ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ HƯỜNG

CHIỀU NOETHER CỦA MÔĐUN ARTIN

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2008

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ HƯỜNG

CHIỀU NOETHER CỦA MÔĐUN ARTIN

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 60.46.05

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. NGUYỄN THỊ DUNG

THÁI NGUYÊN – 2008

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN THỊ HƯỜNG

CHIỀU NOETHER CỦA MÔĐUN ARTIN

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 60.46.05

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
TS. NGUYỄN THỊ DUNG

THÁI NGUYÊN – 2008

Công trình được hoàn thành tại

Người hướng dẫn khoa học: TS. Nguyễn Thị Dung

Phản biện 1:...

Phản biện 2:...

Luận văn sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận văn
họp tại: Trường Đại học sư phạm - ĐHTN

Ngày tháng 10 năm 2008

Mở đầu

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán, địa phương, Noether với iđêan cực đại duy nhất $\mathfrak{m}$; M là R-môđun hữu hạn sinh và A là R-môđun Artin. Như chúng ta đã biết, các khái niệm phân tích nguyên sơ, chiều Krull là những khái niệm cơ bản của Hình học đại số và Đại số giao hoán mà thông qua đó người ta có thể nói lên cấu trúc của các đa tạp đại số hoặc cấu trúc của các vành Noether và các môđun hữu hạn sinh trên chúng. *Chiều Krull* của một môđun hữu hạn sinh M, ký hiệu $\dim M$, được định nghĩa là chiều Krull của vành $R/\operatorname{Ann} M$ và ta có định lý cơ bản của lý thuyết chiều như sau

$$\delta(M) = \dim M = d(M),$$

trong đó $\delta(M)$ là số nguyên t nhỏ nhất sao cho tồn tại một dãy các phần tử $a_1, \ldots, a_t \in \mathfrak{m}$ để độ dài của môđun $M/(a_1, \ldots, a_t)M$ là hữu hạn và $d(M)$ là bậc của đa thức Hilbert $P_{M,I}(n)$ ứng với iđêan định nghĩa I.

Khái niệm đối ngẫu với chiều Krull cho một môđun Artin được giới thiệu bởi R. N. Robert [16] và sau đó D. Kirby [7] đổi tên thành chiều Noether, ký hiệu là N-dim để tránh nhầm lẫn với chiều Krull đã được định nghĩa cho các môđun Noether. Một số kết quả mà theo một nghĩa nào đó được xem là đối ngẫu với các kết quả về chiều Krull cho môđun hữu hạn sinh đã được đưa ra. Đặc biệt, R. N. Roberts [16] đã chứng minh một kết quả về tính hữu hạn của chiều Noether và mối liên hệ giữa chiều Noether với bậc của đa thức Hilbert của môđun Artin trên vành giao hoán, Noether, sau đó D. Kirby [7] và N. T . Cường - L. T. Nhàn [3] đã mở rộng kết quả trên của Roberts cho vành giao hoán bất kỳ

$$\begin{aligned}\text{N-dim}\, A &= \deg(\ell_R(0 :_A \mathfrak{m}^n)) \\ &= \inf\{t \geqslant 0 : \exists a_1, \ldots, a_t \in \mathfrak{m} : \ell_R(0 :_A (a_1, \ldots, a_t)R) < \infty\}.\end{aligned}$$

Từ kết quả trên, một cách tự nhiên có thể định nghĩa các khái niệm hệ tham số, hệ bội cho môđun Artin thông qua chiều Noether.

Tiếp theo, nhiều tác giả cũng đã dùng chiều Noether để nghiên cứu cấu trúc của môđun Artin (xem [5], [7], [19],...). Đặc biệt, tác giả N. T. Cường và L. T. Nhàn [4] đã có những nghiên cứu sâu hơn về chiều Noether, quan tâm đặc biệt tới chiều Noether của môđun đối đồng điều địa phương khi chúng là Artin và đã đạt được một số kết quả thú vị, chứng tỏ khái niệm chiều Noether theo một nghĩa nào đó là phù hợp với môđun đối đồng điều địa phương.

Tương tự như chiều Krull của môđun hữu hạn sinh, một cách tự nhiên, đối với mỗi môđun Artin A, chiều Krull $\dim_R A$ cũng được hiểu là chiều Krull của vành $R/\operatorname{Ann}_R A$. Một kết quả quan trọng trong [4] là nghiên cứu mối quan hệ giữa chiều Noether và chiều Krull của môđun Artin trong trường hợp tổng quát: $\text{N-}\dim_R A \leqslant \dim_R A$, hơn nữa chỉ ra những trường hợp xảy ra $\text{N-}\dim_R A < \dim_R A$. Đặc biệt, kết quả khá bất ngờ trong [4] cho ta điều kiện đủ để khi nào chiều Noether của một môđun Artin bằng chiều Krull của nó là

$$\operatorname{Ann}_R(0:_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}, \forall \mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann}_R A). \qquad (*)$$

Cần chú ý rằng đối với mỗi R-môđun hữu hạn sinh M, theo Bổ đề Nakayama, ta luôn có tính chất $\operatorname{Ann}_R M/\mathfrak{p}M = \mathfrak{p}$, với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ chứa $\operatorname{Ann}_R M$. Rõ ràng rằng, khi vành R là đầy đủ thì với mỗi R-môđun Artin A, theo đối ngẫu Matlis, ta có luôn có $\operatorname{Ann}_R(0:_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$, với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ chứa $\operatorname{Ann}_R A$, tuy nhiên trên vành giao hoán bất kỳ, không phải mọi môđun Artin A đều thỏa mãn điều kiện (*). Một điều thú vị nữa là nhờ điều kiện $(*)$, ta có thể đặc trưng được tính catenary của giá không trộn lẫn $\operatorname{Usupp}_R M$ của môđun M thông qua môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^d_{\mathfrak{m}}(M)$ (xem [2]); tính không trộn lẫn và tính catenary phổ dụng của các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ (xem [15]).

Mục đích của luận văn là trình bày lại và chứng minh chi tiết các kết quả đã giới thiệu ở trên trong bài báo của N. T. Cường - L. T. Nhàn (2002) và một phần kết quả của các bài báo của R. N. Roberts (1975); D. Kirby (1990) và N. T. Cường - L. T. Nhàn (1999). Luận văn được chia làm 3 chương, các kiến thức cần thiết liên quan đến nội dung của luận văn được nhắc lại xen kẽ trong các chương.

Chương 1 giới thiệu khái niệm chiều Noether và chứng minh một số kết quả về chiều Noether của môđun Artin, đặc biệt là chứng minh tính hữu hạn của chiều Noether và mối liên hệ giữa chiều Noether với bậc của đa thức Hilbert của một môđun Artin.

Chương 2 dành để chứng minh lại các kết quả về chiều Noether của các môđun đối đồng điều địa phương của một R-môđun hữu hạn sinh khi chúng là Artin; mối quan hệ giữa chiều Noether của môđun đối đồng điều địa phương thứ i với chỉ số i và chiều Noether của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với chiều Krull của môđun hữu hạn sinh ban đầu.

Chương 3 trình bày mối quan hệ giữa chiều Noether và chiều Krull của môđun Artin trong trường hợp tổng quát: $\mathrm{N\text{-}dim}_R A \leqslant \dim_R A$; chỉ ra những trường hợp xảy ra dấu nhỏ hơn thực sự và điều kiện đủ để khi nào chiều Noether của một môđun Artin bằng chiều Krull của nó.

Phần kết luận của luận văn tổng kết lại toàn bộ các kết quả đã đạt được.

Chương 1

Chiều Noether và đa thức Hilbert

Trong toàn bộ chương này, ta luôn ký hiệu R là vành giao hoán, Noether không nhất thiết địa phương (giả thiết địa phương khi cần sẽ được nêu trong từng trường hợp cụ thể), M là R-môđun, A là R-môđun Artin. Mục đích của chương này là giới thiệu khái niệm chiều Noether cho một môđun tuỳ ý và một số kết quả về chiều Noether cho môđun Artin. Kết quả chính của chương là chứng minh tính hữu hạn của chiều Noether và mối liên hệ giữa chiều Noether với bậc của đa thức Hilbert của môđun Artin. Kết quả này đã được giới thiệu bởi R. N. Roberts [16] cho vành địa phương và sau đó D. Kirby [8], N. T. Cường - L. T. Nhàn [3] mở rộng cho vành giao hoán, Noether.

1.1 Chiều Noether

Khái niệm đối ngẫu với chiều Krull cho một môđun tuỳ ý (Kdim) được giới thiệu bởi R. N. Roberts [16] và ở đó, ông cũng đưa ra một số kết quả về chiều Krull cho các môđun Artin. Sau đó D. Kirby trong [8] đã đổi thuật ngữ của Roberts và đề nghị thành chiều Noether ($\mathrm{N}\text{-}\mathrm{dim}$) để tránh nhầm lẫn với chiều Krull đã được định nghĩa cho các môđun Noether. Định nghĩa sau theo theo thuật ngữ của Kirby [8].

Định nghĩa 1.1.1. *Chiều Noether* của môđun M, ký hiệu bởi $\text{N-dim}_R\, M$, được định nghĩa bằng quy nạp như sau:

Khi $M = 0$, đặt $\text{N-dim}_R\, M = -1$.

Với $M \neq 0$, cho một số nguyên $d \geqslant 0$, ta đặt $\text{N-dim}_R\, M = d$ nếu $\text{N-dim}_R\, M < d$ là sai và với mỗi dãy tăng $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots$ các môđun con của M, tồn tại số nguyên n_0 sao cho $\text{N-dim}_R(M_{n+1}/M_n) < d$, với mọi $n > n_0$.

Ví dụ 1.1.2. Cho M là R-môđun khác không. Khi đó M là R-môđun Noether khi và chỉ khi $\text{N-dim}_R\, M = 0$. Thật vậy, giả sử M là R-môđun Noether. Vì mọi dãy tăng $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq \ldots$ các môđun con của M đều dừng nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $M_n = M_{n+1}$, với mọi $n > n_0$. Do đó, $M_{n+1}/M_n = 0$, vì thế $\text{N-dim}_R\, M_{n+1}/M_n = -1 < 0$, với mọi $n > n_0$. Vì $M \neq 0$ nên $\text{N-dim}_R\, M \geqslant 0$ và do đó theo định nghĩa, $\text{N-dim}_R\, M = 0$. Ngược lại, giả sử $\text{N-dim}_R\, M = 0$. Khi đó, lấy một dãy tăng bất kỳ $N_0 \subseteq N_1 \subseteq \ldots \subseteq \ldots$ các môđun con của M. Theo định nghĩa, tồn tại số nguyên dương n_0 sao cho $\text{N-dim}_R\, N_{k+1}/N_k = -1 < 0$, với mọi $k > n_0$. Do đó, $N_{k+1} = N_k$, với mọi $n > n_0$ hay dãy trên là dừng, nghĩa là M là R-môđun Noether.

