

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM
----  ----

PHẠM XUÂN THÁM

**BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC ỨNG DỤNG SỐ PHỨC VÀO GIẢI
TOÁN HÌNH HỌC PHẪNG VÀ LƯỢNG GIÁC CHO HỌC
SINH KHÁ GIỎI TRUNG HỌC PHỔ THÔNG**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC GIÁO DỤC

THÁI NGUYÊN - 2008

QUY ƯỚC VIẾT TẮT VÀ KÝ HIỆU

(?)	Câu hỏi hoặc bài tập kiểm tra
(!)	Dự đoán câu trả lời hoặc cách xử lý của học sinh
GV	Giáo viên
HS	Học sinh
NXB	Nhà xuất bản
SGK	Sách giáo khoa
THPT	Trung học phổ thông
TS	Tiến sĩ
TSKH	Tiến sĩ khoa học
XH	Xã hội
LS	Lịch sử

MỤC LỤC

	<i>Trang</i>
Mở Đầu	4
Ch- ơng 1 – Cơ sở lý luận và thực tiễn	8
<i>1.1. Lý luận về dạy học giải bài tập toán</i>	8
1.1.1. Mục đích, vị trí, vai trò và ý nghĩa của bài tập toán trong tr- ờng phổ thông	8
1.1.2. Chức năng của bài tập toán	10
1.1.3. Dạy học giải bài tập toán theo t- ư tưởng của G.Polya	13
<i>1.2. Lý luận về năng lực giải toán của học sinh</i>	17
1.2.1. Nguồn gốc của năng lực	18
1.2.2. Khái niệm về năng lực, năng lực toán học	18
1.2.3. Khái niệm về năng lực giải toán	20
1.2.4. Năng lực giải toán hình học phẳng và l- ợng giác bằng số phức	22
1.2.5. Bồi d- ỡng năng lực giải toán	41
<i>1.3. Tổng quan về số phức và thực trạng giảng dạy số phức và ứng dụng của số phức ở tr- ờng phổ thông</i>	43
1.3.1. Số phức	43
1.3.2. Biểu diễn một số khái niệm của hình học phẳng d- ới dạng ngôn ngữ số phức	48
1.3.3. Thực trạng dạy học ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và l- ợng giác ở tr- ờng THPT	51
<i>1.4. Kết luận ch- ơng 1</i>	55
Ch- ơng 2 – Xây dựng một số chuyên đề nhằm bồi d- ỡng năng lực ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và l- ợng giác	56
<i>2.1. Những định h- ớng cơ bản</i>	56
2.1.1. Định h- ớng về mặt mục tiêu và yêu cầu của việc ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và l- ợng giác cho học sinh khá giỏi ở tr- ờng THPT	56
2.1.2. Định h- ớng về mặt nội dung	57

2.1.3. Định h- ớng về mặt ph- ớng pháp	57
2.2. Xây dựng một số chuyên đề vận dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và l- ợng giác	60
2.2.1. Nguyên tắc xây dựng hệ thống bài tập, chuyên đề	60
2.2.2. Chuyên đề 1. Ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng	62
2.2.3. Chuyên đề 2. Ứng dụng số phức vào giải toán l- ợng giác	87
2.3. Bài tập tự luyện	108
2.4. Kết luận ch- ớng 2	109
Ch- ớng 3 – Thử nghiệm s- phạm	110
3.1. Mục đích thử nghiệm s- phạm	110
3.2. Tổ chức thử nghiệm	110
3.2.1. Nội dung thử nghiệm	110
3.2.2. Đối t- ợng thử nghiệm	110
3.2.3. Triển khai thử nghiệm	111
3.3. Kết quả thử nghiệm	111
3.4. Kết luận ch- ớng 3	115
Kết luận	117
Tài liệu tham khảo	118
Phụ lục	121

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài.

Đất nước ta đang trên con đường công nghiệp hóa và hiện đại hóa, để công cuộc đó thành công thì yếu tố con người là quyết định. Do vậy xã hội đang rất cần những con người có khả năng lao động tự chủ, sáng tạo, có năng lực giải quyết những vấn đề thường gặp, qua đó góp phần thực hiện thắng lợi các mục tiêu của Đất nước.

Luật giáo dục nước Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam năm 2005 đã ghi: “Phương pháp giáo dục phải phát huy tính tích cực, tự giác, chủ động, sáng tạo của người học, bồi dưỡng năng lực tự học, khả năng thực hành, lòng say mê học tập và ý chí vươn lên” (Chương I, điều 5).

Thực hiện nhiệm vụ trên trong những năm qua ngành Giáo dục đã và đang tích cực tiến hành đổi mới cả về nội dung và phương pháp dạy học.

Quan điểm chung về đổi mới phương pháp dạy học môn Toán ở trường THPT là làm cho HS học tập tích cực, chủ động, sáng tạo, chống lại thói quen học tập thụ động. Trong việc đổi mới phương pháp dạy học môn Toán ở trường THPT, việc bồi dưỡng năng lực giải toán cho HS khá giỏi là đặc biệt quan trọng và cần được bồi dưỡng thường xuyên bởi chính các em là thế hệ nhân tài tương lai của Đất nước.

Về nội dung môn Toán: Trong hệ thống kiến thức được đưa vào chương trình giảng dạy cho học sinh THPT, ngoài những nội dung quen thuộc của môn Toán như các Phép biến hình, Vectơ và tọa độ, Tập hợp, Phương trình và Bất phương trình, Hàm số và Đồ thị, những yếu tố của Phép tính vi tích phân, Đại số tổ hợp, ... thì Số phức đã được đưa vào chương trình Giải tích 12. Mục tiêu chính của việc đưa nội dung số phức vào chương trình môn toán ở trường THPT là hoàn thiện hệ thống số và khai thác một số ứng dụng khác của số phức trong Đại số, trong Hình học và trong Lượng giác.

Số phức xuất hiện từ thế kỷ XIX do nhu cầu phát triển của Toán học về giải những phương trình đại số. Từ khi ra đời số phức đã thúc đẩy toán học tiến lên mạnh mẽ và giải quyết được nhiều vấn đề của khoa học và kỹ thuật. Đối với HS bậc THPT thì số phức là một nội dung còn mới mẻ, với thời lượng không nhiều, HS mới chỉ biết được những kiến thức rất cơ bản của số phức, việc khai thác các ứng dụng của số phức còn hạn chế, đặc biệt là việc sử dụng số phức như một phương tiện để giải các bài toán Hình học phẳng và Lượng giác là một vấn đề khó, đòi hỏi HS phải có năng lực giải toán nhất định, biết vận dụng kiến thức đa dạng của toán học. Tuy nhiên dạy cho HS khá giỏi biết ứng dụng số phức vào việc giải các bài toán Hình học phẳng và Lượng giác có tác dụng lớn trong việc bồi dưỡng năng lực giải toán cho HS, đồng thời giúp HS khắc sâu, tổng hợp, hệ thống hóa được kiến thức cơ bản, dạng toán quen thuộc, giải quyết được một số bài toán khó, phức tạp chưa có thuật toán. Để đáp ứng được điều đó cũng đòi hỏi GV phải có hiểu biết cần thiết, có cách nhìn sâu sắc hơn về các ứng dụng của Số phức.

Mặc dù vậy SGK Giải tích 12 đưa số lượng bài tập ứng dụng Số phức vào giải toán Hình học phẳng và Lượng giác không nhiều. Hơn nữa, qua tìm hiểu thực tế giảng dạy thí điểm ở một số trường THPT, một số trường THPT chuyên vấn đề đưa số phức trở thành công cụ giải toán cho HS chưa được GV quan tâm và coi trọng đúng mức.

Với những lí do trên, chúng tôi chọn đề tài nghiên cứu là: ***“Bồi dưỡng năng lực ứng dụng số phức vào giải toán Hình học phẳng và Lượng giác cho học sinh khá giỏi Trung học phổ thông”***.

2. Mục đích nghiên cứu.

Nghiên cứu việc vận dụng số phức vào giải các bài toán Hình học phẳng và Lượng giác từ đó giúp HS thấy được ý nghĩa quan trọng của số phức trong toán học nói chung và trong giải toán nói riêng. Từ đó rèn luyện

kỹ năng, bồi dưỡng năng lực ứng dụng số phức vào giải bài toán Hình học phẳng và Lượng giác cho HS.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu.

- Nghiên cứu một số vấn đề về giải toán; năng lực và năng lực giải toán.
- Nghiên cứu cơ sở lý luận và thực tiễn của việc sử dụng số phức như một công cụ để giải toán Hình học phẳng và Lượng giác cho HS khá giỏi THPT.
- Xây dựng một số chuyên đề nhằm bồi dưỡng năng lực giải toán cho HS bằng số phức, góp phần phát triển, bồi dưỡng năng lực giải toán cho HS khá giỏi bậc THPT.

Thử nghiệm sư phạm để kiểm nghiệm tính khả thi của đề tài.

4. Giả thuyết khoa học.

Nếu xây dựng được một số chuyên đề ứng dụng số phức để giải các bài toán Hình học phẳng và Lượng giác, đồng thời đề xuất các biện pháp sư phạm phù hợp thì sẽ góp phần phát triển năng lực giải toán cho HS khá giỏi. Giúp HS khắc sâu kiến thức đã học, phát huy tính chủ động, tính tích cực trong việc tiếp thu kiến thức mới góp phần nâng cao chất lượng dạy và học ở trường THPT.

5. Phương pháp nghiên cứu.

5.1. Nghiên cứu lý luận.

- Nghiên cứu các tài liệu lý luận (triết học, giáo dục học, tâm lý học, lý luận dạy học bộ môn Toán) có liên quan tới đề tài của luận văn.
- Nghiên cứu SGK, sách tham khảo, tạp chí, các tài liệu trong nước và ngoài nước có liên quan đến nội dung ứng dụng số phức vào giải toán và bồi dưỡng năng lực giải toán của HS khá giỏi THPT.

5.2. Điều tra, quan sát.

Dự giờ, phỏng vấn, điều tra, thu thập ý kiến của GV (ở một số trường THPT tiến hành dạy thực nghiệm Giải tích 12, trường THPT chuyên) về thực trạng dạy học nội dung số phức và ứng dụng của số phức vào giải toán.

5.3. Thử nghiệm sư phạm.

Nhằm kiểm nghiệm thực tiễn một phần tính khả thi và hiệu quả của đề tài nghiên cứu.

6. Cấu trúc của luận văn.

Luận văn gồm phần "Mở đầu", "Kết luận" và ba chương.

Chương 1. Cơ sở lý luận và thực tiễn.

Chương 2. Xây dựng một số chuyên đề nhằm bồi dưỡng năng lực ứng dụng số phức vào giải một số dạng toán hình học phẳng và lượng giác.

Chương 3. Thử nghiệm sư phạm.

Danh mục tài liệu tham khảo và các phụ lục.

CHƯƠNG 1

CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN

1.1. Lý luận về dạy học giải bài tập toán.

1.1.1. Mục đích, vị trí, vai trò và ý nghĩa của bài tập toán trong trường phổ thông.

G.Polya cho rằng: “Trong toán học, nắm vững bộ môn toán quan trọng hơn rất nhiều so với một kiến thức thuần túy mà ta có thể bổ sung nhờ một cuốn sách tra cứu thích hợp. Vì vậy cả trong trường trung học cũng như trong các trường chuyên nghiệp, ta không chỉ truyền thụ cho HS những kiến thức nhất định, mà quan trọng hơn nhiều là phải dạy cho họ đến một mức độ nào đó nắm vững môn học. Vậy thế nào là nắm vững môn toán? Đó là biết giải toán!” [20 - Tr.82]. Trên cơ sở đó ta có thể thấy rõ hơn mục đích, vị trí, vai trò và ý nghĩa của bài tập toán trong trường THPT như sau.

1.1.1.1. Mục đích.

Để đào tạo được những con người đáp ứng được đòi hỏi của xã hội ngày nay, những con người năng động, sáng tạo, có tinh thần trách nhiệm, có trí tuệ, có khả năng lao động kỹ thuật cao,... trong các nhà trường THPT đã đặt ra nhiều mục đích, mục tiêu cụ thể cho việc đào tạo.

Toán học có vai trò to lớn trong đời sống, trong khoa học và công nghệ hiện đại, kiến thức toán học là công cụ để HS học tập tốt các môn học khác, giúp HS hoạt động có hiệu quả trong mọi lĩnh vực. Vì vậy, trong dạy toán nói chung, giải bài tập toán nói riêng cần xác định những mục đích cụ thể, sát thực. Có thể thấy rõ một số mục đích bài tập toán ở trường phổ thông là:

❖ Phát triển ở HS những năng lực và phẩm chất trí tuệ, giúp HS biết những tri thức khoa học của nhân loại được tiếp thu thành kiến thức của bản thân, thành công cụ để nhận thức và hành động đúng đắn trong các lĩnh vực hoạt động cũng như trong học tập hiện nay và sau này.

❖ Làm cho HS từng bước nắm được một cách chính xác, vững chắc và có hệ thống những kiến thức và kỹ năng toán học phổ thông cơ bản, hiện đại, phù hợp với thực tiễn và có năng lực vận dụng những tri thức đó vào những tình huống cụ thể, vào đời sống, vào lao động sản xuất, vào việc học tập các bộ môn khoa học khác.

❖ Thông qua việc giải bài tập, HS khắc sâu các kiến thức đã học, biết xâu chuỗi các kiến thức với nhau, kích thích sự tìm tòi, sáng tạo các kiến thức mới đối với HS. Qua đó rèn luyện tư duy logic, sáng tạo, tính kiên trì, cần cù, chịu khó... ở người HS.

❖ Bồi dưỡng thế giới quan duy vật biện chứng, hình thành những phẩm chất đạo đức của người lao động mới.

1.1.1.2. Vị trí và vai trò của bài tập toán.

Trong dạy học toán ở trường THPT, bài tập toán có vai trò vô cùng quan trọng, vì theo *Nguyễn Bá Kim*: “Ở trường phổ thông, dạy toán là dạy hoạt động toán học. Đối với HS có thể xem giải toán là hình thức chủ yếu của hoạt động toán học. Các bài tập toán ở trường phổ thông là một phương tiện rất có hiệu quả và không thể thay thế được trong việc giúp HS nắm vững những tri thức, phát triển tư duy, hình thành kỹ năng kỹ xảo, ứng dụng toán học vào thực tiễn. Hoạt động giải bài tập toán là điều kiện để thực hiện tốt các nhiệm vụ dạy học toán ở trường phổ thông. Vì vậy, tổ chức có hiệu quả việc dạy giải bài tập toán học có vai trò quyết định đối với chất lượng dạy học toán” [13 - Tr.201].

Cũng theo *Nguyễn Bá Kim*: “Bài tập toán học có vai trò quan trọng trong môn toán. Điều căn bản là bài tập có vai trò giá mang hoạt động của HS. Thông qua giải bài tập, HS phải thực hiện những hoạt động nhất định bao gồm cả nhận dạng và thể hiện định nghĩa, định lý, quy tắc hay phương pháp, những hoạt động toán học phức hợp, những hoạt động trí tuệ phổ biến trong

toán học, những hoạt động trí tuệ chung và những hoạt động ngôn ngữ”. [13 - Tr 388]

Như vậy bài tập toán ở trường phổ thông có vị trí, vai trò quan trọng trong hoạt động dạy, học toán ở trường THPT. Vì thế, cần lựa chọn các bài tập toán sao cho phù hợp với đối tượng và năng lực của HS, như thế mới phát huy được năng lực giải toán của HS.

1.1.1.3. Ý nghĩa.

Ở trường phổ thông, dạy toán là dạy hoạt động toán học. Đối với HS có thể xem việc giải toán là hình thức chủ yếu của hoạt động toán học. Việc giải toán có nhiều ý nghĩa. Cụ thể:

- ✓ Đó là hình thức tốt nhất để củng cố, đào sâu, hệ thống hóa kiến thức và rèn luyện kỹ năng. Trong nhiều trường hợp, giải toán là một hình thức rất tốt để dẫn dắt HS tự mình đi tìm kiến thức mới.
- ✓ Đó là một hình thức vận dụng những kiến thức đã học vào những vấn đề cụ thể, vào thực tiễn, vào vấn đề mới.
- ✓ Đó là hình thức tốt nhất để GV kiểm tra HS và học sinh tự kiểm tra về năng lực, về mức độ tiếp thu và vận dụng kiến thức đã học.
- ✓ Việc giải toán có tác dụng lớn gây hứng thú học tập của HS, phát triển trí tuệ và giáo dục, rèn luyện người HS về rất nhiều mặt.

1.1.2. Chức năng của bài tập toán.

Trong thực tiễn dạy học, bài tập toán học được sử dụng với nhiều dụng ý khác nhau. Một bài tập có thể tạo tiền đề xuất phát, để gợi động cơ, để làm việc với một nội dung mới, để củng cố hoặc kiểm tra,... Mỗi bài tập cụ thể được đặt ra ở một thời điểm nào đó của quá trình dạy học đều chứa đựng một cách tường minh hay ẩn tàng những chức năng khác nhau, những chức năng này đều hướng đến các mục đích dạy học trong môn Toán, hệ thống bài tập có các chức năng sau.

✓ Với chức năng dạy học, bài tập nhằm hình thành, củng cố cho HS những tri thức, kĩ năng, kĩ xảo ở những giai đoạn khác nhau của quá trình dạy học. Cụ thể như: Làm sáng tỏ và khắc sâu những vấn đề về lý thuyết; thu gọn, mở rộng, bổ sung cho lý thuyết trên cơ sở thường xuyên hệ thống hóa kiến thức và nhấn mạnh phần trọng tâm của lý thuyết. Đặc biệt bài tập còn mang tác dụng giáo dục kĩ thuật, tổng hợp thể hiện qua việc giúp HS rèn luyện kĩ năng tính toán, kĩ năng đọc hình vẽ, kĩ năng sử dụng các phương tiện học tập, kĩ năng thực hành toán học; phương pháp tư duy, thói quen đặt vấn đề một cách hợp lí, ngắn gọn tiết kiệm thời gian,...

✗ Chẳng hạn, sau khi đã dạy cho HS phương pháp chọn tọa độ phức thích hợp cho một bài toán, chúng ta có thể đưa ra ví dụ sau đây.

Ví dụ 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$, với A, B và C là các góc của một tam giác ABC .

Ở lớp 11, HS đã biết bài toán chứng minh trong tam giác ABC , ta có:

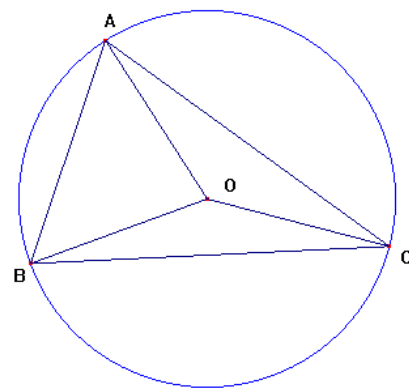
$$\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -4\cos A \cos B \cos C - 1.$$

Khi đó đứng trước bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của P , học sinh sẽ gặp khó khăn trong việc biến đổi để có thể đưa P về biểu thức có thể đánh giá được. Từ đó dẫn HS tới việc phải tính các giá trị cosin của các góc, mà điều đó sẽ thuận lợi hơn khi ta chọn được một tọa độ phức thích hợp cho các đỉnh.

Giải. Chọn đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC làm đường tròn đơn vị; giả sử tọa độ của các đỉnh tam giác là $A a$, $B b$ và $C c$.

$$\text{Ta có } \cos 2A = \frac{b\bar{c} + c\bar{b}}{2|b||c|} = \frac{1}{2} b\bar{c} + c\bar{b}, \text{ do}$$

$$a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1.$$



Tương tự ta có

$$\cos 2B = \frac{1}{2} \overline{ca} + \overline{ac} \quad \text{và} \quad \cos 2C = \frac{1}{2} \overline{ab} + \overline{ba}.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } P &= \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = \frac{1}{2} \overline{bc} + \overline{cb} + \overline{ca} + \overline{ac} + \overline{ab} + \overline{ba} \\ &= \frac{1}{2} \left[\overline{aa} + \overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bb} + \overline{ba} + \overline{bc} + \overline{cc} + \overline{ca} + \overline{cb} - \overline{aa} - \overline{bb} - \overline{cc} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[a \overline{a+b+c} + b \overline{b+a+c} + c \overline{c+a+b} - 3 \right] \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} a+b+c \overline{a+b+c} \geq -\frac{3}{2}, \text{ vì } a+b+c \overline{a+b+c} \geq 0. \end{aligned}$$

Do đó $P_{\min} = -\frac{3}{2}$, khi và chỉ khi $a+b+c = 0$ hay $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \vec{0}$,

suy ra $O \equiv G$, điều đó có nghĩa là tam giác ABC là tam giác đều.

Như vậy, thông qua ví dụ này GV đã khắc sâu được kiến thức về chọn tọa độ thích hợp cho một bài toán. Đặc biệt giúp HS ôn tập lại một số kiến thức đã học như: Công thức tính góc, tính chất về môđun, tính chất về tọa độ của các điểm thuộc đường tròn đơn vị,... Qua bài toán cũng góp phần rèn luyện kỹ năng tính toán, kỹ năng biến đổi số phức cho HS.

✓ Với chức năng giáo dục, bài tập giúp HS hình thành thế giới quan duy vật biện chứng, từng bước nâng cao hứng thú học tập, tạo niềm tin ở bản thân HS và phẩm chất của con người lao động mới, rèn luyện cho HS đức tính kiên nhẫn, bền bỉ, không ngại khó, sự chính xác và chu đáo trong khoa học.

✗ Có thể thấy rõ điều này qua **ví dụ 1** mà ta xét ở trên. Sau khi HS liên hệ đến bài tập đã biết ở lớp 11, bước đầu gây cho các em khó khăn trong việc tìm hướng giải quyết bài toán. Sau khi gợi ý cho HS có thể sử dụng số phức để giải bài toán này nhờ việc chọn tọa độ thích hợp cho các yếu tố của bài toán sẽ tạo cho các em một niềm tin vào bản thân, tạo cho các em hứng thú hơn

bởi có thể giải bài toán trên bằng nhiều con đường khác nhau. GV cũng cần quan tâm, động viên để các em kiên trì biến đổi đưa đến kết quả của bài toán.

✓ Với chức năng phát triển, bài tập giúp HS ngày càng nâng cao khả năng suy nghĩ, rèn luyện các thao tác tư duy như: phân tích, tổng hợp, suy diễn, quy nạp, tương tự, đặc biệt hóa, khái quát hóa,...thông thạo một số phương pháp suy luận toán học, biết phát hiện và giải quyết vấn đề một cách thông minh sáng tạo. Từ đó hình thành phẩm chất tư duy khoa học.

✗ Quay trở lại **ví dụ 1**, sau khi HS đã hoàn thành lời giải cho bài toán, GV có thể đưa ra một số bài toán khác gần gũi hoặc là những trường hợp đặc biệt, tương tự với bài toán trên, chẳng hạn:

Bài 1. Chứng minh rằng, với mọi tam giác ABC ta có:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC , chứng minh rằng

$$\cos 2A - \cos 2B - \cos 2C < \frac{3}{2}.$$

Do HS đã giải được bài toán trên nên khi xét các trường hợp đặc biệt, tương tự này sẽ tạo cho HS tích cực hơn trong việc tìm lời giải của bài toán. Qua đó hình thành cho HS biết suy nghĩ, suy xét bài toán ở những góc độ khác nhau, biết xét các trường hợp đặc biệt để tìm lời giải cho bài toán lớn.

✓ Với chức năng kiểm tra, bài tập giúp GV và HS đánh giá được mức độ và kết quả của quá trình dạy và học, đồng thời nó cũng đánh giá khả năng độc lập học toán và trình độ phát triển của HS.

✗ Thông qua giải bài tập, GV có thể tìm thấy những điểm mạnh, những hạn chế trong việc tiếp thu và trình bày tri thức của HS. Qua đó có thể bổ sung, rèn luyện, và bồi dưỡng tiếp cho HS.

Có thể nói rằng hiệu quả của việc dạy toán ở trường phổ thông phần lớn phụ thuộc vào việc khai thác và thực hiện một cách đầy đủ các chức năng

có thể có của các tác giả viết SGK đã có dụng ý đưa vào chương trình. Người GV phải có nhiệm vụ khám phá và thực hiện dụng ý của tác giả bằng năng lực sư phạm của mình.

1.1.3. Dạy học giải bài tập toán học theo tư tưởng của G.Polya.

Trong môn toán ở trường phổ thông có nhiều bài tập toán chưa có hoặc không có thuật giải và cũng không có một thuật giải tổng quát nào để giải tất cả các bài toán, chúng ta chỉ có thể thông qua việc dạy học giải một số bài toán cụ thể mà dần dần truyền thụ cho HS cách thức, kinh nghiệm trong việc suy nghĩ, tìm tòi lời giải cho mỗi bài toán.

Dạy học giải bài tập toán không có nghĩa là GV cung cấp cho HS lời giải bài toán. Biết lời giải bài toán không quan trọng bằng làm thế nào để giải được bài toán, vì vậy cần trang bị những hướng dẫn chung, gợi ý các suy nghĩ tìm tòi, phát hiện cách giải bài toán là cần thiết.

Dựa trên những tư tưởng tổng quát cùng với những gợi ý chi tiết của G.Polya về cách thức giải toán, phương pháp tìm tòi lời giải cho một bài toán thường được tiến hành theo bốn bước sau.

* Bước 1: Tìm hiểu nội dung bài toán.

Để tìm hiểu nội dung của bài toán, cần chú ý các yếu tố cơ bản:

- Phân biệt cái đã cho và cái phải tìm, cái phải chứng minh.
- Có thể dùng công thức, kí hiệu, hình vẽ để diễn tả đề bài.
- Phân biệt các thành phần khác nhau của điều kiện. Có thể diễn tả các điều kiện đó thành công thức không?

* Bước 2: Xây dựng chương trình giải.

Yếu tố quan trọng khi giải được bài toán chính là việc xây dựng chương trình giải cho bài toán đó. Vì vậy khi thực hiện, chúng ta cần chú ý:

- Phân tích bài toán đã cho thành nhiều bài toán đơn giản quen thuộc.

- Lựa chọn những kiến thức đã học (Định nghĩa, định lí, quy tắc...) gần gũi hơn cả với dữ kiện của bài toán rồi mò mẫm dự đoán kết quả.

- Sử dụng những phương pháp đặc thù với từng dạng toán như chứng minh (phản chứng, qui nạp toán học...), toán dựng hình, toán quỹ tích...

* Bước 3: **Trình bày lời giải.**

- Trình bày lại lời giải sau khi đã điều chỉnh những chỗ cần thiết.

* Bước 4: **Kiểm tra và nghiên cứu lời giải.**

- Kiểm tra lại kết quả, xem lại các lập luận trong quá trình giải.

