LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan luận văn này là một công trình nghiên cứu độc lập, những trích dẫn nêu trong luận văn đều chính xác và trung thực.

LỜI CẢM ƠN

Trước hết, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến PGS. TS. Lê Thị Hoài Châu vì Cô là người đã từng bước dẫn dắt tôi bước vào con đường nghiên cứu khoa học và là người đã tận tình chỉ dẫn, động viên tôi, giúp tôi có đủ niềm tin và nghị lực để hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn : PGS. TS. Lê Thị Hoài Châu, TS. Lê Văn Tiến, TS. Đoàn Hữu Hải, PGS. TS. Claude Comiti, PGS. TS. Annie Bessot, TS. Alain Birebent đã nhiệt tình giảng dạy, giải đáp những thắc mắc giúp chúng tôi có thể tiếp thu một cách tốt nhất về chuyên ngành nghiên cứu rất thú vị - Didactic Toán.

Tôi xin trân trọng cảm ơn PGS. TS. Nguyễn Xuân Tú Huyên đã nhiệt tình giúp tôi dịch luận văn này sang tiếng Pháp.

Tôi xin chân thành cảm ơn :

- *Ban lãnh đạo và chuyên viên phòng Khoa học công nghệ - Sau đại học, ban chủ nhiệm và giảng viên khoa Toán – Tin của trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh đã tạo thuận lợi cho chúng tôi trong suốt khoá học.*
- *Ban giám hiệu trường THPT Nguyễn Trãi (Đồng Nai) đã hỗ trợ giúp tôi tổ chức thực nghiệm.*
- *Ban giám hiệu và các đồng nghiệp trong tổ Toán trường THPT Thị xã Cao Lãnh (Đồng Tháp) đã luôn sẵn sàng giúp đỡ và tạo mọi điều kiện để tôi có thể hoàn thành luận văn này.*

Lời cảm ơn chân thành đến các bạn cùng khóa đã luôn chia sẻ cùng tôi những buồn vui và khó khăn trong quá trình học tập.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến những người thân yêu trong gia đình, đặc biệt là mẹ tôi, người luôn nâng đỡ và bảo ban tôi về mọi mặt.

Nguyễn Thùy Trang

NHỮNG TỪ VIẾT TẮT

1. CCGD : cải cách giáo dục
2. CLHN : chỉnh lý hợp nhất
3. THPT : trung học phổ thông
4. THCS : trung học cơ sở
5. KHTN : khoa học tự nhiên
6. SGK : sách giáo khoa
7. M_0 : SGK toán 9 – tập 2 hiện hành
8. M_1 : SGK Đại số 10 thí điểm 2003 – bộ 1, ban KHTN
9. M_2 : SGK Đại số 10 thí điểm 2003 – bộ 2, ban KHTN
10. G_0 : sách giáo viên toán 9 – tập 2 hiện hành
11. G_1 : sách giáo viên Đại số 10 thí điểm 2003 – bộ 1, ban KHTN
12. G_2 : sách giáo viên Đại số 10 thí điểm 2003 – bộ 2, ban KHTN
13. E_1 : sách bài tập Đại số 10 thí điểm 2003 – bộ 1, ban KHTN
14. E_2 : sách bài tập Đại số 10 thí điểm 2003 – bộ 2, ban KHTN
15. TCTH : tổ chức toán học
16. OM : kí hiệu tắt bằng tiếng Pháp của TCTH
17. MTBT : máy tính bỏ túi
18. Hệ (2, 2) : hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn
19. Hệ (3, 3) : hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

MỤC LỤC

Trang

MỞ ĐẦU

1. LÝ DO CHỌN ĐỀ TÀI

Phương trình là một trong những chủ đề quan trọng trong chương trình toán ở nhà trường phổ thông. Kiến thức về phương trình được đưa dần ở mức độ thích hợp với từng khối lớp. Đặc biệt, trong lớp 10, hàng loạt chủ đề được nhắc lại và được làm mới như : phương trình bậc nhất một ẩn, hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, bất phương trình bậc nhất một ẩn, phương trình và bất phương trình bậc hai. Khi đó, việc nghiên cứu một cách tổng quát và có hệ thống các chủ đề này luôn gắn liền với sự xuất hiện cùng lúc của hai đối tượng : *tham số* và *algorit* (hay còn gọi là *thuật toán*).

