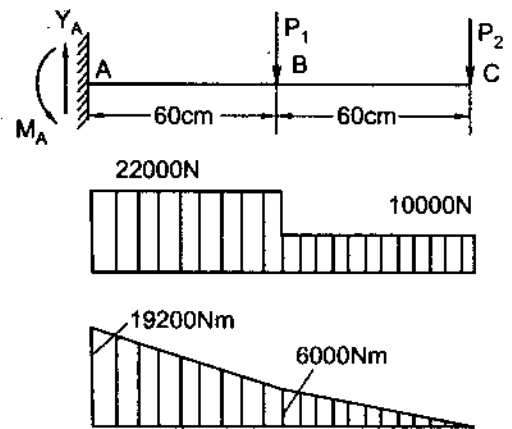
$$y_2(z) = y_1(z) - \frac{1}{EJ} [K_2 M_2(a) - K_1 M_1(a)] \frac{(z-a)^2}{2!} - \frac{1}{EJ} [K_2 Q_2(a) - K_1 Q_1(a)] \frac{(z-a)^3}{3!}$$

Sau khi thay số vào ta có :

$$y_2(z) = 3,127 \cdot 10^{-5} z^2 - 119,4 \cdot 10^{-5} z^3 + 370,9 \cdot 10^{-5} (z-0,6)^2 - 140,9 \cdot 10^{-5} (z-0,6)^3$$

Độ võng tại đầu mút tự do C là :

$$y_2(1,2) = 0,35 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

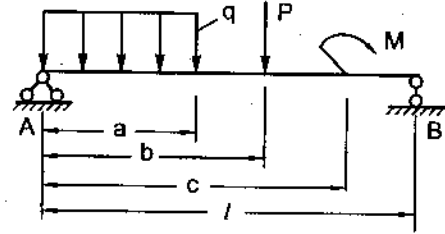


Hình 9-10

**Ví dụ 5 :** Tính góc xoay của mặt cắt ngang ở gối tựa A của dầm có độ cứng không đổi chịu tải trọng như hình 9-11.

*Bài giải*

Vì dầm có độ cứng không đổi nên căn cứ vào ngoại lực ta chia dầm thành 4 đoạn đánh số thứ tự như hình vẽ.



Hình 9-11

Các thông số ban đầu và các hệ số xác định theo điều kiện biên của mỗi đoạn được xác định như sau :

| $z = 0$       | $z = a$           | $z = b$           | $z = c$           |
|---------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $y_0 = 0$     | $\Delta y_a = 0$  | $\Delta y_b = 0$  | $\Delta y_c = 0$  |
| $y'_0 \neq 0$ | $\Delta y'_a = 0$ | $\Delta y'_b = 0$ | $\Delta y'_c = 0$ |
| $M_0 = 0$     | $\Delta M_a = 0$  | $\Delta M_b = 0$  | $\Delta M_c = M$  |
| $Q_0 = V_A$   | $\Delta Q_a = 0$  | $\Delta Q_b = -P$ | $\Delta Q_c = 0$  |
| $q_0 = -q$    | $\Delta q_a = q$  | $\Delta q_b = 0$  | $\Delta q_c = 0$  |
| $q_0 = 0$     | $\Delta q_a = 0$  | $\Delta q_b = 0$  | $\Delta q_c = 0$  |

Phương trình độ võng các đoạn được viết như sau :

$$y_1(z) = y_0 \cdot z - \frac{V_A}{EJ} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{z^4}{4!} \quad (0 \leq z \leq a)$$

$$y_2(z) = y_1(z) - \frac{q}{EJ} \cdot \frac{(z-a)^4}{4!} = y_0 \cdot z - \frac{V_A}{EJ} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{z^4}{4!} - \frac{q}{EJ} \cdot \frac{(z-a)^4}{4!} \quad (a \leq z \leq b)$$

$$y_3(z) = y_2(z) + \frac{P}{EJ} \cdot \frac{(z-b)^3}{3!}$$

$$y_3(z) = y_0 \cdot z - \frac{V_A}{EJ} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{z^4}{4!} - \frac{q(z-a)^4}{EJ \cdot 4!} + \frac{P(z-b)^3}{EJ \cdot 3!} ; (b \leq z \leq c)$$

$$y_4(z) = y_3(z) - \frac{M}{EJ} \cdot \frac{(z-c)^2}{2!}$$

$$y_4(z) = y_0 \cdot z - \frac{V_A}{EJ} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{z^4}{4!} - \frac{q(z-a)^4}{EJ \cdot 4!} + \frac{P(z-b)^3}{EJ \cdot 3!} - \frac{M}{EJ} \cdot \frac{(z-c)^2}{2!} \quad (c \leq z \leq l)$$

Để xác định  $y_0$  ta dựa vào điều kiện liên kết tại B của dầm. Với  $z = l$ ;  $y_4 = 0$ , ta có :

$$y_4(l) = y_0 \cdot l - \frac{V_A}{EJ} \cdot \frac{l^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{l^4}{4!} - \frac{q(l-a)^4}{EJ \cdot 4!} + \frac{P(l-b)^3}{EJ \cdot 3!} - \frac{M}{EJ} \cdot \frac{(l-c)^2}{2!} = 0$$

Từ đó ta rút ra được :

$$y_o = \frac{V_A}{EJ} \cdot \frac{l^2}{3!} - \frac{q}{EJ} \cdot \frac{l^3}{4!} + \frac{q(l-a)^4}{EJ \cdot 4!} - \frac{P(l-b)^3}{EJ \cdot 3!} + \frac{M(l-c)^2}{EJ \cdot 2!}$$

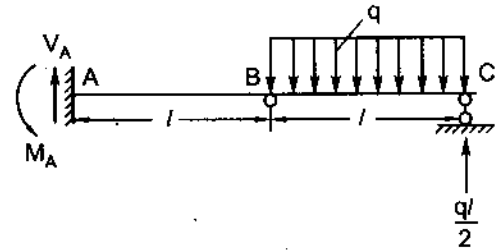
$y_o$  là góc xoay của mặt cắt ngang tại A.

**Ví dụ 6 :** Viết phương trình đường đàn hồi của dầm tĩnh định chịu lực như hình 9-12.

*Bài giải*

Ta dễ dàng xác định được các phản lực tại ngàm A và ở đầu mút C là :

$$V_A = \frac{ql}{2} ; M_A = \frac{ql^2}{2} ; V_C = \frac{ql}{2}$$



Hình 9-12

Chiều các phản lực như hình vẽ. Chia dầm thành hai đoạn và đánh số thứ tự như hình 9-12. Từ sơ đồ chịu lực ta xác định được các thông số ban đầu và các hệ số ở biên cho mỗi đoạn như sau :

| $z = a = 0$                    | $z = a = l$          |
|--------------------------------|----------------------|
| $y_o = 0$                      | $\Delta y_a = 0$     |
| $y_o' = 0$                     | $\Delta y_a' \neq 0$ |
| $M_o = -M_A = -\frac{ql^2}{2}$ | $\Delta M_a = 0$     |
|                                | $\Delta Q_a = 0$     |
| $Q_o = \frac{ql}{2}$           | $\Delta q_a = -q$    |
|                                | $\Delta q_a' = 0$    |

Phương trình đường đàn hồi trong các đoạn có dạng như sau :

$$y_1(z) = \frac{ql^2}{2EJ} \cdot \frac{z^2}{2!} - \frac{ql}{2EJ} \cdot \frac{z^3}{3!}$$

$$y_2(q) = y_1(z) + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{(z-l)^4}{4!} + \Delta y_a (z-l)$$

$$y_2(z) = \frac{ql^2}{2EJ} \cdot \frac{z^2}{2!} - \frac{ql}{2EJ} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{q}{EJ} \cdot \frac{(z-l)^4}{4!} + \Delta y_a (z-l)$$

Để xác định  $\Delta y_a$  ta dựa vào điều kiện biên tại C của dầm. Với  $z = 2l ; y_2(z) = 0$ , ta có :

$$\frac{ql^2}{2EJ} \cdot \frac{4l^2}{2} - \frac{ql}{2EJ} \cdot \frac{8l^3}{6} + \frac{ql^4}{EJ \cdot 24} + \Delta y_a l = 0$$

Từ đó ta rút ra được :  $\Delta y_a = -\frac{3ql^3}{24.EJ}$

Do đó :

$$y_2(z) = \frac{ql^2}{2EJ} \cdot \frac{z^2}{2!} - \frac{ql}{2EJ} \cdot \frac{z^3}{3!} + \frac{q(z-l)^4}{EJ.4!} - \frac{3ql^3}{24EJ}(z-l)$$

Từ các ví dụ trên ta thấy phương pháp thông số ban đầu cho phép ta viết dễ dàng phương trình đường đàn hồi của dầm chịu lực có nhiều đoạn khác nhau, hay mặt cắt khác nhau. Phương trình này còn rất thuận tiện khi lập phương trình máy tính nên hiện nay vẫn được sử dụng rộng rãi.

## §9-5. PHƯƠNG PHÁP TẢI TRỌNG GIẢ TẠO

(hay phương pháp đồ toán)

Như ta đã có, liên hệ giữa nội lực và ngoại lực được thể hiện bởi biểu thức :

$$\frac{d^2M_x}{dz^2} = q(z)$$

Như vậy từ  $q(z)$  ta có thể suy ra  $M_x$  bằng cách lấy tích phân hai lần. Với phương pháp mặt cắt ta dễ dàng xác định được  $M_x$  từ  $q(z)$ . Điều đó có nghĩa là phương pháp mặt cắt có thể thay thế cho một phép tích phân hai lần.

Ta hãy để ý đến phương trình vi phân của đường đàn hồi :

$$y'' = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

Từ biểu thức đó, muốn xác định được  $y$  ta phải tích phân hai lần. Ta tìm cách sử dụng phương pháp mặt cắt để thực hiện phép tích phân đó. Muốn vậy ta phải tưởng tượng một tải trọng phân bố giả tạo  $q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ_x}$  đặt trên một dầm giả tạo. Mômen uốn do  $q_{gt}$  gây nên

trên dầm giả tạo là độ võng của dầm thực. Lực cắt do  $q_{gt}$  gây nên là góc xoay của dầm thực.

Ta có :

$$M_{gt} = y ; Q_{gt} = y'$$

**Ví dụ 7.** Tìm độ võng và góc xoay tại đầu mút tự do của dầm chịu lực như hình 9-13.

*Bài giải*

Ta vẽ biểu đồ mômen uốn  $M_x$  của hệ như trên hình 9-13b. Đặt hệ lực  $q_{gt}$  giả tạo lên dầm giả tạo (h.9-13c). Vì :

$$q_{gt} = -\frac{M_x}{EJ_x}$$

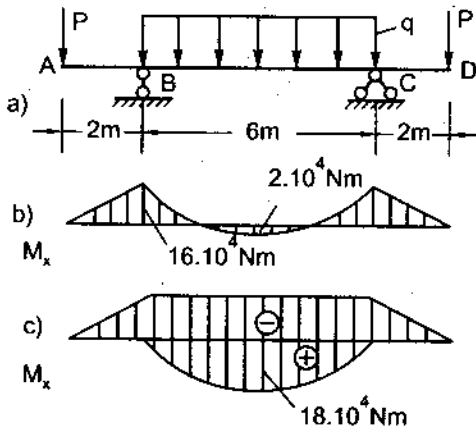
do đó  $M_x$  là âm thì  $q_{gt}$  phải là dương. Với quy ước của chúng ta  $q$  là dương khi  $q$  có chiều hướng lên trên.



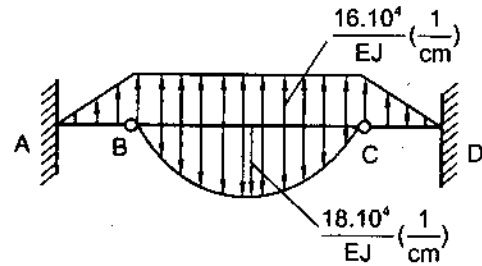


Phương pháp này rất thuận lợi khi ta chỉ cần tính độ võng và góc xoay ở tại một số mặt cắt nhất định.

**Ví dụ 8.** Xác định độ võng và góc xoay ở đầu mút D của dầm có độ cứng không đổi chịu lực như trên hình 9-14a. Trị số các lực như sau  $P = 8 \cdot 10^4 \text{ N}$ ;  $q = 4 \cdot 10^4 \text{ N/m}$ .



Hình 9-14



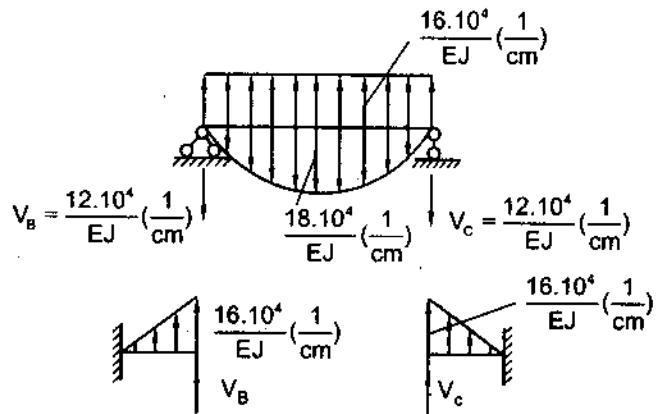
Hình 9-15

### Bài giải

Biểu đồ mômen uốn  $M_x$  của dầm được biểu diễn như trên hình 9-14b. Biểu đồ đó có thể xem như tổng cộng của hai biểu đồ như trên hình 9-14c. Chọn dầm giả tạo và tải trọng giả tạo như trên hình 9-15.

Ta chia dầm thành ba dầm đơn như trên hình 9-16. Các phản ứng lực tại B và C của dầm giữa có trị số là :

$$V_B = V_C = \frac{12 \cdot 10^4}{EJ}$$



Hình 9-16

Các phản lực đó có chiều như hình vẽ. Như vậy tại C, trên đoạn dầm CD, chịu một lực giả tạo tập trung có chiều ngược lại nhưng cùng có trị số với  $V_C$ .

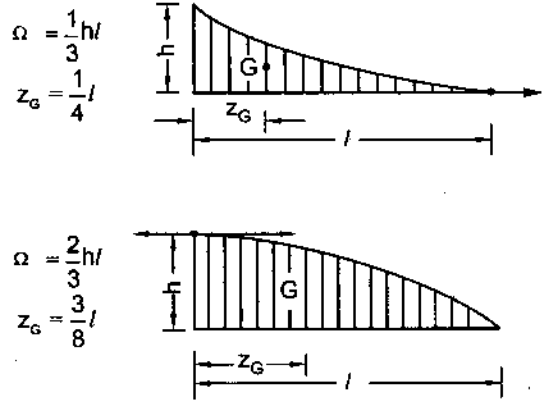
Vậy độ võng và góc xoay tại D là :

$$Q_{gt} = y_D = \frac{12 \cdot 10^4}{EJ} + \frac{16 \cdot 10^4}{EJ} \cdot \frac{2}{2} = \frac{28 \cdot 10^4}{EJ} \text{ (rad)}$$

$$M_{gt} = y_D = \frac{12 \cdot 10^4}{EJ} \cdot 2 + \frac{16 \cdot 10^4}{EJ} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{136 \cdot 10^4}{3EJ} \text{ (m)}$$

Các kết quả mang dấu dương, có nghĩa là góc xoay có chiều theo chiều kim đồng hồ và độ võng hướng xuống dưới.

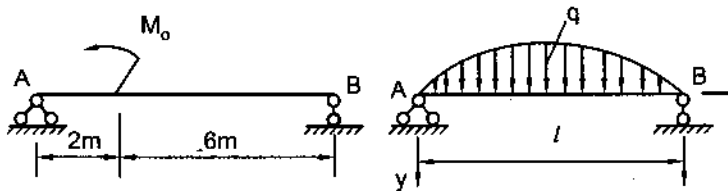
Để tiện lợi trong quá trình tính toán ta xác định trước hoành độ trọng tâm và diện tích  $\Omega$  của những hình giới hạn bởi các đường cong bậc hai như hình 9-17.



Hình 9-17

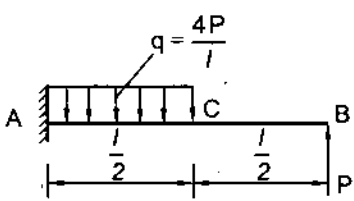
**Bài tập**

9.1. Xác định đường đàn hồi của dầm AB bằng phương pháp tích phân không định hạn :  
Cho biết  $M_0 = 20 \text{ kNm}$  (hình 9-18)

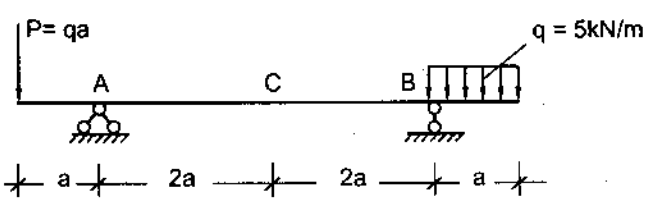


Hình 9-18

- 9.2. Tìm độ võng tại C và B của dầm chịu lực như hình vẽ (h.9-19) bằng phương pháp tích phân không định hạn.
- 9.3. Xác định góc xoay tại A và B và độ võng tại C của dầm chịu lực như hình vẽ (h.9-20)

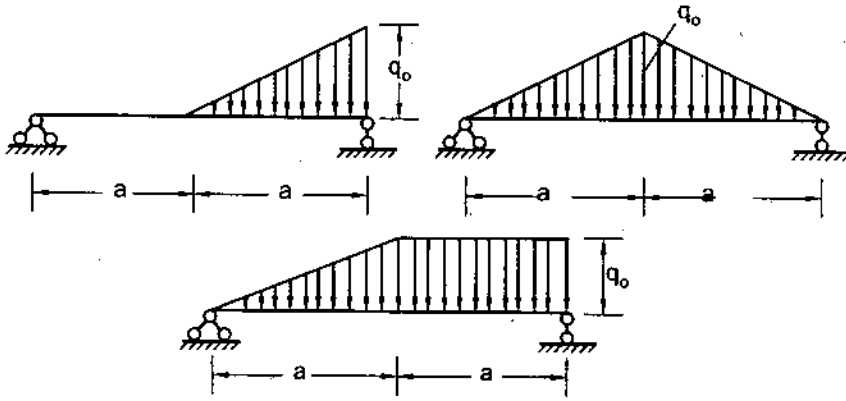


Hình 9-19



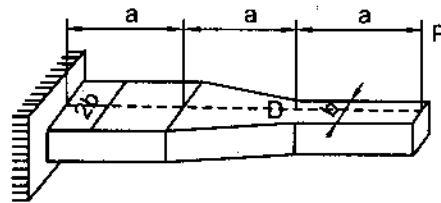
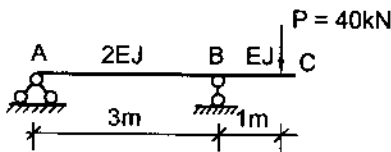
Hình 9-20

9.4. Tìm độ võng tại mặt cắt ngang ở giữa nhịp của những dầm chịu tải trọng như hình vẽ (h.9-21)



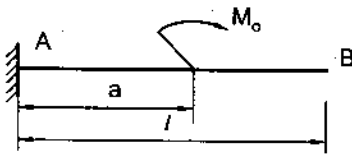
Hình 9-21

9.5. Tìm độ võng và góc xoay tại C của các dầm chịu lực như hình vẽ 9-22.

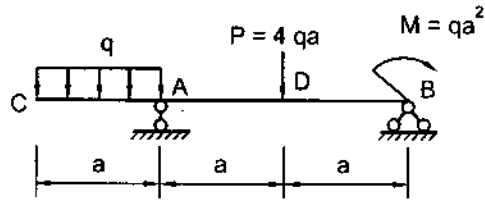


Hình 9-22

9.6. Bằng phương pháp đồ toán, tìm độ võng và góc xoay tại đầu tự do của dầm. (h.9-23).



Hình 9-23



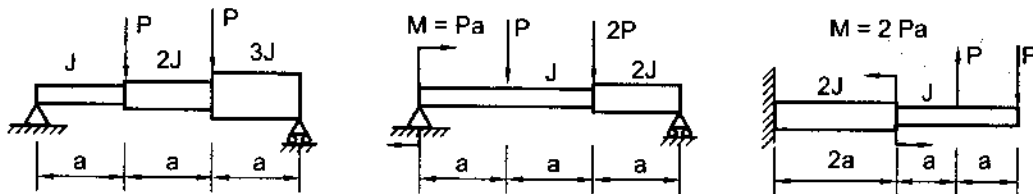
Hình 9-24

9.7. Xác định

- Độ võng và góc xoay tại C
- Góc xoay tại hai gối tựa A và B
- Độ võng tại mặt cắt D

bằng phương pháp đồ toán của dầm chịu lực như hình vẽ.

9.8. Với phương pháp thông số ban đầu viết phương trình độ võng và góc xoay của các dầm chịu lực như sau :



Hình 9-25

## Chương 10

# BÀI TOÁN XOẮN THUẦN TÚY

### §10-1. XOẮN THANH TRÒN

Ta gọi thanh chịu xoắn thuần túy là khi trên các mặt cắt ngang của thanh chỉ có một thành phần mômen xoắn  $M_z$  (h.10-1). Xác định hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ : Oz là trục của thanh và Oy, Ox là các trục bất kì trên mặt cắt ngang. Gọi u, v, w là các thành phần chuyển vị của một điểm A nào đó trong lòng thanh theo các phương của các trục tọa độ.

Dưới tác dụng của các mômen xoắn ta thấy các mặt cắt ngang sẽ bị xoay tương đối với nhau quanh trục z. Ta gọi góc xoay đó là góc xoắn. Nếu gọi  $\varphi$  là góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một khoảng cách dz thì góc xoắn tỉ đối là :

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} \quad (10-1)$$

Khi trên mọi mặt cắt ngang đều cùng có trị số  $M_z$  thì  $\theta$  là hằng số đối với z và như vậy góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một khoảng cách z nào đó có thể tính với biểu thức :

$$\varphi = \theta z \quad (10-2)$$

Các thành phần chuyển vị u và v của A được tính theo  $\varphi$  như sau : Gọi A' và A\* là hình chiếu của A trước và sau biến dạng trên mặt tọa độ xOy (h.10-2).

Góc A'OA\* là góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt : mặt cắt qua A và mặt cắt nằm trong mặt tọa độ được giữ cố định. Với biến dạng vô cùng bé ta có thể xem rằng :

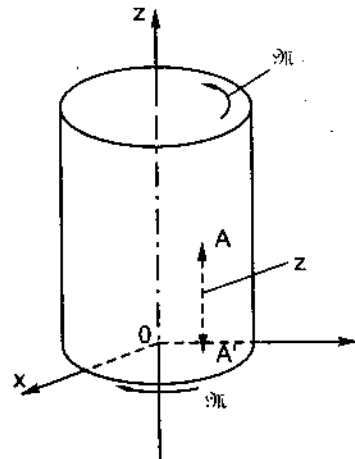
$$OA' = OA^* = \rho$$

$$\text{Do đó ta có : } u = -A'A^* \sin\beta = -\rho\varphi \sin\beta$$

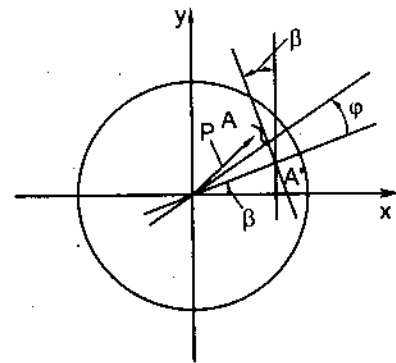
$$v = A'A^* \cos\beta = \rho\varphi \cos\beta$$

$\beta$  là góc giữa trục Ox và OA'. Với chú ý  $\rho \sin\beta = y$  và  $\rho \cos\beta = x$  ta có thể viết lại các biểu thức đó như sau :

$$u = -\theta zy \quad \text{và} \quad v = \theta zx \quad (10-3)$$



Hình 10-1



Hình 10-2

Qua thí nghiệm ta nhận thấy mặt cắt ngang của thanh tròn chịu xoắn luôn luôn phẳng và không có chuyển vị theo phương của trục z, do đó ta đưa ra giả thuyết sau đây :

Mặt cắt ngang ban đầu phẳng và thẳng góc với trục của thanh thì trong quá trình biến dạng vẫn phẳng và thẳng góc với trục thanh. Khoảng cách giữa các mặt cắt là không đổi.

Với giả thuyết đó trị số của thành phần chuyển vị theo phương z sẽ bằng không,  $w = 0$ .

Từ các biểu thức của u, v, w ta dễ dàng tìm thấy :

$$\begin{aligned}\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{xz} &= -\theta y \text{ và } \gamma_{yz} = \theta x\end{aligned}\tag{10-4}$$

cũng từ đó ta suy ra các thành phần ứng suất như sau :

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z &= 0 ; \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= G\theta y \\ \tau_{yx} = \tau_{xy} &= G\theta x\end{aligned}\tag{10-5}$$

Bình phương hai vế của hai biểu thức cuối cùng và cộng lại ta được :

$$\begin{aligned}\tau_p &= \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = G\theta\sqrt{x^2 + y^2} = G\theta\rho \\ \tau_p &= G\theta\rho\end{aligned}\tag{10-6}$$

Dễ nhận thấy rằng  $\tau_p$  có phương vuông góc với OA (h.10-3). Phương đó của ứng suất tiếp toàn phần hoàn toàn thỏa mãn điều kiện biên. Thực vậy nếu giả dụ A là một điểm trên chu vi thì phương đó là phương song song với đường tiếp tuyến với chu vi và rõ ràng thành phần ứng suất tiếp theo phương bán kính bằng không. Ta biết rằng mặt ngoài của thanh không có ngoại lực.

Tương quan giữa nội lực và ứng suất trên mặt cắt cho phép ta viết :

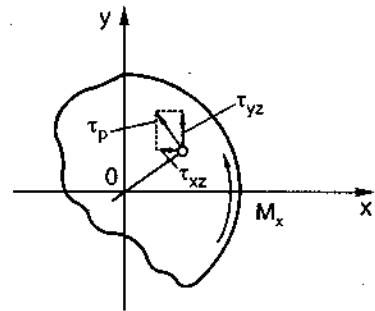
$$M_z = \int_F \rho \tau_p dF = \int_F G\theta \rho^2 dF$$

Từ đó ta rút ra được :

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_p}\tag{10-7}$$

Dem thay (10-7) vào (10-6) ta được :

$$\tau_p = \frac{M_z}{J_p} \rho\tag{10-8}$$



Hình 10-3

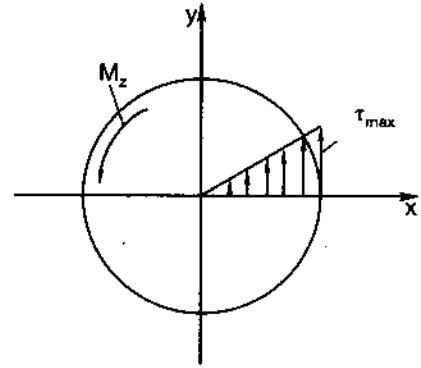
Điểm càng xa trục thì trị số ứng suất càng lớn. Ta có biểu đồ phân bố ứng suất trên một bán kính được biểu diễn như hình 10-4.

Ứng suất cực đại là tại các điểm trên chu vi của mặt cắt. Trị số đó là :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{J_p} R = \frac{M_z}{W_p} \quad (10-9)$$

trong đó :  $W_p = \frac{J_p}{R} \approx 0,2D^3 \quad (10-10)$

$W_p$  được gọi là mômen chống xoắn hay độ chống xoắn của mặt cắt.



Hình 10-4

Điều kiện bền của phân tố theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất là :

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{2} \quad (10-11)$$

Nếu theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng thì ta phải có :

$$\tau_{\max} \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$$

Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt cách nhau một khoảng cách  $l$  là :

$$\varphi = \frac{M_z l}{GJ_p} \quad (10-12)$$

Trên đây ta đã giải bài toán với trị số  $M_z$  là không đổi trên cả chiều dài  $l$  của thanh. Nếu như  $M_z$  là một hàm số đối với  $z$  thì cả quá trình lập luận trên đây hoàn toàn đúng cho một đoạn thanh vô cùng bé  $dz$ . Góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt của đoạn thanh đó sẽ là :

$$d\varphi = \frac{M_z dz}{GJ_p}$$

Và như vậy góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt ở hai đầu thanh sẽ là ;

$$\varphi = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{M_z dz}{GJ_p} \quad (10-13)$$

Đối với thanh chịu xoắn, ngoài điều kiện bền, ta còn phải tính toán đường kính của thanh để sao cho thanh đủ điều kiện cứng, nghĩa là góc xoắn tỉ đối phải nhỏ hơn một trị số cho phép.

$$\theta = \frac{\varphi}{l} \leq [\theta] \quad (10-14)$$

Trong trường hợp thanh tròn rỗng, trong các công thức (10-8), (10-9) và (10-12) ta phải tính trị số của  $J_p$  và  $W_p$  như sau :

$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} (1 - \eta^4)$$

$$W_p = 0,2D^3(1 - \eta^4)$$

trong đó :  $\eta$  là tỉ số của bán kính trong và bán kính ngoài  $\eta = \frac{r}{R}$ .

**Ví dụ 1.** Trên mặt cắt ngang của một thanh tròn đặc chịu tác dụng bởi mômen xoắn  $M_z = 2.10^4 \text{ Nm}$ . Tính trị số ứng suất tiếp tại một điểm A cách tâm một khoảng cách  $\rho = 0,03 \text{ m}$  và trị số ứng suất tiếp cực đại. Cho biết đường kính của thanh là  $D = 0,1 \text{ m}$ .

### Bài giải

Trị số mômen quán tính độc cực của diện tích mặt cắt ngang đối với tâm là :

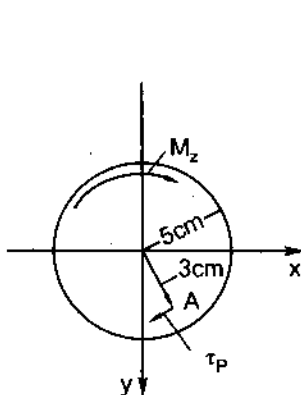
$$J_p = \frac{\pi R^4}{2} \approx 0,1D^4 \approx 10^3 \text{ cm}^4$$

Trị số ứng suất tiếp tại A là :

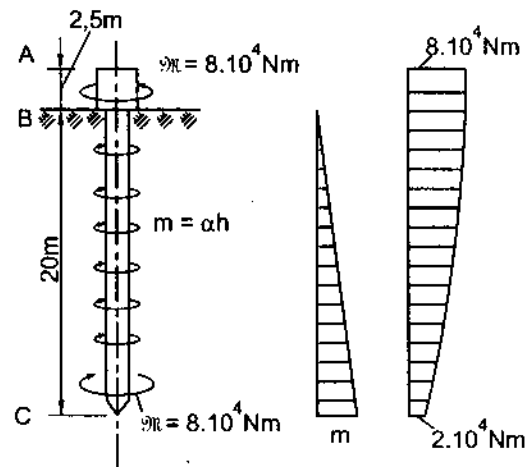
$$\tau_\rho = \frac{M_z}{J_p} \rho = \frac{2.10^6}{10^3} .3 = 6000 \text{ N/cm}^2$$

Trị số ứng suất tiếp cực đại là :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{2.10^6}{0,2.10^3} = 10000 \text{ N/cm}^2$$



Hình 10-5



Hình 10-6

**Ví dụ 2.** Một mũi khoan thăm dò chịu tác dụng bởi một mômen xoắn  $\mathfrak{M} = 8.10^4 \text{ Nm}$ . Sức cản của đất đối với thân mũi khoan tạo thành các mômen xoắn phân bố theo quy luật bậc nhất với cường độ ở độ sâu  $h$  là :  $m = \alpha h$  ( $\alpha = 0,0310^4 \text{ Nm/m}^2$ ).

Mômen xoắn tác dụng ở lưỡi định hướng của đầu mũi khoan là  $\mathfrak{M}_1 = 2.10^4 \text{ Nm}$  ; cho biết  $AB = 2,5 \text{ m}$ ,  $BC = 20 \text{ m}$ . Đường kính thân mũi khoan  $d = 0,2 \text{ m}$ .  $G = 8.10^5 \text{ N/cm}^2$  (h.10-6).

Xác định góc xoắn trên toàn bộ chiều dài AC của mũi khoan.

*Bài giải*

Trên đoạn AB nội lực là hằng và có trị số là :

$$M_z^I = \mathcal{M} = 8 \cdot 10^4 \text{ Nm}$$

Nội lực trên mặt cắt bất kì với độ sâu h là :

$$M_z^{II} = \mathcal{M} - m \frac{h}{2} = 8 \cdot 10^4 - 150h^2$$

Luật biến thiên của  $M_z$  trong đoạn BC là theo định luật bậc hai đối với h. Biểu đồ  $M_z$  biểu diễn như trên hình 10-6.

Góc xoắn trên toàn chiều dài AC của mũi khoan là :

$$\varphi = \frac{M_z^I a}{2GJ_p} + \int_0^b \frac{M_z^{II} dh}{GJ_p}$$

Thay số vào ta được :

$$\varphi = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot 2,5}{2GI_p} + \frac{1}{GJ_p} \int_0^b (8 \cdot 10^4 - 150h^2) dh$$

$$\varphi = 0,1010 \text{ radian } (\approx 6^\circ)$$

## §10-2. XOẮN THANH MẶT CẮT BẤT KÌ

### 1. Công thức ứng suất và biến dạng

Khi mặt cắt ngang có hình dáng bất kì thì sau biến dạng mặt cắt đó không còn phẳng nữa. Thành phần chuyển vị w là khác không. Ta thừa nhận rằng : nếu thanh chịu xoắn thuần túy, mômen xoắn  $M_z$  không đổi với thanh có thể biến dạng tự do, không bị ràng buộc bởi các liên kết thì các mặt cắt ngang có độ vênh như nhau. Nghĩa là w không phụ thuộc vào z.

Ta có các biểu thức của u, v và w như sau :

$$u = -\theta zy ; v = \theta zx, w = w(x, y) \quad (10-15)$$

Từ đó ta có các thành phần biến dạng là :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 ; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 ; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

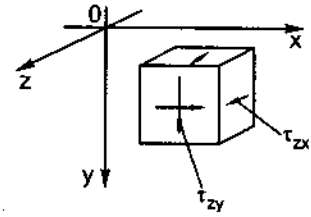
$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\theta y + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta x + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (10-16)$$



Vậy trạng thái ứng suất tại một điểm nào đó được xác định bởi các thành phần ứng suất (h.10-7)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \\ \tau_{xz} = \left( -\theta y + \frac{\partial w}{\partial x} \right) G \\ \tau_{yz} = \left( \theta x + \frac{\partial w}{\partial y} \right) G \end{aligned} \right\} \quad (10-17)$$



Hình 10-7

Nếu xem lực thể tích là bằng không thì trạng thái ứng suất đó thỏa mãn hai phương trình đầu của hệ phương trình vi phân cân bằng (2-45).

Phương trình cân bằng thứ ba có dạng :

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad (10-18a)$$

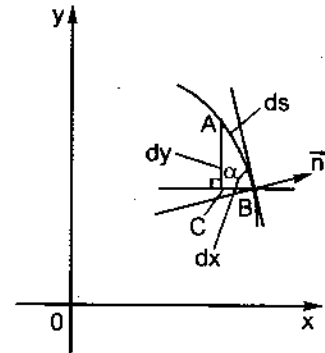
Bây giờ chú ý đến hai phương trình cuối các biểu thức (10-17). Lấy đạo hàm riêng phần của  $\tau_{xz}$  đối với  $y$  và của  $\tau_{yz}$  đối với  $x$  và đem trừ cho nhau ta được :

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 2G\theta \quad (10-18b)$$

Xét đến điều kiện biên của bài toán :

Trên hình 10-8 biểu diễn một phần tử nằm trên đường chu vi của mặt cắt ngang,  $\widehat{AB}$  là một vi phân cung của chu vi đó. Gọi  $\alpha$  là góc của tiếp tuyến đi qua B và trục  $x$ . Các cosin chỉ phương của pháp tuyến  $n$  tại B sẽ là :

$$\left. \begin{aligned} l = \sin \alpha = \frac{dy}{ds} \\ m = \cos \alpha = -\frac{dx}{ds} \\ n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10-19)$$



Hình 10-8

trong đó  $dx$ ,  $dy$ ,  $ds$  được biểu diễn như trên hình vẽ. Vì mặt ngoài của thanh không có tải trọng, các thành phần ứng suất  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  và  $\tau_{xy}$  lại bằng không, nên điều kiện bề mặt (4-25) rút lại còn một phương trình như sau :

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0 \quad (10-20)$$

Thay (10-19) vào (10-20) ta được điều kiện bề mặt như sau :

$$\left( \begin{array}{c} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right)_{\text{ch.vi}} = \left( \begin{array}{c} dx \\ dy \end{array} \right)_{\text{ch.vi}} \quad (10-21)$$

Như vậy hàm  $\tau_{xz}$  và  $\tau_{yz}$  đồng thời phải thỏa mãn ba phương trình (10-18a), (10-18b) và (10-21).

Để tiện lợi ta chọn một hàm U sao cho :

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y}, \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{10-22}$$

Một hàm U như vậy luôn luôn thỏa mãn phương trình vi phân cân bằng (10-18). Ta chỉ còn phải xét sao cho thỏa mãn (10-18b) và (10-21).

Thay (10-22) vào (10-18b) ta được phương trình vi phân :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2\theta G \tag{10-23}$$

Phương trình đó được gọi là phương trình Poátxông.

Thay (10-22) vào (10-21) ta có :

$$\frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial x} dx = 0$$

Vế trái là dạng vi phân toàn phần của U do đó ta có :

$$dU = 0 \tag{10-24}$$

Vậy dọc theo chu vi của mặt cắt hàm U phải là một hằng số. ( $U = C^+$  trên chu vi), hằng số đó tùy ý vì nó không ảnh hưởng gì đến trị số của  $\tau_{yz}$  và  $\tau_{xz}$  [xem (10-22)]. Để thuận lợi ta chọn  $U = 0$  dọc theo chu vi.

Xét đến tương quan giữa ứng suất và nội lực trên mặt cắt ngang

Ta có :

$$M_z = \iint_F (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y) dx dy$$

Thay (10-22) vào đây ta được :

$$M_z = - \iint_F \frac{\partial U}{\partial x} x dy dx - \iint_F \frac{\partial U}{\partial y} y dx dy$$

Các tích phân đó được tính như sau : Ví dụ với biểu thức tích phân thứ nhất xét trường hợp chu vi của mặt cắt ngang là một miền đơn liên như hình 10-9, ta có :

$$- \iint_F \frac{\partial U}{\partial x} x dy dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x} x dx \int_{y_1}^{y_2} dy$$

Sử dụng tích phân đoạn, biểu thức tích phân đó được viết dưới dạng :

$$- \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial U}{\partial x} x dx \int_{y_1}^{y_2} dy = - \int_{y_1}^{y_2} x[U(x_2) - U(x_1)] dy + \iint_F U dx dy$$

Vì điều kiện biên phải có  $U = 0$  nên số hạng thứ nhất của vế phải là bằng không từ đó ta có :

$$-\iint_F \frac{\partial U}{\partial x} x dy dx = \iint_F U dx dy$$

Tương tự ta có thể tính với biểu thức tích phân thứ hai. Kết quả cuối cùng là :

$$M_z = 2 \iint_F U(x, y) dx dy \quad (10-25)$$

Từ phương trình Poátxông ta thấy  $U$  phải tỉ lệ với  $G$  và  $\theta$  vậy ta chọn hàm  $U$  dưới dạng

$$U = G\theta f(x, y) \quad (10-26)$$

Hàm  $f(x, y)$  cũng phải triệt tiêu tại mọi điểm trên chu vi của mặt cắt, thay (10-26) vào (10-23), phương trình Poátxông sẽ có dạng :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \quad (10-27)$$

$f$  được gọi là hàm ứng suất. Thay (10-26) vào (10-25) ta có :

$$M_z = 2 \iint_F G\theta f(x, y) dx dy = G\theta J_d$$

Với 
$$J_d = 2 \iint_F f(x, y) dx dy \quad (10-28)$$

$J_d$  là một hàm đặc trưng hình học của mặt cắt ngang được gọi là độ cứng khi xoắn của mặt cắt.