Mệnh đề 1.1.3. *Nếu*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M" \longrightarrow 0$$

là dãy khớp các R-môđun thì

$$\text{N-dim}_R\, M = \max\{\text{N-dim}_R\, M', \text{N-dim}_R\, M"\}.$$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $M' \subset M$ và $M'' = M/M'$. Nếu $M = 0$ thì $M' = M" = M = 0$, suy ra

$$\text{N-dim}_R\, M' = \text{N-dim}_R\, M'' = \text{N-dim}_R\, M = -1.$$

Do đó ta luôn có thể giả thiết $M \neq 0$. Ta chứng minh bằng quy nạp theo $\text{N-dim}_R M = d$.

Giả sử $d = 0$. Theo ví dụ trên, M là R-môđun Noether. Vì vậy, M', M'' cũng là các R-môđun Noether nên suy ra $\text{N-dim}_R M' = \text{N-dim}_R M'' = 0$.

Giả sử $d > 0$ và mệnh đề đúng với mọi môđun có chiều Noether thực sự nhỏ hơn d. Cho $M_0 \underset{\neq}{\subseteq} M_1 \underset{\neq}{\subseteq} \ldots \underset{\neq}{\subseteq} M_n \underset{\neq}{\subseteq} \ldots$ là một xích tăng bất kỳ các môđun con của M. Khi đó, ta cũng có các dãy

$$M_0 \cap M' \underset{\neq}{\subseteq} M_1 \cap M' \underset{\neq}{\subseteq} \ldots \underset{\neq}{\subseteq} M_n \cap M' \underset{\neq}{\subseteq} \ldots \tag{1}$$

$$(M' + M_0)/M' \underset{\neq}{\subseteq} (M' + M_1)/M' \underset{\neq}{\subseteq} \ldots \underset{\neq}{\subseteq} (M' + M_n)/M' \underset{\neq}{\subseteq} \ldots \tag{2}$$

tương ứng là xích tăng các môđun con của M' và $M'' = M/M'$.

Do $\text{N-dim}_R M = d$ nên theo định nghĩa, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\text{N-dim}_R M_{n+1}/M_n < d$, với mọi $n > n_0$. Vì vậy, áp dụng giả thiết quy nạp vào dãy khớp

$$0 \longrightarrow \frac{M' \cap M_{n+1}}{M' \cap M_n} \longrightarrow \frac{M_{n+1}}{M_n} \longrightarrow \frac{M' + M_{n+1}}{M' + M_n} \longrightarrow 0,$$

ta có

$$\text{N-dim}_R(M_{n+1}/M_n) = \max\{\text{N-dim}_R \frac{M' \cap M_{n+1}}{M' \cap M_n}, \text{N-dim}_R \frac{M' + M_{n+1}}{M' + M_n}\}.$$

Vì thế, với mọi $n > n_0$, ta có hoặc

$$\text{N-dim}_R \frac{M' \cap M_{n+1}}{M' \cap M_n} = \text{N-dim}_R(M_{n+1}/M_n) < d$$

hoặc

$$\text{N-dim}_R \frac{M' + M_{n+1}}{M' + M_n} = \text{N-dim}_R(M_{n+1}/M_n) < d.$$

Do đó, theo định nghĩa chiều Noether ta có hoặc $\text{N-dim}_R M' = d$ hoặc $\text{N-dim}_R M'' = d$ hay

$$\text{N-dim}_R M = \max\{\text{N-dim}_R M', \text{N-dim}_R M''\}.$$

$\square$

Cho $\mathfrak{m}$ là một iđêan cực đại của vành R. Nhắc lại rằng môđun con $\mathfrak{m}$-*xoắn* $\Gamma_{\mathfrak{m}}(A)$ của A được định nghĩa bởi

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(A) = \bigcup_{n\geq 0}(0 :_A \mathfrak{m}^n).$$

Ta nhắc lại một số tính chất của môđun Artin được đưa ra bởi R. Y. Sharp thường được dùng trong các chứng minh về sau.

Mệnh đề 1.1.4. [17, Mệnh đề 1.4, Bổ đề 1.6]

(i) Giả sử A là một R-môđun Artin khác không. Khi đó chỉ có hữu hạn iđêan cực đại $\mathfrak{m}$ của R sao cho $\Gamma_{\mathfrak{m}}(A) \neq 0$. Nếu các iđêan cực đại phân biệt đó là $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ thì

$$A = \Gamma_{\mathfrak{m}_1}(A) \oplus \ldots \oplus \Gamma_{\mathfrak{m}_r}(A) \text{ và } \operatorname{Supp} A = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r\}.$$

(ii) Với mỗi $j \in \{1, \ldots, r\}$, nếu $s \in R \setminus \mathfrak{m}_j$, thì phép nhân bởi s cho ta một tự đẳng cấu của $\Gamma_{\mathfrak{m}_j}(A)$. Do đó $\Gamma_{\mathfrak{m}_j}(A)$ có cấu trúc tự nhiên của một $R_{\mathfrak{m}_j}$-môđun và với cấu trúc này, một tập con của $\Gamma_{\mathfrak{m}_j}(A)$ là một R-môđun con nếu và chỉ nếu nó là $R_{\mathfrak{m}_j}$-môđun con. Đặc biệt

$$A_{\mathfrak{m}_j} \cong \Gamma_{\mathfrak{m}_j}(A), \quad \text{với mọi } \ j = 1, \ldots, r.$$

Kí hiệu 1.1.5. Để cho thuận tiện, từ giờ trở đi ta đặt

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_r \text{ và } J_A = \bigcap_{\mathfrak{m}\in \operatorname{Supp} A} \mathfrak{m},$$

trong đó $A_j = \bigcup_{n\geq 0}(0 :_A \mathfrak{m}_j^n)$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Chú ý rằng khi $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương thì $J_A = \mathfrak{m}$.

Mệnh đề 1.1.6. [17, Bổ đề 1.11, Hệ quả 1.12] *Cho A là R-môđun Artin khác không trên vành địa phương $(R, \mathfrak{m})$. Khi đó, A có cấu trúc tự nhiên của $\widehat{R}$-môđun, trong đó $\widehat{R}$ là vành đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic của R và mọi tập con của A là R-môđun con của A nếu và chỉ nếu nó là $\widehat{R}$-môđun con của A. Do đó, A có cấu trúc tự nhiên của $\widehat{R}$-môđun Artin.*

Do có cấu trúc đặc biệt như vậy, người ta có thể chuyển việc nghiên cứu môđun Artin trên một vành giao hoán bất kỳ về việc nghiên cứu chúng trên vành địa phương. Tính chất sau đây về chiều Noether của môđun Artin là một ví dụ minh hoạ cho nhận xét trên.

Bổ đề 1.1.7. *i) Giả sử rằng $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_r$ là một phân tích A thành tổng trực tiếp các môđun con A_j như trong Ký hiệu 1.1.5. Khi đó,*

$$\text{N-dim}_R A_j = \text{N-dim}_{R_{\mathfrak{m}_j}}(A_j), \textit{với mọi } j = 1, \ldots, r.$$

(ii) Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và A là R-môđun Artin. Khi đó A có cấu trúc tự nhiên của $\widehat{R}$-môđun Artin và ta có

$$\text{N-dim}_R A = \text{N-dim}_{\widehat{R}} A.$$

Chính vì vậy, ta có thể viết $\text{N-dim}\, A$ thay cho $\text{N-dim}_R A$ hoặc $\text{N-dim}_{\widehat{R}} A$.

1.2 Chiều Noether và đa thức Hilbert

Cho J_A là giao của các iđêan cực đại như trong Ký hiệu 1.1.5, trước hết, kết quả sau cho ta thấy rằng độ dài của môđun Artin A là hữu hạn khi và chỉ khi A bị linh hoá tử bởi một luỹ thừa nào đó của J_A.

Bổ đề 1.2.1. *$J_A^n A = 0$ với $n \gg 0$ khi và chỉ khi $\ell_R A < \infty$.*

Chứng minh. Giả sử $J_A^n A = 0$ với $n \in \mathbb{N}$, khi đó ta có dãy

$$\begin{aligned}0 = (\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\ldots\mathfrak{m}_r)^n A &\subseteq (\mathfrak{m}_1^{n-1}\mathfrak{m}_2^n\ldots\mathfrak{m}_r^n)A \subseteq \ldots \subseteq (\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2^n\ldots\mathfrak{m}_r^n)A \subseteq \ldots\\ &\subseteq (\mathfrak{m}_2^n\ldots\mathfrak{m}_r^n)A \subseteq (\mathfrak{m}_2^{n-1}\ldots\mathfrak{m}_r^n)A \subseteq \ldots \subseteq (\mathfrak{m}_2\ldots\mathfrak{m}_r^n)A \subseteq \ldots\\ &\subseteq \mathfrak{m}_r^n A \subseteq \mathfrak{m}_r^{n-1}A \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{m}_r A \subseteq A\end{aligned}$$

do đó $\ell_R A < \infty$. Ngược lại, vì $\ell_R A < \infty$ nên dãy

$$\begin{aligned}A &\supseteq \mathfrak{m}_1 A \supseteq \mathfrak{m}_1^2 A \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{m}_1^n A \supseteq (\mathfrak{m}_1^n\mathfrak{m}_2)A \supseteq (\mathfrak{m}_1^n\mathfrak{m}_2^2)A \supseteq \ldots\\ &\supseteq (\mathfrak{m}_1^n\mathfrak{m}_2^n)A \supseteq \ldots \supseteq (\mathfrak{m}_1^n\mathfrak{m}_2^n\ldots\mathfrak{m}_r)A \supseteq (\mathfrak{m}_1^n\mathfrak{m}_2^n\ldots\mathfrak{m}_r^2)A \supseteq \ldots\\ &\supseteq (\mathfrak{m}_1^n\mathfrak{m}_2^n\ldots\mathfrak{m}_r^n)A = (\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\ldots\mathfrak{m}_r)^n A \supseteq \ldots\end{aligned}$$

phải dừng, tức là tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\ldots\mathfrak{m}_r)^n A = (\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\ldots\mathfrak{m}_r)^{n+1} A$$

với mọi $n \geq n_0$. Vì $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\ldots\mathfrak{m}_r$ là tích của hữu hạn các iđêan cực đại phân biệt của R nên theo bổ đề Nakayama, ta có $(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2\ldots\mathfrak{m}_r)^n A = 0$, suy ra $J_A^n A = 0$. □

Nhắc lại rằng, theo kết quả của D. Kirby [7], với mỗi iđêan I của R, nếu $\ell_R(0 :_A I) < \infty$ thì $\ell_R(0 :_A I^n) < \infty$, với n đủ lớn. Hơn nữa, tồn tại một đa thức $F(n, I, A)$ sao cho $\ell_R(0 :_A I^n) = F(n, I, A)$, với $n \gg 0$. Đa thức trên được gọi là *đa thức Hilbert* của môđun Artin A ứng với iđêan I của R. Ta ký hiệu bậc của $F(n, I, A)$ là $\deg(\ell_R(0 :_A I^n))$ và quy ước $\deg(\ell_R(0 :_A I^n)) = -1$ nếu $F(n, I, A) = 0$. Trong trường hợp vành $(R, \mathfrak{m})$ là tựa địa phương, Roberts [16] đã chứng minh kết quả sau, mà điều tương tự cho các môđun Noether đã là rất quen biết, còn được gọi là định lý cơ bản của lý thuyết chiều.

$$\begin{aligned}\text{N-dim}\, A &= \deg(\ell_R(0 :_A \mathfrak{m}^n)) \\ &= \inf\{t \geqslant 0 : \exists a_1, \ldots, a_t \in \mathfrak{m} : \ell_R(0 :_A (a_1, \ldots, a_t)R) < \infty\}.\end{aligned}$$

Dưới đây, ta sẽ chứng minh lại kết quả trên của Roberts nhưng đã được Kirby [8], và N. T. Cường-L. T. Nhàn [3] mở rộng cho vành giao hoán bất kỳ. Trước hết, ta chứng minh kết quả sau.

