VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

- - - - - - - - - - - - - - - -

LÊ XUÂN DŨNG

CHẶN TRÊN CHỈ SỐ CHÍNH QUY CASTELNUOVO-MUMFORD

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Hà Nội - 2013

VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM
VIỆN TOÁN HỌC

****

LÊ XUÂN DŨNG

CHẶN TRÊN CHỈ SỐ CHÍNH QUY CASTELNUOVO-MUMFORD

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 62.46.01.04

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

CÁN BỘ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa

Hà Nội - 2013

TÓM TẮT

Cho $(A, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ và M là A-môđun hữu hạn sinh. Luận án thiết lập được ba loại chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc liên kết: theo bậc mở rộng, theo độ dài của môđun đối đồng điều địa phương và theo hệ số Hilbert. Trong trường hợp môđun M phân bậc, luận án thiết lập được chặn trên cho $\mathrm{reg}(G_I(M))$ theo $\mathrm{reg}(M)$. Trong trường hợp chiều một, luận án cũng đưa ra chặn trên chặt theo hệ số Hilbert và đặc trưng được khi nào đẳng thức xảy ra.

Luận án cũng đưa ra một chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của nón phân thớ theo bậc mở rộng.

Cuối cùng luận án chỉ ra được mối liên hệ giữa các hệ số Hilbert là: các số $|e_{d-t+1}(I, M)|$, ..., $|e_d(I, M)|$ bị chặn bởi một hàm chỉ phụ thuộc vào $e_0(I, M)$, $e_1(I, M)$, ..., $e_{d-t}(I, M)$, trong đó $t = \mathrm{depth}(M)$.

Ngoài phần mở đầu, tài liệu tham khảo, luận án chia làm năm chương.

ABSTRACT

Let $(A, \mathfrak{m})$ be a local ring, I an $\mathfrak{m}$-primary ideal and M a finitely generated A-module. In this thesis, three upper bounds on the Castelnuovo-Mumford regularity of associated graded module are given in terms of the so-called extended degree, the lengths of certain local cohomology modules and Hilbert coefficients. If M is a finitely generated graded module, an upper bound on $\operatorname{reg}(G_I(M))$ also is given in terms of $\operatorname{reg}(M)$. In the case of dimension one, a sharp bound for $\operatorname{reg}(G_I(M))$ is given in term of Hilbert coefficients of M. It is also investigated when the bound is attained.

Secondly, we give upper bounds on the Castelnuovo-Mumford regularity of fiber cone in terms of extended degree.

Third, we show that the last t Hilbert coefficients $e_{d-t+1}(I, M), ..., e_d(I, M)$ are bounded below and above in terms of the first $d-t+1$ Hilbert coefficients $e_0(I, M), ..., e_{d-t}(I, M)$, where $t = \operatorname{depth}(M)$.

The thesis is divided into five chapters.

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi. Các kết quả viết chung với tác giả khác đã được sự nhất trí của đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

Tác giả

Lê Xuân Dũng

LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc, chân thành đến thầy tôi GS. TSKH. Lê Tuấn Hoa. Thầy đã luôn tận tình chu đáo dìu dắt tôi từ những bước chập chững đầu tiên trên con đường khoa học. Thầy không chỉ dạy bảo tôi về tri thức toán học, về phương pháp nghiên cứu toán mà còn giúp tôi có những quan điểm đúng đắn về cuộc sống.

Tác giả xin chân thành cảm ơn Viện Toán học, các phòng chức năng, Trung tâm đào tạo sau đại học của Viện Toán học đã tạo điều kiện tốt nhất giúp tôi học tập và nghiên cứu tại Viện Toán học. Đặc biệt tác giả xin chân thành cảm ơn GS. TSKH. Ngô Việt Trung, GS. TSKH. Nguyễn Tự Cường và GS. TSKH. Phùng Hồ Hải đã tạo điều kiện cho tôi được tham gia sinh hoạt khoa học tại phòng Đại số của Viện Toán học.

Tác giả xin chân thành cảm ơn sự giúp đỡ của ban Giám hiệu trường Đại học Hồng Đức đã tạo điều kiện thuận lợi cho tác giả trong quá trình học cao học. Đặc biệt, tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn của mình đến ban Chủ nhiệm khoa Khoa học tự nhiên và các đồng nghiệp trong tổ Đại số đã tạo điều kiện về thời gian giúp tác giả ra Hà Nội học tập.

Tác giả xin chân thành cảm ơn sự quan tâm, động viên của các anh chị em đang học tập và nghiên cứu tại phòng Đại số và phòng Lý thuyết số của Viện toán học.

Cuối cùng, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn vô hạn đến bố, mẹ và những người thân trong gia đình, đặc biệt là vợ tôi đã luôn cổ vũ, động viên, tạo mọi điều kiện thuận lợi nhất cả tinh thần và vật chất để tôi an tâm học tập và nghiên cứu.

Tác giả
Lê Xuân Dũng

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford là một bất biến quan trọng trong đại số giao hoán và hình học đại số. Nó cung cấp nhiều thông tin về độ phức tạp của những cấu trúc đại số phân bậc. Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford ra đời từ những công trình về đường cong xạ ảnh của G. Castelnuovo và được D. Mumford [30] phát biểu định nghĩa đầu tiên cho đa tạp xạ ảnh. Bằng ngôn ngữ đối đồng điều địa phương, khái niệm này đã được tổng quát hóa cho môđun phân bậc hữu hạn sinh trên đại số phân bậc chuẩn bất kỳ.

Nếu E là môđun phân bậc hữu hạn sinh trên một đại số phân bậc chuẩn R thì chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford $\mathrm{reg}(E)$ của E được định nghĩa là số m nhỏ nhất sao cho $H^i_{R_+}(E)_n = 0$ với mọi $n \geq m - i + 1$ và $i \geq 0$, trong đó $H^i_{R_+}(E)$ là đối đồng điều địa phương của E với giá $R_+ = \oplus_{i>0} R_i$. Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của E chặn trên bậc cực đại của một hệ sinh tối tiểu thuần nhất của E.

Nếu R là một đại số phân bậc chuẩn trên trường k thì ta có mối liên hệ chặt chẽ giữa chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford và giải tự do tối tiểu của môđun E (xem [15]). Từ mối liên hệ này ta biết được chỉ số chính quy của R là chặn trên cho tất cả các bậc sinh của các môđun xoắn (syzygy) của R. Đó là một ý nghĩa quan trọng của chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford.

Cho $(A, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ và M là A-môđun hữu hạn sinh. Ký hiệu

$$G_I(M) := \bigoplus_{n\geq 0} I^n M/I^{n+1}M \text{ và } F_{\mathfrak{m}}(I) := \bigoplus_{n\geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n.$$

Người ta gọi $G_I(M)$ là môđun phân bậc liên kết của M ứng với I và $F_{\mathfrak{m}}(I)$ là nón phân thớ của I ứng với iđêan cực đại $\mathfrak{m}$. Chú ý rằng $G_I(A)$ và $F_{\mathfrak{m}}(I)$ là các vành phân bậc chuẩn. Việc nghiên cứu chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của $G_I(M)$ và $F_{\mathfrak{m}}(I)$ sẽ cho chúng ta biết nhiều thông tin về cấu trúc của M và I. Chẳng hạn sử dụng $\operatorname{reg}(G_I(M))$ ta có thể ước lượng được kiểu quan hệ (relation type), số mũ rút gọn và chỉ số chính quy Hilbert (postulation number) của M theo I (xem [46]), còn sử dụng $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{m}}(I))$ ta có thể biết được dáng điệu số phần tử sinh của I^n khi $n \gg 0$. Do đó mục đích của luận án là giải quyết hai bài toán sau:

BÀI TOÁN 1 *Chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford cho môđun phân bậc liên kết.*

BÀI TOÁN 2 *Chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford cho nón phân thớ.*

Năm 2003, Rossi-Trung-Valla [37] giải quyết Bài toán 1 cho trường hợp $M = A$ và $I = \mathfrak{m}$. Sau đó, năm 2005 C. H. Linh [26] giải quyết cho trường hợp tổng quát. Luận án tiếp tục theo 3 cách khác nhau: mở rộng kết quả của Rossi-Trung-Valla và C. H. Linh cho môđun lọc, chặn trên theo độ dài của môđun đối đồng điều địa phương và theo hệ số Hilbert. Trong trường hợp môđun M phân bậc, luận án thiết lập được chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc liên kết theo $\operatorname{reg}(M)$. Đây không phải là những việc làm mang tính tổng quát hay tương tự hình thức. Nhờ việc nghiên cứu Bài toán 1 cho môđun lọc tùy ý, trong luận án đã giải quyết được Bài toán 2 (xem Chương 4). Việc chặn trên theo hệ số Hilbert và độ dài môđun đối đồng điều địa phương giúp xác định được mối quan hệ giữa các hệ số Hilbert (xem Chương 5).

Khái niệm I-lọc tốt $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ của M được giới thiệu trong [4] và [3]. Khái niệm này rộng hơn so với khái niệm lọc tốt của iđêan (xem Ví dụ 1.4.3 (ii)). Chúng tôi chặn trên cho $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo chiều, số mũ rút gọn $r(\mathbb{M})$ và bậc mở rộng $D(I, M)$ của M ứng với I (xem Định lý 2.1.4). Kết quả của chúng tôi đạt được tổng quát hơn và nói chung tốt hơn một ít so với kết quả của [26, Theorem 4.4].

Phương pháp chính để đạt được các kết quả trên đã được các tác giả khác đưa ra trong bài báo [37] và [26]. Đóng góp của luận án là giải quyết một số kĩ thuật hỗ trợ khi xem xét môđun lọc tổng quát.

Cũng tiếp tục ý tưởng đó, trong Định lý 2.3.1 chúng tôi đưa ra một chặn nữa cho $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo độ dài của môđun đối đồng điều địa phương của một số môđun thương của môđun M ban đầu.

Khi M là môđun phân bậc và I là iđêan thuần nhất, thay cho bậc mở rộng $D(I, M)$ chúng tôi sử dụng một đại lượng khác không chỉ nhỏ hơn mà còn dễ tính toán hơn đó là $\mathrm{reg}(M)$. Trong trường hợp tổng quát, ta không thể sử dụng được phương pháp của [37], bởi vì I chưa chắc đã chứa phần tử thuần nhất để phần tử khởi đầu của nó là phần tử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Để vượt qua được khó khăn này, chúng tôi địa phương hoá để đưa về trường hợp địa phương, rồi kết hợp với kết quả của Chardin-Hà-Hoa trong [7], chúng tôi chặn được $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $\mathrm{reg}(M)$ (xem Định lý 2.2.5). Nếu I là iđêan thuần nhất sinh bởi các phần tử cùng bậc, ta có thể áp dụng được phương pháp của [37]. Khi đó ta nhận được chặn trên khác của $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $\mathrm{reg}(M)$ tốt hơn (xem Định lý 2.2.8) so với chặn trên trong Định lý 2.2.5 nêu ở trên.

Các hệ số Hilbert của môđun M ứng với iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ I là những bất biến thông dụng cung cấp nhiều thông tin về môđun M. Do đó chặn trên $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo hệ số Hilbert là vấn đề được nhiều người quan tâm. Trong [5, Theorem 17.2.7] và [42], ta có thể suy ra được $\mathrm{reg}^1(G(\mathbb{M}))$ bị chặn theo các hệ số Hilbert $e_0(\mathbb{M})$, ..., $e_{d-1}(\mathbb{M})$ của M ứng với iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ I, trong đó $\mathrm{reg}^1(G(\mathbb{M}))$ được gọi là chỉ số chính quy hình học của môđun phân bậc liên kết và được định nghĩa như sau: $\mathrm{reg}^1(G(\mathbb{M})) := \min\{m \mid H^i_{G_+}(G_I(M))_n = 0$ với mọi $n \geq m - i + 1$ và $i \geq 1\}$. Từ Ví dụ 3.1.4 ta thấy rằng các bất biến trên là không đủ để chặn $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$. Do đó, phải sử dụng thêm $e_d(\mathbb{M})$ chúng tôi đưa ra được chặn trên cho $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ (xem Định lý 3.1.7).

Chặn trong Định lý 3.1.7 nhìn chung là rất lớn, cỡ hàm mũ của $d!$. Vì vậy, vấn đề tiếp theo mà chúng tôi quan tâm là tìm chặn tốt hơn theo hệ số Hilbert cho $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$. Trong luận án chúng tôi xét trường hợp lọc I-adic và $\dim(M) = 1$. Sử dụng thêm b là số nguyên lớn nhất thỏa mãn $IM \subseteq \mathfrak{m}^b M$, Mệnh đề 3.2.9 và Định lý 3.2.11 đưa ra được chặn trên thực sự tốt. Chúng tôi đã xây dựng được Ví dụ 3.2.17 và Ví dụ 3.2.18, chứng tỏ đây là những chặn chặt. Không những thế chúng tôi cũng đặc trưng được khi nào chặn trong Định lý 3.2.11 đạt được. Nếu M là môđun Cohen-Macaulay, Định lý 3.2.14 đưa ra các đặc trưng thông qua mối liên hệ giữa $e_0(I, M)$ và $e_1(I, M)$, qua chuỗi Hilbert-Poincaré và tính Cohen-Macaulay của $G_I(M)$. Nếu M không là môđun Cohen-Macaulay thì chúng tôi cũng đặc trưng được thông qua chuỗi Hilbert-Poincaré (xem Định lý 3.2.16).

Như đã nói ở trên, việc chặn trên cho $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ đối với môđun lọc tạo ra khả năng ứng dụng mới. Trong luận án này, chúng tôi áp dụng để giải quyết Bài toán 2. Đây là bài toán có ý nghĩa. Sử dụng dãy khớp ngắn liên hệ giữa nón phân thớ và môđun phân bậc liên kết của các môđun lọc khác nhau của Rossi-Valla được đưa ra trong [36], rồi áp dụng Định lý 4.2.3 và Định lý 4.2.4, chúng tôi chỉ ra rằng $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))$ được chặn trên theo bậc mở rộng $D(I, M)$, số mũ rút gọn của lọc và chiều của M (xem Định lý 4.3.2).

Áp dụng tiếp theo của Bài toán 1 là nghiên cứu mối quan hệ giữa các hệ số Hilbert. Trong trường hợp vành và môđun Cohen-Macaulay, N. G. Northcott [33] và M. Narita [32] chỉ ra rằng $e_1(I, A) \geq 0, e_2(I, A) \geq 0$. Sau đó, C. P. L Rhodes [35] chứng tỏ những kết quả này vẫn còn đúng cho I-lọc tốt $\mathbb{M}$ của môđun M. Hơn nữa Kirby-Mehran [25] chứng minh được $e_1(I, M) \leq \binom{e_0(I,M)}{2}$ và $e_2(I, M) \leq \binom{e_1(I,M)}{2}$. Sau đó, các kết quả trên tiếp tục được nghiên cứu bởi nhiều tác giả khác nhau. Tuy vậy, mối quan hệ giữa các hệ số Hilbert là rất ít. Năm 1997, Srinivas-Trivedi [40] và V. Trivedi [42] đạt được một kết quả hết sức ngạc nhiên đó là nếu M là môđun Cohen-Macaulay thì tất cả $|e_i(I, M)|, i \geq 1$ được chặn trên bởi một đại lượng chỉ phụ thuộc vào $e_0(I, M)$ và d. Các mối liên hệ trên sẽ thay đổi thế nào nếu M không phải môđun Cohen-Macaulay?

Dùng một bất biến mới gọi là bậc mở rộng $D(\mathfrak{m}, A)$, Rossi-Trung-Valla

[37] chặn trên tất cả $|e_i(\mathfrak{m}, A)|$. Sau đó C. H. Linh [27] đã mở rộng cho trường hợp tổng quát. Tuy nhiên, các kết quả này không cho ta biết được mối quan hệ giữa các hệ số Hilbert. Do vậy, chúng tôi quan tâm đến bài toán sau:

BÀI TOÁN 3 *Cho M là môđun tùy ý trên vành địa phương A tùy ý. Tìm mối liên hệ giữa các hệ số Hilbert.*

Sử dụng chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford theo hệ số Hilbert được đưa ra trong Bổ đề 3.1.2, chúng tôi chỉ ra rằng $(-1)^{i-1}e_i(I, A)$ bị chặn trên theo một hàm chỉ phụ thuộc vào $e_0(I, A), ..., e_{i-1}(I, A)$ với mọi i (Định lý 5.2.1). Tuy nhiên, trong trường hợp $d = 2$ và $\operatorname{depth}(M) = 1$, Srinivas-Trivedi [39] chỉ ra rằng $|e_i(I, A)|, i \geq 1$ không thể chặn được theo $e_0(I, A)$. Vì vậy, một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là có bao nhiêu hệ số Hilbert chặn được các hệ số Hilbert còn lại?

Cách tiếp cận của chúng tôi là sử dụng chặn trên $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo độ dài các môđun đối đồng điều địa phương (xem Định lý 2.3.1), sau đó ước lượng độ dài các môđun đối đồng điều địa phương này qua các hệ số Hilbert $e_0(\mathbb{M}), e_1(\mathbb{M}), ..., e_{d-t}(\mathbb{M})$, trong đó $t = \operatorname{depth}(M)$ (xem Mệnh đề 5.1.2 và Mệnh đề 5.1.4). Từ đó chúng tôi chặn $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ chỉ theo $e_0(\mathbb{M})$, $e_1(\mathbb{M})$, ..., $e_{d-t}(\mathbb{M})$, (xem Định lý 5.2.4). Tiếp theo, chúng tôi cần giải quyết bài toán ngược là chặn trên các hệ số Hilbert theo $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ (xem Mệnh đề 5.2.3). Từ đó, chúng tôi chỉ ra được các hệ số Hilbert $e_{d-t+1}(\mathbb{M})$, $e_{d-t+2}(\mathbb{M})$, ..., $e_d(\mathbb{M})$ phụ thuộc vào $d - t + 1$ hệ số Hilbert ban đầu, theo nghĩa: $|e_{d-t+1}(\mathbb{M})|$, ..., $|e_d(\mathbb{M})|$ *bị chặn bởi một hàm chỉ phụ thuộc vào* $e_0(\mathbb{M})$, $e_1(\mathbb{M})$, ..., $e_{d-t}(\mathbb{M})$ *và số rút gọn* $r(\mathbb{M})$. Đó cũng là nội dung chính của Định lý 5.2.5.

Từ kết quả này, cuối cùng chúng tôi suy ra được một kết quả về sự hữu hạn của hàm Hilbert-Samuel (xem Định lý 5.2.7).

Bây giờ chúng tôi xin giới thiệu cấu trúc của luận án. Ngoài phần mở đầu, tài liệu tham khảo, luận án chia làm năm chương.

Chương 1 giới thiệu lại một số khái niệm và tính chất cơ bản về chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford, phần tử lọc chính quy, hệ số Hilbert và môđun lọc.

Chương 2 chia làm ba phần. Mục 2.1 đưa ra chặn trên cho $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo chiều, số mũ rút gọn và bậc mở rộng $D(I, M)$ (Định lý 2.1.4). Khi M là môđun phân bậc, chặn trên $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $\operatorname{reg}(M)$ được đưa ra ở Mục 2.2 (Định lý 2.2.5 và Định lý 2.2.8). Mục 2.3 thiết lập chặn trên $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo độ dài của môđun đối đồng điều địa phương (Định lý 2.3.1).

Chương 3 chia làm hai phần. Mục 3.1 thiết lập chặn trên cho $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo hệ số Hilbert (Định lý 3.1.7). Mục 3.2 xét trường hợp $\dim(M) = 1$, chặn trên thực sự tốt được đưa ra trong Mệnh đề 3.2.9 và Định lý 3.2.11. Cuối cùng Định lý 3.2.14 và Định lý 3.2.16 đưa ra một số đặc trưng khi đẳng thức trong Định lý 3.2.11 đạt được.

Chương 4 chia làm ba phần. Mục 4.1 giới thiệu lại khái niệm và một số tính chất cơ bản của nón phân thớ. Mục 4.2 đưa ra một chặn cho hệ số Hilbert của nón phân thớ (Định lý 4.2.4). Mục 4.3 là phần chính của chương. Phần này thiết lập chặn trên cho $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))$ theo chiều, số mũ rút gọn và bậc mở rộng $D(I, M)$ (Định lý 4.3.2).

Chương 5 chia làm hai phần. Chặn trên môđun đối đồng điều địa phương theo $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ được đưa ra ở Mục 5.1 (Mệnh đề 5.1.2 và Mệnh đề 5.1.4). Mục 5.2 đưa ra mối quan hệ của các hệ số Hilbert (Định lý 5.2.5). Cuối cùng Định lý 5.2.7 đưa ra một kết quả về sự hữu hạn của hàm Hilbert-Samuel.

Các kết quả trong luận án đã được chúng tôi công bố trong 3 bài báo [11], [12] và [13].

Trong luận án này, một số khái niệm cơ bản và các tính chất của nó như số bội, đối đồng điều địa phương, ... chúng tôi dựa vào các tài liệu [5], [6] và [29]. Một số thuật ngữ tiếng Việt chúng tôi dựa theo Luận án tiến sĩ khoa học của Lê Tuấn Hoa [2].

CHƯƠNG 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 CHỈ SỐ CHÍNH QUY CASTELNUOVO-MUMFORD

Trong chương này, chúng tôi nhắc lại một số kiến thức cơ sở và một số kết quả đã biết về chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford, phần tử lọc chính quy, hệ số Hilbert và môđun lọc nhằm giúp người đọc dễ dàng theo dõi nội dung luận án. Trong luận án này, nếu không nói gì khác ta luôn xét $R = \oplus_{i\geq 0} R_i$ là đại số phân bậc chuẩn trên vành địa phương Artin R_0. Ta ký hiệu $R_+ = \oplus_{i>0} R_i$. Cho E là R-môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều d. $H^i_{R_+}(E)$ kí hiệu môđun đối đồng điều địa phương của E với giá R_+ (xem định nghĩa và các tính chất cơ bản trong [5]).

ĐỊNH NGHĨA 1.1.1. ([30, tr. 99] hoặc [15, Section 1]) Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của E là số

$$\operatorname{reg}(E) := \max\{a_i(E) + i \mid i \geq 0\},$$

trong đó

$$a_i(E) = \begin{cases} \max\{n \mid H^i_{R_+}(E)_n \neq 0\} & \text{nếu } H^i_{R_+}(E) \neq 0,\\ -\infty & \text{nếu } H^i_{R_+}(E) = 0.\end{cases}$$

Một cách tổng quát hơn, với $0 \leq l \leq d$, chúng ta đặt

$$\operatorname{reg}^l(E) := \max\{a_i(E) + i \mid i \geq l\},$$

và gọi nó là *chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford tại bậc l* của E.

Như vậy, $\operatorname{reg}(E) = \operatorname{reg}^0(E) = \operatorname{reg}^{\operatorname{depth}(E)}(E)$. Từ định lý của J. P. Serre về tính Artin của môđun đối đồng điều địa phương ta thấy ngay nếu $E \neq 0$ thì $\operatorname{reg}(E)$ là một số nguyên (tức là một số hữu hạn).

Giả sử I là iđêan thuần nhất thực sự của vành đa thức $R = R_0[x_1, ..., x_n]$ với các biến độc lập. Từ dãy khớp ngắn

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0,$$

và $\operatorname{reg}(R) = 0$ (xem [5, Example 12.4.1]) ta suy ra chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của I và R/I có mối quan hệ sau đây:

$$\operatorname{reg}(I) = \operatorname{reg}(R/I) + 1.$$

Nếu R là một đại số phân bậc chuẩn trên trường k thì R có thể được biểu diễn dưới dạng $R := S/I$, trong đó $S = k[x_1, ..., x_n]$ là vành đa thức trên trường k và I là iđêan thuần nhất của S. Khi đó, E có thể xem như một môđun trên S. Theo định lý xoắn của Hilbert, E có giải tự do tối tiểu dạng

$$0 \to \oplus_{j=1}^{\beta_q} S(-d_{qj}) \to ... \to \oplus_{j=1}^{\beta_0} S(-d_{0j}) \to M \to 0,$$

trong đó d_{ij} là bậc của các phần tử trong một hệ sinh tối tiểu thuần nhất của môđun xoắn thứ i. Kết quả sau đây được D. Mumford [30] phát biểu cho iđêan và được Eisenbud-Goto [15] mở rộng ra cho môđun.