Từ đó ta có góc xoắn tỉ đối  $\theta$  là :

$$\theta = \frac{M_z}{GJ_d} \quad (10-29)$$

Ta thấy  $J_d$  càng lớn thì  $\theta$  càng bé.

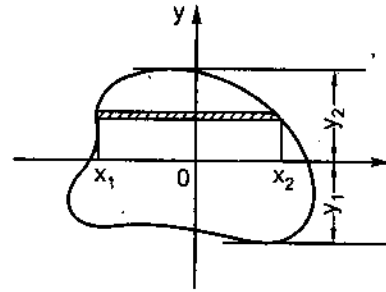
Trị số các ứng suất được tính với các công thức (10-22)

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{M_z}{J_d} \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \tau_{yz} &= -\frac{M_z}{J_d} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (10-30)$$

Ứng suất tiếp lớn nhất cũng được viết dưới dạng :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_d} \quad (10-31)$$

Với  $W_d = \max \left[ \frac{J_d}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}} \right]$  và được gọi là độ chống xoắn của mặt cắt.



Hình 10-9

## 2. Một số trường hợp cụ thể

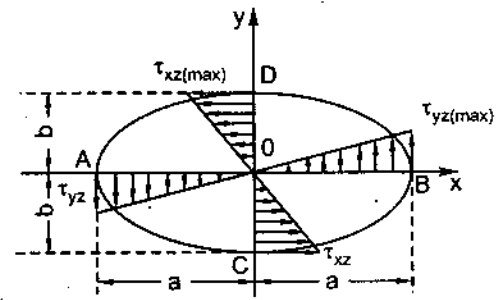
a) Mặt cắt ngang là một hình elip (h.10-10)

Chu vi của mặt cắt được xác định bởi phương trình :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ta chọn hàm  $f(x, y)$  dưới dạng :

$$f(x, y) = D \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$



Hình 10-10

hàm đó thỏa mãn điều kiện : mọi điểm trên chu vi  $f(x, y) = 0$ ,  $D$  là một hằng số tùy ý. Để xác định  $D$  ta thay  $f(x, y)$  vào phương trình Poátxông (10-27)

Ta có :

$$2D \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = -2$$

Vậy :

Hàm ứng suất có dạng như sau :

$$f(x, y) = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \tag{10-32}$$

Độ cứng  $J_d$  khi xoắn của mặt cắt được tính với biểu thức :

$$J_d = \frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2} \int_F \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dF$$

$$J_d = \frac{2}{a^2 + b^2} [a^2 b^2 F - b^2 J_y - a^2 J_x]$$

Trong đó  $J_x, J_y$  là mômen quán tính của hình elip đối với các trục quán tính chính trung tâm Oxy :

$$J_x = \int_F y^2 dF = \frac{\pi a b^3}{4} \quad J_y = \int_F x^2 dF = \frac{\pi a^3 b}{4}$$

$F$  - diện tích của elip ( $F = \pi ab$ )

Thay vào trên ta có :  $J_d = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$  (10-33)

Ta nhận thấy khi  $a = b$ , nghĩa là khi mặt cắt ngang là một hình tròn thì  $J_d = J_p = \frac{\pi R^4}{2}$ .

Trong trường hợp tổng quát  $J_d$  không phải là mômen quán tính độc cực.

Trị số các ứng suất tiếp được tính với các biểu thức :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} &= \frac{M_z}{J_d} \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2M_z}{\pi ab^3} y \\ \tau_{yz} &= -\frac{M_z}{J_d} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2M_z}{\pi ba^3} x \end{aligned} \right\} \quad (10-34)$$

Ta nhận thấy trị số của các ứng suất tiếp tỉ lệ với khoảng cách từ điểm đang xét đến các trục tọa độ.

Giả sử  $a > b$ , ứng suất lớn nhất là tại các điểm C và D (h.10-10). Trị số ứng suất đó là :

$$\tau_{xz(\max)} = \pm \frac{2M_z}{\pi ab^2}$$

Trị số ứng suất tại các điểm A và B là :

$$\tau_{yz(\max)} = \pm \frac{2M_z}{\pi a^2 b}$$

b) Mặt cắt hình tam giác đều (h.10-11)

Hệ trục tọa độ Oxy được xác định như hình 10-11 như vậy phương trình của các cạnh được biểu diễn như sau :

Cạnh AB :  $y = 0$

Cạnh BC :  $y + x\sqrt{3} - a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Cạnh CA :  $y - x\sqrt{3} - a\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Vậy hàm ứng suất sẽ có dạng :

$$f(x, y) = Ay \left( y + x\sqrt{3} - a\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \times \left( y - x\sqrt{3} - a\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (10-35)$$

Thay vào phương trình Poátxông (10-27) ta tìm thấy :

$$A = \frac{1}{a\sqrt{3}}$$

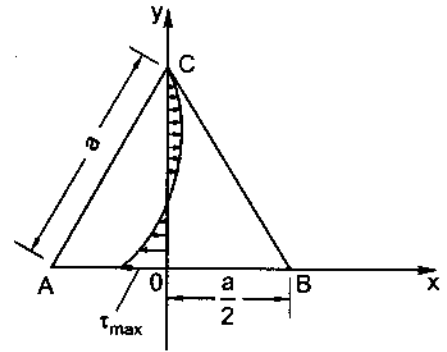
Độ cứng xoắn của mặt cắt ngang tính theo (10-28) là :

$$J_d = 2 \iint_F f(x, y) dx dy = \frac{\sqrt{3}}{82} a^4$$

Trị số các thành phần ứng suất được tính bởi các biểu thức :

$$\tau_{zx} = G\theta \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{G\theta}{a\sqrt{3}} \left( 3y^2 - 2\sqrt{3}ay + \frac{3}{4}a^2 - 3x^2 \right) \quad (10-36)$$

$$\tau_{zy} = -G\theta \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{G\theta}{a\sqrt{3}} 6xy$$



Hình 10-11

Ứng suất tiếp lớn nhất là :

$$\tau_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{4} G\theta a = \frac{20M_z}{a^3}$$

Sự phân bố ứng suất trên chiều cao được biểu diễn như trên hình (h.10-11).

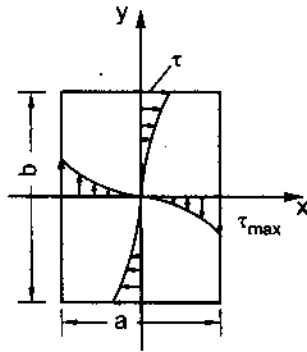
c) Xoắn thanh có mặt cắt ngang hình chữ nhật (h.10-12)

Ta chọn hàm số  $f(x, y)$  theo lời giải của Timôxencô như sau :

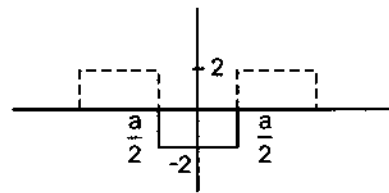
$$f(x, y) = \sum_{n=1,2,3}^{\infty} g_n(y) \cos \frac{n\pi x}{a} \quad (10-37)$$

Hàm số đó hoàn toàn thỏa mãn trên các cạnh  $x = \pm \frac{a}{2}$  (h.10-12)

Hàm  $g_n(y)$  phải chọn sao cho  $f(x, y)$  thỏa mãn phương trình Poátxông (10-27) và điều kiện trên các biên  $y = \pm \frac{b}{2}$ .



Hình 10-12



Hình 10-13

Thay  $f(x, y)$  vào phương trình Poátxông ta có :

$$\sum_{n=1,2,3}^{\infty} \left[ g_n''(y) - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} g_n(y) \right] \cos \frac{n\pi x}{a} = -2 \quad (10-38)$$

Vế trái của (10-38) có thể xem là dạng khai triển với chu kỳ  $2a$  của  $-2$  trong khoảng  $-\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$ . Ngoài khoảng đó, giả thiết hàm được kéo dài về hai phía như được biểu diễn trên hình 10-13.

Hệ số thứ  $n$  của phép khai triển là :

$$C_n = g_n''(y) - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} g_n(y)$$

Mặt khác theo lí thuyết chuỗi Phuriê hệ số đó phải bằng :

$$C_n = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (-2) \cos \frac{n\pi x}{a} dx = -\frac{8}{\pi n} \sin \frac{n\pi}{2} = -\frac{8}{\pi n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

So sánh hai biểu thức đó ta được phương trình vi phân để xác định hàm  $g_n(y)$  như sau :

$$g_n''(y) - \frac{n^2 \pi^2}{a^2} g_n(y) = -\frac{8}{\pi n} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân đó là :

$$g_n(y) = \frac{8a^2}{\pi^3 n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} + A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}$$

Các hệ số  $A_n$  và  $B_n$  phải chọn sao cho  $g_n(y)$  triệt tiêu tại  $y = \pm \frac{b}{2}$ . Với điều kiện đó  $f(x, y)$  sẽ thỏa mãn điều kiện biên như ta mong muốn.

Từ đó ta có :  $B_n = 0$  ;  $A_n = -\frac{8a^2}{\pi^3 n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}}$

Vậy hàm  $g_n(y)$  có dạng như sau :  $g_n(y) = \frac{8a^2}{\pi^3 n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right)$

Hàm ứng suất sẽ có dạng như sau :

$$f(x, y) = \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) \cos \frac{n\pi x}{a} \quad (10-39)$$

Sau khi đã có  $f(x, y)$  rồi ta dễ dàng xác định các trị số ứng suất và góc xoắn tỉ đối  $\theta$ .

Ví dụ ta hãy xác định trị số của  $\tau_{zy}$  :

$$\tau_{zy} = -G\theta \frac{\partial f}{\partial x} = G\theta \frac{8a}{\pi^3} \sum_{n=1,2,3}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \times \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \quad (10-40)$$

Ứng suất lớn nhất là tại điểm giữa cạnh dài :

$$\tau_{\max} = (\tau_{zy})_{\substack{x=a/2 \\ y=0}} = G\theta a \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right)$$

Hay :

$$\tau_{\max} = G\theta a \left( 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) \quad (10-41)$$

Ta có được công thức đó bằng cách thay :

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

vào công thức của  $\tau_{\max}$  trên đây.

Mômen xoắn được xác định từ biểu thức :

$$\begin{aligned} M_z &= 2G\theta \iint_F f(x,y) dx dy = \\ &= G\theta \frac{16a}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}} \right) dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cos \frac{n\pi x}{a} dx \end{aligned}$$

Sau khi tính biểu thức tích phân ta có :

$$M_z = G\theta \frac{32a^3 \cdot b}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^4} \left( 1 - \frac{2a}{n\pi b} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2a} \right)$$

nếu thay  $\sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$  vào ta sẽ được :

$$M_z = G\theta \frac{a^3 b}{3} \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2a} \right]$$

Độ cứng khi xoắn của mặt cắt là :  $J_d = \beta a^3 b$  (10-42)

Với  $\beta$  là :

$$\beta = \frac{1}{3} \left[ 1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{2a} \right] \quad (10-43)$$

Độ chống xoắn của mặt cắt sẽ là :

$$W_d = \alpha a^2 b \quad (10-44)$$

Với

$$\alpha = \frac{\beta}{1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5 \operatorname{ch} \frac{n\pi b}{2a}}} \quad (10-45)$$

Vậy :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha a^2 b} \quad (10-46)$$

Các hệ số  $\beta$  và  $\alpha$  chỉ phụ thuộc vào tỉ số  $\frac{b}{a}$ . Các trị số của các hệ số đó được tính theo bảng sau đây :



| $\frac{a}{b}$ | 1     | 1,5   | 1,75  | 2     | 2,5   | 3     | 4     | 6     | 8     | 10    | $\infty$ |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\alpha$      | 0,208 | 0,231 | 0,239 | 0,246 | 0,258 | 0,267 | 0,282 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333    |
| $\beta$       | 0,141 | 0,196 | 0,214 | 0,229 | 0,249 | 0,263 | 0,281 | 0,299 | 0,307 | 0,313 | 0,333    |
| $\gamma$      | 1,0   | 0,859 | 0,820 | 0,795 | 0,766 | 0,753 | 0,745 | 0,743 | 0,742 | 0,742 | 0,742    |

Trong bảng đó hệ số  $\gamma$  là tỉ số của ứng suất tiếp tại điểm giữa các cạnh ngắn so với ứng suất tiếp lớn nhất được tính với công thức (10-46) :

$$\gamma = \frac{\tau'}{\tau_{\max}} \quad (10-47)$$

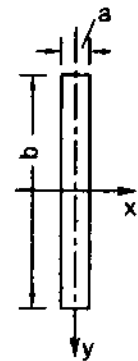
Với những mặt cắt hình chữ nhật có tỉ số 2 cạnh  $\frac{b}{a} > 4$  từ công thức (10-45) ta có :

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3} \left( 1 - 0,63 \frac{a}{b} \right), \text{ với tỉ số 2 cạnh } \frac{b}{a} > 10 \text{ ta có thể lấy :}$$

$$\alpha = \beta \approx \frac{1}{3}$$

Ví dụ với mặt cắt hình chữ nhật hẹp (h.10-14)

$$J_d = \frac{1}{3} a^3 b \quad (10-48)$$



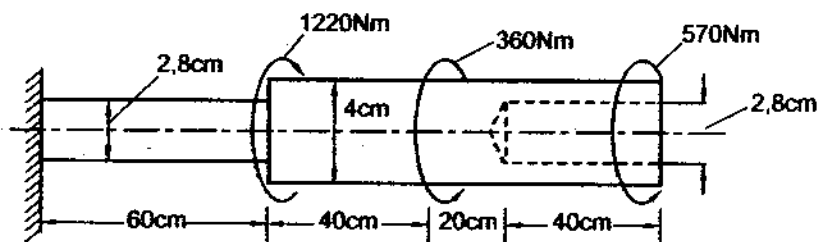
Hình 10-14

## Bài tập

### 10.1. Cho thanh chịu lực như hình vẽ (h10-15)

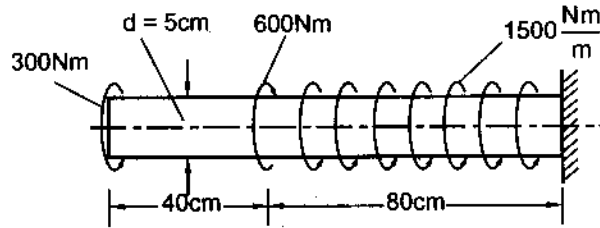
- Vẽ biểu đồ mômen xoắn của thanh.
- Tính ứng suất tiếp lớn nhất ở các mặt cắt nguy hiểm.
- Tính góc xoắn tại đầu tự do của thanh.

Cho  $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ .



Hình 10-15

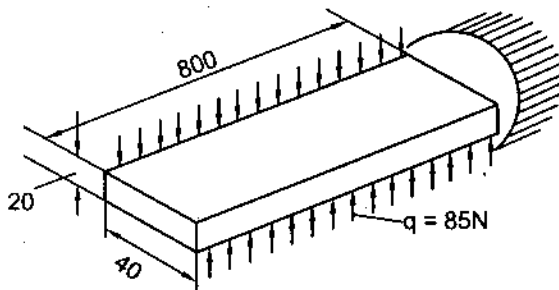
10.2. Tính ứng suất tiếp lớn nhất và góc xoắn tại các mặt cắt A và B của thanh. Cho  $G = 8.10^6 \text{N/cm}^2$  (h.10-16).



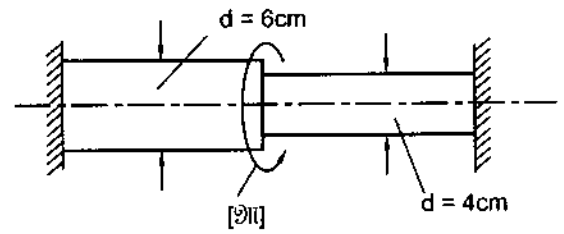
Hình 10-16

10.3. Vẽ biểu đồ mômen xoắn và biểu đồ góc xoắn của thanh. (h.10-17)

- Kiểm tra bền. Biết  $[\tau] = 7000 \text{N/cm}^2$ ,  $G = 8.10^6 \text{N/cm}^2$ .



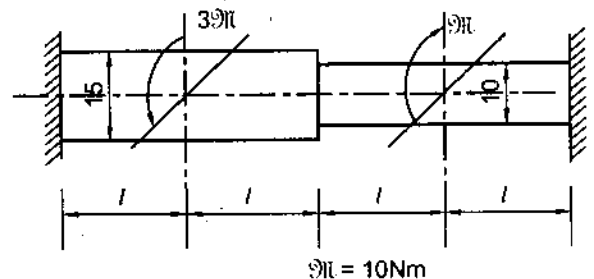
Hình 10-17



Hình 10-18

10.4. Thanh tròn có đường kính thay đổi như hình vẽ (h.10-18). Thanh bị ngàm chặt hai đầu và chịu một mômen xoắn tại mặt cắt ở giữa (mặt cắt có kích thước đường kính thay đổi). Hãy xác định mômen xoắn cho phép  $[\mathcal{M}]$  cho biết  $[\tau] = 4500 \text{N/cm}^2$ .

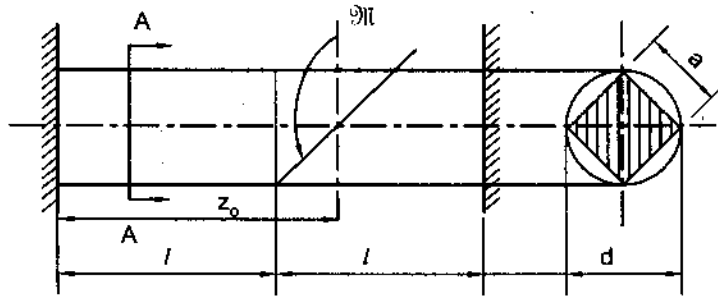
10.5. Vẽ biểu đồ mômen xoắn và tính ứng suất tiếp lớn nhất trên các mặt cắt ngang nguy hiểm của trục chịu tải và có hình dáng kích thước như trên hình vẽ. (h.10-19).



Hình 10-19

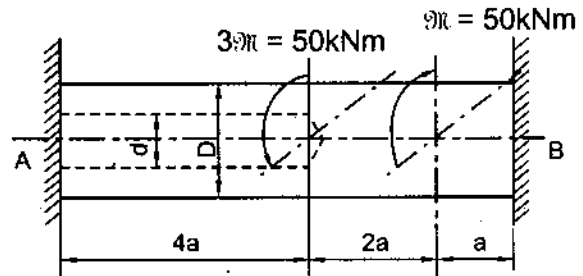
10.6. Một trục thép một nửa có mặt cắt ngang hình vuông, nửa còn lại là hình tròn. Xác định khoảng cách  $Z_0$  để mômen phản lực tại hai ngàm bằng nhau.

Nếu  $\mathcal{M} = 600 \text{Nm}$ ,  $d = 4 \text{cm}$   $[\tau] = 4500 \text{N/cm}^2$ , thì trong trường hợp đó, trục có đủ độ bền không (h.10-20).



Hình 10-20

10.7. Trục AB, đường kính bằng D, có khoan một lỗ dọc với đường kính  $d = 0,5D$  từ đầu bên trái. Xác định giá trị của D. Cho biết  $[\tau] = 6000 \text{ N/cm}^2$ . Trục chịu tải như hình vẽ. (h.10-21).

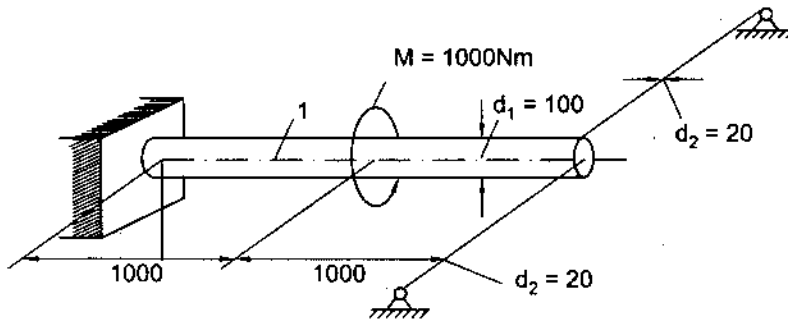


Hình 10-21

10.8. Xác định các đại lượng theo điều kiện ghi trên hình 10-22.

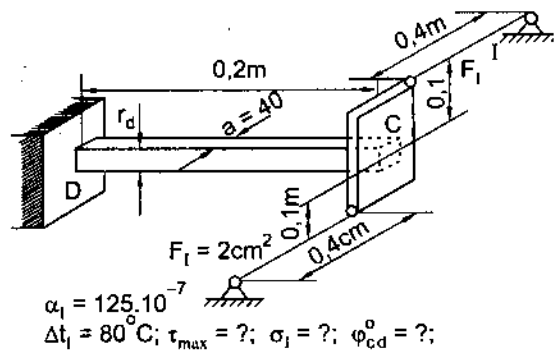
Cho biết :  $E = 2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$  ;  $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ .

Hỏi  $\tau_{\max}$  ở thanh 1,  $\sigma_z$  trong các thanh giàn 2.



Hình 10-22

10.9. Hai thanh giàn của kết cấu được đốt nóng lên với độ tăng nhiệt độ là  $80^\circ\text{C}$ . Hệ số giãn nở vì nhiệt của vật liệu là  $\alpha_1 = 125 \cdot 10^{-7}$ . Tính  $\tau_{\max}$  trong thanh vuông chịu xoắn và  $\sigma$  nén trong thanh giàn và góc xoắn của thanh chịu nén.



Hình 10-23

## Chương 11

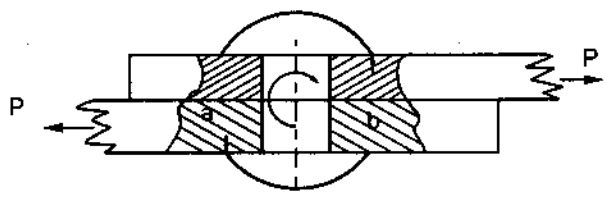
# TÍNH CÁC MỐI NỐI GHÉP

### §11-1. TÍNH MỐI NỐI BẰNG ĐINH TÁN

Ta xét trường hợp hai tấm thép được nối ghép với nhau bằng một đinh tán.

Giả sử các đầu tán là đạt tiêu chuẩn tốt, nghĩa là đinh ép chặt được hai tấm lại với nhau. Lúc đó dưới tác dụng của lực P đinh tán bị cắt qua mặt phẳng ab. Trên mặt cắt chỉ có ứng suất tiếp. Xem ứng suất tiếp là phân bố đều trên mặt cắt trị số ứng suất tiếp đó sẽ là :

$$\tau = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}}$$



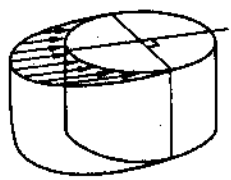
Hình 11-1

d là đường kính của đinh tán.

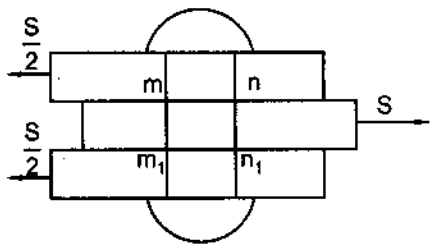
Điều kiện bền của đinh tán là  $\tau$  phải nhỏ hơn trị số ứng suất tiếp cho phép  $[\tau]$ . Trị số này được xác định bằng thí nghiệm.

Trong thực tế, mũ đinh tán ép rất chặt vào các tấm, do đó khi lực P tác dụng tạo nên ngẫu lực có khuynh hướng làm bật mũ đinh. Thân đinh ngoài lực cắt còn chịu uốn. Trong tính toán người ta bỏ qua những lực này và chỉ xét đến sự cắt của đinh.

Ngoài hiện tượng bị cắt thân đinh còn bị dập. Lực ép khá lớn làm biến dạng thân đinh. Gọi h là chiều cao bị dập của đinh thì hình chiếu diện tích bị dập trên mặt phẳng cắt qua trục đinh vuông góc với lực P sẽ là d.h.



Hình 11-2



Hình 11-3

Vậy ta phải có điều kiện là

$$\sigma_{dập} = \frac{P}{dh} \leq [\sigma_d]$$

$[\sigma_d]$  cũng được đo bằng thực nghiệm.

Đôi khi mối ghép được thực hiện với ba tấm (h.11-3).

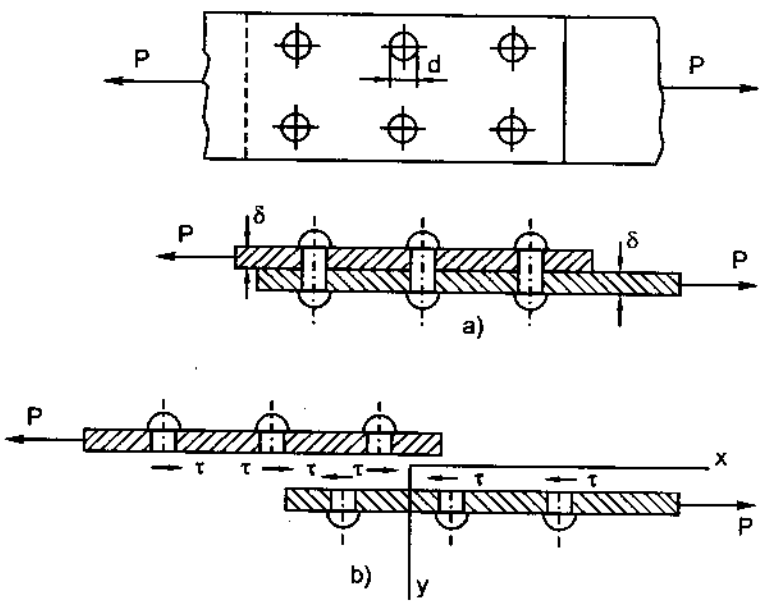
Với cách ghép này ta tránh được mômen quay làm bật mũ đinh và ở đáy thân đinh bị cắt trên hai mặt cắt. Như vậy ứng suất tiếp trên các mặt cắt sẽ là :

$$\tau = \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq [\tau]$$

Ta nhận thấy khả năng chịu tải của đinh sẽ là tốt hơn về mặt chịu cắt nhưng đinh sẽ chịu đập nặng hơn nếu diện tích đập nhỏ lại.

Trong thực tế thường phải ghép với một dãy các đinh tán ví dụ như trong hình vẽ (h.11-4).

Theo thí nghiệm của Stepin P.A, sự chịu lực của các hàng đinh là khác nhau. Các hàng đinh ở ngoài cùng chịu gấp 3 đến 4 lần hàng đinh ở giữa. Song do vật liệu của đinh là vật liệu dẻo nên khi những hàng đinh ở ngoài đạt đến giới hạn chảy thì những hàng này xem như không chịu lực nữa và lúc này hàng đinh ở giữa phát huy tác dụng. Như vậy một cách chung ta xem như các đinh làm việc là như nhau và ứng suất tiếp trên mặt cắt là :



Hình 11-4

$$\tau = \frac{P}{n \cdot \frac{\pi d^2}{4}}$$

Điều kiện bền là :

$$\tau \leq [\tau]$$

Ngoài việc tính độ bền của đinh ta còn phải tính độ bền của các tấm ghép. Phải xét các mặt cắt qua các hàng đinh. Ứng suất trên các mặt cắt này phải nhỏ hơn ứng suất cho phép.

**Ví dụ 1.** Lựa chọn sắt định hình chữ [ và xác định số đinh tán của mối nối ghép hai thanh sắt định hình với tấm phẳng dày  $\delta_\phi = 12\text{mm}$  (h.11-5).

Cho biết lực kéo  $P = 720\text{kN}$

Vật liệu thép định hình có độ bền khi kéo  $[\sigma] = 16\text{ kN/cm}^2$ .

Vật liệu đinh tán có  $[\tau] = 14\text{kN/cm}^2$  và chịu đập với ứng suất đập cho phép  $[\sigma]_{\text{đập}} = 3,2\text{kN/cm}^2$ .

## Bài giải

### 1. Xác định kích thước sắt định hình

Diện tích cần thiết :

$$F^* = \frac{P}{[\sigma]} = \frac{72000}{1600} = 45\text{cm}^2.$$

Diện tích mặt cắt sắt định hình phải lớn hơn diện tích đó. Để an toàn ví dụ chọn độ nhích hơn là 1,15 lần. Nghĩa là phải có :

$$F_{xd} = 1,15F^* = 51,75\text{cm}^2$$

Như vậy với mặt cắt sắt định hình phải có  $\frac{51,75}{2} = 25,87\text{cm}^2$ . Theo bảng số liệu của sắt [ ta chọn loại số liệu N<sup>o</sup>20 với diện tích mặt cắt ngang là  $25,0\text{cm}^2$  và chiều dày của thành là  $\delta = 5,2\text{mm}$ .

Xét điều kiện bền của sắt định hình

Với hai hàng đinh, đường kính của đinh là  $d = 23\text{mm}$ . Vậy diện tích mặt cắt ngang của thanh đã bị yếu đi một lượng là :

$$F_{giảm} = 2d.\delta = 2,39\text{cm}^2$$

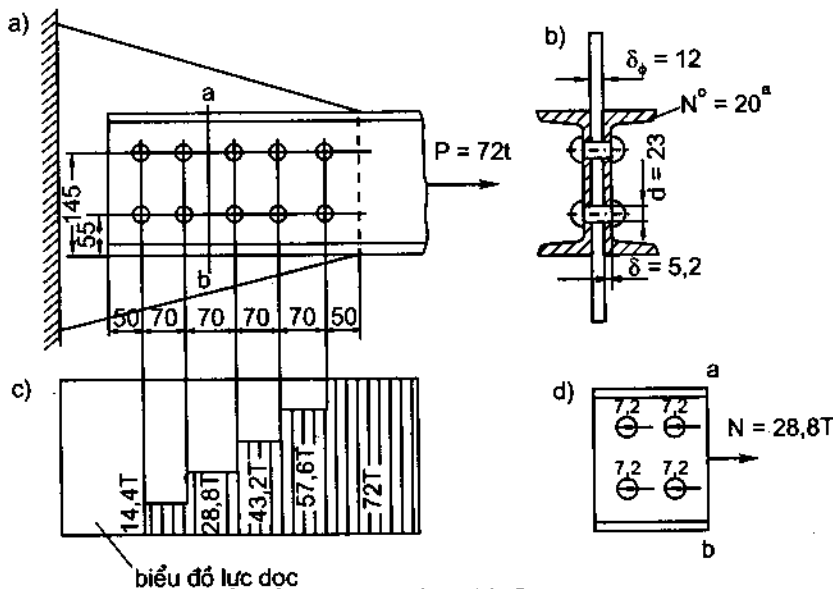
Diện tích mặt cắt ngang còn lại là :

$$F_{thực} = 2(25,0 - 2,39) = 45,22\text{cm}^2$$

Ứng suất trên mặt cắt ngang qua tâm các đinh tán là :

$$\sigma = \frac{P}{F_{thực}} = \frac{720000}{45,22} = 15,920\text{ kN/cm}^2 < 16\text{ kN/cm}^2$$

Như vậy thanh xem như đạt điều kiện bền.



Hình 11-5

1000  
1000  
1000

Xác định số đinh tán.

Trước hết ta phải xác định khả năng chịu cắt và chịu dập của một đinh tán.

a) Khả năng chịu cắt (với mỗi đinh tán chịu hai mặt cắt) :

$$[S_{\text{cắt}}] = \frac{\pi d^2}{2} [\tau] = \frac{\pi \cdot 2,3^2}{2} 14000 = 116000 \text{ N}$$

b) Khả năng chịu dập. Nếu gọi chiều dày của tấm thép nối là  $\delta_\phi = 12$  thì diện tích dập qua tấm thép sẽ là  $d \cdot \delta_\phi = 2,3 \cdot 12 = 27,6 \text{ cm}^2$ . Phần diện tích dập qua bề dày của hai thép định hình là :  $2\delta d = 2 \cdot 0,52 \cdot 2,3 = 2,39 \text{ cm}^2$ . Khả năng chịu dập của đinh là :

$$[S_{\text{dập}}] = 2,39 \cdot 32000 = 76,500 \text{ kN}$$

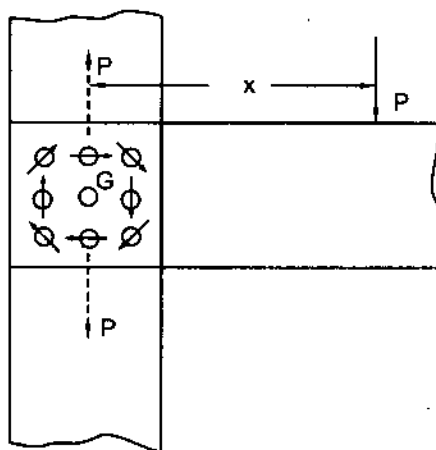
Ta thấy khả năng chịu dập yếu hơn khả năng chịu cắt. Vậy ta phải căn cứ từ điều kiện dập để xác định số lượng đinh. Số đinh tán sẽ là :

$$n = \frac{P}{[S_{\text{dập}}]} = \frac{720000}{76500} = 9,4$$

Ta chọn  $n = 10$ .

Trên hình (h.11-5c) là biểu đồ của lực dọc trong thép định hình [. Ta xem như các đinh chịu lực bằng nhau. Ví dụ ta tìm lực dọc ở trên mặt cắt (a - b) (h.11-5d) ta có  $7,2 \times 4 = 28,8$ . Vậy lực dọc trong đoạn này là  $N = 28,8$  tấn.

Một trường hợp thường gặp trong thực tế là khi mối ghép chịu lực lệch tâm như hình 11-6. Đưa lực về đúng trục qua tâm nối thì mối nối vừa chịu cắt do lực kéo (hoặc nén) đúng tâm mà còn thêm phần cắt do ngoại lực gây nên. Mômen cắt đó là bằng  $P \cdot x$ . Như vậy trên mặt cắt của đinh còn thêm một hệ ứng suất tiếp do mômen cắt gây nên. Phương của ứng suất tiếp này là vuông góc với bán kính  $r$ , khoảng cách nối từ tâm mặt cắt ngang của đinh đến tâm của mối nối. (xem hình 11-6).



Hình 11 - 6

Gọi  $\tau$  là ứng suất tiếp đó, trị số của  $\tau$  tỉ lệ với  $r$ .

$$\tau = rk \tag{1}$$

Lực cắt trên diện tích của đinh là :

$$Q = \tau \frac{\pi d^2}{4} = r \cdot k \cdot \frac{\pi d^2}{4} \tag{2}$$

Mômen do Q gây nên đối với G là

$$M = Q \cdot r = r^2 \cdot k \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

Tổng các mômen đó là bằng mômen cắt  $P.x$ . Ta có :

$$P.x = \sum r^2 \cdot k \cdot \frac{\pi d^2}{4}$$

Vậy

$$k = \frac{P.x}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot \sum r^2} \quad (3)$$

Thay ngược vào cho (1) ta có :

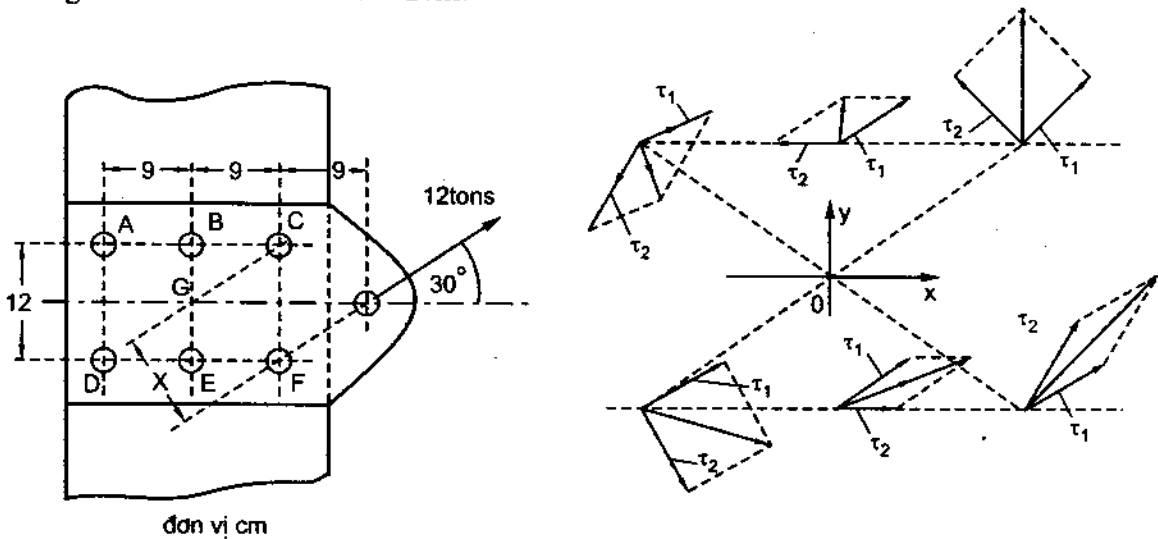
$$\tau = \frac{P.x.r}{\frac{\pi d^2}{4} \sum r^2} \quad (4)$$

Thay vào cho Q ta có :

$$Q = \frac{P.x.r}{\sum r^2} \quad (5)$$

Ví dụ 2.

Mối nối trên hình (h.11-7) của một móc lực được nối vào tấm với sáu đỉnh tán chịu một lực kéo 120000N theo phương đã chỉ như hình vẽ tính ứng suất cắt trên mỗi đỉnh tán. Đường kính của đỉnh tán là  $d = 2\text{cm}$ .



Hình 11-7

Bài giải

Tính  $x$                        $x = 18 \cdot \sin 30^\circ = 9\text{cm}$

Momen cắt                 $P_x = 120000 \cdot 9 = 1080000 \text{ N.cm}$

Thành phần ứng suất tiếp theo phương của lực cắt

$$\tau_1 = \frac{120000}{6 \times \frac{\pi}{4} \cdot 2^2} = 6360 \text{ N/cm}^2$$



Thành phần ứng suất do mômen cắt gây nên

$$\tau_2 = \frac{120000 \cdot 9 \cdot r}{\frac{\pi}{4} d^2 \sum r^2}$$

Trên mặt cắt các đỉnh ở ACFD

$$\tau_2 = \frac{120000 \cdot 9 \cdot 10,8}{\frac{\pi}{4} \cdot 2^2 \sum (4,84 + 2,36)} = 9105 \text{ N/cm}^2$$

Trên mặt cắt các đỉnh ở B và E

$$\tau_2 = \frac{120000 \cdot 9 \cdot 6}{\frac{\pi}{4} \cdot 2^2 \sum (4,84 + 2,36)} = 5058 \text{ N/cm}^2$$

Tại mỗi mặt cắt ta đều có một vectơ ứng suất tổng cộng. Các vectơ ứng suất tổng cộng này hoàn toàn khác nhau. Để xác định chúng ta có thể sử dụng phương pháp vẽ hoặc xác định một hệ trục tọa độ và tìm các thành phần hình chiếu của chúng trên các trục tọa độ đó. Ví dụ dùng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, ứng suất,  $\tau_1$  được tách thành hai thành phần

$$\tau_{1x} = \tau_1 \cos 30^\circ \text{ và } \tau_{1y} = \tau_1 \sin 30^\circ$$

$$\tau_{1x} = \tau_1 \cdot 0,866 \quad \tau_{1y} = \tau_1 \cdot 0,5$$

đối với tất cả các điểm.