- Nhìn lại toàn bộ các bước giải, rút ra tri thức phương pháp để giải một bài toán nào đó.

- Tìm thêm cách giải khác (nếu có thể).

- Khai thác kết quả có thể có của bài toán.

- Đề xuất bài toán tương tự, bài toán đặc biệt hoặc khái quát hoá bài toán...

Như vậy, có thể nói “Quá trình HS học phương pháp chung để giải toán là một quá trình biến những tri thức phương pháp tổng quát thành kinh nghiệm giải toán của bản thân mình thông qua việc giải hàng loạt bài toán cụ thể. Từ phương pháp chung giải toán đi tới cách giải một bài toán cụ thể còn là cả một chặng đường đòi hỏi lao động tích cực của người HS, trong đó có nhiều yếu tố sáng tạo” [21 - Tr.423].

Ví dụ 2. Hình vuông $ABCD$ có đỉnh A trùng với gốc tọa độ O , hai đỉnh B và D thay đổi tương ứng trên phần dương trục Ox , Oy ; điểm I có tọa độ $I(2; -2)$.

1) Chứng minh tam giác AIC là tam giác vuông.

2) Tìm quỹ tích trọng tâm G của tam giác AIC .

Lời giải.

Bước 1: Tìm hiểu bài toán.

(?) Yêu cầu của bài toán là gì.

(!) Bài toán yêu cầu chứng minh một tam giác là tam giác vuông và tìm quỹ tích trọng tâm của tam giác đó.

(?) Để chứng minh tam giác vuông ta thường sử dụng kiến thức nào.

(!) Định lý đảo của *Pitago*, tính góc của tam giác,...

(?) Ở bài toán này muốn áp dụng định lý đảo của *Pitago* ta cần tính được độ dài của các cạnh tam giác. Có thể thực hiện được điều đó không.

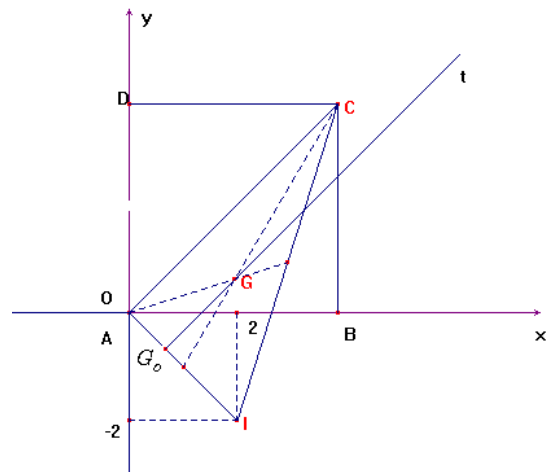
(!) Thực hiện được vì ta có thể xác định được tọa độ của các đỉnh hình vuông.

(?) Để tìm quỹ tích trọng tâm có thể xác định được tọa độ của điểm trọng tâm không.

(!) Xác định được vì đã tìm được tọa độ các đỉnh của nó.

Bước 2: Xây dựng chương trình giải.

(?) Như vậy bài toán có thể thực hiện được khi biết tọa độ của các đỉnh của hình vuông. Hãy thiết lập hệ trục tọa độ và xác định tọa độ phức của các đỉnh hình vuông và của điểm I .



(!) ...

(?) Để chứng minh tam giác AIC vuông, hãy tính AI^2 , AC^2 và IC^2 . Sau đó so sánh, đối chiếu với định lý *Pitago* đảo.

(!) ...

(?) Bây giờ vì G là trọng tâm của tam giác AIC nên ta có tọa độ trọng tâm của điểm G là $g = \frac{1}{3} a + z_0 + c$. Hãy xác định tọa độ của điểm G . Từ đó kết luận quỹ tích của G .

Bước 3: Trình bày lời giải.

Chuyển sang xét trong mặt phẳng phức ta có:

Giả sử số phức của các đỉnh A, B, C và D của hình vuông $ABCD$ và của điểm I là: $a=0, b=x, c=x+ix, d=ix$ $0 < x < +\infty$ và $z_0 = 2-2i$.

1) Chứng minh tam giác AIC là tam giác vuông.

$$\text{Ta có } AI^2 = |2-2i|^2 = 8; \quad AC^2 = |x+ix|^2 = 2x^2;$$

$$\text{và } IC^2 = |c-z_0|^2 = |x-2 + i(x+2)|^2 = (x-2)^2 + (x+2)^2 = 2x^2 + 8.$$

Như vậy $IC^2 = AI^2 + AC^2$. Theo định lý *Pitago* đảo, tam giác AIC vuông tại A .

2) Quỹ tích trọng tâm G của tam giác AIC .

G là trọng tâm của tam giác AIC khi và chỉ khi $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OC}$, hay ta có biểu thức $g = \frac{1}{3} a + z_0 + c$, vì $a=0$

$$\text{nên} \quad g = \frac{1}{3} z_0 + c = \frac{1}{3} [2-2i + x+ix]$$

$$\Leftrightarrow g = \left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3} \right) + i \left(-\frac{2}{3} + \frac{x}{3} \right) = u + iv$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{2}{3} + \frac{x}{3} \\ v = -\frac{2}{3} + \frac{x}{3} \\ 0 < x < +\infty \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v - u = -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} < u < +\infty \\ -\frac{2}{3} < v < +\infty \end{cases}$$

Vậy quỹ tích G là tia G_0t gồm các điểm $x+iy$ thỏa mãn phương trình:

$$y - x = -\frac{4}{3} \quad (\text{tia này song song với đường phân giác góc phần tư thứ nhất và}$$

đi qua điểm G_0 sao cho $AG_0 = \frac{1}{3}AI$).

Bước 4: Kiểm tra và nghiên cứu lời giải.

(?) Có thể giải bài toán này theo cách khác được không?

(!) + Có thể giải được nhờ tính các góc của tam giác.

+ Bài toán có thể giải được khi áp dụng các kiến thức về tọa độ thông thường mà không xét trong mặt phẳng tọa độ phức.

Như vậy qua ví dụ này, GV cần quan tâm tới vấn đề chuyển đổi ngôn ngữ hình học thông thường sang ngôn ngữ số phức; vấn đề thiết lập hệ tọa độ; giải quyết bài toán quỹ tích thông qua việc xác định tọa độ của yếu tố quỹ tích,...

1.2. Lý luận về năng lực giải toán của học sinh.

1.2.1. Nguồn gốc của năng lực.

Từ cuối thế kỉ XIX đến nay đã có nhiều ý kiến khác nhau về bản chất và nguồn gốc của năng lực, tài năng. Hiện nay đã có xu hướng thống nhất trên một số quan điểm cơ bản, quan trọng về lí luận cũng như về thực tiễn:

✓ Một là, những yếu tố bẩm sinh, di truyền là điều kiện cần thiết ban đầu cho sự phát triển năng lực. Đó là điều kiện cần nhưng chưa đủ (động vật bậc cao sống với người hàng ngàn năm vẫn không có năng lực như con người vì chúng không có các tư chất bẩm sinh di truyền làm tiền đề cho sự phát triển năng lực).

✓ Hai là, năng lực con người có nguồn gốc XH, LS. Muốn một người của thế hệ sau được phát triển trong thế giới tự nhiên, XH đã được các thế hệ trước cải tạo, xây dựng và để lại các dấu ấn đó trong môi trường văn hóa - xã hội. Con người khi lọt lòng mẹ đã có sẵn các tổ chất nhất định cho sự phát triển các năng lực tương ứng, nhưng nếu không có môi trường XH thì cũng không phát triển được.

✓ Ba là, năng lực có nguồn gốc từ hoạt động và là sản phẩm của hoạt động. Sống trong môi trường XH tự nhiên do các thế hệ trước tạo ra và chịu sự tác động của nó, trẻ em và người lớn ở thế hệ sau không chỉ đơn giản sử

dụng hay thích ứng với các thành tựu của các thế hệ trước để lại, mà còn chiếm lĩnh chúng và quan trọng hơn là cải tạo chúng để không chỉ đạt được các kết quả “vật chất” mà còn tạo ra tiền đề mới cho hoạt động tiếp theo.

Tóm lại, ngày nay khoa học cho rằng năng lực, tài năng là hiện tượng có bản chất nguồn gốc phức tạp. Các tổ chất và hoạt động của con người tương tác qua lại với nhau để tạo ra các năng lực, tài năng. Vậy đào tạo có hiệu quả nhất là

đưa HS vào các dạng hoạt động thích hợp.

1.2.2. Khái niệm về năng lực, năng lực Toán học.

1.2.2.1. Khái niệm về năng lực.

Theo nhà tâm lý học Nga nổi tiếng V.A.Cruchetxki thì: "Năng lực được hiểu như là: Một phức hợp các đặc điểm tâm lý cá nhân của con người đáp ứng những yêu cầu của một hoạt động nào đó và là điều kiện để thực hiện thành công hoạt động đó" [17 - Tr 15].

Như vậy nói đến năng lực là nói đến một cái gì đó tiềm ẩn trong một cá thể, một thứ phi vật chất. Song nó thể hiện ra được qua hoạt động và đánh giá được nó qua kết quả hoạt động.

Thông thường, một người được gọi là có năng lực nếu người đó nắm vững tri thức, kĩ năng, kĩ xảo của một loại hoạt động nào đó và đạt được kết quả tốt hơn, cao hơn so với trình độ trung bình của những người khác cùng tiến hành hoạt động đó trong những điều kiện và hoàn cảnh tương đương. Người ta thường phân biệt ba trình độ của năng lực:

- ✓ Năng lực là tổng hoà các kĩ năng, kĩ xảo.
- ✓ Tài năng là một tổ hợp các năng lực tạo nên tiền đề thuận lợi cho hoạt động có kết quả cao, những thành tích đạt được này vẫn nằm trong khuôn khổ của những thành tựu đạt được của XH loài người.

✓ Thiên tài là một tổ hợp đặc biệt các năng lực, nó cho phép đạt được những thành tựu sáng tạo mà có ý nghĩa lịch sử vô song.

Khi nói đến năng lực phải nói đến năng lực trong loại hoạt động nhất định của con người. Năng lực chỉ nảy sinh và quan sát được trong hoạt động giải quyết những yêu cầu đặt ra.

1.2.2.2. Khái niệm năng lực Toán học.

Về khái niệm năng lực Toán học, theo nhà tâm lý học người Nga *V.A.Cruchetxki* sẽ được giải thích trên hai bình diện:

✓ Như là các năng lực sáng tạo (khoa học) - các năng lực hoạt động toán học tạo ra được các kết quả, thành tựu mới, khách quan và quý giá.

✓ Như là các năng lực học tập giáo trình phổ thông, lĩnh hội nhanh chóng và có kết quả cao các kiến thức, kỹ năng, kỹ xảo tương ứng.

Như vậy, năng lực toán học là các đặc điểm tâm lý cá nhân (trước hết là các đặc điểm hoạt động trí tuệ) đáp ứng được các yêu cầu của hoạt động học toán và tạo điều kiện lĩnh hội các kiến thức, kỹ năng, kỹ xảo trong lĩnh vực toán học tương đối nhanh, dễ dàng và sâu sắc trong những điều kiện như nhau.

Cũng theo *V.A.Cruchetxki*: Có 8 đặc điểm hoạt động trí tuệ của HS có năng lực Toán học là:

✓ Khả năng tri giác có tính chất hình thức hoá tài liệu toán học, gắn liền với sự thấu tóm nhanh chóng các cấu trúc hình thức của chúng trong một bài toán cụ thể vào trong một biểu thức toán học.

✓ Khả năng tư duy có tính khái quát hoá nhanh và rộng.

✓ Xu thế suy nghĩ bằng những suy lý rút gọn.

✓ Sự tư duy logic lành mạnh.

✓ Tính linh hoạt cao của các quá trình tư duy thể hiện ở:

- Sự xem xét cách giải các bài toán theo nhiều khía cạnh khác nhau.

- Sự di chuyển dễ dàng và tự do từ một thao tác trí tuệ này sang một thao tác trí tuệ khác, từ tiến trình suy nghĩ thuận sang tiến trình suy nghĩ nghịch.

✓ Xu hướng tìm tới cách giải tối ưu cho một vấn đề toán học, khát vọng tìm ra lời giải rõ ràng, đơn giản, hợp lý, tiết kiệm.

✓ Trí nhớ có tính chất khái quát về các kiểu bài toán, các phương thức giải, sơ đồ lập luận, sơ đồ logic.

✓ Khả năng tư duy logic, trừu tượng phát triển tốt. [17 - Tr 159, 160]

1.2.3. Khái niệm về năng lực giải toán.

Trên đây đã nói đến khái niệm năng lực, năng lực toán học. Năng lực giải

toán là một phần của năng lực toán học. Vậy năng lực giải toán là gì và thể hiện như thế nào?

Năng lực giải toán là khả năng áp dụng tiến trình thực hiện việc giải quyết một vấn đề có tính hướng đích cao, đòi hỏi huy động khả năng tư duy tích cực và sáng tạo, nhằm đạt được kết quả sau một số bước thực hiện. [18 - Tr 20]

Như vậy, một người được coi là có năng lực giải toán nếu người đó nắm vững tri thức, kĩ năng, kĩ xảo của hoạt động giải toán và đạt được kết quả tốt hơn, cao hơn so với trình độ trung bình của những người khác cũng tiến hành hoạt động giải toán đó trong những điều kiện và hoàn cảnh tương đương.

Từ đặc điểm hoạt động trí tuệ của những HS có năng lực toán học và khái niệm về năng lực giải toán chúng ta có thể rút ra một số đặc điểm và cấu trúc của năng lực giải toán như sau.

✓ Khả năng lĩnh hội nhanh chóng quy trình giải một bài toán và các yêu cầu của một lời giải, biết trình bày lời giải rõ ràng, đẹp đẽ.

- ✓ Sự phát triển mạnh của tư duy logic, tư duy sáng tạo thể hiện ở khả năng lập luận chính xác, về quan hệ giữa các dữ kiện của bài toán.
- ✓ Có năng lực phân tích, tổng hợp trong lĩnh vực thao tác với các ký hiệu, ngôn ngữ toán học. Khả năng chuyển đổi từ điều kiện của bài toán sang ngôn ngữ: Ký hiệu, quan hệ, phép toán giữa các đại lượng đã biết, chưa biết và ngược lại.
- ✓ Có tính độc lập và độ sâu cao trong khi giải toán và sự phát triển của năng lực giải quyết vấn đề.
- ✓ Có tính tích cực, kiên trì về mặt ý chí và khả năng huy động trí óc cao trong lao động giải toán.
- ✓ Khả năng tìm tòi nhiều lời giải, huy động nhiều kiến thức cùng lúc vào việc giải bài tập, từ đó lựa chọn được lời giải tối ưu.
- ✓ Có khả năng kiểm tra các kết quả đã đạt được và hình thành được một số kiến thức mới thông qua hoạt động giải toán, tránh được những nhầm lẫn trong quá trình giải toán.
- ✓ Có khả năng nêu ra được một số những bài tập tương tự cùng với cách giải (có thể là định hướng giải, hoặc quy trình có tính thuật toán, hoặc thuật toán để giải bài toán đó).
- ✓ Có khả năng khái quát hoá từ bài toán cụ thể đến bài toán tổng quát, từ bài toán có một số yếu tố tổng quát đến bài toán có nhiều yếu tố tổng quát, nhờ các thao tác trí tuệ: Phân tích, so sánh, tổng hợp, tương tự, trừu tượng, hệ thống hoá, đặc biệt hoá.

Bàn về năng lực, cũng có ý kiến cho rằng: Năng lực là do thượng đế ban cho. Song nhiều ý kiến cho rằng đó chỉ là một phần nhỏ, còn phần nhiều là do sự tích lũy, sự bồi đắp, sự học hỏi, rèn luyện mà có. Qua quá trình học tập HS sẽ được bổ sung các kiến thức, được trang bị các phương pháp, từ đó năng lực giải toán được tăng lên. Một phần do HS phải có ý thức tự tăng thêm

năng lực cho mình, một phần do các thầy cô giáo hướng dẫn, rèn luyện. Chính vì vậy chúng tôi rất đề cao các bài ôn tập, bởi chúng đã góp phần không nhỏ trong việc rèn luyện năng lực giải toán cho HS.

Tóm lại, để rèn luyện năng lực giải toán cho HS, phương pháp tốt nhất là đưa ra một hệ thống bài tập nhằm giúp cho HS nắm vững tri thức, phát triển tư duy, hình thành kĩ năng, kĩ xảo ứng dụng toán học vào thực tiễn.

1.2.4. Năng lực giải toán Hình học phẳng và Lượng giác bằng Số phức.

Từ những nghiên cứu lý thuyết về năng lực, năng lực giải toán ta có thể hiểu là: *Năng lực giải toán hình học phẳng và lượng giác bằng số phức của HS là những đặc điểm tâm lý cá nhân, đáp ứng cao yêu cầu lĩnh hội tri thức về giải toán hình học phẳng và lượng giác bằng số phức, có khả năng huy động các kiến thức, các kỹ năng khoa học, các cách thức giải quyết vấn đề trong hoạt động giải toán hình học phẳng và lượng giác bằng số phức hướng đến việc tạo ra các phẩm chất tư duy có tính mới mẻ, có giá trị đối với bản thân HS.*

Học sinh biết sử dụng số phức như một công cụ để giải toán sẽ góp phần bồi dưỡng năng lực giải toán. HS có thêm một cách mới để giải toán hình học phẳng, có cách tiếp cận mới với lượng giác, những kiến thức, bài toán mà có thể các em đã biết. Qua đó, xây dựng cho HS một cơ sở tư duy mới làm nền móng cho việc tiếp cận với các tri thức cao hơn ở các bậc học cao hơn.

Có thể xác định một số năng lực cơ bản giải toán hình học phẳng và lượng giác bằng số phức của HS qua một số năng lực cụ thể sau.

➤ **Năng lực 1. Năng lực nhận biết bài toán hình học phẳng và lượng giác có thể giải được bằng số phức.**

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng tọa độ cho tam giác ABC , với các đỉnh $A(1; 0)$, $B(0; 3)$ và $C(-3; -5)$.

1) Xác định điểm I thỏa mãn điều kiện: $2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

2) Xác định trọng tâm G của tam giác ABC và điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

✂ Vì có thể đồng nhất mỗi số phức với một điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy nên từ giả thiết của bài toán ta có thể xác định được tọa độ của các điểm I hay G thông qua thông qua việc biểu diễn điểm và vector theo tọa độ phức. Vì vậy bài toán có thể giải được bằng số phức.

Lời giải.

1) Xác định điểm I thỏa mãn điều kiện:

$$2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

Gọi tọa độ của các điểm I, A, B và C

là $I(z_0), A(a), B(b)$ và $C(c)$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{IA} - 3\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2(a - z_0) - 3(b - z_0) + 2(c - z_0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a - 2z_0 - 3b + 3z_0 + 2c - 2z_0 &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a - 2b + 2c - z_0 &= 0 \Leftrightarrow z_0 = 2a - 2b + 2c \end{aligned}$$

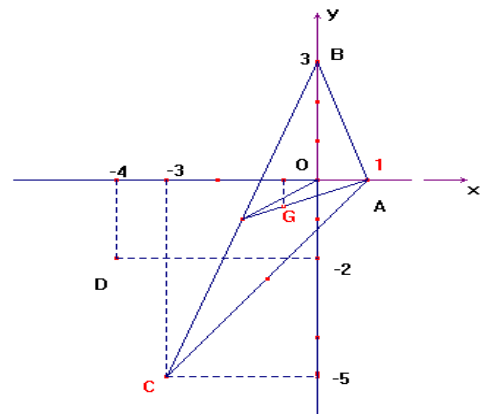
Trong mặt phẳng phức thì $a = 1$, $b = 3i$, và $c = -3 - 5i$.

Vì vậy $z_0 = 2 - 9i - 6 - 10i = -4 - 19i$. Suy ra điểm I có tọa độ $I(-4; -19)$.

2) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và có tọa độ $G(g)$, khi đó

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}, \text{ từ đó suy ra}$$

$$g = \frac{a+b+c}{3} = \frac{1+3i-3-5i}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i.$$



Vậy điểm G có tọa độ là $G\left(\frac{-2}{3}; \frac{-2}{3}\right)$.

✓ Nhận xét rằng ở ví dụ 2, HS vẫn thường làm bằng phương pháp tọa độ, xuất phát từ việc gọi tọa độ của điểm $I(x; y)$ và áp dụng biểu thức vector đã cho. Từ đó tính được tọa độ của I nhờ tính chất của hai vector bằng nhau. Như vậy, nếu sử dụng số phức để giải bài toán này thì có một thuận lợi nổi bật đó là mỗi điểm chỉ có một tọa độ phức, còn theo cách cũ ta phải xác định được hai tọa độ.

Ví dụ 4. Hạ bậc $f(x) = \cos^4 x$.

✘ Yêu cầu của bài toán là biến đổi các lũy thừa bậc cao của $\cos x$ hay $\sin x$ như: $\cos^n x$, $\sin^n x$ và $\cos^p x \cdot \sin^p x$ thành tổng chứa các số hạng bậc nhất đối với $\cos \alpha x$ hay $\sin \beta x$. Như vậy bài toán có thể sử dụng công thức *Euler* để giải quyết, tức là có thể giải được bằng số phức.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \cos^4 x = \left[\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right]^4,$$

$$\text{suy ra } f(x) = \frac{1}{24} [e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{16} [e^{4ix} + e^{-4ix} + 4e^{2ix} + e^{-2ix} + 6]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{16} 2\cos 4x + 4 \cdot 2 \cdot \cos 2x + 6$$

$$\text{Vậy } \cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}.$$

Cần chú ý rằng nếu hạ bậc thành thạo và biết kết hợp với công thức *Moivre* chúng ta sẽ có phương pháp giải quyết các phương trình lượng giác

bậc cao hoặc phương trình lượng giác có chứa biểu thức của sin và cosin của cung bội rất hiệu quả.

➤ **Năng lực 2. Năng lực thiết lập hệ trục tọa độ trong mặt phẳng phức.**

✘ Để thiết lập một hệ trục tọa độ đối với những hình cơ bản thì không khó. Tuy nhiên để lựa chọn một hệ trục tọa độ thích hợp, dễ dàng phiên dịch được bài toán sang ngôn ngữ số phức, dễ dàng phát hiện và thiết lập các mối quan hệ của bài toán, từ đó có cách giải quyết ngắn gọn, rõ ràng thì lại không dễ. Do đó biết cách chọn hệ trục tọa độ sao cho phù hợp với hình vẽ, từ đó ta có thể thiết lập các tọa độ phức dựa vào vị trí của điểm và dẫn đến giải quyết bài toán dễ dàng.

Ví dụ 5. Bài toán trực tâm.

Cho tam giác ABC , gọi H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

- 1) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
- 2) Chứng minh rằng điểm đối xứng của H qua mỗi cạnh của tam giác ABC thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Lời giải.

- 1) Gọi M là điểm tùy ý thỏa mãn

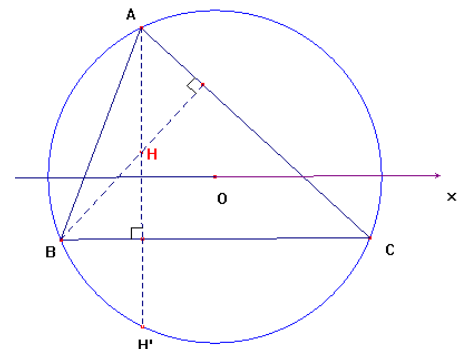
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OI},$$

với I là trung điểm của BC . Vì OI là trung trực của đoạn BC nên từ $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OI}$ ta suy ra

$AM \perp BC$. Vậy M thuộc đường cao xuất phát từ A .

Tương tự như thế ta chứng minh được M thuộc đường cao xuất phát từ B và C . Vậy nếu M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, thì M là trực tâm H của tam giác ABC .



2) *Chọn tọa độ*: Gọi O là gốc tọa độ và trục hoành là đường thẳng qua O và song song với BC .

Đặt a, b, c, h tương ứng là tọa độ phức của các điểm A, B, C và H .

+ Dựa vào hệ thức $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, ta có $h = a + b + c$.

+ Ta có $\overrightarrow{BH}$ và $\overrightarrow{BH'}$ là hai vector đối xứng nhau qua trục BC . Vậy tọa độ của hai vector $\overrightarrow{BH}$ và $\overrightarrow{BH'}$ là hai số phức liên hợp.

Ta có $h' - b = \overline{h - b} = \bar{h} - \bar{b}$.

Do đó $h' - b = \overline{a + c} = \bar{a} + \bar{c} - b = \bar{a} + \bar{c}$. Suy ra $h' = \bar{a} + \bar{c} + b$.

Mặt khác B và C đối xứng nhau qua trục ảo nên $\bar{c} + b = 0$, suy ra $h' = \bar{a}$.

Điều này chứng tỏ H' là điểm đối xứng của H qua trục Ox thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ví dụ 6. Cho ba hình vuông được biểu diễn như hình vẽ dưới đây.

Hãy so sánh tổng $\alpha + \beta$ và γ .

Lời giải. Chọn hệ trục tọa độ $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}$. Từ hình vẽ ta dễ dàng suy ra tọa độ phức của các vector $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BE}$ và $\overrightarrow{CE}$ lần lượt là $3+i, 2+i$ và $1+i$ và α, β, γ tương ứng là argumen của những số phức này.

Ta có

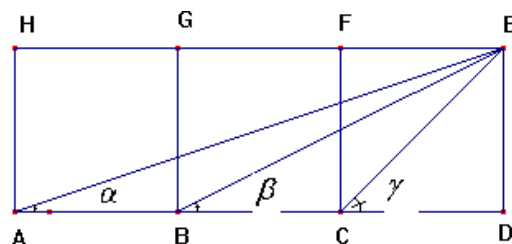
$$\gamma = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE}$$

$$= \arg z_{\overrightarrow{CE}} = \arg 1+i = \frac{\pi}{4}$$

$$\alpha + \beta = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}$$

$$= \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE} = \arg z_{\overrightarrow{AE}} + \arg z_{\overrightarrow{BE}}$$

$$= \arg 3+i + \arg 2+i = \arg [3+i \quad 2+i].$$



Vì $3+i - 2+i = 5+5i$ và $\arg 5+5i = \frac{\pi}{4}$ nên ta có kết quả

$$\alpha + \beta = \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

➤ **Năng lực 3. Năng lực chuyển đổi giữa ngôn ngữ hình học thông thường sang ngôn ngữ số phức.**

Ví dụ 7. Cho hình bình hành $ABCD$.