ĐỊNH LÝ 1.1.2. ([15, Proposition 1.1 và Theorem 1.2]) *Giả sử $R = S/I$. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(E) = \max\{d_{ij} - i | i = 0, ..., q \text{ và j} = 1, ..., \beta_{\mathrm{i}}\}.$$

Như vậy trong trường hợp này, Định lý 1.1.2 nói rằng $\operatorname{reg}(E)$ cho chúng ta một chặn trên cho tất cả các bậc sinh của các môđun xoắn của R. Đây là một ý nghĩa quan trọng của chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford. Ta biết rằng bậc cực đại của một hệ sinh tối tiểu thuần nhất của E là một bất biến, ký hiệu là $\Delta(E)$. Kết quả sau đây là một trường hợp riêng của nhận xét vừa nêu, nhưng vẫn đúng khi R không phải là vành thương của vành đa thức.

ĐỊNH LÝ 1.1.3. (Xem [5, Theorem 15.3.1])

$$\Delta(E) \leq \operatorname{reg}(E).$$

Sau đây là một số kết quả cơ bản thường được sử dụng trong nghiên cứu về chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford. Bổ đề đầu tiên là của G. Castelnuovo phát biểu cho lược đồ (chẳng hạn xem [14, theorem 20.18]) và sau đó mở rộng cho môđun (chẳng hạn xem [31, Lemma 2.1]).

BỔ ĐỀ 1.1.4. (Castelnuovo) *Giả sử* $\Delta(E) \leq p$. *Nếu* $H^i_{R_+}(E)_{p+1-i} = 0$ *với mọi* $i \geq 0$ *thì* $\operatorname{reg}(E) \leq p$

BỔ ĐỀ 1.1.5. (Xem [14, Corollary 20.19] và [21, Lemma 3.1]) *Cho dãy khớp*

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

của các R-môđun hữu hạn sinh của các đồng cấu thuần nhất. Khi đó

(i) $\operatorname{reg}(P) \leq \max\{\operatorname{reg}(M), \operatorname{reg}(N)+1\}$. *Đẳng thức xảy ra nếu* $\operatorname{reg}(M) \neq \operatorname{reg}(N)$.

(ii) $\operatorname{reg}(M) \leq \max\{\operatorname{reg}(P), \operatorname{reg}(N)\}$. *Đẳng thức xảy ra nếu* $\operatorname{reg}(N) \neq \operatorname{reg}(P) - 1$ *hoặc nếu* $P_n = 0$ *với* $n \gg 0$.

(iii) $\operatorname{reg}(N) \leq \max\{\operatorname{reg}(P) - 1, \operatorname{reg}(M)\}$. *Đẳng thức xảy ra nếu* $\operatorname{reg}(M) \neq \operatorname{reg}(P)$. *Hơn nữa nếu* $P_n = 0$ *với* $n \gg 0$ *thì* $\operatorname{reg}(N) \leq \operatorname{reg}(M)$.

1.2 PHẦN TỬ LỌC CHÍNH QUY

Nếu $z \in R_1$ là phần tử E-chính quy $(0_E : z = 0)$ thì ta có dãy khớp

$$0 \longrightarrow E(-1) \xrightarrow{z} E \longrightarrow E/zE \longrightarrow 0.$$

Áp dụng Bổ đề 1.1.5 ta thu được hệ quả sau đây.

HỆ QUẢ 1.2.1. (Xem [14, Proposition 20.20]) *Nếu* $z \in R_1$ *là phần tử* E-*chính quy thì*

$$\operatorname{reg}(E) = \operatorname{reg}(E/zE).$$

Tuy nhiên phần tử E-chính quy không phải bao giờ cũng tồn tại. Do đó người ta thường quan tâm khái niệm sau đây.

ĐỊNH NGHĨA 1.2.2. (Xem [5, Definition 18.3.7]) Phần tử thuần nhất $z \in R$ được gọi là phần tử *E-lọc chính quy (lọc chính quy trên E)* nếu $(0_E : z)_n = 0$ với $n \gg 0$. Các phần tử thuần nhất $z_1, ..., z_n$ gọi là *dãy lọc chính quy trên E* nếu z_i là $E/(z_1, ..., z_{i-1}E)$-lọc chính quy với mọi $1 \leq i \leq n$.

Nếu $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ là vành địa phương với trường thặng dư $R_0/\mathfrak{m}_0$ vô hạn thì luôn luôn tồn tại phần tử $z \in R_1$ sao cho z là E-lọc chính quy (xem [45], [5], [48]).

Nếu R_0 có trường thặng dư hữu hạn, ta đặt $R'_0 := R_0[X]_{\mathfrak{m}_0 R_0[X]}$ là địa phương hóa của vành đa thức $R_0[X]$ tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{m}_0 R_0[X]$. Khi đó, $R' = R \otimes_{R_0} R'_0$ là đại số phân bậc chuẩn trên trường thặng dư vô hạn và $E' = E \otimes_{R_0} R'_0$ là R'-môđun hữu hạn sinh. Theo [5, Remarks 15.2.2 (iv)] ta có

$$H^i_{R_+}(E)_n \otimes_{R_0} R' \cong H^i_{R'+}(E')_n,$$

với $i \geq 0$. Từ đây suy ra $\operatorname{reg}(E') = \operatorname{reg}(E)$. Vì vậy ta luôn giả sử rằng trường thặng dư của vành cơ sở là vô hạn mà vẫn không làm mất tính tổng quát của nó. Khi đó, ta có dãy bất đẳng thức sau:

BỔ ĐỀ 1.2.3. (Xem [5, Exercise 15.2.15 (iv) và Proposition 18.3.11]) *Giả sử $z \in R_1$ là phần tử E-lọc chính quy. Cho $l \geq 1$. Khi đó,*

$$\operatorname{reg}^l(E/zE) \leq \operatorname{reg}^l(E) \leq \operatorname{reg}^{l-1}(E/zE) \leq \operatorname{reg}^{l-1}(E).$$

Ngoài ra, ta còn có đẳng thức

BỔ ĐỀ 1.2.4. ([14, Proposition 20.20]) *Giả sử $z \in R_1$ là phần tử E-lọc chính quy. Khi đó,*

$$\operatorname{reg}(E) = \max\{a_0(E), \operatorname{reg}(E/zE)\}.$$

1.3 HỆ SỐ HILBERT

Hàm Hilbert của E là một hàm $h_E : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ được xác định bởi

$$h_E(n) := \ell_{R_0}(E_n).$$

Hilbert đã chứng minh được rằng nếu E là R-môđun hữu hạn sinh có chiều $d \geq 1$ thì tồn tại một đa thức $p_E(x) \in \mathbb{Q}[x]$ có bậc $d-1$ sao cho $h_E(n) = p_E(n)$ với n đủ lớn. Đa thức $p_E(x)$ ở trên được gọi là *đa thức Hilbert* của E. Đa thức này được viết duy nhất dưới dạng:

$$p_E(x) = \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i e_i(E)\binom{x+d-i-1}{d-i-1}.$$

Ta gọi $e_0(E), ..., e_{d-1}(E)$ là *hệ số Hilbert* của E. Đây là các số nguyên trong đó có $e_0(E) > 0$. Khi đó, *số bội* $e(E)$ của E được định nghĩa như sau:

$$e(E) := \begin{cases} e_0(E) & \text{nếu} \quad d > 0, \\ \ell(E) & \text{nếu} \quad d = 0. \end{cases}$$

Nếu E là môđun phân bậc Cohen-Macaulay thì $e(E)$ và $\operatorname{reg}(E)$ có mối quan hệ sau đây.

BỔ ĐỀ 1.3.1. (Xem [26, Lemma 2.2]) *Nếu E là môđun phân bậc Cohen-Macaulay thì*

$$\operatorname{reg}(E) \leq e(E) + \Delta(E) - 1.$$

Chúng ta thường hay sử dụng công thức Grothendieck-Serre sau đây:

ĐỊNH LÝ 1.3.2. (Xem [28, Lemma 1.3] hoặc [6, Theorem 4.3.5]) *Với mọi số nguyên n ta có*

$$h_E(n) - p_E(n) = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i \ell(H^i_{R_+}(E)_n). \tag{1.1}$$

Từ định nghĩa chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford và Định lý 1.3.2 ta thu được hệ quả sau đây:

HỆ QUẢ 1.3.3. $h_E(n) = p_E(n)$ *với mọi* $n \geq \operatorname{reg}(E) + 1$.

Kết quả sau đây cho phép ước lượng $\operatorname{reg}^1(E)$ thông qua hàm Hilbert và đa thức Hilbert của môđun E.

ĐỊNH LÝ 1.3.4. (Xem [26, Theorem 2.7]) *Cho* $\dim(E) \geq 1$. *Giả sử* $z \in R_1$ *là phần tử* E*-lọc chính quy sao cho* $\Delta(E/zE) \leq m$. *Nếu* $\operatorname{reg}^1(R/zR) \leq m$ *thì* $\operatorname{reg}^1(E) \leq m + p_E(m) - h_{E/L}(m)$, *trong đó* L *là môđun con lớn nhất của* E *có độ dài hữu hạn.*

1.4 MÔĐUN LỌC

Cho A là vành Noether địa phương với trường thặng dư $k := A/\mathfrak{m}$ và M là A-môđun hữu hạn sinh. Trước hết, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm về môđun lọc (xem [4, Section III.3], [3, Chapter 10] và [36, Chapter 1]).

ĐỊNH NGHĨA 1.4.1. Cho I là một iđêan thực sự của A. Một dãy các môđun con của M

$$\mathbb{M}: \; M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$$

được gọi là *I-lọc* của M nếu $IM_i \subseteq M_{i+1}$ với mọi i. Một I-lọc được gọi là một *I-lọc tốt* nếu $IM_i = M_{i+1}$ với $i \gg 0$. Môđun M có một I-lọc được gọi là *môđun lọc*.

Để đưa ra các ví dụ, ta nhắc lại bổ đề Artin-Rees.

BỔ ĐỀ 1.4.2. (Xem [29, Theorem 8.5]) *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh, N là môđun con của M và I là một iđêan của A. Khi đó tồn tại một số nguyên dương c sao cho với mọi $n > c$ ta có*

$$I^n M \cap N = I^{n-c}(I^c M \cap N).$$

VÍ DỤ 1.4.3. (i) Lọc I-adic $\{I^n M\}_{n \geq 0}$ là I-lọc tốt.

(ii) Dãy $A \supset \mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}I \supset \mathfrak{m}I^2 \supset \cdots$ là I-lọc tốt của môđun A.

(iii) Giả sử $\mathbb{M}$ là I-lọc tốt. Nếu N là một môđun con của M thì theo Bổ đề 1.4.2, ta có dãy $\{N \cap M_n\}_{n\geq 0}$ là I-lọc tốt của N và được kí hiệu là $\mathbb{M} \cap N$. Ta cũng có dãy $\{M_n + N/N\}_{n\geq 0}$ là I-lọc tốt của M/N và được kí hiệu là $\mathbb{M}/N$.

NHẬN XÉT 1.4.4. Giả sử $F = \{F_n\}_{n\geq 0}$ là một họ các iđêan của A. F gọi là một *I-lọc các iđêan* của A nếu $F_0 = A \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq ... \supseteq F_n \supseteq ...$, $IF_i \subseteq F_{i+1}$ và $F_i.F_j \subseteq F_{i+j}$ với mọi $i, j \geq 0$. Như vậy khái niệm lọc của môđun khác với khái niệm lọc các iđêan xét như môđun của vành. Bởi vì, lọc ở Ví dụ 1.4.3 (ii) là I-lọc của môđun A nhưng không phải là I-lọc các iđêan của A với $I \neq \mathfrak{m}$, do $\mathfrak{m}^2 \nsubseteq \mathfrak{m}I$.

Trong luận án, chúng tôi luôn giả thiết I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ và $\mathbb{M}$ là I-lọc tốt.

ĐỊNH NGHĨA 1.4.5. *Môđun phân bậc liên kết* đối với lọc $\mathbb{M}$ được xác định bởi công thức

$$G(\mathbb{M}) := \bigoplus_{n\geq 0} M_n/M_{n+1}.$$

Đặc biệt, nếu $\mathbb{M}$ là $\{I^nM\}_{n\geq 0}$ thì ta viết $G_I(M) := G(\mathbb{M})$. Đôi khi ta cũng nói $G(\mathbb{M})$ là môđun phân bậc liên kết của môđun lọc M.

Đây là môđun phân bậc hữu hạn sinh trên vành phân bậc chuẩn $G_I(A) := \oplus_{n\geq 0} I^n/I^{n+1}$ với $\dim(G(\mathbb{M})) = \dim(M)$ (xem [6, Theorem 4.4.6]).

ĐỊNH NGHĨA 1.4.6. (Xem [6] và [34]). Giả sử $J \subseteq I$ là các iđêan của A. Iđêan J được gọi là *rút gọn của I ứng với lọc* $\mathbb{M}$ nếu có một số nguyên không âm n_0 sao cho $M_{n+1} = JM_n$ với mọi $n \geq n_0$. Một rút gọn của I ứng với lọc $\mathbb{M}$ được gọi là *rút gọn tối tiểu của I ứng với lọc* $\mathbb{M}$ nếu nó không thực sự chứa một rút gọn nào khác của I ứng với lọc $\mathbb{M}$.

Đặc biệt, nếu $\mathbb{M}$ là lọc I-adic $\{I^n\}_{n\geq 0}$ thì iđêan J thường được gọi là *rút gọn của I*. Một rút gọn của I được gọi là *rút gọn tối tiểu của I* nếu nó không thực sự chứa một rút gọn nào khác của I.

ĐỊNH NGHĨA 1.4.7. ([36, Chapter 4]) *Số rút gọn của I-lọc tốt $\mathbb{M}$ là số*

$$r(\mathbb{M}) := \min\{t \geq 0 \mid M_{n+1} = IM_n \ \ \textit{với mọi} \ \ n \geq t\}.$$

Ví dụ, nếu $\mathbb{M}$ là lọc I-adic $\{I^nM\}_{n\geq 0}$ thì $r(\{I^nM\}_{n\geq 0}) = 0$. Chú ý rằng $r := r(\mathbb{M})$ luôn luôn hữu hạn và $M_{r+j} = I^jM_r$ với mọi $j \geq 0$. Điều đó có nghĩa là $\{M_n\}_{n\geq r}$ là lọc I-adic của M_r. Ta có thể thấy r là bậc sinh lớn nhất của $G(\mathbb{M})$ xét như là môđun phân bậc trên G.

Ta gọi $H_{\mathbb{M}}(n) = \ell(M/M_{n+1})$ là hàm Hilbert-Samuel của M ứng với lọc $\mathbb{M}$. Từ tính chất $H_{\mathbb{M}}(n) = \ell(M/I^{n+1-r}M_r)$ với mọi $n \geq r$, hàm số này là một đa thức - gọi là đa thức Hilbert-Samuel và được kí hiệu bởi $P_{\mathbb{M}}(n)$ - với $n \gg 0$. Đa thức Hilbert-Samuel $P_{\mathbb{M}}(n)$ được viết duy nhất dưới dạng

$$P_{\mathbb{M}}(n) = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i e_i(\mathbb{M})\binom{n+d-i}{d-i}. \tag{1.2}$$

Các số nguyên $e_i(\mathbb{M})$ được gọi là *hệ số Hilbert* của $\mathbb{M}$ (xem [36, Chapter 1]). Khi $\mathbb{M} = \{I^nM\}_{n\geq 0}$, $H_{\mathbb{M}}(n)$, $P_{\mathbb{M}}(n)$ và $e_i(\mathbb{M})$ tương ứng thường được kí hiệu bởi $H_{I,M}(n)$, $P_{I,M}(n)$ và $e_i(I, M)$.

NHẬN XÉT 1.4.8. Chú ý rằng $e_i(\mathbb{M}) = e_i(G(\mathbb{M}))$ với $0 \leq i \leq d-1$ và $e_i(\mathbb{M})$ phụ thuộc vào các lọc. Tuy nhiên riêng $e_0(\mathbb{M})$ không phụ thuộc vào việc chọn lọc, tức là $e_0(\mathbb{M}) = e_0(I, M)$ (xem [3, Proposition 11.4 (iii)]).

Ngoài ra ta thấy

$$H_{\mathbb{M}}(n) = \sum_{j=0}^{n} h_{G(\mathbb{M})}(j). \tag{1.3}$$

Sử dụng đẳng thức này và Hệ quả 1.3.3 ta nhận được kết quả sau. Kết quả này đã được chứng minh cho lọc I-adic trong [26].

BỔ ĐỀ 1.4.9. $P_{\mathbb{M}}(n) = H_{\mathbb{M}}(n)$ *với mọi* $n \geq \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$.

Chứng minh. Đặt $m := \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$. Theo công thức (1.3) và Hệ quả 1.3.3, với mọi $n \geq m$ ta có

$$H_{\mathbb{M}}(n) = \sum_{i=0}^{m} h_{G(\mathbb{M})}(i) + \sum_{i=m+1}^{n} h_{G(\mathbb{M})}(i) = \sum_{i=0}^{m} h_{G(\mathbb{M})}(i) + \sum_{i=m+1}^{n} p_{G(\mathbb{M})}(i)$$

là đa thức. Đa thức này phải là $P_{\mathbb{M}}(n)$. Điều này dẫn đến $P_{\mathbb{M}}(n) = H_{\mathbb{M}}(n)$ với mọi $n \geq \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$. $\square$

BỔ ĐỀ 1.4.10. [6, Corollary 4.5.10] *Giả sử A có trường thặng dư vô hạn, I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ bất kỳ. Khi đó tồn tại một hệ tham số $x_1, ..., x_d \in Q$ của M sao cho $Q = (x_1, ..., x_d)$ và Q là rút gọn tối tiểu của I. Hơn nữa $e(Q, M) = e(I, M)$.*

Mỗi phần tử $x \in A$ có ảnh tự nhiên trong $G_I(A)$ gọi là phần tử khởi đầu, kí hiệu là $x^* \in G_I(A)$. Chú ý $x^* \in I^r/I^{r+1}$, trong đó r là số lớn nhất sao cho $x \in I^r \backslash I^{r+1}$.

Tương tự như lập luận trong Mục 1.2 ta luôn giả thiết k vô hạn. Khi đó luôn tồn tại phần tử $x \in I \backslash \mathfrak{m}I$ sao cho $x^* \in I/I^2$ là phần tử $G(\mathbb{M})$-lọc chính quy.

Các kết quả sau đây đã được trình bày trong [46] cho trường hợp lọc I-adic. Các kết quả này vẫn còn đúng cho môđun lọc và chứng minh dưới đây tương tự như trong [46].

BỔ ĐỀ 1.4.11. *Cho $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$. Khi đó x^* là một phần tử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$ khi và chỉ khi $(M_{n+2} : x) \cap M_n = M_{n+1}$ với mọi $n \gg 0$.*

Chứng minh. "$\Longrightarrow$" Giả sử x^* là phần tử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Khi đó với $n \gg 0$ ta có $(0_{G(\mathbb{M})} : x^*)_n = 0$. Ta nhận thấy $(M_{n+2} : x) \cap M_n \supseteq M_{n+1}$ là hiển nhiên. Do đó ta chỉ cần chứng minh $(M_{n+2} : x) \cap M_n \subseteq M_{n+1}$. Giả sử tồn tại phần tử $y \in (M_{n+2} : x) \cap M_n$ và $y \notin M_{n+1}$. Suy ra $xy \in M_{n+2}$ và $y \in M_n \backslash M_{n+1}$. Vì vậy, $0 \neq y^* \in M_n/M_{n+1}$ và $x^*y^* = xy + M_{n+2} = 0$. Từ đó dẫn đến $0 \neq y^* \in (0_{G(\mathbb{M})} : x^*)_n$. Điều này là mâu thuẫn với $(0_{G(\mathbb{M})} : x^*)_n = 0$. Vậy ta nhận được $(M_{n+2} : x) \cap M_n = M_{n+1}$ mọi $n \gg 0$.

"$\Longleftarrow$" Giả sử với $n \gg 0$ ta có $(M_{n+2} : x) \cap M_n = M_{n+1}$. Lấy bất kì phần tử $y^* = y + M_{n+1} \in (0_{G(\mathbb{M})} : x^*)_n$, trong đó $y \in M_n$. Do đó $x^*y^* = 0$. Vì vậy $xy \in M_{n+2}$, nghĩa là $y \in (M_{n+2} : x)$. Dẫn đến $y \in (M_{n+2} : x) \cap M_n = M_{n+1}$. Vì vậy $(0_{G(\mathbb{M})} : x^*)_n = 0$ với mọi $n \gg 0$. Do vậy x^* là phần tử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. $\square$

BỔ ĐỀ 1.4.12. *Cho $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ và x^* là một phần tử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Khi đó $xM \cap M_n = xM_{n-1}$ với $n \gg 0$.*

Chứng minh. Nhận thấy $xM \cap M_n \supseteq xM_{n-1}$. Để chứng minh chiều ngược lại ta cần chứng minh $M_n : x = M_{n-1} + (0_M : x)$ với $n \gg 0$. Hiển nhiên ta có $M_n : x \supseteq M_{n-1} + (0_M : x)$. Vì $\mathbb{M}$ là I-lọc tốt, nên với $n \gg 0$ tồn tại số nguyên r sao cho $M_n = I^{n-r}M_r$. Suy ra

$$xM_r \cap M_n = I^{n-r}M_r \cap xM_r.$$

Theo Bổ đề 1.4.2 với $n \gg 0$ tồn tại số nguyên c sao cho

$$I^{n-r}M_r \cap xM_r = I^{n-r-c}(I^cM_r \cap xM_r) \subseteq xI^{n-r-c}M_r = xM_{n-c}.$$

Suy ra $M_n : x \subseteq (0_{M_r} : x) + M_{n-c} \subseteq (0_M : x) + M_{n-c}$. Theo Bổ đề 1.4.11 ta có $(M_{m+1} : x) \cap M_{m-1} = M_m$ với $m \gg 0$. Áp dụng công thức này với n đủ lớn cho $m = n - c + 2, ..., n$ ta được

$$(M_n : x) \cap M_{n-c} = (M_n : x) \cap M_{n-c+1} = ... = (M_n : x) \cap M_{n-1} = M_{n-1}.$$

Dẫn đến

$$M_n : x \subseteq ((0_M : x) + M_{n-c}) \cap (M_n : x) = (0_M : x) + M_{n-1}.$$

Vậy $M_n : x = M_{n-1} + (0_M : x)$ với $n \gg 0$. Khi đó ta suy ra được $xM \cap M_n \subseteq xM_{n-1}$ với $n \gg 0$. Đây là điều phải chứng minh. □

BỔ ĐỀ 1.4.13. *Cho $\mathbb{M}$ là một I-lọc tốt của M và $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ sao cho phần tử khởi đầu $x^* \in G_I(A)$ là $\mathbb{M}$-lọc chính quy. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}/xM)) \leq \operatorname{reg}(G(\mathbb{M})).$$

Chứng minh. Xét dãy khớp

$$0 \to T \to G(\mathbb{M})/x^*G(\mathbb{M}) \to G(\mathbb{M}/xM)) \to 0, \tag{1.4}$$

trong đó $T := \bigoplus_{n\geq 0} \frac{xM\cap M_n}{xM_{n-1}+xM\cap M_{n+1}}$. Theo Bổ đề 1.4.12 ta có $xM \cap M_n = xM_{n-1}$ với $n \gg 0$. Do vậy $\ell(T) < +\infty$. Theo Bổ đề 1.1.5 (iii) và Bổ đề 1.2.3 ta nhận được

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}/xM)) \leq \operatorname{reg}(G(\mathbb{M})/x^*G(\mathbb{M})) \leq \operatorname{reg}(G(\mathbb{M})).$$

□

BỔ ĐỀ 1.4.14. *Cho* $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ *là một phần tử sao cho* x^* *là lọc chính quy trên* $G(\mathbb{M})$ *và đặt* $a := \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$. *Khi đó*

(i) $r(\mathbb{M}) \leq a$.