Sự xuất hiện của tham số kéo theo sự thay đổi bản chất của bài toán. Lúc bấy giờ, đối tượng thao tác không còn là một phương trình cụ thể với hệ số thuần số nữa mà là một họ các phương trình với hệ số chứa tham số. Như thế, bước chuyển từ phương trình số sang phương trình chứa tham số không chỉ thể hiện ở tính liên tục mà còn ở sự ngắt quãng của việc giảng dạy ở lớp 10 so với những lớp trước đây.

Về vấn đề này, Odile Schneider đã có những phân tích rất hay trong luận văn *"Le passage des équations numériques aux équations paramétriques en classe de seconde"* [(1)]. Theo tác giả, sự ngắt quãng đó xuất phát từ mâu thuẫn giữa "cái cũ" (phương trình không chứa tham số) và "cái mới" (phương trình chứa tham số), từ sự thống trị của "cái cũ" đối với "cái mới",… Do vậy mà giáo viên và học sinh sẽ gặp phải một số khó khăn nhất định trong thời điểm bắt đầu làm quen với phương trình chứa tham số. Đó là những kết quả nghiên cứu chính liên quan đến sự tác động của tham số trong quá trình dạy học phương trình mà công trình này đạt được.

Thế nhưng, như đã nói, tham số không xuất hiện một cách "đơn độc" trong dạy học chủ đề phương trình mà đi cùng với nó còn có algorit. Thật vậy, qua xem xét SGK toán THPT ở các giai đoạn khác nhau (từ giai đoạn 1990 đánh dấu cuộc CCGD trên quy mô toàn quốc đến giai đoạn thí điểm phân ban 2003), chúng tôi nhận thấy cứ mỗi lần có mặt phương trình chứa tham số là ở đấy lại hiện diện một algorit. Điều này đã dẫn chúng tôi đến với những câu hỏi hết sức thú vị sau đây :

> *Tại sao algorit lại đồng hành cùng tham số? Phải chăng sự có mặt của nó đã làm giảm bớt tính phức tạp trong quá trình giải và biện luận, từ đó giúp cho phương trình chứa tham số trở nên dễ tiếp cận hơn? Ngược lại, có phải chủ đề*

---

(1) Luận văn DEA, chuyên ngành didactic toán với nhan đề (được dịch sang tiếng Việt) là *"Bước chuyển từ phương trình số sang phương trình chứa tham số"*.

“phương trình chứa tham số” là mảnh đất thuận lợi để đưa vào các algorit hay không?

Quả thực, đi tìm lời giải đáp cho các câu hỏi vẫn còn đang bỏ ngỏ như trên sẽ rất có ý nghĩa đối với việc dạy học “phương trình”, nhất là trong bối cảnh đổi mới chương trình và SGK hiện nay. Nhận thức được điều đó, chúng tôi đã mạnh dạn lựa chọn đề tài :

« Algorit và tham số trong dạy - học chủ đề phương trình ở trường THPT. Trường hợp hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn. »

Như vậy, với luận văn này, song song với việc nghiên cứu algorit và tham số trong chủ đề phương trình cấp THPT, chúng tôi sẽ luôn chú ý đến sự tác động qua lại giữa chúng. Và để có một sự phân tích sâu sắc hơn, chúng tôi sẽ xem xét hai đối tượng algorit - tham số trong trường hợp cụ thể là *“Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn”* được dạy học ở cả hai lớp 9 và 10.

2. CÂU HỎI XUẤT PHÁT

Chúng tôi triển khai vấn đề nghiên cứu đã chọn thành một số câu hỏi cụ thể hơn như sau :

1) Trong dạy học chủ đề phương trình ở trường THPT, các đối tượng algorit và tham số xuất hiện như thế nào, đóng vai trò gì và tiến triển ra sao qua những lần thay đổi chương trình và SGK? Đâu là những điều kiện và ràng buộc cho phép chúng tồn tại và tiến triển? Trong chủ đề phương trình đó, mối liên hệ giữa algorit và tham số thể hiện ra sao? Nó xuất phát từ những đặc trưng toán học nào của khái niệm algorit, tham số và phương trình chứa tham số?
2) Cũng những câu hỏi ấy, nhưng được đặt trong trường hợp cụ thể là hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn dạy ở hai lớp 9 và 10.
3) Nếu nhìn từ góc độ tri thức ở bậc đại học thì algorit và tham số xuất hiện ở đâu và như thế nào trong hệ phương trình tuyến tính?
4) Đâu là sự khác biệt về cách trình bày trong SGK với cách trình bày trong giáo trình đại học về hệ phương trình tuyến tính? Lý do của sự khác biệt đó?
5) Cách trình bày của SGK ảnh hưởng như thế nào đến việc dạy của giáo viên về hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn cũng như việc học của học sinh về chủ đề này?
6) Liên quan đến các đối tượng algorit và tham số trong hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn, giáo viên và học sinh có những quyền lợi và nghĩa vụ gì?