- 1) Chứng minh rằng: $MA^2 + MC^2 - MB^2 + MD^2$ là hằng số không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

- 2) Tìm quỹ tích của điểm M sao cho

$$MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 = k^2 \quad k \in \mathbb{R}.$$

✘ Nhận thấy rằng trong các biểu thức trên có chứa bình phương độ dài của các đoạn thẳng. Các đại lượng đó cũng chính là bình phương môđun của các số phức tương ứng. Từ đó áp dụng các kiến thức về số phức ta dễ dàng suy ra yêu cầu của bài toán.

Lời giải.

Đặt giao điểm của hai đường chéo hình bình hành trùng với gốc tọa độ O . Khi đó ta có tọa độ của các điểm là $M(z_0)$, $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ và $D(d)$.

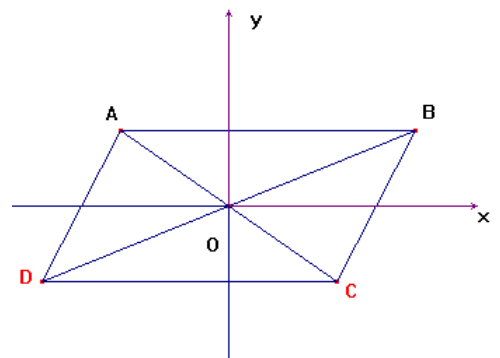
- 1) Ta tính MA^2 , MC^2 , MB^2 , và MD^2 là bình phương của môđun các số phức.

Khi đó ta có:

$$MA^2 = |a - z_0|^2 = (a - z_0)(\bar{a} - \bar{z}_0) = a\bar{a} + z_0\bar{z}_0 - a\bar{z}_0 - z_0\bar{a} = |a|^2 + |z_0|^2 - a\bar{z}_0 - z_0\bar{a}.$$

Tương tự ta có:

$$MB^2 = |b - z_0|^2 = (b - z_0)(\bar{b} - \bar{z}_0) = b\bar{b} + z_0\bar{z}_0 - b\bar{z}_0 - z_0\bar{b} = |b|^2 + |z_0|^2 - b\bar{z}_0 - z_0\bar{b}.$$



$$MC^2 = |c - z_0|^2 = |c|^2 + |z_0|^2 - c\bar{z}_0 - \bar{c}z_0$$

$$MD^2 = |d - z_0|^2 = |d|^2 + |z_0|^2 - d\bar{z}_0 - \bar{d}z_0$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó suy ra } MA^2 + MC^2 - MB^2 + MD^2 &= \\ &= |a|^2 + |c|^2 - |b|^2 + |d|^2 - z_0\bar{a} - \bar{z}_0a + z_0\bar{b} + \bar{z}_0b + d\bar{z}_0 + \bar{d}z_0 - c\bar{z}_0 - \bar{c}z_0 - d\bar{z}_0 - \bar{d}z_0 \\ &= |a|^2 + |c|^2 - |b|^2 + |d|^2 = OA^2 + OC^2 - OB^2 - OD^2 \\ &= 2OA^2 - 2OB^2, \text{ không đổi.} \end{aligned}$$

2) Sử dụng các kết quả của phần trên ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 &= 4|z_0|^2 + |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 \\ &\quad - z_0\bar{a} - \bar{z}_0a - z_0\bar{b} - \bar{z}_0b - z_0\bar{c} - \bar{z}_0c - z_0\bar{d} - \bar{z}_0d \\ &= 4|z_0|^2 + |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 \\ &= 4OM^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 \\ &= 4OM^2 + 2OA^2 + 2OB^2. \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra } MA^2 + MC^2 + MB^2 + MD^2 = k^2 \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4OM^2 + 2OA^2 + 2OB^2 = k^2 \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow OM^2 = \frac{k^2 - 2OA^2 - 2OB^2}{4} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Vậy ta có các trường hợp sau.

- Nếu $k^2 < 2OA^2 + 2OB^2$ thì quỹ tích M là tập rỗng.
- Nếu $k^2 = 2OA^2 + 2OB^2$ thì $OM^2 = 0 \Leftrightarrow M \equiv O$. Do đó quỹ tích của điểm M là tập hợp gồm có một điểm O .

$$\text{- Nếu } k^2 > 2OA^2 + 2OB^2 \text{ thì } OM^2 = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 2OA^2 - 2OB^2}.$$

Do đó quỹ tích của điểm M là đường tròn tâm O , bán kính

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{k^2 - 2OA^2 - 2OB^2}.$$

Ví dụ 8.

Cho n điểm $A_j(x_j; y_j)$ và $n+1$ số thực k_j với $j=1, \dots, n$ mà $k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho

$$k_1 MA_1^2 + k_2 MA_2^2 + \dots + k_n MA_n^2 = k.$$

Lời giải.

Ta cho tương ứng các điểm $A_j(x_j; y_j)$ với các điểm có tọa độ là $A_j(z_j)$, $j=1, \dots, n$. Giả sử điểm $M(z)$ với $z = x + iy$.

Ta có

$$k_1 MA_1^2 + k_2 MA_2^2 + \dots + k_n MA_n^2 = k$$

$$\Leftrightarrow k_1 |z_1 - z|^2 + k_2 |z_2 - z|^2 + \dots + k_n |z_n - z|^2 = k$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^n k_j \right) z \bar{z} - \left(\sum_{j=1}^n k_j \bar{z}_j \right) z - \left(\sum_{j=1}^n k_j z_j \right) \bar{z} + \sum_{j=1}^n k_j z_j \bar{z}_j = k \quad (1.1)$$

$$\Leftrightarrow z \bar{z} - \left(\frac{\sum_{j=1}^n k_j \bar{z}_j}{\sum_{j=1}^n k_j} \right) z - \left(\frac{\sum_{j=1}^n k_j z_j}{\sum_{j=1}^n k_j} \right) \bar{z} + \frac{\sum_{j=1}^n k_j z_j \bar{z}_j - k}{\sum_{j=1}^n k_j} = 0 \quad \left(\text{do } \sum_{j=1}^n k_j \neq 0 \right) \quad (1.2)$$

phương trình (1.2) có dạng $z \bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + \gamma = 0$ với $\gamma \in \mathbb{R}$.

$$\text{Đặt } \beta = \frac{\left(\sum_{j=1}^n k_j \bar{z}_j \right) \left(\sum_{j=1}^n k_j z_j \right)}{\left(\sum_{j=1}^n k_j \right)^2} \text{ và } \beta' = \frac{k - \sum_{j=1}^n k_j z_j \bar{z}_j}{\sum_{j=1}^n k_j}.$$

○ Nếu $\beta > \beta'$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn có tâm là $\frac{\sum_{j=1}^n k_j z_j}{\sum_{j=1}^n k_j}$ và bán

kính $R = \sqrt{\beta - \beta'}$.

○ Nếu $\beta = \beta'$ thì tập hợp các điểm M là một điểm $\frac{\sum_{j=1}^n k_j z_j}{\sum_{j=1}^n k_j}$.

- Nếu $\beta < \beta'$ thì bài toán vô nghiệm.

Chuyển phương trình (1.2) về dạng thực.

Ta có phương trình (1.1) tương đương với phương trình:

$$\left(\sum_{j=1}^n k_j \right) z\bar{z} - k_1 \bar{z}_1 z + z_1 \bar{z} - k_2 \bar{z}_2 z + z_2 \bar{z} - \dots - k_n \bar{z}_n z + z_n \bar{z} + \sum_{j=1}^n k_j z_j \bar{z}_j = k. \quad (1.3)$$

Thay $\bar{z}_j z + z_j \bar{z} = 2; \operatorname{Re} \bar{z}_j z = xx_j - yy_j$ và $z_j \bar{z}_j = x_j^2 + y_j^2$; $z\bar{z} = x^2 + y^2$ vào (1.3) ta được.

$$x^2 + y^2 - 2 \frac{\sum_{j=1}^n k_j x_j}{\sum_{j=1}^n k_j} x + 2 \frac{\sum_{j=1}^n k_j y_j}{\sum_{j=1}^n k_j} y + \frac{\sum_{j=1}^n k_j x_j^2 + y_j^2 - k}{\sum_{j=1}^n k_j} = 0.$$

➤ **Năng lực 4. Năng lực sử dụng linh hoạt các kiến thức về số phức.**

✘ Số phức là nội dung tương đối khó đối với mức độ nhận thức của HS bậc phổ thông. Việc giải các bài toán hình học phẳng và lượng giác bằng số phức đòi hỏi người giải toán không những phải nắm vững các kiến thức cơ bản về số phức mà còn phải có khả năng sử dụng, vận dụng các kiến thức về số phức tương đối thành thạo, linh hoạt, có khả năng liên hệ, chuyển đổi ngôn ngữ của bài toán. Cụ thể:

Phải có khả năng sử dụng thành thạo các bài toán cơ bản của số phức như: Biểu diễn số phức trên mặt phẳng phức, xác định môđun và argumen của số phức, số phức liên hợp, nâng lũy thừa và khai căn bậc n của một số phức... Biết và thành thạo trong các bài toán tập hợp điểm, xác định tọa độ của số phức, phương trình đường thẳng trong mặt phẳng phức... Vận dụng linh hoạt các công thức Moivre, công thức Euler,...

Trên cơ sở nắm vững các kiến thức về số phức và các bài toán cơ bản, HS có khả năng vận dụng linh hoạt các kiến thức về số phức vào các tình huống bài toán cụ thể.

Ví dụ 9. Cho tam giác ABC với trọng tâm G , trực tâm H và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là trung điểm của BC, CA, AB ; A_2, B_2, C_2 là chân đường cao tương ứng kẻ từ A, B, C ; A_3, B_3, C_3 là trung điểm các đoạn AH, BH, CH (các điểm Euler). A_4, B_4, C_4 là các điểm đối xứng của H qua BC, CA, AB .

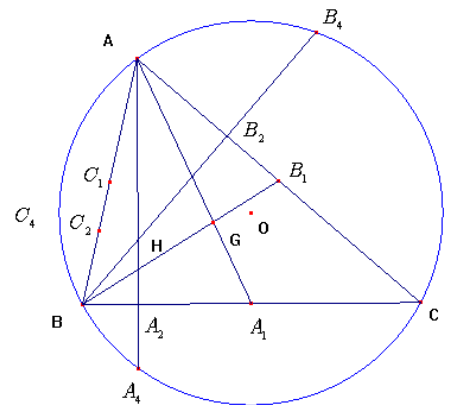
- 1) Chứng minh rằng: O, G, H thẳng hàng và $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.
- 2) Chứng minh chín điểm $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ nằm trên một đường tròn tâm O_9 là trung điểm OH , $R_9 = \frac{R}{2}$, với R là bán kính đường tròn tâm O .
- 3) Chứng minh A_4, B_4, C_4 thuộc đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải.

1) Ta chọn đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC làm đường tròn đơn vị. Giả sử rằng tọa độ của các đỉnh lần lượt là $A(a), B(b)$ và $C(c)$. Gọi M là trung điểm của BC , suy ra M có tọa vị là $M\left(\frac{b+c}{2}\right)$. Mặt khác ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ nên

suy ra tọa độ của điểm G là $G\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$. Bây giờ ta tìm tọa độ của điểm H .

Phương trình đường cao đi qua A là đường thẳng đi qua A và vuông góc với $c-b$ là: $\bar{c}-\bar{b}z + c-b\bar{z} - \bar{c}-\bar{b}a - c-b\bar{a} = 0$,



hay $\bar{c} - \bar{b} \quad z - a = b - c \quad \bar{z} + \bar{a}$. Từ đó suy ra $z - a = \frac{b-c}{\bar{c}-\bar{b}} \bar{z} - \bar{a}$.

Do $A, B, C \in (O)$ nên suy ra $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$.

$$\text{Vậy ta có } z - a = \frac{b-c}{\frac{1}{\bar{b}} - \frac{1}{\bar{c}}} \bar{z} - \bar{a}, \text{ hay } z - a = bc \bar{z} - \bar{a} \quad (1.4)$$

$$\text{Tương tự đường cao đi qua } B \text{ có phương trình là: } z - b = ac \bar{z} - \bar{b} \quad (1.5)$$

Vì H là giao của các đường cao đi qua A và B nên ta có tọa độ của điểm

$$H \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} z - a = bc \bar{z} - \bar{a} & (4) \\ z - b = ac \bar{z} - \bar{b} & (5) \end{cases}$$

Nhân hai vế của phương trình (4) với a , của phương trình (5) với b sau đó lấy phương trình (4) trừ vế với vế cho phương trình (5) ta được

$$a - b \quad z = a^2 - b^2 - bc + ac, \text{ suy ra } z = a + b + c \text{ (do } a \neq b \text{)}.$$

Vậy tọa độ của điểm H là $H(a + b + c)$.

Mặt khác do $G\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$ nên suy ra ba điểm O, G, H thẳng hàng và

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

$$2) \text{ Ta có } A_1\left(\frac{b+c}{2}\right), B_1\left(\frac{c+a}{2}\right), C_1\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

- Ta tìm tọa độ của A_2, B_2, C_2 .

Phương trình đường thẳng BC có dạng: $\bar{b} - \bar{c} \quad z + c - b \quad \bar{z} + b\bar{c} - c\bar{b} = 0$.

Biến đổi ta được phương trình tương đương

$$\begin{aligned} \bar{b} - \bar{c} \quad z + c - b \quad \bar{z} + b\bar{c} - c\bar{b} + b\bar{b} - \bar{b}b &= 0 \\ \Leftrightarrow \bar{b} - \bar{c} \quad z - b &= b - c \quad \bar{z} - \bar{b} \end{aligned}$$

do đó, phương trình đường thẳng BC là $z - b = -bc \bar{z} - \bar{b}$.
(1.6)

$$\text{Tọa độ của điểm } A_2 \text{ là nghiệm của hệ } \begin{cases} z - a = bc \bar{z} - \bar{a} & (4) \\ z - b = -bc \bar{z} - \bar{b} & (6) \end{cases}$$

Cộng vế với vế phương trình (4) và (6) ta được

$$z = \frac{1}{2} a + b + c - \bar{a}bc = \left(\frac{a+b+c}{2} - \frac{bc}{2a} \right).$$

Suy ra tọa độ của A_2 là $A_2 \left(\frac{a+b+c}{2} - \frac{bc}{2a} \right)$. Tương tự ta có tọa độ của các điểm $B_2 \left(\frac{a+b+c}{2} - \frac{ac}{2b} \right)$, $C_2 \left(\frac{a+b+c}{2} - \frac{ab}{2c} \right)$.

- Ta tìm tọa độ của A_2, B_2, C_2 .

$$\text{Theo trên ta có } A_3 \left(a + \frac{b+c}{2} \right), B_2 \left(b + \frac{c+a}{2} \right), C_2 \left(c + \frac{a+b}{2} \right).$$

$$\text{Gọi } E(e) \text{ là trung điểm của đoạn } OH, \text{ suy ra tọa vị } E \left(\frac{a+b+c}{2} \right).$$

Ta có:

$$\blacktriangleright EA_1 = |a_1 - e| = \left| \frac{b+c}{2} - \frac{a+b+c}{2} \right| = \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tương tự } EB_1 = EC_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\blacktriangleright EA_2 = |a_2 - e| = \left| \frac{a+b+c}{2} - \frac{bc}{2a} - \frac{a+b+c}{2} \right| = \left| \frac{bc}{2a} \right| = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tương tự } EB_2 = EC_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\blacktriangleright EA_3 = |a_3 - e| = \left| a + \frac{b+c}{2} - \frac{a+b+c}{2} \right| = \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Tương tự } EB_3 = EC_3 = \frac{1}{2}.$$

Vậy chín điểm $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2$ và C_3 cùng thuộc một đường tròn có tâm E và bán kính là $R_9 = \frac{R}{2}$.

3) Tìm tọa độ của $A_4(a_4), B_4(b_4), C_4(c_4)$.

Phương trình đường thẳng BC có dạng:

$$\begin{aligned} \bar{b} - \bar{c} z + c - b \bar{z} + b\bar{c} - c\bar{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow i \bar{b} - \bar{c} z + i c - b \bar{z} + i b\bar{c} - c\bar{b} &= 0. \end{aligned}$$

Do $H = a + b + c$ và A_4 là điểm đối xứng của H qua BC nên

$$a_4 = -\frac{i c - b \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + i b\bar{c} - c\bar{b}}{i \bar{b} - \bar{c}}$$

$$\text{hay } a_4 = -\frac{c - b \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + b\bar{c} - c\bar{b}}{\bar{b} - \bar{c}}.$$

$$\text{Suy ra } a_4 = -\frac{bc}{a}. \text{ Tương tự ta có } b_4 = -\frac{ac}{b}, c_4 = -\frac{ab}{c}.$$

$$\text{Bây giờ xét } OA_4 = |a_4 - 0| = \left| -\frac{bc}{a} \right| = 1. \text{ Tương tự } OB_4 = OC_4 = 1.$$

Vậy A_4, B_4, C_4 cùng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Ví dụ 10. Cho các số thực x, y và z thỏa mãn

$$\sin x + \sin y + \sin z = 0 \text{ và } \cos x + \cos y + \cos z = 0.$$

Chứng minh rằng

$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0 \text{ và } \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0.$$

Lời giải.

Đặt $z_1 = \cos x + i \sin x$, $z_2 = \cos y + i \sin y$ và $z_3 = \cos z + i \sin z$.

Khi đó ta có $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, và $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1) \\ &= -2z_1 z_2 z_3 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right) = -2z_1 z_2 z_3 (\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \\ &= -2z_1 z_2 z_3 \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 0 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z + i \sin 2x + i \sin 2y + i \sin 2z = 0.$$

Vậy ta có $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = 0$ và $\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0$.

➤ **Năng lực 5. Năng lực kết hợp giữa hình học thông thường và số phức, giữa các kiến thức cơ bản của lượng giác, đại số và số phức.**

✘ Sự kết hợp nhuần nhuyễn giữa hình học thông thường và số phức giúp ích nhiều cho quá trình giải toán hình học phẳng bằng công cụ số phức. Ngay từ khâu dự đoán việc bài toán có thể sử dụng công cụ số phức hay không, khâu thiết lập hệ trục tọa độ sao cho thích hợp, khâu chuyển đổi ngôn ngữ, khâu giải quyết bài toán trung gian,...

✘ Trong quá trình giải quyết bài toán hình học phẳng bằng số phức, việc thuần túy sử dụng số phức cho cả lời giải của bài toán chưa chắc đã đem lại một lời giải gọn gàng, với một số bài toán nếu khéo léo vận dụng cả kỹ năng giải toán hình học phẳng thông thường và sử dụng số phức như một công cụ giải toán thì sẽ cho ta một kết quả nhanh chóng hơn, một lời giải gọn gàng và xúc tích hơn. Tất nhiên để làm được điều đó thì người giải toán phải hiểu một cách thấu đáo và có năng lực kết hợp giữa hình học phẳng giải bằng cách thông thường và sử dụng số phức để giải toán.

✘ Lượng giác là một nội dung mà lâu nay vẫn được xem là phức tạp và khó đối với HS phổ thông. Với những bài toán lượng giác mà ở đó có chứa

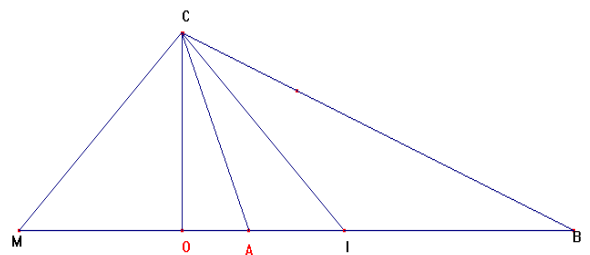
các đại lượng bậc cao của các hàm số lượng giác, các biểu thức chứa các cung bội của cosin (hoặc của sin) như: $\cos nx$ (hoặc $\sin nx$); các bài toán tính tổng dãy số với các số hạng lượng giác; các bài toán tính giới hạn của các tổng này thì quả là những bài toán gây không ít khó khăn cho các em HS. Tuy nhiên, đây lại là nội dung quan trọng của chương trình toán phổ thông và đặc biệt là thường gặp trong các kỳ thi. Vì vậy việc giới thiệu cho các em HS một phương pháp mới đó là sử dụng số phức để giải quyết các bài toán này sẽ phần nào gây hứng thú hơn cho HS khi làm các bài toán về lượng giác. Qua đó giúp các em ôn tập, khắc sâu các kiến thức có liên quan như: Đại số tổ hợp, giới hạn,...

Ví dụ 11. Cho tam giác ABC với điều kiện độ dài phân giác trong và ngoài bằng nhau. Chứng minh rằng $AC^2 + BC^2 = 4R^2$ (với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

✘ Bài toán này khá quen thuộc ở phổ thông, để giải quyết bài toán này HS có thể xuất phát từ nhiều hướng với những cách biến đổi khác nhau. Tuy nhiên đòi hỏi HS phải khá thành thạo về kỹ năng biến đổi vector và các phép biến đổi sơ cấp thông thường. Sử dụng số phức, đặc biệt là các kiến thức về tọa độ phức, kết hợp với những kiến thức thông thường của hình học phẳng và vector chúng ta có lời giải tương đối gọn gàng cho bài toán này.

Lời giải.

Gọi CI là phân giác trong của góc $\hat{C}$, CM là phân giác ngoài của góc $\hat{C}$, suy ra $CM \perp CI$ và $CM = CI$ (theo giả thiết).



Gọi O là trung điểm của MI , OC là trục ảo và OI là trục thực. Khi đó $O(0)$, $A(z_1)$, $z_1 = a$, $B(z_2)$, $z_2 = b$, $C(z_3)$, $z_3 = ic$, $M(z_4)$, $z_4 = -c$, $I(z_5)$, $z_5 = c$.

Do CI là phân giác trong của tam giác ABC nên ta có

$$\frac{AI}{IB} = \frac{AC}{CB} \Leftrightarrow \frac{AC^2}{CB^2} = \frac{AI^2}{IB^2},$$

suy ra
$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_3} \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_3} = \frac{z_5 - z_1}{z_2 - z_5} \frac{\bar{z}_5 - \bar{z}_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a^2}{b-c^2} = \frac{-a+ic}{b-ci} \frac{-a-ci}{b+ci} \Leftrightarrow \frac{c-a^2}{b-c^2} = \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow a-bc^2-ab=0.$$

Từ đó suy ra $b = \frac{c^2}{a}$, do đó $B\left(\frac{c^2}{a} + i0\right)$.

Vậy ta có

$$AC^2 + BC^2 = a^2 + c^2 + b^2 + c^2 = a^2 + c^2 + \frac{c^4}{a^2} + c^2 = \frac{a^4 + 2a^2c^2 + c^4}{a^2}$$

Từ đó suy ra $AC^2 + BC^2 = \left(\frac{a^2 + c^2}{a}\right)^2$. (1.7)

Gọi E là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , $E(z_o)$.

Suy ra
$$\begin{cases} AE = EC \\ AE = EB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AE^2 = EC^2 \\ AE^2 = EB^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_o - a \quad \bar{z}_o - \bar{a} = z_o - ic \quad \bar{z}_o + ic \\ z_o - a \quad \bar{z}_o - \bar{a} = z_o - b \quad \bar{z}_o - b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_o \bar{z}_o - az_o - a\bar{z}_o + a^2 = z_o \bar{z}_o + icz_o - ic\bar{z}_o + c^2 \\ z_o \bar{z}_o - az_o - a\bar{z}_o + a^2 = z_o \bar{z}_o - bz_o - b\bar{z}_o + b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + ic \quad z_o + a - ic \quad \bar{z}_o + c^2 - a^2 = 0 \\ a - b \quad z_o + a - b \quad \bar{z}_o + b^2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

với $b = \frac{c^2}{a}$, suy ra $z_o = \frac{a^2 + c^2}{2a} + ci$, suy ra $E\left(\frac{a^2 + c^2}{2a} + ci\right)$.

Mặt khác ta lại có

$$4R^2 = 4CE^2 = 4\left(\frac{a^2+c^2}{2a}+ci-ci\right)\left(\frac{a^2+c^2}{2a}+ci-ci\right) = \left(\frac{a^2+c^2}{2a}\right)^2 \quad (1.8)$$

Từ (1.7) và (1.8) ta suy ra $AC^2 + BC^2 = 4R^2$.

Ví dụ 12. Giải phương trình lượng giác $32\cos^6 x - \cos 6x = 1$.

✖ Đây là một trong những phương trình lượng giác thuộc dạng:

$$R(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sin 2x, \cos 2x, \tan 2x, \cot 2x, \dots) = 0.$$

Dạng phương trình này có thể được biến đổi thành:

$$R(\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots) = 0.$$

Vì hàm số lượng giác của các cung bội có thể biểu thị một cách hữu tỉ theo $\cos x$ và $\sin x$ nên phương trình có thể đưa về dạng $R(\sin x, \cos x) = 0$.

Tuy nhiên phương pháp tổng quát này nhiều khi phức tạp vì ta phải biểu thị hàm số lượng giác của các cung nx theo $\cos x$ hay $\sin x$. Vì vậy, ta có thể dùng công thức *Moivre*: $\cos x + i\sin x^n = \cos nx + i\sin nx$ và nhị thức *Newton* để tìm hàm số lượng giác cosin (hay sin) của các cung nx theo $\cos x$ hay $\sin x$.

Như vậy với các phương trình lượng giác mà trong đó có hàm số lượng giác của các cung bội thì ta phải tùy theo từng phương trình cụ thể mà có phương pháp giải cho thích hợp.

Lời giải. Ta đưa về cosin của cung x .

$$\text{Theo công thức Moivre: } \cos x + i\sin x^6 = \cos 6x + i\sin 6x. \quad (1.9)$$

Mặt khác, theo khai triển *Newton*:

$$\begin{aligned} & \cos x + i\sin x^6 \\ &= C_6^0 \cos^6 x + C_6^1 \cos^5 x \cdot i\sin x + C_6^2 \cos^4 x \cdot i^2 \sin^2 x + \dots + C_6^6 i\sin^6 x, \end{aligned}$$

$$\text{hay } \cos x + i\sin x^6 = \cos^6 x - 15\cos^4 x \sin^2 x + 15\cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x$$

$$+ i \, 6\cos^5 x \sin x - 20\cos^3 x \sin^3 x + 6\cos x \sin^5 x \quad (1.10)$$

Từ (1.9) và (1.10) suy ra:

$$\cos 6x = \cos^6 x - 15\cos^4 x \sin^2 x + 15\cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x.$$

Áp dụng công thức $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, ta được:

$$\cos 6x = 32\cos^6 x - 48\cos^4 x + 18\cos^2 x - 1. \quad (1.11)$$

Thay (1.11) vào phương trình đã cho ta được:

$$32\cos^6 x - 32\cos^6 x + 48\cos^4 x - 18\cos^2 x + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow 48\cos^4 x - 18\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 6\cos^2 x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 0 \\ 8\cos^2 x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \cos^2 x = \frac{3}{8} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Vậy các họ nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi.$$

Ví dụ 13. Hãy tính $\cos 5x$ theo $\cos x$. Từ đó suy ra giá trị của $\cos \frac{\pi}{10}$.