(ii) $xM \cap M_n = xM_{n-1}$ *với mọi* $n \geq a+1$.

(iii) $M_{n+1} : x = M_n + (0_M : x)$ *và* $(0_M : x) \cap M_{n+1} = 0$ *với mọi* $n \geq a$.

Chứng minh. Như đã nêu trước đây, $r(\mathbb{M})$ là bậc sinh lớn nhất của $G(\mathbb{M})$. Áp dụng Định lý 1.1.3 ta nhận được (i).

Xét dãy khớp (1.4). Do $\ell(T) < +\infty$ và Bổ đề 1.4.13, ta thu được $a_0(T) \leq \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$. Vì vậy ta phải có $T_n = 0$ với mọi $n \geq a+1$. Từ điều này dẫn đến $xM \cap M_n \subseteq xM_{n-1} + M_{n+1}$. Suy ra $xM \cap M_n = xM_{n-1} + xM \cap M_n = xM_{n-1} + xM \cap M_{n+1} = xM_{n-1} + xM \cap M_{n+2} = ...$ Sử dụng Bổ đề 1.4.12 ta nhận được (ii).

(iii) a) Chứng minh $M_{n+1} : x = M_n + (0_M : x)$ với mọi $n \geq a$.

Rõ ràng là $M_n + (0_M : x) \subseteq M_{n+1} : x$. Giả sử y là phần tử bất kỳ của $M_{n+1} : x$. Khi đó $xy \in xM \cap M_{n+1}$. Theo (ii) ta có $xM \cap I^{n+1}M = xI^nM$ với mọi $n \geq a$. Do đó $xy = xz$ với $z \in M_n$ nào đó với mọi $n \geq a$. Từ đây dẫn đến $y - z \in (0_M : x)$. Suy ra $y \in M_n + (0_M : x)$ với mọi $n \geq a$. Vì vậy $M_{n+1} : x \subseteq M_n + (0_M : x)$ với mọi $n \geq a$. Ta thu được $M_{n+1} : x = M_n + (0_M : x)$ với mọi $n \geq a$.

b) Chứng minh $(0_M : x) \cap M_{n+1} = 0$ với mọi $n \geq a$. Giả sử $0 \neq z \in (0_M : x) \cap M_{n+1}$. Khi đó ta có $z \in M_{n+1}$ và $zx = 0$. Vì $0 \neq z \in M_{n+1}$ nên tồn tại số nguyên $m \geq n+1$ sao cho $z \in M_m \setminus M_{m+1}$ nghĩa là $\deg(z^*) = m$. Ngoài ra, vì $zx = 0$ nên $z^*x^* = 0$. Suy ra $z^* \in (0_{G(\mathbb{M})} : x^*) \subseteq H^0_{G_+}(G(\mathbb{M}))$. Vì $\deg(z^*) = m \geq a+1$ nên $z^* = 0$. Dẫn đến $z \in M_{m+1}$. Mâu thuẫn với $z \in M_m \setminus M_{m+1}$. Vậy $M_{n+1} : x = M_n + (0_M : x)$ với mọi $n \geq a$.

□

CHƯƠNG 2

CHẶN TRÊN THEO BẬC MỞ RỘNG VÀ ĐỘ DÀI CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

Trong chương này, chúng tôi sẽ đưa ra một số chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc liên kết $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo bậc mở rộng hoặc theo độ dài của môđun đối đồng điều địa phương của một số môđun thương của môđun M ban đầu. Trường hợp M là môđun phân bậc chúng tôi thiết lập chặn cho $\mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $\mathrm{reg}(M)$.

2.1 CHẶN TRÊN THEO BẬC MỞ RỘNG

Trong luận án, nếu không nói gì khác, ta luôn giả thiết A là vành Noether địa phương với trường thặng dư vô hạn $k := A/\mathfrak{m}$, M là A-môđun hữu hạn sinh, I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ và $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là I-lọc tốt của M.

Chúng tôi quan tâm đến chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của $G(\mathbb{M})$ như là một môđun trên $G_I(A)$. Trong trường hợp lọc $\mathfrak{m}$-adic của A, tức là đối với $G_{\mathfrak{m}}(A)$, vấn đề này được Rossi-Trung-Valla giải quyết (xem [37]). Sau đó C. H. Linh giải quyết cho trường hợp lọc I-adic của môđun tùy ý (xem [26]). Các chặn đưa ra dựa theo một đại lượng được gọi là bậc mở rộng của M ứng với I (xem [26, Theorem 4.4]). Khái niệm bậc mở rộng đầu tiên được Doering-Gunston-Vasconcelos [10] và Vasconcelos [47] đưa ra nhằm đo độ phức tạp về cấu trúc của môđun phân bậc. Sau đó, Rossi-Trung-Valla [37] và C. H. Linh [26] phát biểu cho trường hợp địa phương. Trong các khái niệm và ví dụ dưới đây, ta xét một trong hai trường hợp:

(i) M là môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương Noether $(A, \mathfrak{m})$ và I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ.

(ii) $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ là A-môđun phân bậc hữu hạn sinh và I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ thuần nhất của A, trong đó $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ là đại số phân bậc chuẩn Noether trên vành địa phương Artin $(A_0, \mathfrak{m}_0)$ và $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_0 \oplus (\oplus_{n\geq 1} A_n)$ là iđêan cực đại thuần nhất của A.

ĐỊNH NGHĨA 2.1.1. *Ta ký hiệu $\mathcal{M}(A)$ là tập hợp các A-môđun hữu hạn sinh. Một khái niệm có tính tổng quát (notion of genericity) trên $\mathcal{M}(A)$ ứng với I là một hàm*

$$U(I, -) : \{\textit{lớp đẳng cấu của } \mathcal{M}(A)\} \longrightarrow \{\textit{tập con khác rỗng của } I\backslash \mathfrak{m}I\}$$

thỏa mãn các tính chất sau với mỗi môđun M:

- *Giả sử $x - y \in \mathfrak{m}I$. Lúc đó, $x \in U(I, M)$ nếu và chỉ nếu $y \in U(I, M)$.*
- *Tập hợp $\overline{U(I, M)} \subseteq I\backslash \mathfrak{m}I$ chứa tập con mở khác rỗng.*
- *Nếu $\operatorname{depth}(M) > 0$ và $x \in U(I, M)$ thì x là phần tử chính quy trên M.*

Với mỗi $x \in U(I, M)$ ta nói x là phần tử tổng quát của M ứng với I. Tương tự một hệ tham số tổng quát $x_1, ..., x_d$ ứng với I là một hệ tham số của M sao cho $x_1 \in U(I, M)$ và với $i = 2, ..., d$, $x_i \in U(I, M/(x_1, ..., x_{i-1})M)$.

ĐỊNH NGHĨA 2.1.2. *Một bậc mở rộng $D(I, M)$ của M ứng với iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ I là một hàm số thoả mãn các tính chất sau:*

(i) *$D(I, M) = D(I, M/L) + \ell(L)$, trong đó $L := H^0_{\mathfrak{m}}(M)$.*

(ii) *$D(I, M) \geq D(I, M/xM)$ với mọi phần tử tổng quát $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ trên M.*

(iii) *$D(I, M) = e(I, M)$ nếu M là A-môđun Cohen-Macaulay, trong đó $e(I, M)$ là số bội của M ứng với I.*

VÍ DỤ 2.1.3. Cho A là ảnh đồng cấu của một vành Gorenstein S chiều n và $M \in \mathcal{M}(A)$ với $\dim(M) = d$. Ta định nghĩa *bậc đồng điều* của M ứng với iđêan I, ký hiệu là $\operatorname{hdeg}(I, M)$, bằng quy nạp theo d như sau:

Khi $d = 0$ thì $\operatorname{hdeg}(I, M) := \ell(M)$.

Khi $d > 0$, vì $\dim \operatorname{Ext}_S^{s+i+1-d}(M, S) \leq d - i - 1$ nên ta đặt

$$\operatorname{hdeg}(I, M) := e(I, M) + \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \operatorname{hdeg}(I, \operatorname{Ext}_S^{s+i+1-d}(M, S)). \quad (2.1)$$

Nếu A không là ảnh đồng cấu của vành Gorenstein thì ta đặt

$$\operatorname{hdeg}(I, M) := \operatorname{hdeg}(I, M \otimes_A \hat{A}),$$

trong đó $\hat{A}$ là ký hiệu vành $\mathfrak{m}$-adic đầy đủ của A. Khi đó $\operatorname{hdeg}(I, M)$ là một bậc mở rộng của M ứng với iđêan I (xem [47, Proposition 9.4.4]).

Đối với môđun lọc, kết quả của C. H. Linh [26, Theorem 4.4] được mở rộng như sau:

ĐỊNH LÝ 2.1.4. *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d \geq 1$, $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là I-lọc tốt của M và $D(I, M)$ là một bậc mở rộng tuỳ ý của M ứng với I. Đặt $r := r_I(\mathbb{M})$. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq D(I, M) + r - 1$ nếu $d = 1$,

(ii) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [D(I, M) + r + 1]^{3(d-1)!-1} - d$ nếu $d \geq 2$.

NHẬN XÉT 2.1.5. Chú ý rằng chặn trên trong (ii) là đơn giản hơn và trong trường hợp tổng quát tốt hơn một ít so với [26, Theorem 4.4]. Chứng minh tương tự như [26], nhưng ta cần một số thay đổi. Lý do chính cho một số thay đổi là không giống như trường hợp I-adic, môđun $G(\mathbb{M})$ không sinh bởi các phần tử bậc 0 mà sinh bởi các phần tử có bậc lớn nhất là $r(\mathbb{M})$.

BỔ ĐỀ 2.1.6. (Singh's formula, xem [36, Lemma 1.6]) *Cho $x \in I$. Khi đó với mọi $n \geq 0$ ta có*

$$h_{G(\mathbb{M})}(n) = H_{\mathbb{M}/xM}(n) - \ell(M_{n+1} : x/M_n).$$

BỔ ĐỀ 2.1.7. *Giả sử $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ sao cho phần tử khởi đầu x^* của x trong $G_I(A)$ là phần tử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Đặt $N := M/xM$. Khi đó*

$$p_{G(\mathbb{M})}(n) \leq H_{I,N}(n)$$

với $n \geq \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}/xM))$.

Chứng minh. Áp dụng Bổ đề 2.1.6 ta có

$$h_{G(\mathbb{M})}(n) = H_{\mathbb{M}/xM}(n) - \ell(M_{n+1} : x/M_n).$$

Sử dụng Bổ đề 1.4.14 (iii) ta nhận được

$$p_{G(\mathbb{M})}(n) \leq H_{\mathbb{M}/xM}(n)$$

với $n \geq \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}/xM))$. Từ $I^{n+1}M \subseteq M_{n+1}$ ta có

$$H_{\mathbb{M}/xM}(n) = \ell(M/M_{n+1} + xM) \leq \ell(M/I^{n+1}M + xM) = H_{I,N}(n).$$

□

Gọi $Q \subseteq I$ là một rút gọn của I. Mệnh đề thứ hai trong kết quả dưới đây là của C. H. Linh [26, Theorem 3.6]. Tuy nhiên chứng minh của chúng tôi đưa ra ngắn hơn nhiều.

BỔ ĐỀ 2.1.8. *Giả sử* $\dim(M) = d \geq 1$ *và I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. Khi đó*

(i) $\ell(M/I^{n+1}M) \leq \binom{n+d}{d}\ell(M/QM)$, *ở đây Q là một iđêan rút gọn tối tiểu của* $I(A/\operatorname{Ann}(M))$,

(ii) $\ell(M/I^{n+1}M) \leq \binom{n+d}{d}D(I,M)$.

Chứng minh. (i) Cho $Q = (x_1, ..., x_d)$. Sử dụng toàn cấu

$$B := (M/QM)[x_1, ..., x_d] \longrightarrow \bigoplus_{n\geq 0} Q^nM/Q^{n+1}M,$$

ta nhận được

$$\ell(M/I^{n+1}M) \leq \ell(M/Q^{n+1}M) \leq \sum_{i=0}^{i=n} \ell(B_i) \leq \binom{n+d}{d}\ell(M/QM).$$

(ii) Ta có thể chọn $x_1, ..., x_d \in I$ sao cho x_i là một phần tử tổng quát trên $M/(x_1, ..., x_{i-1})M$. Khi đó $Q = (x_1, ..., x_d)$ là một rút gọn tối tiểu của $I(A/\operatorname{Ann}(M))$. Áp dụng (ii) và (iii) của Định nghĩa 2.1.2 ta nhận được

$$D(I, M) \geq D(I, M/(x_1, ..., x_d)M) = \ell(M/(x_1, ..., x_d)M) = \ell(M/QM).$$

Từ đây ta thấy (ii) là hệ quả của (i). □

Kết quả sau đã được chứng minh cho trường hợp vành (xem [20, Theorem 5.2]), nhưng nó vẫn còn đúng cho môđun lọc.

BỔ ĐỀ 2.1.9. [20, Theorem 5.2] *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh sao cho* $\operatorname{depth}(M) > 0$. ***Khi đó***

$$a_0(G(\mathbb{M})) \leq a_1(G(\mathbb{M})) - 1.$$

Chứng minh. Đặt

$$\mathfrak{R} := \bigoplus_{n\geq 0} I^n \quad \text{và} \quad \mathfrak{R}(\mathbb{M}) := \bigoplus_{n\geq 0} M_n.$$

Xét dãy khớp:

$$0 \longrightarrow \mathfrak{R}(\mathbb{M})_+(1) \longrightarrow \mathfrak{R}(\mathbb{M}) \longrightarrow G(\mathbb{M}) \longrightarrow 0.$$

Chú ý rằng theo [5, Theorem 4.2.1] ta có $H^i_{\mathfrak{R}_+}(G(\mathbb{M})) = H^i_{G_+}(G(\mathbb{M}))$. Vì $\operatorname{depth}(M) > 0$ nên $H^0_{\mathfrak{R}_+}(\mathfrak{R}(\mathbb{M})) = 0$. Ta thu được dãy khớp:

$$0 \to H^0_{\mathfrak{R}_+}(G(\mathbb{M}))_n \to H^1_{\mathfrak{R}_+}(\mathfrak{R}(\mathbb{M}))_{n+1} \to H^1_{\mathfrak{R}_+}(\mathfrak{R}(\mathbb{M}))_n \to H^1_{\mathfrak{R}_+}(G(\mathbb{M}))_n.$$

Từ dãy khớp trên ta có toàn cấu

$$H^1_{\mathfrak{R}_+}(\mathfrak{R}(\mathbb{M}))_{n+1} \longrightarrow H^1_{\mathfrak{R}_+}(\mathfrak{R}(\mathbb{M}))_n \longrightarrow 0$$

với mọi $n \geq a_1(G(\mathbb{M})) + 1$. Vì $H^1_{\mathfrak{R}_+}(\mathfrak{R}(\mathbb{M}))_{n+1} = 0$ với $n \gg 0$ nên ta phải có $H^1_{\mathfrak{R}_+}(\mathfrak{R}(\mathbb{M}))_n = 0$ với $n \geq a_1(G(\mathbb{M}))$. Suy ra $H^0_{\mathfrak{R}_+}(G(\mathbb{M}))_n = 0$ với mọi $n \geq a_1(G(\mathbb{M})) - 1$. Điều này dẫn đến

$$a_0(G(\mathbb{M})) \leq a_1(G(\mathbb{M})) - 1.$$

□

Một hệ quả ngay lập tức từ bổ đề này là:

HỆ QUẢ 2.1.10. *Giả sử M là A-môđun hữu hạn sinh với* $\operatorname{depth}(M) > 0$. *Khi đó*

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) = \operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M})).$$

Kết quả tiếp theo là mở rộng của [26, Lemma 4.3] cho trường hợp lọc.

BỔ ĐỀ 2.1.11. *Đặt $\overline{M} := M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. Kí hiệu lọc $\mathbb{M}/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ của $\overline{M}$ là $\overline{\mathbb{M}}$. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq \max\{\operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}})); r(\mathbb{M})\} + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Chứng minh. Đặt $L := H^0_{\mathfrak{m}}(M)$, $r := r(\mathbb{M})$ và

$$K := \bigoplus_{n\geq 0}(M_{n+1} + M_n \cap L)/M_{n+1} \cong \bigoplus_{n\geq 0} \frac{M_n \cap L}{M_{n+1} \cap L}.$$

Vì $\mathbb{M}$ là I-lọc tốt, nên với $n \gg 0$ tồn tại số nguyên r sao cho $M_{n+1} = I^{n+1-r}M_r \subseteq I^{n+1-r}M$. Theo Bổ đề 1.4.2 tồn tại số nguyên c sao cho

$$M_{n+1} \cap L \subseteq I^{n+1-r}M \cap L \subseteq I^{n+1-r-c}L = 0$$

với $n \gg 0$. Suy ra $\ell(K) = \ell(L)$. Xét dãy khớp sau:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow G(\mathbb{M}) \longrightarrow G(\overline{\mathbb{M}}) \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

Đặt $\epsilon := \max\{\operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}}));\ r(\mathbb{M})\}$. Khi đó tồn tại số nguyên m

$$\epsilon + 1 \leq m \leq \epsilon + \ell(L) + 1$$

sao cho $K_m = 0$. Do $m > \operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}}))$, theo dãy khớp (2.2) ta thấy rằng

$$H^i_{G_I(A)_+}(G(\mathbb{M}))_{m-i} = 0 \text{ với mọi } i \geq 0.$$

Chú ý rằng $G(\mathbb{M})$ được sinh trên $G_I(A)$ bởi các phần tử bậc $\leq r(\mathbb{M}) \leq m-1$. Sử dụng Bổ đề 1.1.4 ta nhận được $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq m-1 \leq \epsilon+\ell(L)$. □

Chứng minh của Định lý 2.1.4. Đặt $G := G_I(A)$, $L := H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ và $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ sao cho phần tử khởi đầu x^* trong G là phần lử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Đặt $\overline{M} := M/L$. Sử dụng Bổ đề 2.1.11 ta có

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq \max\{\operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}}));\ r\} + \ell(L).$$

Áp dụng (i) của Định nghĩa 2.1.2 ta được $D(I, M) = D(I, \overline{M}) + \ell(L)$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh các mệnh đề sau:

(i') $\operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}})) \leq D(I, \overline{M}) + r - 1$ nếu $d = 1$,

(ii') $\operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}})) \leq [D(I, \overline{M}) + r + 1]^{3(d-1)!-1} - d$ nếu $d \geq 2$.

Thay M bằng $\overline{M}$, chúng ta có thể giả sử $\operatorname{depth}(M) > 0$. Đặt $D := D(I, M)$. Theo Hệ quả 2.1.10 ta có

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) = \operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M})). \tag{2.3}$$

Nếu $d = 1$ thì M là môđun Cohen-Macaulay. $G(\mathbb{M})$ là G-môđun chiều một sinh bởi các phần tử bậc cao nhất là r. Sử dụng đẳng thức (2.3) và Bổ đề 1.3.1 ta nhận được

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) = \operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M})) \leq e(G(\mathbb{M})) + r - 1 = e(I, M) + r - 1.$$

Dấu bằng cuối cùng suy ra từ Nhận xét 1.4.8. Theo Định nghĩa 2.1.2 (ii) ta nhận được $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq D + r - 1$.

Chú ý rằng $r(\mathbb{M}/xM) \leq r$ và $D > 0$. Nếu $d \geq 2$, đặt $N := M/xM$ và $m := \max\{r;\ \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}/xM))\}$. Sử dụng dãy khớp (1.4) và Bổ đề 1.4.14 (ii) ta nhận được

$$\operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M})/x^*G(\mathbb{M})) = \operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M}/xM)).$$

Suy ra

$$\operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M})/x^*G(\mathbb{M})) \leq m.$$

Vì $G(\mathbb{M})$ được sinh bởi các phần tử có bậc cao nhất là $r \leq m$, theo Định lý 1.3.4 ta có

$$\operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M})) \leq m + p_{G(\mathbb{M})}(m).$$

Sử dụng Bổ đề 2.1.7 và Bổ đề 2.1.8 (ii) và bất đẳng thức $D(I,N) \leq D$, ta thu được

$$\operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M})) \leq m + D(I,N)\binom{m+d-1}{d-1} \leq m + D\binom{m+d-1}{d-1}. \quad (2.4)$$

Nếu $d = 2$, sử dụng (i) của định lý ta nhận được

$$m := \max\{r;\ \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}/xM))\} \leq D(I,N) + r - 1 \leq D + r - 1.$$

Do $r \geq 0$, áp dụng công thức (2.3) và (2.4) ta nhận được

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) = \operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M})) &\leq m + D(m+1)\\ &\leq D^2 + (r+1)D + r - 1 \leq (D+r+1)^2 - 2.\end{aligned}$$

Cho $d \geq 3$. Trường hợp $m = 0$ là tầm thường. Vì vậy ta có thể giả sử $m > 0$. Áp dụng công thức (2.4) ta đạt được

$$\operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M})) \leq m + D\binom{m+d-1}{d-1} \leq D(m+1)^{d-1} - 1. \quad (2.5)$$

Từ giả thiết quy nạp ta có thể giả sử rằng

$$m \leq [D(I,N) + r + 1]^{3(d-2)!-1} - d + 1 \leq (D + r + 1)^{3(d-2)!-1} - d + 1.$$

Sử dụng công thức (2.3) và (2.5) ta nhận được

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [D + r + 1]^{3(d-1)!-1} - d.$$

□

2.2 TRƯỜNG HỢP MÔĐUN PHÂN BẬC

Cho $A = \oplus_{n\geq 0} A_n$ là đại số phân bậc chuẩn Noether trên vành địa phương Artin $(A_0, \mathfrak{m}_0)$ với trường thặng dư $k := A_0/\mathfrak{m}_0$ vô hạn. Ta kí hiệu iđêan cực đại thuần nhất $\mathfrak{m} := \mathfrak{m}_0 \oplus (\oplus_{n\geq 1} A_n)$ của A. Cho $M = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ là A-môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều d và $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}_n\}_{n\geq 0}$ là I-lọc tốt bao gồm các môđun con thuần nhất của M, trong đó I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ thuần nhất của A. Kết quả của chúng tôi là chặn trên $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $\operatorname{reg}(M)$ và $r(\mathbb{M})$ trong trường hợp A là vành đa thức trên một trường.

Để cho gọn ta đặt $\operatorname{hdeg}(M) := \operatorname{hdeg}(\mathfrak{m}, M)$. Bây giờ, ta chặn $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $r(\mathbb{M})$ và $\operatorname{hdeg}(M)$ bằng cách quy về trường hợp địa phương.

BỔ ĐỀ 2.2.1. [27, Lemma 1.3] *Giả sử $I \subset A$ là một iđêan thuần nhất $\mathfrak{m}$-nguyên sơ và n là số nguyên thỏa mãn $\mathfrak{m}^n \subseteq I$. Khi đó*

$$\operatorname{hdeg}(M) \leq \operatorname{hdeg}(I, M) \leq n^d \operatorname{hdeg}(M).$$

BỔ ĐỀ 2.2.2. *Cho $I \subset A$ là một iđêan thuần nhất $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. Khi đó*

$$\operatorname{hdeg}(I_\mathfrak{m}, M_\mathfrak{m}) \leq \ell(A/I)^d \operatorname{hdeg}(M).$$

Chứng minh. Đặt $p := \ell(A/I) = \ell((A/I)_\mathfrak{m})$. Khi đó ta có dãy hợp thành

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset ... \subset L_p = (A/I)_\mathfrak{m}.$$

Suy ra $\mathfrak{m}^p A_\mathfrak{m} \subseteq I_\mathfrak{m}$. Theo Bổ đề 2.2.1 ta có

$$\operatorname{hdeg}(I_\mathfrak{m}, M_\mathfrak{m}) \leq p^d \operatorname{hdeg}(\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}, M_\mathfrak{m}).$$

Chú ý rằng đối với một A-môđun phân bậc hữu hạn sinh tuỳ ý E luôn có $e(E) = e(E_\mathfrak{m})$. Sử dụng tính chất giao hoán của hàm tử Ext đối với phép địa phương hoá (xem [38, Theorem 9.50]) cho công thức đệ quy (2.1), ta nhận được $\operatorname{hdeg}(\mathfrak{m}A_\mathfrak{m}, M_\mathfrak{m}) = \operatorname{hdeg}(M)$. Suy ra $\operatorname{hdeg}(I_\mathfrak{m}, M_\mathfrak{m}) \leq p^d \operatorname{hdeg}(M)$. $\square$

ĐỊNH LÝ 2.2.3. *Cho $\mathbb{M}$ là một I-lọc tốt của A-môđun phân bậc M chiều $d \geq 1$. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq \ell(A/I) \operatorname{hdeg}(M) + r(\mathbb{M}) - 1$ nếu $d = 1$,

(ii) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [\ell(A/I)^d \operatorname{hdeg}(M) + r(\mathbb{M}) + 1]^{3(d-1)!-1} - d$ nếu $d \geq 2$.