Tính ứng suất tiếp toàn phần tại A. Đường GA có  $\text{tg} \alpha = -\frac{6}{9}$ ,  $\alpha \approx 33^\circ 69'$

$$\tau_{2y} = -\tau_2 \cos 33^\circ 69' = -\tau_2 \cdot 0,83205$$

$$\tau_{2x} = -\tau_2 \sin 33^\circ 69' = -\tau_2 \cdot 0,74535$$

Vậy  $\tau$  toàn phần tại đó sẽ là

$$\tau = \sqrt{(\tau_1 \cdot 0,866 - \tau_2 \cdot 0,74535)^2 + (\tau_1 \cdot 0,5 - \tau_2 \cdot 0,83205)^2}$$

Thay trị số của  $\tau_1$  và  $\tau_2$  vào đây ta có

$$\tau = \sqrt{(6360 \cdot 0,866 - 9105 \cdot 0,74535)^2 + (6360 \cdot 0,5 - 9105 \cdot 0,83205)^2}$$

$$\tau = \sqrt{(127,4,9)^2 + (439,5,63315)^2}$$

$$\tau = 4206,6 \text{ N/cm}^2$$

Sau khi tính được vectơ tổng cộng của  $\vec{\tau}_1$  và  $\vec{\tau}_2$  ta sẽ xác định được đỉnh tán chịu lực lớn nhất. Phải tiến hành kiểm tra bền với đỉnh tán đó. Nếu đỉnh tán đó đủ bền thì mối nối đủ bền. Ví dụ ở đây ta nhìn thấy rõ đỉnh tán chịu lực lớn nhất là F.

Hình chiếu của  $\tau_2$  xuống các trục tọa độ tại F là

$$\tau_{2x} = 9105.0,74535$$

$$\tau_{2y} = 9105.0,83205$$

$\tau$  toàn phần tại đó là :

$$\tau = \sqrt{(6360.0,866 - 9105.0,74535)^2 + (6360.0,5 - 9105.0,83205)^2}$$

$$\tau = \sqrt{12242,2^2 + 10725,8^2} = \sqrt{264914246}$$

$$\tau = 16276 \text{ N/cm}^2.$$

Ứng suất đó là quá cao. Cần phải tăng đường kính của đinh tán.

### §11-2. TÍNH MỐI NỐI BẰNG HÀN

Cách tính độ bền của mối hàn phải thực hiện theo cách hàn.

**1. Hàn đối đầu.** Hai tấm ghép cùng được đặt trong một mặt phẳng và được hàn nối lại với nhau. Cách hàn này được gọi là hàn mí. Khi tính độ bền của mối hàn người ta bỏ qua phần lồi lên của mối hàn và coi bề dày của mối hàn vừa bằng bề dày của tấm thép.

Công thức kiểm tra của mối hàn là như sau :

$$\sigma = \frac{N}{b.\delta} \leq [\sigma_h]$$

$[\sigma_h]$  là ứng suất cho phép của mối hàn (xem bảng 11-1)

**Bảng 11-1**

| Ứng suất cho phép | Ký hiệu        | Hàn tay                   |                          | Hàn tự động          |
|-------------------|----------------|---------------------------|--------------------------|----------------------|
|                   |                | Que hàn có lớp thuốc mỏng | Que hàn có lớp thuốc dày |                      |
| Kéo               | $[\sigma_h]_k$ | 100MN/m <sup>2</sup>      | 130MN/m <sup>2</sup>     | 130MN/m <sup>2</sup> |
| Nén               | $[\sigma_h]_n$ | 110MN/m <sup>2</sup>      | 145MN/m <sup>2</sup>     | 145MN/m <sup>2</sup> |
| Cắt               | $[\tau_h]$     | 80MN/m <sup>2</sup>       | 110MN/m <sup>2</sup>     | 110MN/m <sup>2</sup> |

**2. Hàn mép.** Hai tấm thép được đặt chồng lên nhau và hàn gắn mép của tấm thép này với mặt của tấm thép kia. Có hai cách :

a) Hàn ở đầu tấm : nghĩa là mối hàn vuông góc với hướng lực kéo. Cách này sử dụng khi bề rộng của hai tấm là bằng nhau.

b) Hàn ở cạnh tấm : mối hàn chạy dọc theo phương của lực kéo. Cách này được thực hiện khi hai tấm có chiều rộng khác nhau.

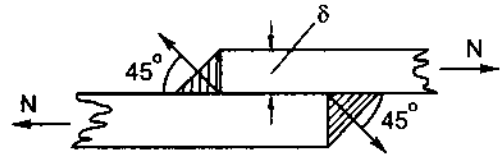
\* Trường hợp hàn ở đầu tấm : mối hàn vuông góc với phương của lực như vậy ở mỗi hàn vừa có cả ứng suất pháp cả ứng suất tiếp. Vì khả năng chịu kéo (nén) tốt hơn nên khi tính toán ta tính với ứng suất tiếp. Điều kiện bền sẽ là :

$$\tau = \frac{N}{0,7\delta l} \leq [\tau_h]$$

Hệ số 0,7 là xem mặt tác dụng của ứng suất tiếp nghiêng đi so với ứng suất chính một góc  $45^\circ$  (h.11-8).

$l$  để chỉ chiều dài tổng cộng ở cả hai đầu các tấm.

$\delta$  chiều dày của tấm.



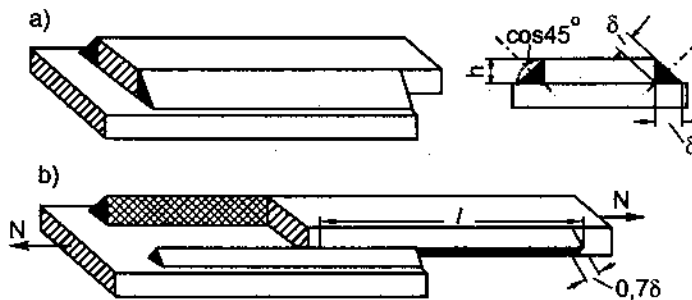
Hình 11-8

\* Trường hợp hàn theo cạnh tấm : mối hàn song song với chiều tác dụng của lực. Mặt chịu cắt yếu nhất vẫn là mặt nghiêng  $45^\circ$  (như hình 11-9) vì diện tích này nhỏ nhất. Ứng suất  $\tau$  do lực kéo gây nên là :

$$\tau = \frac{N}{2l\delta \cos 45^\circ} \leq [\tau_h]$$

$l$  là chiều dài được hàn của hai cạnh

$\delta$  là chiều dày của tấm hàn.



Hình 11-9

Ví dụ. Chọn mặt cắt ngang của hai sắt góc được hàn chặt vào tấm cố định như hình vẽ (h.11-10). Các số liệu cho phép như sau :

- Ứng suất cho phép của sắt góc khi chịu kéo  $[\sigma] = 16,00 \text{ kN/cm}^2$ .
- Ứng suất tiếp cho phép của mối hàn  $[\tau] = 11,00 \text{ kN/cm}^2$ .
- Lực kéo trên hai thanh sắt góc là 72 tấn.

### Bài giải

Sơ bộ chọn mặt cắt của sắt góc theo ứng suất pháp. Diện tích cần thiết của hai mặt cắt của sắt góc là :

$$F = \frac{N}{[\sigma]} = \frac{72000}{1600} = 45 \text{ cm}^2.$$

Tra trong bảng sắt góc ta tìm thấy loại sắt góc  $125 \times 80 \times 12$  có diện tích mặt cắt ngang là  $23,4\text{cm}^2$ . Vậy ta chọn loại này.

Kiểm tra lại độ bền của hai thanh ta có :

$$\sigma = \frac{720000}{2.23,4} = 15,4 \text{ kN/cm}^2 < 16 \text{ kN/cm}^2$$

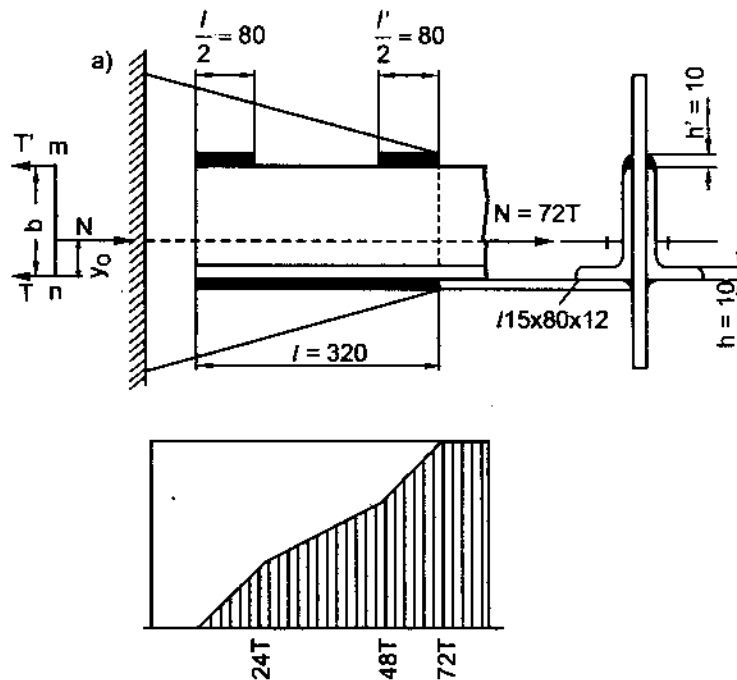
Xác định lực chịu đựng  $T$  của hai mối hàn phía trên và lực chịu đựng  $T$  của mối hàn mép dưới (h.11-10). Hai lực đó phải cân bằng với lực kéo  $N$ . Vậy ta phải có :

$$T = \frac{y_o}{b} N$$

và

$$T = \frac{b - y_o}{b} N$$

Các kí hiệu được cho như hình vẽ.



Hình 11-10

Với số hiệu sắt góc ta đã chọn ta có :

$$b = 125 \text{ mm}$$

$$y_o = 42,2 \text{ mm}$$

Vậy ta tính được :

$$T = \frac{42,2}{125} \cdot 72 = 240,000 \text{ kN}$$

$$T = \frac{82,8}{125} \cdot 72 = 480 \text{ kN}$$

Để tránh hiện tượng xoắn của thép góc ta nâng chiều cao  $h'$  của mối hàn ở phía trên lên 1 – 2 mm nhưng nhỏ hơn chiều dày  $\delta = 12\text{mm}$  của thép góc. Còn mối hàn ở dưới, chiều cao  $h$  có thể lớn hơn  $\delta$  nhưng không quá  $1,5\delta$ . Vậy cả hai phía ta nên lấy :

$$h = h' = 10\text{mm.}$$

Như vậy ta có thể xác định chiều dài  $l$  và  $l'$  của mối hàn như sau :

$$\frac{T'}{1,4l'h'} \leq [\tau] ; \quad \frac{T}{1,4lh} \leq [\tau]$$

Từ đó ta tìm thấy :

$$l' = \frac{T'}{1,4.h'[\tau]} = \frac{24000}{1,4.1.1100} = 15,6\text{cm}$$

$$l = \frac{T}{1,4.h[\tau]} = \frac{48000}{1,4.1.1100} = 31,2\text{ cm.}$$

Làm tròn số ta có  $l = 32\text{cm}$  ;  $l' = 16\text{cm}$ .

Ở phía trên, ta thực hiện hai mối hàn như hình vẽ.

Trên hình 11-11 c) ta biểu diễn lực dọc phân bố trong đoạn các mối hàn bằng cách dùng các mặt cắt và tính lực chịu đựng của các mối hàn đó. Ví dụ tính lực cắt trên 1cm mối hàn có thể chịu được là :

$$t = \frac{N}{2(l+l')} = \frac{720000}{2(32+16)} = 7500\text{ N/cm}^2.$$

Từ đó tính với từng mặt cắt khác nhau ta sẽ có biểu đồ như hình vẽ.

### §11-3. TÍNH MỘNG GỖ

Gỗ là một loại vật liệu không đẳng hướng, độ bền theo các phương khác nhau là khác nhau. Khi tính ta phải xét dọc thớ hay ngang thớ. Phải xét độ bền khi kéo, độ bền khi trượt theo thớ, theo ngang thớ và độ bền khi đập. Ta có tám nhóm gỗ. Mỗi nhóm có độ bền và dai khác nhau, đưa đến giá trị sử dụng và kinh tế khác nhau. Gỗ xây dựng thường lấy ở nhóm năm hoặc nhóm sáu như gỗ dẻ, gỗ xoan, gỗ muông v.v.. Bảng 11-2 dưới đây giới thiệu ứng suất cho phép của gỗ nhóm sáu với độ ẩm 15%.<sup>(1)</sup>

Bảng 11-2

| Hình thức chịu lực                | Kí hiệu                 | Ứng suất cho phép $\text{MN/m}^2$ |
|-----------------------------------|-------------------------|-----------------------------------|
| Nén dọc thớ                       | $[\sigma]_n$            | 13                                |
| Kéo dọc thớ                       | $[\sigma]_k$            | 10                                |
| Uốn                               | $[\sigma]_u$            | 13,5                              |
| Đập dọc thớ                       | $[\sigma]_d$            | 13,5                              |
| Đập ngang thớ (cục bộ và toàn bộ) | $[\sigma]_{90^\circ d}$ | 2                                 |
| Trượt dọc thớ                     | $[\tau]$                | 2,4                               |
| Trượt ngang thớ                   | $[\tau]_{90^\circ}$     | 2,4                               |

(1) Theo "Bản hướng dẫn thiết kế kết cấu gỗ" (dự thảo) của U.B.K.T.C.B.N.N.

Ví dụ ta có kết cấu mộng như hình vẽ (h.11-12).

Khi phương của lực đập (hay cắt) tạo một góc  $\alpha$  với phương của thớ gỗ thì ứng suất cho phép  $[\sigma]_{\alpha d}$  (hay  $[\tau]_{\alpha}$ ) có giá trị trung gian giữa  $[\sigma]_d$  và  $[\sigma]_{90^\circ d}$  (hay  $[\tau]$  và  $[\tau]_{90^\circ}$ ) và được tính theo công thức sau đây :

$$[\sigma]_{\alpha d} = \frac{[\sigma]_d}{1 + \left\{ \frac{[\sigma]_d}{[\sigma]_{90^\circ d}} - 1 \right\} \sin^3 \alpha}$$

Ví dụ. Chân của một cái kèo tựa vào đầu xà theo góc  $\alpha = 30^\circ$  (hình 11-11). Lực tác dụng dọc kéo  $P = 50\text{kN}$ . Tính bề sâu của mộng và chiều dài đầu xà ngoài mộng. Kích thước mặt cắt của xà và kèo  $20 \times 15\text{cm}$ . Ứng suất cho phép  $[\tau] = 2,4 \text{ MN/m}^2$ ,  $[\sigma]_{30^\circ d} = 6,3 \text{ MN/m}^2$ .

*Bài giải*

Đầu xà chịu một lực cắt dọc thớ N

$$N_1 = P \cdot \cos \alpha = 50 \cdot 0,866 = 43,25 \text{ kN}$$

Mặt cắt (dọc thớ), là hình chữ nhật rộng 15cm và dài a. Do đó ta có :

$$\frac{N_1}{0,15a} = [\tau] = 2,4 \text{ MN/m}^2$$

Từ đó ta tính được :

$$a = \frac{0,04325}{0,15 \cdot 2,4} = 0,12 \text{ m} = 12 \text{ cm.}$$

Lực  $N_1$  từ kèo tác dụng vào đầu xà thông qua mặt phẳng đứng tiếp xúc giữa kèo và xà làm cho ở mặt đó có hiện tượng đập. Đối với xà lực  $N_1$  song song với thớ gỗ. Đối với kèo, lực  $N_1$  tạo một góc  $\alpha = 30^\circ$  với thớ gỗ. Vì ứng suất cho phép về đập khi lực không song song với thớ gỗ nhỏ hơn ứng suất cho phép về đập khi lực song song với thớ gỗ, nên ở đây ta kiểm tra đập ở kèo với  $[\sigma]_{30^\circ d} = 6,3 \text{ MN/m}^2$ .

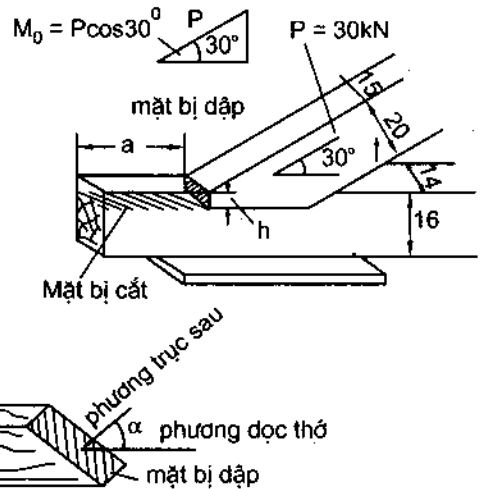
Ta tính bề sâu của mộng theo công thức :

$$\frac{N_1}{0,15h} = [\sigma]_{30^\circ d}$$

hay

$$h = \frac{N_1}{0,15[\sigma]_{30^\circ d}}$$

Thay số ta có :  $h = \frac{0,04325}{0,15 \cdot 6,3} = 0,046 \text{ m} = 4,6 \text{ cm.}$

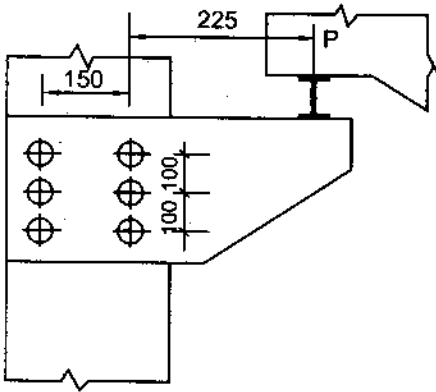


Hình 11-11

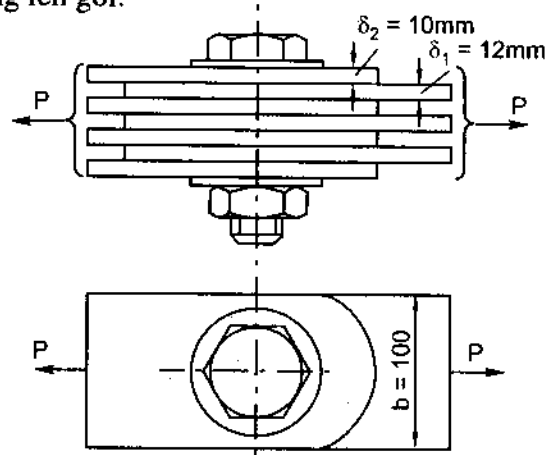
## Bài tập

11.1. Bộ phận đỡ gối dầm cầu có cấu tạo như hình 11-12. Các đinh tán có đường kính  $d = 20\text{mm}$ . Ứng suất tiếp cho phép là  $[\tau] = 6000\text{ N/cm}^2$ .

Hãy xác định tải trọng cho phép  $[P]$  tác dụng lên gối.



Hình 11-12



Hình 11-13

11.2. Giữa các mắt của một dây xích chịu lực kéo  $P = 300\text{ kN}$ , người ta dùng đinh bu lông đường kính làm việc  $d = 35\text{mm}$  để nối ghép (xem hình 11-13). Kiểm tra độ bền của đinh và của mắt xích. Cho biết :

$$[\tau] = 140\text{ MN/m}^2, [\sigma]_d = 320\text{ MN/m}^2; [\sigma] = 240\text{ MN/m}^2.$$

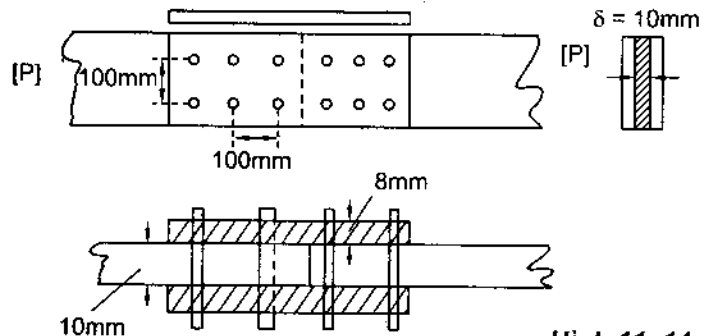
11.3. Hai tấm thép có bề rộng  $b = 180\text{mm}$  và bề dày  $\delta_2 = 10\text{mm}$  được nối với nhau bởi hai bản thép khác cùng bề rộng và có bề dày  $\delta_1 = 8\text{mm}$ . Đinh tán có đường kính  $d = 20\text{mm}$  đặt như hình vẽ (h.12-14).

Tính lực kéo cho phép  $[P]$ .

Cho biết  $[\tau] = 100\text{ MN/m}^2$ ,

$$[\sigma]_d = 280\text{ MN/m}^2,$$

$$[\sigma]_K = 160\text{ MN/m}^2.$$



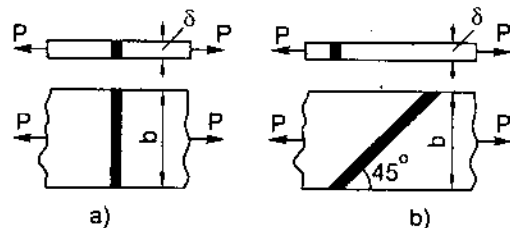
Hình 11-14

11.4. Tính lực kéo  $[P]$  cho phép đặt vào hai bản thép được hàn với nhau theo hai cách như trên hình (h.12-15). So sánh kết quả.

Cho biết  $[\sigma]_h = 100\text{ MN/m}^2$ ;

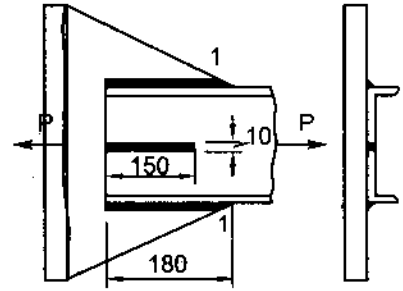
$[\tau]_h = 80\text{ MN/m}^2$  ứng suất kéo của tấm  $[\sigma] = 140\text{ MN/m}^2$ ,

$b = 150\text{ mm}$ ,  $\delta = 10\text{mm}$ .



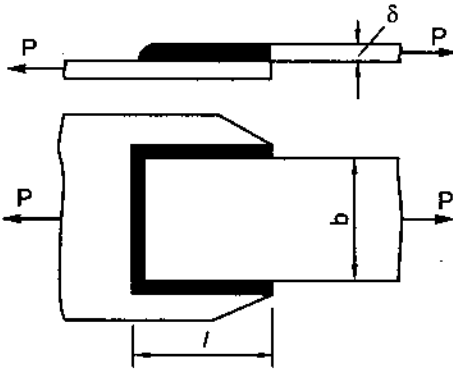
Hình 11-15

11.5. Một thanh thép chữ [ số hiệu 16 chịu lực dọc trục được hàn liền với một bản thép bằng hai mạch hàn cạnh và một mạch hàn rãnh như trên hình (h.12-16). Mạch hàn 10mm. Mạch hàn rãnh đắp đầy.

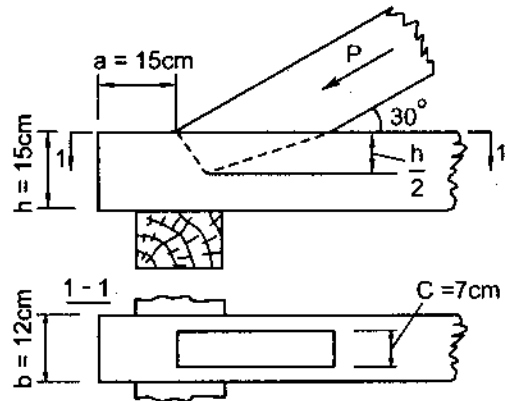


Hình 11-16

11.6. Tính chiều dài  $l$  cần thiết của mối hàn vẽ trên hình (h.12-17) biết rằng  $b = 100\text{mm}$ ,  $\delta = 10\text{mm}$ ,  $[\tau]_h = 80\text{MN/m}^2$ ,  $P = 150\text{ kN}$ .



Hình 12-17



Hình 12-18

11.7. Kiểm tra độ bền của liên kết mộng ở dầm gỗ, biết rằng :

$$P = 30\text{ kN}, [\tau] = 2,4\text{ MN/m}^2, [\sigma_d] = 9\text{ MN/m}^2,$$

$$[\sigma_d]_{30^\circ} = 6\text{ MN/m}^2, [\sigma_k] = 10\text{ MN/m}^2, \text{ xem hình vẽ (h.12-18).}$$



## Chương 12

# BÀI TOÁN CHỊU LỰC PHỨC TẠP

Chương này đề cập đến các trường hợp chịu lực phức tạp khác của thanh như trường hợp vừa uốn vừa xoắn ; vừa uốn vừa xoắn vừa kéo ; vừa xoắn vừa cắt hay trường hợp thanh có độ cong lớn. Với các bài toán có kể đến xoắn chúng ta chỉ đề cập đến hai dạng mặt cắt đặc biệt là tròn và hình chữ nhật.

### §12-1. BÀI TOÁN UỐN VÀ XOẮN ĐỒNG THỜI

Ta gọi bài toán là "uốn và xoắn đồng thời" khi trên mặt cắt ngang của thanh vừa có thành phần mômen uốn vừa có thành phần mômen xoắn.

#### 1. Với thanh có mặt cắt tròn

Giả sử trên mặt cắt ngang có mômen uốn  $M_u$  nằm trong mặt phẳng  $vOz$  và một mômen xoắn  $M_z$  có chiều như hình 12-1.

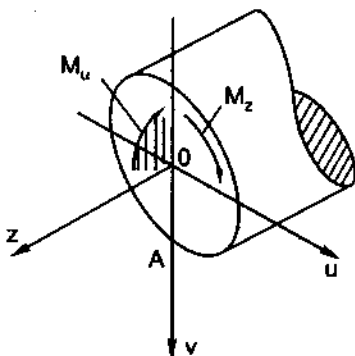
Vấn đề đặt ra là ta phải tìm thấy điểm có trạng thái ứng suất nguy hiểm nhất.

Với cách chịu lực như hình 12-1 ta nhìn thấy ngay điểm A là điểm nguy hiểm nhất vì tại đó đồng thời ta có ứng suất pháp lớn nhất và ứng suất tiếp lớn nhất. Trị số các ứng suất đó là :

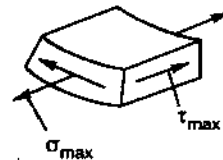
$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_u} ; \quad \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$$

Trạng thái ứng suất tại A được biểu diễn như trên hình 12-2. Trạng thái ứng suất đó là trạng thái ứng suất phẳng, vậy để kiểm tra điều kiện bền của phần tử ta phải sử dụng các thuyết bền. Theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta phải có :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$



Hình 12-1



Hình 12-2

Thay trị số của  $\sigma_{\max}$  và  $\tau_{\max}$  vào ta có :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\left(\frac{M_u}{W_u}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Vì  $W_p = 2W_u$  nên ta có thể viết lại như sau :

$$\sigma_{td} = \frac{1}{W_u} \sqrt{M_u^2 + M_z^2} \leq [\sigma]$$

Biểu thức  $\sqrt{M_u^2 + M_z^2}$  có thể xem là một mômen tương đương :

$$M_{td} = \sqrt{M_u^2 + M_z^2} \quad (12-1)$$

và như vậy điều kiện bền là :

$$\sigma_{td} = \frac{M_{td}}{W_u} \leq [\sigma] \quad (12-2)$$

Ta thấy (12-2) có dạng của bài toán uốn thuần túy mà ta gặp trước đây.

Đôi khi hệ trục tọa độ lựa chọn ban đầu là một hệ trục Oxyz nào đó không chứa mômen uốn  $M_u$ , ta tính được hai thành phần  $M_x, M_y$  của  $M_u$ . Khi đó biểu thức của mômen tương đương sẽ có dạng :

$$M_{td} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (12-3)$$

Nếu sử dụng thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng ta phải có :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$

từ điều kiện đó ta tính được mômen tương đương như sau :

$$M_{td} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_z^2} \quad (12-4)$$

Nếu sử dụng thuyết bền của Mohr ta phải có :

$$\sigma_1 - \nu\sigma_3 \leq [\sigma]$$

và từ điều kiện đó ta có mômen tương đương là :

$$M_{td} = \frac{1-\nu}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+\nu}{2} \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (12-5)$$

Tóm lại trong mọi trường hợp điều kiện bền của thanh là :

$$\sigma_{td} = \frac{M_{td}}{W_u} \leq [\sigma] \quad (12-6)$$

Trị số của  $W_u$ , trong trường hợp tổng quát nhất, được tính với biểu thức :

$$W_u = \frac{\pi R^3}{4} (1 - \eta^4) \approx 0,1D^3(1 - \eta^4)$$

trong đó  $\eta$  là tỉ số của bán kính trong và bán kính ngoài của thanh rỗng. Vậy đường kính của thanh được xác định từ điều kiện bền (12-6) là :

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{td}}{[\sigma] \cdot 0,1 \cdot (1 - \eta)^4}} \quad (12-7)$$

$M_{td}$  được xác định bởi một trong các biểu thức (12-3), (12-4) hoặc (12-5)

## 2. Với thanh, mặt cắt là hình chữ nhật

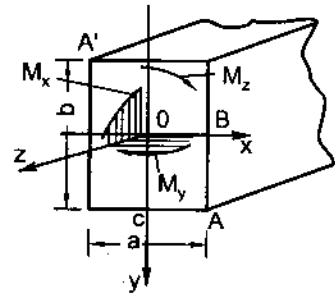
Giả sử các thành phần nội lực có chiều hướng như trên hình 12-3. Trong trường hợp này ta có ba điểm nguy hiểm cần xét. Đó là các điểm A, B, C.

Tại A ứng suất tiếp do  $M_z$  gây nên là bằng không, ứng suất pháp do  $M_x$  và  $M_y$  gây nên là lớn nhất. Trị số của ứng suất pháp đó là :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

Trạng thái đó là trạng thái ứng suất đơn, vậy điều kiện bền là :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} + \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma] \quad (12-8)$$



Hình 12 - 3

Ta nhận thấy tại A', điểm đối xứng với A qua O, ứng suất pháp nén tại đó có trị số bằng trị số ứng suất kéo  $\sigma_{\max}$ .

Tại B và C ta có hai thành phần ứng suất. Ứng suất pháp do các mômen uốn  $M_x$ ,  $M_y$  gây nên và ứng suất tiếp do mômen xoắn gây nên. Trị số các ứng suất đó là :

$$\text{Tại B : } \sigma_{\max} = \frac{M_y}{W_y} ; \tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha a^2 b}$$

$$\text{Tại C : } \sigma' = \frac{M_x}{W_x} ; \tau' = \gamma \tau_{\max}$$

Trị số  $\tau_{\max}$  và  $\tau'$  được tính từ công thức (10-46) và (10-47). Trạng thái ứng suất tại những điểm này không phải là trạng thái ứng suất đơn do đó ta phải sử dụng các thuyết bền để kiểm tra bền các phân tố.

Ví dụ sử dụng thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta có điều kiện bền tại B và C như sau :

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{\alpha a^2 b}\right)^2} &\leq [\sigma] \\ \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 4\gamma^2\left(\frac{M_z}{\alpha a^2 b}\right)^2} &\leq [\sigma] \end{aligned} \right\} \quad (12-9)$$

## §12-2. BÀI TOÁN UỐN CỘNG KÉO, CỘNG XOẮN

Ta gọi là bài toán "uốn cộng kéo, cộng xoắn" khi trên mặt cắt ngang của thanh có cả ba thành phần : lực dọc  $N_z$ , mômen uốn  $M_x, M_y$  và mômen xoắn  $M_z$ .

### 1. Với thanh có mặt cắt tròn

Giả sử chiều các thành phần nội lực như hình 12-4.

Điểm nguy hiểm vẫn là điểm A. Tại đó trị số ứng suất pháp là :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W_u} + \frac{N_z}{F}$$

và trị số ứng suất tiếp là :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p}$$

Trạng thái ứng suất tại đó là trạng thái ứng suất phẳng vậy ta phải sử dụng các thuyết bền để kiểm tra bền. Ví dụ theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất ta phải có :

$$\sqrt{\left(\frac{M_u}{W_u} + \frac{N_z}{F}\right)^2 + 4\left(\frac{M_z}{W_p}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Khi hệ trục tọa độ ban đầu không trùng với hệ O<sub>uvz</sub> và ta có các thành phần mômen uốn của  $M_u$  là  $M_x, M_y$  thì  $M_u$  được xác định bằng biểu thức :

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

### 2. Với thanh có mặt cắt ngang hình chữ nhật

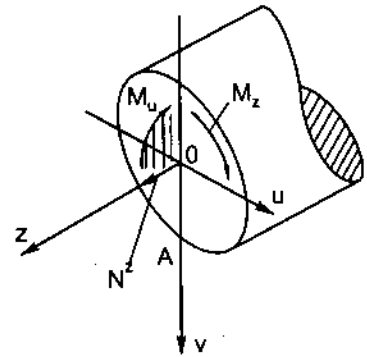
Giả sử chiều của các thành phần nội lực được biểu diễn trên hình 12-5. Các điểm nguy hiểm vẫn là các điểm A, B, C.

Tại A trạng thái ứng suất là trạng thái đơn. Điều kiện bền sẽ là :

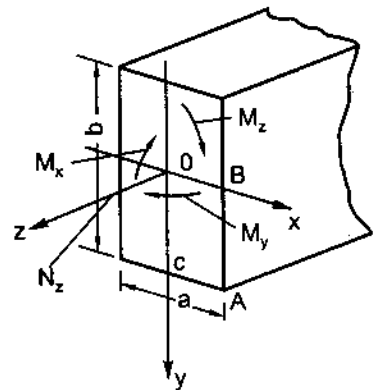
$$\sigma_A = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] \quad (12-10)$$

Tại B và C trạng thái ứng suất là trạng thái ứng suất phẳng. Các trị số ứng suất là :

$$\text{Tại B : } \sigma_B = \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{F} ; \tau_B = \frac{M_z}{\alpha a^2 b}$$



Hình 12-4

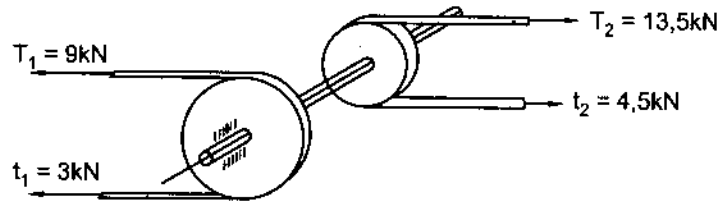


Hình 12-5

$$\text{Tại C: } \sigma_C = \frac{M_x}{W_x} + \frac{N_z}{F}; \tau_C = \gamma \tau_B = \gamma \frac{M_z}{\alpha a^2 b}$$

Ta phải sử dụng các thuyết bền để kiểm tra điều kiện bền tại các điểm đó.

**Ví dụ 1.** Một trục truyền bằng thép đặt trên các gối tựa A và B mang các puli C và D. Chiều dài của trục, đường kính của các puli và khoảng cách các puli trên trục được cho như trên hình 12-6. Puli C được kéo bởi một mô-tơ qua các đai truyền lực theo phương ngang và gây nên lực kéo  $P_1 = 6\text{kN}$  trên đai truyền. Puli D nối với máy chịu tải cũng bằng các đai truyền lực theo phương ngang và có chiều ngược lại. Trọng lượng của các puli là  $G_1 = G_2 = 1,8\text{kN}$ . Xác định đường kính của trục truyền. Xem trục có mặt cắt ngang không đổi suốt chiều dài của trục và trọng lượng bản thân phân bố đều với cường độ  $q = 0,45\text{kN/m}$ . Ứng suất cho phép khi kéo của vật liệu làm trục là bằng  $[\sigma] = 12,00\text{kN/cm}^2$ . Lực ma sát ở gối tựa xem như không đáng kể.



Hình 12-6

### Bài giải

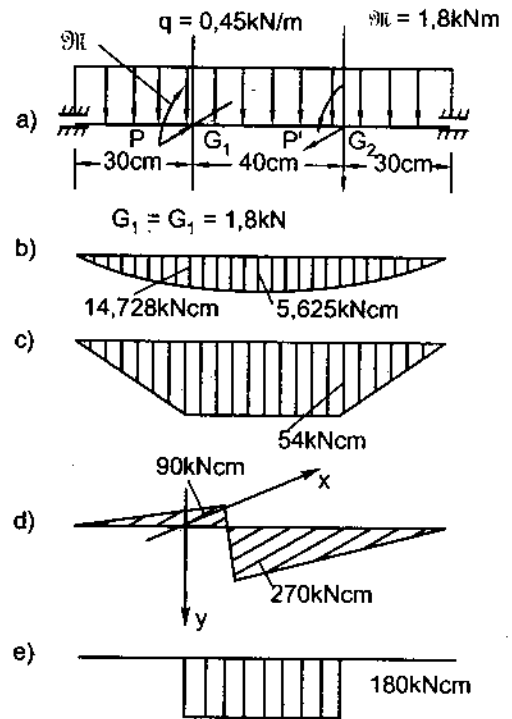
Ta phải tìm lực kéo  $P_2$  với puli thứ hai tác động lên máy chịu tải. Từ đẳng thức cân bằng của mômen xoắn ta có:

$$\frac{P_1 D_1}{2} = \frac{P_2 D_2}{2}$$

thay:  $6 \cdot 30 = P_2 \cdot 20$ ; Vậy:  $P_2 = 9\text{kN}$ .

Để các đai truyền không bị trượt trên mặt của các puli, trên các đai phải có một sức căng ban đầu nào đó. Trị số lực căng phải đủ để tạo nên lực ma sát giữa puli và đai truyền, nó phụ thuộc nhiều yếu tố (vật liệu làm đai truyền, vật liệu của puli, chiều dài và trọng lượng của đai truyền v.v...). Song nói chung sức căng đó biến thiên trong khoảng từ 1/3 đến 1/2 của lực kéo.

Trong trường hợp đang xét, giả sử sức căng ban đầu đó là bằng một nửa của lực kéo. Như vậy sức căng trong nhánh đai chủ động là bằng  $T_1 = 1,5P_1 = 9\text{kN}$  và trong nhánh đai bị động là



- b) Biểu đồ  $M_x$  do  $q$  gây nên
- c) Biểu đồ  $M_x$  do trọng lượng  $G_1, G_2$  gây nên
- d) Biểu đồ  $M_y$  do  $P$  và  $P'$  gây nên
- e) Biểu đồ  $M_z$  do  $G_1$  gây nên

Hình 12-7

$t_1 = 0,5P_1 = 3\text{kN}$ . Tương tự như vậy ta tính được sức căng trong các nhánh đai chủ động và bị động trên puli thứ hai là  $T_2 = 1,5 P_2 = 13,5\text{kN}$  và  $t_2 = 0,5P_2 = 4,5\text{kN}$  (h.12-6). Gọi  $P$  và  $P'$  là hợp lực của  $T_1 + t_1$  và  $T_2 + t_2$ . Sơ đồ chịu lực của trục có thể biểu diễn như trên hình vẽ 12-7 và các biểu đồ nội lực được biểu diễn như trên hình 12-7b, c, d, e.

Mô men uốn tổng cộng tại các mặt cắt ngang tại C và D là :

Tại C :  $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{58,7^2 + 90^2} = 108,6 \text{ kNcm.}$

Tại D :  $M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{58,7^2 + 270^2} = 276,7 \text{ kNcm.}$

Vậy mặt cắt ngang nguy hiểm là tại D.