Lời giải.

► Theo công thức *Moivre*: $\cos x + i \sin x^5 = \cos 5x + i \sin 5x$.
(1.12)

Mặt khác, theo khai triển *Newton*:

$$a + b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Vậy ta có:

$$\begin{aligned}\cos x + i \sin x^5 &= \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x \\ &+ i (5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x) . \quad (1.13)\end{aligned}$$

Từ (1.12) và (1.13) suy ra:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x .$$

$$\text{Mà } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x .$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } \cos 5x &= \cos^5 x - 10\cos^3 x (1 - \cos^2 x) + 5\cos x (1 - \cos^2 x)^2 \\ &= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x .\end{aligned}$$

► Đặt $x = \frac{\pi}{10}$.

$$\text{Theo trên ta có: } \cos \frac{5\pi}{10} = 16\cos^5 \frac{\pi}{10} - 20\cos^3 \frac{\pi}{10} + 5\cos \frac{\pi}{10} ,$$

$$\text{hay } \cos \frac{5\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{2} = 0 . \text{ Vậy } 16\cos^5 \frac{\pi}{10} - 20\cos^3 \frac{\pi}{10} + 5\cos \frac{\pi}{10} = 0 .$$

Như vậy $\cos \frac{\pi}{10}$ là nghiệm của phương trình: $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$, hay

$$\text{phương trình: } x (16x^4 - 20x^2 + 5) = 0 .$$

Mặt khác ta thấy rằng do $\cos \frac{\pi}{10} \neq 0$ cho nên $\cos \frac{\pi}{10}$ là nghiệm của phương trình $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$. Đặt $t = x^2$ ($t > 0$), ta được phương trình

$$16t^2 - 20t + 5 = 0$$

Nghiệm của phương trình này là:

$$t_1 = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \text{ và } t_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{8} \quad t_1 > 0, t_2 > 0 .$$

Từ đó suy ra các nghiệm của phương trình đã cho là

$$x_1 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}; x_2 = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}; x_3 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}; x_4 = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Như vậy $\cos\frac{\pi}{10}$ sẽ là một trong các nghiệm này. Nhận xét rằng

$\cos\frac{\pi}{10} > 0$ và $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{10}$ thì $\cos\frac{\pi}{10} > \cos\frac{\pi}{4}$ (bởi vì hàm số $\cos x$ là hàm số đơn điệu giảm với x thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$). Do đó ta chỉ cần so sánh x_1

và x_3 . Mà $x_1^2 < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$. Vậy $\cos\frac{\pi}{10} = x_3 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

1.2.5. Bồi dưỡng năng lực giải toán.

Trong bài tổng luận của tác giả *Trần Thúc Trình* “Nhìn lại lịch sử cải cách nội dung và phương pháp dạy - học toán ở trường phổ thông trên thế giới trong thế kỉ XX” đã đưa ra mười chỉ tiêu năng lực là:

- Năng lực phát triển và tái hiện những định nghĩa, kí hiệu, các phép toán, các khái niệm.
- Năng lực tính nhanh và cẩn thận, sử dụng đúng các kí hiệu.
- Năng lực dịch chuyển các dữ kiện thành kí hiệu.
- Năng lực biểu diễn dữ kiện thành kí hiệu
- Năng lực theo dõi một hướng suy luận hay chứng minh.
- Năng lực xây dựng một chứng minh.
- Năng lực giải một bài toán đã toán học hoá.
- Năng lực giải một bài toán chưa toán học hoá.
- Năng lực khái quát hoá toán học.
- Năng lực phân tích bài toán và xác định các phép toán có thể áp dụng để giải.

Do đặc thù của bộ môn toán nên hoạt động giải toán là hoạt động không thể thiếu được của người học toán, dạy toán, nghiên cứu về toán. Trong cuốn “Sáng tạo toán học” *G.Polya* đã viết: “... quá trình giải toán là đi tìm kiếm một lối thoát ra khỏi khó khăn hoặc một con đường vượt qua trở ngại, đó chính là quá trình đạt tới một mục đích mà thoát nhìn giường như không thể đạt được ngay. Giải toán là khả năng riêng biệt của trí tuệ, còn trí tuệ chỉ có ở con người. Vì vậy giải toán có thể xem như một trong những biểu hiện đặc trưng nhất trong hoạt động của con người...” [20 -Tr 5].

Trong khi say mê giải toán, trí tuệ con người được huy động tới mức tối đa, khả năng phân tích và tổng hợp được rèn luyện, tư duy trở nên nhanh nhẹn. Bài toán mà chúng ta có thể bình thường không giải được nhưng nó có kêu gọi tính tò mò và buộc ta phải sáng tạo và nếu tự mình giải bài toán đó thì ta có thể biết được cái quyền rũ của sự sáng tạo cùng niềm vui thắng lợi.

Một điểm chú ý nữa là: “Trong quá trình giải bài tập toán cần khuyến khích HS tìm nhiều cách giải cho một bài toán. Mọi cách giải đều dựa vào một số đặc điểm nào đó của dữ kiện, cho nên tìm được nhiều cách giải là luyện tập cho HS biết cách nhìn nhận một vấn đề theo nhiều khía cạnh khác nhau, điều đó rất bổ ích cho việc phát triển năng lực tư duy. Mặt khác tìm được nhiều cách giải thì sẽ tìm được cách giải hay nhất, đẹp nhất...” [30 -Tr 214].

Ví dụ 14. Cho 6 điểm A, B, C, D, E và F . Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} \quad (1.14)$$

Để giải bài toán này, HS có thể biến đổi theo nhiều hướng khác nhau trên cơ sở áp dụng tính chất: “Trên mặt phẳng phức cho hai điểm A a , B b khi đó ta có $\overrightarrow{AB} = b - a$ ”.

Để giải bài toán, ta xét trên mặt phẳng tọa độ phức và giả sử tọa độ của các điểm là $A a$, $B b$, $C c$, $D d$, $E e$ và $F f$.

Lời giải 1.

Ta có (1.14) $\Leftrightarrow d - a + e - b + f - c = e - a + f - b + d - c \Leftrightarrow 0 = 0$, do đó ta có (1.14) đúng.

Vậy đẳng thức (1.14) được chứng minh.

Lời giải 2.

Biến đổi về trái

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= d - a + e - b + f - c \\ &= e - a + f - b + d - c = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}.\end{aligned}$$

Lời giải 3.

Biến đổi về phải :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} &= e - a + f - b + d - c \\ &= d - a + e - b + f - c = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}.\end{aligned}$$

Nhận xét: Trong ba lời giải trên cho thấy lời giải thứ nhất là đơn giản nhất, chỉ cần biến đổi đẳng thức vectơ cần chứng minh tương đương với một đẳng thức đúng.

Như vậy, để bồi dưỡng năng lực toán học cho HS ở trường THPT thì điều quan trọng là bồi dưỡng năng lực giải toán cho họ. Mà để bồi dưỡng năng lực giải toán cho HS ta cần tập trung vào bồi dưỡng mười năng lực thành phần trên.

1.3. Tổng quan về số phức và thực trạng giảng dạy ứng dụng của số phức ở trường phổ thông.

1.3.1. Số phức.

1.3.1.1. Định nghĩa.

Trong tập $\mathbb{C}^2$ (bình phương Đề các của tập số thực) ta đưa vào phép toán cộng và nhân như sau: Với mọi $z_1 = (a_1; b_1); z_2 = (a_2; b_2) \in \mathbb{C}^2$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2; a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

bằng thử trực tiếp ta thấy rằng với mọi z_1, z_2, z_3 và $z = (a; b) \in \mathbb{C}^2$, ta có

$$1) (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$2) z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$3) \exists \theta(0,0) \in \mathbb{C}^2: z + \theta = z$$

$$4) \exists -z = (-a; -b) \in \mathbb{C}^2: z + (-z) = \theta$$

$$5) (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

$$6) z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$7) \exists u = (1; 0) \in \mathbb{C}^2: uz = z$$

$$8) \forall z \neq \theta, \exists z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) \in \mathbb{C}^2: zz^{-1} = u$$

$$9) z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2.$$

Do đó, theo ngôn ngữ Đại số, $\mathbb{C}^2$ cùng với hai phép toán cộng và nhân nói trên là một trường. Ta gọi trường này là trường số phức, kí hiệu là $\mathbb{C}$. Mỗi phần tử $z \in \mathbb{C}$ gọi là số phức.

Kí hiệu $i = 0; 1; i$ thoả mãn $i^2 = -1$.

Ta có: Với mọi $(a; b) \in \mathbb{C}^2: (a; b) = (a; 0)(1; 0) + (b; 0)(0; 1) = a + ib$

Cách viết $z = a + ib$, với $(a; b) \in \mathbb{C}^2$ gọi là dạng chính tắc (hay là dạng đại số) của số phức z .

Ánh xạ $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ là một đẳng cấu $\mathbb{C}$ - không gian véc tơ.

$$a; b \mapsto a + ib$$

Chú ý rằng với mọi $a, b; a', b' \in \mathbb{C}$ ta có $a+ib = a'+ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$

1.3.1.2. Số phức liên hợp, phần thực, phần ảo.

a) Định nghĩa.

Với mọi $z = a + ib$, với $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ ta định nghĩa (số) liên hợp $\bar{z}$ của z bởi $\bar{z} = a - ib$. Khi đó, ta có các tính chất sau.

- 1) $\forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{\bar{z}} = z$
- 2) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- 3) $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad \overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'$
- 4) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n: \left(\overline{\sum_{k=1}^n z_k} = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k, \overline{\prod_{k=1}^n z_k} = \prod_{k=1}^n \bar{z}_k \right)$
- 5) $\forall z \in \mathbb{C}: \begin{cases} \bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \\ \bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \end{cases}$

Các phần tử của tập hợp $i\mathbb{R} = ib, b \in \mathbb{R}$ được gọi là số thuần ảo.

Ta có thể dùng số phức liên hợp để biến đổi mẫu số thành số thực. Thật vậy, ta có $\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$, với mọi $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0; 0\}$ hoặc là với mọi $z \in \mathbb{C}: \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

b) Định nghĩa.

Với mọi $z = a + ib$, $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ ta gọi a là phần thực của z , kí hiệu: $\text{Re}(z) = a$ và b là phần ảo của z , kí hiệu: $\text{Im}(z) = b$. Ta có các tính chất

- như sau.
- 1) $\forall z \in \mathbb{C}: \begin{cases} z = \text{Re}(z) + i \text{Im}(z) \\ \bar{z} = \text{Re}(z) - i \text{Im}(z) \end{cases}; \begin{cases} \text{Re}(z) = \frac{1}{2} (z + \bar{z}) \\ \text{Im}(z) = \frac{1}{2} (z - \bar{z}) \end{cases}$
 - 2) $\forall z, z' \in \mathbb{C}: \begin{cases} \text{Re}(z + z') = \text{Re}(z) + \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z + z') = \text{Im}(z) + \text{Im}(z') \end{cases}$

$$3) \forall z \in \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C} : \begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z) \end{cases}$$

Nói chung, $\operatorname{Re} zz' \neq \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} z'$ và $\operatorname{Im} zz' \neq \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} z'$.

1.3.1.3. Môđun của số phức.

a) Định nghĩa.

Với mọi $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $(a; b) \in \mathbb{R}^2$, ta định nghĩa môđun của số phức z , kí hiệu $|z|$ bởi: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ánh xạ $|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ là thác triển của ánh xạ trị

$$z \mapsto |z|$$

$|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, điều đó lý giải cách chọn kí hiệu trên đây.

$$x \mapsto |x|$$

b) Tính chất.

$$1) \forall z \in \mathbb{C} : |z| \in \mathbb{R}_+$$

$$2) \forall z \in \mathbb{C} : |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$3) \forall z \in \mathbb{C} : |z|^2 = z \bar{z}. \text{ Đặc biệt với } \forall z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

$$4) \forall z \in \mathbb{C} : |\bar{z}| = |z|$$

$$5) \forall (z; z') \in \mathbb{C}^2 : |zz'| = |z| \cdot |z'|$$

và bằng phép qui nạp ta có $\left| \prod_{k=1}^n z_k \right| = \prod_{k=1}^n |z_k|$.

$$6) \forall (z; z') \in \mathbb{C}^2 : |z + z'| \leq |z| + |z'| \text{ (Bất đẳng thức tam giác)}$$

$$\text{Bằng quy nạp } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

$$7) \forall (z; z') \in \mathbb{C}^2 : \left| |z| - |z'| \right| \leq |z - z'|$$

Thật vậy $|z| = |z - z' + z'| \leq |z - z'| + |z'|$, từ đó $\forall (z; z') \in \mathbb{C}^2: |z| - |z'| \leq |z - z'|$.

Sau đó hoán vị vai trò của z và z' ta cũng có

$$|z'| - |z| \leq |z| + |z'| \Rightarrow ||z| - |z'|| \leq |z - z'|.$$

$$8) \forall (z; z') \in \mathbb{C}^2: |z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : z' = \alpha z \end{cases}$$

Nếu $z' \neq 0$ đặt $\frac{z}{z'} = a + ib$, $(a; b) \in \mathbb{C}$, ta có $|z + z'| = |z| + |z'|$, tức là ta có

$$\begin{aligned} |1 + a + ib| &= 1 + |a + ib| \Leftrightarrow (1+a)^2 + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2|a + ib| \Leftrightarrow a = |a + ib| \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z}{z'} \in \mathbb{C}_+. \end{aligned}$$

1.3.1.4. Dạng lượng giác và dạng mũ của số phức.

a) Định nghĩa.

Cho số phức $z = a + ib \neq 0$ kí hiệu $r = |z|$ là môđun của z và góc φ có cạnh đầu Ox cạnh cuối là Oz gọi là argumen của z .

Argumen φ của z thỏa mãn $0 \leq \varphi < 2\pi$ gọi là argumen chính của z ; kí hiệu $\arg(z)$. Tập tất cả các argumen của z kí hiệu $\text{Arg}(z) = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta thấy ngay $a = r \cos \varphi$ và $b = r \sin \varphi$. Do đó, số phức z có thể viết dưới dạng $z = r \cos \varphi + i \sin \varphi$ gọi là dạng lượng giác của số phức.

Với mọi số thực φ , như định nghĩa ta đặt $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Như vậy số phức còn có thể viết dưới dạng $z = re^{i\varphi}$, gọi là dạng mũ.

b) Tính chất. Với mọi $z = re^{i\varphi}, z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Ta có

$$1) z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$2) \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$3) z^n = r^n e^{in\varphi}, n \in \mathbb{Z}^*$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned} 1) z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) \\ &= r_1 r_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

2) Chứng minh tương tự.

3) Nhận được từ 1) và quy nạp theo n .

Từ 3) ta có công thức sau đây gọi là công thức *Moivre*:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

1.3.1.5. Các số phức có môđun bằng 1.

Người ta thường kí hiệu số phức z có môđun bằng 1 dưới dạng:

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Khi đó, nếu $z' = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$ thì:

$$1) z z' = e^{i(\varphi + \alpha)}$$

$$2) \frac{z}{z'} = e^{i(\varphi - \alpha)}$$

$$3) z^n = e^{in\varphi}; \forall \varphi \in \mathbb{R}$$

$$4) \forall \varphi \in \mathbb{R} : e^{i\varphi} \neq 0 : \frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$$

$$5) \forall \varphi \in \mathbb{R} : e^{i\varphi} = 1 \Leftrightarrow \varphi = 2\pi k$$

$$6) \forall \varphi \in \mathbb{R} : \overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$$

1.3.1.6. Căn bậc n của số phức.

Cho số phức $z = r \cos \theta + i \sin \theta$. Ta gọi căn bậc n của z là tập

$$\sqrt[n]{z} = \{\omega \in \mathbb{C} : \omega^n = z\}$$

Đặt $\omega = p$. Theo công thức *Moivre* ta có

$$\omega^n = p^n (\cos \theta + i \sin \theta) = r \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Từ đó suy ra: $p^n \cos n\theta = r \cos \varphi$; $p^n \sin n\theta = r \sin \varphi$, hay

$$p = \sqrt[n]{r}; \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Như vậy ta có công thức}$$

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) : k = 0, 1, \dots, n-1 \right\}.$$

1.3.2. Biểu diễn một số khái niệm của hình học phẳng dưới dạng ngôn ngữ số phức.

1.3.2.1. Tọa độ của một điểm, của vector trong mặt phẳng.

a) Bổ đề.

Trong mặt phẳng cho hệ tọa độ trục chuẩn $O; \vec{e}_1, \vec{e}_2$ và một điểm $M(x; y)$. Cho tương ứng mỗi điểm M với một số phức z sao cho $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, nghĩa là tương ứng:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x; y) &\mapsto z = x + iy \end{aligned}$$

Khi đó dễ thấy φ là một song ánh.

b) Định nghĩa tọa độ của một điểm.

Trong $\mathbb{C}^2$ mỗi điểm $M(x; y)$ cho tương ứng với mỗi số phức $z = x + iy$ và z được gọi là tọa độ của điểm M , kí hiệu $M \mapsto z$.

c) Định nghĩa tọa độ của một vector.

Trong $\mathbb{C}^2$ vector $\vec{a}(x; y)$ cho tương ứng với mỗi số phức $z = x + iy$, khi đó z được gọi là tọa độ của vector $\vec{a}$, kí hiệu $\vec{a} \mapsto z$.

1.3.2.2. Khoảng cách giữa hai điểm.

Giả sử $M(z_1), N(z_2) \in \mathbb{C}^2$, khi đó $\overrightarrow{MN} = z_2 - z_1$ và khoảng cách giữa hai điểm M và N được xác định theo công thức sau:

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{z_2 - z_1 \overline{z_2 - z_1}} = \sqrt{z_2 - z_1 \overline{z_2} - \overline{z_1}} = \sqrt{z_2 - z_1 \overline{z_2} - \overline{z_1}}$$

Nhận xét.

Số phức $z = x + iy$ đồng nhất với điểm $M(x; y)$ của mặt phẳng với hệ tọa độ trục chuẩn Oxy . Vì vậy ta không phân biệt số phức z hay điểm z , điểm M hay số phức M .

Mỗi số phức $M = x + iy$ cũng có thể đồng nhất với vector $\overrightarrow{OM}$ có điểm đầu là gốc tọa độ O , điểm cuối là M .

Trên mặt phẳng phức cho hai điểm A, B . Khi đó ta có vector $\overrightarrow{AB}$. Từ đẳng thức vector $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ và việc đồng nhất A với $\overrightarrow{OA}$, B với $\overrightarrow{OB}$ ta có thể viết $\overrightarrow{AB} = B - A$. Như vậy vector $\overrightarrow{AB}$ được xem là hiệu hai số phức B, A và do đó $|B - A| = |\overrightarrow{AB}|$ là khoảng cách giữa hai điểm A và B .

1.3.2.3. Phương trình của đường thẳng với hệ số góc trên mặt phẳng phức.**a) Bổ đề.**

Cho ba điểm $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$ và $M_3(z_3)$, khi đó ba điểm M_1, M_2 và

$$M_3 \text{ thẳng hàng khi và chỉ khi: } \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Định nghĩa.

Trong mặt phẳng $\mathbb{C}^2$ phương trình tổng quát của đường thẳng dưới dạng phức có dạng: $\alpha z + \overline{\alpha} \overline{z} + \gamma = 0$, với $\alpha \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Như vậy ta có phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, với $z_1 \neq z_2$ có dạng $z - z_1 = \rho \bar{z} - \bar{z}_1$, $|\rho| = 1$ với $\rho = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$.

Phương trình đó được gọi là phương trình đường thẳng dạng phức với hệ số góc $\rho = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$.

1.3.2.4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.

Cho đường thẳng $\Delta: \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + \gamma = 0$, với $\alpha \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ và $M(z_0)$. Khi đó, khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ được tính theo công thức $d_{M, \Delta} = \frac{|\alpha z_0 + \bar{\alpha} \bar{z}_0 + \gamma|}{2|\alpha|}$.

1.3.2.5. Công thức tính diện tích tam giác.

Giả sử các đỉnh A , B và C của một tam giác ABC lần lượt có tọa độ là z_1 , z_2 và z_3 . Khi đó diện tích của tam giác ABC được tính bởi công

$$\text{thức } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.3.2.6. Đường tròn trong mặt phẳng phức.

a) Phương trình của đường tròn trong mặt phẳng phức.

Phương trình đường tròn có tâm $I_0(z_0)$, bán kính r trong mặt phẳng phức có dạng $z - z_0 = \bar{z} - \bar{z}_0 = r^2$.

Hoặc $z \bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} + \gamma = 0$, với $\alpha = -\bar{z}_0$, $\gamma = \alpha \bar{\alpha} - r^2 \in \mathbb{R}$.

b) Phương tích của một điểm đối với một đường tròn.

Cho đường tròn xác định bởi phương trình $z - z_0 \quad \bar{z} - \bar{z}_0 = r^2$ (hoặc $z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \gamma = 0$ với $\alpha\bar{\alpha} - \gamma > 0, \gamma \in \mathbb{R}$) và điểm $M = z$ bất kỳ, khi đó phương tích của điểm M đối với đường tròn tâm z_0 là:

$$\wp \bigg/_{z_0}^M = z - z_0 \quad \bar{z} - \bar{z}_0 - r^2 \quad (\text{hoặc } \wp \bigg/_{z_0}^M = z\bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + \gamma).$$

c) Trục đẳng phương của hai đường tròn.

► Trục đẳng phương của hai đường tròn là tập hợp tất cả những điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn đó.

► Cho hai đường tròn có tâm I_1, I_2 có phương trình lần lượt là

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}_1 z + \alpha_1 \bar{z} + \gamma_1 = 0 \quad \text{với } \alpha_1 \bar{\alpha}_1 - \gamma_1 > 0, \gamma_1 \in \mathbb{R}.$$

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}_2 z + \alpha_2 \bar{z} + \gamma_2 = 0 \quad \text{với } \alpha_2 \bar{\alpha}_2 - \gamma_2 > 0, \gamma_2 \in \mathbb{R}.$$

Điểm $M = z$ thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn đã cho khi và chỉ khi $z\bar{z} + \bar{\alpha}_1 z + \alpha_1 \bar{z} + \gamma_1 = z\bar{z} + \bar{\alpha}_2 z + \alpha_2 \bar{z} + \gamma_2$

$$\Leftrightarrow \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 \quad z + \alpha_1 - \alpha_2 \quad \bar{z} + \gamma_1 - \gamma_2 = 0.$$

Là phương trình của trục đẳng phương của hai đường tròn đã cho.

1.3.3. Thực trạng dạy học ứng dụng số phức vào giải toán Hình học phẳng và Lượng giác ở trường THPT.

1.3.3.1. Thực trạng dạy học ứng dụng số phức vào giải toán Hình học phẳng và Lượng giác ở trường THPT.

Trong các lĩnh vực toán học nói riêng, số phức có nhiều ứng dụng quan trọng trong hình học, đại số, giải tích, lượng giác,... Ứng dụng số phức để giải toán hình học phẳng và lượng giác có nhiều thuận lợi khi xét các bài toán có liên quan tới quỹ tích, dựng hình, các phép biến hình trong mặt phẳng,... các bài toán tính tổng vô hạn, giải các phương trình lượng giác có chứa các biểu thức $\cos nx$ hay $\sin nx$.

Việc ứng dụng số phức vào giải toán không chỉ nhằm cung cấp cho HS những công cụ để giải toán mà còn tập cho HS làm quen với các phương pháp tư duy và suy luận, biết nhìn nhận các hiện tượng xung quanh với sự biến đổi của chúng để nghiên cứu, tìm tòi, khám phá, tạo cơ sở cho sự ra đời của những phát minh và sáng tạo trong tương lai, bước đầu mở rộng tầm hiểu biết của HS.

Ở nước ta, nội dung số phức đã từng được đưa vào giảng dạy trong chương trình phân ban, sau đó SGK cải cách (năm 1998) đã cắt bỏ nội dung này. Hiện nay, nội dung số phức đã được đưa vào chương trình SGK thí điểm Ban khoa học tự nhiên với mức độ hoàn thiện hệ thống số và bước đầu làm quen với ứng dụng số phức.

Tuy nhiên, tình hình thực tiễn hiện nay việc ứng dụng số phức vào giải toán nói chung, giải toán hình học phẳng và lượng giác nói riêng chưa được vận dụng, quan tâm đúng mức.

Chúng tôi đã tiến hành điều tra (bằng phương pháp phỏng vấn) GV toán ở các trường THPT chuyên tỉnh Lào Cai, THPT số 1 Thành phố Lào Cai, THPT Hòa An - Cao Bằng, THPT chuyên tỉnh Thái Nguyên, THPT Yên Thủy A – Hòa Bình, trong năm học 2006 – 2007 và 2007 – 2008, về việc ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác. Kết quả thu được như sau: đa số các thầy cô giáo cho rằng nội dung số phức trong chương trình toán phổ thông không phải là nội dung quan trọng, chỉ giới thiệu cho các em HS một số kiến thức đơn giản của số phức chứ không đề cập nhiều đến vấn đề đưa số phức vào như một công cụ để giải toán. Một số thầy cô giáo dạy ở các trường THPT chuyên thì đã đề cập đến vấn đề đưa số phức vào như một công cụ để giải toán, tuy nhiên mới chỉ là giới thiệu chưa đề cập đến vấn đề bồi dưỡng, rèn luyện năng lực giải toán cho HS.

Tìm hiểu rõ hơn về vấn đề này chúng tôi đã đưa ra câu hỏi: “Khi dạy nội dung số phức và ứng dụng của số phức vào giải toán các thầy, cô gặp khó khăn gì?” Đa số các ý kiến đưa ra đều tập trung ở một số điểm cụ thể như sau:

Thứ nhất, bản thân các thầy cô giáo cũng không phải là những người có kiến thức vững vàng và thành thạo về số phức.

Thứ hai, trong các kỳ thi hiện nay, số phức chưa phải là nội dung được quan tâm, hơn nữa thời lượng chương trình dành cho nội dung này không nhiều nên không có điều kiện để đi sâu thêm các vấn đề có liên quan tới số phức.

Thứ ba, các tài liệu tham khảo hiện nay viết về nội dung ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác chưa nhiều, chưa quan tâm đến các bài toán gần gũi với các em HS.