Chứng minh. Kí hiệu $\mathfrak{R} = A \oplus I \oplus I^2 \oplus ...$ là đại số Rees của A ứng với I và $\mathfrak{R}_+ = \oplus_{n \geq 1} I^n$. Ta có thể xét $G(\mathbb{M})$ như là một môđun hữu hạn sinh trên $\mathfrak{R}$. Nếu $E = \oplus_{n \in \mathbb{Z}} E_n$ là một môđun phân bậc trên $\mathfrak{R}$, kí hiệu $E_\mathfrak{m}$ và $(E_n)_\mathfrak{m}$

lần lượt là địa phương hoá của E và E_n như A-môđun ứng với tập nhân đóng $A \setminus \mathfrak{m}$. Khi đó ta có thể xét $G_I(A)$ và $G(\mathbb{M})$ như là các môđun phân bậc trên $\mathfrak{R}$. Từ đó ta có $(G(\mathbb{M}))_\mathfrak{m} \cong G(\mathbb{M}_\mathfrak{m})$ và $(G_I(A))_\mathfrak{m} \cong G_{I_\mathfrak{m}}(A_\mathfrak{m})$. Do đó

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) = \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}_\mathfrak{m})).$$

Mặt khác, theo Bổ đề 2.2.2 ta có

$$\operatorname{hdeg}(I_\mathfrak{m}, M_\mathfrak{m}) \leq \ell(A/I)^d \operatorname{hdeg}(M).$$

Ta có $r(\mathbb{M}_\mathfrak{m}) \leq r(\mathbb{M})$. Sử dụng Định lý 2.1.4 cho bậc đồng điều ta nhận được điều phải chứng minh. □

Một hệ quả quan trọng của Định lý 2.2.3 là

HỆ QUẢ 2.2.4. *Giả sử I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ thuần nhất của vành đa thức $A = k[x_1, ..., x_n]$ trên một trường k. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(G_I(A)) \leq \ell(A/I) - 1$ *nếu* $d = 1$,

(ii) $\operatorname{reg}(G_I(A)) \leq (\ell(A/I) + 1)^{3(d-1)!-1} - d$ *nếu* $d \geq 2$.

Nếu M là môđun phân bậc tuỳ ý trên vành đa thức A thì ta có thể chặn $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $\operatorname{reg}(M)$, $r(\mathbb{M})$ và một số bất biến khác của M như sau:

ĐỊNH LÝ 2.2.5. *Giả sử M là môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều $d \geq 1$ trên vành đa thức $A = k[x_1, ..., x_n]$. Ký hiệu $i(M)$ là bậc khởi đầu của M (tức là $i(M) = \min\{p \mid M_p \neq 0\}$) và $\mu(M)$ là số phần tử của một hệ sinh tối tiểu của M. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq \ell(A/I)\mu(M)[\operatorname{reg}(M) - i(M) + 1]^n + r(\mathbb{M}) - 1$ nếu $d = 1$,

(ii) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [\ell(A/I)^d(\mu(M)(\operatorname{reg}(M) - i(M) + 1)^n)^{2^{(d-1)^2}} + r(\mathbb{M}) + 1]^{3(d-1)!-1} - d$ nếu $d \geq 2$.

Chứng minh. Áp dụng [7, Theorem 5.1] ta nhận được

$$\begin{aligned}\operatorname{hdeg}(M) &\leq \left[\mu(M)\binom{\operatorname{reg}(M) - i(M) + n}{n}\right]^{2^{(d-1)^2}}\\ &\leq [\mu(M)(\operatorname{reg}(M) - i(M) + 1)^n]^{2^{(d-1)^2}}.\end{aligned}$$

Sử dụng Định lý 2.2.3 ta nhận được các bất đẳng thức nêu ra trong định lý. $\square$

Trong phần còn lại của mục này ta xét trường hợp I là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ sinh bởi các phần tử thuần nhất cùng bậc. Khi đó ta có thể sử dụng phương pháp của Rossi-Trung-Valla [37] để đưa ra một chặn trên cho $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ tốt hơn nhiều so với chặn trên trong Định lý 2.2.5 và đúng với mọi vành phân bậc chuẩn A. Trong trường hợp này, ta có

BỔ ĐỀ 2.2.6. *Cho $i(M)$ là bậc khởi đầu của M. Đặt $\overline{M} := M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ và $\overline{\mathbb{M}} := \mathbb{M}/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq \max\{\operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}}));\ \operatorname{reg}(M) - i(M) + r(\mathbb{M})\}.$$

Chứng minh. Như trong chứng minh của Bổ đề 2.1.11, ta có dãy khớp

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow G(\mathbb{M}) \longrightarrow G(\overline{\mathbb{M}}) \longrightarrow 0, \tag{2.6}$$

trong đó

$$K := \bigoplus_{n\geq 0} \frac{\mathcal{M}_{n+1} + \mathcal{M}_n \cap H^0_{\mathfrak{m}}(M)}{\mathcal{M}_{n+1}}$$

là một môđun có độ dài hữu hạn.

Cho $n \geq \operatorname{reg}(M) - i(M) + r + 1$, trong đó $r := r(\mathbb{M})$. Chú ý rằng $\operatorname{reg}(M) \geq i(M)$ và I được sinh bởi các phần tử thuần nhất có bậc ít nhất là một. Dẫn đến

$$\mathcal{M}_n = I^{n-r}\mathcal{M}_r \subseteq I^{n-r}M \subseteq \bigoplus_{p\geq \operatorname{reg}(M)+1} M_p.$$

Từ $H^0_{\mathfrak{m}}(M) \subseteq M$ và $H^0_{\mathfrak{m}}(M)_p = 0$ với mọi $p \geq \operatorname{reg}(M) + 1$, ta nhận thấy rằng $\mathcal{M}_n \cap H^0_{\mathfrak{m}}(M) = 0$. Bởi vậy $K_n = 0$. Do đó, từ dãy khớp (2.6) ta nhận được điều phải chứng minh. $\square$

BỔ ĐỀ 2.2.7. *Giả sử $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ là một phần tử thuần nhất. Giả sử phần tử khởi đầu x^* của $G_I(A)$ là một phần tử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Khi đó ta có x là một phần tử lọc chính quy trên M.*

Chứng minh. Phần tử x^* là lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$, nghĩa là tồn tại n_0 sao cho

$$(\mathcal{M}_{n+2} : x) \cap \mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n+1} \tag{2.7}$$

với mọi $n \geq n_0$. Cho $u \in (0 :_M x)_p$. Vì M hữu hạn sinh và $M/\mathcal{M}_{n_0}$ có độ dài hữu hạn nên $u \in \mathcal{M}_{n_0}$ khi $p \gg 0$. Khi đó, áp dụng công thức (2.7) ta nhận được

$$u \in (0 :_M x) \cap \mathcal{M}_{n_0} \subseteq (\mathcal{M}_{n_0+2} : x) \cap \mathcal{M}_{n_0} = \mathcal{M}_{n_0+1}.$$

Bằng quy nạp ta nhận được

$$u \in \bigcap_{q \geq n_0} \mathcal{M}_q = \bigcap_{q \gg 0} I^{q-r}\mathcal{M}_r = 0.$$

Nghĩa là $(0 :_M x)_p = 0$ với $p \gg 0$, hay x là phần tử lọc chính quy trên M. □

Bây giờ, ta xét Định lý 2.2.5 trong trường hợp iđêan I sinh bởi các phần tử thuần nhất cùng bậc. Cụ thể như sau:

ĐỊNH LÝ 2.2.8. *Giả sử I sinh bởi các phần tử thuần nhất có bậc $\Delta \geq 1$. Cho Q là một rút gọn thuần nhất tối tiểu của $I(A/\operatorname{Ann}(M))$. Ký hiệu $i(M)$ là bậc khởi đầu của M. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq \ell(M/QM) + r(\mathbb{M}) + \operatorname{reg}(M) - i(M) - 1$ nếu $d = 1$,

(ii) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [\ell(M/QM) + r(\mathbb{M}) + \operatorname{reg}(M) - i(M) + (d-1)\Delta]^{3(d-1)!-1} - d$ nếu $d \geq 2$.

Chứng minh. Ý chính chứng minh tương tự như chứng minh của Định lý 2.1.4. Theo Bổ đề 2.2.6, ta chỉ cần xét trường hợp $\operatorname{depth}(M) > 0$ là đủ. Đặt $r := r(\mathbb{M})$.

(i) Nếu $d = 1$ thì M là môđun Cohen-Macaulay. Sử dụng Bổ đề 1.3.1, Hệ quả 2.1.10 và Bổ đề 1.4.10 ta nhận được

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) &= \operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M})) \leq e(G(\mathbb{M})) + r - 1 \\ &= e(I, M) + r - 1 = e(Q, M) + r - 1 \leq \ell(M/QM) + r - 1.\end{aligned}$$

(ii) Cho $d \geq 2$. Ta nhận thấy Q được sinh bởi d phần tử thuần nhất bậc Δ. Khi đó, ta có thể tìm thấy một hệ sinh tối tiểu $\{x_1, ..., x_d\}$ của Q sao cho phần tử khởi đầu x_1^* trong G là lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$ (xem [45, Lemma 3.1]). Chú ý rằng tất cả các phần tử $x_1, ..., x_d$ có bậc $\Delta \geq 1$. Đặt $x := x_1$, khi đó $N := M/xM$ là một môđun phân bậc. Cho $m := \max\{r; \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}/xM))\}$. Sử dụng dãy khớp (1.4) ta nhận được

$$\operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M})/x^*G(\mathbb{M})) = \operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M}/xM)) \leq m.$$

Chú ý rằng $(x_2, ...x_d)$ là một rút gọn tối tiểu của $I(A/\operatorname{Ann}(N))$. Áp dụng Định lý 1.3.4, Bổ đề 2.1.7 và Bổ đề 2.1.8 (i) ta nhận được

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) &\leq m + \ell(N/(x_2, ..., x_d)N)\binom{m+d-1}{d-1} \\ &\leq m + \ell(M/QM)\binom{m+d-1}{d-1}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Công thức này tương tự như (2.4). Chú ý rằng $\operatorname{reg}(N) \leq \operatorname{reg}(M) + \Delta - 1$, $r(\mathbb{M}/xM) \leq r$ và $i(N) \geq i(M)$. Cho $d = 2$. Theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}/xM)) &\leq \ell(N/(x_2, ..., x_d)N) + r + \operatorname{reg}(N) - i(N) - 1 \\ &\leq \ell(M/QM) + r + \operatorname{reg}(N) - i(M) - 1 \\ &\leq \ell(M/QM) + r + \operatorname{reg}(M) - i(M) + \Delta - 2. \end{aligned}$$

Dẫn đến

$$m \leq \ell(M/QM) + r + \operatorname{reg}(M) - i(M) + \Delta - 2.$$

Cùng với (2.8) và Hệ quả 2.1.10 ta nhận được

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) = \operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M})) \leq [\ell(M/QM) + r + \Delta + \operatorname{reg}(M) - i(M)]^2 - 2.$$

Nếu $d \geq 3$ thì theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} m &\leq [\ell(N/(x_2, ...x_d)N) + r + (d-2)\triangle + \operatorname{reg}(N) - i(N)]^{3(d-2)!-1} - d + 1 \\ &\leq [\ell(M/QM) + r + (d-1)\triangle + \operatorname{reg}(M) - i(M)]^{3(d-2)!-1} - d + 1. \end{aligned}$$

Sử dụng (2.8) ta nhận được (ii). $\square$

2.3 CHẶN TRÊN THEO ĐỘ DÀI CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

Trong mục này, chúng tôi thiết lập chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của $G(\mathbb{M})$ theo độ dài của môđun đối đồng điều địa phương của một số môđun thương của môđun M ban đầu. Với mỗi môđun hữu hạn sinh M ta đặt

$$h^0(M) := \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)).$$

Định lý sau tương tự như Định lý 2.1.4. Điểm mới trong định lý này là sử dụng các độ dài của môđun đối đồng điều địa phương thay cho bậc mở rộng.

ĐỊNH LÝ 2.3.1. *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d \geq 1$, $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là một I-lọc tốt của M và dãy các phần tử $x_1, ..., x_d \in I\setminus \mathfrak{m}I$ sao cho dãy các phần tử khởi đầu $x_1^*, ..., x_d^* \in G_I(A)$ là $G(\mathbb{M})$-dãy lọc chính quy. Đặt $B(I, M) := \ell(M/(x_1, ..., x_d)M)$ và*

$$\mu(I, M) := \max\{h^0(M/(x_1, ..., x_i)M) | 0 \leq i \leq d-1\}.$$

Khi đó

(i) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq B(I, M) + \mu(I, M) + r(\mathbb{M}) - 1$ *nếu* $d = 1$,

(ii) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [B(I, M) + \mu(I, M) + r(\mathbb{M}) + 1]^{3(d-1)!-1} - d$ *nếu* $d \geq 2$.

Chứng minh. Đặt $\overline{M} := M/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$, $\overline{\mathbb{M}} := \mathbb{M}/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$, $B := B(I, M)$, $\mu := \mu(I, M)$ và $r := r(\mathbb{M})$.

Nếu $d = 1$ thì $\overline{M}$ là môđun Cohen-Macaulay. Sử dụng Bổ đề 1.3.1 và Hệ quả 2.1.10 ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}})) = \operatorname{reg}^1(G(\overline{\mathbb{M}})) &\leq e_0(G(\overline{\mathbb{M}})) + r(\overline{\mathbb{M}}) - 1 \\ &\leq e_0(I, M) + r - 1 \leq B + r - 1.\end{aligned}$$

Sử dụng Bổ đề 2.1.11 ta nhận được

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) &\leq \max\{\operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}}));\ r\} + h^0(M) \\ &\leq B + \mu + r - 1.\end{aligned}$$

Cho $d \geq 2$. Đặt $N := \overline{M}/x_1\overline{M}$ và $\mathbb{N} := \overline{\mathbb{M}}/x_1\overline{M}$. Lấy $m \geq \max\{\mathrm{reg}(G(\mathbb{N})), r\}$ tùy ý. Khi đó $\mathrm{reg}^1(G(\overline{\mathbb{M}})/x_1^*G(\overline{\mathbb{M}})) = \mathrm{reg}^1(G(\mathbb{N}))$. Theo Định lý 1.3.4 ta có $\mathrm{reg}^1(G(\overline{\mathbb{M}})) \leq m + P_{G(\overline{\mathbb{M}})}(m)$. Áp dụng Bổ đề 2.1.7 và Bổ đề 2.1.8 ta nhận được

$$\begin{aligned} P_{G(\overline{\mathbb{M}})(m)} \leq H_{I,n}(m) &\leq \binom{m+d-1}{d-1}\ell(N/(x_2, ..., x_d)N) \\ &\leq B\binom{m+d-1}{d-1}. \end{aligned}$$

Vì vậy, theo Bổ đề 2.1.11 ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}(G(\mathbb{M})) &\leq m + h^0(M) + B\binom{m+d-1}{d-1} \\ &\leq m + \mu + B\binom{m+d-1}{d-1}. \qquad (2.9) \end{aligned}$$

Giả sử $d = 2$. Theo giả thiết quy nạp ta có thể lấy $m = B + \mu + r - 1$. Từ đó ta nhận được

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}(G(\mathbb{M})) &\leq m + \mu + B(m+1) = B(m+1) + B + \mu \\ &\leq B(B + \mu + r) + B + \mu \\ &\leq (B + \mu + r + 1)^2 - 1. \end{aligned}$$

Giả sử $d \geq 3$. Khi đó với mọi $m > 1$ ta có

$$m + B\binom{m+d-2}{d-1} < B(m+1)^{d-1}. \qquad (2.10)$$

Theo giả thiết quy nạp ta có thể lấy

$$m = (B + \mu + r + 1)^{3(d-2)!-1} - d + 1 > 1.$$

Sử dụng công thức (2.9) và (2.10) ta nhận được

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}(G(\mathbb{M})) &\leq \mu + B(m+1)^{d-1} - 1 \\ &\leq \mu + B[(B + \mu + r + 1)^{3(d-2)!-1} - d + 2]^{d-1} - 1 \\ &\leq (B + \mu)(B + \mu + r + 1)^{3(d-1)!-(d-1)} - d \\ &\leq (B + \mu + r + 1)^{3(d-1)!-1} - d. \end{aligned}$$

□

CHƯƠNG 3

CHẶN TRÊN THEO HỆ SỐ HILBERT

Mục đích chính của chương này là chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của $G(\mathbb{M})$ theo hệ số Hilbert. Đặc biệt, khi môđun có chiều một, chúng tôi tìm ra được chặn trên chặt và đặc trưng khi nào chặn này đạt được.

3.1 TRƯỜNG HỢP TỔNG QUÁT

Trong mục này, ta luôn xét $R = \oplus_{i\geq 0} R_i$ là vành phân bậc chuẩn Noether với $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ là vành địa phương Artin với trường thặng dư $k := R_0/\mathfrak{m}_0$ vô hạn. Giả sử $E = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} E_n$ là R-môđun phân bậc hữu hạn sinh với $\dim(E) = d$.

Trước hết ta xét trường hợp tổng quát. Kí hiệu $\Delta(E)$ là bậc sinh cực đại của E. Dễ dàng chỉ ra một ví dụ không thể chặn trên $\mathrm{reg}(E)$ theo $\Delta(E), e_0(E), ..., e_{d-1}(E)$. Tuy nhiên trong [5, Theorem 17.2.7] và [42, Theorem 2] đã chỉ ra các bất biến này chặn trên được $\mathrm{reg}^1(E)$. Dưới đây chúng ta nhắc lại kết quả của V. Trivedi, chặn này không phụ thuộc vào số phần tử sinh của E như trong [5]. Phương pháp chứng minh của V. Trivedi chủ yếu dựa vào hình học và chứng minh cho $G_I(M)$. Do vậy để đảm bảo cho việc trình bày ngắn gọn hơn và độc lập hơn, chúng tôi đưa ra một chứng minh mới của kết quả này cho môđun phân bậc E tùy ý hữu hạn sinh bằng cách sử dụng Định lý 1.3.4. Đặt

$$\Delta'(E) := \max\{\Delta(E), 0\}.$$

Ta định nghĩa bằng quy nạp một dãy số nguyên sau: $m_1 := e_0(E) + \Delta'(E)$ và với mọi $i \geq 2$, ta đặt

$$m_i := m_{i-1} + e_0\binom{m_{i-1}+i-2}{i-1} - e_1\binom{m_{i-1}+i-3}{i-2} + \cdots + (-1)^{i-1}e_{i-1}.$$

Khi đó

BỔ ĐỀ 3.1.1. ([42, Theorem 2]) *Giả sử* $d \geq 1$. *Ta có* $\operatorname{reg}^1(E) \leq m_d - 1$.

Chứng minh. Nếu $d = 1$, đặt $\overline{E} := E/H^0_{R_+}(E)$. Khi đó ta có $\operatorname{reg}^1(E) = \operatorname{reg}(\overline{E})$, $\overline{E}$ là môđun Cohen-Macaulay, $\Delta(\overline{E}) \leq \Delta(E)$ và $e(\overline{E}) = e(E)$. Sử dụng Bổ đề 1.3.1 ta thu được

$$\operatorname{reg}^1(E) \leq e(\overline{E}) + \Delta(\overline{E}) - 1 \leq e(E) + \Delta(E) - 1 \leq m_1 - 1.$$

Nếu $d \geq 2$. Giả sử $z \in R_1$ là phần tử E-lọc chính quy, theo giả thiết quy nạp ta có $\operatorname{reg}^1(E/zE) \leq m_{d-1} - 1$, ngoài ra ta cũng có $\Delta(E/zE) \leq m_{d-1} - 1$. Bởi vậy, sử dụng Định lý 1.3.4 ta nhận được $\operatorname{reg}^1(E) \leq (m_{d-1} - 1) + p_E(m_{d-1} - 1) = m_d - 1$. $\square$

Bây giờ chúng tôi đưa ra một chặn tường minh cho $\operatorname{reg}^1(E)$ theo $e_i(E), 0 \leq i \leq d-1$ và $\Delta(E)$. Tuy nhiên chặn này là yếu hơn.

BỔ ĐỀ 3.1.2. *Cho* E *là* R*-môđun hữu hạn sinh chiều* $d \geq 1$. *Đặt* $\xi(M) := \max\{e_0(M), |e_1(M)|, ..., |e_{d-1}(M)|\}$ *và* $\Delta^*(E) := \max\{\Delta(E), 1\}$. *Khi đó*

$$\operatorname{reg}^1(E) \leq (\xi(E) + \Delta^*(E))^{d!} - 1.$$

Chứng minh. Để cho gọn, ta đặt $e_i := e_i(E)$, $\xi := \xi(E)$ và $\Delta^* := \Delta^*(E)$. Theo Bổ đề 3.1.1 chỉ cần chỉ ra rằng $m_d \leq (\xi + \Delta^*)^{d!}$. Hiển nhiên bổ đề đúng với $d = 1$. Theo giả thiết quy nạp ta có thể giả sử

$$m_{d-1} \leq (\xi + \Delta^*)^{(d-1)!} - 1 =: \alpha.$$

Chú ý rằng

$$\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i e_i\binom{\alpha+d-2-i}{d-1-i} \leq \xi\sum_{i=0}^{d-1}\binom{\alpha+d-2-i}{d-1-i} = \xi\binom{\alpha+d-1}{d-1}.$$

Suy ra

$$m_d \leq \alpha + \xi\binom{\alpha+d-1}{d-1}.$$

Giả sử $d = 2$, khi đó ta có thể lấy $\alpha = \xi + \Delta^* - 1$. Từ đó ta nhận được

$$m_d \leq \xi + \Delta^* - 1 + \xi(\xi + \Delta^*) = (\xi + \Delta^*)(\xi + 1) - 1 \leq (\xi + \Delta^*)^2 - 1.$$

Giả sử $d \geq 3$. Áp dụng công thức $\binom{\alpha+d-1}{d-1} \leq (\alpha+1)^{d-1}$ với mọi $\alpha \geq 1$ ta nhận được

$$\begin{aligned} m_d &\leq \alpha + \xi(\alpha+1)^{d-1} \\ &= (\xi + \Delta^*)^{(d-1)!} - 1 + \xi[(\xi + \Delta^*)^{(d-1)!}]^{d-1} \\ &< (\xi + \Delta^*)^{(d-1)!} + (\xi + \Delta^*)^{d!-1} - 1 \\ &< (\xi + \Delta^*)^{d!}(\tfrac{1}{\xi+\Delta^*} + \tfrac{1}{\xi+\Delta^*}) - 1 \\ &< (\xi + \Delta^*)^{d!} - 1. \end{aligned}$$

□

NHẬN XÉT 3.1.3. Theo kết quả trên $\operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M}))$ được chặn bởi $e_0(\mathbb{M}), ...,$ $e_{d-1}(\mathbb{M})$. Theo Hệ quả 2.1.10, nếu $\operatorname{depth}(M) > 0$ thì $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) = \operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M}))$. Suy ra $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ được chặn trên theo $e_i(\mathbb{M})$, $i < d$. Ví dụ sau chỉ ra rằng, nếu $\operatorname{depth}(M) = 0$ thì các đại lượng $e_i(\mathbb{M})$, $i < d$ không đủ để chặn trên được $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$.