Mệnh đề 1.2.2. ([8, Định lý 2.6]) *Đối với mọi môđun Artin A, ta đều có* $\text{N-dim}\, A = \deg(\ell_R(0 :_A J_A^n))$.

Chứng minh. Theo Ký hiệu 1.1.5, ta có $A = \bigoplus\limits_{j=1}^{r} A_j$, với $A_j \cong \Gamma_{\mathfrak{m}_j}(A)$. Trước hết, ta chứng minh đẳng thức

$$(0 :_A J_A^n) = \bigoplus_{j=1}^{r} (0 :_{A_j} {\mathfrak{m}_j}^n).$$

Lấy một phần tử tuỳ ý $a \in (0 :_A J_A^n)$, vì $a \in A$ nên $a = \sum\limits_{j=1}^{r} a_j$, trong đó $a_j \in A_j$ và $J_A^n a_j = 0$, với mọi $j = 1, \ldots, r$. Ta có thể chọn $m \geqslant n$ sao cho $\mathfrak{m}_j^m a_j = 0$, với $a_j \in A_j$. Vì vậy ta có

$$0 = (\mathfrak{m}_j^m + J_A^n) a_j \supseteq \mathfrak{m}_j^n (\mathfrak{m}_j^{m-n} + \prod_{i \neq j} \mathfrak{m}_i^n) a_j.$$

Vì $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_r$ là các iđêan cực đại phân biệt của R nên $\mathfrak{m}_j^{m-n} + \prod\limits_{i \neq j} \mathfrak{m}_i^n = R$ và do đó $\mathfrak{m}_j^n a_j = 0$. Vì thế, $a \in \bigoplus\limits_{j=1}^{r} (0 :_{A_j} {\mathfrak{m}_j}^n)$ hay ta có

$$(0 :_A J_A^n) \subseteq \bigoplus_{i=1}^{r} (0 :_{A_j} {\mathfrak{m}_j}^n).$$

Ngược lại, lấy một phần tử tuỳ ý $x \in \bigoplus\limits_{j=1}^{r} (0 :_{A_j} {\mathfrak{m}_j}^n)$. Khi đó $x = \sum\limits_{i=1}^{r} x_j$, trong đó $x_j \in (0 :_{A_j} {\mathfrak{m}_j}^n)$, hay $x_j \mathfrak{m}_j^n = 0$, suy ra $x_j J_A^n = 0$ với mọi $j = 1, \ldots, r$. Điều này kéo theo $x \in (0 :_A J_A^n)$ và ta có bao hàm thức ngược lại.

Bây giờ, áp dụng Mệnh đề 1.1.4, ta có thể xem A_j là các môđun trên vành địa phương $R_{\mathfrak{m}_j}$, với mọi $j = 1 \ldots, r$. Từ đẳng thức trên, ta có $\deg(\ell_R(0 :_A J_A^n)) = \max\{\deg(\ell_R(0 :_{A_j} {\mathfrak{m}_j}^n))\}$. Vì thế, áp dụng kết quả trên vành địa phương đã được chứng minh bởi Robert [16, Định lý 6], ta có $\deg(\ell_R(0 :_{A_j} {\mathfrak{m}_j}^n)) = \text{N-dim}\, A_j$. Hơn nữa, theo Mệnh đề 1.1.3, ta lại có $\text{N-dim}\, A = \max\{\text{N-dim}(A_j)\}$. Kết hợp tất cả các kết quả trên, ta được điều cần chứng minh $\deg(\ell_R(0 :_A J_A^n)) = \text{N-dim}\, A$. $\square$

Trước khi đưa ra kết quả chính của chương, ta cần nhắc lại một kết quả về hệ tham số địa phương yếu được giới thiệu bởi I. H. Denizler và R. Y. Sharp trong [5]: Một dãy các phần tử $x_1, \ldots, x_n$ của R được gọi là *hệ tham số địa phương yếu* của A nếu với mỗi $j = 1, \ldots, r$, tồn tại một số t_j với $0 \leqslant t_j \leqslant n$ sao cho dãy các ảnh $x_1/1, \ldots, x_{t_j}/1$ trong $R_{\mathfrak{m}_j}$ là một phần hệ tham số của A_j và $x_{t_j+1}, \ldots, x_n$ là khả nghịch trong R_{m_j}.

Bổ đề 1.2.3. [5, Bổ đề 2.2] *Cho I là một iđêan của R và $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ (với $n > 0$) là một hệ tham số địa phương yếu của A được tạo thành bởi các phần tử của I sao cho với mọi $j \in \{1, \ldots, r\}$ mà $I \subseteq \mathfrak{m}_j$ ta có*

$$\text{N-dim}(0 :_{A_j} I) < \text{N-dim}(0 :_{A_j} (x_1, \ldots, x_{n-1})R).$$

Khi đó tồn tại $x_n \in I$ sao cho $(x_1, \ldots, x_n)$ là một hệ tham số địa phương yếu của A.

Bổ đề 1.2.4. *Tồn tại một iđêan hữu hạn sinh I của R chứa trong J_A sao cho $\ell_R(0 :_A I) < \infty$.*

Chứng minh. Ta có $(0 :_A J_A)$ là R-môđun Artin nên theo Mệnh đề 1.1.4, tồn tại số $t \in \mathbb{N}$ sao cho $J_A^t(0 :_A J_A) = 0$. Vì J_A là tích của hữu hạn các iđêan cực đại nên theo Bổ đề 1.2.1 ta có $\ell_R(0 :_A J_A) < \infty$. Hơn nữa, do A là môđun Artin nên theo Kirby [7, Bổ đề 3], tồn tại iđêan hữu hạn sinh I của R sao cho $I \subset J_A$ và $(0 :_A I) = (0 :_A J_A)$. Vì vậy $\ell_R(0 :_A I) < \infty$. □

Với mỗi môđun Artin A khác 0, ta ký hiệu

$$t(A) = \inf\{t : \exists a_1, \ldots, a_t \in J_A \text{ sao cho } \ell_R(0 :_A (a_1, \ldots, a_t)R) < \infty\}.$$

Khi đó $t(A)$ là hữu hạn theo Bổ đề 1.2.4. Nhắc lại rằng, $\ell_R(0 :_A J_A^n)$ là một đa thức khi $n \gg 0$ (xem [7]). Định lý sau đây là kết quả chính của chương, cho ta tính hữu hạn của chiều Noether của môđun Artin trên vành giao hoán, Noether và mối liên hệ giữa chiều Noether với bậc của đa thức Hilbert của môđun Artin. Định lý này là mở rộng kết quả chính của Roberts trong [16] cho vành giao hoán bất kỳ, và đã được N. T. Cường - L. T. Nhàn chứng minh trong [3].

Định lý 1.2.5. [3, Định lý 2.6] *Với mọi số nguyên n đủ lớn ta có*

$$t(A) = \text{N-dim}\, A = \deg(\ell_R(0 :_A J_A^n)).$$

Chứng minh. Đẳng thức thứ hai trong định lý đã được chứng minh trong Mệnh đề 1.2.2 ở trên. Cho $t(A) = t$. Khi đó, theo định nghĩa $t(A)$, tồn tại các phần tử $x_1, \ldots, x_t \in J_A$ sao cho $\ell_R(0 :_A (x_1, \ldots, x_t)R) < \infty$. Vì thế, theo [7, Mệnh đề 2], với n đủ lớn, $\ell_R(0 :_A (x_1, \ldots, x_t)^n R)$ là đa thức và $\deg(\ell_R(0 :_A (x_1, \ldots, x_t)^n R)) \leqslant t$. Điều này kéo theo $\deg(\ell_R(0 :_A J_A^n)) \leqslant t$, với $n \gg 0$. Vì vậy, theo Mệnh đề 1.2.2, ta có $\text{N-dim}\, A \leqslant t$. Bây giờ, ta chỉ cần chứng minh $\text{N-dim}\, A \geqslant t$. Để làm được điều này, ta đặt $I = (x_1, \ldots, x_t)R$ và bằng cách đánh số lại các A_j trong Ký hiệu 1.1.5, ta có thể giả sử $\text{N-dim}\, A_j > 0$, với $j = 1, \ldots, r_1$ và $\text{N-dim}\, A_j = 0$, với $j = r_1 + 1, \ldots, r$. Đặt

$$A^1 = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_{r_1}.$$

Khi đó, A^1 thoả mãn các điều kiện của Bổ đề 1.2.3 ứng với iđêan I và $n = 1$. Vì vậy, tồn tại $y_1 \in I$ sao cho y_1 là một hệ tham số địa phương yếu của A^1. Vì $y_1 \in J_A$ nên ta có $y_1/1$ là một phần hệ tham số của tất cả các R_{m_j}−môđun A_j, với $j = 1, \ldots, r_1$.

Lại bằng cách đánh số lại các môđun $A_1, \ldots, A_{r_1}$, ta có thể giả sử rằng $\text{N-dim}(0 :_{A_j} y_1R) > 0$, với $j = 1, \ldots, r_2$ và $\text{N-dim}(0 :_{A_j} y_1R) = 0$, với $j = r_2 + 1, \ldots, r_1$. Vì y_1 cũng là một phần hệ tham số địa phương yếu của

$$A^2 = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_{r_2},$$

nên A^2 cũng thoả mãn các điều kiện của Bổ đề 1.2.3 ứng với iđêan I, $n = 2$ và hệ tham số địa phương yếu y_1. Do đó tồn tại phần tử $y_2 \in I$ sao cho (y_1, y_2) là hệ tham số địa phương yếu của A^2. Vì (y_1, y_2) chứa trong J_A, ta có $y_1/1, y_2/2$ là một phần hệ tham số của tất cả các R_{m_j}-môđun A_j, với $j = 1, \ldots, r_2$.

Lặp lại quá trình trên, vì $\text{N-dim}\, A_j$ là hữu hạn với mọi $j = 1, \ldots, r$ nên tồn tại số tự nhiên k để quá trình trên phải dừng sau k bước. Vì vậy, tồn tại $y_1, \ldots, y_k \in I$ là hệ tham số địa phương yếu của A^k và $y_1/1, \ldots, y_k/1$ là hệ tham số của $A_1, \ldots, A_{r_k}$. Vì thế,

$$\text{N-dim}\, A = \text{N-dim}\, A_1 = \ldots = \text{N-dim}\, A_{r_k} = k$$

và $\ell_R(0 :_{A_j} (y_1, \ldots, y_k)R) < \infty$, với mọi $j = 1, \ldots, r$. Vì vậy,

$$\ell_R(0 :_A (y_1, \ldots, y_k)R) < \infty.$$

Vì tính nhỏ nhất của t, ta suy ra $t \leqslant k = \text{N-dim}\, A$ và ta có điều cần chứng minh. $\square$

Định lý 1.2.5 cho ta thấy khái niệm chiều Noether của môđun Artin trên vành giao hoán theo một nghĩa nào đó đối ngẫu với chiều Krull của môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương. Từ định lý này chúng ta có thể đưa ra khái niệm hệ tham số, phần hệ tham số một cách tự nhiên như sau.