Mômen tương đương theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất là :

$$M_{td} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{276,7^2 + 180^2} = 330,1 \text{ kNcm}$$

Đường kính của trục thanh là :

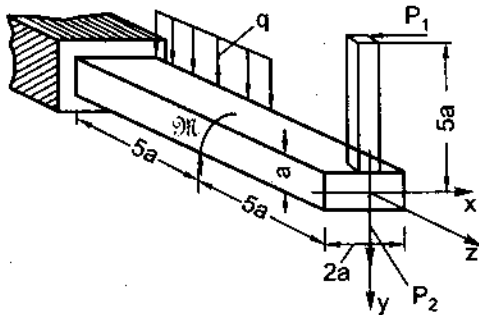
$$d = \sqrt[3]{\frac{330,1}{12,0,1}} = 6,5\text{cm.}$$

**Ví dụ 2.** Xác định trị số tải trọng của phép  $[q]$  tác dụng lên thanh chịu lực như hình 12-8.

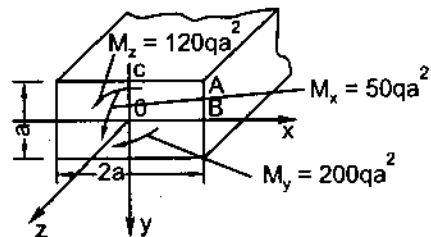
Các lực cho như sau :

$$P_1 = 20qa ; P_2 = 3,75qa.$$

$$M = 25qa^2.$$



Hình 12-8



Hình 12-9

*Bài giải*

Ta nhận thấy dễ dàng mặt cắt tại ngàm là mặt cắt nguy hiểm nhất. Các thành phần nội lực trên mặt cắt đó được biểu diễn như trên hình 12-9. Các trị số được tính như sau :

$$M_z = -25qa^2 + 5qa^2 - 20qa \cdot 5a = -120qa^2$$

$$M_x = -q5a \frac{5a}{2} - 3,75 \cdot qa \cdot 10a = -50qa^2$$

$$M_y = 200qa^2$$

Các điểm nguy hiểm trên mặt cắt là A, B, C. Đầu tiên ta dựa vào điểm A để xác định trị số tải trọng cho phép. Tại đó ta có điều kiện :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]$$

Thay số vào ta có :

$$\sigma_{\max} = \frac{50qa^2 \cdot 6}{2a \cdot a^2} + \frac{200qa^2 \cdot 6}{a(2a)^2} \leq [\sigma]$$

Từ đó ta rút ra được :

$$450 \frac{[q]}{a} = [\sigma]$$

Với điểm C : Sử dụng thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng ta có :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 3\left(\frac{M_z}{W_d}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Từ đó ta có :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\left(\frac{50 \cdot qa^2 \cdot 6}{2a \cdot a^2}\right)^2 + 3\left(\frac{120 \cdot qa^2}{0,2462a \cdot a^2}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Ta rút ra được :

$$449 \frac{[q]}{a} = [\sigma]$$

Với điểm B ta có :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\left(\frac{200 \cdot qa^2 \cdot 6}{a(2a)^2}\right)^2 + 3\left(0,796 \cdot \frac{120qa^2}{0,2462a \cdot a^2}\right)^2} \leq [\sigma]$$

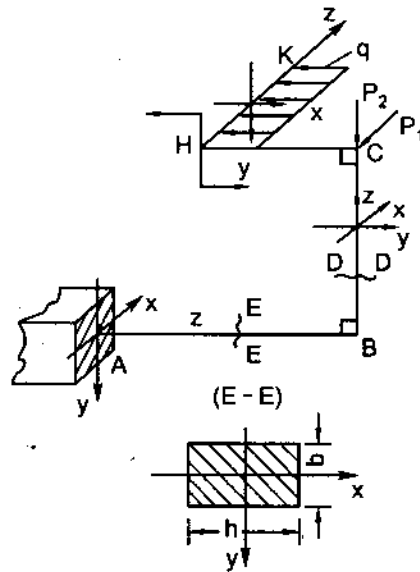
Ta rút ra được :

$$451 \frac{[q]}{a} = [\sigma]$$

Điểm nguy hiểm là tại B. Từ đó ta có :

$$[q] = \frac{a[\sigma]}{451} = 2,65 \text{ kN/m}$$

**Ví dụ 3 :** Cho một khung gậy khúc không gian chịu lực như hình 12-10. Xác định mặt cắt ngang nguy hiểm của khung và chọn kích thước mặt cắt ngang trong các đoạn AB và BC, biết rằng : trong đoạn AB thanh có mặt cắt hình chữ nhật với chiều cao  $h = 2b$ , trong đoạn BC mặt cắt ngang là hình tròn và  $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

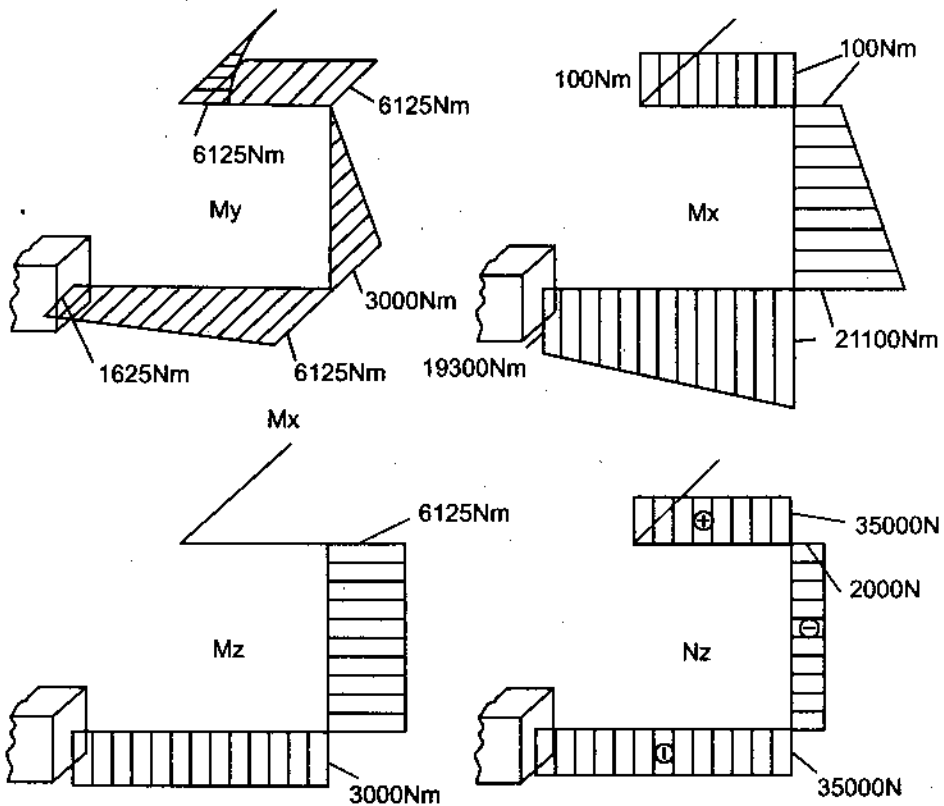


$M = 10000\text{Ncm}$  ;  $P_1 = 5000\text{N}$   
 $P_2 = 2000\text{N}$  ;  $q = 1000\text{N/cm}$ .  
 $AB = l_1 = 90\text{cm}$   
 $BC = l_2 = 60\text{cm}$   
 $CH = l_3 = 50\text{cm}$   
 $HK = l_4 = 35\text{cm}$

Hình 12-10

*Bài giải*

Hệ trục tọa độ chọn cho mỗi đoạn thanh biểu diễn trên hình 12-10. Các biểu đồ nội lực được biểu diễn trên hình 12-11..



Hình 12-11



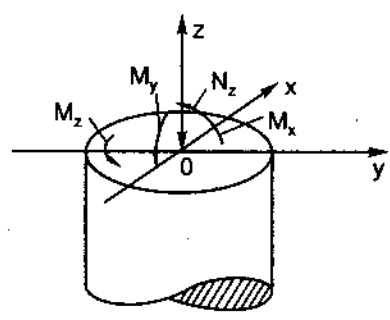
a) Chọn đường kính cho thanh BC

Mặt cắt nguy hiểm của đoạn thanh BC là mặt cắt ngang sát tại B. Trên mặt cắt đó ta có các trị số nội lực như sau :

$$N_z = -2000N ; M_z = -6125 Nm ;$$

$$M_y = 3000Nm ; M_x = 21100Nm.$$

Chiều các nội lực được biểu diễn trên hình 12-12.



Hình 12-12

Điểm nguy hiểm là điểm có ứng suất nén lớn nhất. Trị số ứng suất pháp tại đó là :

$$\sigma_{\min} = -\left(\frac{M_u}{W_u} + \frac{N_z}{F}\right) = -\frac{\sqrt{21,1^2 \cdot 10^6 + 3^2 \cdot 10^6}}{0,1d^3} = \frac{2000 \cdot 4}{3,14d^2}$$

$$\sigma_{\min} = \frac{21,31 \cdot 10^3}{0,1d^3} - \frac{2000}{0,785d^2}$$

Trị số ứng suất tiếp là :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{6125}{0,2d^3}$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng, điều kiện bền của phần tử là :

$$\sigma_{td} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{21,31 \cdot 10^3}{0,1d^3} + \frac{2000}{0,785d^2}\right)^2 + 3\left(\frac{6125}{0,2d^3}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Thay trị số  $[\sigma]$  vào và rút gọn ta được phương trình :

$$d^6 - 0,065 \cdot 10^{-8} d^2 - 1,09 \cdot 10^{-7} d - 4,82 \cdot 10^{-6} = 0$$

Giải phương trình, cuối cùng ta tìm thấy :  $d = 0,13m$ .

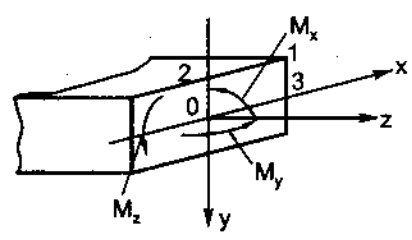
b) Chọn kích thước cho thanh AB

Mặt cắt nguy hiểm của đoạn thanh AB cũng là mặt cắt sát tại B. Trị số nội lực trên mặt cắt đó là :

$$N_z = -35000N ; M_z = -3000Nm ;$$

$$M_x = -21100Nm ; M_y = -6125Nm.$$

Chiều các thành phần nội lực được biểu diễn như hình 12-13.



Hình 12-13

Các điểm nguy hiểm trên mặt cắt là 1, 2, 3. Ta chọn kích thước mặt cắt ngang từ điều kiện bền của ba điểm đó.

Điều 1. Trị số ứng suất nén lớn nhất tại đó là :

$$\sigma_{\min} = -\left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{F}\right) = -\left(\frac{21,1 \cdot 10^3 \cdot 6}{2b \cdot b^2} + \frac{6,125 \cdot 10^3 \cdot 6}{b(2b)^2} + \frac{35000}{b(2b)}\right)$$

Điều kiện bền của phân tố là :

$$\left| \frac{21,1 \cdot 10^3 \cdot 6}{2b^3} + \frac{6,125 \cdot 10^3 \cdot 6}{4b^3} + \frac{35000}{2b^2} \right| \leq [\sigma]$$

Thay trị số  $[\sigma]$  vào, ta đi đến phương trình :

$$b^3 - 1,75 \cdot 10^{-4} b - 725 \cdot 10^{-5} = 0$$

Giải phương trình ta tìm thấy  $b \approx 0,091\text{m}$ .

Điểm 2. Ứng suất pháp tại điểm đó có trị số là :

$$\sigma = -\left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{N_z}{F}\right) = -\left(\frac{21,1 \cdot 10^3 \cdot 6}{2b \cdot b^2} + \frac{35000}{2b \cdot b}\right)$$

Trị số ứng suất tiếp là :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_d} = \frac{3 \cdot 10^3}{0,246 \cdot 2b \cdot b^2}$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng, điều kiện bền của phân tố là :

$$\sigma_{\text{id}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{21,1 \cdot 10^5 \cdot 6}{2b \cdot b^2} + \frac{35000}{2b \cdot b}\right)^2 + 3\left(\frac{3 \cdot 10^5}{0,246 \cdot 2b \cdot b^2}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Thay trị số của  $[\sigma]$  vào và rút gọn ta được phương trình

$$b^6 - 3,06 \cdot 10^{-8} b^2 - 2,2 \cdot 10^{-7} b - 40,8 \cdot 10^{-8} = 0$$

Giải phương trình ta được

$$b \approx 0,086\text{m}.$$

Điểm 3. Ứng suất pháp tại đó là :

$$\sigma = -\left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{F}\right) = -\left(\frac{6125 \cdot 6}{4b^3} + \frac{35000}{2b^2}\right)$$

Trị số ứng suất tiếp tại đó là :

$$\tau = \gamma \tau_{\max} = 0,786 \cdot \frac{3000}{0,246 \cdot 2bb^2}$$

Theo thuyết bền thế năng biến đổi hình dáng, điều kiện bền của phân tố là :

$$\sigma_{\text{id}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{6125 \cdot 6}{4b^3} + \frac{35000}{2b^2}\right)^2 + 3\left(0,786 \cdot \frac{3 \cdot 10^3}{0,246 \cdot 2b^3}\right)^2} \leq [\sigma]$$

Thay trị số ứng suất cho phép vào và rút gọn ta được phương trình :

$$b^6 - 3,06 \cdot 10^{-8} b^2 - 321 \cdot 10^{-10} b - 155 \cdot 10^{-10} = 0$$

Giải phương trình ta có :  $b \approx 0,075\text{m}$ .

Như vậy để thỏa mãn điều kiện bền ở cả ba điểm ta phải chọn  $b = 9,1\text{cm}$  ;  $h = 2b = 18,2\text{cm}$ .

Qua ví dụ trên ta thấy rằng trong bài toán chọn kích thước của mặt cắt ngang khi thanh chịu lực tổng quát, ta thường gặp phải các phương trình bậc 6 hay bậc 3. Vì vậy để đơn giản thường người ta sơ bộ chọn trước kích thước của mặt cắt với giả thiết là trên mặt cắt không có lực dọc  $N_z$ . Sau khi sơ bộ chọn kích thước, người ta kiểm tra lại độ bền của thanh, khi có cả lực dọc  $N_z$  tác dụng. Nếu điều kiện bền không thỏa mãn thì ta tăng kích thước của mặt cắt. Cách giải quyết bài toán như vậy tránh phải giải quyết các phương trình bậc 6 hay bậc 3.

Ví dụ, nếu ta chưa tính đến ảnh hưởng của lực dọc  $N_z$ , đối với điểm 1 ta có điều kiện bền là :

$$\frac{21,1 \cdot 10^3 \cdot 6}{2b^3} + \frac{6,125 \cdot 10^3 \cdot 6}{4b^3} \leq 100 \cdot 10^6$$

hay :

$$b^3 = 72,5 \cdot 10^{-5}$$

$$b \approx 0,09\text{m}.$$

Đối với điểm 2, tương tự ta tìm thấy ;  $b^6 = 40,8 \cdot 10^{-8}$  ;  $b \approx 0,085\text{m}$ .

Đối với điểm 3, ta có :  $b^6 = 155 \cdot 10^{-10}$  ;  $b \approx 0,074\text{m}$ .

Ta thấy những trị số này không khác nhiều so với kết quả tính ở trên.

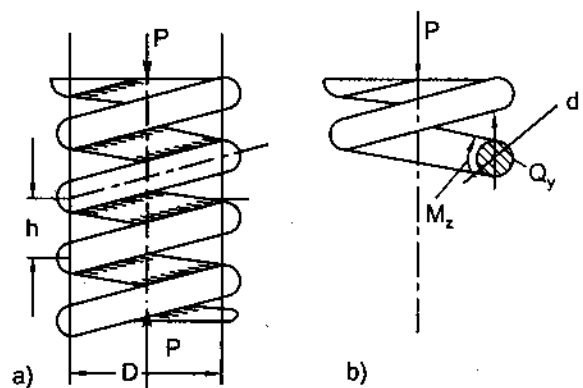
### §12-3. TÍNH Lò XO XOẮN ỐC HÌNH TRỤ BƯỚC NGẮN

Ở đây ta chỉ đề cập đến việc tính toán lò xo hình trụ xoắn ốc bước ngắn có hình dáng như trên hình 12-14.

Các đặc trưng hình học của lò xo là :

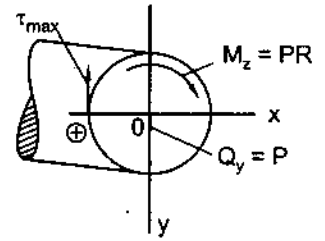
- $h$  là bước của lò xo ;
- $D$  là đường kính trung bình của lò xo ;
- $d$  là đường kính của dây lò xo ;
- $\alpha$  là góc nghiêng của các vòng dây lò xo ;
- $n$  là số vòng dây làm việc của lò xo.

Tương tự cắt lò xo bằng một mặt cắt đi qua trục của lò xo (h.12-14b) chia lò xo thành hai phần, xét cân bằng của



Hình 12-14

phần trên. Trên mặt cắt của dây phải có hai thành phần nội lực  $Q_y = P$  và  $M_z = P \cdot R$  để cân bằng với  $P$ . Ta giả thiết rằng góc nghiêng  $\alpha$  của vòng lò xo là rất bé (bước  $h$  của đường xoắn ốc là ngắn). Vậy ta có thể xem mặt cắt ngang của vòng lò xo là tròn. Ứng suất do mômen xoắn  $M_z$  và lực cắt  $Q_y$  gây nên trên mặt cắt là ứng suất tiếp. Một cách gần đúng ta có thể xem ứng suất tiếp do lực cắt  $Q_y$  gây nên trên mặt cắt là phân bố đều có phương song song với  $Q_y$  và một hệ ứng suất tiếp do mômen xoắn  $M_z$  gây nên. Vậy ứng suất tiếp tại một điểm nào đó trên mặt cắt là tổng hình học của hai thành phần ứng suất tiếp đó.



Hình 12-15

Ứng suất tiếp lớn nhất là tại điểm 1. Trên chu vi mép trong của mặt cắt (h.12-15), trị số ứng suất tiếp tại đó là :

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{W_p} + \frac{Q_y}{F}$$

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{8PD}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{2D} \right) \quad (12-11)$$

Trong thực tế đường kính của dây lò xo thường là bé hơn đường kính trung bình của dây rất nhiều  $\left( \frac{D}{d} > 5 \right)$  nên tỉ số  $\frac{d}{2D}$  có thể bỏ qua so với 1, công thức (12-11) có thể viết lại dưới dạng :

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (12-12)$$

Điều đó có nghĩa là đã bỏ qua ảnh hưởng của lực cắt trong khi tính ứng suất, coi ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang chỉ do riêng  $M_z$  gây nên.

Quá trình tính toán trên đây ta đã không để ý đến độ cong của dây vì vậy sự tính toán đó chỉ là gần đúng.

Với phép tính chính xác hơn ta có :

$$\tau_{\max} = K \frac{8PD}{\pi d^3} \quad (12-13)$$

trong đó  $K$  là hệ số điều chỉnh có kể cả ảnh hưởng của lực cắt và độ cong của vòng dây,  $K$  có thể tính với công thức sau đây :

$$K = \frac{\frac{D}{d} + 0,25}{\frac{D}{d} - 1} \quad (12-14)$$

Trong thực tế người ta còn dùng loại lò xo có mặt cắt ngang của dây là hình chữ nhật hay hình vuông (h.12-16) ; nếu chỉ kể đến ảnh hưởng của mômen xoắn thì ứng suất tiếp lớn nhất trên mặt cắt được tính với công thức :

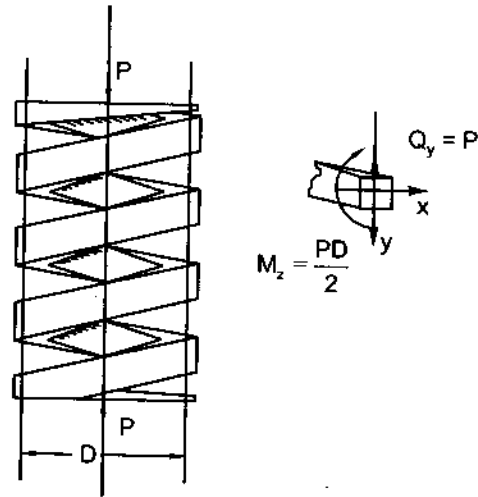
$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{\alpha a^2 b} = \frac{PD}{2\alpha a^2 b} \quad (12-15)$$

Điều kiện bền của lò xo là :

$$\tau_{\max} \leq [\tau]$$

Ngoài việc tính độ bền thường phải tính đến độ co hay độ giãn của lò xo. Gọi  $\lambda$  là độ co hay độ giãn do lực  $P$  gây nên, công ngoại lực trên biến dạng đó là :

$$A = \frac{1}{2} P\lambda$$



Hình 12-16

Về trị số công đó bằng thế năng biến dạng đàn hồi  $U$  tích lũy trong lò xo. Mặt khác ta có thể tính thế năng  $U$  theo cách sau đây. Xét một đoạn thanh vô cùng bé  $dz$ . Đoạn thanh đó chịu một mômen xoắn  $M_z$ . Công biến dạng đàn hồi do  $M_z$  gây nên trên góc xoắn tương đối giữa hai mặt cắt là bằng thế năng biến dạng đàn hồi tích lũy trong phần tử. Ta có :

$$dU = \frac{M_z \theta dz}{2}$$

Góc xoắn tỉ đối  $\theta$  được tính với công thức (10-7) vậy từ đó ta có :

$$dU = \frac{M_z^2 dz}{2GJ_p}$$

Lấy tích phân trên chiều dài  $l$  của lò xo ta có :

$$U = \frac{M_z^2 l}{2GJ_p}$$

So sánh  $A$  và  $U$  ta được :

$$P\lambda = \frac{M_z^2 l}{2GJ_p}$$

Nếu gọi  $n$  là số vòng làm việc của lò xo thì  $l = \pi Dn$ . Vậy ta có :

$$\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4} \quad (12-16)$$

Công thức (12-16) còn có thể viết dưới dạng :

$$\lambda = \frac{P}{C} \quad (12-16')$$

C được gọi là độ cứng của lò xo,

$$C = \frac{Gd^4}{8D^3n} \text{ N/m} \quad (12-17)$$

**Ví dụ 4.** Kiểm tra độ bền của lò xo hình trụ, dây lò xo có mặt cắt ngang là tròn, lực kéo tác dụng lên dây là  $P = 3 \cdot 10^3 \text{ N}$ . Đường kính trung bình của lò xo là  $D = 0,2 \text{ m}$ . Đường kính của dây làm lò xo là  $d = 2 \text{ cm}$ . Số vòng làm việc của lò xo là  $n = 18$ ,  $[\tau] = 2,5 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$ ,  $G = 8 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$ .

Tính độ giãn của lò xo.

### Bài giải

1. Ứng suất tiếp lớn nhất trong lò xo là :

$$\tau_{\max} = \frac{8PD}{\pi d^3} = 1,91 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$$

Một cách chính xác hơn, ta phải tính thêm hệ số điều chỉnh. Với  $\frac{D}{d} = 10$ ;  $K = 1,14$ .

Vậy :

$$\tau_{\max} = 1,14 \cdot 1,91 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2 = 2,18 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$$

$\tau_{\max} < [\tau]$  vậy lò xo đủ bền.

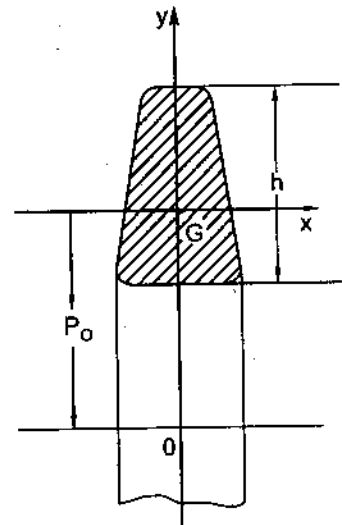
2. Độ giãn của lò xo là :

$$\lambda = \frac{8PD^3n}{Gd^4} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 20^3 \cdot 18}{8 \cdot 10^6 \cdot 2^4} = 27 \text{ cm.}$$

## §12-4. TÍNH THANH CÓ ĐỘ CONG LỚN

Trong các phần trên ta chỉ mới để ý tính ứng suất trong các thanh thẳng. Ở đây ta sẽ xét đến trường hợp chịu lực của các thanh cong. Ta hạn chế bài toán trong những điều kiện sau đây : Giả sử thanh có một mặt đối xứng trục của thanh cũng như ngoại lực đều nằm trong mặt đối xứng đó. Trên hình 12-17 biểu diễn một mặt cắt ngang bất kì của thanh. Gọi G là trọng tâm của mặt cắt ngang và O là tâm cong tương ứng với G của trục thanh. Kí hiệu h là chiều cao của mặt,  $\rho_0$  và  $\rho$  là bán kính cong OG trước và sau biến dạng của thanh.

Ta phân biệt hai trường hợp : Thanh cong có độ cong bé  $\left( \frac{h}{\rho_0} \leq 0,2 \right)$  và thanh có độ cong lớn. Với thanh có độ cong



Hình 12-17

bé, để tính ứng suất, ta có thể sử dụng các công thức của thanh thẳng nhưng để tính chuyển vị ta phải sử dụng công thức :

$$\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} = \frac{M_x}{EJ_x} \quad (12-18)$$

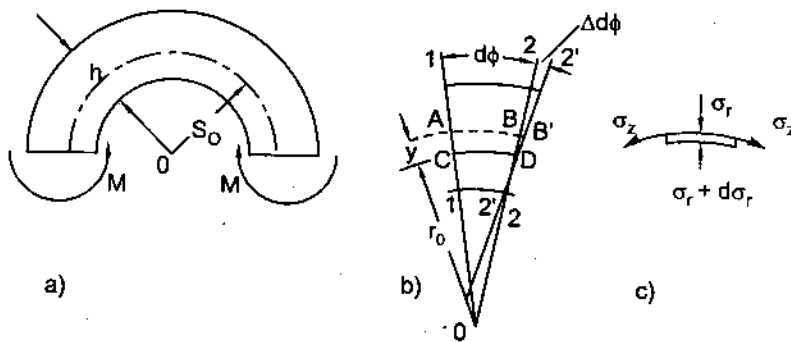
thay cho công thức (7-17).

Ta hãy xét trường hợp thanh có độ cong lớn.

Xét trường hợp thanh chịu uốn thuần túy như được biểu diễn trên hình 12-18. Để tính ứng suất trên mặt cắt ngang ta dựa vào các giả thuyết sau đây :

- Trong quá trình biến dạng mặt cắt ngang của thanh vẫn phẳng và thẳng góc với trục của thanh.

- Thừa nhận rằng ứng suất pháp theo các phương vuông góc với trục của thanh là bằng không.



Hình 12-18

Với các giả thuyết đó ta suy ra trạng thái ứng suất của một phần tử nào đó trong lòng thanh là trạng thái ứng suất đơn. Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng là :

$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

là phương tiếp tuyến với trục của thanh.

Ta thấy ngay rằng giả thuyết thứ hai chỉ là một giả thuyết gần đúng. Thực vậy, nếu ta xét một dải AB vô cùng bé cắt song song với trục cong (h.12-18c). Hai đầu mút của dải chịu các ứng suất pháp  $\sigma_z$  có phương tạo với nhau một góc  $d\phi$  thì rõ ràng trị số ứng suất theo hướng kính phải thay đổi mới tạo nên sự cân bằng của phần tử. Nói một cách khác ứng suất theo phương vuông góc với trục của thanh không thể bằng không được. Ứng suất đó sẽ làm thay đổi hình dáng của mặt cắt ngang. Song vì biến dạng là vô cùng bé, nhất là khi thanh có chiều cao h khá lớn thì sự thay đổi này không đáng kể có thể bỏ qua được.

Xét biến dạng dài của AB.

Tách khỏi thanh một phần tử vô cùng bé bởi hai mặt cắt tạo với nhau một góc  $d\phi$  đi qua A và B (h.12-18b). Sau biến dạng mặt cắt đi qua B xoay đi đối với mặt cắt đi qua A một

góc  $\Delta d\varphi$  chung quanh D ; CD là một thứ trung hòa nào đó song song với trục thanh. Độ dài của CD là không đổi trong quá trình thanh biến dạng. Vị trí của CD là chưa được xác định. Gọi  $r_0$  và  $r$  là bán kính cong của CD trước và sau biến dạng. Biến dạng dài  $\epsilon_z$  của AB được xác định bởi tỉ số :

$$\epsilon_z = \frac{BB'}{AB} = \frac{y\Delta d\varphi}{(y + r_0)d\varphi}$$

trong đó :  $y$  là khoảng cách từ AB đến lớp trung hòa,  $B'$  là vị trí của B sau biến dạng.

Để tính tỉ số  $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}$  ta hãy tính độ dài của CD trước và sau biến dạng.

Ta có :

$$CD = r_0 d\varphi = r(d\varphi + \Delta d\varphi)$$

Vậy :

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = r_0 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Do đó ta có :

$$\epsilon_z = \frac{y}{r_0 + y} r_0 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Hay :

$$\sigma_z = E \frac{y}{r_0 + y} r_0 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (12-19)$$

Biểu thức (12-19) cho ta thấy sự phân bố ứng suất theo chiều cao  $y$  không còn là sự phân bố bậc nhất như trong thanh thẳng. Qua biểu thức đó ta cũng thấy rõ rằng với thanh có độ cong bé nghĩa là khi tỉ số  $h/\rho_0$  là bé so với đơn vị thì biểu thức (12-19) có thể viết lại dưới dạng :

$$\sigma_z = E y \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

Đối với thanh thẳng, khi  $\frac{1}{r_0} = 0$ , ta có :

$$\sigma_z = \frac{E y}{\rho} = \frac{M_x}{J_x} y \quad (r \text{ đóng vai trò của } \rho \text{ và tỉ số } \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E J_x})$$

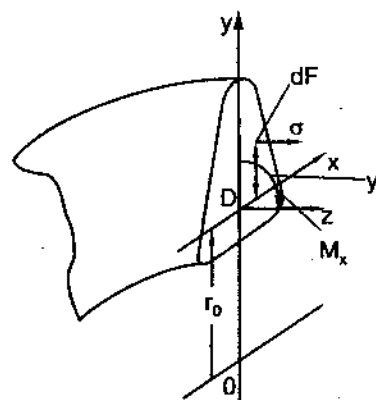
Ta xác định các tương quan giữa nội lực và ứng suất.

Vì thanh chịu uốn thuần túy nên ta có (h.12-19) :

$$N_z = \int_F \sigma_z dF = E r_0 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \int_F \frac{y dF}{r_0 + y} = 0$$

$$\text{Vậy : } \int_F \frac{y dF}{r_0 + y} = 0$$

$$\text{Mặt khác : } M_x = \int_F \sigma_z y dF = E r_0 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \int_F \frac{y^2 dF}{r_0 + y}$$



Hình 12-19



Hay có thể viết dưới dạng :

$$M_x = Er_o \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) \left( \int_F y dF - r_o \int_F \frac{y dF}{r_o + y} \right)$$

Số hạng thứ hai trong ngoặc là bằng không còn số hạng thứ nhất là mômen tĩnh của mặt cắt ngang đối với đường trung hòa đi qua D. Nếu gọi e là khoảng cách từ trọng tâm G của mặt cắt ngang đến đường trung hòa thì biểu thức mômen tĩnh đó là tích của diện tích F và e. Trị số của e chẳng qua là hiệu của  $\rho_o$  và  $r_o$ . Từ đó biểu thức mômen được viết dưới dạng :

$$M_x = Er_o \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_o} \right) F_o e \quad (12-21)$$

với 
$$e = \rho_o - r_o \quad (12-22)$$

Thay (12-21) vào (12-19) ta được công thức của ứng suất như sau :

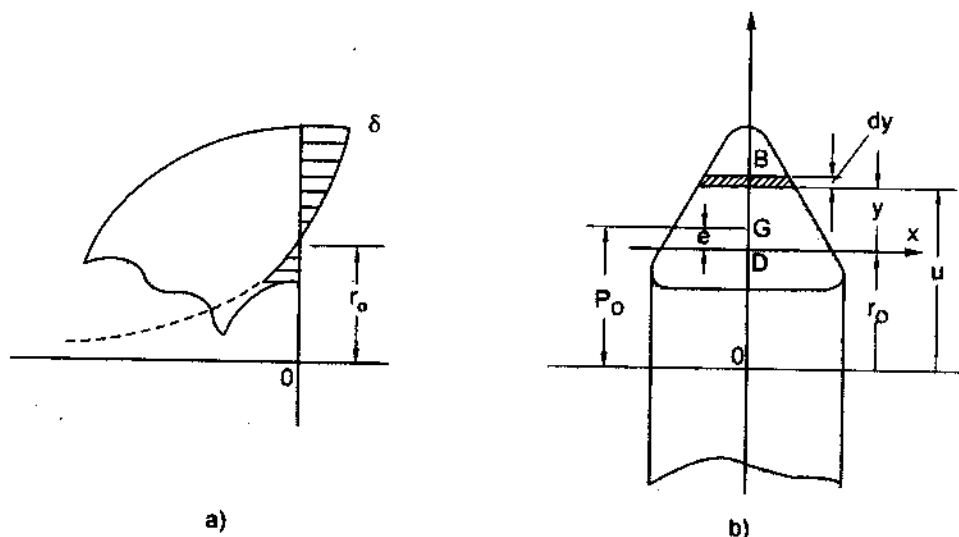
$$\sigma_z = \frac{M_x}{F_o e} \frac{y}{r_o + y} \quad (12-23)$$

Để xác định  $r_o$  ta sử dụng biểu thức tích phân (12-20). Đổi biến số mới với  $u = r_o + y$ . Biểu thức tích phân được viết lại dưới dạng :

$$\int_F \frac{u - r_o}{u} dF = 0$$

Từ đó ta có :

$$r_o = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{u}} \quad (12-24)$$

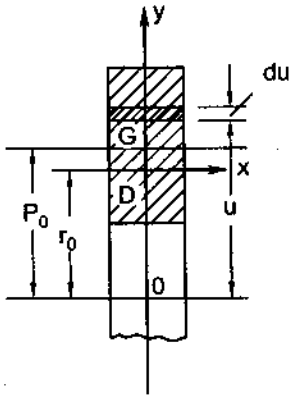


Hình 12-20

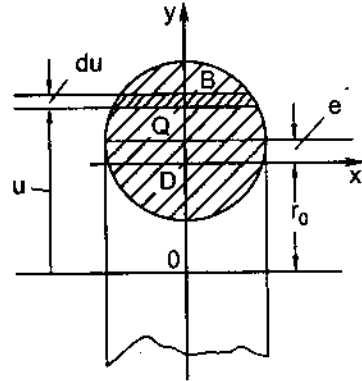
Biểu thức tích phân ở mẫu số là một đặc trưng hình học của mặt cắt ngang mà ta sẽ trình bày cách tính trong những ví dụ cụ thể sau.

Từ biểu thức (12-23) ta có thể vẽ được biểu đồ biểu diễn sự biến thiên của ứng suất theo chiều cao của mặt cắt ngang như trên hình 12-20a. Một trong những đường tiệm cận của hàm số đi qua tâm cong của mặt cắt ngang. Tùy theo hình dạng của mặt cắt ngang ứng suất có trị số lớn nhất có thể nằm về phía bên trong hoặc bên ngoài của mặt cắt ngang.

**Ví dụ 5.** Xác định bán kính cong có thứ trung hòa cho thanh cong có mặt cắt ngang là hình chữ nhật (h.12-21) và hình tròn (h.12-22).



Hình 12-21



Hình 12-22

*Bài giải*

Trước tiên ta hãy tính tích phân :  $I = \int_{\mathcal{F}} \frac{dF}{u}$

Tích phân đó có trị số là :

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{dF}{u} = b \int_{\rho_0 - \frac{h}{2}}^{\rho_0 + \frac{h}{2}} \frac{du}{u} = b \ln \frac{\rho_0 + \frac{h}{2}}{\rho_0 - \frac{h}{2}}$$

Vậy ta có :  $r_0 = \frac{h}{\ln \frac{\rho_0 + h/2}{\rho_0 - h/2}}$

Độ lệch giữa trục trung hòa và trọng tâm mặt cắt ngang là

$$e = \rho_0 - r_0 = \rho_0 - \frac{h}{\ln \frac{\rho_0 + h/2}{\rho_0 - h/2}} \quad (12-25)$$

Tương tự đối với hình tròn, sau khi thực hiện các phép tích phân ta có :

$$e = \frac{1}{2}(\rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 - R^2}) \quad (12-26)$$

Độ lệch  $e$  cũng có thể tính như sau :

Từ (12-20) ta có :

$$\int_F \frac{y dF}{r_o + y} = \int_F \frac{y - e + e}{r_o + e + y - e} dF = \int_F \frac{y_1 + e}{\rho_o + y_1} dF = 0$$

trong đó :  $y_1 = y - e$  - tọa độ của  $dF$  đối với trục qua trọng tâm.

Từ đó ta có :

$$e = - \frac{\int_F \frac{y_1}{\rho_o + y_1} dF}{\int_F \frac{1}{\rho_o + y_1} dF}$$

Sử dụng biểu thức khai triển của hàm mũ

$$\left(1 + \frac{y_1}{\rho_o}\right)^{-1} = 1 - \frac{y_1}{\rho_o} + \left(\frac{y_1}{\rho_o}\right)^2 + \dots$$

và sử dụng hai số hạng đầu ta có :

$$e \approx - \frac{\int_F y_1 \left(1 - \frac{y_1}{\rho_o}\right) dF}{\int_F \left(1 - \frac{y_1}{\rho_o}\right) dF}$$

Vì rằng  $\int_F y_1 dF = 0$

nên ta có :  $e \approx \frac{J_x}{\rho_o F}$  (12-27)

Trong đó  $J_x$  là mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với hệ trục hệ quán tính chính trung tâm của mặt cắt.

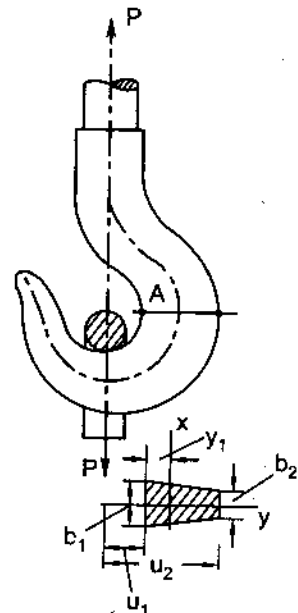
**Ví dụ 6.** Xác định ứng suất tại A của móc có mặt cắt ngang hình thang cân (h.12-23) với các kích thước như sau  $b_1 = 4\text{cm}$ ,  $b_2 = 1\text{cm}$ ,  $u_1 = 3\text{cm}$ ,  $u_2 = 10\text{cm}$ ,  $h = 7\text{cm}$ . Lực  $P = 20\text{kN}$ .

### Bài giải

Xác định trọng tâm của mặt cắt ngang : Chọn hệ trục ban đầu qua đáy lớn của mặt cắt. Tọa độ trọng tâm của mặt cắt được xác định với biểu thức :

$$y_o = \frac{\int_F y dF}{F} = \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2} \cdot \frac{h}{3} = 2,8\text{cm}$$

Vậy :  $\rho_o = y_o + u_1 = 5,8\text{cm}$ .



Hình 12 - 23

Mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với đáy lớn là :

$$\frac{b_2 h^3}{3} + \frac{(b_1 - b_2) h^3}{12} = 200,1 \text{ cm}^4$$

Vậy mômen quán tính của mặt cắt ngang đối với trục quán tính chính trung tâm song song với đáy lớn là :

$$J_x = 200,1 - 2,8^2 \cdot 17,5 = 62,9 \text{ cm}^4$$

trong đó diện tích mặt cắt ngang  $F = \frac{b_1 + b_2}{2} h = 17,5 \text{ cm}^2$ .