Như vậy, mặc dù số phức là nội dung khá quan trọng của toán học nhưng lại chưa được các thầy cô giáo quan tâm đưa vào giảng dạy nhiều cho HS. Việc giảng dạy nội dung số phức và ứng dụng của số phức vào giải toán ở trường phổ thông có thể chưa đưa ra mức độ cao đối với các lớp thường, với đối tượng HS trung bình nhưng nó cần thiết phải đặt ra với các lớp mà đối tượng HS là khá giỏi, các lớp chuyên toán. Bởi lẽ, thông qua việc ứng dụng số phức vào giải toán không chỉ giúp các em có một phương pháp mới mà còn giúp các em phát triển tư duy, sáng tạo, phát huy tính tích cực chủ động trong học tập,... tạo tiền đề cho việc đào tạo những con người khoa học trong tương lai. Hơn nữa, số phức đã chính thức được đưa vào nội dung sách giáo khoa lớp 12 chuyên ban, do đó đòi hỏi các thầy cô giáo cũng phải có sự tìm tòi, sự hiểu biết sâu rộng hơn về số phức và các ứng dụng của nó trong các lĩnh vực toán học.

1.3.3.2. Một số điểm cần lưu ý khi dạy học nội dung số phức và ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác cho học sinh khá giỏi.

Khi dạy học nội dung số phức và ứng dụng của số phức để giải toán hình học phẳng và lượng giác cho HS khá giỏi cần lưu ý khai thác một số khía cạnh sau đây.

- Cho HS thấy được sự cần thiết và ý nghĩa quan trọng của sự mở rộng trường số phức trong toán học ngay từ những ví dụ mở đầu, đơn giản và gần gũi với HS, chẳng hạn như khi xét nghiệm của phương trình: $x^2 + 1 = 0$.

- Khi dạy các khái niệm, định lý, các công thức mới cần tạo cho HS có sự liên hệ với các kiến thức đã học trong các trường số khác để thấy được mối liên hệ trong toán học.

- Cần khai thác ý nghĩa hình học của số phức, qua đó giúp các em hiểu hơn về số phức, và đặc biệt thông qua ý nghĩa hình học của số phức chúng ta có thể xây dựng các công thức lượng giác cơ bản đã quen thuộc với HS.

- Thông qua những kiến thức cơ bản về số phức, GV lấy những ví dụ đơn giản, và phức tạp dần trong hình học phẳng và lượng giác mà giải bằng ngôn ngữ số phức, qua đó phân tích, so sánh, đánh giá để gây hứng thú cho các em trong việc sử dụng số phức để giải toán.

- Khi dạy nội dung số phức và ứng dụng của nó GV cần quan tâm đến vấn đề bồi dưỡng và rèn luyện kỹ năng giải toán của HS. Qua việc giải các bài toán hình học phẳng và lượng giác bằng số phức GV cũng giúp các em ôn tập các kiến thức cũ, tìm ra những mối quan hệ trong các kiến thức, trong nội bộ toán học.

- Giáo viên cũng nên cung cấp thêm các tư liệu về những ứng dụng của số phức trong các lĩnh vực toán để các em có thêm niềm tin trong quá trình vận dụng và sáng tạo.

- Tuy nhiên, số phức là một nội dung còn mới mẻ với các em HS nên khi vận dụng giảng dạy, GV cần chú ý lấy những ví dụ, bài toán phù hợp,

đảm bảo tính vừa sức với HS để các em có thể tích cực hơn trong việc vận dụng các kiến thức về số phức để giải toán.

1.4. Kết luận chương 1.

Trong chương 1, chúng tôi đã làm sáng tỏ một số vấn đề: Lý luận về năng lực toán học, năng lực giải toán, đặc biệt là năng lực giải toán hình học phẳng và lượng giác bằng số phức. Có thể nói rằng, số phức tuy không phải là nội dung mới của Toán học song nó là một vấn đề rất mới mẻ và tương đối phức tạp với các em HS bậc Trung học phổ thông, đặc biệt là ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác. Tuy nhiên, việc sử dụng số phức như một công cụ giải toán không những mang lại cho học sinh một phương pháp giải toán mới mà góp phần đáng kể vào việc bồi dưỡng năng lực giải toán của HS, đặc biệt là giải toán hình học phẳng và lượng giác. Hơn nữa đây lại là một vấn đề mà trong thực tế giảng dạy hiện nay chưa được quan tâm, chưa được chú trọng bồi dưỡng cho các em khá giỏi.

Để góp phần khắc phục tình trạng đó, trong chương 2 của luận văn, chúng tôi sẽ xây dựng một số các chuyên đề về ứng dụng số phức giải một số bài toán hình học phẳng và lượng giác góp phần nâng cao năng lực giải toán, đồng thời đề ra một số biện pháp sư phạm nhằm bồi dưỡng năng lực giải toán hình học phẳng và lượng giác cho HS.

CHƯƠNG 2

XÂY DỰNG MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ NHẪM BỒI DƯỠNG NĂNG LỰC ỨNG DỤNG SỐ PHỨC VÀO GIẢI MỘT SỐ DẠNG TOÁN HÌNH HỌC PHẪNG VÀ LƯỢNG GIÁC

2.1. Những định hướng cơ bản.

2.1.1. Định hướng về mặt mục tiêu và yêu cầu của việc ứng dụng Số phức vào giải toán Hình học phẳng và Lượng giác đối với học sinh khá giỏi ở trường THPT.

- ⊕ Học sinh được bổ sung và hoàn thiện thêm các kiến thức về số phức.
- ⊕ Học sinh được trang bị thêm một phương pháp giải toán hình học phẳng và lượng giác, đó là sử dụng số phức. Sau khi được rèn luyện, HS biết sử dụng số phức như một công cụ để giải toán hình học phẳng và lượng giác, với các dạng bài toán quen thuộc, thường gặp, điển hình ở phổ thông. Qua đó rèn luyện cho HS thành thạo các kỹ năng cơ bản: kỹ năng chuyển đổi ngôn ngữ, kỹ năng thiết lập hệ trục tọa độ, kỹ năng vận dụng số phức vào giải toán,... Thông qua việc sử dụng số phức vào giải các bài toán hình học phẳng và lượng giác HS thấy được ý nghĩa của số phức, mối quan hệ giữa các yếu tố trong hình học, trong đại số và lượng giác.
- ⊕ Rèn luyện năng lực giải toán số phức, tăng cường khả năng vận dụng kiến thức về số phức vào giải toán, vào học tập thực tiễn, phát triển năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề.
- ⊕ Rèn luyện và phát triển tư duy logic, linh hoạt, sáng tạo. Có sự liên hệ gắn kết giữa các quan hệ, kiến thức trong toán.
- ⊕ Qua việc ứng dụng của số phức vào giải các bài toán hình học phẳng và lượng giác góp phần kích thích HS khám phá, mò mẫm về việc ứng dụng của số phức vào các bài toán trong các lĩnh vực khác như: Đại số tổ hợp, giải tích, ...

⊕ Học sinh có được hiểu biết về sự phát triển của hệ thống số, thấy được vai trò và ý nghĩa to lớn về sự ra đời của số phức.

2.1.2. Định hướng về mặt nội dung.

⊕ Số phức là một nội dung mới và khó đối với HS bậc phổ thông. Để số phức là một công cụ để giải toán hình học phẳng và lượng giác đòi hỏi HS phải nắm vững các kiến thức cơ bản về số phức. Vì vậy việc rèn luyện năng lực giải toán hình học phẳng và lượng giác bằng số phức cần được thực hiện thông qua việc đưa ra một hệ thống bài tập được phân dạng, có sự lựa chọn cao, có lời giải hoặc hướng dẫn giải, nhằm giúp HS nắm vững tri thức, phát triển tư duy, hình thành các kỹ năng, kỹ xảo ứng dụng toán học vào thực tiễn.

⊕ Hệ thống bài tập được phân dạng tương ứng với các dạng toán thường gặp của hình học phẳng và lượng giác, từ các bài toán định tính như chứng minh các quan hệ trong hình học phẳng như: song song, vuông góc,... đến các bài toán định lượng như: tính diện tích, khoảng cách,... Bên cạnh đó còn có những nội dung khó trong phổ thông như: bài toán về dựng hình, quỹ tích, cực trị hình học.

⊕ Để phù hợp với đặc điểm tâm lý nhận thức của các em HS, ngoài việc sắp xếp theo dạng, mức độ của bài tập cũng được nâng dần từ dễ đến khó. Có nhiều bài tập các em đã được làm trong các SGK Hình học 10, Đại số và Giải tích 11, Hình học 11. Một số bài tập nâng cao cũng được chúng tôi lựa chọn kỹ lưỡng từ các tạp chí và đề thi vô địch toán nhằm mục đích vừa tạo hứng thú cho các em vừa rèn luyện khả năng vận dụng số phức và khả năng phát hiện và giải quyết vấn đề.

2.1.3. Định hướng về mặt phương pháp.

✚ *Định hướng về mặt hình thức truyền thụ tri thức phương pháp.*

Căn cứ vào trình độ HS, giáo viên cần xác định truyền thụ tri thức phương pháp giải toán hình học phẳng và lượng giác bằng số phức dưới dạng

tường minh hay ẩn tàng. Đưa nội dung này một cách tường minh có nghĩa là GV dạy cho HS để HS lĩnh hội được ở mức độ hoàn chỉnh. Một điều quan trọng là trong việc truyền thụ và củng cố những tri thức phương pháp, cần biết nhiều cách thể hiện những phương pháp đó để có thể có cách lựa chọn thích hợp và có hiệu quả. Tuy nhiên, cách làm này đòi hỏi phải có thêm những tiết dạy ngoài quy định của chương trình và đôi khi không hẳn đã giúp ích nhiều cho sự phát triển khả năng độc lập của các em học sinh khá giỏi. Do vậy GV phải lựa chọn phần nào dạy một cách tường minh, phần nào đưa dưới dạng ẩn tàng.



Định hướng về phương pháp giảng dạy.

Mỗi nội dung Toán học đều liên hệ với những hoạt động nhất định. Đó là những hoạt động được tiến hành trong quá trình hình thành hoặc vận dụng nội dung đó. Phát hiện được những hoạt động tiềm tàng trong một nội dung là vạch được một con đường để truyền đạt nội dung đó và thực hiện những nhiệm vụ dạy học khác, cũng đồng thời là cụ thể hóa được những nhiệm vụ dạy học nội dung đó và chỉ ra được cách kiểm tra thực hiện nhiệm vụ này. Cho nên điều cơ bản của phương pháp dạy học là khai thác được những hoạt động tiềm tàng trong mỗi nội dung để thực hiện nhiệm vụ dạy học.

Xuất phát từ nội dung dạy giải toán hình học phẳng và lượng giác bằng số phức ta cần phát hiện những hoạt động liên hệ với nó, rồi căn cứ vào mục tiêu dạy học mà tập luyện cho HS một số trong những hoạt động đã được phát hiện.

Quán triệt hoạt động trong phương pháp dạy học, cần tạo cơ hội và cho HS thực hiện và tập luyện những hoạt động và hoạt động thành phần tương thích với nội dung và mục tiêu dạy học; gây động cơ học tập tiến hành hoạt động; truyền thụ tri thức, đặc biệt là những tri thức phương pháp như phương tiện và kết quả của hoạt động. Tuy đối tượng là những HS khá giỏi nhưng

cũng cần căn cứ vào tình hình cụ thể mà phân bậc hoạt động làm chỗ dựa cho việc điều khiển quá trình dạy học.

Rèn luyện năng lực ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác cho HS khá giỏi ở trường THPT là nhằm trang bị cho những HS này thêm một công cụ giải toán, thấy được ý nghĩa của số phức, mối quan hệ của số phức với các yếu tố trong hình học phẳng và điều quan trọng hơn là giúp các em biết tìm lời giải cho một bài toán. Vì vậy cần kết hợp và vận dụng linh hoạt các phương pháp dạy học để hướng dẫn, tổ chức cho các em nắm được nội dung của việc ứng dụng số phức, vận dụng nó một cách linh hoạt thông qua hoạt động giải toán.

Trong dạy học, cần chú ý đến các vấn đề: sử dụng trực quan để hỗ trợ quá trình nhận thức của HS, đảm bảo tính vừa sức trong dạy học, tăng tần số hoạt động của HS đối với một vấn đề.

Để bồi dưỡng năng lực ứng dụng của số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác một cách có hiệu quả, GV cũng cần bổ sung kịp thời các kiến thức mà HS còn thiếu, còn yếu, trang bị các tri thức phương pháp giải toán, rèn luyện từng kỹ năng cụ thể, rèn luyện các bài toán tổng hợp, coi trọng việc rèn luyện tư duy logic và tư duy sáng tạo trong quá trình vận dụng các thao tác và hình thức tư duy khi giải toán.



Định hướng về vấn đề xây dựng hệ thống bài tập.

Năng lực giải toán chỉ có thể được hình thành và phát triển trong quá trình hoạt động của HS. Giải bài tập toán học là một nội dung quan trọng trong học tập, do đó ta phải xác định được một hệ thống bài tập sao cho vừa có tác dụng khắc sâu kiến thức, rèn luyện kỹ năng, vừa có tác dụng phát triển tư duy độc lập sáng tạo cho HS để chuẩn bị có hiệu quả cho việc vận dụng kiến thức vào thực tiễn cuộc sống của các em sau này.

Trên cơ sở các chỉ tiêu về năng lực (đã trình bày trong chương 1) hệ thống các chuyên đề về bài tập hình học phẳng và lượng giác xây dựng với mục đích bồi dưỡng năng lực giải toán bằng số phức cho HS khá giỏi ở trường THPT phải là hệ thống bài tập đáp ứng được những yêu cầu sau.

- Có tác dụng củng cố vững chắc các kiến thức kỹ năng trong chương trình số phức ở trường THPT. Giúp HS hiểu và thấy ý nghĩa của số phức trong toán.
- Có tác dụng hình thành và rèn luyện các thành phần của năng lực giải toán bằng số phức cho HS.
- Bài tập phải gợi ở HS sự ham thích tìm tòi.
- Hệ thống bài tập phải có tính tổng hợp, tức là những bài tập đòi hỏi phải sử dụng nhiều nội dung kiến thức khác nhau, phải nhạy bén trong việc lựa chọn những kiến thức có liên quan để giải quyết yêu cầu do bài toán đặt ra.

Để giải quyết được các yêu cầu trên, các dạng bài tập đưa ra phải phong phú, bài tập phải gồm nhiều loại: chứng minh, tính toán, bài tập về quỹ tích, dựng hình, cực trị trong hình học,... các bài toán về lượng giác cần tập trung vào khai thác các vấn đề gần gũi nhưng thường gây khó khăn cho HS như: tính tổng của biểu thức vô hạn, giải phương trình bậc cao, ... để bồi dưỡng khả năng vận dụng số phức vào nhiều tình huống khác nhau. Trong mỗi thể loại đó lại chú ý bao gồm nhiều dạng bài tập như: bài tập có nội dung biến đổi, bài tập có nhiều kết quả, ...

Vì số phức là một nội dung còn mới mẻ với HS bậc THPT nên khi mới làm quen với việc sử dụng số phức như một công cụ giải toán hình học phẳng và lượng giác cần có những bài toán cơ bản để các em tiếp cận và tự vượt qua, sau đó khi các em đã nắm được những vấn đề cơ bản mới nâng dần độ phức tạp bằng những bài toán khó hơn, tuy nhiên cũng cần theo dõi, giúp đỡ, khích

lệ một cách tế nhị để các em từng bước độc lập suy nghĩ, ngày càng bộc khả năng và phát huy những khả năng của mình.

2.2. Xây dựng một số chuyên đề vận dụng số phức vào giải một số dạng toán hình học phẳng và lượng giác.

2.2.1. Nguyên tắc xây dựng hệ thống bài tập, chuyên đề.

Một hệ thống bài tập, chuyên đề là tập hợp các bài tập được liên kết với nhau bởi các quan hệ sau: Quan hệ trình độ phát triển tư duy toán học, quan hệ nội dung toán học và quan hệ mục tiêu đào tạo.

Lựa chọn một hệ thống bài tập có chủ định và hệ thống bài tập ôn để hướng dẫn HS giải thông qua đó rèn luyện cho HS tư duy và kỹ năng giải toán nhất định.

Các bài tập được xây dựng theo một quan điểm nhất quán, theo một định hướng và yêu cầu rõ rệt để HS có thể vận dụng kiến thức, kinh nghiệm có sẵn vào giải quyết những yêu cầu mới trong những tình huống mới.

Ta cũng cần nhấn mạnh lại rằng, các bài toán ở trường phổ thông là một phương tiện rất có hiệu quả và không thể thay thế được trong việc giúp HS nắm vững được những tri thức, phát triển tư duy, hình thành kỹ năng, kỹ xảo, bồi dưỡng năng lực giải toán và đặc biệt là ứng dụng toán học vào thực tiễn. Hoạt động giải bài tập toán học là điều kiện để thực hiện tốt các mục đích dạy toán ở trường phổ thông, tổ chức có hiệu quả dạy giải bài tập toán có vai trò quyết định đối với chất lượng dạy và học toán, với sự phát triển năng lực trí tuệ của HS. Do vậy trong việc lựa chọn bài toán và hướng dẫn HS giải toán GV cần chú ý đến tác dụng của bài toán, nên chú trọng nhiều hơn đến việc lựa chọn hệ thống bài tập nhằm rèn luyện tư duy, kỹ năng và bồi dưỡng năng lực giải toán cho HS.

Hệ thống bài tập, chuyên đề thường được chia làm hai loại:

✓ Loại 1. Là các bài tập củng cố các kiến thức, kỹ năng cơ bản. Việc làm cho HS nắm vững, khắc sâu kiến thức lý thuyết thông qua bài tập là một công cụ tốt để làm toán và có cách suy nghĩ về toán theo một chiều hướng tích cực.

✓ Loại 2. Là những bài tập khó hơn nhằm nâng cao kỹ năng và bồi dưỡng năng lực giải toán cũng như năng lực tư duy toán học của HS. Sự có mặt của những bài tập này sẽ lôi cuốn HS vào hoạt động nhận thức, kích thích sự tò mò, sự ham muốn hiểu biết trí tuệ, giúp cho HS phát triển hết trí lực của mình vào hoạt động học tập.

Đối với việc lựa chọn một hệ thống các bài tập ôn tập cần chú ý.

Một hệ thống bài tập có lựa chọn sẽ là một công cụ hiệu quả nhằm tổng kết, giúp HS có cái nhìn tổng quát về tri thức toán học, kỹ năng giải toán sau khi học xong một chương, một phần hay toàn bộ chương trình học.

Qua thực tế giảng dạy cho thấy nếu chúng ta lựa chọn được một hệ thống bài tập ôn tập phù hợp sẽ giúp cho HS có khả năng khắc sâu kiến thức cũ, củng cố được một số kỹ năng giải toán cần thiết và góp phần đáng kể vào việc bồi dưỡng năng lực giải toán cho HS.

2.2.2. Chuyên đề 1. Ứng dụng số phức vào giải toán Hình học phẳng.

2.2.2.1. Ứng dụng số phức giải một số bài toán dạng chứng minh, tính toán.

Trong hình học phẳng, toán chứng minh, tính toán là một dạng toán cơ bản, thường gặp trong chương trình. Ứng dụng số phức vào giải dạng toán này tỏ ra khá thuận lợi khi đưa bài toán về xét trên mặt phẳng tọa độ phức. Đặc biệt, nhiều bài toán chứng minh nếu biết chọn hệ tọa độ thích hợp cùng với sự kết hợp linh hoạt các phép biến đổi thì sẽ cho ta lời giải đơn giản hơn, gọn gàng hơn.

Các bài toán trong nội dung này chú trọng nhiều đến bồi dưỡng các năng lực 1, 2 và 3 (đã trình bày trong mục 1.2.4); các bài toán cũng được sắp

xếp theo mức độ phức tạp tăng dần nhằm đảm bảo tính vừa sức và gây hứng thú cho HS.

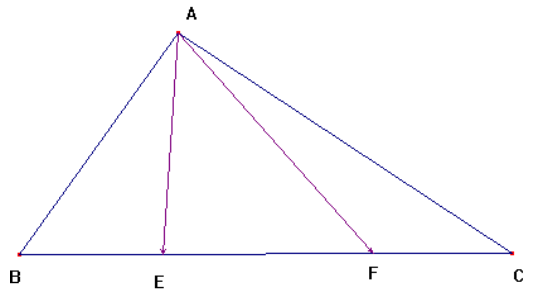
Bài toán 1. Cho tam giác ABC , trên BC lấy điểm E và F sao cho $\overrightarrow{EB} = k\overrightarrow{EC}$ và $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{k}\overrightarrow{FC}$, với $k \neq 1$.

- 1) Biểu diễn các vector $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EF}$ theo các vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.
- 2) Chứng minh các tam giác ABC và AEF có cùng trọng tâm.
- 3) Trên AB lấy điểm D , trên AC lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{DA} = k\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{IC} = k\overrightarrow{IA}$.

Chứng minh rằng $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Lời giải.

Trên mặt phẳng tọa độ phức, gọi tọa độ của các điểm là $A \ a$, $B \ b$, $C \ c$,
 $D \ d$, $E \ e$, $F \ f$, và $I \ z$.



- 1) Biểu diễn các vector $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EF}$ theo các vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

- Biểu diễn vector $\overrightarrow{AE}$.

Ta có $\overrightarrow{AE} = e - a$, theo giả thiết $\overrightarrow{EB} = k\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow b - e = k(c - e)$,

hay ta có $k - 1 \ e = kc - b$, suy ra $e = \frac{kc - b}{k - 1}$.

Từ đó ta có: $e - a = \frac{kc - b}{k - 1} - a = \frac{kc - b - ka + a}{k - 1}$

$$= \frac{a - b}{k - 1} + \frac{k \ c - a}{k - 1} = -\frac{1}{k - 1} b - a + \frac{k}{k - 1} c - a$$

Vậy ta có: $\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{k - 1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k - 1}\overrightarrow{AC}$.

- Biểu diễn vector $\overrightarrow{AF}$. Ta có $\overrightarrow{AF} = f - a$.

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{k}\overrightarrow{FC} \Leftrightarrow c - f = k(b - f)$, biến đổi tương

tự như trên ta được: $f - a = -\frac{k}{k-1}b - a - \frac{1}{k-1}c - a$. Hệ thức này có

nghĩa là $\overrightarrow{AF} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{k-1}\overrightarrow{AC}$.

- Biểu diễn $\overrightarrow{EF}$. Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{k-1}\overrightarrow{AC} - \left(-\frac{1}{k-1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AC}\right) \\ &= \left(\frac{k}{k-1} + \frac{1}{k-1}\right)\overrightarrow{AB} - \left(\frac{k+1}{k-1}\right)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{k+1}{k-1}\overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} - \frac{k+1}{k-1}\overrightarrow{AC}.$$

$$2) \text{ Ở trên ta đã tính được } e = \frac{kc-b}{k-1} \text{ và } f = \frac{kb-c}{k-1}.$$

$$\text{Từ đó ta có: } a + e + f = a + \frac{kc-b+kb-c}{k-1}$$

$$= \frac{ka+kb+kc - a+b+c}{k-1} = \frac{k-1}{k-1} a+b+c = a+b+c.$$

Đẳng thức này chứng tỏ rằng các tam giác ABC và AEF có cùng trọng tâm.

$$3) \text{ Từ giả thiết } \overrightarrow{DA} = k\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{IC} = k\overrightarrow{IA} \text{ theo trên ta tính được } d = \frac{kb-a}{k-1} \text{ và } z = \frac{ka-c}{k-1}.$$

Mặt khác ta có:

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CD} = e - a + z - b + d - c$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{kc - b - ka + a + ka - c - kb + b + kb - a - kc + c}{k-1} \\
&= \frac{k(a+b+c) - k(a+b+c) + a+b+c - a+b+c}{k-1} = 0.
\end{aligned}$$

Vậy ta có $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với trọng tâm là G , M là điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng tam giác. Chứng minh rằng:

- 1) $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3GA^2 + GB^2 + GC^2$
- 2) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$.

Hãy tìm trong tam giác ABC điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ là nhỏ nhất.

Lời giải.

Không làm giảm tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng trọng tâm G của tam giác ABC trùng với gốc tọa độ $O \equiv G$.

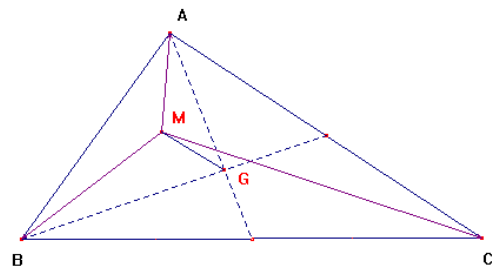
Trên mặt phẳng tọa độ phức, giả sử tọa độ của các đỉnh là $A \ a, B \ b, C \ c, G \ g, M \ m$.

- Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên suy ra tọa độ của G là $g = \frac{1}{3}(a+b+c)$, mà $G \equiv O$ nên suy ra $a + b + c = 0$.

- 1) Ta có, về phải $3GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3|a|^2 + |b|^2 + |c|^2$.

$$\text{Về trái } AB^2 + BC^2 + CA^2 = |b-a|^2 + |c-b|^2 + |c-a|^2.$$

Tính từng số hạng theo công thức $|z|^2 = z\bar{z}$, ta có.



$$|b-a|^2 = b-a \quad \bar{b}-\bar{a} = b\bar{b}+a\bar{a}-a\bar{b}-\bar{a}b,$$

$$|c-b|^2 = c-b \quad \bar{c}-\bar{b} = c\bar{c}+b\bar{b}-b\bar{c}-\bar{b}c,$$

$$|a-c|^2 = a-c \quad \bar{a}-\bar{c} = c\bar{c}+a\bar{a}-a\bar{c}-\bar{a}c.$$

Cộng các đẳng thức trên, vế với vế ta được

$$\begin{aligned} |b-a|^2 + |c-b|^2 + |c-a|^2 &= \\ &= 2|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 - [a\bar{b}+\bar{c} + b\bar{a}+\bar{c} + c\bar{a}+\bar{b}] \end{aligned}$$

Do $a + b + c = 0$, suy ra $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = 0$.

Từ đó suy ra $\bar{b} + \bar{c} = -\bar{a}$, $\bar{a} + \bar{c} = -\bar{b}$, $\bar{a} + \bar{b} = -\bar{c}$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó ta có} \quad a\bar{b}+\bar{c} + b\bar{a}+\bar{c} + c\bar{a}+\bar{b} &= -a\bar{a}-b\bar{b}-c\bar{c} \\ &= -|a|^2 - |b|^2 - |c|^2 \end{aligned}$$

Vậy ta có $|b-a|^2 + |c-b|^2 + |c-a|^2 = 3|a|^2 + |b|^2 + |c|^2$, suy ra điều phải chứng minh.

$$\begin{aligned} 2) \text{ Ta có } MA^2 + MB^2 + MC^2 &= |a-m|^2 + |b-m|^2 + |c-m|^2 \\ &= a-m \quad \bar{a}-\bar{m} + b-m \quad \bar{b}-\bar{m} + c-m \quad \bar{c}-\bar{m} \\ &= a\bar{a}+b\bar{b}+c\bar{c}+3m\bar{m}-[m\bar{a}+\bar{b}+\bar{c} + \bar{m}a+b+c] \\ &= |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 3|m|^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2. \end{aligned}$$

• Vậy $MA^2 + MB^2 + MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG^2 nhỏ nhất khi và chỉ khi $M \equiv G$, nghĩa là M là trọng tâm của tam giác ABC .