Định nghĩa 1.2.6. Một hệ các phần tử $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d) \subseteq J_A$ (trong đó $d = \text{N-dim}\, A$) được gọi là *hệ tham số* của A, nếu $\ell_R(0 :_A \underline{x}R) < \infty$. Hệ các phần tử $(x_1, \ldots, x_i)$ trong J_A với $i \leqslant d$ được gọi là *phần hệ tham số* của A nếu ta có thể bổ sung được $d - i$ phần tử $x_{i+1}, \ldots, x_d$ trong J_A sao cho $(x_1, \ldots, x_d)$ là một hệ tham số của A.

Mệnh đề 1.2.7. *Giả sử x là một phần tử thuộc J_A. Khi đó ta có*

$$\text{N-dim}(0 :_A x) \geqslant \text{N-dim}\, A - 1.$$

Hơn nữa, nếu $\text{N-dim}\, A > 0$ *thì x là một phần tử tham số của A khi và chỉ khi*

$$\text{N-dim}(0 :_A x) = \text{N-dim}\, A - 1.$$

Chứng minh. Theo Định lý 1.2.5, ta có

$$\begin{aligned}\text{N-dim}(0 :_A x) &= t(0 :_A x)\\ &= \inf\{k : \exists x_1, \ldots, x_k \in J_A : \ell_R(0 :_{(0:_A x)} (x_1, \ldots, x_k)) < \infty\}\\ &= \inf\{k : \exists x_1, \ldots, x_k \in J_A : \ell_R(0 :_A (x, x_1, \ldots, x_k)) < \infty\}.\end{aligned}$$

Vì $d = \text{N-dim}\, A$ là số nguyên nhỏ nhất sao cho tồn tại hệ $(x_1, \ldots, x_d) \subseteq J_A$ để $\ell_R(0 :_A (x_1, \ldots, x_d)) < \infty$ nên ta phải có $k \geqslant d - 1$ hay

$$\text{N-dim}(0 :_A x) \geqslant \text{N-dim}\, A - 1.$$

Giả sử $\text{N-dim}\, A = d > 0$ và giả sử x là một phần tử tham số của A. Khi đó, ta có thể bổ sung thêm các phần tử $x_2, \ldots, x_d$ để $(x, x_2, \ldots, x_d)$ là một hệ tham số của A. Vì

$$\ell_R(0 :_{(0:_A x)} (x_2, \ldots, x_d)) = \ell_R(0 :_A (x, x_2, \ldots, x_d)) < \infty$$

nên ta có $\text{N-dim}(0 :_A x) \leqslant d - 1$. Kết hợp với chứng minh ở phần trên, ta có $\text{N-dim}(0 :_A x) = \text{N-dim}\, A - 1$. Ngược lại, nếu ta giả thiết $\text{N-dim}(0 :_A x) = \text{N-dim}\, A - 1$ thì bằng lý luận tương tự, ta cũng có x là phần tử tham số của A. $\square$

Chương 2

Chiều Noether của môđun đối đồng điều địa phương

Trong toàn bộ chương này, ta luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, M là R-môđun hữu hạn sinh với chiều Krull $\dim_R M = d$. Lý thuyết đối đồng điều địa phương của A. Grothendieck [6] có ý nghĩa quan trọng trong Hình học đại số và ngày càng có nhiều ứng dụng trong Đại số giao hoán. Đây là một trong những công cụ mạnh để nghiên cứu cấu trúc của vành và môđun. Chương này dành để nghiên cứu chiều Noether của môđun đối đồng điều địa phương khi chúng là Artin.

2.1 Môđun đối đồng điều địa phương

Trước hết, ta nhắc lại khái niệm môđun đối đồng điều địa phương của một môđun tuỳ ý.

Định nghĩa 2.1.1. Cho I là một iđêan của vành Noether R và M là một R-môđun. Môđun *đối đồng điều địa phương thứ i* $H^i_I(M)$ của M ứng với iđêan I được định nghĩa bởi

$$H^i_I(M) = R^i(\Gamma_I(M)),$$

trong đó $\Gamma_I(M)$ là môđun con I-xoắn của M.

Cho $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ là một dãy khớp các $R-$môđun. Khi đó, do tính chất δ-hàm tử đối đồng điều của môđun đối đồng điều địa phương, ta có dãy khớp dài

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H_I^0(L) \xrightarrow{H_I^0(f)} H_I^0(M) \xrightarrow{H_I^0(g)} H_I^0(N) \\ &\longrightarrow H_I^1(L) \xrightarrow{H_I^1(f)} H_I^1(M) \xrightarrow{H_I^1(g)} H_I^1(N) \\ &\longrightarrow \dots \\ &\longrightarrow H_I^i(L) \xrightarrow{H_I^i(f)} H_I^i(M) \xrightarrow{H_I^i(g)} H_I^i(N) \\ &\longrightarrow H_I^{i+1}(L) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

với mọi $i \in \mathbb{N}$.

Định lý sau đây của Grothedieck là một kết quả đẹp đẽ về tính triệt tiêu và không triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương.

Định lý 2.1.2. [1, Định lý 6.1.2, Định lý 6.1.4] *(i) Cho M là R-môđun. Khi đó,*

$$H_I^i(M) = 0, \text{ với mọi } i > \dim M.$$

(ii) Giả sử $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương và M là R-môđun hữu hạn sinh, khác không và chiều Krull $\dim M = d$. Khi đó $H_{\mathfrak{m}}^d(M) \neq 0$.

Tiếp theo là tính Artin của môđun đối đồng điều địa phương.

Định lý 2.1.3. [1, Định lý 7.1.3, Định lý 7.1.6] *(i) Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, M là R-môđun hữu hạn sinh. Khi đó, R-môđun $H_{\mathfrak{m}}^i(M)$ là Artin với mọi $i \in \mathbb{N}_0$.*

(ii) Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, $\mathfrak{a}$ là một iđêan của R, M là R-môđun hữu hạn sinh, khác không có chiều Krull $\dim M = d$. Khi đó, R-môđun $H_{\mathfrak{a}}^d(M)$ là Artin.

2.2 Biểu diễn thứ cấp

Lý thuyết biểu diễn thứ cấp được đưa ra bởi I. G. Macdonald [10], đây có thể được xem là đối ngẫu với khái niệm phân tích nguyên sơ quen biết cho môđun Noether.

Định nghĩa 2.2.1. (i) Một R-môđun M được gọi là *thứ cấp* nếu $M \neq 0$ và nếu với mọi $x \in R$, phép nhân bởi x trên M là toàn cấu hoặc luỹ linh. Trong trường hợp này $\mathrm{Rad}(\mathrm{Ann}_R M)$ là iđêan nguyên tố, chẳng hạn là $\mathfrak{p}$, và ta gọi M là $\mathfrak{p}$-*thứ cấp*.

(ii) Cho M là R-môđun. *Một biểu diễn thứ cấp* của M là một phân tích $M = N_1 + \ldots + N_n$ thành tổng hữu hạn các môđun con $\mathfrak{p}_i$-thứ cấp N_i. Nếu $M = 0$ hoặc M có một biểu diễn thứ cấp thì ta nói M là *biểu diễn được*. Biểu diễn thứ cấp này được gọi là *tối thiểu* nếu các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}_i$ là đôi một khác nhau và không có hạng tử N_i nào là thừa, với mọi $i = 1, \ldots, n$.

Dễ thấy rằng mọi biểu diễn thứ cấp của M đều có thể đưa được về dạng tối thiểu. Khi đó tập hợp $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ là độc lập với việc chọn biểu diễn thứ cấp tối thiểu của M và được gọi là *tập các iđêan nguyên tố gắn kết* của M, kí hiệu bởi $\mathrm{Att}_R M$. Các hạng tử $N_i, i = 1, \ldots, n$, được gọi là các thành phần thứ cấp của M. Nếu $\mathfrak{p}_i$ là tối thiểu trong $\mathrm{Att}_R M$ thì N_i được gọi là *thành phần thứ cấp cô lập*.

Mệnh đề 2.2.2. *i) Cho M là một R-môđun biểu diễn được. Khi đó $M \neq 0$ khi và chỉ khi $\mathrm{Att}_R M \neq \emptyset$. Trong trường hợp này tập các iđêan nguyên tố tối thiểu của R chứa $\mathrm{Ann}(M)$ chính là tập các phần tử tối thiểu của $\mathrm{Att}_R M$.*

(ii) Cho $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ là dãy khớp các R-môđun biểu diễn được. Khi đó ta có

$$\mathrm{Att}_R M'' \subseteq \mathrm{Att}_R M \subseteq \mathrm{Att}_R M' \cup \mathrm{Att}_R M''.$$

(iii) Mọi môđun Artin đều biểu diễn được.

2.3 Chiều Noether của môđun đối đồng điều địa phương

Như đã nhắc ở Định lý 2.1.3, các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ của R-môđun hữu hạn sinh M với giá là iđêan cực đại luôn là môđun Artin với mọi i, nhưng với giá là iđêan bất kỳ thì $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ không nhất thiết là môđun Artin, trừ trường hợp $i = \dim M$. Tuy nhiên khi chúng là môđun Artin thì định lý sau cho ta mối liên hệ giữa chiều Noether của môđun đối đồng điều địa phương thứ i với chỉ số i.

Định lý 2.3.1. *Cho t là một số nguyên dương và $\mathfrak{a}$ là một iđêan của R. Giả sử rằng các môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ là Artin, với mọi $i = 1, \ldots, t$. Khi đó ta có*

$$\text{N-}\dim_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M)) \leqslant i,$$

với mọi $i = 0, 1, \ldots, t$.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo d. Cho $d = 0$. Vì $H^0_{\mathfrak{a}}(M)$ là môđun Noether nên ta có $\text{N-}\dim_R(H^0_{\mathfrak{a}}(M)) \leqslant 0$.