3. KHUNG LÝ THUYẾT THAM CHIẾU

Để tìm kiếm yếu tố cho phép trả lời các câu hỏi trên, chúng tôi đặt nghiên cứu của mình trong khuôn khổ của lý thuyết didactic toán. Cụ thể, chúng tôi sẽ vận dụng một số khái niệm công cụ của lý thuyết nhân chủng học (quan hệ thể chế - quan hệ cá nhân, lý thuyết chuyển đổi didactic, tổ chức toán học (TCTH), cách đặt vấn đề sinh thái học) và của lý thuyết tình huống (khái niệm hợp đồng didactic).

3.1. Lý thuyết nhân chủng học

3.1.1. Quan hệ thể chế – Quan hệ cá nhân

Quan hệ thể chế

Trong luận văn này, chúng tôi quan tâm đến hai mối quan hệ thể chế : $R(I_1,O)$ và $R(I_2,O')$, với I_1 là thể chế ở bậc đại học, I_2 là thể chế ở trường THPT ; O là algorit và tham số trong hệ phương trình tuyến tính, O’ là algorit và tham số trong chủ đề phương trình (nói riêng là trong hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn).

Việc nghiên cứu quan hệ thể chế $R(I_1,O)$ sẽ cho phép chúng tôi trả lời phần nào cho câu hỏi thứ ba. Việc nghiên cứu quan hệ thể chế $R(I_2,O')$ sẽ cho phép chúng tôi trả lời phần nào cho câu hỏi thứ nhất và thứ hai.

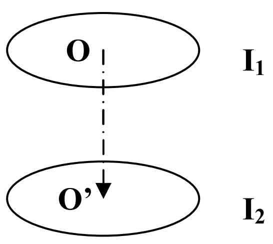
Quan hệ cá nhân

Việc vận dụng khái niệm này sẽ giúp chúng tôi nhận ra được phần nào cách mà giáo viên cũng như học sinh có thể hiểu về O’, có thể thao tác O’, tức là sẽ giúp chúng tôi phần nào tìm được câu trả lời cho câu hỏi thứ năm.

Lẽ dĩ nhiên, muốn nghiên cứu các mối quan hệ cá nhân này, chúng tôi cần đặt trong mối quan hệ thể chế $R(I_2,O')$.

3.1.2. Lý thuyết chuyển đổi didactic

Khái niệm này được vận dụng là nhằm tìm một phần lời giải đáp cho câu hỏi thứ tư, nghĩa là để xác định khoảng cách giữa O và O’, nghiên cứu tính hợp pháp của tri thức cần giảng dạy O’ và giải thích được một số ràng buộc của I_2 đối với O’.



3.1.3. Tổ chức toán học

Việc xây dựng các TCTH gắn với hai đối tượng tri thức O và O' sẽ cho phép :

- vạch rõ mối quan hệ thể chế R(I_1,O) và R(I_2,O'), từ đó góp phần trả lời cho các câu hỏi thứ nhất, thứ hai và thứ ba.
- hiểu được mối quan hệ cá nhân (giáo viên hay học sinh) duy trì đối với O' từ mối quan hệ thể chế R(I_2,O'), từ đó bổ sung phần trả lời cho câu hỏi thứ năm.
- xác định sự chênh lệch có thể có giữa TCTH ở I_1 và TCTH ở I_2, từ đó góp phần trả lời cho câu hỏi thứ tư.

3.1.4. Cách đặt vấn đề sinh thái học

Cách đặt vấn đề sinh thái học sẽ giúp làm rõ những điều kiện và ràng buộc cho phép sự tồn tại và tiến triển của mỗi đối tượng algorit, tham số cũng như của mối liên hệ giữa chúng, bởi vì như Chevallard (1989b) đã nói : "… Một đối tượng tri thức O không tồn tại độc lập trong một thể chế mà nó có mối quan hệ tương hỗ và thứ bậc với các đối tượng khác trong cùng thể chế. Những đối tượng này đặt điều kiện và ràng buộc cho sự tồn tại của nó trong thể chế. Nói cách khác, các đối tượng này hợp thành điều kiện sinh thái cho cuộc sống của đối tượng tri thức O trong thể chế đang xét."