VÍ DỤ 3.1.4. Cho $A = k[[x, y]]/(x^2, xy^s)$ với s là số nguyên lớn hơn 1. Khi đó $G_\mathfrak{m}(A) \cong k[x, y]/(x^2, xy^s)$. Ta tính được $\operatorname{reg}(G_\mathfrak{m}(A)) = s$. Vì vậy, $\operatorname{reg}(G_\mathfrak{m}(A))$ thể lớn tuỳ ý trong khi $e_0(A) = 1$.

Mục đính chính tiếp theo của mục này chỉ ra rằng nếu sử dụng thêm $e_d(\mathbb{M})$ chúng tôi có thể chặn được $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$. Trước tiên, ta cần ước lượng độ dài của môđun $H^0_\mathfrak{m}(M)$ theo hệ số Hilbert.

BỔ ĐỀ 3.1.5. [36, Proposition 2.3] *Đặt* $L := H^0_\mathfrak{m}(M)$, $\overline{M} := M/L$ *và* $\overline{\mathbb{M}} := \mathbb{M}/L := \{M/L \supseteq (M_1 + L)/L \supseteq (M_2 + L)/L \supseteq \cdots\}$. *Khi đó với mọi* $n \geq 0$, *ta có*

$$\ell(L) = P_\mathbb{M}(n) - P_{\overline{\mathbb{M}}}(n) = (-1)^d e_d(\mathbb{M}) - (-1)^d e_d(\overline{\mathbb{M}}).$$

Từ kết quả trên, ta có thể chặn trên được $\ell(L)$ như sau:

BỔ ĐỀ 3.1.6. $\ell(L) \leq P_{\mathbb{M}}(n)$ *với mọi* $n \geq \operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}}))$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 1.4.9 ta có $P_{\overline{\mathbb{M}}}(n) = H_{\overline{\mathbb{M}}}(n)$ với mọi $n \geq \operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}}))$. Do đó, sử dụng Bổ đề 3.1.5 ta nhận được

$$\ell(L) = P_{\mathbb{M}}(n) - P_{\overline{\mathbb{M}}}(n) = P_{\mathbb{M}}(n) - H_{\overline{\mathbb{M}}}(n) \leq P_{\mathbb{M}}(n)$$

với mọi $n \geq \operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}}))$. □

Bây giờ ta có thể chứng minh Định lý chính của mục này.

ĐỊNH LÝ 3.1.7. *Cho* $\mathbb{M}$ *là* I*-lọc tốt của môđun* M *chiều* $d \geq 1$. *Đặt* $r'(\mathbb{M}) := \max\{1, r(\mathbb{M})\}$ *và*

$$\xi(\mathbb{M}) := \max\{e_0(\mathbb{M}), |e_1(\mathbb{M})|, ..., |e_d(\mathbb{M})|\}.$$

Khi đó

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq (\xi(\mathbb{M}) + r'(\mathbb{M}))^{d!} + \xi(\mathbb{M})\binom{(\xi(\mathbb{M}) + r'(\mathbb{M}))^{d!} + d}{d} - 1.$$

Chứng minh. Đặt $r := r(\mathbb{M})$, $r' := r'(\mathbb{M})$, $e_i := e_i(\mathbb{M})$ và $L := H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. Theo Hệ quả 2.1.10 ta có $\operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}})) = \operatorname{reg}^1(G(\overline{\mathbb{M}}))$. Áp dụng Bổ đề 2.1.11 ta nhận được

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq \max\{\operatorname{reg}^1(G(\overline{\mathbb{M}})),\ r\} + \ell(L). \tag{3.1}$$

Đặt $\alpha := (\xi + r')^{d!} - 1 \geq r$. Theo Bổ đề 3.1.5 ta có $e_i(G(\overline{\mathbb{M}})) = e_i(\overline{\mathbb{M}}) = e_i$ với mọi $i \leq d-1$. Như nói ở phần trước $G(\overline{\mathbb{M}})$ được sinh bởi các phần tử bậc $\leq r(\mathbb{M})$. Lại có $r(\mathbb{M}) \geq 0$. Vì vậy, từ Bổ đề 3.1.2 dẫn đến $\operatorname{reg}^1(G(\overline{\mathbb{M}})) \leq \alpha$. Sử dụng bất đẳng thức (3.1) và Bổ đề 3.1.6 ta nhận được

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) &\leq \alpha + P_{\mathbb{M}}(\alpha) \leq \alpha + \xi \textstyle\sum_{i=0}^{d} \binom{\alpha+d-i}{d-i} \\ &= \alpha + \xi\binom{\alpha+d+1}{d} = (\xi + r')^{d!} - 1 + \xi\binom{(\xi+r')^{d!}+d}{d}. \end{aligned}$$

□

3.2 Trường hợp chiều một

Cho $R = \oplus_{n\geq 0} R_n$ là vành phân bậc chuẩn trên vành địa phương Artin $(R_0, \mathfrak{m}_0)$ với trường thặng dư $k := R_0/\mathfrak{m}_0$ vô hạn. Cho E là R-môđun hữu hạn sinh chiều d.

Chúng ta biết rằng $h_E(t) = p_E(t)$ với mọi $t \gg 0$. Ta gọi *chỉ số chính quy Hilbert* của E là số

$$p(E) := \max\{t \mid h_E(t) \neq p_E(t)\}.$$

Chuỗi Hilbert-Poincaré của E được xác định bởi công thức

$$HP_E(z) = \sum_{i\geq 0} h_E(i) z^i.$$

Ta có kết quả quen biết sau:

BỔ ĐỀ 3.2.1. (Xem [6, Lemma 4.1.7, Proposition 4.1.9 and Proposition 4.1.12]) *Tồn tại một đa thức $Q_E(z) \in \mathbb{Z}[z]$ sao cho $Q_E(1) \neq 0$ và*

$$HP_E(z) = \frac{Q_E(z)}{(1-z)^d}.$$

Hơn nữa, $p(E) = \deg(Q_E(z)) - d$ và $e_i(E) = \frac{Q_E^{(i)}(1)}{i!}$ với mọi $i \geq 0$.

NHẬN XÉT 3.2.2. Từ công thức Grothendieck-Serre (1.1) ta dễ dàng nhận được

(i) Nếu $\mathrm{depth}(E) = 0$ thì $p(E) \leq \mathrm{reg}(E)$;

(ii) Nếu $\mathrm{depth}(E) > 0$ thì $p(E) \leq \mathrm{reg}(E) - 1$.

Để cho gọn ta đặt $\Delta := \Delta(E)$ và $e := e_0(E)$. Chứng minh của kết quả sau là tương tự của [20, Lemma 4.2].

BỔ ĐỀ 3.2.3. *Giả sử* $\dim(E) = 0$. *Đặt* $q := \sum_{i\leq\Delta} \ell(E_i)$. *Khi đó*

(i) $\mathrm{reg}(E) \leq \Delta + e - q$.

(ii) *Các điều kiện sau là tương đương:*

(a) $\operatorname{reg}(E) = \Delta + e - q$;

(b) $h_E(t) = \begin{cases} 1 & \textit{nếu } \Delta + 1 \leq t \leq \Delta + e - q, \\ 0 & \textit{nếu } \ t \geq \Delta + e - q + 1. \end{cases}$

Chứng minh. (i) Đặt $m := \operatorname{reg}(E)$. Vì $\dim(E) = 0$ nên $m = \max\{t \mid E_t \neq 0\}$. Chú ý rằng $E_i \neq 0$ với mọi $\Delta \leq i \leq m$. Suy ra

$$m \leq \Delta + \ell(E_{\Delta+1} \oplus \cdots \oplus E_m) = \Delta + \ell(E) - q = \Delta + e - q. \tag{3.2}$$

(ii) Áp dụng (3.2) ta thấy $m = \Delta + e - q$ khi và chỉ khi $\ell(E_i) = 1$ với mọi $\Delta + 1 \leq i \leq m$. Sử dụng tính chất $\ell(E_i) = 0$ với mọi $i > m$ ta nhận được (a) tương đương với (b). □

BỔ ĐỀ 3.2.4. *Giả sử E là môđun Cohen-Macalay với $\dim(E) = 1$. Cho $z \in R_1$ là phần tử E-chính quy và $\rho := \ell(E_{\Delta(E/zE)})$. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(E) \leq \Delta + e - \rho$.

(ii) *Các điều kiện sau là tương đương:*

(a) $\operatorname{reg}(E) = \Delta + e - \rho$;

(b) $h_E(t) = \begin{cases} t - \Delta + \rho & \textit{nếu } \Delta + 1 \leq t \leq \Delta + e - \rho - 1, \\ e & \textit{nếu } t \geq \Delta + e - \rho; \end{cases}$

(c) $p(E) = \Delta + e - \rho - 1$.

Chứng minh. (i) Vì $z \in R_1$ là phần tử E-chính quy nên $e(E/zE) = e$, $\operatorname{reg}(E/zE) = \operatorname{reg}(E)$ và

$$\sum_{i \leq t} h_{E/zE}(i) = h_E(t). \tag{3.3}$$

Nói riêng ta có $\sum_{i \leq \Delta(E/zE)} h_{E/zE}(i) = \rho$. Chú ý rằng $\Delta(E/zE) \leq \Delta(E)$. Áp dụng Bổ đề 3.2.3 ta nhận được

$$\operatorname{reg}(E/zE) \leq \Delta(E/zE) + e(E/zE) - \sum_{i \leq \Delta(E/zE)} h_{E/zE}(i) \leq \Delta + e - \rho. \tag{3.4}$$

Suy ra $\operatorname{reg}(E) \leq \Delta + e - \rho$.

(ii) (a) $\Longrightarrow$ (b): Nếu $\operatorname{reg}(E) = \Delta + e - \rho$, sử dụng công thức (3.4) ta có $\Delta(E/zE) = \Delta(E)$ và $\operatorname{reg}(E/zE) = \Delta(E/zE) + e - \rho$. Áp dụng Bổ đề 3.2.3 (ii) và (3.3) ta nhận được (b).

(b) $\Longrightarrow$ (c) suy ra ngay từ Bổ đề 3.2.1.

(c) $\Longrightarrow$ (a): Giả sử rằng $p(E) = \Delta + e - \rho - 1$. Theo Nhận xét 3.2.2 (ii) ta có $\Delta + e - \rho \le \operatorname{reg}(E)$. Kết hợp với $\operatorname{reg}(E) \le \Delta + e - \rho$ ta nhận được $\operatorname{reg}(E) = \Delta + e - \rho$. □

BỔ ĐỀ 3.2.5. [36, Proposition 2.7] *Cho M là môđun Cohen-Macaulay chiều một và b là một số nguyên dương thỏa mãn $IM \subseteq \mathfrak{m}^b M$. Khi đó*

(i) $h_{I,M}(n) \ge n + b$ *với mọi* $n \le p(G_I(M)) + 1$,

(ii) $p(G_I(M)) \le e_0(I, M) - b - 1$.

Để cho gọn ta đặt $HP_{I,M}(z) := HP_{G_I(M)}(z)$ và $e_i := e_i(I, M)$ với mọi $i = 1, ..., d$. Giả sử rằng M là môđun Cohen-Macaulay. Kirby-Mehran [25] đã chỉ ra rằng $e_1 \le \binom{e_0}{2}$. Kết quả này được Rossi-Valla [36] cải tiến như bổ đề dưới đây. Chú ý rằng (i) được nêu rõ trong [36], nhưng (ii) không được nêu ra một cách tường minh.

BỔ ĐỀ 3.2.6. [36, Proposition 2.8] *Cho M là môđun Cohen-Macaulay chiều một và b là một số nguyên dương thỏa mãn $IM \subseteq \mathfrak{m}^b M$. Khi đó*

(i) $e_1 \le \binom{e_0 - b + 1}{2}$.

(ii) *Các điều kiện sau là tương đương:*

(a) $e_1 = \binom{e_0 - b + 1}{2}$;

(b) $HP_{I,M}(z) = \frac{b + \sum_{i=1}^{e_0 - b} z^i}{1 - z}$.

Chứng minh. (i) Chứng minh dưới đây đưa ra trong [36, Proposition 2.8]. Chúng tôi nêu lại ở đây để chứng minh (ii). Từ công thức (1.2) ta có $H_{I,M}(n) = (n + 1)e_0 + e_1$ với $n \gg 0$. Do đó $e_1 = \sum_{j \ge 0}(e_0 - h_{I,M}(j)) =$

$\sum_{j=0}^{p(G_I(M))+1}(e_0 - h_{I,M}(j))$. Sử dụng Bổ đề 3.2.5 ta được

$$e_1 \leq \sum_{j=0}^{e_0-b}(e_0 - (j+b)) = \binom{e_0 - b + 1}{2}. \tag{3.5}$$

(ii) (a) $\Longrightarrow$ (b): Theo giả thiết (3.5) là đẳng thức, suy ra $h_{I,M}(n) = n+b$ với mọi $0 \leq n \leq e_0 - b$ và $h_{I,M}(n) = e_0$ với mọi $n \geq e_0 - b + 1$. Vì vậy ta nhận được $HP_{I,M}(z) = \frac{b+\sum_{i=1}^{e_0-b} z^i}{1-z}$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Sử dụng Bổ đề 3.2.1 ta nhận được $e_1 = \sum_{i=1}^{e_0-b} i = \binom{e_0-b+1}{2}$.

$\square$

NHẬN XÉT 3.2.7. (i) Nếu $e_1 = \binom{e_0-b+1}{2}$ thì từ (i) của bổ đề trên dẫn đến $b = \max\{t \mid IM \subseteq \mathfrak{m}^t M\}$.

(ii) Nếu $I = \mathfrak{m}$ và $M = A$ thì $b = 1$ và Bổ đề 3.2.6 (ii) chính là [18, Proposition 2.13] và [19, Theorem 3.1].

Đặt $\overline{G_I(M)} := G_I(M)/H^0_{G_+}(G_I(M))$.

BỔ ĐỀ 3.2.8. *Giả sử* $\dim(M) = 1$ *và* b *là một số nguyên dương thỏa mãn* $IM \subseteq \mathfrak{m}^b M$. *Khi đó*

$$h_{\overline{G_I(M)}}(0) \geq b.$$

Chứng minh. Chú ý rằng

$$[H^0_{G_+}(G_I(M))]_0 = \frac{T_0}{IM},$$

trong đó $T_0 = \cup_{n>0}(I^{n+1}M : I^n) = I^{t+1}M : I^t \subseteq M$ với $t \gg 0$. Nhận xét rằng $IM \subseteq T_0$. Đặt $\widetilde{M} := M/T_0$. Giả sử

$$\mathfrak{m}^{b-1}\widetilde{M} = \mathfrak{m}^b\widetilde{M}.$$

Áp dụng Bổ đề Nakayama ta nhận được $\mathfrak{m}^{b-1}\widetilde{M} = 0$. Tức là $\mathfrak{m}^{b-1}M \subseteq T_0$. Khi đó $\mathfrak{m}^{b-1}I^tM \subseteq I^{t+1}M$. Vì $IM \subseteq \mathfrak{m}^bM$, nên

$$I^{t+1}M \subseteq \mathfrak{m}^b I^t M \subseteq \mathfrak{m}I^{t+1}M \subseteq I^{t+1}M.$$

Suy ra $I^{t+1}M = \mathfrak{m}I^{t+1}M$. Áp dụng Bổ đề Nakayama ta nhận được $I^{t+1}M = 0$. Dẫn đến $\dim(M) \leq 0$. Điều này là vô lý. Do đó $\mathfrak{m}^{b-1}\widetilde{M} \neq \mathfrak{m}^b\widetilde{M}$ và ta có một dãy giảm chặt các môđun con của $\widetilde{M}$:

$$\widetilde{M} \supset \mathfrak{m}\widetilde{M} \supset \cdots \supset \mathfrak{m}^b\widetilde{M}.$$

Vì $\overline{G_I(M)}_0 = \widetilde{M}$, nên ta có

$$h_{\overline{G_I(M)}}(0) = \ell(\widetilde{M}) \geq \ell(\widetilde{M}/\mathfrak{m}^b\widetilde{M}) \geq b.$$

□

Bây giờ ta đưa ra các kết quả chính của mục này.

MỆNH ĐỀ 3.2.9. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay chiều một và b là số nguyên lớn nhất thỏa mãn $IM \subseteq \mathfrak{m}^bM$. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(G_I(M)) \leq e_0 - b.$$

Chứng minh. Theo giả thiết ta có $\operatorname{depth}(M) > 0$. Áp dụng Hệ quả 2.1.10 ta thu được

$$\operatorname{reg}(G_I(M)) = \operatorname{reg}^1(G_I(M)) = \operatorname{reg}(\overline{G_I(M)}).$$

Vì $\dim(M) = 1$, nên $\overline{G_I(M)}$ là môđun Cohen-Macaulay. Giả sử $x^* \in I/I^2$ là một phần tử $\overline{G_I(M)}$-chính quy. Bởi vì $G_I(M)$ được sinh bởi các phần tử bậc 0 nên $\Delta(\overline{G_I(M)}/x^*\overline{G_I(M)}) = 0$. Sử dụng Bổ đề 3.2.4 (i) và Bổ đề 3.2.8 ta nhận được

$$\operatorname{reg}(\overline{G_I(M)}) \leq e_0 - h_{\overline{G_I(M)}}(0) \leq e_0 - b. \tag{3.6}$$

□

NHẬN XÉT 3.2.10. Cho M là A-môđun Cohen-Macaulay với $\dim(M) = 1$. C. H. Linh [26, Corollary 4.5 (i)] đã chứng minh rằng $\operatorname{reg}(G_I(M)) \leq e_0 - 1$. Vì vậy, nếu $b > 1$ thì kết quả trên cho ta chặn tốt hơn.

ĐỊNH LÝ 3.2.11. *Cho M là môđun chiều một và b là số nguyên lớn nhất thỏa mãn $IM \subseteq \mathfrak{m}^b M$. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(G_I(M)) \leq \binom{e_0 - b + 2}{2} - e_1 - 1.$$

Chứng minh. Đặt $L := H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. Áp dụng Bổ đề 2.1.11 ta có

$$\operatorname{reg}(G_I(M)) \leq \operatorname{reg}(G_I(\overline{M})) + \ell(L).$$

Sử dụng Bổ đề 3.1.5 ta nhận được $\ell(L) = \overline{e}_1 - e_1$ và $\overline{e}_0 = e_0$, trong đó $\overline{e}_0 := e_0(I, \overline{M})$ và $\overline{e}_1 := e_1(I, \overline{M})$. Chú ý rằng $IM \subseteq \mathfrak{m}^b M$. Suy ra $I\overline{M} \subseteq \mathfrak{m}^b \overline{M}$. Vì $\overline{M}$ là môđun Cohen-Macaulay, nên Bổ đề 3.2.6 (i) chỉ ra rằng $\overline{e}_1 \leq \binom{e_0 - b + 1}{2}$. Từ đó dẫn đến

$$\ell(L) \leq \binom{e_0 - b + 1}{2} - e_1.$$

Sử dụng Mệnh đề 3.2.9 ta được $\operatorname{reg}(G_I(\overline{M})) \leq e_0 - b$. Suy ra

$$\operatorname{reg}(G_I(M)) \leq e_0 - b + \binom{e_0 - b + 1}{2} - e_1 = \binom{e_0 - b + 2}{2} - e_1 - 1.$$

□

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra một số đặc trưng để đẳng thức trong Định lý 3.2.11 xảy ra. Từ công thức Grothendieck-Serre (1.1) và Bổ đề 2.1.9 ta nhận được

BỔ ĐỀ 3.2.12. *Giả sử* $\operatorname{depth}(M) > 0$. *Khi đó*

$$p(G_I(M)) \leq \operatorname{reg}(G_I(M)) - 1.$$

BỔ ĐỀ 3.2.13. *Giả sử M là môđun với* $\dim(M) \geq 1$. *Cho $L := H^0_{\mathfrak{m}}(M)$ và $\overline{M} := M/L$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $\operatorname{reg}(G_I(M)) = \operatorname{reg}(G_I(\overline{M})) + \ell(L)$;

(ii) $HP_K(z) = \sum_{\operatorname{reg}(G_I(\overline{M}))+1}^{\operatorname{reg}(G_I(\overline{M}))+\ell(L)} z^i$, *trong đó* $K := \oplus_{n \geq 0} \frac{I^{n+1}M + L \cap I^n M}{I^{n+1}M}$.

Chứng minh. Ta có $\ell(K) = \ell(L)$. Vì vậy, nếu $L = 0$ thì bổ đề hiển nhiên đúng. Giả sử $L \neq 0$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Đặt $a := \operatorname{reg}(G_I(\overline{M}))$ và $m := \max\{t \mid K_t \neq 0\}$. $K_t \neq 0$ với mọi $a + 1 \leq t \leq m$ đã được chỉ ra trong chứng minh của Bổ đề 2.1.11. Sử dụng Bổ đề 1.1.5 (ii) ta thu được

$$\begin{aligned} a + \ell(L) = \operatorname{reg}(G_I(\overline{M})) + \ell(L) &= \operatorname{reg}(G_I(M)) \leq \max\{a, m\} \\ &= a + \max\{0, m - a\} \leq a + \ell(K) = a + \ell(L). \end{aligned}$$

Dẫn đến $\ell(K) = m - a$. Vì vậy, $\ell(K_t) = 1$ với $a+1 \leq t \leq m$ và $\ell(K_t) = 0$ với các giá trị khác.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Chú ý rằng $\dim(K) = 0$, $\operatorname{reg}(K) = \operatorname{reg}(G_I(\overline{M})) + \ell(L)$. Áp dụng Bổ đề 1.1.5 (ii) ta nhận được

$$\operatorname{reg}(G_I(M)) = \max\{\operatorname{reg}(K), \operatorname{reg}(G_I(\overline{M}))\} = \operatorname{reg}(G_I(\overline{M})) + \ell(L).$$

□

Một kết quả chính khác sau đây chỉ ra rằng từ đẳng thức $e_1 = \binom{e_0-b+1}{2}$ suy ra được $G_I(M)$ là môđun Cohen-Macaulay. Khẳng định này đã được Elias-Valla (xem [18, Proposition 2.13]) chỉ ra trong trường hợp $I = \mathfrak{m}$ và $M = A$.

ĐỊNH LÝ 3.2.14. *Cho M là môđun Cohen-Macaulay chiều một và b là số nguyên thỏa mãn $IM \subseteq \mathfrak{m}^b M$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $\operatorname{reg}(G_I(M)) = \binom{e_0-b+2}{2} - e_1 - 1$;

(ii) $HP_{I,M}(z) = \frac{b+\sum_{i=1}^{e_0-b} z^i}{1-z}$;

(iii) $e_1 = \binom{e_0-b+1}{2}$;

(iv) $\operatorname{reg}(G_I(M)) = e_0 - b$ *và* $G_I(M)$ *là môđun Cohen-Macaulay.*

Hơn nữa, nếu một trong các điều kiện của định lý đúng thì $b = \max\{t \mid IM \subseteq m^t M\}$.

Chứng minh. Mệnh đề cuối cùng suy từ Nhận xét 3.2.7 (i).

(ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) là kết quả của Rossi-Valla (xem Lemma 3.2.6 (ii)).

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Từ giả thiết M là môđun Cohen-Macaulay, theo Mệnh đề 3.2.9 ta có $\operatorname{reg}(G_I(M)) \leq e_0 - b$. Do đó $\binom{e_0-b+2}{2} - e_1 - 1 \leq e_0 - b$, nghĩa là $e_1 \geq \binom{e_0-b+1}{2}$. Sử dụng Bổ đề 3.2.6 (i) ta nhận được $e_1 = \binom{e_0-b+1}{2}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iv): Chú ý rằng ta luôn có $e_0 \geq b$. Theo Nhận xét 3.2.1 (ii) ta thấy $p(G_I(M)) = e_0 - b - 1$. Sử dụng Bổ đề 3.2.12 ta nhận được $e_0 - b \leq \operatorname{reg}(G_I(M))$. Kết hợp với Mệnh đề 3.2.9 ta thu được $\operatorname{reg}(G_I(M)) = e_0 - b$.