Giả sử $d \geqslant t > 0$. Theo Định lý tránh nguyên tố, ta luôn chọn được phần tử $x \in \mathfrak{m}$ sao cho $x \notin \mathfrak{p}$, với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M \setminus \{\mathfrak{m}\}$. Vì thế, $0 :_M xR \subseteq 0 :_M \mathfrak{m}^t$, với $t \gg 0$. Suy ra $\ell_R(0 :_M xR) < \infty$ và do đó $\dim_R(0 :_M xR) = 0$. Theo Định lý 2.1.2 về tính triệt tiêu của môđun đối đồng điều địa phương, ta có $H^i_{\mathfrak{a}}(0 :_M xR) = 0$, với mọi $i > 0$. Vì vậy, áp dụng tính chất δ-hàm tử đối đồng điều vào dãy khớp

$$0 \longrightarrow (0 :_M xR) \longrightarrow M \longrightarrow M/(0 :_M xR) \longrightarrow 0,$$

ta thu được dãy khớp dài

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{a}}(0 :_M xR) &\longrightarrow H^0_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow H^0_{\mathfrak{a}}(M/0 :_M xR) \\ &\longrightarrow 0 \longrightarrow H^1_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{a}}(M/0 :_M xR) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \\ &\longrightarrow 0 \longrightarrow H^i_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{a}}(M/0 :_M xR) \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots \end{aligned}$$

Do đó, ta thu được kết quả

$$H^i_{\mathfrak{a}}(M) \cong H^i_{\mathfrak{a}}(M/0 :_M xR), \text{ với mọi } i \geqslant 1. \qquad (1)$$

Tiếp theo, ta xét dãy khớp

$$0 \longrightarrow M/(0 :_M xR) \xrightarrow{.x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0.$$

Lại áp dụng tính chất δ-hàm tử đối đồng điều vào dãy khớp trên, kết hợp với (1) ta được hai dãy khớp

$$0 \longrightarrow H^i_{\mathfrak{a}}(M)/xH^i_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{a}}(M/xM) \longrightarrow (0 :_{H^{i+1}_{\mathfrak{a}}(M)} xR) \longrightarrow 0 \quad (2)$$

với mọi $i \geqslant 1$ và

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{a}}(M/0 :_M xR) \longrightarrow H^0_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^0_{\mathfrak{a}}(M/xM) \longrightarrow (0 :_{H^1_{\mathfrak{a}}(M)} xR) \longrightarrow 0. \qquad (3) \end{aligned}$$

(chú ý rằng x có thể không nằm trong $\mathfrak{a}$ nên $H^0_{\mathfrak{a}}(M/0 :_M xR)$ có thể khác 0, vì nếu ngược lại, $x \in \mathfrak{a}$ thì một phần tử bất kỳ

$$b \in H^0_{\mathfrak{a}}(M/0 :_M xR) = \bigcup_{n \geqslant 0} (0 :_{M/0:_M xR} \mathfrak{a}^n)$$

sẽ thuộc vào môđun $0 :_M xR$ và do đó sẽ bằng 0 trong môđun $M/0 :_M xR$, dẫn đến $H^0_{\mathfrak{a}}(M/0 :_M xR) = 0$. Vì vậy, từ dãy khớp (2) và giả thiết, ta có $H^i_{\mathfrak{a}}(M/xM)$ là Artin với mọi $i = 1, \ldots, t-1$. Sử dụng giả thiết quy nạp ta thu được

$$\text{N-dim}_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M/xM)) \leqslant i,$$

với mọi $i = 0, 1, \ldots, t-1$. Vì thế, áp dụng Mệnh đề 1.1.3 vào dãy khớp (2), ta được $\text{N-dim}_R(0 :_{H^{i+1}_{\mathfrak{a}}(M)} xR) \leqslant \text{N-dim}_R H^i_{\mathfrak{a}}(M/xM) \leqslant i$, với mọi $i = 0, 1, \ldots, t-1$. Cuối cùng, sử dụng Mệnh đề 1.2.7 về tính chất của phần tử tham số, ta được điều cần chứng minh

$$\text{N-dim}_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M)) \leqslant i, \text{ với mọi } i = 0, 1, \ldots, t.$$

□

Theo Định lý 2.1.3, (i), môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ với giá cực đại $\mathfrak{m}$ luôn là môđun Artin với mọi i. Vì vậy, hệ quả trực tiếp của Định lý 2.3.1 là kết quả sau.

Hệ quả 2.3.2. $\text{N-dim}_R(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) \leqslant i$, *với mọi* i.

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán, địa phương, Noether. Ký hiệu bao nội xạ của trường thặng dư $R/\mathfrak{m}$ là E. Ta đã biết rằng đối ngẫu Matlis $\mathrm{Hom}_R(M; E)$ của môđun hữu hạn sinh M luôn là R-môđun Artin, nhưng đối ngẫu Matlis $\mathrm{Hom}_R(A; E)$ của một môđun Artin A nhìn chung không là môđun hữu hạn sinh. Tuy nhiên, nếu R là vành địa phương đầy đủ và ký hiệu $D(\square) = \mathrm{Hom}_R(\square; E)$ thì ta luôn có kết quả sau ([11, Định lý 4.2] hoặc xem thêm [17, Định lý 2.1, Bổ đề 2.4]).

Mệnh đề 2.3.3. *(i) R-môđun E là Artin. Với mỗi $f \in \mathrm{Hom}_R(E; E)$, tồn tại duy nhất $a_f \in R$ sao cho $f(x) = a_f x$, với mọi $x \in E$.*

(ii) Nếu N là R-môđun Noether, thì $D(N)$ là Artin, nếu A là R-môđun Artin, thì $D(A)$ là Noether.

(iii) Cho $I \subset R$ là iđêan của R và $j \in \mathbb{N}$. Khi đó

$$D(N/I^jN) \cong (0 :_{D(N)} I^j) \text{ và } D(0 :_A I^j) \cong D(A)/I^jD(A).$$

Mệnh đề sau cho ta điều kiện cần để đối ngẫu Matlis của môđun đối đồng điều địa phương là môđun hữu hạn sinh.

Mệnh đề 2.3.4. *Cho $\mathfrak{a}$ là iđêan của R và i là số nguyên dương. Nếu $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ là R-môđun Artin và đối ngẫu Matlis của nó là R-môđun hữu hạn sinh thì*

$$\text{N-dim}_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M)) = \dim_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M)).$$

Chứng minh. Đặt

$$K^i_{\mathfrak{a}}(M) := \mathrm{Hom}_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M), E(R/\mathfrak{m}))$$

là đối ngẫu Matlis của R-môđun $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ và $\widehat{K^i_{\mathfrak{a}}(M)}$ là đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic của $K^i_{\mathfrak{a}}(M)$. Vì $K^i_{\mathfrak{a}}(M)$ là R-môđun hữu hạn sinh theo giả thiết nên ta có

$$\dim_R(K^i_{\mathfrak{a}}(M)) = \dim_{\widehat{R}}(\widehat{K^i_{\mathfrak{a}}(M)}).$$

Do $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ là môđun Artin nên ta có đẳng cấu $H^i_{\mathfrak{a}}(M) \cong H^i_{\mathfrak{a}\widehat{R}}(\widehat{M})$ các $\widehat{R}$-môđun. Ký hiệu E là bao nội xạ của $R/\mathfrak{m}$ và E' là bao nội xạ của $\widehat{R}/\mathfrak{m}\widehat{R}$. Khi đó ta có đẳng cấu $E \cong E'$ xét như $\widehat{R}$-môđun. Theo tính chất của đầy đủ [12, Định lý 55], ta có

$$(\widehat{K^i_{\mathfrak{a}}(M)}) \cong K^i_{\mathfrak{a}}(M) \otimes \widehat{R} \cong K^i_{\mathfrak{a}}(M)$$

như là $\widehat{R}$-môđun, do đó ta nhận được

$$\dim_R(K^i_{\mathfrak{a}}(M)) = \dim_{\widehat{R}}(\widehat{K^i_{\mathfrak{a}}(M)}) = \dim_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{a}}(M)).$$

Hơn nữa, theo Bổ đề 1.1.7, (ii) ta lại có

$$\dim_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{a}}(M)) = \text{N-}\dim_{\widehat{R}}(H^i_{\mathfrak{a}}(M)) = \text{N-}\dim_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M)).$$

Vì vậy, cuối cùng ta nhận được điều phải chứng minh

$$\dim_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M)) = \dim_R(K^i_{\mathfrak{a}}(M)) = \text{N-}\dim_R(H^i_{\mathfrak{a}}(M)).$$

□

Cho M là môđun hữu hạn sinh với chiều Krull $\dim_R(M) = d$. Theo Định lý 2.1.3, ta luôn có môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất $H^d_{\mathfrak{a}}(M)$ là môđun Artin. Kết quả chính thứ hai của chương này là định lý sau, cho ta mối quan hệ giữa chiều Noether của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với giá là một iđêan bất kỳ và chiều Krull của môđun hữu hạn sinh ban đầu.

Định lý 2.3.5. *Cho* $\mathfrak{a}$ *là iđêan của* R *sao cho môđun Artin* $H^d_{\mathfrak{a}}(M)$ *là khác* 0. *Khi đó*

$$\text{N-dim}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) = d$$

và do đó, $H^d_{\mathfrak{a}}(M)$ *không là hữu hạn sinh nếu* $d > 0$.

Chứng minh. Ta có thể giả thiết mà không làm mất tính tổng quát là $\operatorname{Ann}_R M = 0$, dẫn đến $\dim R = d$. Vì M là R-môđun hữu hạn sinh nên tồn tại số nguyên n và dãy khớp các R-môđun

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R^n \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

Vì thế, ta có dãy khớp cảm sinh

$$(H^d_{\mathfrak{a}}(R))^n \longrightarrow H^d_{\mathfrak{a}}(M) \longrightarrow 0.$$

Vì $\dim R = d$ nên theo Định lý 2.1.3, (ii) ta có $H^d_{\mathfrak{a}}(R)$ là R-môđun Artin và

$$\operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^d_{\mathfrak{a}}(R)) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} \widehat{R} \mid \dim \widehat{R}/\mathfrak{p} = d, \dim \widehat{R}/(\mathfrak{a}\widehat{R} + \mathfrak{p}) = 0\}.$$

Từ dãy khớp trên ta có

$$\operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) \subseteq \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^d_{\mathfrak{a}}(R)).$$

Vì $H^d_{\mathfrak{a}}(M) \neq 0$ nên $\operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) \neq \emptyset$. Do đó, theo Bổ đề 1.1.7, (ii) ta có

$$\text{N-dim}_R(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) = \text{N-dim}_{\widehat{R}}(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) = \dim_{\widehat{R}}(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) = d.$$

Tiếp theo, từ định nghĩa chiều Noether, ta có $H^d_{\mathfrak{a}}(M)$ là môđun hữu hạn sinh nếu và chỉ nếu $\text{N-dim}(H^d_{\mathfrak{a}}(M)) = 0$. Do đó, kết quả trên dẫn đến khẳng định thứ hai của định lý, đó là $H^d_{\mathfrak{a}}(M)$ không là môđun hữu hạn sinh khi $d > 0$. □

Hiển nhiên rằng nếu $M \neq 0$ thì $H^d_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0$. Do đó, ta có ngay hệ quả sau.

Hệ quả 2.3.6. $\text{N-dim}_R(H^d_{\mathfrak{m}}(M)) = d$.

Chương 3

Mối quan hệ giữa chiều Noether và chiều Krull

Trong chương này, vẫn ký kiệu $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán, địa phương, Noether, M là R-môđun hữu hạn sinh và A là R-môđun Artin. Đã có một số khái niệm về chiều cho các môđun được đưa ra. Trước hết, chiều Krull của M, ký hiệu là $\dim_R M$ được định nghĩa là chiều Krull của vành $R/\operatorname{Ann}_R(M)$. Trong chương 1, ta đã nhắc lại khái niệm chiều Krull (Kdim) cho một môđun tuỳ ý của Roberts [16] và sau đó Kirby đã đổi thành chiều Noether (N-dim) để tránh nhầm lẫn với chiều Krull đã được định nghĩa ở trên.