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn O, R cho trước.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = BC^2 - CA^2 - AB^2$, và tính giá trị đó theo R .

Lời giải.

Chọn tâm O làm gốc tọa độ và giả sử tọa độ của các đỉnh tam giác lần lượt là $A(a)$, $B(b)$ và $C(c)$. Vì O, R ngoại tiếp tam giác ABC nên ta có: $\overline{aa} = \overline{bb} = \overline{cc} = R^2$.

Xét biểu thức

$$\begin{aligned} P &= BC^2 - CA^2 - AB^2 \\ &= c - b \quad \overline{c} - \overline{b} - a - c \quad \overline{a} - \overline{c} - b - a \quad \overline{b} - \overline{a} \end{aligned}$$

Biến đổi biểu thức trên ta được

$$\begin{aligned} P &= R^2 - \overline{a} - \overline{b} - \overline{c} \quad a - b - c \\ &= R^2 - a - b - c \quad \overline{a - b - c} \leq R^2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $P_{\max} = R^2$, khi và chỉ khi $a - b - c = 0$, khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \vec{0}. \quad (2.1)$$

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua tâm O . Khi đó

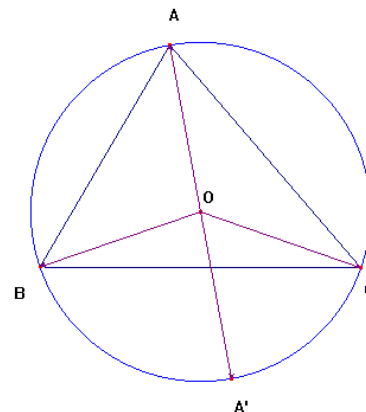
$$(2.1) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \quad (2.2)$$

Mà (2.2) xảy ra khi và chỉ khi $\triangle A'BC$ đều, hay tam giác ABC cân đỉnh A và $\angle A = 120^\circ$. Từ đó suy ra $AB = AC = R$.

Vậy P đạt giá trị lớn nhất: $P_{\max} = R$, khi và chỉ khi $\triangle ABC$ thỏa mãn $AB = AC = R$.

Bài toán 4. (Công thức Ole về tứ giác)

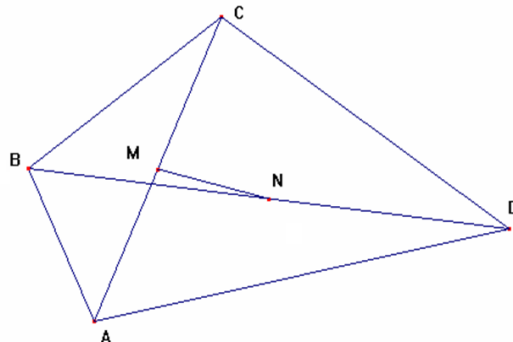
Chứng minh rằng trong một tứ giác, tổng bình phương của hai đường chéo cộng với bốn lần bình phương của đoạn thẳng nối trung điểm hai đường chéo bằng tổng bình phương các cạnh của tứ giác.



Lời giải.

Giả sử cho tứ giác $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh AC , N là trung điểm của cạnh BD .

Từ yêu cầu của bài toán ta phải chứng minh



$$AC^2 + BD^2 + 4MN^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2 = 4MN^2$$

Giả sử ta có tọa độ của các đỉnh tứ giác là $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ và $D(d)$. Khi đó ta có kết quả sau:

$$AB^2 = (b-a) \bar{b} - \bar{a} ; DA^2 = (a-d) \bar{a} - \bar{d} ; CD^2 = (d-c) \bar{d} - \bar{c} ;$$

$$\text{và } BC^2 = (c-b) \bar{c} - \bar{b} ; -BD^2 = -(d-b)(\bar{d} - \bar{b}) ; -AC^2 = -(c-a) \bar{c} - \bar{a} ;$$

$$\text{Từ đó suy ra } AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2 =$$

$$\begin{aligned} &= a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d} - a\bar{b} + a\bar{c} - a\bar{d} - b\bar{a} - b\bar{c} + \\ &\quad + b\bar{d} + c\bar{a} - c\bar{b} - c\bar{d} - d\bar{a} + d\bar{b} - d\bar{c} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Mặt khác, vì M và N là trung điểm của các đoạn thẳng AC và BD nên ta có tọa độ của $M\left(\frac{a+c}{2}\right)$, $N\left(\frac{b+d}{2}\right) \Rightarrow \overline{MN}\left(\frac{b+d-a-c}{2}\right)$.

Vậy ta có

$$\begin{aligned} 4MN^2 &= 4 \frac{b+d-a-c}{2} \frac{\bar{b} + \bar{d} - \bar{a} - \bar{c}}{2} = a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d} - a\bar{b} - a\bar{d} + \\ &\quad + a\bar{c} + b\bar{d} - b\bar{a} - b\bar{c} - c\bar{b} - c\bar{d} + c\bar{a} + d\bar{b} - d\bar{a} - d\bar{c} \end{aligned} \quad (2.4)$$

So sánh (2.3) và (2.4) ta được

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - AC^2 - BD^2 = 4MN^2, \text{ (đpcm)}$$

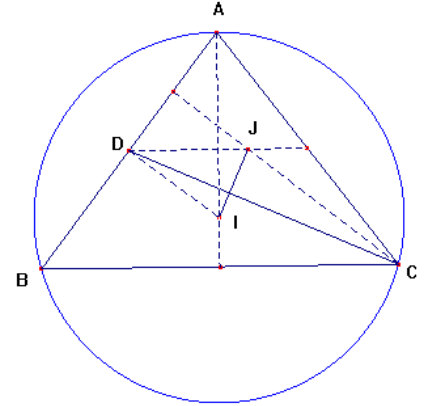
Bài toán 5. (Đề thi vô địch Anh, năm 1983).

Cho tam giác ABC cân đỉnh A , gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ; D là trung điểm của AB và J là trọng tâm của tam giác ACD . Chứng minh rằng $IJ \perp CD$.

Lời giải.

Chọn đường tròn tâm I làm đường tròn đơn vị (gốc I , $r=1$).

Giả sử $A(a)$, $B(b)$ và $C(c)$. Vì A , B và C cùng thuộc đường tròn, nên ta có $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$, và do D là trung điểm của AB



nên tọa độ của $D\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{DC} = c - \frac{a+b}{2} = \frac{2c-a-b}{2}$. Mặt khác, vì J là trọng tâm

của $\triangle ACD$ nên có tọa độ là $j = \frac{a+c+\frac{a+b}{2}}{3}$, hay $j = \frac{3a+2c+b}{6}$. Từ đó

suy ra $\overrightarrow{IJ} = \frac{3a+2c+b}{6}$ (vì I là gốc tọa độ).

Để chứng minh $IJ \perp CD$, ta cần chứng minh $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{CD} &= \frac{1}{2} \left(\frac{3a+2c+b}{6} \cdot \frac{2\bar{c}-\bar{a}-\bar{b}}{2} + \frac{3\bar{a}+2\bar{c}+\bar{b}}{6} \cdot \frac{2c-a-b}{2} \right) \\ &= \frac{1}{24} (6a\bar{c} - 3a\bar{a} - 3a\bar{b} + 4c\bar{c} - 2c\bar{a} - 2c\bar{b} + 2b\bar{c} - b\bar{a} - b\bar{b} + 6c\bar{a} + 4c\bar{c} \\ &\quad + 2c\bar{b} - 3\bar{a}a - 2\bar{c}a - \bar{a}b - 3\bar{a}b - 2\bar{b}c - \bar{b}b) \\ &= \frac{1}{24} (-4a\bar{b} + 4c\bar{a} - 4\bar{a}b + 4a\bar{c}) . \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{1}{6} c\bar{a} + a\bar{c} - a\bar{b} - \bar{a}b. \quad (2.5)$$

Mặt khác, do $AC = AB$ nên suy ra:

$$\begin{aligned} c - a \quad \bar{c} - \bar{a} &= b - a \quad \bar{b} - \bar{a} \\ \Leftrightarrow c\bar{c} - c\bar{a} - a\bar{c} + a\bar{a} &= b\bar{b} - b\bar{a} - a\bar{b} + a\bar{a} \\ \Leftrightarrow c\bar{a} + a\bar{c} &= b\bar{a} + a\bar{b} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Từ (2.5) và (2.6) suy ra $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, vậy $IJ \perp CD$.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$.

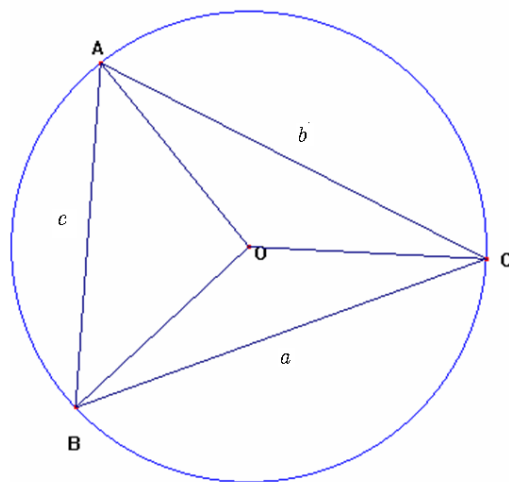
Lời giải.

Ta chọn đường tròn tâm (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$ làm đường tròn đơn vị và gốc tọa độ là O .

Giả sử tọa độ của các đỉnh là $A(z_1)$, $B(z_2)$ và $C(z_3)$. Theo bài ra ta có $z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = R^2$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= BC^2 + CA^2 + AB^2 \\ &= (z_3 - z_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2) + (z_1 - z_3)(\bar{z}_1 - \bar{z}_3) + (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \\ &= z_3\bar{z}_3 + z_2\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_3 - z_3\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_1 + z_3\bar{z}_3 - z_3\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_3 + z_2\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 \\ &= 6R^2 + z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3 - [z_1(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) + z_2(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) + z_3(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3)] \\ &= 9R^2 - (z_1 + z_2 + z_3)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) \\ &= 9R^2 - (z_1 + z_2 + z_3)\overline{z_1 + z_2 + z_3} \leq 9R^2 \end{aligned}$$



Do $(z_1 + z_2 + z_3) \overline{z_1 + z_2 + z_3} \geq 0$ nên dấu "=" của bất đẳng thức trên xảy ra khi và chỉ khi: $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 0$, khi và chỉ khi $O \equiv G$, hay $\triangle ABC$ đều.

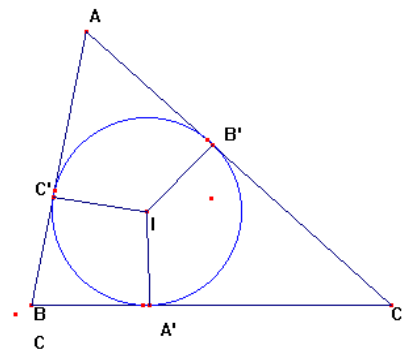
Vậy $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$, dấu "=" xảy ra khi tam giác ABC đều.

Bài toán 7. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Lời giải.

Ta chọn đường tròn tâm (I) nội tiếp $\triangle ABC$ là đường tròn đơn vị. Gọi A', B', C' là các tiếp điểm của đường tròn tương ứng với các cạnh BC , CA và cạnh AB và giả sử lần lượt có các tọa độ là a, b và c . Ta có $\widehat{C'AB'} + \widehat{C'IB'} = \pi$, suy ra $\cos(\widehat{C'AB'}) = -\cos(\widehat{IB'}, \widehat{IC'})$.



$$\text{Do đó ta có } \cos A = \cos(\widehat{C'AB'}) = -\frac{1}{2}(b\bar{c} + c\bar{b}).$$

$$\text{Tương tự ta có } \cos B = \frac{1}{2}(a\bar{c} + c\bar{a}); \cos C = -\frac{1}{2}(a\bar{b} + b\bar{a}).$$

$$\text{Vậy ta có } \cos A + \cos B + \cos C = -\frac{1}{2} b\bar{c} + c\bar{b} + a\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a}.$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \cos A + \cos B + \cos C = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(a+b+c) \overline{a+b+c} \leq \frac{3}{2},$$

$$\text{do } (a+b+c) \overline{a+b+c} \geq 0.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a+b+c=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{IB'} + \overrightarrow{IC'} = 0$
 $\Leftrightarrow I \equiv G$ xảy ra khi và chỉ khi $\triangle A'B'C'$, tức là $\triangle ABC$ đều.

Vậy ta luôn có, với mọi tam giác ABC thì
 $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$, dấu “=” xảy ra khi tam giác ABC đều.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC với trọng tâm G và một điểm M bất kỳ trong mặt phẳng. Chứng minh rằng:

$$MG^2 = \frac{1}{3} MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{9} AB^2 + BC^2 + CA^2. \quad (2.7)$$

Lời giải.

Chọn đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC làm đường tròn đơn vị và giả sử $M(z_0)$, $A(a)$, $B(b)$ và $C(c)$. Vì G là trọng tâm của $\triangle ABC$ nên tọa độ của

G xác định bởi $g = \frac{a+b+c}{3}$. Khi đó: $MG^2 = g - z_0 \bar{g} - \bar{z}_0$,

$$MA^2 = a - z_0 \bar{a} - \bar{z}_0, MB^2 = b - z_0 \bar{b} - \bar{z}_0, MC^2 = c - z_0 \bar{c} - \bar{z}_0,$$

$$AB^2 = b - a \bar{b} - \bar{a}, BC^2 = c - b \bar{c} - \bar{b} \text{ và } AC^2 = c - a \bar{c} - \bar{a}.$$

Thay vào vế trái của (2.7), ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{9} AB^2 + BC^2 + CA^2 = \\ &= \frac{1}{3} [a - z_0 \bar{a} - \bar{z}_0 + b - z_0 \bar{b} - \bar{z}_0 + c - z_0 \bar{c} - \bar{z}_0] \\ & \quad - \frac{1}{9} [b - a \bar{b} - \bar{a} + c - b \bar{c} - \bar{b} + c - a \bar{c} - \bar{a}] \end{aligned}$$

Biến đổi biểu thức trên với chú ý $a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c} = 1$, ta được

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{9} AB^2 + BC^2 + CA^2 = \\ &= \frac{1}{9} [a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} - 3z_0 \bar{a} + a + b + c - 3z_0 \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + 9z_0 \bar{z}_0 \\ & \quad + b\bar{a} + a\bar{b} + c\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{c}] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{9} [3 - 9\bar{z}_0 g - 9z_0 \bar{g} + 9z_0 \bar{z}_0 + b\bar{a} + a\bar{b} + c\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a} + a\bar{c}]$$

$$= z_0 \bar{z}_0 - \bar{z}_0 g - z_0 \bar{g} + g\bar{g} = g - z_0 \quad \bar{g} - \bar{z}_0 = VP$$

$$\text{Vậy ta có } MG^2 = \frac{1}{3} MA^2 + MB^2 + MC^2 - \frac{1}{9} AB^2 + BC^2 + CA^2 .$$

✓ Nhận xét: Bài toán 8 có thể có ngay kết quả nhờ áp dụng các kết quả của bài toán 2.

2.2.2.2. Ứng dụng số phức vào giải một số bài toán tìm tập hợp điểm.

Ở trường phổ thông, các bài toán có yếu tố thay đổi, mà thường gặp với HS là các bài toán quỹ tích luôn làm cho HS gặp khó khăn. Khi sử dụng số phức để giải các bài toán về quỹ tích, HS sẽ thấy đơn giản hơn nhờ việc xác định tọa độ phức của các yếu tố thay đổi, từ đó dễ dàng tìm được quỹ tích của nó.

Nói chung, các bài toán tìm tập hợp điểm có thể giải được bằng số phức khi bài toán đã cho có sẵn các yếu tố về tọa độ (loại này HS thường nhận biết ngay được cách thức giải), hoặc cho các yếu tố liên quan đến vector, môđun (đòi hỏi HS phải biết chọn hệ trục tọa độ và phiên dịch bài toán sang ngôn ngữ số phức). Vì vậy, cần tạo cho HS có kỹ năng thiết lập tọa độ phức và biết phiên dịch bài toán sang ngôn ngữ số phức để giải quyết.

Bài toán 1.

Trong hệ tọa độ Oxy cho các điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$, (với $a > 0$).

1) Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với Ox tại A và có tâm C

mà $y_C = \frac{m\sqrt{2}}{2}$. Xác định giao điểm thứ hai P của đường tròn đó với đường thẳng AB.

2) Viết phương trình đường tròn (C') đi qua P và tiếp xúc với Oy tại B.

3) Hai đường tròn cắt nhau tại P và Q . Viết phương trình đường thẳng PQ . Chứng minh rằng khi m thay đổi đường PQ luôn đi qua điểm cố định.

Lời giải.

Trong mặt phẳng phức, các điểm $A(a; 0)$ tương ứng với điểm $A(a + i0) = A(a)$; điểm $B(0; b)$ tương ứng với điểm $B(0 + ia) = B(ia)$.

1) Vì đường tròn (C) tiếp xúc với Ox tại A suy ra $x_A = x_C = a$, suy ra tọa độ tâm của đường tròn (C) là $C\left(a + i\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)$ và bán kính là $R_C = \left|\frac{m\sqrt{2}}{2}\right|$, suy ra phương trình đường tròn (C) có dạng.

$$\begin{aligned} z\bar{z} - \left(a - i\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)z - \left(a + i\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\bar{z} + \\ + \left(a - i\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)\left(a + i\frac{m\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{hay } z\bar{z} - a(z + \bar{z}) - i\frac{m\sqrt{2}}{2}(z - \bar{z}) + a^2 = 0. \quad (2.8)$$

Bằng cách thay $z + \bar{z} = 2x$; $z - \bar{z} = 2iy$ vào (8) ta được dạng thực như sau

$$x^2 + y^2 - 2ax + m\sqrt{2}y + a^2 = 0.$$

Phương trình đường thẳng AB có dạng

$$\bar{a} - i\bar{a}z + ia - a\bar{z} - 2ia^2 = 0 \quad (2.9)$$

Khi đó tọa độ điểm P là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} z\bar{z} - a(z + \bar{z}) - i\frac{m\sqrt{2}}{2}(z - \bar{z}) + a^2 = 0 \\ \bar{a} - i\bar{a}z + ia - a\bar{z} - 2ia^2 = 0 \end{cases}$$

Mặt khác $z^2 = \cos 2x + i \sin 2x$, nên ta có $\cos 2x = 1$, suy ra $x = l\pi (l \in \mathbb{Z})$. Vậy các họ nghiệm của phương trình đã cho là:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \\ x = l\pi. \end{cases}$$

Bài toán 4. Giải phương trình.

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1.$$

Lời giải.

Với $z = \cos x + i \sin x$, ta có

$$\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \cos 2x = \frac{z^4 + 1}{2z^2}, \cos 3x = \frac{z^6 + 1}{2z^3}.$$

Thay vào phương trình ta được $\frac{z^2 + 1}{2z} + \frac{z^4 + 1}{2z^2} + \frac{z^6 + 1}{2z^3} = 1$.

Sử dụng phép biến đổi tương đương ta được phương trình

$$\begin{aligned} z^4 + z^2 + z^5 + z - z^6 - 1 - 2z^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow z^6 - z^5 - z^4 + z^3 + z^3 - z^2 - z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{hay } z^3 + 1 \quad z^3 - z^2 - z + 1 = 0.$$

Từ đó ta có phương trình $z^3 + 1 \quad z - 1 \quad z + 1 = 0$, suy ra $z = 1, z = -1$ và $z^3 = -1$. Thay trở lại ta được nghiệm của phương trình đã cho là

$$\begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z}, \text{ hay } \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Bài toán 5. Giải phương trình.

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 6.$$

Lời giải.

Áp dụng công thức (2.49), ta có

$$-\frac{z^2-1}{z^2+1} - \frac{z^2+1}{z^2-1} = 6.$$

Biến đổi ta được phương trình:

$$-z^2-1 - z^2+1 = 6z^4-1.$$

Từ đó suy ra: $z^8 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^8 = -1$. Nhưng ta lại có $z^8 = \cos 8x + i \sin 8x$, do đó ta có

$$\cos 8x = -1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy các họ nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$$

2.3. Bài tập tự luyện.

Bài 1. Cho M, N, P, Q, R , và S là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE , và FA của một lục giác $ABCDEF$.

Chứng minh rằng $RN^2 = MQ^2 + PS^2$ khi và chỉ khi $MQ \perp PS$.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$, cạnh a ngoại tiếp đường tròn tâm O . Cho P là điểm bất kỳ trên đường tròn đó.

Tìm giá trị của biểu thức $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm; điểm S thỏa mãn $\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$ và điểm A' đối xứng với A qua I . Chứng minh rằng:

- 1) Hai tam giác ABC và ASA' có cùng trọng tâm.
- 2) $\overrightarrow{IS} = 3\overrightarrow{IG}$.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \text{ khi và chỉ khi } AC \perp BD.$$

Bài 5. Cho các điểm A, B, C, D và ba số thực a, b, c không đổi. Lấy các điểm M, N, P , và Q sao cho $\overrightarrow{BM} = a + t \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BN} = b - t \overrightarrow{BC}$, và $\overrightarrow{DQ} = b + t \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DP} = c - t \overrightarrow{DC}$, với t là số thực. Chứng minh khi số thực t thay đổi nhưng tổng $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ}$ không đổi.

Bài 6. Chứng minh rằng nếu $z = \cos x + i \sin x$ và $z \neq 1$, thì $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$.

Bài 7. Tính giá trị của tích $P = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$, bằng ít nhất hai cách khác nhau.

Bài 8. Tính các tổng sau $S = \sum_{k=1}^n q^k \cos kx$ và $T = \sum_{k=1}^n q^k \sin kx$

Bài 9. Giải phương trình $5\sin 3x - 3\sin 5x = 0$.

Bài 10. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \cos \frac{n\pi}{4}\right)$.

2.4. Kết luận chương 2.

Trong đề tài đã nêu những định hướng cơ bản về vấn đề dạy học nội dung ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác và vấn đề xây dựng hệ thống các bài tập, chuyên đề. Qua chương này chúng tôi đã xây dựng được một số chuyên đề với một số dạng bài tập điển hình từ đơn giản đến phức tạp, cùng với một hệ thống bài tập tự luyện thường gây khó khăn cho HS phổ thông. Thông qua các chuyên đề này góp phần bồi dưỡng năng lực giải toán cho HS, đặc biệt năng lực ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác cho HS khá giỏi ở trường Trung học phổ thông.

CHƯƠNG 3

THỬ NGHIỆM SỰ PHẠM

3.1. Mục đích thử nghiệm sự phạm.

Thử nghiệm sự phạm được tiến hành nhằm mục đích kiểm tra tính khả thi và hiệu quả của các chuyên đề đưa ra để dạy HS nội dung ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác.

3.2. Tổ chức thử nghiệm.

3.2.1. Nội dung thử nghiệm.

Thử nghiệm dạy học một số nội dung về ứng dụng của số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác cho HS khá giỏi ở trường THPT.

Tiến hành dạy thử nghiệm nội dung: Ứng dụng số phức vào giải một số dạng toán của hình học phẳng và lượng giác:

- + Bài toán chứng minh, tính toán.
- + Bài toán quỹ tích, dựng hình.
- + Một số bài toán chứng minh, tính tổng các biểu thức chứa các hàm số lượng giác.
- + Ứng dụng số phức để giải một số phương trình lượng giác thường gặp.

3.2.2. Đối tượng thử nghiệm.

Đối tượng thử nghiệm là HS lớp 12A1 chuyên Toán, trường THPT chuyên tỉnh Lào Cai, gồm 25 học sinh. Đây là lớp chuyên toán của trường nên đối tượng HS đều là các em HS có kiến thức, kỹ năng tương đối tốt về môn toán, có khả năng vận dụng và tính sáng tạo trong giải toán. Đạo đức tốt, tác phong nhanh nhẹn.

Giáo viên dạy thử nghiệm là cô giáo Nguyễn Thị Minh – là giáo viên giảng dạy lâu năm, có nhiều kinh nghiệm trong giảng dạy, đặc biệt là trong công tác bồi dưỡng cho HS khá giỏi.

3.2.3. Triển khai thử nghiệm.

Sau khi trao đổi nội dung với Tổ chuyên môn, kết hợp với nắm bắt tình hình thực tế học tập của HS, chúng tôi tiến hành tổ chức thử nghiệm trong thời gian bốn tuần.

- + Tuần thứ nhất tiến hành dạy cho HS những kiến thức về số phức trong chương trình.

- + Tuần thứ hai hoàn thiện các kiến thức về số phức trong chương trình và tiến hành dạy bổ sung cho HS một số kiến thức về số phức phục vụ cho việc làm các chuyên đề.

- + Tuần thứ ba dạy cho HS chuyên đề về ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng.

- + Tuần thứ tư dạy cho HS chuyên đề về ứng dụng số phức vào giải toán lượng giác, các chuyên đề được tiến hành dạy vào các buổi bồi dưỡng, mỗi tuần 2 buổi.

Tiến hành kiểm tra, đánh giá vào cuối tuần thứ tư.

Mỗi tiết dạy, mỗi chuyên đề đều được trao đổi, thảo luận kỹ về mục tiêu, nội dung, phương pháp giảng dạy. Sau mỗi tiết dạy, mỗi chuyên đề đều có nhận xét, rút kinh nghiệm cho các tiết dạy tiếp theo được tốt hơn.

Về dạy chuyên đề, chúng tôi đã hướng dẫn HS giải một số bài tập (có lựa chọn kỹ lưỡng) như trong luận văn đã trình bày. Ngoài ra còn cung cấp cho HS tài liệu tham khảo giúp các em thấy được những ứng dụng khác phong phú của số phức trong các lĩnh vực toán học, chúng tôi cũng cung cấp thêm các bài tập để HS tự giải và nghiên cứu.

Chúng tôi đã chuẩn bị bài kiểm tra, sau khi đã bàn bạc, trao đổi với giáo viên bộ môn về mục đích, nội dung của bài kiểm tra và cho HS thực hiện vào thời điểm đã định trước.

3.3. Kết quả thử nghiệm.

◆ Để đánh giá kết quả, sau khi dạy thử nghiệm chúng tôi đã phát cho các em trả lời vào phiếu thăm dò ý kiến (được trình bày trong phụ lục của luận văn) với nội dung thiết thực, cụ thể nhằm thu được những thông tin phản hồi từ phía HS.