Nói tóm lại, cách tiếp cận "sinh thái học" sẽ góp phần bổ sung các ý trả lời cho câu hỏi thứ nhất và thứ hai.

3.2. Lý thuyết tình huống (khái niệm hợp đồng didactic)

Việc đặt nghiên cứu trong phạm vi của lý thuyết Nhân chủng học sẽ cho phép chúng tôi hình dung được cuộc sống của hai đối tượng algorit và tham số trong thể chế dạy học mà chúng tôi quan tâm. Vấn đề là sự lựa chọn của thể chế sẽ ảnh hưởng như thế nào đến hoạt động dạy của giáo viên và hoạt động học của học sinh. Nói cách khác, liên quan đến algorit, tham số và hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn, cái gì sẽ chi phối ứng xử của giáo viên và học sinh, cái gì cho phép hợp thức hóa cách thao tác của họ trên các đối tượng này?

Để tìm kiếm những yếu tố trả lời cho câu hỏi vừa nêu, chúng tôi sẽ sử dụng khái niệm hợp đồng didactic. Khái niệm đó đã được Brouseau (1980) đưa ra để mô hình hóa những gì mà mỗi bên – giáo viên và học sinh – có quyền hay không có quyền làm đối với một tri thức, những ứng xử mà học sinh trông đợi ở giáo viên và ngược lại, những ứng xử mà giáo viên mong đợi ở học sinh. Ở đây, chúng tôi sẽ phải làm rõ những quy tắc ngầm ẩn phân chia cũng như giới hạn trách nhiệm của giáo viên và học sinh về đối tượng tri thức O'.

4. MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Trong khuôn khổ của phạm vi lý thuyết tham chiếu đã lựa chọn, các câu hỏi cấu thành nên mục đích nghiên cứu của chúng tôi có thể được trình bày lại như sau :

Q_1. Trong toán học, khái niệm algorit, tham số và phương trình chứa tham số được hiểu như thế nào? Đâu là đặc trưng của chúng? Từ đó, mối quan hệ giữa algorit và tham số (nói rõ hơn là giữa algorit và phương trình chứa tham số) được hình thành dựa trên những đặc trưng nào?

Q_2. Trong giáo trình Đại số tuyến tính ở đại học, tổ chức toán học (TCTH) nào gắn với các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính không chứa tham số và với các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính có chứa tham số?

Q_3. Trong các chương trình và SGK toán THPT, algorit và tham số xuất hiện ở đâu và như thế nào? Mối quan hệ giữa chúng thể hiện ra sao?

Q_4. Liên quan đến nội dung "Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn" ở trường phổ thông, các phương pháp để giải quyết nó được đưa vào như thế nào? Chúng có phải là algorit hay không? Đâu là TCTH được xây dựng xung quanh các phương pháp này? Có sự chênh lệch nào giữa TCTH ở bậc đại học với TCTH ở trường phổ thông? Sự chênh lệch đó bắt nguồn từ những điều kiện và ràng buộc nào của thể chế?

Q_5. Đâu là những quy tắc của hợp đồng didactic được hình thành giữa giáo viên và học sinh trong quá trình làm việc với algorit và tham số cũng như khi dạy - học giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn chứa tham số? Chúng được thể hiện cụ thể ở những kiểu nhiệm vụ, những kỹ thuật nào?

Q_6. Cách trình bày của SGK có ảnh hưởng gì đến việc giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn chứa tham số của học sinh?

5. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU VÀ CẤU TRÚC CỦA LUẬN VĂN

Nối tiếp phần mở đầu là bốn chương (chương 1, 2, 3, 4) và phần kết luận chung.

Chương 1 nhằm trả lời cho nhóm câu hỏi Q_1. Trong chương này, bằng cách tham khảo một số tài liệu, chúng tôi lần lượt thực hiện các công việc sau :

- *Trước hết,* chúng tôi sẽ trình bày một số định nghĩa về algorit cùng các đặc trưng toán học của nó.
- *Kế đến* là một số mô tả về khái niệm tham số, về phương trình chứa tham số cùng đặc trưng toán học của chúng.
- *Sau cùng,* dựa trên các đặc trưng này, chúng tôi sẽ chỉ ra sự hình thành mối quan hệ giữa algorit và phương trình chứa tham số.