Nhiều tác giả đã nghiên cứu các môđun Artin thông qua chiều Noether (xem [3], [4], [8], [16],[19],...). Mục tiêu của chương này là giới thiệu các kết quả của N, T. Cường và L. T. Nhàn trong [4]: nghiên cứu sâu hơn về chiều Noether cho môđun Artin, so sánh chiều Krull và chiều Noether và quan tâm đặc biệt tới điều kiện để chiều Krull $\dim_R A$ và chiều Noether $\text{N-}\dim_R A$ của một môđun Artin A là bằng nhau.

3.1 Chiều Krull của môđun Artin

Đối với mỗi môđun Artin, một cách tự nhiên ta cũng có khái niệm chiều như sau.

Định nghĩa 3.1.1. *Chiều Krull* của môđun Artin A, ký hiệu bởi $\dim_R A$, là chiều Krull của vành $R/\operatorname{Ann}_R A$. Ta quy ước $\dim_R A = -1$ nếu $A = 0$.

Lý thuyết biểu diễn thứ cấp của I. G. Macdonald [10] đã được nhắc lại ở Chương 2. Vì mọi môđun Artin đều có biểu diễn thứ cấp và tập các iđêan nguyên tố tối thiểu của $\operatorname{Ann}_R A$ cũng chính là tập các phần tử tối thiểu của $\operatorname{Att}_R A$ nên $\dim_R A$ chính là cận trên của các số $\dim R/\mathfrak{p}$ khi $\mathfrak{p}$ chạy khắp tập iđêan nguyên tố gắn kết

$$\dim_R A = \max\{\dim R/\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R A\}.$$

Kết quả sau chỉ ra mối quan hệ giữa $\text{N-}\dim_R A$ và $\dim_R A$.

Mệnh đề 3.1.2. *Các phát biểu sau là đúng*

(i) $\text{N-}\dim_R A = 0$ *nếu và chỉ nếu* $\dim_R A = 0$. *Trong trường hợp này, A có độ dài hữu hạn và vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ là Artin.*

(ii) $\text{N-}\dim_R A \leqslant \dim_R A$.

Chứng minh. (i) Giả sử $\text{N-}\dim_R A = 0$, khi đó A là R-môđun Noether và $\ell_R(A) < \infty$. Vì vậy, theo [12, 12.B], ta có vành $R/\operatorname{Ann}_R A$ là Artin và $\dim_R A = 0$. Ngược lại, giả sử $\dim_R A = 0$. Khi đó, mọi iđêan nguyên tố chứa $\operatorname{Ann}_R A$ đều là iđêan cực đại. Gọi J là giao của tất cả iđêan nguyên tố chứa trong $\operatorname{Att}_R A$, khi đó theo Mệnh đề 2.2.2, (i) và ký hiệu J_A ta có

$$J = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R A} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R A, \mathfrak{p} \text{ tối thiểu}} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann}_R A)} \mathfrak{p} = J_A.$$

Vì thế, tồn tại $n \in \mathbb{N}$ sao cho $J_A^n A = 0$. Suy ra $\ell_R A < \infty$ theo Bổ đề 1.2.1. Do đó $\text{N-}\dim A = 0$.

(ii) Ta chứng minh bằng quy nạp theo $d = \dim_R A$. Nếu $d = 0$ thì $\text{N-dim}\, A = 0$, theo (i). Giả sử $d > 0$ và $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_k$ là tất cả các iđêan nguyên tố trong tập $\operatorname{Att}_R A$ sao cho $\dim R/\mathfrak{p}_i = d$, với mọi $i = 1, \ldots, k$. Vì A là môđun Artin nên theo Mệnh đề 1.1.4, tập $\operatorname{Supp} A$ chỉ gồm hữu hạn các iđêan cực đại của R. Cho J_A là giao của tất cả iđêan cực đại trong tập $\operatorname{Supp} A$ như trong Ký hiệu 1.1.5. Khi đó ta có thể chọn được phần tử $x \in J_A$ và $x \notin \mathfrak{p}_i$, với mọi $i = 1, \ldots, k$. Vì thế $\dim_R(0 :_A xR) \leqslant d - 1$. Do đó, theo giả thiết quy nạp, ta cũng có $\text{N-dim}(0 :_A xR) \leqslant d - 1$. Theo Mệnh đề 1.2.7 ta có $\text{N-dim}\, A \leqslant d$. □

Kết quả sau là hệ quả trực tiếp của Mệnh đề 3.1.2

Hệ quả 3.1.3. *Nếu $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương đầy đủ thì ta luôn có* $\text{N-dim}_R A = \dim_R A$.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.1.2 đã có $\text{N-dim}_R A \leqslant \dim_R A$, chỉ cần chứng minh $\text{N-dim}\, A \geqslant \dim_R A$. Ta chứng minh bằng quy nạp theo $d = \text{N-dim}\, A$. Nếu $d = 0$ thì $\dim_R A = 0$ theo Mệnh đề 3.1.2. Giả sử $d > 0$ và $x \in \mathfrak{m}$ là một phần tử tham số của A. Khi đó áp dụng Mệnh đề 1.2.7 ta được $\text{N-dim}(0 :_A x) = d - 1$, theo giả thiết quy nạp ta có $\dim_R(0 :_A x) \leqslant d - 1$. Vì R là vành địa phương đầy đủ nên theo Mệnh đề 2.3.3, $\operatorname{Hom}_R((0 :_A x); E)$ là R-môđun hữu hạn sinh. Vì vậy, theo Mệnh đề 2.3.3, (iii), ta có

$$\begin{aligned} d - 1 \geqslant \dim_R(0 :_A x) &= \dim_R(\operatorname{Hom}_R((0 :_A x); E)) \\ &= \dim_R(\operatorname{Hom}_R(A; E)/x \operatorname{Hom}_R(A; E)) \\ &\geqslant \dim_R(\operatorname{Hom}(A; E)) - 1 = \dim_R A - 1. \end{aligned}$$

Vậy, ta có điều cần chứng minh. □

Theo Định lý 1.2.5 ở Chương 1, $\text{N-dim}_R A$ luôn hữu hạn. Tuy nhiên, ví dụ sau cho thấy rằng nếu R không là vành địa phương thì sự khác nhau giữa $\text{N-dim}\, A$ và $\dim_R A$ có thể là vô hạn.

Ví dụ 3.1.4. *Tồn tại môđun Artin A trên vành Noether, không địa phương sao cho* $\dim_R A = \infty$.

Chứng minh. Cho $T = k[x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ là một vành đa thức vô hạn biến $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ lấy hệ số trên trường k. Cho $m_1, \ldots, m_n, \ldots$ là các số nguyên dương sao cho $m_i - m_{i-1} < m_{i+1} - m_i$ với mọi i. Cho $\mathfrak{p}_i$ là iđêan nguyên tố của T được sinh bởi tất cả phần tử x_j sao cho $m_i < j < m_{i+1}$. Đặt

$$S = \bigcap_{T_i = T \setminus \mathfrak{p}_i} T_i \text{ và } R = T_S.$$

Khi đó, theo [14, A1,Ví dụ 1], ta có R là một vành Noether và $\dim R = \infty$. Đặt $A = E(R/\mathfrak{m})$ là bao nội xạ của trường thặng dư $R/\mathfrak{m}$, với $\mathfrak{m}$ là một iđêan cực đại nào đó của R. Khi đó A là Artin và ta có thể kiểm tra được $\operatorname{N-dim}_R A = \operatorname{ht}(\mathfrak{m})$. Ta cũng có thể kiểm tra được rằng R là miền nguyên, vì thế $\operatorname{Ann}_R A = 0$ và do đó $\dim_R A = \dim R = \infty$. $\square$

Cho A là một R-môđun Artin. Khi đó, A là biểu diễn được. Hơn nữa, theo Mệnh đề 1.1.4 và Mệnh đề 1.1.6, A có cấu trúc tự nhiên của $R_{\mathfrak{m}_j}$-môđun Artin và $\widehat{R_{\mathfrak{m}_j}}$-môđun Artin, với $\mathfrak{m}_j \in \operatorname{Supp} A, j = 1, \ldots, r$. Từ đó ta có các kết quả sau (xem [17, Bổ đề 1.8, Hệ quả 1.12, Hệ quả 2.7]).

Mệnh đề 3.1.5. *Các mệnh đề sau là đúng.*

(i) $\operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{m}_j}} A = \{\mathfrak{p} R_{\mathfrak{m}_j} : \mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R A\}$.

(ii) $\operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{m}_j}} A = \{\widehat{\mathfrak{q}} \cap R : \widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R_{\mathfrak{m}_j}}} A\}$.

Mệnh đề 3.1.2 chỉ ra rằng nhìn chung $\operatorname{N-dim}_R A \leqslant \dim_R A$. Tuy nhiên, ví dụ sau cho thấy rằng có những trường hợp xảy ra dấu nhỏ hơn thực sự.

Ví dụ 3.1.6. *Tồn tại môđun Artin A trên vành Noether, địa phương* $(R, \mathfrak{m})$ *sao cho* $\operatorname{N-dim}_R A < \dim_R A$.

Chứng minh. Cho $(R, \mathfrak{m})$ là miền nguyên, chiều 2 được xây dựng bởi Ferrand và Raynaud [20] sao cho vành địa phương đầy đủ $\widehat{R}$ của R có một iđêan nguyên tố liên kết $\widehat{\mathfrak{q}}$ chiều 1 (xem thêm Nagata [14, A1, Ví dụ 2]). Vì $\widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Ass}(\widehat{R}), \dim \widehat{R}/\widehat{\mathfrak{q}} = 1$ và chú ý rằng ta có đẳng cấu giữa các $\widehat{R}$-môđun

$$H^1_{\mathfrak{m}}(R) \cong H^1_{\widehat{\mathfrak{m}}}(\widehat{R})$$

nên theo [1, Định lý 11.3.3] của Brodmann-Sharp, ta có $\widehat{\mathfrak{q}} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(H^1_{\mathfrak{m}}(R))$. Theo Mệnh đề 3.1.5 suy ra

$$\mathfrak{q} = \widehat{\mathfrak{q}} \cap R \in \operatorname{Att}_R(H^1_{\mathfrak{m}}(R)).$$

Hơn nữa, do R là miền nguyên nên $\operatorname{Ass}(R) = \{0\}$, vì thế

$$\mathfrak{q} = \widehat{\mathfrak{q}} \cap R \in \operatorname{Ass}(R) = \{0\}.$$

Do đó suy ra

$$\operatorname{Ann}_R(H^1_{\mathfrak{m}}(R)) = \operatorname{Ann}_{\widehat{R}}(H^1_{\mathfrak{m}}(R)) \cap R \subset \widehat{\mathfrak{q}} \cap R = 0.$$

Vì thế, ta có

$$\dim_R(H^1_{\mathfrak{m}}(R)) = \dim R/\operatorname{Ann}_R(H^1_{\mathfrak{m}}(R)) = \dim R = 2.$$

Mặt khác, theo Định lý 2.3.1 và Mệnh đề 3.1.2,(i) ta có $\operatorname{N-dim}_R(H^1_{\mathfrak{m}}(R)) = 1$. Vậy, ta đã chỉ ra được sự tồn tại của môđun Artin $A = H^1_{\mathfrak{m}}(R)$ sao cho $\operatorname{N-dim}_R A = 1 < 2 = \dim_R A$. □

3.2 Điều kiện $\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$

Các kết quả của mục 3.1 cho thấy không phải khi nào ta cũng có đẳng thức $\operatorname{N-dim}_R A = \dim_R A$. Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là khi nào thì ta có đẳng thức trên. Để trả lời cho câu hỏi này, trước hết ta nhắc lại kết quả sau.