◆ Tổng hợp các ý kiến tự đánh giá của HS và trao đổi cùng một số thầy cô giáo trong Tổ bộ môn chúng tôi thấy.

✓ *Về giáo viên.*

Số phức lâu nay vẫn được đưa vào giảng dạy cho các lớp chuyên toán, tuy nhiên chỉ dừng lại ở mức độ giới thiệu và làm các bài tập cơ bản về số phức. Nội dung ứng dụng số phức vào giải toán đã được đề cập song chưa nhiều. Việc dạy cho HS ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác làm cho HS thấy được ý nghĩa, vai trò của số phức trong Toán học.

Số phức là một nội dung khó song việc áp dụng nó vào giải toán cho ta nhiều kết quả lý thú và đẹp, gây hứng thú cho sự tìm tòi, làm tiền đề cho sự sáng tạo,... mà những điều đó rất cần cho người học toán, làm toán.

Việc đưa nội dung ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác (đặc biệt là các bài toán quỹ tích, giải phương trình) tạo điều kiện cho các thầy cô giáo có một hướng suy nghĩ mới, mặc dù một số bài toán nếu giải bằng số phức có thể dài hơn song ta có thể dùng số phức để nghiên cứu các vấn đề khác của toán, gây hứng thú hơn cho việc nghiên cứu các vấn đề về số phức. Qua đó cũng phát huy tích cực năng lực giải bài tập toán không chỉ của HS mà cả các thầy cô giáo.

Tuy nhiên nếu có nhiều thời gian hơn để có thể rèn luyện, bồi dưỡng kiến thức cho HS thì hiệu quả sẽ cao hơn.

✓ *Về học sinh.*

Sau khi cho các em trả lời các phiếu thăm dò, chúng tôi nhận được kết quả từ câu hỏi thứ nhất như sau.

Stt	Nội dung	Mức độ hiểu bài		
		Không có ý kiến	Không hiểu	Hiểu
1	Bài toán chứng minh, tính toán	4	8	13
2	Bài toán quỹ tích.	1	9	15
3	Tính tổng các biểu thức lượng giác.	2	11	12
4	Phương pháp sử dụng số phức để giải phương trình lượng giác.	3	13	9

(Số trong các ô là số ý kiến của học sinh)

Stt	Nội dung	Mức độ thích thú			
		Không	BT	Thích	Rất thích
1	Bài toán chứng minh, tính toán		4	14	7
2	Bài toán quỹ tích.			10	15
3	Tính tổng các biểu thức lượng giác.		1	10	14
4	Phương pháp sử dụng số phức để giải phương trình lượng giác.		3	12	10

(Số trong các ô là số ý kiến của học sinh)

Như vậy, qua việc tổng hợp các ý kiến của học sinh ở phiếu tự đánh giá, kết hợp với trao đổi cùng các em, có thể đưa ra một số nhận định sau.

Đa số các em (chiếm khoảng trên 60%) đều có khả năng lĩnh hội được những nội dung cơ bản của số phức, biết ứng dụng các kiến thức đó giải một

số dạng toán cơ bản của hình học phẳng như: Quỹ tích, chứng minh,... và một số bài toán về lượng giác có chứa cung bội nx . Trong số các vấn đề được hỏi, cho thấy các em đã nhận thức rõ được hiệu quả của việc ứng dụng số phức vào giải các bài toán quỹ tích, các bài toán tính tổng mà lâu nay vẫn là bài toán khó với các em. Đối với việc giải phương trình lượng giác, do các em đã quá quen với việc biến đổi, phân tích nên khi giải bằng số phức các em chưa thực sự thích thú. Tuy nhiên, nhiều em đã thấy được sự khác biệt giữa giải phương trình lượng giác bằng số phức với phương pháp biến đổi, phân tích quen thuộc.

Sau đợt thử nghiệm, các em thấy thích thú hơn với những vấn đề về số phức; thấy rằng số phức không phải là cái gì đó quá xa lạ, quá phức tạp. Đặc biệt, năng lực giải các bài toán hình học phẳng về quỹ tích, dựng hình; năng lực giải các bài toán về lượng giác được nâng lên rõ rệt.

Tổng hợp ý kiến trong câu hỏi 2 trong phiếu thăm dò cho kết quả: 24/25 chọn phương án trả lời là: Lựa chọn phương pháp giải (dùng kiến thức lượng giác lớp 11 hoặc số phức) tùy theo đặc điểm của từng bài (chiếm gần 98%). Như vậy đứng trước một bài toán học sinh đã có sự linh hoạt, tự tin để lựa chọn một phương pháp giải phù hợp; nhờ đó mà năng lực giải toán của các em cũng được phát triển.

◆ Về kết quả thử nghiệm.

➤ Sau đợt thử nghiệm, chúng tôi đã tiến hành kiểm tra đánh giá học sinh qua một bài kiểm tra viết với thời gian 60 phút. Đề kiểm tra gồm 3 bài, với nội dung như sau.

BÀI KIỂM TRA (45 PHÚT)

Câu 1. Giải các phương trình sau.

$$1) \cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0.$$

$$2) \frac{\sin 3x}{3} = \frac{\sin 5x}{5}.$$

Câu 2. Tính giới hạn sau.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2\pi}{2n+1} + \sin \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \sin \frac{4n\pi}{2n+1} \right).$$

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình là

$$\Delta_1: mx - y + m = 0, \quad \Delta_2: (1 - m^2)x + 2my - (1 + m^2) = 0.$$

1) Tìm tọa độ giao điểm I của Δ_1 và Δ_2 ứng với mỗi m .

2) Cho m thay đổi tìm tập hợp các giao điểm đó.

➤ Kết quả: 84% bài đạt điểm từ trung bình trở lên, cụ thể như sau.

Điểm	10	9	7; 8	5; 6	dưới 5
Số học sinh	1	1	10	9	4
Tỉ lệ (%)	4	4	40	36	16

➤ Những kết luận rút ra qua bài kiểm tra của HS.

+ Nhìn chung các em đều tích cực, cố gắng làm bài kiểm tra.

+ Đa số các em đều có khả năng phiên dịch bài toán sang ngôn ngữ số phức để giải quyết bài toán.

+ Qua bài làm của HS thấy các em nắm vững kiến thức cơ bản về số phức, biết trình bày lời giải rõ ràng, mạch lạc, biết suy luận và vận dụng linh hoạt các kiến thức về số phức vào giải toán. Một số em biết kết hợp giữa số phức và phương pháp tổng hợp thông thường để giải quyết bài toán do đó có lời giải gọn gàng, ngắn gọn. Như vậy năng lực ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác ở các em đã được phát triển.

+ Số các em đạt điểm giỏi chưa nhiều, qua đó cũng cho thấy, mặc dù các em có khả năng tiếp thu, vận dụng song kỹ năng giải toán còn chưa thật linh hoạt, chưa biết suy nghĩ tìm tòi để có một lời giải nhanh, đơn giản.

+ Một số bài kiểm tra chưa đạt điểm trung bình cho thấy mức độ nhận thức của HS trong lớp không đồng đều. Một số còn phân vân trong việc lựa chọn phương pháp giải, khả năng áp dụng chưa linh hoạt.

+ Từ kết quả của những bài kiểm tra dưới trung bình cũng cho thấy kỹ năng ứng dụng số phức vào giải toán nói riêng, kỹ năng giải toán nói chung của một số em còn chậm, chưa thực sự tích cực trong việc vận dụng các kiến thức đã biết, vì vậy chưa hoàn thành được toàn bộ bài kiểm tra.

3.4. Kết luận chương 3.

Qua đợt thử nghiệm, dựa trên các kết quả thu được có thể kết luận rằng.

Vấn đề sử dụng số phức như một công cụ giải toán hình học phẳng và lượng giác nêu lên trong luận văn là có thể thực hiện được. Việc phối hợp và sử dụng các biện pháp sư phạm trong việc dạy HS giải một số bài tập hình học phẳng và lượng giác bằng số phức đã góp phần làm cho việc học môn hình học, lượng giác và đặc biệt là số phức nói riêng và môn toán nói chung trở nên hấp dẫn, thực sự lôi cuốn và gây hứng thú cho HS, góp phần làm giảm đáng kể những khó khăn và sai lầm của các em, đồng thời phát triển năng lực giải toán cho HS, góp phần nâng cao chất lượng dạy và học. Thử nghiệm bước đầu minh họa được tính khả thi của việc xây dựng các chuyên đề nhằm bồi dưỡng năng lực giải toán ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác cho HS khá giỏi ở trường THPT.

KẾT LUẬN

Từ những vấn đề đã trình bày, có thể rút ra một số kết luận sau.

1. Luận văn đã làm sáng tỏ một số khái niệm về năng lực giải toán của HS.
2. Luận văn nghiên cứu việc ứng dụng số phức vào giải các bài toán hình học phẳng và lượng giác ở một số tình huống điển hình như: Một số bài toán chứng minh, bài toán tính toán, giải bài toán quỹ tích, dựng hình trong hình học phẳng; một số bài toán tính tổng, giải phương trình lượng giác có chứa các cung bội của các hàm số lượng giác.
3. Luận văn đã đề xuất một số chuyên đề nhằm phát triển năng lực giải toán cho HS khá giỏi trường THPT.
4. Kết quả thử nghiệm bước đầu minh họa cho tính khả thi và hiệu quả của các chuyên đề đã đề xuất, giả thuyết khoa học là chấp nhận được và những nhiệm vụ nghiên cứu đã hoàn thành.
5. Bồi dưỡng năng lực giải toán ứng dụng số phức vào các lĩnh vực toán học cho HS khá giỏi ở trường THPT là một đề tài mới mẻ, nếu được sự quan tâm đúng mức từ phía các thầy cô giáo thì góp phần đáng kể trong việc bồi dưỡng năng lực giải toán cho các em khá giỏi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

A. TIẾNG VIỆT

1. Lê Văn Anh (2001), “Vấn đề phát hiện, tuyển chọn và bồi dưỡng học sinh giỏi THPT”, *Tạp chí giáo dục số 10*.
2. Phan Trọng Ngọ (2002), “Tìm hiểu mức độ phát triển trí tuệ của học sinh THPT các tỉnh phía Bắc”, *Tạp chí giáo dục số 21*.
3. Hoàng Chúng (1997), *Phương pháp dạy học môn toán ở trường THPT*, NXB Giáo dục.
4. Nguyễn Văn Khuê – Lê Mậu Hải (2005), *Hàm biến phức*, NXB Đại học quốc gia Hà Nội.
5. Nguyễn Phú Hy – Nguyễn Quốc Bảo (1996), *Ứng dụng số phức để giải toán sơ cấp*, NXB Giáo dục.
6. Đoàn Quỳnh (1997), *Số phức với hình học phẳng*, NXB Giáo dục.
7. Phạm Thành Luân (2005), *Số phức và các ứng dụng*, NXB Giáo dục.
8. Nguyễn Hữu Quyết (2000), *Số phức với các phép biến hình trong mặt phẳng*, Luận án Thạc sĩ khoa học Toán học.
9. Nguyễn Huy Nam (1997), *Một số ứng dụng của số phức vào việc giải các bài toán hình học phẳng*, Luận án Thạc sĩ khoa học Toán học.
10. Nguyễn Thị Hương Trang (2002), *Rèn luyện năng lực giải toán theo định hướng sáng tạo, phát hiện và giải quyết vấn đề cho học sinh khá giỏi trường Trung học phổ thông*, Luận án tiến sĩ giáo dục học.
11. Đậu Thế Cấp (2000), *Bài tập hàm biến phức*, NXB Giáo dục.
12. Hoàng Kỳ, Nguyễn Văn Bàng, Nguyễn Đức Thuận (1979), *Đại số sơ cấp*, NXB Giáo dục.
13. Nguyễn Bá Kim (2007), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm.
14. Nguyễn Bá Kim (chủ biên), Đinh Nho Chương, Nguyễn Mạnh Cầm, Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Hưởng (1994), *Phương pháp dạy học môn Toán phần 2 - Dạy học những nội dung cơ bản*, NXB Giáo dục.

15. Bùi Văn Nghị, *Chuyển tiếp môn toán từ phổ thông lên đại học (Bài giảng chuyên đề sau đại học)*.
16. Bùi Văn Nghị, Vương Dương Minh, Nguyễn Anh Tuấn (2005), *Tài liệu bồi dưỡng thường xuyên cho giáo viên THPT chu kì III (2004 – 2007)*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
17. V.A.Cruchetxki: Những cơ sở của tâm lý học sư phạm, tập 2. NXB Giáo dục, Hà Nội, 1981.
18. Nguyễn Thị Hương Trang: Một số vấn đề về rèn luyện năng lực giải toán cho học sinh THPT. Tạp chí nghiên cứu giáo dục số 1 năm 2000.
19. Nguyễn Thái Hòa (2004), *Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập toán*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
20. G. Polya (1997), *Sáng tạo toán học* (người dịch: Nguyễn Sỹ Tuyên, Phạm Tất Đắc, Hồ Thuần, Nguyễn Giản), NXB Giáo dục, Hà Nội.
21. G. Polya (1997), *Giải một bài toán như thế nào?* (người dịch Hồ Thuần, Bùi Tường), NXB Giáo dục, Hà Nội.
22. Nguyễn Cảnh Toàn (1998), *Tập cho học sinh giỏi toán làm quen dần với nghiên cứu toán học*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
23. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Văn Như Cương (Chủ biên), Phạm Vũ Khuê, Bùi Văn Nghị (2006), *Sách giáo khoa Hình Học 10 nâng cao*, NXB Giáo dục.
24. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Văn Như Cương (Chủ biên), Phạm Vũ Khuê, Bùi Văn Nghị (2006), *Sách giáo viên Hình Học 10 nâng cao*, NXB Giáo dục.
25. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Văn Như Cương, Nguyễn Huy Đoan, Phạm Vũ Khuê, Trần Văn Vương, Nguyễn Thế Thạch, Phạm Đức Quang (2006), “Chương trình và sách giáo khoa toán 10 nâng cao”, *Tài liệu bồi dưỡng giáo viên*, NXB Giáo dục.
26. Trần Kiều, Phạm Gia Đức, Bùi Văn Nghị, Nguyễn Văn Đoàn, Trần Văn Vương, Đỗ Mạnh Hùng, Phạm Đức Quang, Nguyễn Thế Thạch, Hoàng

Ngọc Hưng (2004), *Tài liệu đổi mới phương pháp dạy học trung học phổ thông môn Toán*, Bộ Giáo dục và Đào tạo.

27. Bộ giáo dục và đào tạo (2005), *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và tuổi trẻ - Quyển 1*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
28. Bộ giáo dục và đào tạo (1993), *Đề thi tuyển sinh vào các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp môn toán*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
29. V.A.Cruchetxki (1973), *Tâm lí năng lực toán học của học sinh*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
30. Nguyễn Bá Kim, Vũ Dương Thụy (1992), *Phương Pháp dạy học môn Toán (phần I)*, Nxb Giáo Dục.

B. TIẾNG ANH

31. P.S. Modenov (1981), *Problems in Geometry*. Translated from the Russian by George Yankovsky.
32. Titu Andreescu, Dorin Andrica, *Complex Numbers from A to...Z*. Birkhauser Boston, Basel, Berlin.

PHỤ LỤC

1. Mẫu phiếu thăm dò ý kiến học sinh.

PHIẾU THĂM DÒ Ý KIẾN

Xin em cho biết ý kiến về những vấn đề sau

(Đánh dấu ☒ vào ô tương ứng nếu nhất trí)

- 1) Sau khi được rèn luyện cách sử dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác, em tự đánh giá về các nội dung như sau.

Stt	Nội dung	Mức độ hiểu bài		
		Không có ý kiến	Không hiểu	Hiểu
1	Bài toán chứng minh, tính toán			
2	Bài toán quỹ tích.			
3	Tính tổng các biểu thức lượng giác.			
4	Phương pháp sử dụng số phức để giải phương trình lượng giác.			

Stt	Nội dung	Mức độ thích thú			
		Không	BT	Thích	Rất thích
1	Bài toán chứng minh, tính toán				
2	Bài toán quỹ tích.				
3	Tính tổng các biểu thức lượng giác.				
4	Phương pháp sử dụng số phức để giải phương trình lượng giác.				

2) Đứng trước một bài toán tính tổng (hoặc giải phương trình) lượng giác có chứa cung bội nx của sin (hoặc cosin, tang, cotang) em sẽ:

☐ Cố gắng giải bằng kiến thức lượng giác lớp 11.

☐ Cố gắng giải bằng số phức.

☐ Lựa chọn phương pháp giải (dùng kiến thức lượng giác lớp 11 hoặc số phức) tùy theo đặc điểm của từng bài.

2. Hướng dẫn - Đáp số bài tập tự luyện.

Bài 1. Trên mặt phẳng tọa độ phức ta có

$$\begin{aligned} RN^2 &= MQ^2 + PS^2 \\ \Leftrightarrow e + f - b - c & \quad \bar{e} + \bar{f} - \bar{b} - \bar{c} \\ &= d + e - a - b \quad \bar{d} + \bar{e} - \bar{a} - \bar{b} + f + a - c - d \quad \bar{f} + \bar{a} - \bar{c} - \bar{d} \end{aligned}$$

Từ đó ta có $d + e - a - b \quad \bar{f} + \bar{a} - \bar{c} - \bar{d} = 0$, suy ra $MQ \perp PS$.

Bài 2. Trên mặt phẳng tọa độ phức (như hình vẽ), ta

có tọa độ của các đỉnh của hình vuông lần lượt là

$$z_A = \frac{a\sqrt{2}}{2}, z_B = \frac{a\sqrt{2}}{2}i, z_C = -\frac{a\sqrt{2}}{2}, z_D = -\frac{a\sqrt{2}}{2}i.$$

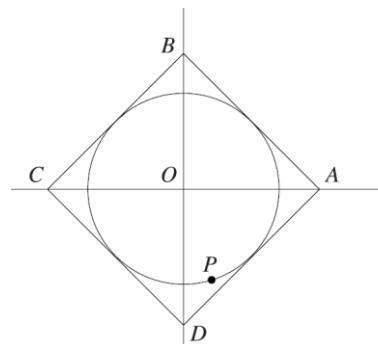
Giả sử $z_P = \frac{a}{2} \cos x + i \sin x$ là tọa độ của điểm P .

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 &= |z_A - z_P|^2 + |z_B - z_P|^2 + |z_C - z_P|^2 + |z_D - z_P|^2 \\ &= 4\frac{a^2}{2} + 2\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} \left(2\cos x + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(x + \pi\right) + 2\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \right) + 4\frac{a^2}{4} \\ &= 2a^2 + 0 + a^2 = 3a^2 \end{aligned}$$

Bài 3.

1) Từ giả thiết $\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$, suy ra $s + 2z = a + b + c$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác ASA' , thế thì



$g' = \frac{1}{3} a + s + a' = \dots = \frac{1}{3} a + b + c$. Suy ra các tam giác ABC và ASA' cùng trọng tâm.

2) Ta có $s - z = a + b + c - 3z = 3g - 3z = 3g - z$, chứng tỏ
 $\overrightarrow{IS} = 3\overrightarrow{IG}$.

Bài 4. Trên mặt phẳng tọa độ phức, gọi tọa độ của các đỉnh hình vuông và sử dụng tính chất ta có

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

$$\Leftrightarrow (b-a)(\bar{b}-\bar{a}) + (d-c)(\bar{d}-\bar{c}) = (c-b)(\bar{c}-\bar{b}) + (a-d)(\bar{a}-\bar{d})$$

Từ đó suy ra $(c-a)(b-d) = 0$, hay $AC \perp BD$.

Bài 5. Từ giả thiết tính $m-b, n-b, q-d$, và $p-d$; từ đó suy ra
 $p+q-m+n = b(a-d) + c(c-d) + 2(d-b) + a(b-a) + b(b-c)$, nghĩa
 là $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} + c\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{BD}$, không đổi.

Bài 6. Biến đổi $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - \cos x + i \sin x} = \dots = \frac{1}{2} + i \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$, ta có

điều phải chứng minh.

Bài 7.

* Cách 1. Sử dụng biến đổi lượng giác quen thuộc: nhân cả hai vế của biểu thức với $\sin 20^\circ$ và áp dụng công thức nhân đôi ta được $P = \frac{1}{8}$.

* Cách 2. Chuyển sang ngôn ngữ số phức: Cho $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$, biểu diễn $\cos 20^\circ$, $\cos 40^\circ$ và $\cos 80^\circ$ theo lũy thừa của z . Thay vào biểu thức và

rút gọn ta được $P = \frac{-z^7 - 1}{8 - 1 - z^7} = \frac{1}{8}$.

Bài 8. Biến đổi $1 + S + iT = \sum_{k=0}^n q^k \cos kx + i \sin kx = \sum_{k=0}^n q^k \cos x + i \sin x^k$,

ta được

$$1 + S + iT = \frac{[1 - q^{n+1} \cos n+1 x - i q^{n+1} \sin n+1 x] [1 - q \cos x + i q \sin x]}{q^2 - 2q \cos x + 1}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } 1 + S = \frac{q^{n+2} \cos nx - q^{n+1} \cos n+1 x - q \cos x + 1}{q^2 - 2q \cos x + 1}$$

$$\text{và } T = \frac{q^{n+2} \sin nx - q^{n+1} \sin n+1 x + q \sin x}{q^2 - 2q \cos x + 1}.$$

Bài 9. Áp dụng công thức $\sin n\alpha = \frac{z^{2n} - 1}{2iz^n}$, ta biểu diễn $\sin 3x$ và $\sin 5x$

theo z .

Thay vào phương trình tìm được các giá trị của z là:

$$z^2 = 1 \text{ và } z^2 = -\frac{2}{3} \pm \frac{i\sqrt{5}}{3}. \quad \text{Áp dụng công thức Moivre}$$

$$z^n = \cos nx + i \sin nx \text{ và đồng nhất phần thực ta tìm được } \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{suy ra } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi \end{cases}.$$

Bài 10. Áp dụng kết quả

$$\begin{aligned} 1 + r \cos x + z^2 \cos 2x + \dots + r^n \cos nx \\ = \frac{r^{n+2} \cos nx - r^{n+1} \cos n+1 x - r \cos x + 1}{1 - 2r \cos x + r^2}, \end{aligned}$$

$$\text{ta được } 1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \cos \frac{n\pi}{4} = \frac{1 - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4}}{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}}.$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \cos \frac{n\pi}{4} \right) = \frac{4 - \sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{2}}.$$

Mặt khác $z^2 = \cos 2x + i \sin 2x$, nên ta có $\cos 2x = 1$, suy ra $x = l\pi (l \in \mathbb{Z})$. Vậy các họ nghiệm của phương trình đã cho là:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \\ x = l\pi. \end{cases}$$

Bài toán 4. Giải phương trình.

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1.$$

Lời giải.

Với $z = \cos x + i \sin x$, ta có

$$\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \cos 2x = \frac{z^4 + 1}{2z^2}, \quad \cos 3x = \frac{z^6 + 1}{2z^3}.$$

Thay vào phương trình ta được $\frac{z^2 + 1}{2z} + \frac{z^4 + 1}{2z^2} + \frac{z^6 + 1}{2z^3} = 1$.

Sử dụng phép biến đổi tương đương ta được phương trình

$$\begin{aligned} z^4 + z^2 + z^5 + z - z^6 - 1 - 2z^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow z^6 - z^5 - z^4 + z^3 + z^3 - z^2 - z + 1 &= 0 \end{aligned}$$

hay $z^3 + 1 \mid z^3 - z^2 - z + 1 = 0$.

Từ đó ta có phương trình $z^3 + 1 \mid z - 1 \mid z + 1 = 0$, suy ra $z = 1, z = -1$ và $z^3 = -1$. Thay trở lại ta được nghiệm của phương trình đã cho

$$\text{là } \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}, \text{ với } k \in \mathbb{Z}, \text{ hay } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 5. Giải phương trình.

$$\tan^2 x + \cot^2 x = 6.$$

Lời giải.

Áp dụng công thức (2.49), ta có

$$-\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} - \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = 6.$$

Biến đổi ta được phương trình:

$$-z^2 - 1 - z^2 + 1 = 6(z^2 - 1)^2.$$

Từ đó suy ra: $z^8 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^8 = -1$. Nhưng ta lại có $z^8 = \cos 8x + i \sin 8x$, do đó ta có

$$\cos 8x = -1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy các họ nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$$

2.3. Bài tập tự luyện.

Bài 1. Cho M, N, P, Q, R , và S là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DE , và FA của một lục giác $ABCDEF$.

Chứng minh rằng $RN^2 = MQ^2 + PS^2$ khi và chỉ khi $MQ \perp PS$.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$, cạnh a ngoại tiếp đường tròn tâm O . Cho P là điểm bất kỳ trên đường tròn đó.

Tìm giá trị của biểu thức $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm; điểm S thỏa mãn $\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$ và điểm A' đối xứng với A qua I . Chứng minh rằng:

3) Hai tam giác ABC và ASA' có cùng trọng tâm.

4) $\overrightarrow{IS} = 3\overrightarrow{IG}$.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng:

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \text{ khi và chỉ khi } AC \perp BD.$$

Bài 5. Cho các điểm A, B, C, D và ba số thực a, b, c không đổi. Lấy các điểm M, N, P , và Q sao cho $\overrightarrow{BM} = a + t \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BN} = b - t \overrightarrow{BC}$, và $\overrightarrow{DQ} = b + t \overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DP} = c - t \overrightarrow{DC}$, với t là số thực. Chứng minh khi số thực t thay đổi nhưng tổng $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ}$ không đổi.

Bài 6. Chứng minh rằng nếu $z = \cos x + i \sin x$ và $z \neq 1$, thì $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{2}$.

Bài 7. Tính giá trị của tích $P = \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$, bằng ít nhất hai cách khác nhau.

Bài 8. Tính các tổng sau $S = \sum_{k=1}^n q^k \cos kx$ và $T = \sum_{k=1}^n q^k \sin kx$

Bài 9. Giải phương trình $5\sin 3x - 3\sin 5x = 0$.

Bài 10. Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \cos \frac{n\pi}{4}\right)$.

2.4. Kết luận chương 2.

Trong đề tài đã nêu những định hướng cơ bản về vấn đề dạy học nội dung ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác và vấn đề xây dựng hệ thống các bài tập, chuyên đề. Qua chương này chúng tôi đã xây dựng được một số chuyên đề với một số dạng bài tập điển hình từ đơn giản đến phức tạp, cùng với một hệ thống bài tập tự luyện thường gây khó khăn cho HS phổ thông. Thông qua các chuyên đề này góp phần bồi dưỡng năng lực giải toán cho HS, đặc biệt năng lực ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác cho HS khá giỏi ở trường Trung học phổ thông.