Trên cơ sở những kết quả đạt được ở chương 1, chúng tôi bước vào ***Chương 2*** với việc tìm lời giải đáp cho nhóm câu hỏi Q_2. Nói rõ hơn, trong chương này, chúng tôi sẽ cố gắng chỉ ra TCTH tham chiếu liên quan đến các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính được trình bày trong một số giáo trình ở bậc đại học.

Nghiên cứu của chương 1 và chương 2 sẽ là yếu tố tham chiếu cho nghiên cứu ở ***Chương 3***. Trong chương 3, để tìm đáp án cho các nhóm câu hỏi Q_3, Q_4, Q_5 và Q_6, chúng tôi lần lượt thực hiện hai nhiệm vụ sau :

- *Thứ nhất,* thông qua nghiên cứu chương trình, tài liệu hướng dẫn giáo viên, chúng tôi làm rõ sự tiến triển của hai đối tượng algorit và tham số qua các giai đoạn khác nhau ; từ đấy có thể dự đoán được tương lai của chúng trong chương trình toán bậc THPT.
- *Thứ hai,* bằng một phân tích sâu hơn các SGK (SGK toán 9 hiện hành và hai bộ SGK thí điểm Đại số 10 dùng cho ban KHTN do nhóm tác giả Đoàn Quỳnh và nhóm tác giả Trần Văn Hạo soạn thảo), chúng tôi sẽ cố gắng chỉ rõ các kỹ thuật liên quan đến kiểu nhiệm vụ "giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ba ẩn không chứa tham số" và đặc biệt là kiểu nhiệm vụ "giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn chứa tham số". Song song đó, chúng tôi còn quan tâm đến sự chênh lệch có thể giữa TCTH tham chiếu và TCTH cần giảng dạy.

Hai nghiên cứu trên sẽ giúp chúng tôi xác định mối quan hệ thể chế với algorit và tham số, đồng thời cho phép chúng tôi hình thành nên một số giả thuyết nghiên cứu liên quan đến việc dạy học các đối tượng này qua chủ đề "hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn". Đồng thời, cũng chính là thông qua việc phân tích các TCTH, những bài tập được giải hoặc được ưu tiên mà chúng tôi có thể làm rõ những quy tắc của hợp đồng didactic liên quan đến việc dạy - học hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn.

Các giả thuyết ở chương 3 lại cần phải được kiểm chứng bằng một nghiên cứu thực nghiệm ở ***Chương 4***. Thực nghiệm này được tiến hành trên hai đối tượng giáo viên và học sinh, trong đó thực nghiệm đối với giáo viên được tiến hành trước.

- *Về phía giáo viên* : Nhằm kiểm chứng tính đúng đắn của các giả thuyết nghiên cứu đã nêu ở chương 3, chúng tôi dự định thăm dò ý kiến của một số giáo viên dạy toán 10 qua bộ câu hỏi điều tra được xây dựng theo định hướng đặt giáo viên trước những ứng xử của học sinh không phù hợp với điều giáo viên mong đợi. Chính đánh giá của giáo viên về những ứng xử này cũng cho ta thấy được hiệu ứng của hợp đồng didactic.
- *Về phía học sinh* : Chúng tôi đặt học sinh lớp 10 tham gia thực nghiệm vào một tình huống "quen thuộc" hoặc "dường như quen thuộc" vì cả hai loại tình huống này, như đã biết, đều có thể giúp nhận ra được hiệu ứng của hợp đồng

didactic. Cụ thể hơn, việc phân tích những câu trả lời do học sinh cung cấp, những cách sử dụng tri thức của học sinh sẽ chỉ ra cho chúng tôi hiệu ứng của hợp đồng didactic, từ đó cho phép chúng tôi hợp thức hóa hay bác bỏ tính thỏa đáng của những giả thuyết đã nêu ra.

Trong phần ***Kết luận***, chúng tôi sẽ tóm tắt lại những kết quả đạt được qua các chương 1, 2, 3, 4 và nêu lên một số hướng nghiên cứu mở ra cho luận văn.