Bổ đề 3.2.1. *Với mỗi R-môđun hữu hạn sinh M, ta luôn có đẳng thức $\operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M) = \mathfrak{p}$, với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann}_R M)$.*

Chứng minh. Hiển nhiên ta có bao hàm thức $\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M)$. Ngược lại, vì $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann}_R M) = \operatorname{Supp} M$ theo [18, Bổ đề 9.20] nên $M_\mathfrak{p} \neq 0$. Do đó

$$(M/\mathfrak{p}M)_\mathfrak{p} = M_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}M_\mathfrak{p} \neq 0$$

vì nếu ngược lại thì khi đó $M_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$, suy ra $M_\mathfrak{p} = 0$ theo Bổ đề Nakayama, dẫn đến mâu thuẫn. Vậy,

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp}(M/\mathfrak{p}M) = V(\operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M)) \text{ hay } \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R(M/\mathfrak{p}M).$$

□

Một câu hỏi tự nhiên đặt ra là đối ngẫu của kết quả trên có luôn đúng cho môđun Artin không. Để thuận tiện cho việc trả lời câu hỏi này, ta đưa ra khái niệm sau.

Định nghĩa 3.2.2. Ký hiệu $V(\operatorname{Ann}_R A)$ là tập hợp tất cả các iđêan nguyên tố chứa $\operatorname{Ann}_R A$. Ta nói rằng A *thoả mãn điều kiện (*)* nếu

$$\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}, \text{ với mọi } \mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann}_R A).$$

Ví dụ sau cho thấy rằng, câu trả lời của câu hỏi trên là phủ định ngay cả khi vành R là địa phương, nghĩa là tồn tại môđun Artin trên vành địa phương không thoả mãn điều kiện (*).

Ví dụ 3.2.3. *Tồn tại môđun Artin A trên vành Noether, địa phương $(R, \mathfrak{m})$ sao cho A không thoả mãn điều kiện (*).*

Chứng minh. Cho R và $A = H^1_\mathfrak{m}(R)$ như trong Ví dụ 3.1.6. Lấy tuỳ ý một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ sao cho $\mathfrak{p} \neq 0$ và $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. Vì $\operatorname{Ann}_R A = 0$ nên $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann}_R A)$. Lấy một phần tử $0 \neq x \in \mathfrak{p}$. Ta có dãy khớp sau

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{.x} R \longrightarrow R/xR \longrightarrow 0.$$

Theo tính chất của hàm tử đối đồng điều ta được dãy khớp dài

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}R \xrightarrow{.x} H^0_{\mathfrak{m}}(R) \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(R/xR) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(R) \xrightarrow{.x} H^1_{\mathfrak{m}}(R) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(R/xR) \longrightarrow \ldots$$

Chú ý rằng R là miền nguyên nên $H^0_{\mathfrak{m}}(R) = 0$, do đó ta thu được dãy khớp các môđun đối đồng điều địa phương

$$0 \longrightarrow H^0_{\mathfrak{m}}(R/xR) \longrightarrow H^1_{\mathfrak{m}}(R) \xrightarrow{.x} H^1_{\mathfrak{m}}(R).$$

Vì vậy,

$$H^0_{\mathfrak{m}}(R/xR) \cong (0 :_{H^1_{\mathfrak{m}}(R)} xR) = (0 :_A xR).$$

Vì $H^0_{\mathfrak{m}}(R/xR)$ có độ dài hữu hạn nên $(0 :_A xR)$ cũng có độ dài hữu hạn. Do $x \in \mathfrak{p}$ nên $0 :_A x \supseteq 0 :_A \mathfrak{p}$, suy ra độ dài của $0 :_A \mathfrak{p}$ cũng hữu hạn. Do đó $\mathrm{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p})$ là $\mathfrak{m}$-nguyên sơ. Vì thế ta có $\mathrm{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) \neq \mathfrak{p}$, nghĩa là A không thoả mãn điều kiện (*). $\square$

Tuy nhiên, lớp môđun Artin thoả mãn điều kiện (*) vẫn còn khá rộng và điều này chứng tỏ việc việc nghiên cứu điều kiện (*) là hữu ích. Để chỉ ra các lớp môđun này, trước hết, chúng ta nhắc lại khái niệm đối địa phương hoá của Melkersson và Schenzel [13] như sau: *Đối địa phương hoá* của R-môđun Artin A ứng với tập nhân đóng S là $S^{-1}R$-môđun $\mathrm{Hom}_R(S^{-1}R; A)$. Họ cũng chứng minh được rằng hàm tử $\mathrm{Hom}(S^{-1}R; -)$ là khớp và $\mathrm{coSupp}\, A = V(\mathrm{Ann}_R A)$, trong đó $\mathrm{coSupp}\, A$ là tập các iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ sao cho $\mathrm{Hom}_R(R_{\mathfrak{p}}; A) \neq 0$. Kết quả này cho phép ta đưa ra một số lớp môđun Artin thoả mãn điều kiện (*) như sau.

Bổ đề 3.2.4. *Nếu R là vành địa phương đầy đủ hoặc A chứa môđun con đẳng cấu với bao nội xạ của $R/\mathfrak{m}$ thì A thoả mãn điều kiện (*).*

Chứng minh. Giả sử R là vành đầy đủ. Khi đó, đối ngẫu Matlis $\mathrm{Hom}_R(A; E)$ là R-môđun hữu hạn sinh. Lấy $\mathfrak{p} \in V(\mathrm{Ann}_R A)$, suy ra $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_R(\mathrm{Hom}_R(A; E))$.

Vì vậy, áp dụng các kết của của đối ngẫu Matlis trong Mệnh đề 2.3.3 và Bổ đề 3.2.1, ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) &= \operatorname{Ann}_R\big(\operatorname{Hom}_R((0 :_A \mathfrak{p}); E)\big)\\ &= \operatorname{Ann}_R(\operatorname{Hom}_R(A; E)/\mathfrak{p}\operatorname{Hom}_R(A; E)) = \mathfrak{p}.\end{aligned}$$

Vì vậy, A thoả mãn điều kiện (*).

Xét trường hợp A chứa môđun con đẳng cấu với bao nội xạ của E. Lấy $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann}_R A)$. Theo [13, Bổ đề 4.1], ta có

$$\operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\operatorname{Hom}_R(R_\mathfrak{p}; A)) \supseteq \operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\operatorname{Hom}_R(R_\mathfrak{p}; E(R/\mathfrak{m}))) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} : \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Vì thế, ta có iđêan cực đại $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$ trong vành địa phương $R_\mathfrak{p}$ phải thuộc tập $\operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(\operatorname{Hom}_R(R_\mathfrak{p}; A))$. Điều này suy ra

$$(0 :_{\operatorname{Hom}_R(R_\mathfrak{p};A)} \mathfrak{p}R_\mathfrak{p}) \neq 0.$$

Suy ra $\operatorname{Hom}_R(R_\mathfrak{p}; (0 :_A \mathfrak{p})) \neq 0$. Do đó, theo [13, p.130] ta nhận được $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p})$ từ đó $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p})$. □

Định lý sau đây là kết quả chính của tiết này, cho ta điều kiện đủ để chiều Noether của một môđun Artin A bằng chiều Krull của nó.

Định lý 3.2.5. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, Noether và A là R-môđun Artin. Nếu A thoả mãn điều kiện (*) thì* $\operatorname{N-dim}_R A = \dim_R A$.

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.1.2, (ii) ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức $\dim_R A \leqslant \operatorname{N-dim}_R A$. Cho $\mathfrak{a}$ là iđêan bất kỳ của R. Vì

$$\operatorname{rad}\big(\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{a})\big) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\operatorname{Ann}_R(0:_A\mathfrak{a}))} \mathfrak{p}$$

và

$$\operatorname{rad}\big(\mathfrak{a} + \operatorname{Ann}_R A\big) = \bigcap_{\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a}+\operatorname{Ann}_R A)} \mathfrak{p},$$

hơn nữa, nếu $\mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{a})$ thì $\mathfrak{p} \supseteq (\mathfrak{a} + \operatorname{Ann}_R A)$ nên rõ ràng ta luôn có

$$\operatorname{rad}\big(\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{a})\big) \supseteq \operatorname{rad}\big(\mathfrak{a} + \operatorname{Ann}_R A\big).$$

Ta chứng minh bao hàm thức ngược lại. Với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ chứa $\mathfrak{a} + \operatorname{Ann}_R A$, vì $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$ nên $(0 :_A \mathfrak{p}) \subseteq (0 :_A \mathfrak{a})$. Do đó, theo giả thiết, ta có

$$\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{a}) \subseteq \operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \mathfrak{p}.$$

Vì thế,

$$\operatorname{rad}\big(\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{a})\big) \subseteq \operatorname{rad}\big(\mathfrak{a} + \operatorname{Ann}_R A\big).$$

Kết hợp với trên ta có đẳng thức.

Bây giờ, giả sử $\operatorname{N-dim}_R A = d$. Khi đó, theo Định nghĩa 1.2.6 về hệ tham số ở Chương 1, tồn tại các phần tử $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}$ sao cho $\ell_R(0 :_A (x_1, \ldots, x_d)R) < \infty$. Theo Mệnh đề 1.2.7 và áp dụng đẳng thức đã chứng minh ở trên vào iđêan $\mathfrak{a} = (x_1, \ldots, x_d)$, ta nhận được

$$\begin{aligned} 0 &= \dim_R(0 :_A (x_1, \ldots, x_d)R) \\ &= \dim_R\big(R/((x_1, \ldots, x_d)R + \operatorname{Ann}_R A)\big) \geqslant \dim_R A - d. \end{aligned}$$

Vì vậy, ta có $\dim_R A \leqslant d$. Kết hợp với Mệnh đề 3.1.2, (ii) ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chú ý rằng, chiều ngược lại của Định lý 3.2.5 là không đúng. Để chỉ ra ví dụ làm sáng tỏ nhận xét trên, ta cần nhắc lại khái niệm và một số tính chất của môđun các đa thức ngược đã được đưa ra bởi Macaulay [9] và đã được đề cập đến trong [7] và [16] như sau.