Theo Bổ đề 3.2.8 ta có $\operatorname{reg}(G_I(M)) = \operatorname{reg}(\overline{G_I(M)}) = e_0 - b$. Do vậy từ công thức (3.6) suy ra $h_{\overline{G_I(M)}}(0) = b$. Khi đó áp dụng Bổ đề 3.2.4 (ii) ta có

$$h_{\overline{G_I(M)}}(t) = \begin{cases} b & \text{nếu } t = 0, \\ t + b & \text{nếu } 1 \leq t \leq e_0 - b - 1, \\ e_0 & \text{nếu } t \geq e_0 - b. \end{cases}$$

Dẫn đến

$$HP_{\overline{G_I(M)}}(z) = \frac{b + \sum_{i=1}^{e_0-b} z^i}{1-z} = HP_{I,M}(z).$$

Suy ra $G_I(M) = \overline{G_I(M)}$. Do vậy $G_I(M)$ là môđun Cohen-Macaulay.

(iv) $\Longrightarrow$ (i): Từ $G_I(M)$ là môđun Cohen-Macaulay và $\operatorname{reg}(G_I(M)) = e_0 - b$. Sử dụng Bổ đề 3.2.4 (ii) ta nhận được $HP_{I,M}(z) = \frac{b+\sum_{i=1}^{e_0-b} z^i}{1-z}$. Vì (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii), nên $\binom{e_0-b+1}{2} = e_1$. Do đó

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(G_I(M)) = e - b &= e - b + \binom{e_0-b+1}{2} - e_1 \\ &= \binom{e_0-b+2}{2} - e_1 - 1. \end{aligned}$$

$\square$

Ví dụ sau chỉ ra rằng giả thiết $G_I(M)$ là môđun Cohen-Macaulay trong mệnh đề (iv) của định lý trên không thể bỏ đi được.

VÍ DỤ 3.2.15. Cho $A = k[[t^3, t^4, t^5]] \cong k[[x, y, z]]/(x^3 - yz, xz - y^2, x^2y - z^2)$, trong đó k là một trường và $I = (t^3, t^4)$. Ta có $b = 1$. Sử dụng chương trình CoCoA [8] ta tính được $HP_{I,A}(z) = \frac{2+z^2}{1-z}$. Suy ra $e_0 = 3$ và $e_1 = 2$. Theo Bổ đề 3.2.1 ta có $p(G_I(A)) = 1$. Vì vậy, sử dụng Bổ đề 3.2.12 ta nhận được

$\operatorname{reg}(G_I(A)) \geq 2$. Theo Mệnh đề 3.2.9 ta có $\operatorname{reg}(G_I(A)) \leq e_0 - b = 2$. Từ điều này dẫn đến $\operatorname{reg}(G_I(A)) = e_0 - b = 2$. Tuy nhiên $2 = e_1 \neq \binom{e_0-b+1}{2} = 3$. Áp dụng Định lý 3.2.14 ta thấy rằng $G_I(A)$ trong ví dụ này không thể là vành Cohen-Macaulay.

ĐỊNH LÝ 3.2.16. *Giả sử M là môđun chiều một và $\operatorname{depth}(M) = 0$. Cho b là một số nguyên dương thỏa mãn $IM \subseteq \mathfrak{m}^b M$. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:*

(i) $\operatorname{reg}(G_I(M)) = \binom{e_0-b+2}{2} - e_1 - 1$;

(ii) $HP_{I,M}(z) = \frac{b+\sum_{i=1}^{e_0-b+1} z^i - z^{\binom{e_0-b+2}{2}-e_1}}{1-z}$.

Hơn nữa, nếu một trong các điều kiện của định lý đúng thì $b = \max\{t \mid IM \subseteq m^t M\}$.

Chứng minh. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Để cho gọn ta đặt $\overline{M} := M/L$, $\overline{e}_0 := e_0(I, \overline{M}) = e_0$ và $\overline{e}_1 := e_1(I, \overline{M})$, trong đó $L := H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. Phân tích chứng minh của Định lý 3.2.11 và kết hợp với đẳng thức trong (i) suy ra

$$\operatorname{reg}(G_I(\overline{M})) = e_0 - b, \tag{3.7}$$

$$\overline{e}_1 = \binom{e_0 - b + 1}{2}, \tag{3.8}$$

và

$$\operatorname{reg}(G_I(M)) = \operatorname{reg}(G_I(\overline{M})) + \ell(L). \tag{3.9}$$

Theo Bổ đề 3.1.5 và đẳng thức (3.8) ta nhận được

$$\ell(L) = \overline{e}_1 - e_1 = \binom{e_0 - b + 1}{2} - e_1. \tag{3.10}$$

Sử dụng Bổ đề 3.2.13 và đẳng thức (3.9) ta thu được

$$HP_K(z) = \sum_{\operatorname{reg}(G_I(\overline{M}))+1}^{\operatorname{reg}(G_I(\overline{M}))+\ell(L)} z^i, \tag{3.11}$$

trong đó $K = \oplus_{n\geq 0}\frac{I^{n+1}M+L\cap I^nM}{I^{n+1}M}$. Kết hợp các đẳng thức (3.7), (3.8) và (3.11) suy ra

$$HP_K(z) = \sum_{e_0-b+1}^{\binom{e_0-b+2}{2}-e_1-1} z^i.$$

Sử dụng Bổ đề 3.2.6 (ii) và đẳng thức (3.7) ta có

$$HP_{I,\overline{M}}(z) = \frac{b+\sum_{i=1}^{e_0-b} z^i}{1-z}.$$

Vì vậy, từ dãy khớp ngắn (2.2) ta nhận được

$$HP_{I,M}(z) = HP_{I,\overline{M}}(z) + HP_K(z) = \frac{b+\sum_{i=1}^{e_0-b+1} z^i - z^{\binom{e_0-b+2}{2}-e_1}}{1-z}.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sử dụng Bổ đề 3.2.6 (i) ta nhận được $\binom{e_0-b+2}{2}-e_1 > e_0-b+1$. Áp dụng Bổ đề 3.2.1 ta có $p(G_I(M)) = \binom{e_0-b+2}{2} - e_1 - 1$. Theo Nhận xét 3.2.2 (i) ta có

$$\binom{e_0-b+2}{2} - e_1 - 1 \leq \operatorname{reg}(G_I(M)).$$

Do đó, sử dụng Định lý 3.2.11 ta thu được $\operatorname{reg}(G_I(M)) = \binom{e_0-b+2}{2} - e_1 - 1$.

Ta thấy rằng đẳng thức (3.8) đúng. Do đó, theo Nhận xét 3.2.7 (i) ta có $I\overline{M} \nsubseteq \mathfrak{m}^{b+1}\overline{M}$. Điều này dẫn đến $IM \nsubseteq \mathfrak{m}^{b+1}M$. Vì vậy ta phải có $b = \max\{t \mid IM \subseteq \mathfrak{m}^tM\}$. □

Các ví dụ sau chỉ ra chặn trên trong Định lý 3.2.11 là chặn chặt.

VÍ DỤ 3.2.17. Cho $A = k[[x]]$ và $I = (x^\alpha)$. Khi đó, ta có $b = \alpha$ và $HP_{I,A}(z) = \frac{\alpha}{1-z}$. Vì vậy $e_0 = \alpha$ và $e_1 = 0$. Dẫn đến $e_1 = \binom{e_0-b+1}{2}$.

VÍ DỤ 3.2.18. Cho $A = k[[x,y]]/(x^sy^{u+v}, x^{s+1}y^u)$, trong đó $s,u,v \in \mathbb{N}$ và $v > 0$. Khi đó ta có $G_\mathfrak{m}(A) \cong k[x,y]/(x^sy^{u+v}, x^{s+1}y^u)$ và $b = 1$.Vì vậy ta suy ra được

$$HP_{\mathfrak{m},A}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{s+u} z^i - z^{s+u+v}}{1-z}, e_0 = s+u, e_1 = \frac{(s+u)(s+u-1)}{2} - v,$$

và $\operatorname{reg}(G_\mathfrak{m}(A)) = s+u+v-1$. Các đẳng thức này chỉ ra rằng tất các điều kiện trong Định lý 3.2.16 đúng.

CHƯƠNG 4

CHẶN TRÊN TRONG TRƯỜNG HỢP NÓN PHÂN THỚ

Mục đích chính của chương này là đưa ra chặn trên cho hệ số Hilbert và cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của nón phân thớ theo bậc mở rộng.

4.1 NÓN PHÂN THỚ

Trong mục này, ta luôn giả sử $\mathfrak{q}$ là một iđêan tuỳ ý chứa I.

ĐỊNH NGHĨA 4.1.1. (Xem [36, Chapter 5]) *Nón phân thớ* của $\mathbb{M}$ ứng với $\mathfrak{q}$ được xác định bởi công thức

$$F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}) := \oplus_{n \geq 0} M_n/\mathfrak{q}M_n.$$

Nếu $\mathbb{M}$ là lọc I-adic của A và $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}$ thì đây là nón phân thớ cổ điển

$$F_{\mathfrak{m}}(I) = \oplus_{n \geq 0} I^n/\mathfrak{m}I^n$$

của I.

Chú ý rằng $F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})$ là môđun phân bậc trên $G := G_I(A)$.

ĐỊNH NGHĨA 4.1.2. ([5, Section 18.2] hoặc [36, Chapter 5])
Độ trải giải tích của iđêan I ứng với lọc $\mathbb{M}$ là chiều của $(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))$.
Độ trải giải tích của iđêan I là chiều của $F_{\mathfrak{m}}(I)$.

Từ đó ta xác định được chiều của nón phân thớ.

BỔ ĐỀ 4.1.3. (Xem [5, Section 18.2] hoặc [36, Chapter 5]) Đặt

$$\ell(I) := \min\{\mu(J) | J \text{ là một rút gọn tối tiểu của } I \text{ ứng với lọc } \mathbb{M}\},$$

trong đó $\mu(J)$ là số phần tử sinh của iđêan J. Khi đó

$$\dim(\mathcal{F}_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) = \ell(I).$$

Theo Bổ đề 1.4.10 ta có chiều của nón phân thớ trong trường hợp iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ I chính là chiều của môđun lọc ban đầu.

HỆ QUẢ 4.1.4. ([36, Chapter 5])

$$\dim(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) = \dim(M).$$

Như trong Chương 1, với $n \gg 0$ thì $\ell(M_n/\mathfrak{q}M_n)$ là một đa thức và ta gọi là đa thức Hilbert của nón phân thớ $F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})$. Nó được viết duy nhất dưới dạng

$$p_{F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})}(n) = \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i e_i(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))\binom{n+d-i-1}{d-i-1}.$$

Khi đó, các hệ số $e_i(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))$ với $0 \leq i \leq d-1$ gọi là hệ số Hilbert của nón phân thớ $F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})$.

4.2 CHẶN TRÊN HỆ SỐ HILBERT CỦA NÓN PHÂN THỚ

Trong mục này, chúng tôi đưa ra một I-lọc mới

$$\mathfrak{q}\mathbb{M}: \ M \supseteq \mathfrak{q}M \supseteq \mathfrak{q}M_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{q}M_n \supseteq \cdots.$$

Nếu $\mathbb{M}$ là một I-lọc tốt thì $\mathfrak{q}\mathbb{M}$ cũng là một I-lọc tốt. Mối liên hệ giữa hệ số Hilbert của nón phân thớ với hệ số Hilbert của lọc $\mathbb{M}$ và $\mathfrak{q}\mathbb{M}$ như sau:

BỔ ĐỀ 4.2.1. ([36], xem tr. 80) *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d \geq 1$, $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là một I-lọc tốt của M. Giả sử $I \subseteq \mathfrak{q}$ và $M_{n+1} \subseteq \mathfrak{q}M_n$ với mọi $n \geq 0$. Khi đó*

(i) $e_0(\mathbb{M}) = e_0(\mathfrak{q}\mathbb{M})$,

(ii) $e_{i-1}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) = e_i(\mathbb{M}) + e_{i-1}(\mathbb{M}) - e_i(\mathfrak{q}\mathbb{M})$, *với mọi* $1 \leq i \leq d$.

Ngoài ra ta có:

BỔ ĐỀ 4.2.2. [36, proposition 1.2] *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh với* $\dim(M) = d \geq 1$, $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ *là một I-lọc tốt của M. Giả sử $x \in I\mathfrak{q}I$ sao cho phần tử khởi đầu $x^* \in G_I(A)$ là phần tử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Khi đó*

(i) $\dim(M/xM) = d - 1$,

(ii) $e_j(\mathbb{M}) = e_j(\mathbb{M}/xM)$ *với mọi* $j = 0, ..., d-2$,

(iii) $e_{d-1}(\mathbb{M}/xM) = e_{d-1}(\mathbb{M}) + (-1)^{d-1}\ell(0 :_M x)$.

Tiếp theo ta cần ước lượng được hệ số Hilbert của lọc $\mathbb{M}$ và trong trường hợp đặc biệt là lọc $\mathfrak{q}M$. Vấn đề này đã được giải quyết trong trường hợp $\mathfrak{m}$-adic của một vành (xem [37, Theorem 4.1]) và được mở rộng cho môđun (xem [27, Theorem 2.1]). Tuy nhiên, phép chứng minh của [27, Theorem 2.1] trong trường hợp $d = 1$ sử dụng bất đẳng thức sai: $|(e+1)e(I, M) - \ell(M/I^{r+1}M)| \leq |(e+1)e(I, M) - (r+1)|$. Vì vậy, chúng tôi đưa ra phép chứng minh chi tiết của kết quả sau và kết quả này không chỉ tổng quát hơn mà nói chung tốt hơn [27, Theorem 2.1].

ĐỊNH LÝ 4.2.3. *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh với* $\dim(M) = d \geq 1$, $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ *là I-lọc tốt của M và $D(I, M)$ là một bậc mở rộng tùy ý của M ứng với I. Khi đó*

(i) $e_0(\mathbb{M}) = e(I, M) \leq D(I, M)$,

(ii) $|e_1(\mathbb{M})| \leq (D(I, M) + r(\mathbb{M}) - 1)D(I, M)$,

(iii) $|e_i(\mathbb{M})| \leq (D(I, M) + r(\mathbb{M}) + 1)^{3i!-i+1}$ *nếu* $i \geq 2$.

Chứng minh. (i): Theo Nhận xét 1.4.8 ta có $e_0(\mathbb{M}) = e(I, M)$. Sử dụng Định nghĩa 2.1.2 ta nhận được $e(I, M) \leq D(I, M)$.

(ii)-(iii): Theo Bổ đề 1.4.9 ta có $h_{G(\mathbb{M})}(n) = p_{G(\mathbb{M})}(n)$ với mọi $n \geq \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$. Vì vậy

$$\ell(M/M_{m+1}) = \sum_{i=0}^{d}(-1)^i e_i(\mathbb{M})\binom{m+d-i}{d-i} \tag{4.1}$$

với mọi $m \geq \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$. Để cho gọn ta đặt $r := r(\mathbb{M})$, $D := D(I, M)$ và $e_i := e_i(\mathbb{M})$.

Giả sử $d = 1$. Đặt $m := D + r - 1$. Sử dụng Định lý 2.1.4 (i) và đẳng thức (4.1) ta đạt được

$$e_1 = (D + r)e_0 - \ell(M/M_{D+r}).$$

Do $M_n = I^{n-r}M_r$ với $n \geq r$ và $M_r \neq 0$ nên

$$\ell(M/M_{D+r}) \geq \ell(M_r/IM_r) + \cdots + \ell(I^{D-1}M_r/I^D M_r) \geq D.$$

Sử dụng đẳng thức trước đó, điều này dẫn đến

$$e_1 \leq (D + r)e_0 - D \leq D(D + r) - D = D(D + r - 1).$$

Mặt khác, với $r \geq 0$, áp dụng Bổ đề 2.1.8 (ii) ta nhận được

$$-e_1 = -(D+r)e_0 + \ell(M/M_{D+r}) \leq D(D+r) - (D+r) \leq D(D+r-1).$$

Như vậy $|e_1| \leq D(D + r - 1)$ và trường hợp $d = 1$ được chứng minh xong.

Cho $d \geq 2$. Đầu tiên ta giả sử $\operatorname{depth}(M) > 0$. Chọn $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ sao cho $x^* \in G$ là một phần tử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Theo Bổ đề 4.2.2 ta có $e_i = e_i(\mathbb{M}/xM)$ với mọi $i < d$. Chú ý rằng $0 \leq r(\mathbb{M}/xM) \leq r$ và $D(I, M/xM) \leq D$ (theo Định nghĩa 2.1.2 (ii)). Sử dụng giả thiết quy nạp ta nhận được

$$|e_1| \leq D(D+r-1) \;\text{ và }\; |e_i| \leq (D+r+1)^{3i!-i+1} \text{ với } 2 \leq i \leq d-1. \quad (4.2)$$

Để chứng minh bất đẳng thức với e_d ta đặt $\mu := (D + r + 1)^{3(d-1)!-1}$. Sử dụng Định lý 2.1.4 ta nhận được $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq \mu - d$. Bên cạnh đó $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \geq r \geq 0$ và $\mu \geq d$. Đặt $m := \mu - d$. Khi đó áp dụng đẳng thức

(4.1) ta thu được

$$\begin{aligned}
|e_d| &= |(\ell(M/M_{\mu-d+1}) - e_0\binom{\mu-d+d}{d}) + \sum_{i=1}^{d}(-1)^i e_i\binom{\mu-d+d-i}{d-i}| \\
&\le |\ell(M/M_{\mu-d+1}) - e_0\binom{\mu}{d}| + \sum_{i=1}^{d-1}|e_i|\binom{\mu-i}{d-i} \\
&\le \max\{\ell(M/M_{\mu-d+1}),\ e_0\binom{\mu}{d}\} + \sum_{i=1}^{d-1}|e_i|\binom{\mu-i}{d-i}. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Chú ý rằng $\binom{\mu}{d} \le \mu^d$. Sử dụng (i) và Bổ đề 2.1.8 (ii) ta đạt được

$$\max\{\ell(M/M_{\mu-d+1}),\ e_0\binom{\mu}{d}\} \le D\mu^d. \qquad (4.4)$$

Hơn nữa, áp dụng bất đẳng thức (4.2) ta có

$$|e_1|\binom{\mu-1}{d-1} \le D(D+r-1)\mu^{d-1} \qquad (4.5)$$

và

$$\sum_{i=2}^{d-1}|e_i|\binom{\mu-i}{d-i} \le \sum_{i=2}^{d-1}(D+r+1)^{3i!-i+1}\mu^{d-i} \le \mu^{d-1}\sum_{i=0}^{d-2}\frac{1}{2^i} < 2\mu^{d-1}. \quad (4.6)$$

Chú ý rằng $D(D+r-1)+2 < (D+r+1)^2 \le \mu$. Khi đó áp dụng các công thức (4.3) - (4.6) ta nhận được

$$|e_d| \le D\mu^d + \mu^d = (D+1)(D+r+1)^{3d!-d} \le (D+r+1)^{3d!-d+1}.$$

Cuối cùng giả sử rằng $\operatorname{depth}(M) = 0$. Đặt $L := H^0_{\mathfrak{m}}(M)$, $\bar{M} := M/L$ và $\overline{\mathbb{M}} := \mathbb{M}/L$. Khi đó

$$\ell(\frac{M}{M_{n+1}}) = \ell(\frac{M}{M_{n+1}+L}) + \ell(\frac{M_{n+1}+L}{M_{n+1}}) = \ell(\frac{M}{M_{n+1}+L}) + \ell(\frac{L}{L\cap M_{n+1}}).$$

Với $n \gg 0$, sử dụng $\mathbb{M}$ là I-lọc tốt và Bổ đề 1.4.2 ta có $L \cap M_{n+1} = 0$. Suy ra

$$\ell(\frac{M}{M_{n+1}}) = \ell(\frac{M}{M_{n+1}+L}) + \ell(L) \text{ với } n \gg 0.$$

Điều này dẫn đến $e_i = e_i(\overline{\mathbb{M}})$ với $i \leq d-1$ và $e_d = e_d(\overline{\mathbb{M}}) + (-1)^d \ell(L)$. Do $D = D(I, \bar{M}) + \ell(L)$ và $r(\overline{\mathbb{M}}) \leq r$ nên

$$\begin{aligned}
|e_1| &= e_1(\overline{\mathbb{M}}) \leq D(I,\bar{M})(D(I,\bar{M}) + r - 1) \leq D(D+r-1) \\
|e_i| &= e_i(\overline{\mathbb{M}}) \leq (D(I,\bar{M}) + r + 1)^{3i!-i+1} \\
&\leq (D+r+1)^{3i!-i+1} \text{ với } 2 \leq i \leq d-1, \\
|e_d| &\leq e_d(\overline{\mathbb{M}}) + \ell(L) \leq (D(I,\bar{M}) + r + 1)^{3d!-id+1} + \ell(L) \\
&\leq (D+r+1)^{3d!-d+1}.
\end{aligned}$$

□

Từ đó ta có thể chặn được hệ số Hilbert của nón phân thớ qua bậc mở rộng, chiều và số rút gọn. Kết quả này cần thiết cho chứng minh kết quả chính của mục sau.

ĐỊNH LÝ 4.2.4. *Với giả thiết như trong Bổ đề 4.2.1, ta có*

(i) $e_0(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq 2D(I,M)(D(I,M) + r(\mathbb{M}))$,

(ii) $|e_i(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))| \leq 2(D(I,M) + r(\mathbb{M}) + 2)^{3(i+1)!-i}$ *nếu* $1 \leq i \leq d-1$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 4.2.1 ta có

$$e_i(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) = e_i(\mathbb{M}) + e_{i+1}(\mathbb{M}) - e_{i+1}(\mathfrak{q}\mathbb{M}),$$

với mọi $0 \leq i \leq d-1$. Đặt $r := r(\mathbb{M})$. Khi đó $r(\mathfrak{q}M) \leq r+1$. Sử dụng Định lý 4.2.3 ta nhận được

$$\begin{aligned}
e_0(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) &\leq |e_0(\mathbb{M})| + |e_1(\mathbb{M})| + |e_1(\mathfrak{q}\mathbb{M})| \\
&\leq D + D(D+r-1) + D(D+r) = 2D(D+r),
\end{aligned}$$

trong đó $D = D(I,M)$. Với $1 \leq i \leq d-1$ ta cũng có

$$\begin{aligned}
|e_i(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))| &\leq |e_i(\mathbb{M})| + |e_{i+1}(\mathbb{M})| + |e_{i+1}(\mathfrak{q}\mathbb{M})| \\
&\leq (D+r+1)^{3i!-i+1} + (D+r+1)^{3(i+1)!-i} + (D+r+2)^{3(i+1)!-i} \\
&\leq 2(D+r+2)^{3(i+1)!-i}.
\end{aligned}$$

□

4.3 CHỈ SỐ CHÍNH QUY CASTELNUOVO-MUMFORD CỦA NÓN PHÂN THỚ

Kết quả chính của mục này chúng tôi đưa ra chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của nón phân thớ theo $D(I, M)$. Phương pháp chứng minh của Rossi-Trung-Valla [37] cho môđun phân bậc liên kết không áp dụng được cho nón phân thớ. Bởi vì, đối với nón phân thớ ta không thể quy được về trường hợp $\operatorname{depth}(M) > 0$ và trong quá trình chứng minh ta cũng không thể thay thế $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))$ bởi $\operatorname{reg}^1(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))$ được. Để giải quyết được vấn đề khó khăn này chúng tôi cần ước lượng đại lượng sau:

BỔ ĐỀ 4.3.1. *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d \geq 1$, $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là một I-lọc tốt của M và $D(I, M)$ là một bậc mở rộng tùy ý của M ứng với I. Giả sử $I \subseteq \mathfrak{q}$ và $M_{n+1} \subseteq \mathfrak{q}M_n$ với mọi $n \geq 0$. Khi đó*

(i) $a_0(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq D(I, M) + r(\mathbb{M})$ *nếu* $d = 1$,

(ii) $a_0(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq (D(I, M) + r(\mathbb{M}) + 2)^{3(d-1)!-1} - d$ *nếu* $d \geq 2$.