Vậy ta có :  $e \approx \frac{J_x}{\rho_o F} = \frac{62,9}{5,8 \cdot 17,5} = 0,620 \text{ cm}$

Ứng suất tại A sẽ là :

$$\sigma_{3A} = \frac{P \rho_o}{F e} \cdot \frac{y_o - e}{u_1} = 7,77 \text{ kN/cm}^2$$

Đó là ứng suất do uốn thuần túy gây nên, song trên mặt cắt ngang ta còn thêm thành phần lực dọc  $N_z = P$ . Vậy ứng suất tại A còn phải tính thêm ứng suất do lực dọc gây nên. Trị số ứng suất đó là :

$$\sigma_{3A} = \frac{N_z}{F} = \frac{P}{F} = 1,14 \text{ N/cm}^2$$

Ứng suất toàn phần tại A là :  $\sigma_A = 8,91 \text{ kN/cm}^2$

nếu trị số độ lệch e được tính một cách chính xác ta được :

$$e = \rho_o - \frac{F}{\left( b_2 + u_2 \frac{b_1 - b_2}{u_2 - u_1} \right) \ln \frac{u_2}{u_1} - (b_1 - b_2)} = 0,598 \text{ cm}$$

thì trị số  $\sigma_A = 9,20 \text{ kN/cm}^2$ .

Nếu xét với một mặt cắt ngang bất kì thì ngoài các thành phần mômen uốn  $M_x$  lực dọc  $N_z$  ta còn có thành phần lực cắt. Thành phần này gây nên ứng suất tiếp, nhưng ta thường bỏ qua ảnh hưởng của nó.

Trong trường hợp mặt cắt ngang có những hình dạng khác biểu thức tích phân (12-24) được tính với phương pháp gần đúng hoặc phương pháp đồ thị, ở đây chúng ta không đề cập đến.

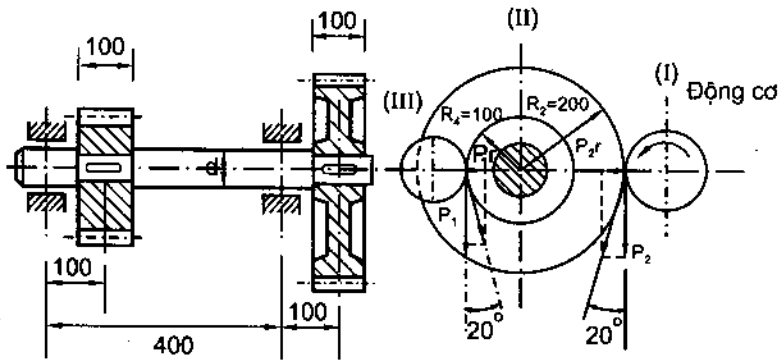
## Bài tập chương 12

### A. Uốn và xoắn

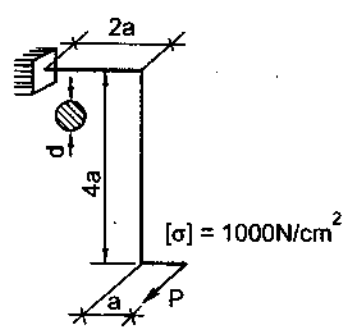
**12.1.** Trục truyền (II) có bánh xe răng hình trụ răng thẳng truyền công suất  $N = 10$  mã lực từ động cơ (I) quay với tốc độ  $n = 100$  vòng/ph đến bánh xe (III). Phương các lực tác dụng được biểu diễn như trên hình (h.12-24). Ứng suất cho phép của vật liệu của trục là  $[\sigma] = 10 \text{ kN/cm}^2$ .

Xác định kích thước của trục. Xét hai trường hợp : bỏ qua lực hướng tâm và có tính lực hướng tâm.

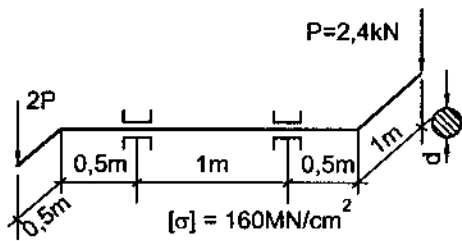
12.2. Cho các kết cấu chịu lực như hình vẽ (h.12-25), (h.12-26), (h.12-27), (h.12-28). Tính kích thước của mặt cắt theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất.



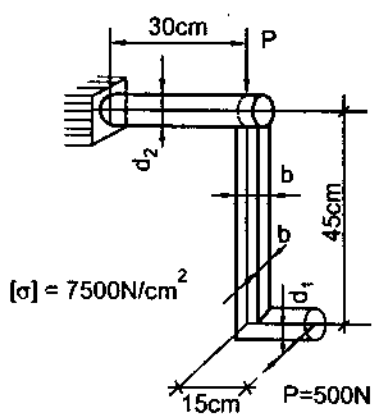
Hình 12-24



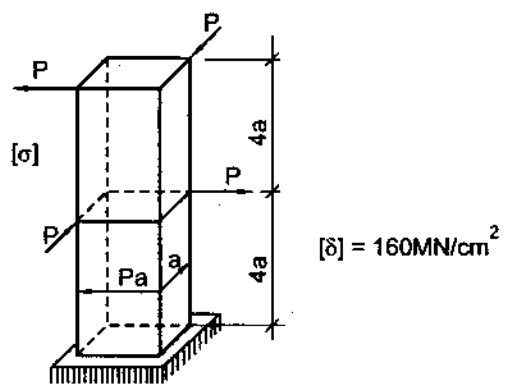
Hình 12-25



Hình 12-26



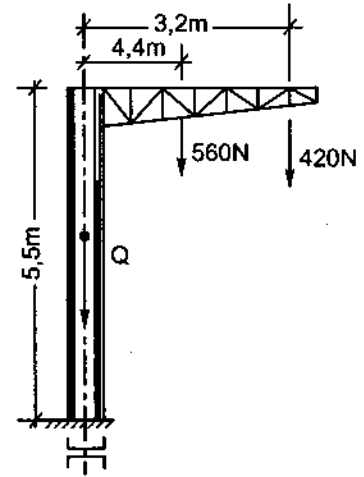
Hình 12-27



Hình 12-28

**B. Uốn cộng kéo (nén)**

12.3. Cột treo dây điện gồm hai thép chữ [ số hiệu 14a. (h.12-29). Trọng lượng dây 420N, trọng lượng tay với móc dây 560N. Xác định ứng suất kéo và nén lớn nhất tại mặt cắt chân cột có xét cả trọng lượng của cột. (Trọng lượng riêng của thép  $\gamma = 7,8$ ).



Hình 12-29

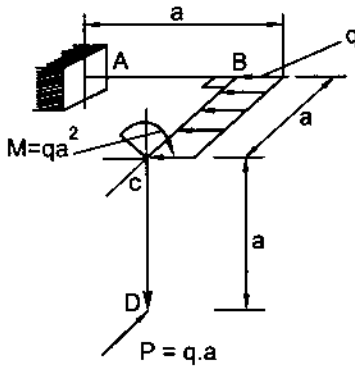
12.4. Vẽ biểu đồ nội lực của khung không gian (h.12-30). Xác định mặt cắt nguy hiểm, từ đó tính giá trị tải trọng cho phép  $[q]$ . Cho biết  $a = 1m$ , mặt cắt ngang của các thanh là hình vuông  $6 \times 6cm$ .

$$[\sigma] = 16 \text{ kN/cm}^2.$$

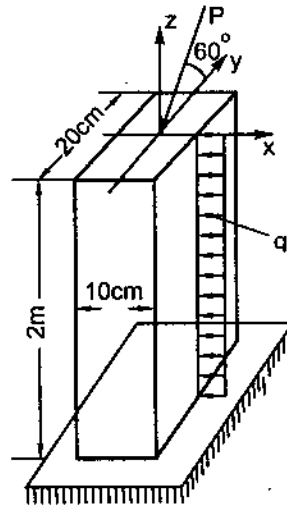
Khi tính có thể bỏ qua tác dụng của lực cắt. Tính độ bền theo thuyết bền ứng suất tiếp lớn nhất (mômen  $M$  nằm trong mặt phẳng vuông góc với BC).

12.5. Xác định  $\sigma_{max}$ ,  $\sigma_{min}$  và vị trí trục trung hòa tại mặt cắt nguy hiểm của cột hình (12-31).

Cho biết :  $q = 2kN/m$   $P$  nằm trong mặt phẳng  $yOz$  và làm với trục  $y$  một góc  $60^\circ$ .  $P = 80kN$ , (h.12-31).



Hình 12-30

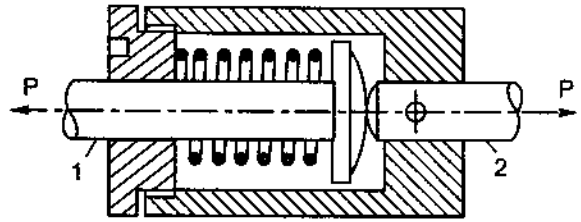


Hình 12-31

### C. Tính lò xo xoắn ốc

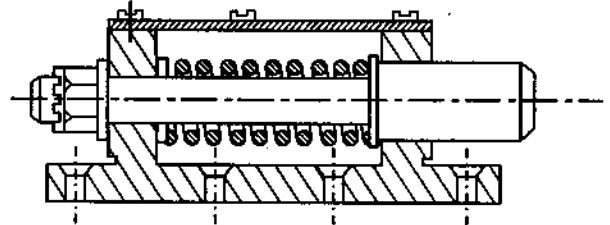
12.6. Một thiết bị an toàn có cấu tạo như trên hình vẽ (h.12-32). Mong muốn là khi lực  $P \geq 300\text{N}$  thì thanh 1 tách khỏi thanh cố định 2. Vậy hỏi lò xo trong thiết bị đã bị ép trước một độ co  $\lambda$  là bao nhiêu? Tính ứng suất tiếp lớn nhất trong lò xo ở trạng thái đó.

Cho biết :  $D = 32\text{mm}$ ,  $d = 4\text{mm}$ ,  $n = 6$  vòng vật liệu là thép.



Hình 12-32

12.7. Bộ phận giảm chấn trong cần trục cấu tạo như hình (h.12-33). Lực tác dụng vào lò xo bằng  $14700\text{N}$ . Tính đường kính và số vòng của dây lò xo. Cho biết  $D = 160\text{mm}$ , độ co  $\lambda = 290\text{mm}$  và  $[\tau] = 5 \cdot 10^4 \text{N/cm}^2$ .



Hình 12-33

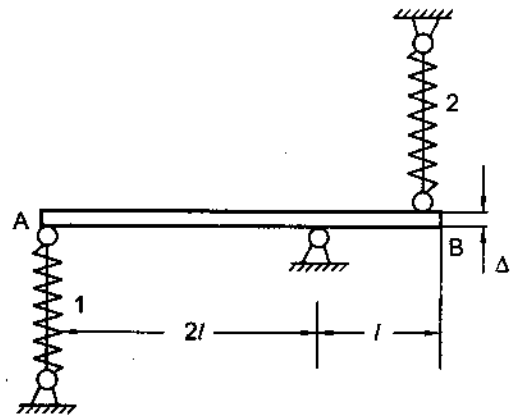
12.8. Thanh AB khi được nối với lò xo số 1 thì đầu B còn cách đầu lò xo 2 một khoảng cách  $\Delta = 0,5\text{cm}$ . Tính ứng suất trong lò xo 1 và 2 khi nối thanh AB với lò xo 2. Cho biết

$$D_1 = 6\text{cm}, d_1 = 1\text{cm}, n_1 = 10$$

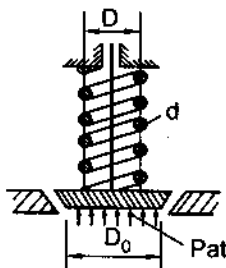
$$D_2 = 5\text{cm}, d_2 = 0,8\text{cm}, n_2 = 8$$

$$G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^6 \text{N/cm}^2.$$

(h.12-34)



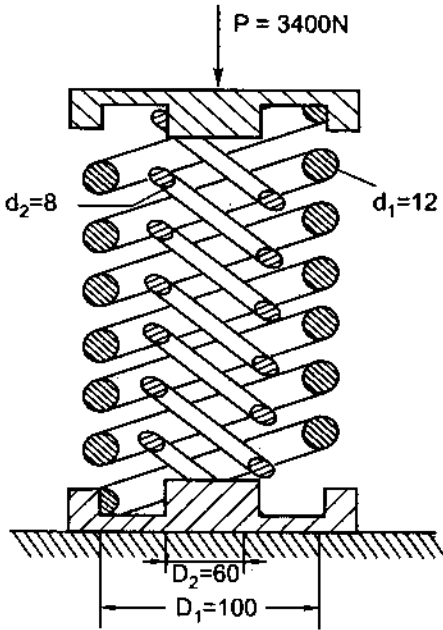
Hình 12-34



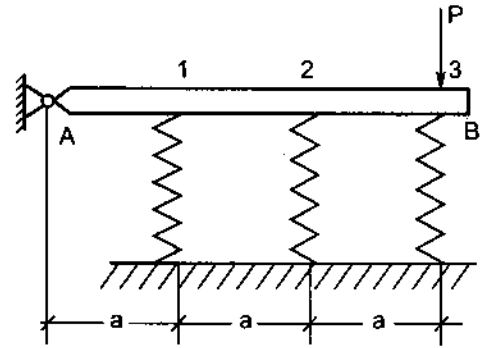
Hình 12-35

12.9. Một van an toàn phải giữ áp suất hơi nước  $p = 5\text{atm}$ . Tính  $\tau_{\text{max}}$ , tính số vòng giây lò xo  $n$  và độ co ban đầu  $\lambda_0$  của lò xo cho biết  $D_0 = 80\text{mm}$ ,  $D = 60\text{mm}$ ,  $d = 10\text{mm}$  bước của dây lò xo  $t = 18\text{mm}$ .  $G = 8 \cdot 10^5 \text{kG/cm}^2$ . Độ lún của lò xo để cho các vòng chạm nhau là  $40\text{mm}$ . Giả thiết khi van mở cao nhất phải còn  $20\text{mm}$  dự trữ (h.12-35).

12.10. Kiểm tra bền hai lò xo 1 và 2 khi chịu lực nén  $P = 3400\text{N}$ . Cho biết  $n_1 = 12$ ,  $n_2 = 10$ ,  $[\tau_1] = [\tau_2] = 5 \cdot 10^4 \text{N/cm}^2$ ,  $G_1 = G_2 = 8 \cdot 10^6 \text{N/cm}^2$  (h.12-36).



Hình 12-36



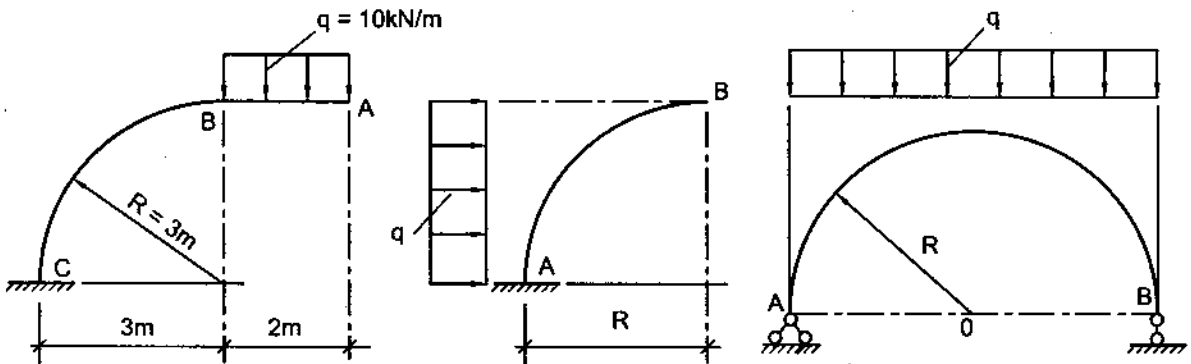
Hình 12-37

12.11. Một thanh cứng AB được đặt trên ba lò xo có cùng số vòng và chịu một lực P đặt ở đầu B như trên hình 12-37.

Tính đường kính các dây lò xo sao cho ứng suất tiếp lớn nhất chúng đều bằng ứng suất cho phép. Cho biết đường kính trung bình của lò xo bằng năm lần đường kính dây lò xo.

#### D. Thanh cong

12.12. Vẽ biểu đồ nội lực các thanh cong chịu lực như sau :

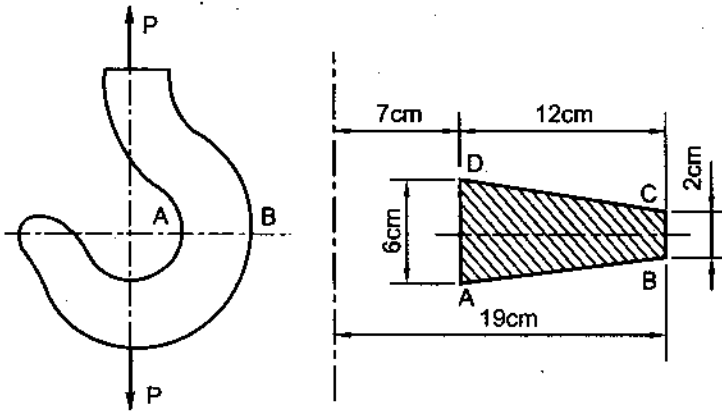


Hình 12-38



12.13. Một chi tiết máy hình móng ngựa có diện tích mặt cắt ngang hình chữ nhật  $4.6\text{cm}^2$ . Chịu hai lực  $P = 10\text{kN}$  đặt cách trọng tâm một khoảng cách  $e = 12\text{cm}$ . Khoảng cách từ trọng tâm mặt cắt đến tâm cong  $r_0 = 7\text{cm}$ . Tính ứng suất kéo, ứng suất nén lớn nhất. Vẽ biểu đồ phân bố ứng suất trên mặt cắt (h.12-39).

12.14. Kiểm tra bên một móc cân trục có mặt cắt ngang hình thang khi móc mang một vật nặng  $P = 50\text{kN}$ . Cho biết  $[\sigma] = 10\text{kN/cm}^2$ . (h.12-40)



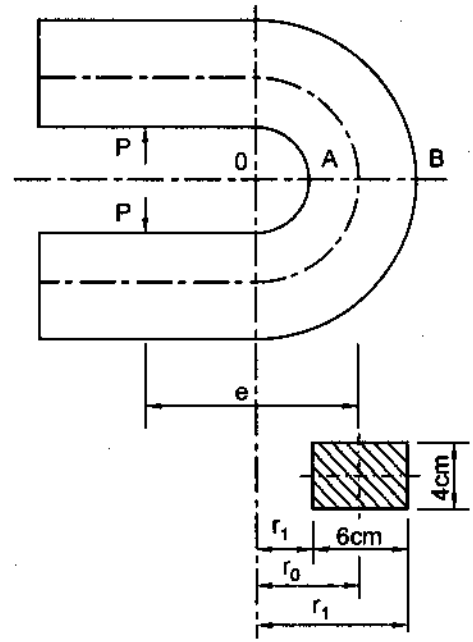
Hình 12-40

12.15. Một khuyên bằng gang có mặt cắt ngang hình tròn chịu lực như trên hình 12-41.

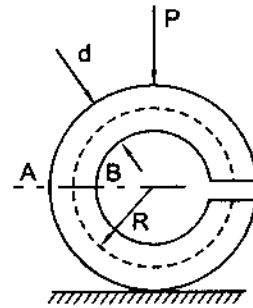
Xác định lực có thể đặt vào, biết ứng suất cho phép của gang  $[\sigma]_k = 3\text{kN/cm}^2$ ,  $[\sigma]_n = 10\text{kN/cm}^2$ . Cho  $R = 16\text{ cm}$ ,  $d = 8\text{ cm}$ .

12.16. Một thanh cong mặt cắt ngang hình chữ nhật chịu tải trọng như hình 12-42.

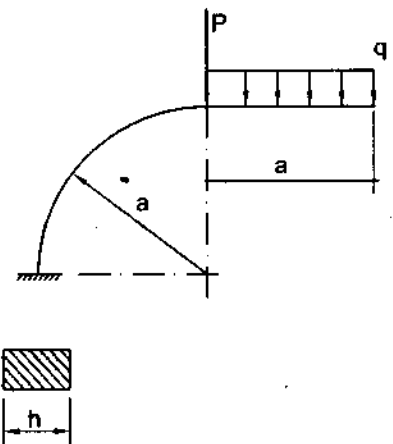
Xác định các kích thước  $h$  và  $b$  của mặt cắt ngang, biết rằng  $P = 6\text{ kN}$ ,  $q = 12\text{ kN/m}$ ,  $a = 16\text{ cm}$ ,  $\frac{h}{b} = \frac{4}{3}$  và  $[\sigma] = 20\text{ kN/cm}^2$ .



Hình 12-39



Hình 12-41



Hình 12-42

## Chương 13

# DẪM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI

### §13-1. KHÁI NIỆM

Dầm được đặt trên nền mà tính chất của nền là đàn hồi thì ta gọi đó là bài toán dầm trên nền đàn hồi.

Ví dụ trong thực tế như dầm móng, giằng tường, đường ray tàu hỏa v.v... nền trong những trường hợp đó là nền đất, nền đá hay nói một cách rộng hơn là quả đất.

Đã có nhiều giả thuyết về sự phản ứng của đất đối với dầm nhưng cho đến nay chỉ còn giả thuyết của Vincle là còn đúng vững. Những kết quả tính toán với giả thuyết đó rất phù hợp với thực tế. Vì vậy ở đây chúng ta chỉ đề cập đến giả thuyết này.

*Giả thuyết Vincle* : Vincle cho rằng cường độ phản lực của nền tại một điểm tỉ lệ với độ lún của nền tại điểm đó.

$$p_0 = k_0 \cdot y \quad (13-1)$$

trong đó :  $p_0$  là cường độ phản lực của nền tính bằng  $N/m^2$

$y$  là độ lún của nền tính theo đơn vị dài

$k_0$  là hệ số tỉ lệ. Đặc trưng cho tính cơ học của nền.  $k_0$  phải được xác định bằng thí nghiệm. Từ công thức (13-1) ta nhận thấy thứ nguyên của  $k_0$  là

$$\text{bằng } \frac{\text{lực}}{L^3} \text{ (L chiều dài)}$$

Trong bảng 13-1 cho ta một số kết quả thí nghiệm về các loại nền thường gặp.

Nếu bề rộng  $b$  của dầm là bé so với chiều dài thì ta có thể xem phản lực của nền phân bố đều theo bề rộng. Lúc đó phản lực của nền phân bố theo chiều dài của dầm và cường độ là :

$$p = b p_0 = k_0 b y \quad (13-2)$$

Khi đó ta sẽ có một hệ số  $k$  với trị số là :

$$k = k_0 \cdot b \quad (13-3)$$

và biểu thức (13-2) được viết lại dưới dạng

$$p = k \cdot y \quad (13-4)$$

Dễ dàng nhận thấy rằng khi  $b = 1$  đơn vị thì  $k = k_0$ .

Giả thuyết của Vincle chưa phản ánh đầy đủ tính chất của nền đất. Thực tế cho thấy sự lún còn xảy ra ngoài chỗ đặt lực, phản lực còn phụ thuộc các lớp đất đá ở phía dưới chỗ đặt lực, vì vậy gần đây cũng đã có những giả thuyết mới cố gắng phản ánh tính chất của nền một cách chi tiết hơn như tính nền với hai hệ số, tính nền có trị số môđun đàn hồi tăng theo chiều sâu v.v.. Tuy nhiên kết quả tính toán cũng không đưa đến một sự khác biệt có ý nghĩa.

HỆ SỐ NỀN  $K_0$ 

| Đặc tính của nền          | Tên của nền                 | Trị số $k_0$ ( $\text{MN/m}^3$ ) |
|---------------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| Đất có độ chặt kém        | Đất chảy                    | 1 ÷ 5                            |
|                           | Đất mới đắp                 |                                  |
|                           | Đất sét ướt và mềm (nhão)   |                                  |
| Đất có độ chặt trung bình | Sỏi đắp (nhân tạo)          | 5 ÷ 50                           |
|                           | Đất sét ẩm                  |                                  |
| Đất chặt                  | Cát đầm chặt                | 50 ÷ 100                         |
|                           | Sạn, sỏi                    |                                  |
|                           | Đầm                         |                                  |
|                           | Đất sét có độ ẩm bé         |                                  |
| Đất rất chặt              | Đất sét pha cát đầm kỹ      | 100 ÷ 200                        |
|                           | Đất sét cứng                |                                  |
| Cứng                      | Đá mềm có vết nứt           | 200 ÷ 1000                       |
|                           | Đá vôi                      |                                  |
|                           | Đá sa thạch                 |                                  |
|                           | Đá rất rắn                  | 1000 ÷ 15000                     |
| Nền nhân tạo              | Nền cọc                     | 50 ÷ 150                         |
| Vật liệu xây dựng         | Gạch                        | 4000 ÷ 5000                      |
|                           | Đá xây                      | 5000 ÷ 6000                      |
|                           | Bê tông và bê tông cốt thép | 8000 ÷ 15000                     |

## §13-2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CỦA ĐƯỜNG ĐÀN HỒI

Xét một đoạn dầm. Giả sử trên đoạn dầm đó có một hệ lực phân bố  $q(x)$ . Hệ trục tọa độ được xác định như hình vẽ. Chiều  $Ox$  là chiều của trục dầm,  $y$  là độ võng của dầm.

Nền gây nên một hệ lực phân bố dọc theo dầm với cường độ :

$$p(x) = k \cdot y$$

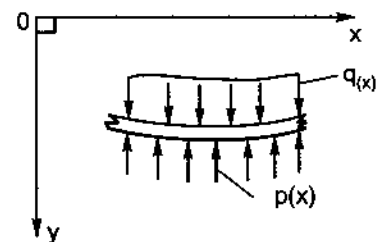
Hệ lực này ngược chiều với  $q(x)$ .

Vậy hệ lực phân bố tổng cộng tác dụng lên dầm là :

$$q(x) - p(x) = q(x) - ky \quad (13-5)$$

Như ta đã biết, lực phân bố là bằng đạo hàm cấp bốn của độ võng nhân với độ cứng khi uốn của dầm. Từ đó ta có :

$$EJ \cdot y^{IV} = q(x) - ky$$



Hình 13-1

Vậy phương trình vi phân của đường đàn hồi khi dầm đặt trên nền đàn hồi là :

$$EJ.y^{IV} + ky = q(x) \quad (13-6)$$

Để thuận lợi ta viết phương trình đó dưới dạng :

$$y^{IV} + 4a^4 y = \frac{q(x)}{EJ} \quad (13-7)$$

Trong đó

$$4a^4 = \frac{k}{EJ}$$

hay :

$$a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} \quad (13-8)$$

Thứ nguyên của  $a$  là  $\frac{1}{L}$ . Vậy nếu ta đưa vào một biến số mới  $\xi$  với biểu thức :

$$\xi = ax \quad (13-9)$$

thì ta có thể đưa (13-7) về dạng một phương trình vi phân có biến số không có thứ nguyên. Các đạo hàm liên tiếp của  $y$  là như sau :

$$y(\xi) = y(ax)$$

$$y'(\xi) = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot a$$

$$y''(\xi) = \frac{d^2 y}{d\xi^2} a^2 \quad (13-10)$$

$$y'''(\xi) = \frac{d^3 y}{d\xi^3} a^3$$

$$y^{IV}(\xi) = \frac{d^4 y}{d\xi^4} a^4$$

Thay vào cho (13-7) ta có :

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} + 4y = \frac{q(\xi)}{EJ.a^4} \quad (13-11)$$

Đó là một phương trình tuyến tính. Nghiệm của phương trình là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất :

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} + 4y = 0 \quad (13-12)$$

Cộng với một nghiệm riêng của (13-11)

Nghiệm tổng quát của (13-12) có dạng :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 \quad (13-13)$$

Trong đó  $y_1, y_2, y_3, y_4$  là các nghiệm riêng của (13-12). Ta hãy tìm nghiệm riêng đó dưới dạng

$$y = e^{s\xi} \quad (13-14)$$

Đạo hàm bốn lần của (13-14) và đưa vào (13-12) ta được phương trình đặc tính :

$$s^4 + 4 = 0 \quad (13-15)$$

Ta giải phương trình đó dưới dạng nghiệm phức. Đặt :

$$s = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Vậy :

$$s^4 = \rho^4 (\cos 4\varphi + i\sin 4\varphi)$$

Thay vào (13-15) ta có :

$$\rho^4 \cos 4\varphi + i\rho^4 \sin 4\varphi = -4 + i.0$$

So sánh các phần thực và ảo ta có :

$$\rho^4 \cos 4\varphi = -4, \quad \rho^4 \sin 4\varphi = 0$$

Từ đó ta tìm thấy :

$$\rho^4 = 4; \quad \cos 4\varphi = -1; \quad \sin 4\varphi = 0$$

Suy ra

$$\rho = +\sqrt{2} \quad 4\varphi = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

Với  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  thay vào cho  $s$  ta được :

$$s_1 = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 + i$$

Tương tự như vậy ta tìm thấy :

$$s_2 = -1 + i, \quad s_3 = -1 - i, \quad s_4 = 1 - i$$

Như vậy ta lần lượt có các nghiệm riêng như sau :

$$y_1 = e^{(1+i)\xi} = e^\xi \cdot e^{i\xi}$$

$$y_2 = e^{-\xi} \cdot e^{i\xi}, \quad y_3 = e^{-\xi} \cdot e^{-i\xi}, \quad y_4 = e^\xi \cdot e^{-i\xi} \quad (13-16)$$

Vậy nghiệm tổng quát (13-13) có dạng là :

$$y = C_1 \cdot e^\xi \cdot e^{i\xi} + C_2 \cdot e^{-\xi} \cdot e^{i\xi} + C_3 \cdot e^{-\xi} \cdot e^{-i\xi} + C_4 \cdot e^\xi \cdot e^{-i\xi} \quad (13-17)$$

Ta có thể tổng hợp các nghiệm riêng  $y_1, y_2, y_3, y_4$  theo các cách khác nhau để có những dạng nghiệm khác nhau.

Ví dụ để tránh các số hạng phức ta có thể tổng hợp các nghiệm riêng theo cách sau đây :

$$\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_4 = e^\xi \cdot \frac{e^{i\xi} + e^{-i\xi}}{2} = e^\xi \cdot \cos\xi$$

$$\frac{1}{2i}y_1 - \frac{1}{2i}y_4 = e^\xi \cdot \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i} = e^\xi \cdot \sin\xi$$

$$\frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 = e^{-\xi} \cdot \frac{e^{i\xi} + e^{-i\xi}}{2} = e^{-\xi} \cdot \cos\xi$$

$$\frac{1}{2i}y_2 - \frac{1}{2i}y_3 = e^{-\xi} \cdot \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i} = e^{-\xi} \cdot \sin\xi$$

Từ đó ta có :

$$y = C_1 e^{\xi} \cos\xi + C_2 e^{\xi} \sin\xi + C_3 e^{-\xi} \cos\xi + C_4 e^{-\xi} \sin\xi \quad (13-18)$$

Ta xét thêm một dạng khác

$$\frac{1}{4i}y_1 - \frac{1}{4i}y_2 = \frac{e^{i\xi}}{2i} \left( \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2} \right) = \frac{e^{i\xi}}{2i} \operatorname{sh}\xi$$

$$\frac{1}{4i}y_3 - \frac{1}{4i}y_4 = \frac{e^{-i\xi}}{2i} \left( \frac{e^{-\xi} - e^{\xi}}{2} \right) = -\frac{e^{-i\xi}}{2i} \operatorname{sh}\xi$$

Dem cộng lại với nhau ta sẽ được :

$$\operatorname{sh}\xi \left( \frac{e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2i} \right) = \operatorname{sh}\xi \cdot \sin\xi$$

Với cách đó ta tìm thấy dạng nghiệm mới sau đây :

$$y = C_1 \sin\xi \operatorname{sh}\xi + C_2 \sin\xi \operatorname{ch}\xi + C_3 \cos\xi \operatorname{sh}\xi + C_4 \cos\xi \operatorname{ch}\xi \quad (13-19)$$

Sau khi đã có nghiệm của phương trình thuần nhất ta chỉ cần tìm một nghiệm riêng  $y^*$  là có được nghiệm tổng quát của (13-11).

Các nghiệm riêng  $y^*$  là được xác định từng trường hợp cụ thể.

### §13-3. DÂY DÀI VÔ HẠN CHỊU MỘT LỰC TẬP TRUNG

Lấy điểm đặt của lực làm gốc tọa độ (h.13-2). Sử dụng dạng nghiệm (13-18) ta có phương trình đường đàn hồi của dây là :

$$y = C_1 e^{\xi} \cos\xi + C_2 e^{\xi} \sin\xi + C_3 e^{-\xi} \cos\xi + C_4 e^{-\xi} \sin\xi + y^* \quad (13-20)$$

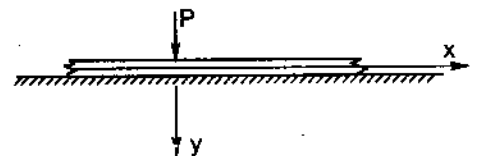
với  $\xi = ax$  và  $a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$

Vì  $q(x) = 0$  nên nghiệm riêng  $y^* = 0$ .

Vì tính chất đối xứng nên ta chỉ cần xét phía phải. Ta lần lượt xác định các hằng số tích phân  $C_1, C_2, C_3, C_4$ .

Tại mặt cắt rất xa điểm đặt lực, nghĩa là  $x = \infty$  độ võng của dây phải bằng không nên hai số hạng chứa  $e^{\xi}$  phải triệt tiêu. Vậy

$$C_1 = C_2 = 0$$



Hình 13-2

Phương trình (13-20) được thu gọn lại dưới dạng :

$$y = e^{-\xi}(C_3 \cos \xi + C_4 \sin \xi) \quad (13-21)$$

Đạo hàm liên tiếp phương trình đó ta được :

$$y' = \theta = ae^{-\xi}[(C_3 - C_4)\cos \xi - (C_3 + C_4)\sin \xi]$$

$$M = -EJy'' = -EJa^2 e^{-\xi}[2C_3 \sin \xi - 2C_4 \cos \xi]$$

$$Q = -EJy''' = -EJa^3 e^{-\xi}[2(C_3 + C_4)\cos \xi + 2(C_4 - C_3)\sin \xi]$$

Vì lí do đối xứng, đường đàn hồi phải đối xứng với trục  $y$ , nên tại gốc tọa độ góc xoay  $\theta$  của mặt cắt ngang phải bằng không. Ta có :

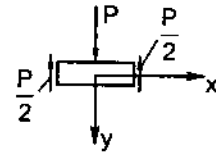
$$y'(x=0) = \theta_0 = 0$$

Cũng vì lí do đối xứng tại mặt cắt bên phải và bên trái điểm đặt lực, lực cắt  $Q$  phải có trị số bằng nhau và phải cân bằng với  $P$ , do đó ta có :

$$Q = -\frac{P}{2}$$

Từ hai điều kiện đó ta có các biểu thức :

$$\begin{cases} C_4 - C_3 = 0 \\ -2EJa^3(C_4 + C_3) = -\frac{P}{2} \end{cases}$$



Hình 13-3

Giải hệ phương trình ta có :

$$C_3 = C_4 = \frac{P}{8EJ.a^3} = \frac{Pa}{2k}$$

Vậy phương trình đường đàn hồi, mômen uốn  $M$ , lực cắt  $Q$  và góc xoay  $\theta$  là :

$$y = \frac{Pa}{2k} e^{-\xi}(\cos \xi + \sin \xi) \quad (13-22)$$

$$M = \frac{P}{4a} e^{-\xi}(\sin \xi - \cos \xi) \quad (13-23)$$

$$Q = -\frac{P}{2} e^{-\xi} \cos \xi \quad (13-24)$$

$$\theta = -\frac{Pa^2}{k} e^{-\xi} \sin \xi \quad (13-25)$$

Để thuận lợi cho tính toán ta lập bảng để tính trước các hàm sau đây :

$$\eta = e^{-\xi}(\cos \xi + \sin \xi) = \sqrt{2} e^{-\xi} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \xi\right)$$

$$\eta_1 = e^{-\xi}(\cos \xi - \sin \xi) = \sqrt{2} e^{-\xi} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \xi\right)$$

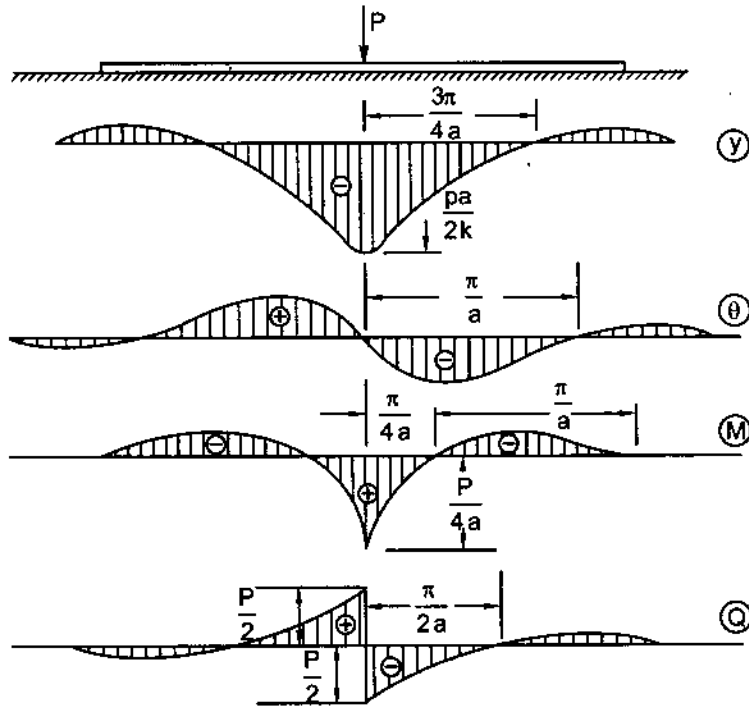
$$\begin{aligned}\eta_2 &= e^{-\xi} \cos \xi \\ \eta_3 &= e^{-\xi} \sin \xi\end{aligned}\quad (13-26)$$

(xem phụ lục trang 217)

Với các hàm số đó, độ võng, mômen uốn, lực cắt và góc xoay sẽ được tính dễ dàng với các biểu thức :

$$\begin{aligned}y &= \frac{Pa}{2k} \eta \\ M &= \frac{P}{4a} \eta_1 \\ Q &= -\frac{P}{2} \eta_2 \\ \theta &= -\frac{Pa^2}{k} \eta_3\end{aligned}\quad (13-27)$$

Sự biến thiên của các hàm số đó được biểu diễn như trên hình 13-4.



Hình 13-4

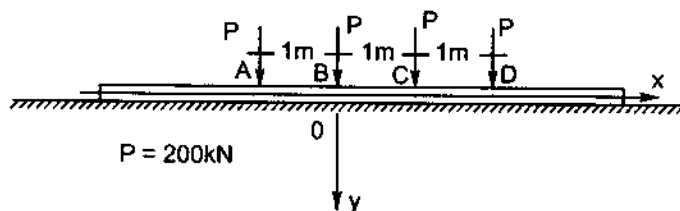
Tại mặt cắt có đặt lực tập trung độ võng và nội lực đều có trị số lớn nhất :

$$\begin{aligned}y_{\max} &= \frac{Pa}{2k} \\ M_{\max} &= \frac{P}{4a} \\ Q_{\max} &= \pm \frac{P}{2}\end{aligned}\quad (13-28)$$



Dựa vào các trị số đó ta có thể kiểm tra độ bền và độ cứng của dầm.

*Ví dụ 1.* Một dầm dài vô hạn chịu lực như hình vẽ (h.13-5). Tính độ võng và mômen uốn tại mặt cắt B dưới điểm đặt lực tập trung P thứ hai. Cho biết  $k = 30 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ ,  $E = 210^4 \text{ N/m}^2$ ,  $J = 2500 \text{ cm}^4$  và  $P = 200 \text{ kN}$ .