Định nghĩa 3.2.6. [9] Cho R là vành giao hoán có đơn vị và M là R-môđun. Khi đó, với mỗi số nguyên dương t, *môđun các đa thức ngược* $M[x_1^{-1}, \ldots, x_t^{-1}]$ của t biến trên vành $R[x_1, \ldots, x_t]$ được sinh bởi các phần tử có dạng $m = ax_1^{i_1} \ldots x_t^{i_t}$ với $a \in M$ và $i_1, \ldots, i_t$

là các số nguyên không dương. Phép cộng trong $M[x_1^{-1},\dots,x_t^{-1}]$ được định nghĩa theo cách tự nhiên và tích vô hướng được xác định như sau: với $m = ax_1^{i_1}\dots x_t^{i_t}$ thuộc $M[x_1^{-1},\dots,x_t^{-1}]$ và $x = rx_1^{j_1}\dots x_t^{j_t} \in R[x_1,\dots,x_t]$, trong đó $r \in R$ và $a \in M$, ta định nghĩa tích xm là phần tử $rax_1^{i_1+j_1}\dots x_t^{i_t+j_t}$ nếu tất cả $i_k + j_k$ đều không dương với mọi $k = 1, 2, \dots, t$ và bằng 0 trong trường hợp ngược lại.

Mệnh đề 3.2.7. [7], [16] *(i) Nếu A là R-môđun Artin thì môđun các đa thức ngược $A[x_1^{-1},\dots,x_t^{-1}]$ là $R[x_1,\dots,x_t]$-môđun Artin.*

(ii) Cho A là R-môđun Artin và đặt $S = R[x_1,\dots,x_t], K = A[x_1^{-1},\dots,x_t^{-1}]$. Khi đó

$$\text{N-dim}_S K = \text{N-dim}_R A + t.$$

Ví dụ sau chỉ ra rằng điều kiện (*) chỉ là điều kiện đủ để một môđun Artin có chiều Noether bằng chiều Krull của nó.

Ví dụ 3.2.8. *Tồn tại môđun Artin A trên vành Noether, địa phương $(R,\mathfrak{m})$ sao cho $\text{N-dim}_R A = \dim_R A$, nhưng A không thoả mãn điều kiện (*).*

Chứng minh. Giả sử rằng tồn tại những môđun Artin A', A'' trên vành địa phương Noether R sao cho các điều kiện sau thoả mãn

(i) $\text{N-dim}_R A' = \dim_R A' > \dim_R A'' > \text{N-dim}_R A''$.

(ii) Tồn tại iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \in V(\text{Ann}_R A'')$ và $\mathfrak{p} \notin V(\text{Ann}_R A')$ sao cho $\text{Ann}_R(0 :_{A''} \mathfrak{p}) \neq \mathfrak{p}$.

Đặt $A = A' \oplus A''$. Khi đó, ta có dãy khớp

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0.$$

Sử dụng tính chất về chiều Noether và chiều Krull của các môđun của một dãy khớp trong Mệnh đề 1.1.3 với chú ý rằng $\text{Ann}_R A \subseteq \text{Ann}_R A''$, ta có A thoả mãn các điều sau:

1. A là R-môđun Artin.
2. $\text{N-dim}_R A = \text{N-dim}_R A' = \dim_R A' = \dim_R A$.
3. $\mathfrak{p} \in V(\operatorname{Ann}_R A)$.

Tuy nhiên, theo giả thiết ta có

$$\operatorname{Ann}_R(0 :_A \mathfrak{p}) = \operatorname{Ann}_R(0 :_{A'} \mathfrak{p}) \cap \operatorname{Ann}_R(0 :_{A''} \mathfrak{p}) \neq \mathfrak{p}.$$

Điều này chứng tỏ A không thoả mãn điều kiện (*).

Bây giờ, chúng ta sẽ chỉ ra sự tồn tại của môđun A' và A'' ở trên. Cho R là miền nguyên chiều 2 như trong Ví dụ 3.1.6. Cho $S = R[[x_1, \ldots, x_t]]$, với $t \geqslant 3$ là vành các chuỗi luỹ thừa hình thức t biến $x_1, \ldots, x_t$ trên vành R. Lấy $A' = k[[x_1^{-1}, \ldots, x_t^{-1}]]$ là môđun các đa thức ngược trên trường $k = R/\mathfrak{m}$. Khi đó, theo Mệnh đề 3.2.7, A' là S-môđun Artin và $\text{N-dim}_S A' = t$. Vì $\operatorname{Ann}_S A' = \mathfrak{m}S$ nên

$$\dim_S A' = \dim(k[[x_1, \ldots, x_t]]) = t.$$

Cho $A'' = H^1_{\mathfrak{m}}(R)$ là S-môđun đối đồng điều địa phương sao cho $x_i.A'' = 0$ với mọi $i = 1, \ldots, t$. Khi đó mỗi tập con của A'' là R-môđun con của A'' khi và chỉ khi nó là S-môđun con của A''. Vì vậy A'' cũng là S-môđun Artin và

$$\dim_S A'' = 2;\ \text{N-dim}_S A'' = 1.$$

Rõ ràng rằng $\operatorname{Ann}_S A'' = (x_1, \ldots, x_t)S$. Cho $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ là một iđêan của S sao cho $\mathfrak{p} \not\supseteq \operatorname{Ann}_S A''$. Khi đó $\mathfrak{p} \notin V(\operatorname{Ann}_S A')$. Bằng cách tính tương tự như trong Ví dụ 3.2.3, ta có điều cần chứng minh

$$\operatorname{Ann}_S(0 :_A \mathfrak{p}) \neq \mathfrak{p}.$$

□

Hệ quả 3.2.9. *Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành địa phương, Noether và A là R-môđun Artin. Ký hiệu $\widehat{R}$ là đầy đủ theo tôpô $\mathfrak{m} - adic$ của R. Khi đó ta có*

$$\text{N-dim}_R A = \dim_{\widehat{R}} A.$$

Chứng minh. Vì A có cấu trúc tự nhiên là $\widehat{R}$-môđun Artin nên theo Bổ đề 1.1.7, (ii), ta có $\text{N-dim}_R A = \text{N-dim}_{\widehat{R}} A$. Mặt khác, A cũng thoả mãn điều kiện (*) trên $\widehat{R}$ theo Bổ đề 3.2.4. Vì thế, từ Định lý 3.2.5, ta có ngay

$$\text{N-dim}_R A = \text{N-dim}_{\widehat{R}} A = \dim_{\widehat{R}} A.$$

□

Kết luận

Tóm lại, trong luận văn này chúng tôi đã trình bày lại và chứng minh chi tiết các kết quả trong bài báo: *"On Noetherian dimension of Artinian modules"* của N. T. Cường - L. T. Nhàn (2002) và một phần kết quả của các bài báo: *"Krull dimension for Artinian modules over quasi-local commutative rings"* của R. N. Roberts (1975); *"Dimension and length for Artinian modules"* của D. Kirby (1990) và *"Dimension, multiplicity and Hilbert function of Artinian modules"* của N. T. Cường - L. T. Nhàn (1999). Kết quả chính của luận văn gồm các nội dung sau.

1. Hệ thống lại một số tính chất của môđun Artin có liên quan đến nội dung của luận văn.

2. Giới thiệu khái niệm chiều Noether và chứng minh một số kết quả về chiều Noether của môđun Artin. Đặc biệt là chứng minh tính hữu hạn của chiều Noether và mối liên hệ giữa chiều Noether với bậc của đa thức Hilbert của một môđun Artin.

3. Nghiên cứu chiều Noether của các môđun đối đồng điều địa phương của một R-môđun hữu hạn sinh khi chúng là Artin: mối quan hệ giữa chiều Noether của môđun đối đồng điều địa phương thứ i với chỉ số i và chiều Noether của môđun đối đồng điều địa phương cấp cao nhất với chiều Krull của môđun hữu hạn sinh ban đầu.

4. Trình bày mối quan hệ giữa chiều Noether và chiều Krull của môđun Artin trong trường hợp tổng quát: $\text{N-dim}_R A \leqslant \dim_R A$; chỉ ra những trường hợp xảy ra dấu nhỏ hơn thực sự và điều kiện đủ để khi nào chiều Noether của một môđun Artin bằng chiều Krull của nó.

Tài liệu tham khảo

[1] Brodmann, M. and R. Y. Sharp (1998), *Local Cohomology: An Algebraic Introduction with Geometric Applications,* Cambridge University Press, Cambridge.

[2] N. T. Cuong, N. T. Dung and L. T. Nhan (2007), "Top local cohomology and the catenary of the unmixed support of a finitely generated module", Comm. Algebra **5(35)**, pp. 1691-1701.

[3] N. T. Cuong and L. T. Nhan (1999), "Dimension, multiplicity and Hilbert function of Artinian modules", *East-West J. Math.,* 1 (2), pp. 179-196.

[4] N. T. Cuong and L. T. Nhan (2002), "On Noetherian dimension of Artinian modules", *Vietnam J. Math.,* 30, pp. 121-130.

[5] Denizler, I. H. and R. Y. Shap (1996), "Co-Cohen-Macaulay modules over commutative rings", *Glasgow Math. J.* 38, pp. 359-366.

[6] Grothendieck, A. (1966), "Local homology", Lect. Notes in Math. 20, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York .

[7] Kirby D. (1973), "Artinian modules and Hilbert polynomials", *Quart. J. Math. Oxford* (Ser. 2) 24 (2), pp. 47-57.

[8] Kirby, D. (1990), "Dimension and length for Artinian modules", *Quart. J. Math. Oxford*, (Ser. 2) 41 (2), pp. 419-429.

[9] Macaulay, F. S. (1916), "Algebraic Theory of Modular system", *Cambridge Tracts* 19.

[10] Macdonald, I. G. (1973), "Secondary representation of modules over a commutative ring", *Symposia Mathematica*. 11, pp. 23-43.

[11] Matlis, E. (1958), "Injective modules over Noetherian rings", *Pacific J. Math*. 8, pp. 511-528.

[12] Matsumura, H. (1970), *Commutative Algebra*, Benjamin.

[13] Melkersson, L. and P. Schenzel (1995), "The co-localization of an Artinian module", *Proc. Edinburgh Math. Soc*. 38, pp. 121-131.

[14] Nagata M., (1962), *Local ring*, Interscience, New York.

[15] L. T. Nhan and T. N. An., (2008), *On the unmixedness and universal catenaricity of ring and local cohomology modules*. Preprint.

[16] Roberts, R. N. (1975), "Krull dimension for Artinian modules over quasi-local commutative rings", *Quart. J. Math. Oxford,* (Ser. 2) 26, pp. 269-273.

[17] Sharp, R. Y. (1989) "A method for the study of Artinian modules with an application to asymptotic Behaviour," in: *Commutative Algebra*, Math. Sci. Res. Inst. Publ. No. 15, Spinger-Verlag, New York, pp. 443-465.

[18] Sharp, R. Y. (1990) *Steps in commutative algebra*. Cambridge University Press.

[19] Tang, Z. and H. Zakeri (1994), "Co-Cohen-Macaulay modules and modules of generalized fractions", *Comm. Algebra.,* 22 (6), pp. 2173-2204.

[20] Ferrand D. and M. Raynaud (1970), "Fibres formelles d'un anneau local Noetherian," *Ann. Sci. E'cole Norm. Sup.,* 3 (4), pp. 295-311.