Chứng minh. Do $M_{n+1} \subseteq \mathfrak{q}M_n$ với mọi $n \geq 0$ nên sử dụng [36, Proposition 5.1] ta có dãy khớp của các G-môđun phân bậc như sau:

$$0 \to F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}) \to G(\mathfrak{q}\mathbb{M}) \to N(-1) \to 0,$$

trong đó $N = \oplus_{n\geq 0}\mathfrak{q}M_n/M_{n+1}$. Suy ra $H^0_{G_+}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \subseteq H^0_{G_+}(G(\mathfrak{q}\mathbb{M}))$. Vì vậy

$$a_0(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq a_0(G(\mathfrak{q}\mathbb{M})) \leq \operatorname{reg}(G(\mathfrak{q}\mathbb{M})).$$

Chú ý rằng $r(\mathfrak{q}\mathbb{M}) \leq r(\mathbb{M}) + 1$. Từ đó suy ra bổ đề từ Định lý 2.1.4. □

Sau đây là kết quả chính của mục này.

ĐỊNH LÝ 4.3.2. *Cho M là A-môđun hữu hạn sinh với $\dim(M) = d \geq 1$, $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là I-lọc tốt của M và $D(I, M)$ là một bậc mở rộng tùy ý của M ứng với I. Giả sử $I \subseteq \mathfrak{q}$ và $M_{n+1} \subseteq \mathfrak{q}M_n$ với mọi $n \geq 0$. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq 2D(I, M)(D(I, M) + r(\mathbb{M})) + r(\mathbb{M}) - 1$ *nếu* $d = 1$*;*

(ii) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \le (D(I,M)+r(\mathbb{M})+2)^2 + D(I,M)^2 - 3$ *nếu* $d=2$*;*

(iii) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \le (D(I,M)+r(\mathbb{M})+2)^{3(d-1)!-1} - d$ *nếu* $d \ge 3$.

Chứng minh. Chứng minh quy nạp theo d. Đặt $D := D(I,M)$ và $r := r(\mathbb{M})$. Nếu $d=1$. Theo Bổ đề 1.3.1 và Mệnh đề 4.2.4 (i) ta có

$$a_1(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) + 1 \le e_0(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) + r - 1 \le 2D(D+r) + r - 1.$$

Áp dụng Bổ đề 4.3.1 ta nhận được

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) &= \max\{a_0(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}));\ a_1(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))+1\}\\ &\le \max\{D+r;\ 2D(D+r)+r-1\} = 2D(D+r)+r-1.\end{aligned}$$

Nếu $d \ge 2$. Chú ý rằng $G(\mathbb{M})$ và $F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})$ là hai môđun trên G. Khi đó, tồn tại phần tử $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ sao cho $x^* \in G$ là phần tử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$ cũng là phần tử lọc chính quy trên $F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})$ (xem [24, Proposition 2.2]). Ta có

$$F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})/x^*F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}) \cong \frac{M}{\mathfrak{q}M} \oplus (\oplus_{n\ge 0}\frac{M_n}{\mathfrak{q}M_n + xM_{n-1}}),$$

và

$$F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}/xM) = \oplus_{n\ge 0}\frac{M_n}{\mathfrak{q}M_n + xM\cap M_n}.$$

Tồn tại một dãy khớp của các G-môđun:

$$0 \to K \to F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})/x^*F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}) \to F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}/xM) \to 0,$$

trong đó

$$K = \oplus_{n\ge 1}\frac{\mathfrak{q}M_n + xM\cap M_n}{\mathfrak{q}M_n + xM_{n-1}}.$$

Áp dụng Bổ đề 1.4.14 (ii) ta nhận được

$$xM\cap M_n = xM_{n-1} \text{ với mọi } n > \operatorname{reg}(G(\mathbb{M})).$$

Vì vậy K là môđun có độ dài hữu hạn và $\operatorname{reg}(K) \le \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$. Từ dãy khớp trên suy ra

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})/x^*F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) &= \max\{\operatorname{reg}(K);\ \operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}/xM))\}\\ &\le \max\{\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}));\ \operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}/xM))\}.\end{aligned}$$

Sử dụng Bổ đề 1.2.4 ta có

$$\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) = \max\{a_0(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})),\ \operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})/x^*F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}))\}.$$

Suy ra

$$\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq \max\{a_0(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}));\ \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}));\ \operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M}/xM))\}. \quad (4.7)$$

Chú ý rằng $0 \leq r(\mathbb{M}/xM) \leq r$ và $D(I, M/xM) \leq D$ (theo Định nghĩa 2.1.2 (ii)). Sử dụng Định lý 2.1.4, bất đẳng thức (4.7) và Bổ đề 4.3.1 ta nhận được

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) &\leq \max\{(D+r+2)^2-2;\ (D+r+1)^2-1;\\ &\qquad 2D(D+r)+r-1\}\\ &< (D+r+2)^2+D^2-3\end{aligned}$$

nếu $d=2$,

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) &\leq \max\{(D+r+2)^5-3;\ (D+r+1)^5-3;\\ &\qquad (D+r+2)^2+D^2-3\}\\ &= (D+r+2)^5-3\end{aligned}$$

nếu $d=3$ và

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) &\leq \max\{(D+r+2)^{3(d-1)!-1}-d;\ (D+r+1)^{3(d-1)!-1}-d;\\ &\qquad (D+r+2)^{3(d-2)!-1}-d+1\}\\ &= (D+r+2)^{3(d-1)!-1}-d\end{aligned}$$

với mọi $d \geq 4$. □

Như là một hệ quả trực tiếp từ định lý trên, ta nhận được chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của nón phân thớ cổ điển của iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ.

HỆ QUẢ 4.3.3. *Cho I là một iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ của vành địa phương A với chiều d và $D(I, A)$ là một bậc mở rộng tùy ý của A ứng với I. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{m}}(I)) \leq 2D(I,A)^2 - 1$ *nếu* $d = 1$*;*

(ii) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{m}}(I)) \leq 2D(I,A)^2 + 4D(I,A) + 1$ *nếu* $d = 2$*;*

(iii) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{m}}(I)) \leq (D(I,A) + 2)^{3(d-1)!-1} - d$ *nếu* $d \geq 3$.

NHẬN XÉT 4.3.4. Trong trường hợp nón phân thớ cổ điển, Cortadellas-Zarzuela trong [9, section 2] đã tính chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của nón phân thớ qua đại lượng là số mũ rút gọn của iđêan I trong trường hợp $\dim(F_{\mathfrak{m}}(I)) = 1$ và I chứa một phần tử chính quy. Sau đó, một kết quả gần đây của Jayanthan-Nanduri [23, Theorem 2.2], đã đưa ra một chặn cho $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{m}}(I))$ theo $\operatorname{reg}(G_I(A))$ và từ kết quả của [37], [26] và Định lý 2.1.4 ta suy ra được một chặn trên cho $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{m}}(I))$ theo bậc mở rộng $D(I,A)$. Tuy nhiên kết quả của họ cũng chỉ xét trong trường hợp $\dim(F_{\mathfrak{m}}(I)) = 1$. Do vậy, kết quả của Định lý 4.3.2 và Hệ quả 4.3.3 là tổng quát hơn và được giải quyết trọn vẹn trong trường hợp chiều tuỳ ý $d \geq 1$ với I là $\mathfrak{m}$-nguyên sơ.

Trong trường hợp phân bậc, ta có thể áp dụng phương pháp trong Chương 2, Mục 2.2 để chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của $F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})$. Ta thu được kết quả sau:

MỆNH ĐỀ 4.3.5. *Giả sử A là ảnh đồng cấu của đại số Gorenstein phân bậc, M là A-môđun phân bậc hữu hạn sinh với $\dim(M) = d \geq 1$, $I \subseteq \mathfrak{q}$ là iđêan $\mathfrak{m}$-nguyên sơ phân bậc của A, và $\mathbb{M} = \{\mathcal{M}_n\}_{n\geq 0}$ là một I-lọc tốt của các môđun con phân bậc của M sao cho $\mathcal{M}_{n+1} \subseteq \mathfrak{q}\mathcal{M}_n$ với mọi $n \geq 0$. Khi đó*

(i) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq 2\ell(A/I)\operatorname{hdeg}(I,M)(\ell(A/I)\operatorname{hdeg}(I,M) + r(\mathbb{M})) + r(\mathbb{M}) - 1$ *nếu* $d = 1$*;*

(ii) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq (\ell(A/I)^2\operatorname{hdeg}(I,M) + r(\mathbb{M}) + 2)^2 + \ell(A/I)^4\operatorname{hdeg}(I,M)^2 - 3$ *nếu* $d = 2$*;*

(iii) $\operatorname{reg}(F_{\mathfrak{q}}(\mathbb{M})) \leq (\ell(A/I)^d\operatorname{hdeg}(I,M) + r(\mathbb{M}) + 2)^{3(d-1)!-1} - d$ *nếu* $d \geq 3$.

CHƯƠNG 5

SỰ PHỤ THUỘC CỦA CÁC HỆ SỐ HILBERT

Mục đích chính của chương này là đưa ra mối liên hệ giữa các hệ số Hilbert của môđun lọc.

5.1 CHẶN TRÊN ĐỘ DÀI CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG

Để kết quả trong phần sau gọn gàng chúng tôi đánh giá lại chặn trên trong Định lý 3.1.7 như sau:

BỔ ĐỀ 5.1.1. *Giả sử M là A-môđun hữu hạn sinh với* $\dim M = d \geq 1$ *và* $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ *là I-lọc tốt của M. Đặt*

$$\xi(\mathbb{M}) := \max\{e_0(\mathbb{M}), |e_1(\mathbb{M})|, ..., |e_d(\mathbb{M})|\}.$$

Khi đó

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) < [\xi(\mathbb{M}) + r(\mathbb{M}) + 2]^{(d+1)!}.$$

Chứng minh. Để cho gọn ta đặt $\xi := \xi(\mathbb{M})$ và $r := r(\mathbb{M})$. Sử dụng Định lý 3.1.7 ta nhận được

$$\begin{aligned}\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) &\leq (\xi + r + 1)^{d!} + \xi\binom{(\xi + r + 1)^{d!} + d}{d} - 1\\ &< (\xi + r + 2)^{(d+1)!}.\end{aligned}$$

□

Từ đó, ta đi đến các kết quả chính của mục này.

MỆNH ĐỀ 5.1.2. *Giả sử M là A-môđun hữu hạn sinh với* $\dim M = d \geq 1$ *và* $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ *là I-lọc tốt của M. Cho dãy các phần tử $x_1, ..., x_d \in I \setminus \mathfrak{m}I$ sao cho dãy các phần tử khởi đầu $x_1^*, ..., x_d^* \in G_I(A)$ là $G(\mathbb{M})$-dãy lọc chính quy và $d \geq 1$. Đặt $\mathbb{M}_i := \mathbb{M}/(x_1, ..., x_i)M$ và $M_{(i)} := M/(x_1, ..., x_i)M$, trong đó $\mathbb{M}_0 := \mathbb{M}$ và $M_{(0)} := M$. Khi đó với mọi $0 \leq i \leq d-1$, ta có*

$$h^0(M_{(i)}) \leq (i+1)\xi(\mathbb{M})(\mathrm{reg}(G(\mathbb{M})) + 2)^d.$$

Chứng minh. Đặt $a := \mathrm{reg}(G(\mathbb{M}))$ và $\xi := \xi(\mathbb{M})$. Quy nạp theo i. Chú ý rằng theo Bổ đề 1.4.13 ta có

$$\mathrm{reg}(G(\overline{\mathbb{M}}_i)) \leq \mathrm{reg}(G(\mathbb{M}_i)) \leq \mathrm{reg}(G(\mathbb{M})) = a.$$

Nếu $i = 0$, theo Bổ đề 3.1.6 ta có

$$\begin{aligned} h^0(M_{(0)}) = h^0(M) \leq P_{\mathbb{M}}(a) &\leq \xi \sum_{j=0}^{d} \binom{d+a-j}{a-j} \\ &= \xi \binom{a+d+1}{d} \leq \xi(a+2)^d. \end{aligned}$$

Nếu $0 < i \leq d-1$, áp dụng Bổ đề 4.2.2 ta nhận được $e_j(\mathbb{M}_i) = e_j(\mathbb{M}_{i-1})$ với mọi $0 \leq j \leq d-i-1$ và

$$e_{d-i}(\mathbb{M}_i) = e_{d-i}(\mathbb{M}_{i-1}) + (-1)^{d-i}\ell(0 :_{M_{(i-1)}} x_i).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} |e_{d-i}(\mathbb{M}_i)| &= |e_{d-i}(\mathbb{M}_{i-1})| + \ell(0 :_{M_{(i-1)}} x_i) \\ &\leq |e_{d-i}(\mathbb{M}_{i-1})| + h^0(M_{(i-1)}) \leq \xi + h^0(M_{(i-1)}). \end{aligned}$$

Theo Bổ đề 3.1.6 và giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} h^0(M_{(i)}) \leq P_{\mathbb{M}_i}(a) &\leq \xi \textstyle\sum_{j=0}^{d-i-1} \binom{d-i+a-j}{d-i-j} + |e_{d-i}(\mathbb{M}_i)| \\ &= \xi \tbinom{a+d-i+1}{d-i-j} - \xi + |e_{d-i}(\mathbb{M}_i)| \\ &\leq \xi(a+2)^{d-i} - \xi + \xi + h^0(M_{(i-1)}) \\ &\leq \xi(a+2)^{d-i} + i\xi(a+2)^d \leq (i+1)\xi(a+2)^d. \end{aligned}$$

□

Đến đây chúng tôi nhắc lại một số tính chất và khái niệm cần thiết cho chứng minh của kết quả tiếp theo. Môđun M được gọi là *A-môđun Cohen-Macaulay suy rộng* nếu $\ell(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) < \infty$ với mọi $i < d$. Vành A được gọi là *vành Cohen-Macaulay suy rộng* nếu A được xem là môđun Cohen-Macaulay suy rộng trên chính nó (xem [48] hoặc [44]).

Giả sử $x_1, ..., x_d$ là hệ tham số của M và $Q = (x_1, ..., x_d)$. Ta đặt

$$I(Q, M) := \ell(M/QM) - e(Q, M),$$

trong đó, ký hiệu $e(Q, M)$ là số bội của M ứng với iđêan tham số Q, và

$$I(M) := \sup\{I(Q, M) | Q \text{ là iđêan tham số của } M\}.$$

Bất biến $I(M)$ được tính như sau:

BỔ ĐỀ 5.1.3. (Xem [48, (3.7) Satz], [44, Lemma 1.5] hoặc [41, Appendix Lemma 15]) *Giả sử M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng với* $\dim M = d$. *Khi đó*

$$I(M) = \sum_{i=0}^{d-1} \binom{d-1}{i} \ell(H^i_{\mathfrak{m}}(M)).$$

MỆNH ĐỀ 5.1.4. *Với kí hiệu và giả thiết như trong Bổ đề 5.1.2, đặt $B := \ell(M/(x_1, x_2, ..., x_d)M)$. Khi đó*

$$B \leq (d+1)\xi(\mathbb{M})(\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) + 2)^d.$$

Chứng minh. Ta có $\dim(M_{(d-1)}) = 1$ dẫn đến $M_{(d-1)}$ là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Sử dụng Bổ đề 5.1.3 ta thu được

$$B - e_0(x_d; M_{(d-1)}) = \ell(M_{(d-1)}/x_d M_{(d-1)}) - e_0(x_d; M_{(d-1)}) \leq h^0(M_{(d-1)}).$$

Ta biết rằng

$$e_0(x_d; M_{(d-1)}) = e_0(x_1, ..., x_d; M) = e_0(\mathbb{M}) = e_0.$$

Dẫn đến

$$B \leq e_0 + h^0(M_{(d-1)}) \leq \xi(\mathbb{M}) + h^0(M_{(d-1)}).$$

Áp dụng Bổ đề 5.1.2 ta nhận được $h^0(M_{(d-1)}) \leq d\xi(\mathbb{M})(\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) + 2)^d$. Suy ra $B \leq (d+1)\xi(\mathbb{M})(\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) + 2)^d$ với mọi d. □

Trường hợp môđun phân bậc tuỳ ý, Chardin-Hà-Hoa [7] đã chặn trên được độ dài của các môđun đối đồng điều địa phương của môđun E trên một vành đa thức, tuy nhiên kết quả này vẫn còn đúng trong trường hợp vành phân bậc chuẩn trên vành Artin và được D. T. Hà trình bày phép chứng minh này trong [1, Định lý 4.1.3].

MỆNH ĐỀ 5.1.5. ([7, Theorem 4.5] và [1, Định lý 4.1.3]) *Cho E là R-môđun phân bậc dương, hữu hạn sinh với $\dim(E) = d \geq 1$. Giả sử $r_i = \operatorname{reg}(E/(x_1, ..., x_i)E)$ và $x_1, ..., x_d$ là một dãy lọc chính quy của E khi đó với mọi $i \geq 0$, ta có*

$$h^i_E(t) \leq \ell(E/(x_1, ..., x_i)E)\binom{r_i - 1 - t}{i-1}\binom{r_i + n - i}{n-i}.$$

5.2 MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC HỆ SỐ HILBERT

Sử dụng chặn trên chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford theo hệ số Hilbert được đưa ra trong Bổ đề 3.1.2, ngay lập tức chúng tôi chỉ ra $(-1)^{i-1}e_i(I, A)$ bị chặn trên theo một hàm chỉ phụ thuộc vào $e_0(I, A)$, ..., $e_{i-1}(I, A)$. Cụ thể như sau:

ĐỊNH LÝ 5.2.1. *Giả sử M là A-môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d \geq 1$ và $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là I-lọc tốt của M. Khi đó*

(i) $e_1(\mathbb{M}) \leq \binom{e_0(\mathbb{M})}{2}$.

(ii) *Đặt* $\varsigma_{i-1} := \max\{e_0(\mathbb{M}), |e_1(\mathbb{M})|, ..., |e_{i-1}(\mathbb{M})|\}$ *và* $r' := \max\{1, r(\mathbb{M})\}$. *Với mọi $i \geq 2$, ta có*

$$(-1)^{i-1}e_i(\mathbb{M}) \leq \varsigma_{i-1}\binom{(\varsigma_{i-1} + r')^{i!} + i}{i}.$$

Chứng minh. Ta quy nạp theo d. Nếu $d = 1$. Ta có ngay $e_1(\mathbb{M}) \leq \binom{e_0(\mathbb{M})}{2}$ từ Bổ đề 3.2.6.

Nếu $d \geq 2$. Trước hết ta chứng minh mệnh đề đúng với $i \leq d - 1$. Cho $\overline{\mathbb{M}} := \mathbb{M}/H^0_{\mathfrak{m}}(M)$. Từ các đẳng thức $e_j(\mathbb{M}) = e_j(\overline{\mathbb{M}})$ với mọi $j \leq d - 1$, ta có thể giả sử $\operatorname{depth}(M) > 0$. Giả sử $x \in I \setminus \mathfrak{m}I$ là một phần tử sao cho phần tử khởi đầu x^* là $G(\mathbb{M})$-lọc chính quy. Khi đó ta có $\dim(M/xM) = d-1$ và sử dụng Bổ đề 4.2.2 ta nhận được $e_j(\mathbb{M}) = e_j(\mathbb{M}/xM)$ với mọi $j \leq d-1$. Do đó, áp dụng giả thiết quy nạp cho $\mathbb{M}/xM$ ta nhận được (ii) với mọi $i \leq 2$.

Cuối cùng, cho $i = d$. Do $G(\overline{\mathbb{M}})$ được sinh bởi các phần tử có bậc lớn nhất là $r(\mathbb{M}) \geq 0$, sử dụng Bổ đề 2.1.10 và Bổ đề 3.1.2 ta nhận được

$$\operatorname{reg}(G(\overline{\mathbb{M}})) = \operatorname{reg}^1(G(\overline{\mathbb{M}})) \leq (\varsigma_{d-1} + r')^{d!} - 1 =: \alpha.$$

Tiếp theo, áp dụng Bổ đề 2.1.11 và Bổ đề 3.1.6, ta có

$$\begin{aligned}
\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) &\leq \max\{\operatorname{reg}^1(G(\overline{\mathbb{M}})),\ r\} + \ell(H^0_{\mathfrak{m}}(M)) \\
&\leq \max\{\operatorname{reg}^1(G(\overline{\mathbb{M}})),\ r\} + P_{\mathbb{M}}(\alpha) \\
&\leq \alpha + \textstyle\sum_{i=0}^{d-1} e_i(\mathbb{M})\binom{\alpha+d-i}{d-i} + (-1)^d e_d(\mathbb{M}) \\
&\leq \varsigma_{d-1}\binom{\alpha+d+1}{d} + (-1)^d e_d(\mathbb{M}).
\end{aligned}$$

Sử dụng $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \geq 0$ ta nhận được

$$(-1)^{d-1} e_d(\mathbb{M}) \leq \varsigma_{d-1}\binom{\alpha+d+1}{d} = \varsigma_{d-1}\binom{(\varsigma_{d-1}+r')^{d!}+d}{d}.$$

□

Kết quả tiếp theo cần một kết quả về chặn trên tất cả các hệ số Hilbert của $\mathbb{M}$ theo $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$. Chardin-Hà-Hoa trong [7] đã đưa ra được chặn trên của các hệ số Hilbert $e_0(\mathbb{M}), |e_1(\mathbb{M})|, ..., |e_{d-1}(\mathbb{M})|$ như sau:

BỔ ĐỀ 5.2.2. ([7, Theorem 4.6]) *Giả sử E là R-môđun phân bậc dương, hữu hạn sinh với $\dim(E) = d \geq 1$ và $x_1, ..., x_d$ là một dãy lọc chính quy của E. Đặt $B := \ell(E/(x_1, ..., x_d)E)$ và $r := \operatorname{reg}(E/H^0_{R_+}(E))$. Khi đó với mọi $i \geq 0$, ta có*

$$|e_i(E)| \leq B.(r+1)^i.$$

Chứng minh. Chứng minh dưới đây như trong [7, Theorem 4.6]. Đặt $\overline{E} := E/H^0_{R_+}(E)$ Chứng minh quy nạp theo d. Chú ý rằng $0 \leq e_0(E) \leq B$. Suy ra bài toán đúng với $d = 1$. Giả sử bài toán đúng với mọi môđun phân bậc chiều $d-1 \geq 1$. Cho E là một môđun chiều d, đặt $E_1 := E/x_1E$, $e_i(E) := e_i(E_1)$ với mọi $i \leq d-2$. Do $|e_{d-1}(E)| = |e_{d-1}(\overline{E})|$ nên không mất tính tổng quát ta giả sử $E = \overline{E}$ nghĩa là $H^0_{R_+}(E) = 0$. Theo Bổ đề 1.2.3 ta có $\operatorname{reg}(\overline{E_1}) \leq \operatorname{reg}(\overline{E})$ và $\ell(E_1/x_1E_1) = B$ nên theo giả thiết quy nạp ta chỉ cần chứng minh

$$|e_{d-1}(E)| \leq B(r+1)^{d-1}$$

Từ công thức Grothendieck-Serre Định lý 1.3.2, ta có

$$(-1)^{d-1}e_{d-1}(E) = C_d - D_d,$$

trong đó

$$C_d := h^1_E(-1) + h^3_E(-1) + ...,$$

và

$$D_d := h^2_E(-1) + h^4_E(-1) + ...,$$

Sử dụng Bổ đề 5.1.5 ta nhận được

$$C_d \leq \sum_{1 \leq 2j+1 \leq d} \binom{r}{2j}\binom{r+d-2j-1}{d-2j-1} =: B.\widehat{C_d}.$$

Chứng minh quy nạp theo d ta được $\widehat{C_d} \leq (r+1)^{d-1}$. Suy ra

$$C_d \leq B(r+1)^{d-1}.$$

Tương tự ta có

$$D_d \leq B(r+1)^{d-1}.$$

Dẫn đến

$$|d_{d-1}(E)| \leq \max\{C_d; D_d\} \leq B(r+1)^{d-1}.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Như vây, ta có thể chặn hết được tất cả các hệ số Hilbert của $\mathbb{M}$ như sau:

MỆNH ĐỀ 5.2.3. *Giả sử M là A-môđun hữu hạn sinh với* $\dim M = d \geq 1$ *và $\mathbb{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ là I-lọc tốt của M. Cho $l_1, \ldots, l_d \in I$ sao cho các dạng* *khởi đầu* $l_1^*, \ldots, l_d^*$ *trong* $G_I(A)$ *là một dãy lọc chính quy trên* $G(\mathbb{M})$*. Đặt* $B := \ell(M/(l_1, ..., l_d)M)$*. Khi đó*

(a) *Với mọi* $1 \leq i \leq d-1$, $|e_i(\mathbb{M})| \leq B(\operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M}))+1)^i$,

(b) $|e_d(\mathbb{M})| \leq B(d+1)(\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))+1)^d$.