Hình 13-5

*Bài giải*

1. Tính a

Theo công thức (13-8) ta có :

$$a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}} = \sqrt[4]{\frac{30 \cdot 10^6}{4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2500 \cdot 10^{-8}}} = 1,1 \frac{1}{\text{m}}$$

2. Áp dụng nguyên lý độc lập tác dụng của các lực ta lần lượt tính y và M tại B do từng lực gây ra. Lấy gốc tọa độ là ở B. Hoành độ của A, C, D đối với B sẽ là :

$$\xi_A = a \cdot x_A = 1,1; \quad \xi_B = a x_B = 0; \quad \xi_C = a x_C = 1,1; \quad \xi_D = a \cdot x_D = 2,2$$

Vì M và y có tính chất đối xứng nên hoành độ của chúng đặt là dương hay âm đều thích hợp.

Tra bảng ở phụ lục ta được các trị số của các hàm như sau :

|          |   |         |         |
|----------|---|---------|---------|
| $\xi$    | 0 | 1,10    | 2,2     |
| $\eta$   | 1 | 0,4776  | 0,0244  |
| $\eta_1$ | 1 | -0,1457 | -0,1548 |

Vậy ta có :

$$y_B = \frac{Pa}{2k} \sum \eta = \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{2 \cdot 30 \cdot 10^6} (1 + 2 \cdot 0,4776 + 0,0244)$$

$$y_B = 0,0071 \text{ m} = 7,1 \text{ mm}$$

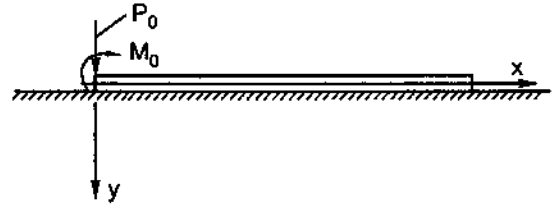
$$M_B = \frac{P}{4a} \sum \eta_1 = \frac{200 \cdot 10^3}{4 \cdot 1,1} [1 + 2(-0,1457) - 0,1548]$$

$$M_B = 2,5 \cdot 10^3 \text{ Nm.}$$

### §13-4. DẦM DÀI NỬA VÔ HẠN

Ta xét một dầm trên nền đàn hồi, một đầu chịu tác dụng của một lực  $P_0$  và một mômen  $M_0$  còn đầu kia dài vô hạn (hình 13-6).

Ta chọn gốc tọa độ ngay đầu dầm. Cùng một lập luận như trên phương trình đường đàn hồi chỉ còn lại các số hạng với tích của  $e^{-\xi}$ . Ta có :



Hình 13-6

$$y = e^{-\xi}(C_3 \cos \xi + C_4 \sin \xi)$$

Các hằng số  $C_3$  và  $C_4$  được xác định từ các điều kiện biên ở đầu tự do.

$$(M)_{\xi=0} = M_0 \text{ và } (Q)_{\xi=0} = -P_0$$

Đạo hàm liên tiếp hai lần và ba lần của  $y$  ta được :

$$M = -EJa^2 e^{-\xi} [2C_3 \sin \xi - 2C_4 \cos \xi]$$

$$Q = -EJa^3 e^{-\xi} [2(C_3 + C_4) \cos \xi + 2(C_4 - C_3) \sin \xi]$$

với  $\xi = 0$  ta có :

$$M_0 = -EJa^2 \cdot e^{-\xi} (-2C_4)$$

$$-P_0 = -EJa^3 \cdot e^{-\xi} [2(C_3 + C_4)]$$

Từ đó ta tính được :

$$C_4 = \frac{M_0}{2EJa^2} \quad C_3 = \frac{P_0 - aM_0}{2EJa^3}$$

Ta được các phương trình độ võng, góc xoay, mômen uốn và lực cắt như sau :

$$y = \frac{2a}{k} [P_0 \eta_2 - aM_0 \eta_2]$$

$$\theta = \frac{2a^2}{k} (-P_0 \eta_1 + 2aM_0 \eta_2) \quad (13-29)$$

$$M = \frac{1}{a} (-P_0 \eta_3 + aM_0 \eta_1)$$

$$Q = -(P_0 \eta_1 + 2aM_0 \eta_3)$$

Các hàm  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  được tra trong phụ lục.

### §13-5. ĐƯỜNG ẢNH HƯỞNG

Ta giả sử lực  $P$  đặt ở dầm vô hạn là bằng đơn vị, như vậy biểu đồ mômen  $M$  sẽ có dạng nét đậm như trên hình 13-7a. Ta hãy xét trị số mômen uốn tại hoành độ  $\xi_m$ . Ta kí hiệu mômen uốn đó là  $M_{m0}$ , nghĩa là mômen uốn tại điểm  $m$  so với gốc tọa độ  $O$ . Bây giờ chúng

ta di chuyển lực  $P = 1$  đến đúng hoành độ  $\xi_m$ . Biểu đồ mômen tại đó được vẽ theo đường nét đứt. Để ý đến tung độ của biểu đồ nét đứt này tại gốc tọa độ  $O$  ta sẽ có được mômen uốn tại  $O$  do lực đơn vị đặt tại  $m$  gây nên. Ta kí hiệu mômen uốn này  $M_{om}$ . Ta có thể nhận thấy ngay :

$$M_{mo} = M_{om}$$

Từ đó ta có thể phát biểu như sau : Bất kể tung độ  $M_{mo}$  nào trên đường biểu diễn của  $M$  cũng đều biểu diễn mômen tại  $O$  do tải trọng đơn vị đặt ngay tại hoành độ đó gây nên.

Bây giờ ta giả dụ cho lực  $P = 1$  di chuyển dọc theo chiều dài của dầm. Như vậy biểu đồ mômen  $M$  biểu diễn sự thay đổi của mômen uốn tại  $O$  khi  $P$  chuyển động. Vậy đường biểu diễn đó được gọi là đường ảnh hưởng của mômen uốn.

Nếu tại điểm  $\xi_m$  dầm chịu một tải trọng  $P_m$  thì mômen uốn tại  $O$  do  $P_m$  gây nên sẽ là  $P_m \cdot M_{mo}$ . Nếu tại các điểm  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  dầm chịu tác dụng bởi những lực  $P_1, P_2, P_3 \dots$  thì mômen uốn tại  $O$  sẽ là

$$M = P_1 M_{10} + P_2 M_{20} + P_3 M_{30} \dots \quad (13-30)$$

Thứ nguyên của  $M_{10}, M_{20}, M_{30} \dots$  là thứ nguyên của  $\frac{1}{4a} \eta_1$ . Biểu thức này có thứ nguyên là chiều dài.

Nếu trong khoảng từ  $\xi_1$  đến  $\xi_2$  dầm chịu một tải trọng phân bố đều  $q$ , để tính mômen của lực phân bố đó đối với mặt cắt qua gốc tọa độ ta phải thực hiện phép toán tích phân như sau :

$$M = \lim \sum q \frac{d\xi}{a} M_{qo} = \frac{q}{a} \int_{\xi_1}^{\xi_2} M_{qo} d\xi = \frac{q}{a} \omega$$

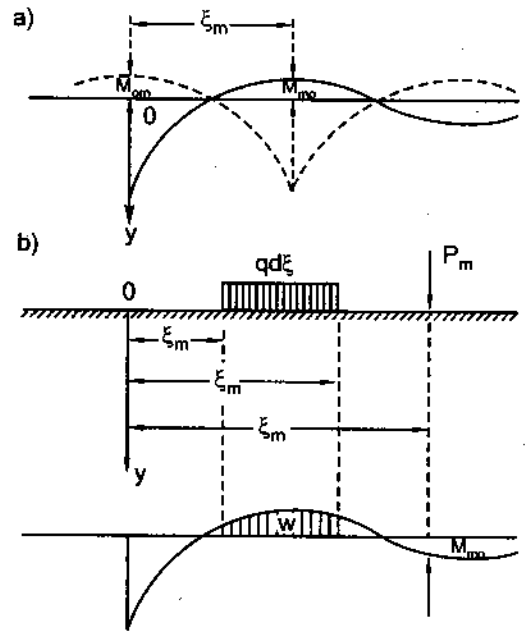
Trong đó  $\omega$  là phần diện tích gạch đậm trên hình vẽ.

Thứ nguyên của  $\omega$  cũng là chiều dài. Ta tính cụ thể  $\omega$ . Từ công thức (13-27) ta có :

$$M_{qo} = \frac{1}{4a} \eta_1$$

vậy :

$$\omega = \frac{1}{4a} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \eta d\xi = \frac{1}{4a} \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi) d\xi$$



Hình 13 - 7

Biểu thức dưới dấu tích phân là đạo hàm của biểu thức :

$$e^{-\xi} \sin \xi$$

Thực vậy ta có  $(e^{-\xi} \sin \xi)' = e^{-\xi} \cos \xi - e^{-\xi} \sin \xi = e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi)$

Do đó ta có :

$$\omega = \frac{1}{4a} [e^{-\xi} \sin \xi]_{\xi_1}^{\xi_2} = \frac{1}{4a} \left[ \frac{1}{2} (\eta - \eta_1) \right]_{\xi_1}^{\xi_2} = \frac{1}{8a} [\eta - \eta_1]_{\xi_1}^{\xi_2} \quad (13-31)$$

Trong quá trình sử dụng các hàm  $\eta$  ta cũng thường hay gặp những tích phân tương tự như sau :

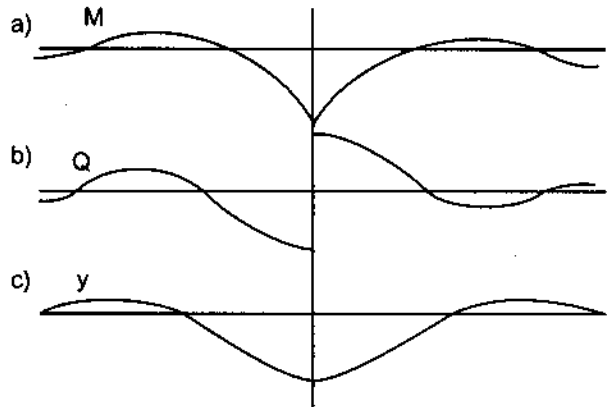
$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \eta d\xi = [-e^{-\xi} \cos \xi]_{\xi_1}^{\xi_2} = [\eta_2]_{\xi_1}^{\xi_2} \quad (13-32)$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \eta_2 d\xi = \frac{1}{2} [e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi)]_{\xi_1}^{\xi_2} = \left[ \frac{\eta}{2} \right]_{\xi_1}^{\xi_2} \quad (13-33)$$

Vì rằng biểu đồ của đường đàn hồi  $y$  cũng đối xứng đối với  $O$  và như vậy đường đó cũng là đường ảnh hưởng của độ võng đối với gốc tọa độ. Chúng ta dễ dàng chứng minh rằng :

$$y_{mo} = y_{om}$$

Biểu đồ  $Q$  là phản đối xứng đối với điểm đặt lực  $P = 1$ . Ta cũng có thể sử dụng nó như trường hợp mômen nhưng phải lấy :  $Q_{mo} = -Q_{om}$ . Điều đó có nghĩa là đường ảnh hưởng của  $Q$  là ngược dấu lại với biểu đồ thực (h.13-8).



Hình 13-8

Ta nhận thấy các công thức của  $M$ ,  $Q$ ,  $y$  là những hàm tuần hoàn với bước sóng bằng  $2\pi$ . Nếu gọi  $l$  là độ dài của bước sóng thì ta có :

$$a(x + l) = \xi + 2\pi = ax + 2\pi$$

Từ đó ta có

$$l = \frac{2\pi}{a} = 2\pi \sqrt{\frac{4EJ}{k}}$$

Nếu tra bảng ta sẽ tìm thấy với  $\xi = 0$ ,  $\eta = 1$  với  $\xi = 2\pi$  thì  $\eta = 0,00187$ . Nói một cách khác, qua một bước sóng thì độ võng của dầm chỉ còn 0,002 phần trăm của độ võng tại điểm đặt lực. Như vậy độ dài của dầm chỉ cần gấp đôi  $l$  thì dầm đã có thể xem là dài vô hạn. Nếu dầm có độ dài ngắn hơn  $2l$  thì ta phải xem là hữu hạn và ta phải tính khác. Bài toán được giải trong mục tiếp theo.

## §13-6. DÂY DÀI HỮU HẠN

Xét một dây dài hữu hạn có độ cứng  $EJ$  không đổi đặt trên nền đàn hồi chịu tải trọng bất kì. Tùy theo sự phân bố của tải trọng và liên kết ta chia dây làm nhiều đoạn. Ta xét đoạn thứ  $n + 1$  của dây. Tại đầu  $A$  của đoạn đó, cách đầu mút trái của dây một đoạn  $x = \alpha$  có đặt một tải trọng tập trung  $P_\alpha$ , mômen tập trung  $M_\alpha$  và một hệ tải trọng phân bố theo quy luật bậc nhất khác với tải trọng phân bố trên đoạn  $n$ . Kí hiệu  $q_n$  là tải trọng phân bố trên đoạn  $n$  và  $q_{n+1}$  là tải trọng phân bố trên đoạn  $n+1$ .

Kí hiệu góc xoay, độ võng, mômen uốn, lực cắt trong đoạn  $n$  với chỉ số  $n$  như sau :  $y_n, \theta_n, M_n, Q_n$  và các đại lượng đó trên đoạn  $n+1$  có chỉ số là  $n+1$ .

$$y_{n+1}, \theta_{n+1}, M_{n+1}, Q_{n+1}$$

Sự tương quan của chúng là như sau :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y(x - \alpha) \quad (1)$$

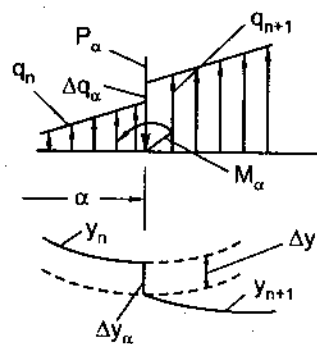
$$q_{n+1} = q_n + \Delta q(x - \alpha) \quad (2)$$

Trong đó  $x > \alpha$  và  $\Delta y$  và  $\Delta q$  là các hàm thuộc  $(x - \alpha)$ .

Theo (13-7) ta có phương trình vi phân của đường đàn hồi của hai đoạn là như sau :

$$y_n^{IV} + 4a^4 y_n = -\frac{q_n}{EJ} \quad (3)$$

$$y_{n+1}^{IV} + 4a^4 y_{n+1} = -\frac{q_{n+1}}{EJ} \quad (4)$$



Hình 13 - 9

Đem trị số của  $y_{n+1}$  và  $q_{n+1}$  và đạo hàm của chúng được tính từ (1) và (2) thay vào cho (4) và đem trừ với (3) ta được :

$$\Delta y^{IV}(x - \alpha) + 4a^4 \Delta y(x - \alpha) = -\frac{\Delta q(x - \alpha)}{EJ} \quad (13-34)$$

Đó là phương trình vi phân cấp 4 giống hoàn toàn (13-7). Nghiệm tổng quát của nó là :

$$\begin{aligned} \Delta y(x - \alpha) = & e^{a(x - \alpha)} [C_1 \cos a(x - \alpha) + C_2 \sin a(x - \alpha)] + \\ & + e^{-a(x - \alpha)} [C_3 \cos a(x - \alpha) + C_4 \sin a(x - \alpha)] - \frac{\Delta q(x - \alpha)}{k} \end{aligned} \quad (5)$$

Nếu cường độ của tải trọng phân bố là hàm bậc nhất đối với hoành độ thì sau khi khai triển Taylo đối với  $\Delta q(x - \alpha)$  ta có :

$$\Delta q(x - \alpha) = \Delta q_\alpha + \Delta' q_\alpha (x - \alpha)$$

Trong đó  $\Delta q_\alpha$  và  $\Delta' q_\alpha$  là các bước nhảy của cường độ tải trọng phân bố và đạo hàm bậc nhất của nó tại  $x = a$ .

Nếu thay

$$\begin{aligned} \text{cha}(x - \alpha) &= \frac{1}{2} [e^{a(x - \alpha)} + e^{-a(x - \alpha)}] \\ \text{sha}(x - \alpha) &= \frac{1}{2} [e^{a(x - \alpha)} - e^{-a(x - \alpha)}] \end{aligned}$$

và sử dụng các kí hiệu :

$$\begin{aligned} A_\xi &= \text{ch}\xi \cos\xi \\ B_\xi &= \frac{1}{2} (\cos\xi \text{sh}\xi + \sin\xi \text{ch}\xi) \\ C_\xi &= \frac{1}{2} \text{sh}\xi \sin\xi \\ D_\xi &= \frac{1}{4} (\sin\xi \text{ch}\xi - \cos\xi \text{sh}\xi) \end{aligned} \quad (13-35)$$

thì biểu thức (5) trên đây có thể viết lại dưới dạng :

$$\begin{aligned} \Delta y(x - \alpha) &= G_1 A_{a(x - \alpha)} + G_2 B_{a(x - \alpha)} + G_3 C_{a(x - \alpha)} + \\ &+ G_4 D_{a(x - \alpha)} - \frac{1}{k} [\Delta q_a + \Delta q_a(x - \alpha)] \end{aligned} \quad (13-36)$$

$G_1, G_2, G_3, G_4$  là các hằng số tích phân. Các hàm  $A_\xi, B_\xi, C_\xi, D_\xi$  được gọi là các hàm Crulốp. Các hàm Crulốp có các tương quan sau đây :

$$\begin{aligned} A'_\xi &= -4aD_\xi; & B'_\xi &= aA_\xi \\ C'_\xi &= aB_\xi; & D'_\xi &= aC_\xi \end{aligned} \quad (13-37)$$

Chú ý như phần trên chúng ta đã nói. Tương quan giữa  $\xi$  và  $x$  là :

$$\xi = ax \quad \text{với } a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}$$

Khi  $\xi = 0$  hay  $a(x - \alpha) = 0$  thì ta có

$$A_0 = 1 \quad B_0 = C_0 = D_0 = 0 \quad (6)$$

Trị số các hàm Crulốp được cho trong Bảng phụ lục.

Để xác định các hằng số tích phân, ta đạo hàm các biểu thức của (13-36). Ta lần lượt có như sau :

$$\begin{aligned} \Delta y'(x - \alpha) &= \Delta \theta(x - a) = -4aG_1 D_{a(x - \alpha)} + aG_2 A_{a(x - \alpha)} + \\ &+ aG_3 B_{a(x - \alpha)} + aG_4 C_{a(x - \alpha)} - \frac{1}{k} \Delta q_n \\ \Delta M(x - \alpha) &= -EJ \Delta y''(x - \alpha) = EJ4a^2 G_1 C_{a(x - \alpha)} + \\ &+ EJ4a^2 G_2 D_{a(x - \alpha)} - EJ a^2 G_3 A_{a(x - \alpha)} - EJ a^2 G_4 B_{a(x - \alpha)} \\ \Delta Q(x - \alpha) &= -EJ \Delta y'''(x - \alpha) = EJ4a^3 G_1 B_{a(x - \alpha)} + \\ &+ EJ4a^3 G_2 C_{a(x - \alpha)} + EJ a^3 G_3 D_{a(x - \alpha)} - EJ a^3 G_4 A_{a(x - \alpha)} \end{aligned}$$

Thay  $x = \alpha$  vào các biểu thức đó và (13-36) với chú ý đến (6) ta được :

$$\begin{aligned}\Delta y(0) &= \Delta y_\alpha = G_1 - \frac{1}{k} \Delta q_\alpha \\ \Delta \theta(0) &= \Delta \theta_\alpha = aG_2 - \frac{1}{k} \Delta' q_\alpha \\ \Delta M(0) &= \Delta M = -EJa^2 G_3 \\ \Delta Q(0) &= \Delta Q_\alpha = -EJa^3 G_4\end{aligned}\quad (13-38)$$

Trong đó  $\Delta y_\alpha$ ,  $\Delta \theta_\alpha$ ,  $\Delta M_\alpha$ ,  $\Delta Q_\alpha$  là các bước nhảy của biểu đồ độ võng, góc xoay, mômen uốn lực cắt tại mặt cắt  $x = \alpha$ . Các bước nhảy về mômen uốn và lực cắt thì chính bằng lực tập trung và mômen tập trung tại  $x = \alpha$  :  $\Delta M_\alpha = M_\alpha$ ,  $\Delta Q_\alpha = P_\alpha$ .

Từ các biểu thức trên ta có :

$$\begin{aligned}G_1 &= \Delta y_\alpha + \frac{\Delta q_\alpha}{k} ; & G_2 &= \frac{\Delta \theta_\alpha}{a} + \frac{\Delta' q_\alpha}{ak} \\ G_3 &= -\frac{\Delta M_\alpha}{EJa^2} ; & G_4 &= -\frac{\Delta Q_\alpha}{EJa^3}\end{aligned}\quad (7)$$

Thay trị số của  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ ,  $G_4$  vào (13-36) ta có ;

$$\begin{aligned}\Delta y(x - \alpha) &= \left( \Delta y_\alpha + \frac{\Delta q_\alpha}{k} \right) A_{a(x-\alpha)} + \left( \frac{\Delta \theta_\alpha}{a} + \frac{\Delta' q_\alpha}{ak} \right) B_{a(x-\alpha)} - \\ &\quad - \frac{\Delta M_\alpha}{EJa^2} C_{a(x-\alpha)} - \frac{\Delta Q_\alpha}{EJa^3} D_{a(x-\alpha)} - \frac{1}{k} (\Delta q_\alpha + \Delta q'_\alpha (x - \alpha))\end{aligned}$$

Phương trình của đường đàn hồi ở đoạn  $n + 1$  có dạng :

$$\begin{aligned}y_{n+1} = y_n &+ \left( \Delta y_\alpha + \frac{\Delta q_\alpha}{k} \right) A_{a(x-\alpha)} + \left( \frac{\Delta \theta_\alpha}{a} + \frac{\Delta' q_\alpha}{ak} \right) B_{a(x-\alpha)} - \\ &\quad - \frac{\Delta M_\alpha}{EJa^2} C_{a(x-\alpha)} - \frac{\Delta Q_\alpha}{EJa^3} D_{a(x-\alpha)} - \frac{1}{k} (\Delta q_\alpha + \Delta q'_\alpha (x - \alpha))\end{aligned}\quad (13-39)$$

Phương trình của góc xoay, mômen uốn, lực cắt ở đoạn  $n + 1$  là :

$$\begin{aligned}\theta_{n+1} = y'_{n+1} = \theta_n &+ \left( \Delta \theta_\alpha + \frac{\Delta' q_\alpha}{k} \right) A_{a(x-\alpha)} - \frac{\Delta M_\alpha}{EJa} B_{a(x-\alpha)} - \frac{\Delta Q_\alpha}{EJa^2} C_{a(x-\alpha)} - \\ &\quad - 4a \left( \Delta y_\alpha + \frac{\Delta q_\alpha}{k} \right) D_{a(x-\alpha)} - \frac{\Delta q_\alpha}{k}\end{aligned}\quad (13-40)$$

$$M_{n+1} = -EJy_{n+1}'' = M_n + \Delta M_\alpha \cdot A_{a(x-\alpha)} + \frac{\Delta Q_\alpha}{a} B_{a(x-\alpha)} + \frac{1}{a^2} (k\Delta y_\alpha + \Delta q_\alpha) C_{a(x-\alpha)} + \frac{1}{a^3} (k\Delta\theta_\alpha + \Delta q'_\alpha) D_{a(x-\alpha)} \quad (13-41)$$

$$Q_{n+1} = -EJy_{n+1}''' = Q_n + \Delta Q_\alpha A_{a(x-\alpha)} + \frac{1}{a} (k\Delta y_\alpha + \Delta q_\alpha) B_{a(x-\alpha)} + \frac{1}{a^2} (k\Delta\theta_\alpha + \Delta q'_\alpha) C_{a(x-\alpha)} - 4a\Delta M_\alpha D_{a(x-\alpha)} \quad (13-42)$$

Từ phương trình của đoạn bất kỳ  $n + 1$  ta suy ra được phương trình của đoạn thứ nhất  $y_1$ .

Gọi  $y_0, \theta_0, M_0, Q_0, q_0, q'_0$  là các đại lượng ở đầu mút của dầm. Vì trước đó, ở đoạn số 0, tất cả các đại lượng đó bằng không, do đó ta có :

$$\Delta y_\alpha = y_0, \Delta\theta_\alpha = \theta_0, \Delta M_\alpha = M_0, \Delta Q_\alpha = Q_0$$

$$\Delta q_\alpha = q_0, \Delta q'_\alpha = q'_0$$

Thay tất cả vào từ (13-39) đến (13-42) ta sẽ được :

$$y_1 = \left( y_0 + \frac{q_0}{k} \right) A_\xi + \left( \frac{\theta_0}{a} + \frac{q'_0}{ak} \right) B_\xi - \frac{M_0}{EJa^2} C_\xi - \frac{Q_0}{EJa^3} D_\xi - \frac{q_0 - q'_0 x}{k} \quad (13-43)$$

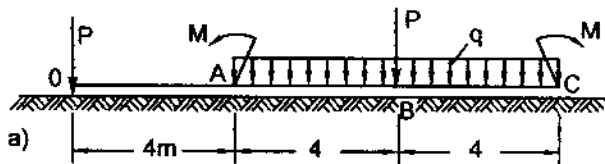
$$\theta_1 = \left( \theta_0 + \frac{q'_0}{k} \right) A_\xi - \frac{M_0}{EJa} B_\xi - \frac{Q_0}{EJa^2} C_\xi - 4a \left( y_0 + \frac{q_0}{k} \right) D_\xi - \frac{q_0}{k} \quad (13-44)$$

$$M_1 = M_0 A_\xi + \frac{Q_0}{a} B_\xi + \frac{1}{a^2} (ky_0 + q_0) C_\xi + \frac{1}{a^3} (k\theta_0 + q'_0) D_\xi \quad (13-45)$$

$$Q_1 = Q_0 A_\xi + \frac{1}{a} (ky_0 + q_0) B_\xi + \frac{1}{a^2} (k\theta_0 + q'_0) C_\xi - 4aM_0 D_\xi \quad (13-46)$$

Các đại lượng  $y_0, \theta_0, M_0, Q_0, q_0, q'_0$  được gọi là các thông số ban đầu (phương pháp giải giống như chúng ta đã làm trong chương uốn).

*Vi dụ 2.* Vẽ biểu đồ mômen uốn và lực cắt của dầm cho trên hình vẽ (13-10). Biết  $q = 20 \text{ kN/m}$ ,  $P = 300 \text{ kN}$ ,  $M = 90 \text{ kNm}$ , hệ số nền  $k_0 = 6 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^3$ . Dầm có chiều rộng  $b = 1 \text{ m}$ , môđun đàn hồi của vật liệu  $E = 10^7 \text{ kN/m}^2$  và mômen quán tính chính của mặt cắt ngang  $J = 0,0426 \text{ m}^4$ .



Hình 13-10



## Bài giải

Ta giải bài toán này theo trình tự sau :

a) *Tính các hệ số*

Độ cứng của dầm khi uốn :  $EJ = 10^7 \cdot 0,0426 = 426 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$  : Hệ số a.

$$a^4 = \frac{k_o b}{4EJ} = \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 1}{4 \cdot 426 \cdot 10^3} = 0,0352$$

$$a = 0,4332.$$

b) *Xác định các thông số ban đầu và các bước nhảy*

Tại O ( $x = 0$ )

$$y_o \neq 0, \theta_o \neq 0, Q_o = -P = -300 \text{ kN}.$$

$$M_o = 0, q_o = 0, \dot{q}_o = 0$$

Tại A ( $x = 4\text{m}$ )

$$\Delta y_A = 0, \Delta \theta_A = 0, \Delta M_A = -M = -90 \text{ kNm}$$

$$\Delta Q_A = 0, \Delta q_A = -q = -20 \text{ kN/m}, \Delta \dot{q}_A = 0$$

Tại B ( $x = 8\text{m}$ )

$$\Delta y_B = 0, \quad \Delta \theta_B = 0$$

$$\Delta M_B = 0, \quad \Delta Q_B = -P = -300 \text{ kN}$$

$$\Delta q_B = 0, \quad \Delta \dot{q}_B = 0$$

Như vậy ta phải xác định hai thông số  $y_o$  và  $\theta_o$ .

Điều kiện để xác định hai thông số đó là khi  $x = l = 12\text{m}$

- Lực cắt  $Q_c = 0$

- Momen uốn  $M_c = -M = -90 \text{ kNm}$ .

c) *Viết các phương trình của mômen và lực cắt*

*Phương trình mômen uốn trong toàn dầm*

$$M_1 = -\frac{P}{a} B_\xi + \frac{k y_o}{a^2} C_\xi + \frac{k \theta_o}{a^3} D_\xi \quad \text{với } 0 \leq x \leq 4$$

$$M_2 = M_1 - M A_{a(x-4)} - \frac{q}{a} C_{a(x-4)} \quad \text{với } 4 \leq x \leq 8$$

$$M_3 = M_2 - \frac{P}{a} B_{a(x-8)} \quad \text{với } 8 \leq x \leq 12$$

*Phương trình lực cắt trong toàn dầm*

$$Q_1 = -P A_\xi + \frac{k y_o}{a} B_\xi + \frac{k \theta_o}{a^2} C_\xi \quad \text{với } 0 \leq x \leq 4$$

$$Q_2 = Q_1 + 4aM \cdot D_{a(x-4)} - \frac{q}{a} B_{a(x-4)} \quad \text{với } 4 \leq x \leq 8$$

$$Q_3 = Q_2 - P A_{a(x-8)} \quad \text{với } 8 \leq x \leq 12$$

Tính các hệ số của các phương trình

$$\frac{P}{a} = \frac{300}{0,4332} = 693$$

$$\frac{q}{a} = \frac{200}{0,4332} = 46,2; \quad \frac{q}{a^2} = \frac{20}{0,1877} = 107$$

$$\frac{k}{a} = \frac{6.10^4}{0,4332} = 13,9.10^4; \quad \frac{k}{a^2} = \frac{6.10^4}{0,1877} = 32.10^4$$

$$\frac{k}{a^3} = \frac{6.10^4}{0,0813} = 73,8.10^4$$

Viết các phương trình mômen và lực cắt của đoạn cuối

$$M_3 = -693B_\xi + 32.10^4 \cdot y_0 \cdot C_\xi + 73,8.10^4 \cdot \theta_0 \cdot D_\xi - 90A_{a(x-4)} - 107 \cdot C_{a(x-4)} - 693B_{a(x-8)}$$

$$Q_3 = -300A_\xi + 13,9.10^4 y_0 B_\xi + 32.10^4 \cdot \theta_0 C_\xi + 156D_{a(x-4)} - 46,2 \cdot B_{a(x-4)} - 300A_{a(x-8)}$$

Tra bảng để có được các trị số A, B, C, D ứng với :

$$\xi = a l = 0,4332 \cdot 12 = 5,20$$

$$a(x-4) = a(l-4) = 3,47$$

$$a(x-8) = a(l-8) = 1,73$$

Chú ý : biến số  $\xi = ax$ , khi viết cho đoạn cuối  $x = l$  do đó ta có  $\xi = al$

Với  $\xi = 5,20$  ta có :

$$A_\xi = 42,4661, B_\xi = -18,8057, C_\xi = -40,0350, D_\xi = -30,6346$$

Với  $a(l-4) = 3,47$  ta có

$$A_{3,47} = -15,2244; B_{3,47} = -10,1913; C_{3,47} = -2,5889; D_{3,47} = 2,5018$$

Với  $a(l-8) = 1,73$  ta có

$$A_{1,73} = -0,4612; B_{1,73} = 1,2196; C_{1,73} = 1,3486; D_{1,73} = 0,8263$$

Từ đó ta có :

$$M_3 = -693(-18,8057) + 32.10^4(-40,0350)y_0 + 73,8.10^4 \cdot (-30,6346)\theta_0 - 90(-15,2244) - 107 \cdot (-2,5889) - 693(1,2196)$$

$$Q_3 = -300 \cdot 42,4661 + 13,9.10^4(-18,8057)y_0 + 32.10^4(-40,0350)\theta_0 + 156 \cdot 2,5018 - 46,2 \cdot (-10,1913) - 300(-0,4612)$$

Sau khi thực hiện các phép tính, trị số mômen và lực cắt ở cuối dầm là :

$$M_3 = -1281,12.10^4 \cdot y_0 - 2260,83348.10^4 \cdot \theta_0 + 13834,3756$$

$$Q_3 = -261,39923.10^4 \cdot y_0 - 1281,12.10^4 \cdot \theta_0 - 11740,35114$$

Từ điều kiện cuối  $Q_c = 0$  và  $M_c = -90$  kNm.

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} -1281,12.10^4 y_0 - 2260,83348.10^4 \theta_0 + 13834,3756 = -90 \\ -261,39923.10^4 y_0 - 1281,12.10^4 \theta_0 - 11740,35114 = 0 \end{cases}$$

Tính ra ta có các nghiệm :

$$y_0 = 4,23 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\theta_0 = -17,78 \cdot 10^{-4} \text{ radian}$$

d) *Vẽ biểu đồ nội lực*

Thay trị số  $y_0$  và  $\theta_0$  vào  $M_1$  và  $Q_1$ , ta có phương trình của mômen và lực cắt trong đoạn một :

$$M_1 = -693B_{ax} + 1352C_{ax} - 1312D_{ax}$$

$$Q_1 = -300A_{ax} + 587,3B_{ax} - 569C_{ax}$$

Phương trình mômen và lực cắt trong đoạn hai và ba là :

$$M_2 = M_1 - 90A_{a(x-4)} - 107C_{a(x-4)}$$

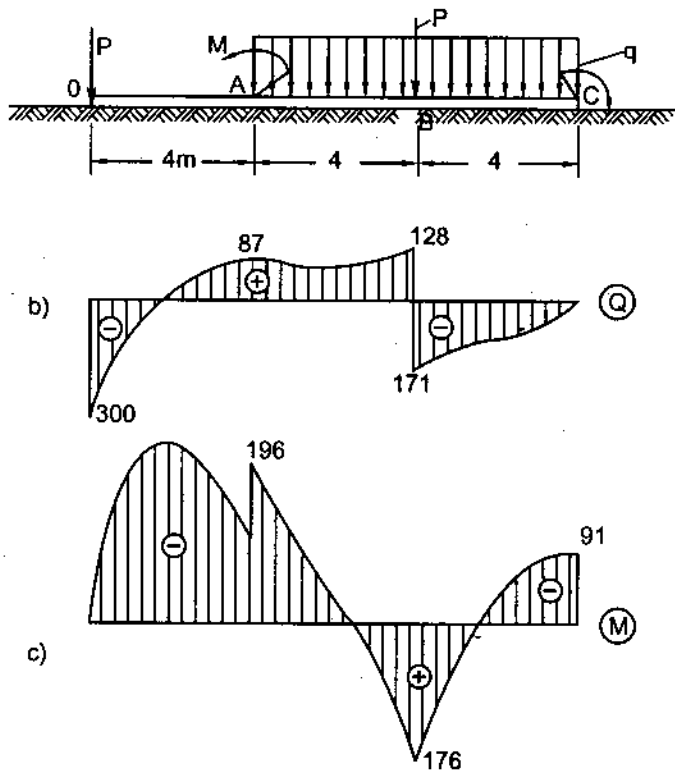
$$Q_2 = Q_1 + 156D_{a(x-4)} - 46,2B_{a(x-4)}$$

$$M_3 = M_2 - 693B_{a(x-8)}$$

$$Q_3 = Q_2 - 300A_{a(x-8)}$$

Chú ý trong đoạn hai và ba các hàm  $M_1$  và  $Q_1$  cũng như  $M_2$  và  $Q_2$ , biến số  $x$  phải được kéo dài cho đến hết dầm.

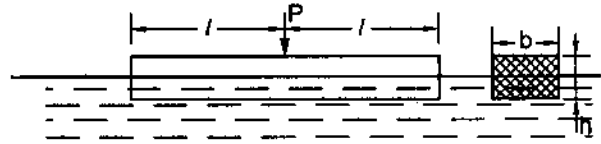
Các biểu đồ được vẽ trên hình (h.13-11).



Hình 13-11

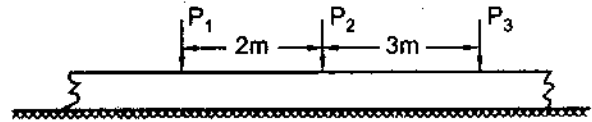
## Bài tập

13.1. Một thanh gỗ mặt cắt ngang hình chữ nhật bề rộng  $b$  và cao  $h$  được nổi lên bề mặt nước. Đặt một lực  $P$  lên giữa thanh. Xác định mômen uốn lớn nhất trong thanh với giả thiết là lực  $P$  không lớn lắm và thanh không chìm xuống dưới nước (h.13-12). Cho biết tỉ trọng của nước là  $\gamma$ .



Hình 13-12

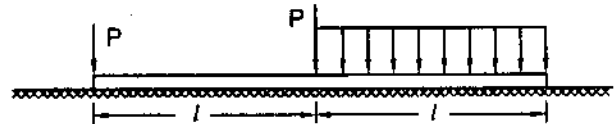
13.2. Dựa vào bảng 13-1 để xác định hệ số nền của một dầm ray đường sắt đặt trên đất sét pha cát dầm kỹ (h.13-13). Chiều dài  $l$  có thể xem là vô hạn, với độ cứng khi uốn là  $EJ = C^t$ . Tính mômen uốn lớn nhất dưới tác dụng của ba lực  $P_1, P_2, P_3$  như hình vẽ.  $P_1 = 2^t, P_2 = 3^t, P_3 = 4^t$ .



Hình 13-13

13.3. Vẽ đường ảnh hưởng về mômen uốn của dầm trong bài toán 2, từ đó xác định mômen uốn lớn nhất trong dầm khi có 1 toa tàu chạy qua. Trọng lượng của toa tàu là  $30^t$ . Khoảng cách giữa hai bánh của toa tàu dọc theo đường tàu là 3m.

13.4. Viết phương trình đường đàn hồi của dầm đặt trên nền chịu lực hình vẽ (h.13-14) cho biết :  $l = 3m, q = 20kN/m, P = 300kN, k_0 = 6 \cdot 10^4 kN/m^3$ . Chiều rộng  $b = 0,3m, J = 0,0426m^4, E = 10^7 kN/m^2$ .