CHƯƠNG 3

THỬ NGHIỆM SỰ PHẠM

3.1. Mục đích thử nghiệm sự phạm.

Thử nghiệm sự phạm được tiến hành nhằm mục đích kiểm tra tính khả thi và hiệu quả của các chuyên đề đưa ra để dạy HS nội dung ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác.

3.2. Tổ chức thử nghiệm.

3.2.1. Nội dung thử nghiệm.

Thử nghiệm dạy học một số nội dung về ứng dụng của số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác cho HS khá giỏi ở trường THPT.

Tiến hành dạy thử nghiệm nội dung: Ứng dụng số phức vào giải một số dạng toán của hình học phẳng và lượng giác:

- + Bài toán chứng minh, tính toán.
- + Bài toán quỹ tích, dựng hình.
- + Một số bài toán chứng minh, tính tổng các biểu thức chứa các hàm số lượng giác.
- + Ứng dụng số phức để giải một số phương trình lượng giác thường gặp.

3.2.2. Đối tượng thử nghiệm.

Đối tượng thử nghiệm là HS lớp 12A1 chuyên Toán, trường THPT chuyên tỉnh Lào Cai, gồm 25 học sinh. Đây là lớp chuyên toán của trường nên đối tượng HS đều là các em HS có kiến thức, kỹ năng tương đối tốt về môn toán, có khả năng vận dụng và tính sáng tạo trong giải toán. Đạo đức tốt, tác phong nhanh nhẹn.

Giáo viên dạy thử nghiệm là cô giáo Nguyễn Thị Minh – là giáo viên giảng dạy lâu năm, có nhiều kinh nghiệm trong giảng dạy, đặc biệt là trong công tác bồi dưỡng cho HS khá giỏi.

3.2.3. Triển khai thử nghiệm.

Sau khi trao đổi nội dung với Tổ chuyên môn, kết hợp với nắm bắt tình hình thực tế học tập của HS, chúng tôi tiến hành tổ chức thử nghiệm trong thời gian bốn tuần.

+ Tuần thứ nhất tiến hành dạy cho HS những kiến thức về số phức trong chương trình.

+ Tuần thứ hai hoàn thiện các kiến thức về số phức trong chương trình và tiến hành dạy bổ sung cho HS một số kiến thức về số phức phục vụ cho việc làm các chuyên đề.

+ Tuần thứ ba dạy cho HS chuyên đề về ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng.

+ Tuần thứ tư dạy cho HS chuyên đề về ứng dụng số phức vào giải toán lượng giác, các chuyên đề được tiến hành dạy vào các buổi bồi dưỡng, mỗi tuần 2 buổi.

Tiến hành kiểm tra, đánh giá vào cuối tuần thứ tư.

Mỗi tiết dạy, mỗi chuyên đề đều được trao đổi, thảo luận kỹ về mục tiêu, nội dung, phương pháp giảng dạy. Sau mỗi tiết dạy, mỗi chuyên đề đều có nhận xét, rút kinh nghiệm cho các tiết dạy tiếp theo được tốt hơn.

Về dạy chuyên đề, chúng tôi đã hướng dẫn HS giải một số bài tập (có lựa chọn kỹ lưỡng) như trong luận văn đã trình bày. Ngoài ra còn cung cấp cho HS tài liệu tham khảo giúp các em thấy được những ứng dụng khác phong phú của số phức trong các lĩnh vực toán học, chúng tôi cũng cung cấp thêm các bài tập để HS tự giải và nghiên cứu.

Chúng tôi đã chuẩn bị bài kiểm tra, sau khi đã bàn bạc, trao đổi với giáo viên bộ môn về mục đích, nội dung của bài kiểm tra và cho HS thực hiện vào thời điểm đã định trước.

3.4. Kết quả thử nghiệm.

◆ Để đánh giá kết quả, sau khi dạy thử nghiệm chúng tôi đã phát cho các em trả lời vào phiếu thăm dò ý kiến (được trình bày trong phụ lục của luận văn) với nội dung thiết thực, cụ thể nhằm thu được những thông tin phản hồi từ phía HS.

◆ Tổng hợp các ý kiến tự đánh giá của HS và trao đổi cùng một số thầy cô giáo trong Tổ bộ môn chúng tôi thấy.

✓ *Về giáo viên.*

Số phức lâu nay vẫn được đưa vào giảng dạy cho các lớp chuyên toán, tuy nhiên chỉ dừng lại ở mức độ giới thiệu và làm các bài tập cơ bản về số phức. Nội dung ứng dụng số phức vào giải toán đã được đề cập song chưa nhiều. Việc dạy cho HS ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác làm cho HS thấy được ý nghĩa, vai trò của số phức trong Toán học.

Số phức là một nội dung khó song việc áp dụng nó vào giải toán cho ta nhiều kết quả lý thú và đẹp, gây hứng thú cho sự tìm tòi, làm tiền đề cho sự sáng tạo,... mà những điều đó rất cần cho người học toán, làm toán.

Việc đưa nội dung ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác (đặc biệt là các bài toán quỹ tích, giải phương trình) tạo điều kiện cho các thầy cô giáo có một hướng suy nghĩ mới, mặc dù một số bài toán nếu giải bằng số phức có thể dài hơn song ta có thể dùng số phức để nghiên cứu các vấn đề khác của toán, gây hứng thú hơn cho việc nghiên cứu các vấn đề về số phức. Qua đó cũng phát huy tích cực năng lực giải bài tập toán không chỉ của HS mà cả các thầy cô giáo.

Tuy nhiên nếu có nhiều thời gian hơn để có thể rèn luyện, bồi dưỡng kiến thức cho HS thì hiệu quả sẽ cao hơn.

✓ *Về học sinh.*

Sau khi cho các em trả lời các phiếu thăm dò, chúng tôi nhận được kết quả từ câu hỏi thứ nhất như sau.

Stt	Nội dung	Mức độ hiểu bài		
		Không có ý kiến	Không hiểu	Hiểu
1	Bài toán chứng minh, tính toán	4	8	13
2	Bài toán quỹ tích.	1	9	15
3	Tính tổng các biểu thức lượng giác.	2	11	12
4	Phương pháp sử dụng số phức để giải phương trình lượng giác.	3	13	9

(Số trong các ô là số ý kiến của học sinh)

Stt	Nội dung	Mức độ thích thú			
		Không	BT	Thích	Rất thích
1	Bài toán chứng minh, tính toán		4	14	7
2	Bài toán quỹ tích.			10	15
3	Tính tổng các biểu thức lượng giác.		1	10	14
4	Phương pháp sử dụng số phức để giải phương trình lượng giác.		3	12	10

(Số trong các ô là số ý kiến của học sinh)

Như vậy, qua việc tổng hợp các ý kiến của học sinh ở phiếu tự đánh giá, kết hợp với trao đổi cùng các em, có thể đưa ra một số nhận định sau.

Đa số các em (chiếm khoảng trên 60%) đều có khả năng lĩnh hội được những nội dung cơ bản của số phức, biết ứng dụng các kiến thức đó giải một

số dạng toán cơ bản của hình học phẳng như: Quỹ tích, chứng minh,... và một số bài toán về lượng giác có chứa cung bội nx . Trong số các vấn đề được hỏi, cho thấy các em đã nhận thức rõ được hiệu quả của việc ứng dụng số phức vào giải các bài toán quỹ tích, các bài toán tính tổng mà lâu nay vẫn là bài toán khó với các em. Đối với việc giải phương trình lượng giác, do các em đã quá quen với việc biến đổi, phân tích nên khi giải bằng số phức các em chưa thực sự thích thú. Tuy nhiên, nhiều em đã thấy được sự khác biệt giữa giải phương trình lượng giác bằng số phức với phương pháp biến đổi, phân tích quen thuộc.

Sau đợt thử nghiệm, các em thấy thích thú hơn với những vấn đề về số phức; thấy rằng số phức không phải là cái gì đó quá xa lạ, quá phức tạp. Đặc biệt, năng lực giải các bài toán hình học phẳng về quỹ tích, dựng hình; năng lực giải các bài toán về lượng giác được nâng lên rõ rệt.

Tổng hợp ý kiến trong câu hỏi 2 trong phiếu thăm dò cho kết quả: 24/25 chọn phương án trả lời là: Lựa chọn phương pháp giải (dùng kiến thức lượng giác lớp 11 hoặc số phức) tùy theo đặc điểm của từng bài (chiếm gần 98%). Như vậy đứng trước một bài toán học sinh đã có sự linh hoạt, tự tin để lựa chọn một phương pháp giải phù hợp; nhờ đó mà năng lực giải toán của các em cũng được phát triển.

◆ Về kết quả thử nghiệm.

➤ Sau đợt thử nghiệm, chúng tôi đã tiến hành kiểm tra đánh giá học sinh qua một bài kiểm tra viết với thời gian 60 phút. Đề kiểm tra gồm 3 bài, với nội dung như sau.

BÀI KIỂM TRA (45 PHÚT)

Câu 1. Giải các phương trình sau.

$$1) \cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0.$$

$$2) \frac{\sin 3x}{3} = \frac{\sin 5x}{5}.$$

Câu 2. Tính giới hạn sau.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2\pi}{2n+1} + \sin \frac{4\pi}{2n+1} + \dots + \sin \frac{4n\pi}{2n+1} \right).$$

Câu 3. Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình là

$$\Delta_1: mx - y + m = 0, \quad \Delta_2: (1 - m^2)x + 2my - (1 + m^2) = 0.$$

1) Tìm tọa độ giao điểm I của Δ_1 và Δ_2 ứng với mỗi m .

2) Cho m thay đổi tìm tập hợp các giao điểm đó.

➤ Kết quả: 84% bài đạt điểm từ trung bình trở lên, cụ thể như sau.

Điểm	10	9	7; 8	5; 6	dưới 5
Số học sinh	1	1	10	9	4
Tỉ lệ (%)	4	4	40	36	16

➤ Những kết luận rút ra qua bài kiểm tra của HS.

+ Nhìn chung các em đều tích cực, cố gắng làm bài kiểm tra.

+ Đa số các em đều có khả năng phiên dịch bài toán sang ngôn ngữ số phức để giải quyết bài toán.

+ Qua bài làm của HS thấy các em nắm vững kiến thức cơ bản về số phức, biết trình bày lời giải rõ ràng, mạch lạc, biết suy luận và vận dụng linh hoạt các kiến thức về số phức vào giải toán. Một số em biết kết hợp giữa số phức và phương pháp tổng hợp thông thường để giải quyết bài toán do đó có lời giải gọn gàng, ngắn gọn. Như vậy năng lực ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác ở các em đã được phát triển.

+ Số các em đạt điểm giỏi chưa nhiều, qua đó cũng cho thấy, mặc dù các em có khả năng tiếp thu, vận dụng song kỹ năng giải toán còn chưa thật linh hoạt, chưa biết suy nghĩ tìm tòi để có một lời giải nhanh, đơn giản.

+ Một số bài kiểm tra chưa đạt điểm trung bình cho thấy mức độ nhận thức của HS trong lớp không đồng đều. Một số còn phân vân trong việc lựa chọn phương pháp giải, khả năng áp dụng chưa linh hoạt.

+ Từ kết quả của những bài kiểm tra dưới trung bình cũng cho thấy kỹ năng ứng dụng số phức vào giải toán nói riêng, kỹ năng giải toán nói chung của một số em còn chậm, chưa thực sự tích cực trong việc vận dụng các kiến thức đã biết, vì vậy chưa hoàn thành được toàn bộ bài kiểm tra.

3.4. Kết luận chương 3.

Qua đợt thử nghiệm, dựa trên các kết quả thu được có thể kết luận rằng.

Vấn đề sử dụng số phức như một công cụ giải toán hình học phẳng và lượng giác nêu lên trong luận văn là có thể thực hiện được. Việc phối hợp và sử dụng các biện pháp sư phạm trong việc dạy HS giải một số bài tập hình học phẳng và lượng giác bằng số phức đã góp phần làm cho việc học môn hình học, lượng giác và đặc biệt là số phức nói riêng và môn toán nói chung trở nên hấp dẫn, thực sự lôi cuốn và gây hứng thú cho HS, góp phần làm giảm đáng kể những khó khăn và sai lầm của các em, đồng thời phát triển năng lực giải toán cho HS, góp phần nâng cao chất lượng dạy và học. Thử nghiệm bước đầu minh họa được tính khả thi của việc xây dựng các chuyên đề nhằm bồi dưỡng năng lực giải toán ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác cho HS khá giỏi ở trường THPT.

KẾT LUẬN

Từ những vấn đề đã trình bày, có thể rút ra một số kết luận sau.

1. Luận văn đã làm sáng tỏ một số khái niệm về năng lực giải toán của HS.
2. Luận văn nghiên cứu việc ứng dụng số phức vào giải các bài toán hình học phẳng và lượng giác ở một số tình huống điển hình như: Một số bài toán chứng minh, bài toán tính toán, giải bài toán quỹ tích, dựng hình trong hình học phẳng; một số bài toán tính tổng, giải phương trình lượng giác có chứa các cung bội của các hàm số lượng giác.
3. Luận văn đã đề xuất một số chuyên đề nhằm phát triển năng lực giải toán cho HS khá giỏi trường THPT.
4. Kết quả thử nghiệm bước đầu minh họa cho tính khả thi và hiệu quả của các chuyên đề đã đề xuất, giả thuyết khoa học là chấp nhận được và những nhiệm vụ nghiên cứu đã hoàn thành.
5. Bồi dưỡng năng lực giải toán ứng dụng số phức vào các lĩnh vực toán học cho HS khá giỏi ở trường THPT là một đề tài mới mẻ, nếu được sự quan tâm đúng mức từ phía các thầy cô giáo thì góp phần đáng kể trong việc bồi dưỡng năng lực giải toán cho các em khá giỏi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO**A. TIẾNG VIỆT**

33. Lê Văn Anh (2001), “Vấn đề phát hiện, tuyển chọn và bồi dưỡng học sinh giỏi THPT”, *Tạp chí giáo dục số 10*.
34. Phan Trọng Ngọ (2002), “Tìm hiểu mức độ phát triển trí tuệ của học sinh THPT các tỉnh phía Bắc”, *Tạp chí giáo dục số 21*.
35. Hoàng Chúng (1997), *Phương pháp dạy học môn toán ở trường THPT*, NXB Giáo dục.
36. Nguyễn Văn Khuê – Lê Mậu Hải (2005), *Hàm biến phức*, NXB Đại học quốc gia Hà Nội.
37. Nguyễn Phú Hy – Nguyễn Quốc Bảo (1996), *Ứng dụng số phức để giải toán sơ cấp*, NXB Giáo dục.
38. Đoàn Quỳnh (1997), *Số phức với hình học phẳng*, NXB Giáo dục.
39. Phạm Thành Luân (2005), *Số phức và các ứng dụng*, NXB Giáo dục.
40. Nguyễn Hữu Quyết (2000), *Số phức với các phép biến hình trong mặt phẳng*, Luận án Thạc sĩ khoa học Toán học.
41. Nguyễn Huy Nam (1997), *Một số ứng dụng của số phức vào việc giải các bài toán hình học phẳng*, Luận án Thạc sĩ khoa học Toán học.
42. Nguyễn Thị Hương Trang (2002), *Rèn luyện năng lực giải toán theo định hướng sáng tạo, phát hiện và giải quyết vấn đề cho học sinh khá giỏi trường Trung học phổ thông*, Luận án tiến sĩ giáo dục học.
43. Đậu Thế Cấp (2000), *Bài tập hàm biến phức*, NXB Giáo dục.
44. Hoàng Kỳ, Nguyễn Văn Bằng, Nguyễn Đức Thuận (1979), *Đại số sơ cấp*, NXB Giáo dục.
45. Nguyễn Bá Kim (2007), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm.
46. Nguyễn Bá Kim (chủ biên), Đinh Nho Chương, Nguyễn Mạnh Cầm, Vũ Dương Thụy, Nguyễn Văn Hưởng (1994), *Phương pháp dạy học môn Toán phần 2 - Dạy học những nội dung cơ bản*, NXB Giáo dục.

47. Bùi Văn Nghị, *Chuyển tiếp môn toán từ phổ thông lên đại học (Bài giảng chuyên đề sau đại học)*.
48. Bùi Văn Nghị, Vương Dương Minh, Nguyễn Anh Tuấn (2005), *Tài liệu bồi dưỡng thường xuyên cho giáo viên THPT chu kì III (2004 – 2007)*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
49. V.A.Cruchetxki: *Những cơ sở của tâm lý học sư phạm*, tập 2. NXB Giáo dục, Hà Nội, 1981.
50. Nguyễn Thị Hương Trang: *Một số vấn đề về rèn luyện năng lực giải toán cho học sinh THPT*. Tạp chí nghiên cứu giáo dục số 1 năm 2000.
51. Nguyễn Thái Hòa (2004), *Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập toán*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
52. G. Polya (1997), *Sáng tạo toán học* (người dịch: Nguyễn Sỹ Tuyên, Phạm Tất Đắc, Hồ Thuần, Nguyễn Giản), NXB Giáo dục, Hà Nội.
53. G. Polya (1997), *Giải một bài toán như thế nào?* (người dịch Hồ Thuần, Bùi Tường), NXB Giáo dục, Hà Nội.
54. Nguyễn Cảnh Toàn (1998), *Tập cho học sinh giỏi toán làm quen dần với nghiên cứu toán học*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
55. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Văn Như Cương (Chủ biên), Phạm Vũ Khuê, Bùi Văn Nghị (2006), *Sách giáo khoa Hình Học 10 nâng cao*, NXB Giáo dục.
56. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Văn Như Cương (Chủ biên), Phạm Vũ Khuê, Bùi Văn Nghị (2006), *Sách giáo viên Hình Học 10 nâng cao*, NXB Giáo dục.
57. Đoàn Quỳnh (Tổng chủ biên), Văn Như Cương, Nguyễn Huy Đoan, Phạm Vũ Khuê, Trần Văn Vương, Nguyễn Thế Thạch, Phạm Đức Quang (2006), “Chương trình và sách giáo khoa toán 10 nâng cao”, *Tài liệu bồi dưỡng giáo viên*, NXB Giáo dục.
58. Trần Kiều, Phạm Gia Đức, Bùi Văn Nghị, Nguyễn Văn Đoàn, Trần Văn Vương, Đỗ Mạnh Hùng, Phạm Đức Quang, Nguyễn Thế Thạch, Hoàng

Ngọc Hưng (2004), *Tài liệu đổi mới phương pháp dạy học trung học phổ thông môn Toán*, Bộ Giáo dục và Đào tạo.

59. Bộ giáo dục và đào tạo (2005), *Tuyển chọn theo chuyên đề Toán học và tuổi trẻ - Quyển 1*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
60. Bộ giáo dục và đào tạo (1993), *Đề thi tuyển sinh vào các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp môn toán*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
61. V.A.Cruchetxki (1973), *Tâm lí năng lực toán học của học sinh*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
62. Nguyễn Bá Kim, Vũ Dương Thụy (1992), *Phương Pháp dạy học môn Toán (phần I)*, Nxb Giáo Dục.

B. TIẾNG ANH

63. P.S. Modenov (1981), *Problems in Geometry*. Translated from the Russian by George Yankovsky.
64. Titu Andreescu, Dorin Andrica, *Complex Numbers from A to...Z*. Birkhauser Boston, Basel, Berlin.

PHỤ LỤC

1. Mẫu phiếu thăm dò ý kiến học sinh.

PHIẾU THĂM DÒ Ý KIẾN

Xin em cho biết ý kiến về những vấn đề sau

(Đánh dấu ☒ vào ô tương ứng nếu nhất trí)

- 3) Sau khi được rèn luyện cách sử dụng số phức vào giải toán hình học phẳng và lượng giác, em tự đánh giá về các nội dung như sau.

Stt	Nội dung	Mức độ hiểu bài		
		Không có ý kiến	Không hiểu	Hiểu
1	Bài toán chứng minh, tính toán			
2	Bài toán quỹ tích.			
3	Tính tổng các biểu thức lượng giác.			
4	Phương pháp sử dụng số phức để giải phương trình lượng giác.			

Stt	Nội dung	Mức độ thích thú			
		Không	BT	Thích	Rất thích
1	Bài toán chứng minh, tính toán				
2	Bài toán quỹ tích.				
3	Tính tổng các biểu thức lượng giác.				
4	Phương pháp sử dụng số phức để giải phương trình lượng giác.				

4) Đứng trước một bài toán tính tổng (hoặc giải phương trình) lượng giác có chứa cung bội nx của sin (hoặc cosin, tang, cotang) em sẽ:

☐ Cố gắng giải bằng kiến thức lượng giác lớp 11.

☐ Cố gắng giải bằng số phức.

☐ Lựa chọn phương pháp giải (dùng kiến thức lượng giác lớp 11 hoặc số phức) tùy theo đặc điểm của từng bài.

2. Hướng dẫn - Đáp số bài tập tự luyện.

Bài 1. Trên mặt phẳng tọa độ phức ta có

$$\begin{aligned} RN^2 &= MQ^2 + PS^2 \\ \Leftrightarrow e + f - b - c & \quad \bar{e} + \bar{f} - \bar{b} - \bar{c} \\ &= d + e - a - b \quad \bar{d} + \bar{e} - \bar{a} - \bar{b} + f + a - c - d \quad \bar{f} + \bar{a} - \bar{c} - \bar{d} \end{aligned}$$

Từ đó ta có $d + e - a - b \quad \bar{f} + \bar{a} - \bar{c} - \bar{d} = 0$, suy ra $MQ \perp PS$.

Bài 2. Trên mặt phẳng tọa độ phức (như hình vẽ), ta

có tọa độ của các đỉnh của hình vuông lần lượt là

$$z_A = \frac{a\sqrt{2}}{2}, z_B = \frac{a\sqrt{2}}{2}i, z_C = -\frac{a\sqrt{2}}{2}, z_D = -\frac{a\sqrt{2}}{2}i.$$

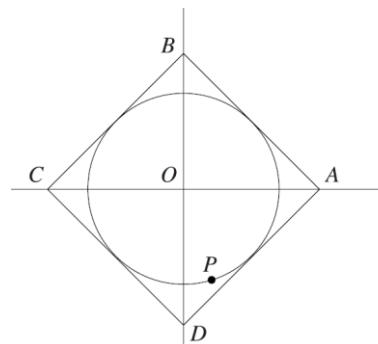
Giả sử $z_P = \frac{a}{2} \cos x + i \sin x$ là tọa độ của điểm P .

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 &= |z_A - z_P|^2 + |z_B - z_P|^2 + |z_C - z_P|^2 + |z_D - z_P|^2 \\ &= 4\frac{a^2}{2} + 2\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} \left(2\cos x + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(x + \pi\right) + 2\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) \right) + 4\frac{a^2}{4} \\ &= 2a^2 + 0 + a^2 = 3a^2 \end{aligned}$$

Bài 3.

3) Từ giả thiết $\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$, suy ra $s + 2z = a + b + c$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác ASA' , thế thì



$g' = \frac{1}{3} a + s + a' = \dots = \frac{1}{3} a + b + c$. Suy ra các tam giác ABC và ASA' cùng trọng tâm.

4) Ta có $s - z = a + b + c - 3z = 3g - 3z = 3g - z$, chứng tỏ
 $\overrightarrow{IS} = 3\overrightarrow{IG}$.

Bài 4. Trên mặt phẳng tọa độ phức, gọi tọa độ của các đỉnh hình vuông và sử dụng tính chất ta có

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$$

$$\Leftrightarrow (b-a)(\bar{b}-\bar{a}) + (d-c)(\bar{d}-\bar{c}) = (c-b)(\bar{c}-\bar{b}) + (a-d)(\bar{a}-\bar{d})$$

Từ đó suy ra $(c-a)(b-d) = 0$, hay $AC \perp BD$.

Bài 5. Từ giả thiết tính $m-b, n-b, q-d$, và $p-d$; từ đó suy ra
 $p+q-m+n = b(a-d) + c(c-d) + 2(d-b) + a(b-a) + b(b-c)$, nghĩa
 là $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CB} + c\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{BD}$, không đổi.

Bài 6. Biến đổi $\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - \cos x + i \sin x} = \dots = \frac{1}{2} + i \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$, ta có

điều phải chứng minh.

Bài 7.

* Cách 1. Sử dụng biến đổi lượng giác quen thuộc: nhân cả hai vế của biểu thức với $\sin 20^\circ$ và áp dụng công thức nhân đôi ta được $P = \frac{1}{8}$.

* Cách 2. Chuyển sang ngôn ngữ số phức: Cho $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$, biểu diễn $\cos 20^\circ$, $\cos 40^\circ$ và $\cos 80^\circ$ theo lũy thừa của z . Thay vào biểu thức và

rút gọn ta được $P = \frac{-z^7 - 1}{8 - 1 - z^7} = \frac{1}{8}$.

Bài 8. Biến đổi $1 + S + iT = \sum_{k=0}^n q^k \cos kx + i \sin kx = \sum_{k=0}^n q^k \cos x + i \sin x^k$,

ta được

$$1 + S + iT = \frac{[1 - q^{n+1} \cos n+1 x - i q^{n+1} \sin n+1 x] [1 - q \cos x + i q \sin x]}{q^2 - 2q \cos x + 1}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } 1 + S = \frac{q^{n+2} \cos nx - q^{n+1} \cos n+1 x - q \cos x + 1}{q^2 - 2q \cos x + 1}$$

$$\text{và } T = \frac{q^{n+2} \sin nx - q^{n+1} \sin n+1 x + q \sin x}{q^2 - 2q \cos x + 1}.$$

Bài 9. Áp dụng công thức $\sin n\alpha = \frac{z^{2n} - 1}{2iz^n}$, ta biểu diễn $\sin 3x$ và $\sin 5x$ theo z .

Thay vào phương trình tìm được các giá trị của z là:

$$z^2 = 1 \text{ và } z^2 = -\frac{2}{3} \pm \frac{i\sqrt{5}}{3}. \quad \text{Áp dụng công thức Moivre}$$

$$z^n = \cos nx + i \sin nx \text{ và đồng nhất phần thực ta tìm được } \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\text{suy ra } \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + k\pi \end{cases}.$$

Bài 10. Áp dụng kết quả

$$\begin{aligned} 1 + r \cos x + z^2 \cos 2x + \dots + r^n \cos nx \\ = \frac{r^{n+2} \cos nx - r^{n+1} \cos n+1 x - r \cos x + 1}{1 - 2r \cos x + r^2}, \end{aligned}$$

$$\text{ta được } 1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \cos \frac{n\pi}{4} = \frac{1 - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4}}{1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}}.$$

Từ đó suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \dots + \frac{1}{2^n} \cos \frac{n\pi}{4} \right) = \frac{4 - \sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{2}}.$$