Chứng minh. Bất đẳng thức (a) được suy ra từ Bổ đề 5.2.2 với chú ý rằng $\operatorname{reg}(\overline{G(\mathbb{M})}) = \operatorname{reg}^1(G(\mathbb{M}))$ và $G(\mathbb{M})$ có bậc sinh không âm.

(b) Đặt $a := \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ và $e_i := e_i(\mathbb{M})$. Theo Bổ đề 1.4.9 ta có $H_{\mathbb{M}}(a) = P_{\mathbb{M}}(a)$. Áp dụng Bổ đề 2.1.8 ta nhận được

$$H_{\mathbb{M}}(a) = \ell(M/M_{a+1}) \leq \ell(M/I^{a+1}M) \leq B\binom{a+d}{d}.$$

Chú ý rằng $\binom{a+j}{j} \leq (a+1)^j$. Theo (a) ta nhận được

$$\begin{aligned}|e_d| &\leq H_{\mathbb{M}}(a) + \textstyle\sum_{i=0}^{d-1} |e_i|\binom{a+d-i}{d-i}\\ &\leq B\binom{a+d}{d} + B\textstyle\sum_{i=0}^{d-1}\binom{a+d-i}{d-i}(a+1)^i\\ &\leq B(a+1)^d + B\textstyle\sum_{i=0}^{d-1}(a+1)^{d-i}(a+1)^i\\ &= B(d+1)(a+1)^d.\end{aligned}$$

□

Trong phần còn lại của mục này ta luôn sử dụng kí hiệu sau:

$$\xi_t(\mathbb{M}) := \max\{e_0(\mathbb{M}), |e_1(\mathbb{M})|, ..., |e_{d-t}(\mathbb{M})|\},$$

trong đó $0 \leq t \leq d$. Vì vậy $\xi_0(\mathbb{M}) = \xi(\mathbb{M})$. Trong Bổ đề 5.1.1, $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ được chặn bởi $\xi(\mathbb{M})$ và $r(\mathbb{M})$. Bây giờ chúng ta chỉ ra rằng thực sự $\xi_t(\mathbb{M})$ ($t = \operatorname{depth}(M)$) và $r(\mathbb{M})$ chặn được $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$.

ĐỊNH LÝ 5.2.4. *Cho* $\mathbb{M}$ *là một* I*-lọc tốt của* M *với* $\dim(M) = d \geq 1$*. Giả sử rằng* $\operatorname{depth}(M) = t$*. Khi đó*

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [2(d+1)\xi_t(\mathbb{M})]^{3d!}[\xi_t(\mathbb{M}) + r(\mathbb{M}) + 4]^{3d!(d+1-t)!}.$$

Chứng minh. Cho dãy các phần tử $x_1, ..., x_d \in I \setminus \mathfrak{m}I$ sao cho dãy các phần tử khởi đầu $x_1^*, ..., x_d^* \in G_I(A)$ là $G(\mathbb{M})$-dãy lọc chính quy và $d \geq 1$. Đặt

$M_{(i)} := M/(x_1, ..., x_i)M$ và $\mathbb{M}_i := \mathbb{M}/(x_1, ..., x_i)M$. Để cho gọn ta viết $\xi_t := \xi_t(\mathbb{M})$ và $r := r(\mathbb{M})$.

Nếu $\operatorname{depth}(M) = d$ thì M là môđun Cohen-Macaulay. Theo kí hiệu của Định lý 2.3.1 ta có $B(I, M) = e_0(I, M) = \xi_d(\mathbb{M})$ và $\mu(I, M) = 0$. Suy ra

$$\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq \begin{cases} \xi_d + r & \text{nếu } \; d = 1, \\ (\xi_d + r + 1)^{3(d-1)!-1} - d & \text{nếu } \; d \geq 2; \end{cases}$$

trong đó, $0! = 1$.

Giả sử rằng $\operatorname{depth}(M) = t < d$. Đặt $a_i := \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}_i))$. Sử dụng Bổ đề 4.2.2 ta nhận được $e_i(\mathbb{M}_t) = e_i(\mathbb{M})$ với mọi $i \leq t$. Suy ra $\xi(\mathbb{M}_t) = \xi_t$. Áp dụng Bổ đề 5.1.2 cho $M_{(t)}$ ta đạt được

$$\mu(I, M_{(t)}) \leq (d - t)\xi_t(a_t + 2)^{d-t}.$$

Theo Mệnh đề 5.1.4 ta có

$$B(I, M_{(t)}) \leq (d - t + 1)\xi_t(a_t + 2)^{d-t} \leq (d + 1)\xi_t(a_t + 2)^{d-t}. \tag{5.1}$$

Do vậy, theo Định lý 2.3.1 ta có

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) &\leq [B(I, M) + \mu(I, M) + r(\mathbb{M}) + 1]^{3(d-1)!-1} - d \\ &< [B(I, M) + \mu(I, M) + r + 1]^{3(d-1)!} \\ &\leq [(2d + 1)\xi_t(a_t + 2)^d + r + 1]^{3(d-1)!}. \end{aligned}$$

Sử dụng Bổ đề 5.1.1 ta nhận được

$$a_t \leq [\xi_t(\mathbb{M}_t) + r(\mathbb{M}_t) + 2]^{(d-t+1)!}. \tag{5.2}$$

Bởi vậy

$$\begin{aligned} \operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) &\leq [(2d + 2)\xi_t((\xi_t + r + 2)^{(d-t+1)!} + 2)^d]^{3(d-1)!} \\ &\leq [2(d + 1)\xi_t((\xi_t + r + 4)^{(d-t+1)!})^d]^{3(d-1)!} \\ &\leq [2(d + 1)\xi_t((\xi_t + r + 4)^{(d-t+1)!})^d]^{3d!} \\ &\leq [2(d + 1)\xi_t(\xi_t + r + 4)]^{3d!(d-t+1)!}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

□

ĐỊNH LÝ 5.2.5. *Cho* $\mathbb{M}$ *là một* I*-lọc tốt của* M. *Giả sử rằng* $\dim(M) = d \geq 1$ *và* $\operatorname{depth}(M) = t \geq 1$. *Khi đó* $|e_d(\mathbb{M})|, |e_{d-1}(\mathbb{M})|, ..., |e_{d-t+1}(\mathbb{M})|$ *được chặn bởi một hàm chỉ phụ thuộc vào* $e_0(\mathbb{M}), |e_1(\mathbb{M})|, ..., |e_{d-t}(\mathbb{M})|$ *và* $r(\mathbb{M})$. *Cụ thể là*

$$|e_j(\mathbb{M})| < [2(j+1)\xi_t(\mathbb{M})]^{3j!+2}[\xi_t(\mathbb{M}) + r(\mathbb{M}) + 4)]^{4j!(j+1-t)!}.$$

Chứng minh. Đầu tiên ta chứng minh cho $i = d$. Cho dãy các phần tử $x_1, ..., x_d \in I \setminus \mathfrak{m}I$ sao cho dãy các phần tử khởi đầu $x_1^*, ..., x_d^* \in G_I(A)$ là $G(\mathbb{M})$-dãy lọc chính quy. Khi đó áp dụng (5.1) và (5.2) ta nhận được

$$\begin{aligned} B := B(I, M_{(t)}) &\leq (d+1)\xi_t[(\xi + r + 2)^{(d-t+1)!} + 2]^d \\ &\leq (d+1)\xi_t(\xi + r + 4)^{d(d-t+1)!}. \end{aligned}$$

Từ Mệnh đề 5.2.3 và theo Định lý 5.2.5 ta có

$$\begin{aligned} |e_d(\mathbb{M})| &\leq B(d+1)(\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) + 1)^d \\ &\leq (d+1)^2\xi_t(\xi_t + r + 4)^{d(d-t+1)!}[2(d+1)\xi]^{3d!}(\xi_t + r + 4)^{3d!(d-t+1)!} \\ &< [2(d+1)\xi_t]^{3d!+2}(\xi_t + r + 4)^{4d!(d-t+1)!}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Bây giờ cho $d-t+1 \leq j \leq d-1$. Từ $\operatorname{depth}(M) = t$, theo Bổ đề 4.2.2 ta nhận được $e_j(\mathbb{M}) = e_j(\mathbb{M}_{d-j})$. Chú ý rằng $\dim(M_{(d-j)}) = j, \operatorname{depth}(M_{(d-j)}) = t + j - d \geq 1$ và $r(\mathbb{M}_j) \leq r(\mathbb{M})$. Từ đó ta có

$$\xi_{t+j-d}(\mathbb{M}_{d-j}) = \xi_t(\mathbb{M}) = \xi_t.$$

Áp dụng (5.4) cho $\mathbb{M}_{d-j}$ ta nhận được

$$|e_j(\mathbb{M})| = |e_j(\mathbb{M}_{d-j})| \leq [2(j+1)\xi_t]^{3j!+2}(\xi_t + r + 4)^{4j!(j+1-t)!}.$$

$\square$

Nếu lọc $\mathbb{M} = \{I^n M\}_{n\geq 0}$ thì $r(\mathbb{M}) = 0$. Trong trường hợp M là môđun Cohen-Macaulay, như một hệ quả tức thì của Định lý 5.2.5 là một mở rộng kết quả của V. Trivedi trong [42].

HỆ QUẢ 5.2.6. *Giả sử* $\dim(M) = d \geq 1$ *và* $\operatorname{depth}(M) = t \geq 1$. *Khi đó với mọi* $d - t + 1 \leq j \leq d$, *ta có*

$$|e_j(I, M)| \leq [2(j+1)\xi_t]^{3j!+2}(\xi_t + 4)^{4j!(j+1-t)!},$$

trong đó

$$\xi_t := \max\{e_0(I, M), |e_1(I, M)|, ..., |e_{d-t}(I, M)|\}.$$

Hay nói cách khác, $|e_j(I, M)|$ *với* $d - t + 1 \leq j \leq d$ *được chặn theo các đại lượng* $e_0(I, M)$, $e_1(I, M)$, ..., $e_{d-t}(I, M)$.

Tiếp theo chúng tôi đưa ra một kết quả về sự hữu hạn của hàm Hilbert-Samuel.

ĐỊNH LÝ 5.2.7. *Cho* $d \geq t \geq 0$, $e_0, ..., e_{d-t}$ *là các số nguyên. Khi đó chỉ tồn tại một số hữu hạn (nếu có) các hàm Hilbert-Samuel tương ứng với môđun* M *với chiều* d *và iđêan* I *là* $\mathfrak{m}$*-nguyên sơ sao cho* $\operatorname{depth}(M) = t$ *và* $e_j(I, M) = e_j$ *với mọi* $0 \leq j \leq d - t$.

Chứng minh. Theo Hệ quả 5.2.6 chỉ tồn tại hữu hạn các đa thức Hilbert-Samuel $P_{I,M}(n)$ sao cho $e_j(I, M) = e_j$ với mọi $0 \leq j \leq d - t$. Sử dụng Bổ đề 1.4.9 ta có $H_{I,M}(n) = P_{I,M}(n)$ với $n \geq \operatorname{reg}(G_I(M)) := a$. Theo Định lý 5.2.4 a được chặn bởi các đại lượng $e_0, e_1, ..., e_{d-t}$ và d. Ngoài ra ta có $H_{I,M}(n) = 0$ với $n < 0$, $H_{I,M}(n)$ là một hàm tăng dần với $n \geq 0$ và $P_{I,N} \leq P_{I,M}$ với mọi $n \leq a$. Từ những điều này ta thấy rằng số các hàm này được chặn theo các đại lượng $e_0, e_1, ..., e_{d-t}$ và d. $\square$

Cuối cùng chúng tôi nhắc lại một ví dụ của V. Srinivas và V. Trivedi.

VÍ DỤ 5.2.8. ([39, Section 4]) Cho $R = k[[T_1, ..., T_6]]$ với k là một trường và mọi $n \geq 1$, đặt

$$\mathfrak{p}_n := (T_1T_4 - T_2T_3, T_2^3 - T_1^2T_3, T_3^3 - T_2T_4^2, T_1T_3^2 - T_2^2T_4, T_1 - T_5^n, T_4 - T_6^n).$$

Khi đó, trong [39, Section 4] đã chứng minh được rằng

$$R/\mathfrak{p}_n \cong \frac{k[[T_2, T_3, u, v]]}{(u^nv^n - T_2T_3, T_2^3 - u^{2n}T_3, T_3^3 - T_2v^{2n}, u^nT_3^2 - T_2^2v_n)},$$

với $\dim(R/\mathfrak{p}_n) = 2$ và $\operatorname{depth}(R/\mathfrak{p}_n) = 1$ với mọi $n \geq 1$ và đa thức Hilbert của $R/\mathfrak{p}_n$ là

$$\begin{aligned} p_{R/\mathfrak{p}_n}(t) &= 2t^2 + (n-2)t - (1/2)(n^2 + 3n - 2) \\ &= 4\binom{t+2}{2} - (8-n)\binom{t+1}{1} - \frac{n^2 + 5n - 10}{2}. \end{aligned}$$

Do đó, $e_0(R/\mathfrak{p}_n) = 4$ và $e_1(R/\mathfrak{p}_n) = 8 - n$ với mọi $n \geq 1$.

NHẬN XÉT 5.2.9. Từ Ví dụ 5.2.8 ta thấy rằng chúng ta không thể giảm bớt được số các hệ số Hilbert "độc lập" trong Định lý 5.2.5.

KẾT LUẬN

Tóm lại, trong luận án này chúng tôi đã thu được những kết quả sau đây:

- Thiết lập được ba loại chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc liên kết của một lọc môđun tuỳ ý: theo bậc mở rộng; theo độ dài của môđun đối đồng điều địa phương và theo hệ số Hilbert. Trong trường hợp môđun M phân bậc, đưa ra được một chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc liên kết theo $\operatorname{reg}(M)$. Trong trường hợp chiều một, thiết lập được chặn trên chặt theo hệ số Hilbert và đặc trưng được khi nào đẳng thức xảy ra.

- Thiết lập được một chặn trên cho chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của nón phân thớ của một lọc môđun tuỳ ý theo bậc mở rộng.

- Tìm ra được mối liên hệ giữa các hệ số Hilbert là: các số $|e_{d-t+1}(I,M)|$, ..., $|e_d(I,M)|$ bị chặn bởi một hàm chỉ phụ thuộc vào $e_0(I,M)$, $e_1(I,M)$, ..., $e_{d-t}(I,M)$, trong đó $t = \operatorname{depth}(M)$ và chỉ ra rằng tồn tại một số hữu hạn các hàm Hilbert-Samuel (nếu có) của môđun nếu cho trước chiều d, độ sâu $0 \le t \le d$ và $d-t$ hệ số Hilbert $e_0, ..., e_{d-t}$.

CÁC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN ĐỀ TÀI LUẬN ÁN

[1] L. X. Dung and L. T. Hoa, *Castelnuovo-Mumford regularity of associated graded modules and fiber cones of filtered modules*, Comm. Algebra. **40** (2012), 404-422.

[2] L. X. Dung and L. T. Hoa, *Dependence of Hilbert coefficients*, Preprint.

[3] L. X. Dung *Castelnuovo-Mumford regularity of associated graded modules in dimension one*, Acta Math. Vietnam (to appear).

CÁC KẾT QUẢ TRONG LUẬN ÁN ĐÃ ĐƯỢC BÁO CÁO TẠI:

1. Xemina của Phòng Đại số, Viện Toán học Hà Nội.
2. Xemina của bộ môn Đại số, Khoa Khoa học Tự nhiên, Đại Học Hồng Đức.
3. Hội nghị nghiên cứu sinh của Viện Toán học, 10/2009, 10/2010, 10/2011.
4. Hội nghị khoa học của trường Đại học Hồng Đức, 5/2010, 5/2012.
5. Đại hội toán học toàn quốc, Quy nhơn, 8/2008.
6. Hội nghị Đại số - Tô pô - Hình học, Huế, 9/2009 và Thái Nguyên, 11/2011.
7. Hội Thảo liên kết Nhật Bản-Việt Nam về Đại số giao hoán, Hà Nội, 01/2010 và Quy Nhơn, 12/2011.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] D. T. T. Ha, *Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của một số lớp môđun*. Luận án Tiến sĩ, Trường Đại học Vinh, 2010.

[2] L. T. Hoa, *Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford và ứng dụng*. Luận án Tiến sĩ Khoa học, Trung Tâm Khoa Học Tự Nhiên và Công Nghệ Quốc gia, 1995.

Tiếng Anh

[3] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1969.

[4] N. Bourbaki, Commutative Algebra, Hermann, Paris, 1972.

[5] M. Brodmann and R.Y. Sharp, Local cohomology - an algebraic introduction with geometric applications, Cambridge University Press, 1998.

[6] W. Bruns and J. Herzog, Cohen-Macaulay rings. Cambridge Studies in Advanced Math. 39, Cambridge, 1993.

[7] M. Chardin, D. T. Ha and L. T. Hoa, *Castelnuovo-Mumford regularity of* Ext *modules and homological degree*, Trans. Amer. Math Soc. 363 (2011), no. 7, 3439-3456.

[8] CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra, Available at http://cocoa.dima.unige.it

[9] T. Cortadellas and S. Zarzuela, *On the structure of the fiber cone of ideals with analytic spread one*, J. Algebra **317**(2007), no. 2, 759–785.

[10] L. R. Doering, T. Gunston and W. Vasconcelos, *Cohomological degrees and Hilbert functions of graded modules*, Amer. J. Math, **120**(1998), 493-504.

[11] L. X. Dung *Castelnuovo-Mumford regularity of associated graded modules in dimension one*, Acta Math. Vietnam (to appear).

[12] L. X. Dung and L. T. Hoa, *Castelnuovo-Mumford regularity of associated graded modules and fiber cones of filtered modules*, Comm. Algebra. **40** (2012), 404-422.

[13] L. X. Dung and L. T. Hoa, *Dependence of Hilbert coefficients*, Preprint.

[14] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a View toward Algebraic Geometry, Springer-Verlag, 1995.

[15] D. Eisenbud, and S. Goto, *Linear free resolutions and minimal multiplicity*, J. Algebra, **88**(1984), 89-133.

[16] J. Elias, *Upper bounds of Hilbert coefficients and Hilbert functions*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc, **145**(2008), no. 1, 87–94.

[17] J. Elias, *On the first normalized Hilbert coefficient*, J. Pure Appl. Algebra, **201**(2005), no. 1-3, 116–125.

[18] J. Elias and G. Valla, *Rigid Hilbert functions*, J. Pure Appl. Algebra **71**(1991), 19-41.

[19] J. Elias, M. E. Rossi, G. Valla, *On the coefficients of the Hilbert polynomial*, J. Pure Appl. Algebra, **108**(1996), no. 1, 35–60.

[20] L. T. Hoa, *Reduction numbers of equimultiple ideals*, J. Pure Appl. Algebra, **109**(1996), 111-126.

[21] L. T. Hoa and N. D. Tam, *On some invariants of a mixed product of ideals. Arch. Math.* (Basel) **94**(2010), no. , 4, 327–337

[22] L. T. Hoa and S. Zarzuela, *Reduction number and a-invariant of good filtrations*, Comm. Algebra, **22**(1994), 5635-5656.

[23] A. V. Jayanthan and R. Nanduri, *Castelnuovo-Mumford regularity and Gorensteinness of fiber cone*, Comm. Algebra (to appear).

[24] A. V. Jayanthan and J. K. Verma, *Hilbert coefficients and depth of fiber cones*, J. Pure Appl. Algebra, **201**(2005), 97-115.

[25] D. Kirby and H. A. Mehran, *A note on the coefficients of the Hilbert-Samuel polynomial for a Cohen-Macaulay module*, J. London Math. Soc, (2) **25** (1982), 449-457.

[26] C. H. Linh, *Upper bound for Castelnuovo-Mumford regularity of associated graded modules*, Comm. Algebra, **33** (2005), 1817-1831.

[27] C. H. Linh, *Castelnuovo-Mumford regularity and degree of nilpotency*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc, **142**(2007), 429-437.

[28] T. Marley, *The coefficients of the Hilbert polynomial and the reduction number of an ideal*, J. London Math. Soc, (2) **40**(1989), 1-8.

[29] H. Matsumura, Commutative Ring Theory, Cambridge University Press, 1986.

[30] D. Mumford, Lectures on curves on an algebraic surfaces, Princeton Univ. Press, Princeton 1966.

[31] U. Nagel, *Comparing Castelnuovo-Mumford regularity and extended degree: the borderline cases*, Trans. Amer. Math. Soc, **357**(2005), 3585-3603.

[32] M. Narita, *A note on the coefficients of Hilbert characteristic functions in semi-regular local rings*, Proc. Cambridge Philos. Soc, **59** (1963), 269-275.

[33] N. G. Northcott, *A note on the coefficients of the abstract Hilbert function, J. London Math. Soc*, **35** (1960), 209-214.

[34] D. G. Northcott and D. Rees, *Reductions of ideals in local rings*, Proc. Camb. Phil. Soc, **50**(1954), 145-158.

[35] C. P. L. Rhodes, *The Hilbert-Samuel polynomial in a fitered module*, J. London Math. Soc, (1) **3** (1971), 73-85.

[36] M. E. Rossi and G. Valla, Hilbert functions of filtered modules. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, **9**, Springer, Heidelberg, 2010.

[37] M. E. Rossi, N. V. Trung and G. Valla, *Castelnuovo-Mumford regularity and extended degree*, Trans. Amer. Math. Soc, **355**(2003), 1773-1786.

[38] J. J. Rotman, An introduction to homological algebra, Academic Press, 1979.

[39] V. Srinivas and V. Trivedi, *A finiteness theorem for the Hilbert functions of complete intersection local rings*, Math, **225** (1997), no. 4, 543-558.

[40] V. Srinivas and V. Trivedi, *On the Hilbert function of a Cohen-Macaulay local ring*, J. Algebraic Geom, **6** (1997), 733-751.

[41] J. Stückrad and W. Vogel, Buchsbaum rings and applications. An interaction between algebra, geometry and topology. Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[42] V. Trivedi, *Hilbert functions, Castelnuovo-Mumford regularity and uniform Artin-Rees numbers*, Manuscripta Math, (4) **94** (1997), 485-499.

[43] V. Trivedi, *Finiteness of Hilbert functions for generalized Cohen-Macaulay modules*, Comm. Algebra, **29** (2001), no. 2, 805-813.

[44] N. V. Trung , *Towards a theory of generalized Cohen-Macalay modules*, Nagoya Math. J **102**(1986), 1-49.

[45] N. V. Trung, *Reduction exponent and degree bound for the defining equations of graded rings*, Proc. Amer. Math. Soc, **101**(1987), 223-236.

[46] N. V. Trung, *Castelnuovo-Mumford regularity of the Rees algebra and the associated graded rings*, Trans. Amer. Math. Soc, **350**(1998), 2813-2832.

[47] W. V. Vasconcelos, Computational methods in commutative algebra and algebraic geometry. With chapters by D. Eisenbud, D.R. Grayson, J. Herzog and M. Stillman. Algorithms and Computation in Math. 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

Tiếng Đức

[48] N. T. Cuong, P. Schenzel and N. V. Trung, *Über verallgemeinerte Cohen-Macaulay Modunlen*, Math. Nachr, **85** (1978), 57-73.