Hình 13-14

097  
144  
JCB, 1998

# PHỤ LỤC

Trị số của hàm  $\eta$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$  để tính dầm dài vô hạn trên nền đàn hồi

$$\eta = e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi); \quad \eta_2 = e^{-\xi} \cdot \cos \xi$$

$$\eta_1 = e^{-\xi} (\cos \xi - \sin \xi); \quad \eta_3 = e^{-\xi} \cdot \sin \xi$$

| $\xi = ax$ | $\eta$ | $\eta_3$ | $\eta_1$ | $\eta_2$ | $\xi = ax$ |
|------------|--------|----------|----------|----------|------------|
| 0,0        | 1,0000 | 0,0000   | 1,0000   | +1,0000  | 0,1        |
| 0,1        | 0,9907 | +0,0903  | 0,8100   | +0,9003  | 0,1        |
| 0,2        | 0,9651 | +0,1627  | 0,6398   | +0,8024  | 0,2        |
| 0,3        | 0,9267 | +0,2189  | 0,4888   | +0,7077  | 0,3        |
| 0,4        | 0,8784 | +0,2610  | 0,3564   | +0,6174  | 0,4        |
| 0,5        | 0,8231 | +0,2908  | 0,2415   | +0,5323  | 0,5        |
| 0,6        | 0,7628 | +0,3099  | 0,1431   | +0,4530  | 0,6        |
| 0,7        | 0,6997 | +0,3199  | 0,0599   | +0,3708  | 0,7        |
| $\pi/4$    | 0,6448 | +0,3224  | 0,0000   | +0,3224  | 0,785      |
| 0,8        | 0,6354 | +0,3223  | -0,0093  | +0,3131  | 0,8        |
| 0,9        | 0,5712 | +0,3185  | -0,0657  | +0,2527  | 0,9        |
| 1,0        | 0,5083 | +0,3096  | -0,1108  | +0,1988  | 1,0        |
| 1,1        | 0,4476 | +0,2967  | -0,1457  | +0,1510  | 1,1        |
| 1,2        | 0,3899 | +0,2807  | -0,1716  | +0,1091  | 1,2        |
| 1,3        | 0,3355 | +0,2626  | -0,1897  | +0,0729  | 1,3        |
| 1,4        | 0,2849 | +0,2430  | -0,2011  | +0,0419  | 1,4        |
| 1,5        | 0,2384 | +0,2226  | -0,2068  | +0,0158  | 1,5        |
| $\pi/2$    | 0,2079 | +0,2079  | -0,2079  | 0,0000   | 1,571      |
| 1,6        | 0,1959 | +0,2018  | -0,2077  | -0,0059  | 1,6        |
| 1,7        | 0,1576 | +0,1812  | -0,2047  | -0,0235  | 1,7        |
| 1,8        | 0,1234 | +0,1610  | -0,1985  | -0,0376  | 1,8        |
| 1,9        | 0,0932 | +0,1415  | -0,1899  | -0,0484  | 1,9        |
| 2,0        | 0,0667 | +0,1231  | -0,1794  | -0,0563  | 2,0        |
| 2,1        | 0,0439 | +0,1057  | -0,1675  | -0,0618  | 2,1        |
| 2,2        | 0,0244 | +0,0896  | -0,1548  | -0,0652  | 2,2        |
| 2,3        | 0,0080 | +0,0748  | -0,1416  | -0,0668  | 2,3        |

| $\xi = ax$ | $\eta$   | $\eta_3$ | $\eta_1$ | $\eta_2$ | $\xi = ax$ |
|------------|----------|----------|----------|----------|------------|
| 3 $\pi/4$  | 0,0000   | +0,0670  | -0,1340  | -0,0670  | 2,356      |
| 2,4        | -0,0056  | +0,0613  | -0,1282  | -0,0669  | 2,4        |
| 2,5        | -0,0166  | +0,0491  | -0,1149  | -0,0658  | 2,5        |
| 2,6        | -0,0254  | +0,0383  | -0,1019  | -0,0636  | 2,6        |
| 2,7        | -0,0320  | +0,0287  | -0,0895  | -0,0608  | 2,7        |
| 2,8        | -0,0360  | +0,0204  | -0,0777  | -0,0573  | 2,8        |
| 2,9        | -0,0403  | +0,0132  | -0,0666  | -0,0534  | 2,9        |
| 3,0        | -0,04226 | +0,00703 | -0,05632 | -0,04929 | 3,0        |
| 3,1        | -0,04314 | +0,00187 | -0,04688 | -0,04501 | 3,1        |
| $\pi$      | -0,04321 | +0,00000 | -0,04321 | -0,04321 | 3,142      |
| 3,2        | -0,04307 | -0,00238 | -0,03831 | -0,04069 | 3,2        |
| 3,3        | -0,04224 | -0,00582 | -0,03060 | -0,03642 | 3,3        |
| 3,4        | -0,04079 | -0,00853 | -0,02374 | -0,03227 | 3,3        |
| 3,5        | -0,03887 | -0,01059 | -0,01769 | -0,02828 | 3,4        |
| 3,6        | -0,03659 | -0,01209 | -0,01241 | -0,02450 | 3,5        |
| 3,7        | -0,03407 | -0,01310 | -0,00787 | -0,02097 | 3,6        |
| 3,8        | -0,03138 | -0,01369 | -0,00401 | -0,01770 | 3,7        |
| 3,9        | -0,02862 | -0,01392 | -0,00077 | -0,01469 | 3,8        |
| 5 $\pi/4$  | -0,02786 | -0,01393 | 0,00000  | -0,01393 | 3,9        |
| 4,0        | -0,02583 | -0,01386 | +0,00189 | -0,01197 | 3,927      |
| 4,1        | -0,02309 | -0,01356 | 0,00403  | -0,00953 | 4,0        |
| 4,2        | -0,02042 | -0,01307 | 0,00572  | -0,00735 | 4,1        |
| 4,3        | -0,01787 | -0,01243 | 0,00699  | -0,00544 | 4,2        |
| 4,4        | -0,01546 | -0,01168 | 0,00791  | -0,00377 | 4,3        |
| 4,5        | -0,01320 | -0,01086 | 0,00852  | -0,00234 | 4,5        |
| 4,6        | -0,01112 | -0,00999 | 0,00786  | -0,00113 | 4,6        |
| 4,7        | -0,00921 | -0,00909 | 0,00898  | -0,00011 | 4,7        |
| 6 $\pi/4$  | -0,00898 | -0,00898 | 0,00898  | 0,00000  | 4,712      |
| 4,8        | -0,00748 | -0,00820 | 0,00892  | +0,00072 | 4,8        |
| 4,9        | -0,00593 | -0,00732 | 0,00870  | 0,00139  | 4,9        |
| 5,0        | -0,00455 | -0,00646 | 0,00837  | 0,00191  | 5,0        |
| 5,1        | -0,00334 | -0,00564 | 0,00795  | 0,00230  | 5,1        |

11.0  
199.80.

| $\xi = ax$ | $\eta$   | $\eta_3$ | $\eta_1$ | $\eta_2$ | $\xi = ax$ |
|------------|----------|----------|----------|----------|------------|
| 5,2        | -0,00229 | -0,00487 | 0,00746  | 0,00259  | 5,2        |
| 5,3        | -0,00139 | -0,00415 | 0,00692  | 0,00277  | 5,3        |
| 5,4        | -0,00063 | -0,00349 | 0,00636  | 0,00287  | 5,4        |
| $7\pi/4$   | 0,00000  | -0,00290 | 0,00579  | 0,00290  | 5,498      |
| 5,5        | +0,00001 | -0,00288 | 0,00578  | 0,00290  | 5,5        |
| 5,6        | 0,00053  | -0,00232 | 0,00520  | 0,00287  | 5,6        |
| 5,7        | 0,00095  | -0,00184 | 0,00464  | 0,00279  | 5,7        |
| 5,8        | 0,00127  | -0,00141 | 0,00409  | 0,00268  | 5,8        |
| 5,9        | 0,00152  | -0,00102 | 0,00356  | 0,00254  | 5,9        |
| 6,0        | 0,00169  | -0,00069 | 0,00307  | 0,00238  | 6,00       |
| 6,1        | 0,00180  | -0,00069 | 0,00261  | 0,00221  | 6,1        |
| 6,2        | 0,00185  | -0,00017 | 0,00219  | 0,00202  | 6,2        |
| $8\pi/4$   | 0,00187  | 0,00000  | 0,00187  | 0,00187  | 6,283      |
| 6,3        | 0,00187  | +0,00003 | 0,00181  | 0,00184  | 6,3        |
| 6,4        | 0,00184  | 0,00019  | 0,00146  | 0,00165  | 6,4        |
| 6,5        | 0,00179  | 0,00032  | 0,00115  | 0,00147  | 6,5        |
| 6,6        | 0,00172  | 0,00042  | 0,00087  | 0,00129  | 6,6        |
| 6,7        | 0,00162  | 0,00050  | 0,00063  | 0,00113  | 6,7        |
| 6,8        | 0,00152  | 0,00055  | 0,00042  | 0,00097  | 6,8        |
| 6,9        | 0,00141  | 0,00058  | 0,00024  | 0,00082  | 6,9        |
| 7,0        | 0,00129  | 0,00060  | 0,00009  | 0,00069  | 7,0        |
| $9\pi/4$   | 0,00120  | 0,00060  | 0,00000  | 0,00060  | 7,069      |

**Trị số của các hàm Crulóp để tính dầm có mặt cắt không đổi trên nền đàn hồi**

| $a_x$ | $A_{ax}$ | $B_{ax}$ | $C_{ax}$ | $D_{ax}$ |
|-------|----------|----------|----------|----------|
| 0     | 1        | 0        | 0        | 0        |
| 0,001 | 1,0000   | 0,00100  | 0,00000  | 0,00000  |
| 0,002 | 1,0000   | 0,00200  | 0,00000  | 0,00000  |
| 0,003 | 1,0000   | 0,00300  | 0,00001  | 0,00000  |
| 0,004 | 1,0000   | 0,00400  | 0,00001  | 0,00000  |
| 0,005 | 1,0000   | 0,00500  | 0,00002  | 0,00000  |
| 0,006 | 1,0000   | 0,00600  | 0,00002  | 0,00000  |
| 0,007 | 1,0000   | 0,00700  | 0,00003  | 0,00000  |
| 0,008 | 1,0000   | 0,00800  | 0,00003  | 0,00000  |
| 0,009 | 1,0000   | 0,00900  | 0,00004  | 0,00000  |
| 0,010 | 1,0000   | 0,01000  | 0,00005  | 0,00000  |
| 0,011 | 1,0000   | 0,01100  | 0,00006  | 0,00000  |
| 0,012 | 1,0000   | 0,01200  | 0,00007  | 0,00000  |
| 0,013 | 1,0000   | 0,01300  | 0,00009  | 0,00000  |
| 0,014 | 1,0000   | 0,01400  | 0,00010  | 0,00000  |
| 0,015 | 1,0000   | 0,01500  | 0,00012  | 0,00000  |
| 0,016 | 1,0000   | 0,01600  | 0,00013  | 0,00000  |
| 0,017 | 1,0000   | 0,01700  | 0,00015  | 0,00000  |
| 0,018 | 1,0000   | 0,01800  | 0,00016  | 0,00000  |
| 0,019 | 1,0000   | 0,01900  | 0,00018  | 0,00000  |
| 0,020 | 1,0000   | 0,02000  | 0,00020  | 0,00000  |
| 0,030 | 1,0000   | 0,03000  | 0,00045  | 0,00001  |
| 0,040 | 1,0000   | 0,04000  | 0,00080  | 0,00001  |
| 0,05  | 1,0000   | 0,0500   | 0,0013   | 0,00002  |
| 0,06  | 1,0000   | 0,0600   | 0,0018   | 0,00001  |
| 0,07  | 1,0000   | 0,0700   | 0,0025   | 0,00001  |
| 0,08  | 1,0000   | 0,0800   | 0,0032   | 0,00001  |
| 0,09  | 1,0000   | 0,0900   | 0,0041   | 0,00001  |
| 0,10  | 1,0000   | 0,1000   | 0,0050   | 0,00002  |
| 0,11  | 1,0000   | 0,1100   | 0,0061   | 0,00002  |
| 0,12  | 1,0000   | 0,1200   | 0,0072   | 0,00003  |
| 0,13  | 0,9999   | 0,1300   | 0,0085   | 0,00004  |



03  
038-06

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0,14 | 0,9999          | 1,1400          | 0,0098          | 0,0005          |
| 0,15 | 0,9999          | 0,1500          | 0,0113          | 0,0006          |
| 0,16 | 0,9999          | 0,1600          | 0,0128          | 0,0007          |
| 0,17 | 0,9999          | 0,1700          | 0,0145          | 0,0008          |
| 0,18 | 0,9998          | 0,1800          | 0,0162          | 0,0010          |
| 0,19 | 0,9998          | 0,1900          | 0,0181          | 0,0012          |
| 0,20 | 0,9997          | 0,2000          | 0,0200          | 0,0014          |
| 0,21 | 0,9997          | 0,2100          | 0,0221          | 0,0016          |
| 0,22 | 0,9996          | 0,2200          | 0,0242          | 0,0018          |
| 0,23 | 0,9995          | 0,2300          | 0,0265          | 0,0020          |
| 0,24 | 0,9995          | 0,2400          | 0,0288          | 0,0023          |
| 0,25 | 0,9993          | 0,2500          | 0,0313          | 0,0026          |
| 0,26 | 0,9992          | 0,2600          | 0,0338          | 0,0029          |
| 0,27 | 0,9991          | 0,2700          | 0,0365          | 0,0033          |
| 0,28 | 0,9990          | 0,2800          | 0,0392          | 0,0037          |
| 0,29 | 0,9988          | 0,2900          | 0,0421          | 0,0041          |
| 0,30 | 0,9987          | 0,2999          | 0,0450          | 0,0045          |
| 0,31 | 0,9985          | 0,3099          | 0,0481          | 0,0050          |
| 0,32 | 0,9983          | 0,3199          | 0,0512          | 0,0055          |
| 0,33 | 0,9980          | 0,3299          | 0,0545          | 0,0060          |
| 0,34 | 0,9978          | 0,3399          | 0,0578          | 0,0066          |
| 0,35 | 0,9975          | 0,3498          | 0,0613          | 0,0072          |
| 0,36 | 0,9972          | 0,3598          | 0,0648          | 0,0078          |
| 0,37 | 0,9969          | 0,3698          | 0,0685          | 0,0085          |
| 0,38 | 0,9965          | 0,3797          | 0,0722          | 0,0092          |
| 0,39 | 0,9961          | 0,3897          | 0,0761          | 0,0099          |
| 0,40 | 0,9957          | 0,3997          | 0,0800          | 0,0107          |
| 0,41 | 0,9953          | 0,4096          | 0,0840          | 0,0115          |
| 0,42 | 0,9948          | 0,4196          | 0,0882          | 0,0124          |
| 0,43 | 0,9943          | 0,4295          | 0,0924          | 0,0133          |
| 0,44 | 0,9938          | 0,4395          | 0,0968          | 0,0142          |
| 0,45 | 0,9932          | 0,4494          | 0,1012          | 0,0152          |
| 0,46 | 0,9925          | 0,4594          | 0,1058          | 0,0162          |
| 0,47 | 0,9919          | 0,4693          | 0,1104          | 0,0173          |
| 0,48 | 0,9911          | 0,4792          | 0,1152          | 0,0184          |

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0,49 | 0,9904          | 0,4891          | 0,1200          | 0,0196          |
| 0,50 | 0,9895          | 0,4990          | 0,1249          | 0,0208          |
| 0,51 | 0,9887          | 0,5089          | 0,1300          | 0,0221          |
| 0,52 | 0,9878          | 0,5188          | 0,1351          | 0,0234          |
| 0,53 | 0,9869          | 0,5286          | 0,1404          | 0,0248          |
| 0,54 | 0,9858          | 0,5385          | 0,1457          | 0,0262          |
| 0,55 | 0,9847          | 0,5484          | 0,1511          | 0,0277          |
| 0,56 | 0,9836          | 0,5582          | 0,1567          | 0,0293          |
| 0,57 | 0,9824          | 0,5680          | 0,1623          | 0,0309          |
| 0,58 | 0,9811          | 0,5778          | 0,1680          | 0,0325          |
| 0,59 | 0,9798          | 0,5876          | 0,1738          | 0,0342          |
| 0,60 | 0,9784          | 0,5974          | 0,1798          | 0,0360          |
| 0,61 | 0,9769          | 0,6072          | 0,1858          | 0,0378          |
| 0,62 | 0,9754          | 0,6170          | 0,1919          | 0,0397          |
| 0,63 | 0,9738          | 0,6267          | 0,1981          | 0,0417          |
| 0,64 | 0,9721          | 0,6364          | 0,2044          | 0,0437          |
| 0,65 | 0,9703          | 0,6462          | 0,2109          | 0,0457          |
| 0,66 | 0,9684          | 0,6559          | 0,2174          | 0,0479          |
| 0,67 | 0,9664          | 0,6655          | 0,2240          | 0,0501          |
| 0,68 | 0,9644          | 0,6752          | 0,2307          | 0,0524          |
| 0,69 | 0,9623          | 0,6848          | 0,2375          | 0,0547          |
| 0,70 | 0,9600          | 0,6944          | 0,2444          | 0,0571          |
| 0,71 | 0,9577          | 0,7040          | 0,2514          | 0,0596          |
| 0,72 | 0,9552          | 0,7136          | 0,2584          | 0,0621          |
| 0,73 | 0,9527          | 0,7231          | 0,2656          | 0,0648          |
| 0,74 | 0,9501          | 0,7326          | 0,2729          | 0,0675          |
| 0,75 | 0,9473          | 0,7421          | 0,2803          | 0,0702          |
| 0,76 | 0,9444          | 0,7516          | 0,2878          | 0,0730          |
| 0,77 | 0,9415          | 0,7610          | 0,2953          | 0,0760          |
| 0,78 | 0,9384          | 0,7704          | 0,3030          | 0,0790          |
| 0,79 | 0,9351          | 0,7798          | 0,3107          | 0,0820          |
| 0,80 | 0,9318          | 0,7891          | 0,3186          | 0,0852          |
| 0,81 | 0,9283          | 0,7984          | 0,3265          | 0,0884          |
| 0,82 | 0,9247          | 0,8077          | 0,3345          | 0,0917          |
| 0,83 | 0,9210          | 0,8169          | 0,3427          | 0,0951          |

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 0,84 | 0,9171          | 0,8261          | 0,3509          | 0,0986          |
| 0,85 | 0,9131          | 0,8352          | 0,3592          | 0,1021          |
| 0,86 | 0,9090          | 0,8443          | 0,3676          | 0,1057          |
| 0,87 | 0,9047          | 0,8534          | 0,3761          | 0,1095          |
| 0,88 | 0,9002          | 0,8624          | 0,3846          | 0,1133          |
| 0,89 | 0,8956          | 0,8714          | 0,3933          | 0,1172          |
| 0,90 | 0,8931          | 0,8804          | 0,4021          | 0,1211          |
| 0,91 | 0,8859          | 0,8893          | 0,4109          | 0,1252          |
| 0,92 | 0,8808          | 0,8981          | 0,4199          | 0,1293          |
| 0,93 | 0,8753          | 0,9069          | 0,4289          | 0,1336          |
| 0,94 | 0,8701          | 0,9156          | 0,4380          | 0,1379          |
| 0,95 | 0,8645          | 0,9242          | 0,4472          | 0,1424          |
| 0,96 | 0,8587          | 0,9329          | 0,4565          | 0,1469          |
| 0,97 | 0,8528          | 0,9415          | 0,4659          | 0,1515          |
| 0,98 | 0,8466          | 0,9499          | 0,4753          | 0,1562          |
| 0,99 | 0,8339          | 0,9586          | 0,4849          | 0,1611          |
| 1,00 | 0,8337          | 0,9668          | 0,4945          | 0,1659          |
| 1,01 | 0,8270          | 0,9750          | 0,5042          | 0,1709          |
| 1,02 | 0,8201          | 0,9833          | 0,5140          | 0,1760          |
| 1,03 | 0,8129          | 0,9914          | 0,5238          | 0,1812          |
| 1,04 | 0,8056          | 0,9995          | 0,5338          | 0,1865          |
| 1,05 | 0,7980          | 1,0076          | 0,5438          | 0,1918          |
| 1,06 | 0,7902          | 1,0155          | 0,5540          | 0,1973          |
| 1,07 | 0,7822          | 1,0233          | 0,5641          | 0,2029          |
| 1,08 | 0,7740          | 1,0311          | 0,5744          | 0,2086          |
| 1,09 | 0,7655          | 1,0388          | 0,5848          | 0,2149          |
| 1,10 | 0,7568          | 1,0465          | 0,5952          | 0,2204          |
| 1,11 | 0,7479          | 1,0540          | 0,6057          | 0,2263          |
| 1,12 | 0,7387          | 1,0613          | 0,6163          | 0,2323          |
| 1,13 | 0,7293          | 1,0687          | 0,6269          | 0,2384          |
| 1,14 | 0,7196          | 1,0760          | 0,6376          | 0,2446          |
| 1,15 | 0,7097          | 1,0831          | 0,6484          | 0,2514          |
| 1,16 | 0,6995          | 1,0902          | 0,6593          | 0,2579          |
| 1,17 | 0,6891          | 1,0971          | 0,6702          | 0,2646          |
| 1,18 | 0,6784          | 1,1040          | 0,6813          | 0,2713          |

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1,19 | 0,6674          | 1,1107          | 0,6923          | 0,2782          |
| 1,20 | 0,6561          | 1,1173          | 0,7035          | 0,2852          |
| 1,21 | 0,6446          | 1,1238          | 0,7147          | 0,2923          |
| 1,22 | 0,6330          | 1,1306          | 0,7259          | 0,2997          |
| 1,23 | 0,6206          | 1,1365          | 0,7373          | 0,3068          |
| 1,24 | 0,6082          | 1,1426          | 0,7487          | 0,3142          |
| 1,25 | 0,5955          | 1,1486          | 0,7601          | 0,3218          |
| 1,26 | 0,5824          | 1,1545          | 0,7716          | 0,3294          |
| 1,27 | 0,5691          | 1,1602          | 0,7832          | 0,3372          |
| 1,28 | 0,5555          | 1,1659          | 0,7948          | 0,3451          |
| 1,29 | 0,5415          | 1,1714          | 0,8065          | 0,3531          |
| 1,30 | 0,5272          | 1,1767          | 0,8183          | 0,3612          |
| 1,31 | 0,5126          | 1,1819          | 0,8301          | 0,3695          |
| 1,32 | 0,4977          | 1,1870          | 0,8419          | 0,3778          |
| 1,33 | 0,4824          | 1,1919          | 0,8538          | 0,3863          |
| 1,34 | 0,4668          | 1,1966          | 0,8657          | 0,3949          |
| 1,35 | 0,4508          | 1,2012          | 0,8777          | 0,4036          |
| 1,36 | 0,4345          | 1,2057          | 0,8898          | 0,4124          |
| 1,37 | 0,4178          | 1,2099          | 0,9018          | 0,4214          |
| 1,38 | 0,4008          | 1,2140          | 0,9140          | 0,4305          |
| 1,39 | 0,3833          | 1,2179          | 0,9261          | 0,4397          |
| 1,40 | 0,3656          | 1,2217          | 0,9383          | 0,4490          |
| 1,41 | 0,3474          | 1,2252          | 0,9506          | 0,4585          |
| 1,42 | 0,3289          | 1,2286          | 0,9628          | 0,4680          |
| 1,43 | 0,3100          | 1,2318          | 0,9751          | 0,4777          |
| 1,44 | 0,2907          | 1,2348          | 0,9865          | 0,4875          |
| 1,45 | 0,2710          | 1,2376          | 0,9998          | 0,4974          |
| 1,46 | 0,2509          | 1,2402          | 1,0122          | 0,5075          |
| 1,47 | 0,2304          | 1,2426          | 1,0246          | 0,5177          |
| 1,48 | 0,2095          | 1,2448          | 1,0371          | 0,5280          |
| 1,49 | 0,1882          | 1,2468          | 1,0495          | 0,5384          |
| 1,50 | 0,1664          | 1,2486          | 1,0620          | 0,5490          |
| 1,51 | 0,1442          | 1,2501          | 1,0745          | 0,5597          |
| 1,52 | 0,1216          | 1,2515          | 1,0870          | 0,5705          |
| 1,53 | 0,0986          | 1,2526          | 1,0995          | 0,5814          |

0.000

| ax      | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|---------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1,54    | 0,0746          | 1,2534          | 1,1121          | 0,5925          |
| 1,55    | 0,0512          | 1,2541          | 1,1246          | 0,6036          |
| 1,56    | 0,0268          | 1,2545          | 1,1371          | 0,6149          |
| 1,57    | 0,0020          | 1,2546          | 1,1497          | 0,0264          |
| $\pi/2$ | 0               | 1,2546          | 1,1507          | 0,6273          |
| 1,58    | -0,0233         | 1,2545          | 1,1622          | 0,6380          |
| 1,59    | -0,0490         | 1,2542          | 1,1748          | 0,6496          |
| 1,60    | -0,0753         | 1,2535          | 1,1873          | 0,6615          |
| 1,61    | -0,1019         | 1,2526          | 1,1998          | 0,6734          |
| 1,62    | -0,1291         | 1,2515          | 1,2124          | 0,6854          |
| 1,63    | -0,1568         | 1,2501          | 1,2249          | 0,6976          |
| 1,64    | -0,1849         | 1,2484          | 1,2374          | 0,7099          |
| 1,65    | -0,2136         | 1,2464          | 1,2498          | 0,7224          |
| 1,66    | -0,2427         | 1,2441          | 1,2623          | 0,7349          |
| 1,67    | -0,2724         | 1,2415          | 1,2747          | 0,7476          |
| 1,68    | -6,3026         | 1,2386          | 1,2871          | 0,7604          |
| 1,69    | -0,3332         | 1,2354          | 1,2995          | 0,7734          |
| 1,70    | -0,3644         | 1,2322          | 1,3118          | 0,7863          |
| 1,71    | -0,3961         | 1,2282          | 1,3241          | 0,7996          |
| 1,72    | -0,4284         | 1,2240          | 1,3364          | 0,8129          |
| 1,73    | -0,4612         | 1,2196          | 1,3486          | 0,8263          |
| 1,74    | -0,4945         | 1,2148          | 1,3608          | 0,8399          |
| 1,75    | -0,5284         | 1,2097          | 1,3729          | 0,8535          |
| 1,76    | -0,5628         | 1,2042          | 1,3850          | 0,8673          |
| 1,77    | -0,5977         | 1,1984          | 1,3970          | 0,8812          |
| 1,78    | -0,6333         | 1,1923          | 1,4089          | 0,8953          |
| 1,79    | -0,6694         | 1,1857          | 1,4208          | 0,9094          |
| 1,80    | -0,7060         | 1,1789          | 1,4326          | 0,9237          |
| 1,81    | -0,7433         | 1,1716          | 1,4444          | 0,9381          |
| 1,82    | -0,7811         | 1,1640          | 1,4561          | 0,9526          |
| 1,83    | -0,8195         | 1,1560          | 1,4677          | 0,9672          |
| 1,84    | -0,8584         | 1,1476          | 1,4792          | 0,9819          |
| 1,85    | -0,8980         | 1,1389          | 1,4906          | 0,9968          |
| 1,86    | -0,9382         | 1,1297          | 1,5020          | 1,0117          |
| 1,87    | -0,9790         | 1,1201          | 1,5132          | 1,0268          |

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1,88 | -1,0203         | 1,1101          | 1,5244          | 1,0420          |
| 1,89 | -1,0623         | 1,0997          | 1,5354          | 1,0573          |
| 1,90 | -1,1049         | 1,0888          | 1,5464          | 1,0722          |
| 1,91 | -0,1481         | 1,0776          | 1,5572          | 1,0882          |
| 1,92 | -1,1920         | 1,0659          | 1,5679          | 1,1038          |
| 1,93 | -1,2364         | 1,0538          | 1,5785          | 1,1196          |
| 1,94 | -1,2815         | 1,0411          | 1,5890          | 1,1354          |
| 1,95 | -1,3273         | 1,0281          | 1,5993          | 1,1514          |
| 1,96 | -1,3736         | 1,0146          | 1,6095          | 1,1674          |
| 1,97 | -1,4207         | 1,0007          | 1,6196          | 1,1835          |
| 1,98 | -1,4683         | 0,9862          | 1,6296          | 1,1998          |
| 1,99 | -1,5166         | 0,9713          | 1,6393          | 1,2161          |
| 2,00 | -1,5656         | 0,9558          | 1,6490          | 1,2325          |
| 2,01 | -1,6153         | 0,9399          | 1,6584          | 1,2491          |
| 2,02 | -1,6656         | 0,9235          | 1,6678          | 1,2658          |
| 2,03 | -1,7165         | 0,9066          | 1,6769          | 1,2825          |
| 2,04 | -1,7682         | 0,8892          | 1,6859          | 1,2993          |
| 2,05 | -1,8205         | 0,8713          | 1,6947          | 1,3162          |
| 2,06 | -1,8734         | 0,8528          | 1,7033          | 1,3332          |
| 2,07 | -1,9271         | 0,8338          | 1,7117          | 1,3502          |
| 2,08 | -1,9815         | 0,8142          | 1,7200          | 1,3845          |
| 2,09 | -2,0365         | 0,7939          | 1,7280          | 1,4020          |
| 2,10 | -2,0923         | 0,7735          | 1,7359          | 1,4194          |
| 2,11 | -2,1487         | 0,7523          | 1,7435          | 1,4368          |
| 2,12 | -2,2058         | 0,7306          | 1,7509          | 1,4544          |
| 2,13 | -2,2636         | 0,7082          | 1,7581          | 1,4720          |
| 2,14 | -2,3221         | 0,6853          | 1,7651          | 1,4897          |
| 2,15 | -2,3814         | 0,6618          | 1,7718          | 1,5074          |
| 2,16 | -2,4413         | 0,6376          | 1,7783          | 1,5253          |
| 2,17 | -2,5020         | 0,6129          | 1,7846          | 1,5253          |
| 2,18 | -2,5633         | 0,5876          | 1,7906          | 1,5431          |
| 2,19 | -2,6254         | 0,5616          | 1,7963          | 1,5611          |
| 2,20 | -2,6882         | 0,5351          | 1,8018          | 1,5791          |
| 2,21 | -2,7518         | 0,5079          | 1,8070          | 1,5971          |
| 2,22 | -2,8160         | 0,4801          | 1,8120          | 1,6152          |

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 2,23 | -2,8810         | 0,4516          | 1,8166          | 1,6333          |
| 2,24 | -2,9466         | 0,4224          | 1,8210          | 1,6515          |
| 2,25 | -3,0131         | 0,3926          | 1,8251          | 1,6698          |
| 2,26 | -3,0802         | 0,3621          | 1,8288          | 1,6880          |
| 2,27 | -3,1481         | 0,3310          | 1,8323          | 1,7063          |
| 2,28 | -3,2167         | 0,2991          | 1,8355          | 1,7247          |
| 2,29 | -3,2861         | 0,2667          | 1,8383          | 1,7430          |
| 2,30 | -3,3562         | 0,2335          | 1,8408          | 1,7614          |
| 2,31 | -3,4270         | 0,1996          | 1,8430          | 1,7798          |
| 2,32 | -3,4986         | 0,1649          | 1,8448          | 1,7983          |
| 2,33 | -3,5708         | 0,1296          | 1,8462          | 1,8167          |
| 2,34 | -3,6439         | 0,0935          | 1,8473          | 1,8352          |
| 2,35 | -3,7177         | 0,0567          | 1,8481          | 1,8537          |
| 2,36 | -3,7922         | 0,0191          | 1,8485          | 1,8722          |
| 2,37 | -3,8675         | -0,0192         | 1,8485          | 1,8906          |
| 2,38 | -3,9435         | -0,0583         | 1,8481          | 1,9091          |
| 2,40 | -4,0202         | -0,0981         | 1,8473          | 1,9276          |
| 2,41 | -4,0976         | -0,1386         | 1,8461          | 1,9461          |
| 2,42 | -4,1759         | -0,1800         | 1,8446          | 1,9645          |
| 2,43 | -4,2548         | -0,2221         | 1,8425          | 1,9830          |
| 2,44 | -4,4150         | -0,3089         | 1,8373          | 2,0198          |
| 2,45 | -4,4961         | -0,3534         | 1,8339          | 2,0381          |
| 2,46 | -4,5780         | -0,3988         | 1,8302          | 2,0564          |
| 2,47 | -4,6606         | -0,4450         | 1,8259          | 2,0747          |
| 2,48 | -4,7439         | -0,4920         | 1,8213          | 2,0930          |
| 2,49 | -4,8280         | -0,5399         | 1,8161          | 2,1111          |
| 2,50 | -4,9128         | -0,5885         | 1,8105          | 2,1293          |
| 2,51 | -4,9984         | -0,6381         | 1,8043          | 2,1474          |
| 2,52 | -5,0846         | -0,6885         | 1,7977          | 2,1654          |
| 2,53 | -5,1716         | -0,7398         | 1,7906          | 2,1833          |
| 2,54 | -5,2593         | -0,7920         | 1,7829          | 2,2012          |
| 2,55 | -5,3477         | -0,8450         | 1,7747          | 2,2190          |
| 2,56 | -5,4368         | -0,8989         | 1,7660          | 2,2367          |
| 2,57 | -5,5266         | -0,9538         | 1,7567          | 2,2543          |
| 2,58 | -5,6172         | -1,0095         | 1,7469          | 2,2718          |

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 2,59 | -5,7084         | -1,0661         | 1,7365          | 2,2892          |
| 2,60 | -5,8003         | -1,1236         | 1,7356          | 2,3065          |
| 2,61 | -5,8929         | -1,1821         | 1,7141          | 2,3237          |
| 2,62 | -5,9862         | -1,2415         | 1,7019          | 2,3408          |
| 2,63 | -6,0802         | -1,3018         | 1,6892          | 2,3578          |
| 2,64 | -6,1748         | -1,3631         | 1,6759          | 2,3746          |
| 2,65 | -6,2701         | -1,4253         | 1,6620          | 2,3913          |
| 2,66 | -6,3661         | -1,4885         | 1,6474          | 2,4078          |
| 2,67 | -6,4628         | -1,5527         | 1,6322          | 2,4242          |
| 2,68 | -6,5600         | -1,6177         | 1,6163          | 2,4405          |
| 2,69 | -6,6580         | -1,6838         | 1,6327          | 2,4566          |
| 2,70 | -6,7565         | -1,7509         | 1,5827          | 2,4725          |
| 2,71 | -6,8558         | -1,8190         | 1,5648          | 2,4882          |
| 2,72 | -6,9556         | -1,8881         | 1,5463          | 2,5037          |
| 2,73 | -7,0560         | -1,9581         | 1,5271          | 2,5191          |
| 2,74 | -7,1571         | -2,0292         | 1,5071          | 2,5343          |
| 2,75 | -7,2588         | -2,1012         | 1,4865          | 2,5493          |
| 2,76 | -7,3611         | -2,1743         | 1,4651          | 2,5640          |
| 2,77 | -7,4639         | -2,2484         | 1,4430          | 2,5786          |
| 2,78 | -7,5673         | -2,3236         | 1,4201          | 2,5929          |
| 2,79 | -7,6714         | -2,3998         | 1,3965          | 2,6070          |
| 2,80 | -7,7759         | -2,4770         | 1,3721          | 2,6208          |
| 2,81 | -7,8810         | -2,5553         | 1,3470          | 2,6344          |
| 2,82 | -7,9866         | -2,6347         | 1,3210          | 2,6477          |
| 2,83 | -8,0929         | -2,7151         | 1,2943          | 2,6608          |
| 2,84 | -8,1995         | -2,7965         | 1,2667          | 2,6736          |
| 2,85 | -8,3067         | -2,8790         | 1,2383          | 2,6862          |
| 2,86 | -8,4144         | -2,9627         | 1,2091          | 2,6984          |
| 2,87 | -8,5225         | -3,0473         | 1,1791          | 2,7103          |
| 2,88 | -8,6312         | -3,1331         | 1,1482          | 2,7220          |
| 2,89 | -8,7404         | -3,2200         | 1,1164          | 2,7333          |
| 2,90 | -8,8471         | -3,3079         | 1,8038          | 2,7443          |
| 2,91 | -8,9598         | -3,3969         | 1,0503          | 2,7550          |
| 2,92 | -9,0703         | -3,4872         | 1,0158          | 2,7653          |
| 2,93 | -9,1811         | -3,5784         | 0,9805          | 2,7753          |



2010  
10.10.2010

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 2,94 | -9,2923         | -3,6707         | 0,9443          | 2,7849          |
| 2,95 | -9,4039         | -3,7642         | 0,9071          | 2,7942          |
| 2,96 | -9,5158         | -3,8588         | 0,8690          | 2,8031          |
| 2,97 | -9,6281         | -3,9545         | 0,8299          | 2,8115          |
| 2,98 | -9,7407         | -4,0514         | 0,7899          | 2,8196          |
| 2,99 | -9,8536         | -4,1493         | 0,7489          | 2,8273          |
| 3,00 | -9,9669         | -4,2485         | 0,7069          | 2,8346          |
| 3,01 | -10,0804        | -4,3487         | 0,6639          | 2,8414          |
| 3,02 | -10,1943        | -4,4501         | 0,6199          | 2,8479          |
| 3,03 | -10,3083        | -4,5526         | 0,5749          | 2,8538          |
| 3,04 | -10,4225        | -4,6562         | 0,5289          | 2,8594          |
| 3,05 | -10,5317        | -4,7611         | 0,4817          | 2,8644          |
| 3,06 | -10,6516        | -4,8670         | 0,4336          | 2,8690          |
| 3,07 | -10,7665        | -4,9741         | 0,3844          | 2,8731          |
| 3,08 | -10,8815        | -5,0823         | 0,3341          | 2,8767          |
| 3,09 | -10,9966        | -5,1917         | 0,2828          | 2,8798          |
| 3,10 | -11,1119        | -5,3023         | 0,2303          | 2,8823          |
| 3,11 | -11,2272        | -5,4139         | 0,1767          | 2,8844          |
| 3,12 | -11,3427        | -5,5268         | 0,1220          | 2,8859          |
| 3,13 | -11,4580        | -5,6408         | 0,0662          | 2,8868          |
| 3,14 | -11,5736        | -5,7560         | 0,0092          | 2,8872          |
| π    | -11,5919        | -5,7744         | 0               | 2,8872          |
| 3,15 | -11,6800        | -5,8722         | -0,0490         | 2,8870          |
| 3,16 | -11,8045        | -5,9898         | -0,1083         | 2,8862          |
| 3,17 | -11,9200        | -6,1084         | -0,1688         | 2,8848          |
| 3,18 | -12,0353        | -6,2281         | -0,2305         | 2,8828          |
| 3,19 | -12,1506        | -6,3491         | -0,2934         | 2,8802          |
| 3,20 | -12,2656        | -6,4711         | -0,3574         | 2,8769          |
| 3,21 | -12,3807        | -6,5943         | -0,4227         | 2,8731          |
| 3,22 | -12,4956        | -6,7188         | -0,4894         | 2,8685          |
| 3,23 | -12,6101        | -6,8442         | -0,5571         | 2,8633          |
| 3,24 | -12,7373        | -6,9710         | -0,6262         | 2,8573          |
| 3,25 | -12,8388        | -7,0988         | -0,6966         | 2,8507          |
| 3,26 | -12,9527        | -7,2277         | -0,7682         | 2,8434          |
| 3,27 | -13,0662        | -7,3578         | -0,8411         | 2,8354          |

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3,28 | -13,1795        | -7,4891         | -0,9154         | 2,8266          |
| 3,29 | -13,2934        | -7,6214         | -0,9909         | 2,8171          |
| 3,30 | -13,4048        | -7,7549         | -1,0678         | 2,8068          |
| 3,31 | -13,5168        | -7,8895         | -1,1460         | 2,7957          |
| 3,32 | -13,6285        | -8,0252         | -1,2256         | 2,7839          |
| 3,33 | -13,7395        | -8,1620         | -1,3065         | 2,7712          |
| 3,34 | -13,8501        | -8,3000         | -1,3888         | 2,7577          |
| 3,35 | -13,9601        | -8,4390         | -1,4725         | 2,7434          |
| 3,36 | -14,0695        | -8,5792         | -1,5577         | 2,7282          |
| 3,37 | -14,1784        | -8,7205         | -1,6441         | 2,7122          |
| 3,38 | -14,2866        | -8,8627         | -1,7321         | 2,6953          |
| 3,39 | -14,3941        | -9,0062         | -1,8214         | 2,6776          |
| 3,40 | -14,5008        | -9,1507         | -1,9121         | 2,6589          |
| 3,41 | -14,6066        | -9,2962         | -2,0044         | 2,6393          |
| 3,42 | -14,7118        | -9,4427         | -2,0980         | 2,6189          |
| 3,43 | -14,8162        | -9,5905         | -2,1933         | 2,5974          |
| 3,44 | -14,9197        | -9,7392         | -2,2899         | 2,5750          |
| 3,45 | -15,0222        | -9,8888         | -2,3880         | 2,5516          |
| 3,46 | -15,1238        | -10,0396        | -2,4876         | 2,5272          |
| 3,47 | -15,2244        | -10,1913        | -2,5889         | 2,5018          |
| 3,48 | -15,3238        | -10,3441        | -2,6915         | 2,4754          |
| 3,49 | -15,4224        | -10,4978        | -2,7957         | 2,4480          |
| 3,50 | -15,5198        | -10,6525        | -2,9014         | 2,4195          |
| 3,51 | -15,6159        | -10,8081        | -3,0088         | 2,3900          |
| 3,52 | -15,7108        | -10,9647        | -3,1176         | 2,3593          |
| 3,53 | -15,8046        | -11,1223        | -3,2280         | 2,3276          |
| 3,54 | -15,8971        | -11,2809        | -3,3401         | 2,2948          |
| 4,09 | -17,4185        | -20,8423        | -12,1311        | -1,7168         |
| 4,10 | -17,3472        | -21,0160        | -12,3404        | -1,8392         |
| 4,11 | -17,2712        | -21,1891        | -12,5514        | -1,9636         |
| 4,12 | -17,1900        | -21,3614        | -12,7642        | -2,0902         |
| 4,13 | -17,1040        | -21,5329        | -12,9779        | -2,2189         |
| 4,14 | -17,0126        | -21,7035        | -13,1948        | -2,3498         |
| 4,15 | -16,9160        | -21,8731        | -13,6322        | -2,4828         |
| 4,16 | -16,8139        | -22,0417        | -13,8536        | -2,6180         |