Chương 1

NGHIÊN CỨU VỀ KHÁI NIỆM ALGORIT, THAM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

Chương này có mục đích tìm lời giải đáp cho nhóm câu hỏi Q_1 đã nêu ở phần mở đầu. Cụ thể là :

- *Trong toán học, các khái nhiệm algorit, tham số và phương trình chứa tham số được hiểu như thế nào? Đâu là đặc trưng của chúng?*
- *Từ đó, mối quan hệ giữa algorit và tham số (nói rõ hơn là giữa algorit và phương trình chứa tham số) được hình thành dựa trên những đặc trưng nào?*

Trước hết, chúng tôi cần nhấn mạnh rằng những nội dung trình bày dưới đây chưa phải là một nghiên cứu khoa học luận, hiểu theo đúng nghĩa của nó. Bởi thiết nghĩ, với mục đích nghiên cứu đặt ra, việc xem xét những trở ngại và điều kiện cho phép nảy sinh các khái niệm algorit - tham số cũng như phương trình chứa tham số là không cần thiết. Vậy nên, chương 1 chỉ giới hạn ở việc làm rõ một số đặc trưng của các khái niệm này, nghĩa là chỉ tập trung nghiên cứu những gì phục vụ cho ba chương tiếp theo.

1.1. KHÁI NIỆM ALGORIT (1)

1.1.1. Một số mô tả về algorit

Algorit là một trong những khái niệm cơ sở của toán học. Mặc dù ngày nay có khoảng hơn 20 định nghĩa về thuật ngữ *algorit* (2), thế nhưng trong suốt thời gian dài của lịch sử phát triển toán học, khái niệm này vẫn thường được hiểu theo nghĩa trực giác như sau :

> *Algorit "là một hệ thống chặt chẽ và rõ ràng các qui tắc nhằm xác định một dãy các thao tác trên những đối tượng, sao cho sau một số hữu hạn bước thực hiện các thao tác, ta đạt được mục tiêu định trước"*. [32, tr.3]

Đây không phải là định nghĩa toán học của khái niệm algorit mà chỉ là một cách phát biểu giúp ta hình dung khái niệm này. Nói riêng, một hệ các qui tắc sẽ được xem là algorit nếu như sau khi hướng dẫn hệ đó cho một số người khác nhau thì họ sẽ hành động giống nhau, mặc dù họ có thể không hiểu gì về bản chất và ý nghĩa của vấn đề,

---

(1) Về *"Sự tiến triển của khái niệm algorit trong toán học"*, tham khảo ở phần Phụ lục.

(2) Tham khảo [68].

tức không cần hiểu vì sao algorit lại được thiết kế như vậy. Chính điều này đã cho phép đưa algorit vào cho máy thực hiện một cách *"máy móc"*, *"tự động"*, không cần có sự can thiệp của con người.

Ngoài ra, cách phát biểu trên còn chứa đựng một số thuật ngữ chưa được chính xác hóa, chẳng hạn : qui tắc, thao tác (những thuật ngữ này cũng được hiểu theo nghĩa trực giác).

Với cách hiểu trực giác đó, người ta phân biệt thành hai loại : *algorit hiểu theo nghĩa chặt* và *algorit hiểu theo nghĩa rộng*.

- **Theo nghĩa chặt**

  "Algorit là một dãy sắp thứ tự các quy tắc cần thực hiện trên một số hữu hạn các dữ liệu và đảm bảo rằng sau một số hữu hạn bước sẽ đạt được kết quả nào đó. Hơn nữa, quy trình này độc lập với các dữ liệu." [66]

- **Theo nghĩa rộng**

  "Algorit là một dãy hữu hạn các bước cần thực hiện theo một thứ tự nhất định để giải quyết một kiểu nhiệm vụ nào đó." [66]

Như vậy, trong một algorit theo *nghĩa rộng*, dãy các bước cần thực hiện có thể không mang đủ các đặc trưng đã nêu ở trên của algorit theo *nghĩa chặt*. Cụ thể là :

- Mỗi chỉ dẫn trong một bước có thể chưa mô tả một cách xác định hành động cần thực hiện.
- Có thể có những bước không thực thi được.
- Kết quả thực hiện mỗi bước có thể không duy nhất (không đơn trị).
- Việc thực hiện hết một dãy hữu hạn các bước không đảm bảo chắc chắn đem lại kết quả.