July  
19, 1969

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 4,17 | -16,7064        | -22,2094        | -14,0765        | -2,7555         |
| 4,18 | -16,5934        | -22,3759        | -14,3011        | -2,8952         |
| 4,19 | -16,4748        | -22,5413        | -14,5274        | -3,0370         |
| 4,20 | -16,3505        | -22,7055        | -14,7551        | -3,1812         |
| 4,21 | -16,2203        | -22,8682        | -14,9847        | -3,3275         |
| 4,22 | -16,0842        | -23,0299        | -15,2158        | -3,4763         |
| 4,23 | -15,9423        | -23,1900        | -15,4484        | -3,6272         |
| 4,24 | -15,7939        | -23,3485        | -15,4484        | -3,7806         |
| 4,25 | -15,6398        | -23,5059        | -15,6827        | -3,9362         |
| 4,26 | -15,4793        | -23,66 6        | -15,9187        | -4,0942         |
| 4,27 | -15,3122        | -23,8153        | -16,1559        | -4,2546         |
| 4,28 | -15,1387        | -23,9677        | -16,3949        | -4,4174         |
| 4,29 | -14,9587        | -24,1181        | -16,6353        | -4,5825         |
| 4,30 | -14,7722        | -24,2669        | -16,8773        | -4,7501         |
| 4,31 | -14,5788        | -24,4136        | -17,1207        | -4,9200         |
| 4,32 | -14,3786        | -24,5574        | -17,3655        | -5,0925         |
| 4,33 | -14,1714        | -24,7012        | -17,6119        | -5,2674         |
| 4,34 | -13,9570        | -24,8417        | -17,8595        | -5,4447         |
| 4,35 | -13,7357        | -24,9802        | -18,1086        | -5,6245         |
| 4,36 | -13,5070        | -25,1164        | -18,3591        | -5,8069         |
| 4,37 | -13,2712        | -25,2500        | -18,6110        | -5,9916         |
| 4,38 | -13,0276        | -25,3819        | -18,8642        | -6,1792         |
| 4,39 | -12,7766        | -25,5108        | -19,1185        | -6,3690         |
| 4,40 | -12,5180        | -25,6373        | -19,3743        | -6,5615         |
| 4,41 | -12,2517        | -25,7612        | -19,6313        | -6,7566         |
| 4,42 | -11,9776        | -25,8824        | -19,8875        | -6,9541         |
| 4,43 | -11,6625        | -26,0007        | -20,1489        | -7,1543         |
| 4,44 | -11,4051        | -26,1161        | -20,4095        | -7,3571         |
| 4,45 | -11,1069        | -26,2074        | -20,6712        | -7,5517         |
| 4,46 | -10,8003        | -26,3884        | -20,9341        | -7,7705         |
| 4,47 | -10,4851        | -26,4448        | -21,1981        | -7,9812         |
| 4,48 | -10,1615        | -26,5480        | -21,4630        | -8,1945         |
| 4,49 | -9,8295         | -26,6479        | -21,7289        | -8,4104         |
| 4,50 | -9,4890         | -26,7447        | -21,9959        | -8,6290         |
| 4,51 | -9,1392         | -26,8377        | -22,2639        | -8,8504         |

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 4,52 | -8,7805         | -26,9272        | -22,5327        | -9,0744         |
| 4,53 | -8,4133         | -27,0132        | -22,8023        | -9,3010         |
| 4,54 | -8,0368         | -27,0957        | -23,0730        | -2,5304         |
| 4,55 | -7,6509         | -27,1740        | -23,3442        | -9,7624         |
| 4,56 | -7,2556         | -27,2485        | -23,6164        | -9,9973         |
| 4,57 | -6,8510         | -27,3192        | -23,8892        | -10,2348        |
| 4,58 | -6,4366         | -27,3855        | -24,1628        | -10,4751        |
| 4,59 | -6,0127         | -27,4477        | -24,4369        | -10,7181        |
| 4,60 | -5,5791         | -27,5057        | -24,7117        | -10,9638        |
| 4,61 | -5,1358         | -27,5593        | -24,9870        | -11,2123        |
| 4,62 | -4,8237         | -27,6086        | -25,2630        | -11,4636        |
| 3,55 | -15,9881        | -11,4403        | -3,4537         | 2,2608          |
| 3,56 | -16,0780        | -11,6007        | -3,5689         | 2,2257          |
| 3,57 | -16,1663        | -11,7619        | -3,6857         | 2,1894          |
| 3,58 | -16,2531        | -11,9240        | -3,8041         | 2,1520          |
| 3,59 | -16,3384        | -12,0870        | -3,9242         | 2,1133          |
| 3,60 | -16,4218        | -12,2508        | -4,0459         | 2,0735          |
| 3,61 | -16,5043        | -12,4154        | -4,1692         | 2,0324          |
| 3,62 | -16,5847        | -12,5808        | -4,2942         | 1,9901          |
| 3,63 | -16,6634        | -12,7470        | -4,4208         | 1,9465          |
| 3,64 | -16,7405        | -12,9142        | -4,5491         | 1,9017          |
| 3,65 | -16,8155        | -13,0819        | -4,6791         | 1,8555          |
| 3,66 | -16,8889        | -13,2504        | -4,8108         | 1,8081          |
| 3,67 | -16,9602        | -13,4196        | -4,9441         | 1,7593          |
| 3,68 | -17,0296        | -13,5896        | -5,0792         | 1,7092          |
| 3,69 | -17,0970        | -13,7603        | -5,2159         | 1,6577          |
| 3,70 | -17,1622        | -13,9315        | -5,3544         | 1,6049          |
| 3,71 | -17,2253        | -14,1035        | -5,4945         | 1,5506          |
| 3,72 | -17,2861        | -14,2759        | -5,6364         | 1,4950          |
| 3,73 | -17,3449        | -14,4492        | -5,7801         | 1,4379          |
| 3,74 | -17,4022        | -14,6229        | -5,9254         | 1,3793          |
| 3,75 | -17,4552        | -14,7972        | -6,0725         | 1,3194          |
| 3,76 | -17,5067        | -14,9720        | -6,2214         | 1,2579          |
| 3,77 | -17,5557        | -15,1473        | -6,3720         | 1,1949          |
| 3,78 | -17,6024        | -15,3232        | -6,5243         | 1,1305          |

14  
658-86

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3,79 | -17,6463        | -15,4994        | -6,6784         | 1,0645          |
| 3,80 | -17,6875        | -15,6761        | -6,8343         | 0,9969          |
| 3,81 | -17,7259        | -15,8531        | -6,9920         | 0,9278          |
| 3,82 | -17,7616        | -16,0304        | -7,1513         | 0,8571          |
| 3,83 | -17,7945        | -16,2083        | -7,3126         | 0,7847          |
| 3,84 | -17,8245        | -16,3864        | -7,4755         | 0,7108          |
| 3,85 | -17,8513        | -16,5649        | -7,6403         | 0,6352          |
| 3,86 | -17,8751        | -16,7434        | -7,8069         | 0,5579          |
| 3,87 | -17,8960        | -16,9223        | -7,9751         | 0,4791          |
| 3,88 | -16,9135        | -17,1013        | -8,1453         | 0,3985          |
| 3,89 | -17,9277        | -17,2805        | -8,3171         | 0,3161          |
| 3,90 | -17,9387        | -17,4599        | -8,4909         | 0,2321          |
| 3,91 | -17,9464        | -17,6393        | -8,6664         | 0,1464          |
| 3,92 | -17,9504        | -17,8188        | -8,8437         | 0,0587          |
| 3,93 | -17,9511        | -17,9983        | -9,0227         | -0,0305         |
| 3,94 | -17,9480        | -18,1779        | -9,2037         | -0,1217         |
| 3,95 | -17,9412        | -18,3572        | -9,3863         | -0,2147         |
| 3,96 | -17,9307        | -18,5366        | -9,5708         | -0,3095         |
| 3,97 | -17,9165        | -18,7159        | -9,7571         | -0,4061         |
| 3,98 | -17,8983        | -18,8949        | -9,9451         | -0,5046         |
| 3,99 | -17,8761        | -19,0738        | -10,1350        | -0,6050         |
| 4,00 | -17,8498        | -19,2524        | -10,3265        | -0,7073         |
| 4,01 | -17,8172        | -19,4307        | -10,5200        | -0,8115         |
| 4,02 | -17,7850        | -19,6088        | -10,7151        | -0,9176         |
| 4,03 | -17,7461        | -19,7865        | -10,9122        | -1,0258         |
| 4,04 | -17,7029        | -19,9638        | -11,1110        | -1,1359         |
| 4,05 | -17,6551        | -20,1406        | -11,3115        | -1,2481         |
| 4,06 | -17,6030        | -20,3169        | -11,5138        | -1,3622         |
| 4,07 | -17,5461        | -20,4926        | -11,7178        | -1,4783         |
| 4,08 | -17,4846        | -20,6677        | -11,9236        | -1,5966         |
| 4,63 | -4,2189         | -27,6531        | -25,5392        | -11,7175        |
| 6,64 | -3,7450         | -27,6928        | -25,8159        | -11,9743        |
| 4,65 | -3,2607         | -27,7277        | -26,0929        | -12,2338        |
| 4,66 | -2,7663         | -22,7581        | -26,3705        | -12,4962        |
| 4,67 | -2,2611         | -27,8032        | -26,6481        | -12,7612        |

9528 953

| $a_x$     | $A_{ax}$ | $B_{ax}$ | $C_{ax}$ | $D_{ax}$ |
|-----------|----------|----------|----------|----------|
| 4,68      | -1,7449  | -27,8181 | -26,9262 | -13,0293 |
| 4,69      | -1,2187  | -27,8274 | -27,2042 | -13,2998 |
| 4,70      | -0,6812  | -27,8317 | -27,4823 | -13,5732 |
| 4,71      | -0,1327  | -27,8317 | -27,7608 | -13,8495 |
| 3/2 $\pi$ | 0        | -27,8317 | -27,8272 | -13,9159 |
| 4,72      | 0,4268   | -27,8301 | -28,0390 | -14,1284 |
| 4,73      | 0,9976   | -27,8228 | -28,3172 | -14,4102 |
| 4,74      | 1,5799   | -27,8101 | -28,5955 | -14,6948 |
| 4,75      | 2,1731   | -27,7913 | -28,8734 | -14,9821 |
| 4,76      | 2,7782   | -27,7668 | -29,1514 | -15,2723 |
| 4,77      | 3,3951   | -27,7357 | -29,4288 | -15,5652 |
| 4,78      | 4,0236   | -27,6988 | -29,7061 | -15,8609 |
| 4,79      | 4,6638   | -27,6553 | -29,9828 | -16,1593 |
| 4,80      | 5,3164   | -27,6052 | -30,2589 | -16,4604 |
| 4,81      | 5,9811   | -27,5488 | -30,5348 | -16,7645 |
| 4,82      | 6,6574   | -27,4859 | -30,8102 | -17,0712 |
| 4,83      | 7,3466   | -27,4156 | -31,0845 | -17,3806 |
| 4,84      | 8,0477   | -27,3389 | -31,3584 | -17,6928 |
| 4,85      | 8,7623   | -27,2547 | -31,6314 | -18,0079 |
| 4,86      | 9,4890   | -27,1634 | -31,9035 | -18,3257 |
| 4,87      | 10,2282  | -27,0650 | -32,1747 | -18,6460 |
| 4,88      | 10,9806  | -26,9589 | -32,4448 | -18,9691 |
| 4,89      | 11,7458  | -26,8452 | -32,7137 | -19,2948 |
| 4,90      | 12,5239  | -26,7239 | -32,9814 | -19,6232 |
| 4,91      | 13,3158  | -26,5946 | -33,2482 | -19,9545 |
| 4,92      | 14,1202  | -26,4578 | -33,5135 | -20,2882 |
| 4,93      | 14,9388  | -26,3123 | -33,7774 | -20,6248 |
| 4,94      | 15,7704  | -26,1588 | -34,0397 | -20,9638 |
| 4,95      | 16,6157  | -25,9967 | -34,3003 | -21,3054 |
| 4,96      | 17,4750  | -25,8262 | -34,5595 | -21,6498 |
| 9,97      | 18,3478  | -25,6472 | -34,8168 | -21,9966 |
| 4,98      | 19,2348  | -25,4594 | -35,0726 | -22,3462 |
| 4,99      | 20,1356  | -25,2623 | -35,3259 | -22,6981 |
| 5,00      | 21,0504  | -25,0565 | -35,5775 | -23,0525 |
| 5,01      | 21,9800  | -24,8413 | -35,8272 | -23,4097 |

850-085

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 5,02 | 22,8474         | -24,6170        | -36,0745        | -23,7691        |
| 5,03 | 23,8815         | -24,3827        | -36,3193        | -24,1311        |
| 5,04 | 24,8537         | -24,1392        | -36,5619        | -24,4954        |
| 5,05 | 25,8407         | -23,8860        | -36,8023        | -24,8623        |
| 5,06 | 26,8427         | -23,6225        | -37,0398        | -25,2315        |
| 5,07 | 27,8598         | -23,3489        | -37,2748        | -25,6033        |
| 5,08 | 28,8914         | -23,0651        | -37,5068        | -25,9771        |
| 5,09 | 29,9377         | -22,7711        | -37,7360        | -26,3533        |
| 5,10 | 30,9997         | -22,4661        | -37,9619        | -26,7317        |
| 5,11 | 32,0766         | -22,1509        | -38,1852        | -27,1126        |
| 5,12 | 33,1687         | -21,8246        | -38,4051        | -27,4955        |
| 5,13 | 34,2762         | -21,4874        | -38,6216        | -27,8806        |
| 5,14 | 35,3991         | -21,1391        | -38,8348        | -28,2679        |
| 5,15 | 36,5377         | -20,7795        | -39,0445        | -28,6574        |
| 5,16 | 37,6913         | -20,4084        | -39,2502        | -29,0486        |
| 5,17 | 38,8617         | -20,0254        | -39,4525        | -29,4423        |
| 5,18 | 40,0474         | -19,6310        | -39,6509        | -29,8379        |
| 5,19 | 41,2485         | -19,2248        | -39,8453        | -30,2354        |
| 5,20 | 42,4661         | -18,8057        | -40,0350        | -30,6346        |
| 5,21 | 43,6994         | -18,3754        | -40,2214        | -31,0361        |
| 5,22 | 44,9486         | -17,9322        | -40,4028        | -31,4391        |
| 5,23 | 46,2148         | -17,4758        | -40,5796        | -31,8440        |
| 5,24 | 47,4958         | -17,0073        | -40,7521        | -32,2504        |
| 5,25 | 48,7949         | -16,5258        | -40,9197        | -32,6590        |
| 5,26 | 50,1091         | -16,0317        | -41,0826        | -33,0690        |
| 5,27 | 51,4399         | -15,5240        | -41,2404        | -33,4806        |
| 5,28 | 52,7876         | -15,0030        | -41,3932        | -33,8939        |
| 5,29 | 54,1511         | -14,4684        | -41,5405        | -34,3084        |
| 5,30 | 55,5317         | -13,9201        | -41,6826        | -34,7246        |
| 5,31 | 56,6296         | -13,3574        | -41,8187        | -35,1421        |
| 5,32 | 58,3438         | -12,7808        | -41,9493        | -35,5609        |
| 5,33 | 59,7745         | -12,1903        | -42,0742        | -35,9810        |
| 5,34 | 61,2218         | -11,5856        | -42,1932        | -36,4023        |
| 5,35 | 62,6869         | -10,9660        | -42,3061        | -36,8250        |
| 5,36 | 64,1678         | -10,3321        | -42,4127        | -37,2485        |

0308  
0308  
1629-866

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 5,37 | 65,6657         | -9,6823         | -42,5124        | -37,6731        |
| 5,38 | 67,1818         | -9,0184         | -42,6060        | -38,0986        |
| 5,39 | 68,7140         | -8,3390         | -42,6928        | -38,5251        |
| 5,40 | 70,2637         | -7,6440         | -42,7727        | -38,9524        |
| 5,41 | 71,8308         | -6,9336         | -42,8459        | -39,3808        |
| 5,42 | 73,4144         | -6,2076         | -42,9117        | -39,8096        |
| 5,43 | 75,0158         | -5,4652         | -42,9700        | -40,2390        |
| 5,44 | 76,6338         | -4,7072         | -43,0210        | -40,6691        |
| 5,45 | 78,2687         | -3,9328         | -43,0642        | -41,0993        |
| 5,46 | 79,9216         | -3,1418         | -43,0997        | -41,5303        |
| 5,47 | 81,5916         | -2,3340         | -43,1268        | -41,9613        |
| 5,48 | 83,2786         | -1,5095         | -43,1459        | -42,3926        |
| 5,49 | 84,9829         | -0,6683         | -43,1568        | -42,8241        |
| 5,50 | 86,7044         | 0,1901          | -43,1593        | -43,2557        |
| 5,51 | 88,4432         | 1,0656          | -43,1531        | -43,6874        |
| 5,52 | 90,1996         | 1,9589          | -43,1381        | -44,1189        |
| 5,53 | 91,9722         | 2,8693          | -43,1141        | -44,5500        |
| 5,54 | 93,7637         | 3,7984          | -43,0807        | -44,9812        |
| 5,55 | 95,5716         | 4,7453          | -43,0378        | -45,4117        |
| 5,56 | 97,3960         | 5,7095          | -42,9858        | -45,8418        |
| 5,57 | 99,2383         | 6,6927          | -42,9238        | -46,2714        |
| 5,58 | 101,0984        | 7,6950          | -42,8516        | -46,7003        |
| 5,59 | 102,9739        | 8,7148          | -42,7695        | -47,1281        |
| 5,60 | 104,8687        | 9,7544          | -42,6775        | -47,5558        |
| 5,61 | 106,7790        | 10,8125         | -42,5744        | -47,9818        |
| 5,62 | 108,7074        | 11,8903         | -42,4609        | -48,4071        |
| 5,63 | 110,6512        | 12,9865         | -42,3366        | -48,8309        |
| 5,64 | 112,6133        | 14,1029         | -42,2013        | -49,2538        |
| 5,65 | 114,5922        | 15,2390         | -42,0547        | -49,6752        |
| 5,66 | 116,5866        | 16,3950         | -41,8959        | -50,0944        |
| 5,67 | 118,5994        | 17,5706         | -41,7277        | -50,5130        |
| 5,68 | 120,6277        | 18,7666         | -41,5449        | -50,9292        |
| 5,69 | 122,6730        | 19,9835         | -41,3507        | -51,3434        |
| 5,70 | 124,7352        | 21,2199         | -41,1454        | -51,7563        |



| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 5,71 | 126,8144        | 22,4785         | -40,9265        | -52,1666        |
| 5,72 | 128,9091        | 23,7571         | -40,6952        | -52,5746        |
| 5,73 | 131,0207        | 25,0568         | -40,4514        | -52,9806        |
| 5,74 | 133,1478        | 26,2810         | -40,1365        | -53,3359        |
| 5,75 | 135,2903        | 27,7192         | -39,9238        | -53,7842        |
| 5,76 | 137,4497        | 29,0832         | -39,6396        | -54,1819        |
| 5,77 | 139,6260        | 30,4693         | -39,3416        | -54,5770        |
| 5,78 | 141,8144        | 31,8755         | -39,0304        | -54,9689        |
| 5,79 | 144,0228        | 33,3053         | -38,7041        | -55,3574        |
| 5,80 | 146,2448        | 34,7564         | -38,3640        | -55,7429        |
| 5,81 | 148,4819        | 36,2301         | -38,0089        | -56,1246        |
| 5,82 | 150,7340        | 37,7256         | -37,6395        | -56,5029        |
| 5,83 | 153,0028        | 39,2449         | -37,2545        | -56,8776        |
| 5,84 | 155,2847        | 40,7859         | -36,8546        | -57,2481        |
| 5,85 | 157,5988        | 42,3504         | -36,4385        | -57,6143        |
| 5,86 | 159,8947        | 43,9378         | -36,0077        | -57,9772        |
| 5,87 | 162,2208        | 45,5484         | -35,5601        | -58,3349        |
| 5,88 | 164,5613        | 47,1825         | -35,0964        | -58,6882        |
| 5,89 | 166,9145        | 48,8394         | -34,6161        | -59,0363        |
| 5,90 | 169,2837        | 50,5203         | -34,1198        | -59,3805        |
| 5,91 | 171,6653        | 52,2255         | -33,6055        | -59,7187        |
| 5,92 | 174,0609        | 53,9542         | -33,0746        | -60,0521        |
| 5,93 | 176,0704        | 55,7067         | -32,5268        | -60,3806        |
| 5,94 | 178,8917        | 57,4833         | -31,9609        | -60,7030        |
| 5,95 | 181,3266        | 59,2852         | -31,3764        | -61,0195        |
| 5,96 | 183,7730        | 61,7303         | -30,7751        | -61,0201        |
| 5,97 | 186,2326        | 63,3087         | -30,1546        | -61,4608        |
| 5,98 | 188,7034        | 64,8347         | -29,5155        | -61,9332        |
| 5,99 | 191,1870        | 66,7344         | -28,8575        | -62,2251        |
| 6,00 | 193,6813        | 68,6578         | -28,2116        | -62,5106        |
| 6,01 | 196,1881        | 70,6079         | -27,4846        | -62,7889        |
| 6,02 | 198,7051        | 72,5822         | -26,7689        | -63,0603        |
| 6,03 | 201,2322        | 74,5817         | -26,0330        | -63,3241        |
| 6,04 | 203,7710        | 76,6067         | -25,2774        | -63,5810        |

| ax   | A <sub>ax</sub> | B <sub>ax</sub> | C <sub>ax</sub> | D <sub>ax</sub> |
|------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 6,05 | 206,3194        | 78,6574         | -24,5009        | -63,8299        |
| 6,06 | 208,8770        | 80,7331         | -23,7041        | -64,0708        |
| 6,07 | 211,4435        | 82,8350         | -22,8855        | -64,3032        |
| 6,08 | 214,0209        | 84,9622         | -22,0469        | -64,5282        |
| 6,09 | 216,6066        | 87,1150         | -21,1870        | -64,7447        |
| 6,10 | 219,2004        | 89,2947         | -20,3043        | -64,9518        |
| 6,11 | 221,8019        | 91,4992         | -19,4005        | -65,1503        |
| 6,12 | 224,4109        | 93,7300         | -18,4743        | -65,3394        |
| 6,13 | 227,0292        | 95,9871         | -17,5263        | -65,5200        |
| 6,14 | 229,6542        | 98,2709         | -16,5551        | -65,6906        |
| 6,15 | 232,2833        | 100,5538        | -15,5602        | -65,8372        |
| 6,16 | 234,9208        | 102,9168        | -14,5425        | -66,0010        |
| 6,17 | 237,5639        | 105,2793        | -13,5016        | -66,1413        |
| 6,18 | 240,2122        | 107,6680        | -12,4370        | -66,2711        |
| 6,19 | 242,8654        | 110,0832        | -11,3485        | -66,3901        |
| 6,20 | 245,5231        | 112,5249        | -10,2356        | -66,4981        |
| 6,21 | 248,1847        | 114,9934        | -9,0980         | -66,5947        |
| 6,22 | 250,8499        | 117,4888        | -7,9352         | -66,6796        |
| 6,23 | 253,5208        | 120,0113        | -6,7484         | -66,7538        |
| 6,24 | 256,1917        | 122,5599        | -5,5350         | -66,8150        |
| 6,25 | 258,8649        | 125,1350        | -4,2969         | -66,8640        |
| 6,26 | 261,5398        | 127,7369        | -3,0321         | -66,9005        |
| 6,27 | 264,2159        | 130,3657        | -1,7414         | -66,9242        |
| 6,28 | 266,8926        | 133,0195        | -0,4257         | -66,9354        |
|      | 267,7468        | 133,8725        | 0               | -66,9362        |
| 6,30 | 272,2487        | 138,4120        | 2,2886          | -66,9175        |
| 6,40 | 298,8909        | 166,9422        | 17,5362         | -65,9486        |
| 6,50 | 324,7861        | 198,1637        | 35,7713         | -63,3105        |
| 6,60 | 349,2554        | 231,8801        | 57,2528         | -58,6870        |
| 6,70 | 371,4244        | 267,9374        | 82,2255         | -51,7430        |
| 6,80 | 390,2947        | 306,0558        | 110,9087        | -42,1190        |
| 6,90 | 404,7145        | 347,3499        | 143,4927        | -30,1819        |
| 7,00 | 413,3762        | 386,8072        | 180,1191        | -13,2842        |

14.0  
698.68

| $ax$     | $A_{ax}$   | $B_{ax}$   | $C_{ax}$   | $D_{ax}$   |
|----------|------------|------------|------------|------------|
| 7,10     | 414,8263   | 428,2849   | 220,8718   | 6,7296     |
| 7,20     | 407,4216   | 469,4772   | 265,7664   | 31,0281    |
| 7,30     | 389,3783   | 509,4157   | 314,7265   | 60,0189    |
| 7,40     | 358,7306   | 546,9343   | 367,5688   | 94,1019    |
| 7,50     | 313,3700   | 580,6710   | 423,9858   | 113,6506   |
| 7,60     | 251,0334   | 609,0402   | 483,5233   | 179,0035   |
| 7,70     | 169,3472   | 630,2295   | 545,5557   | 230,4412   |
| 7,80     | 65,8475    | 642,1835   | 609,2596   | 288,1681   |
| $5/2\pi$ | 0          | 643,9927   | 643,9926   | 321,9964   |
| 7,90     | -62,0375   | 642,5872   | 673,6057   | 352,3123   |
| 8,00     | -216,8647  | 628,8779   | 737,3101   | 422,8713   |
| 8,10     | -401,1674  | 598,2344   | 798,8179   | 499,7008   |
| 8,20     | -617,4142  | 547,5808   | 856,2878   | 582,4975   |
| 8,30     | -867,9091  | 4735998    | 907,5542   | 670,7544   |
| 8,40     | -1154,6587 | 372,7866   | 950,1158   | 763,7226   |
| 8,50     | -1479,3701 | 241,4136   | 981,0984   | 860,3917   |
| 8,60     | -1843,2880 | 75,6088    | 997,2527   | 959,4484   |
| 8,70     | -2247,0402 | -128,5824  | 994,9377   | 1059,2289  |
| 8,80     | -2690,4845 | -375,1167  | 970,1255   | 1157,6839  |
| 8,90     | -3172,6717 | -667,9794  | 918,3664   | 1252,3561  |
| 9,00     | -3691,4815 | -1010,8800 | 834,8607   | 1340,3007  |
| 9,10     | -4243,5551 | -1407,3690 | 714,4085   | 1418,0930  |
| 9,20     | -4824,0587 | -1860,5365 | 551,4928   | 1481,7611  |
| 9,30     | -5426,5154 | -2372,9486 | 340,3091   | 1526,7834  |
| 9,40     | -6042,3167 | -2946,2708 | 74,8875    | 1548,0229  |
| $3\pi$   | -6195,8239 | -3097,9120 | 0          | 1548,9560  |
| 9,50     | -6660,9594 | -3581,4756 | -250,9959  | -1539,7419 |
| 9,60     | -7269,3664 | -4278,1693 | -643,4861  | -1495,5985 |
| 9,70     | -7851,7063 | -5034,4714 | -1108,6183 | -1408,6174 |
| 9,80     | -8389,5687 | -5847,0360 | -1652,2517 | -1271,2663 |
| 9,90     | -8860,9431 | -6710,2070 | -2279,7354 | -1075,3680 |
| 10,00    | -9240,8733 | 7616,1462  | -2995,7095 | 821,3636   |

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Y Tô và tập thể các tác giả. *Giáo trình Sức bền vật liệu*, tập I và II. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1969.
2. Bùi Trọng Lưu và tập thể các tác giả. *Giáo trình Sức bền vật liệu*. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1973.
3. М.М. Филоненко – Бородич. *Курс сопротивления материалов*, том I, II. Государственное издательство технико – теоретической литературы. Москва, 1956.
4. В.И. Феодосьев. *Сопротивление материалов*. Издательство "Наука". Москва, 1970.
5. С.Д. Пономарев. *Расчёты на прочность в машиностроении*. Москва, 1965.
6. B. Jaoul. *Etude de la plasticité et application aux métaux*. Dunod. Paris, 1965.
7. Witold Nowacki. *Teoria sprężystosci. Panstwowie Wydawnictowo Naukowe*. Warstawa, 1970.
8. С.П. Демидов. *Теория упругости*. Москва, "Высшая школа", 1979.
9. А.В. Даркова. *Строительная механика*. Москва, "Высшая школа", 1976.
10. В.А. Киселев. *Строительная механика*. Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам. Москва, 1960.
11. P. Stepin. *Strength of materials*. Foreign Languages Publishing House. Moscow.
12. F.V. Warnock. *Strength of materials*. London Sir Isaac Pitman and Sons Ltd.
13. L.I. Хэдôp. *Cơ sở môi trường liên tục*, tập II. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1978.
14. N.J. Вêдукôp. *Cơ sở lí thuyết đàn hồi, lí thuyết dẻo, lí thuyết từ biến*. NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp. Hà Nội, 1978.
15. Jiri Sejnoha. *Pruznos, pevnost, plasticita*. Vydavatelstvi cvut. Praha 1.
16. С.П. Тимошенко. *Сопротивления материалов*, том 1, 2. ОГИЗ, 1946.
17. Н.М. Беляев. *Сопротивления материалов*. Москва, 1965.
18. И.М. Воронков. *Курс теоретической механики*. Государственное издательство технико – теоретической литературы. Москва, 1957.
19. Г.А. Смирнов – Аляев. *Сопротивление материалов пластическому деформированию*. Издательство "Машиностроение", 1978.
20. А. Илюшин. *Механика сплошной среды*. Издательство московского университета, 1978.
21. Janusz Walczaz. *Wytry malos'c' materialow oraz podstawytesru sprężystos' ci i platycznos' ci*.
22. М.М. Филоненко Бородим – Курс сопротивления материалов, 1956.
23. Trần Văn Thông. Luận án phó tiến sĩ (1986) ghép nhiều ống.
24. Buhot G. Thuillier P. *Cours demécanique*. T. 2. Résistance des matériaux Masson. Paris, 1986.
25. Đặng Việt Cương, Nguyễn Nhật Thăng, Nhữ Phương Mai. S.B.V.L/4/2003
26. Nguyễn Lương Dũng. Phương pháp phần tử hữu hạn, 12/1993.

# MỤC LỤC

Trang

|                  |   |
|------------------|---|
| LỜI NÓI ĐẦU..... | 3 |
|------------------|---|

## PHẦN I

### CÁC PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA CƠ HỌC VẬT RẮN BIẾN DẠNG

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Chương 1. MỞ ĐẦU.....</b>                                   | <b>5</b>  |
| §1-1. Nhiệm vụ của môn học.....                                | 5         |
| §1-2. Những ngành khác nhau của cơ học vật rắn biến dạng.....  | 6         |
| §1-3. Lịch sử phát triển của môn học.....                      | 9         |
| §1-4. Nguyên lí Xanh Vơng.....                                 | 10        |
| <b>Chương 2. TRẠNG THÁI ỨNG SUẤT.....</b>                      | <b>11</b> |
| §2-1. Ứng suất.....  | 11        |
| §2-2. Trạng thái ứng suất.....                                 | 12        |
| §2-3. Phương chính và ứng suất chính.....                      | 19        |
| §2-4. Vòng tròn Mo (Mohr) ứng suất.....                        | 22        |
| §2-5. Ứng suất bất diện.....                                   | 26        |
| §2-6. Trạng thái ứng suất cầu và trạng thái ứng suất lệch..... | 27        |
| §2-7. Mặt ứng suất pháp.....                                   | 28        |
| §2-8. Phương trình vi phân cân bằng.....                       | 30        |
| <b>Chương 3. TRẠNG THÁI BIẾN DẠNG.....</b>                     | <b>34</b> |
| §3-1. Chuyển vị.....   | 34        |
| §3-2. Biến dạng.....   | 34        |
| §3-3. Phương chính – Biến dạng chính.....                      | 39        |
| §3-4. Vòng tròn Mo (Mohr) biến dạng.....                       | 41        |
| §3-5. Tenxơ biến dạng cầu và biến dạng lệch.....               | 42        |
| §3-6. Phương trình tương thích.....                            | 42        |
| <b>Chương 4. QUAN HỆ GIỮA ỨNG SUẤT VÀ BIẾN DẠNG.....</b>       | <b>49</b> |
| §4-1. Các hằng số đàn hồi.....                                 | 48        |
| §4-2. Trạng thái ứng suất đơn.....                             | 53        |
| §4-3. Trạng thái ứng suất khối. Định luật Húc tổng quát.....   | 54        |
| §4-4. Thế năng biến dạng đàn hồi.....                          | 55        |
| §4-5. Các phương pháp cơ bản giải bài toán đàn hồi.....        | 57        |

**PHẦN II**  
**CÁC BÀI TOÁN THUỘC VỀ THANH**

|   |     |
|---|-----|
| <b>Chương 5. ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA MỘT HÌNH PHẪNG</b> .....              | 68  |
| §5-1. Định nghĩa .....  | 68  |
| §5-2. Công thức chuyển trục song song.....                                | 69  |
| §5-3. Công thức xoay trục.....  | 70  |
| §5-4. Một số ví dụ .....  | 72  |
| <b>Chương 6. THANH, NỘI LỰC TRONG THANH</b> .....                         | 82  |
| §6-1. Định nghĩa về thanh và liên kết.....                                | 82  |
| §6-2. Nội lực .....   | 84  |
| §6-3. Tương quan giữa nội lực và ứng suất .....                           | 85  |
| §6-4. Tương quan giữa nội lực và cường độ tải trọng phân bố.....          | 85  |
| §6-5. Biểu đồ nội lực .....   | 86  |
| <b>Chương 7. BÀI TOÁN UỐN CỘNG KÉO (hoặc nén)</b> .....                   | 94  |
| §7-1. Công thức ứng suất.....   | 94  |
| §7-2. Các trường hợp riêng quan trọng .....                               | 96  |
| §7-3. Thí nghiệm kéo và nén vật liệu .....                                | 103 |
| §7-4. Các điều kiện dẻo – điều kiện bền .....                             | 107 |
| <b>Chương 8. BÀI TOÁN UỐN NGANG PHẪNG</b> .....                           | 116 |
| §8-1. Công thức của ứng suất tiếp .....                                   | 116 |
| §8-2. Điều kiện bền.....  | 121 |
| §8-3. Dầm chống uốn đều và dầm có mặt cắt hợp lí.....                     | 123 |
| <b>Chương 9. ĐƯỜNG ĐÀN HỒI</b> .....                                      | 127 |
| §9-1. Định nghĩa .....  | 127 |
| §9-2. Phương trình vi phân của đường đàn hồi.....                         | 128 |
| §9-3. Xác định đường đàn hồi bằng phương pháp tích phân không định hạn .. | 129 |
| §9-4. Phương pháp thông số ban đầu .....                                  | 132 |
| §9-5. Phương pháp tải trọng giả tạo.....                                  | 139 |
| <b>Chương 10. BÀI TOÁN XOẮN THUẦN TÚY</b> .....                           | 144 |
| §10-1. Xoắn thanh tròn .....  | 144 |
| §10-2. Xoắn thanh mặt cắt bất kì .....                                    | 148 |
| <b>Chương 11. TÍNH CÁC MỐI NỐI GHÉP</b> .....                             | 160 |
| §11-1. Tính mối nối bằng đinh tán.....                                    | 160 |
| §11-2. Tính mối nối bằng hàn .....  | 166 |
| §11-3. Tính mộng gỗ.....  | 169 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Chương 12. BÀI TOÁN CHỊU LỰC PHỨC TẠP</b> ..... | 173 |
| §12-1. Bài toán uốn và xoắn đồng thời.....         | 173 |
| §12-2. Bài toán uốn cộng kéo, cộng xoắn.....       | 176 |
| §12-3. Tính lò xo xoắn ốc hình trụ bước ngắn.....  | 183 |
| §12-4. Tính thanh có độ cong lớn.....              | 186 |
| <b>Chương 13. DẦM TRÊN NỀN ĐÀN HỒI</b> .....       | 198 |
| §13-1. Khái niệm.....                              | 198 |
| §13-2. Phương trình vi phân của đường đàn hồi..... | 199 |
| §13-3. Dầm dài vô hạn chịu một lực tập trung.....  | 202 |
| §13-4. Dầm dài nửa vô hạn.....                     | 206 |
| §13-5. Đường ảnh hưởng.....                        | 206 |
| §13-6. Dầm dài hữu hạn.....                        | 209 |
| <b>PHỤ LỤC</b> .....                               | 217 |
| <b>TÀI LIỆU THAM KHẢO</b> .....                    | 240 |

*Chịu trách nhiệm xuất bản :*

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI  
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

*Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :*

Chủ tịch HĐQT kiêm Giám đốc Công ty CP Sách ĐH - DN  
TRẦN NHẬT TÂN

*Biên tập :*

ĐỖ HỮU PHÚ

*Trình bày bìa :*

BÙI QUANG TUẤN

*Chế bản :*

MINH CHÂU

---

**SỨC BỀN VẬT LIỆU - TẬP 1**

Mã số: 7B638M6-DAI

In 1000 cuốn, khổ 19 x 27 cm. Tại Công ty Cổ phần in Anh Việt

Số đăng ký KHXB: 10 - 2006/ CXB/ 153 - 2018/GD.

In xong nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2006.





CÔNG TY CỔ PHẦN SÁCH ĐẠI HỌC – DẠY NGHỀ  
HEVOBCO

25 HÀN THUYỀN – HÀ NỘI

**TÌM ĐỌC SÁCH THAM KHẢO KỸ THUẬT  
CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC**

|   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| 1. Sức bền vật liệu – Tập một                 | Lê Quang Minh<br>Nguyễn Văn Vượng   |
| 2. Sức bền vật liệu – Tập hai                 | Lê Quang Minh<br>Nguyễn Văn Vượng   |
| 3. Bài tập Sức bền vật liệu                   | Nguyễn Văn Vượng                    |
| 4. Tự động điều khiển các quá trình công nghệ | Trần Doãn Tiến                      |
| 5. Nguyên lí máy – Tập một                    | Đình Gia Tường (CB)                 |
| 6. Nguyên lí máy – Tập hai                    | Đình Gia Tường (CB)                 |
| 7. Chi tiết máy – Tập một                     | Nguyễn Trọng Hiệp                   |
| 8. Chi tiết máy – Tập hai                     | Nguyễn Trọng Hiệp                   |
| 9. Thiết kế chi tiết máy                      | Nguyễn Trọng Hiệp<br>Nguyễn Văn Lãm |

*Bạn đọc có thể mua tại các Công ty Sách – Thiết bị trường học ở địa phương  
hoặc các Cửa hàng của Nhà xuất bản Giáo dục :*

Tại Hà Nội : 25 Hàn Thuyên ; 187B Giảng Võ ; 23 Tràng Tiền.

Tại Đà Nẵng : 15 Nguyễn Chí Thanh.

Tại Thành phố Hồ Chí Minh : 240 Trần Bình Trọng – Quận 5.



8 934980 69298 1



**Giá: 34.500Đ**