1.1.2. Các đặc trưng của khái niệm algorit

Dưới đây là 6 đặc trưng của một algorit hiểu theo nghĩa chặt :

- ***Tính kết thúc*** *(tính dừng)* : Algorit bao giờ cũng phải dừng sau một số hữu hạn bước thực hiện.

- ***Tính xác định*** (1) : Đòi hỏi ở mỗi bước của algorit, các thao tác phải hết sức rõ ràng, không thể gây nên sự nhập nhằng, lẫn lộn, tùy tiện. Nói cách khác, trong cùng một điều kiện, hai bộ xử lý (người hoặc máy) thực hiện cùng một bước của algorit thì

(1) Nói chung, *algorit hiểu theo nghĩa rộng* cùng các khái niệm như *kịch bản, cách dùng, chương trình hành động, phương pháp* v.v… thường vi phạm tính xác định.

phải cho cùng một kết quả.

- ***Tính phổ dụng*** : Algorit cho phép giải bất kỳ bài toán nào trong một lớp các bài toán. Cụ thể là algorit có thể làm việc với các dữ liệu khác nhau trong một miền xác định và luôn luôn dẫn đến kết quả cần tìm.

- ***Đại lượng vào*** : Một algorit có thể có hay không có đại lượng vào mà chúng ta thường gọi là các dữ liệu vào.

- ***Đại lượng ra*** : Sau khi dùng algorit, tùy theo chức năng algorit đảm nhiệm mà chúng ta có thể thu được một số đại lượng ra xác định.

- ***Tính hiệu quả*** : Yêu cầu đầu tiên về tính hiệu quả của algorit là *sự đúng đắn*, cụ thể : với dữ liệu vào cho trước, algorit hoạt động sau một số hữu hạn bước sẽ dừng và cho kết quả mong muốn. Yêu cầu quan trọng thứ hai của tính hiệu quả là *tính hữu hiệu* : trong số các algorit thực hiện cùng một chức năng, có thể chọn ra algorit tốt nhất. Tiêu chuẩn tốt ở đây được hiểu là :

  – Algorit thực hiện nhanh, ít tốn thời gian.
  – Algorit dùng ít giấy hoặc ít thiết bị lưu trữ các kết quả trung gian.

1.2. KHÁI NIỆM THAM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

1.2.1. Một số mô tả về tham số

"Tham số" (*tham biến* hay *thông số*) là một khái niệm *"paramathématique"* : có tên nhưng chưa được định nghĩa chính xác về mặt toán học [(1)]. Chính vì vậy, dưới đây, chúng tôi chỉ xin trích dẫn một số mô tả về khái niệm này.

- "**Tham số** : Đại lượng mà giá trị của nó được dùng để phân biệt các phần tử của một tập hợp nào đó." [60, tr.138 - 139]

- "**Paramètre** : *Terme non mathématique*, utilisé par opposition à inconnue, pour désigner certains coefficients ou certaines quantités en fonction desquels on veut exprimer une proposition ou les solutions d'un système d'équations." [63]

  Có thể dịch như sau : "Tham số *không phải là một thuật ngữ toán học*, nó được sử dụng trái với ẩn số, nhằm để mô tả một vài hoặc một số lớn các hệ số mà người ta muốn đưa ra một đề nghị hay các cách giải một hệ phương trình."

- "Au lieu d'être numériques, les coefficients d'une équation peuvent dépendre d'un ou plusieurs paramètres. On nomme paramètre une lettre représentant un réel

---

[(1)] Chevallard (1985) phân biệt ba loại khái niệm toán học : khái niệm *protomathématique* (không có tên, không có định nghĩa, nhưng được dùng một cách ngầm ẩn), khái niệm *paramathématique* (có tên, không định nghĩa) và khái niệm *mathématique* (có tên, có định nghĩa).

fixé, non précisé." [69]

Có thể dịch như sau : "Thay vì là số, các hệ số của một phương trình có thể phụ thuộc vào một hay nhiều tham số. Người ta gọi tham số là một chữ đại diện cho một số thực cố định nhưng không xác định."

- "Il n'y a aucune différence fondamentale entre une constante et une variable. Tout dépend du raisonnement dans lequel cette lettre intervient. Dans certains raisonnements, il arrive qu'une même lettre d'abord considérée comme une constante, puis comme une variable (ou le contraire). Dans un tel cas, cettre lettre recoit parfois le nom de paramètre." [69, tr.83]

Có thể dịch như sau : "Không có sự khác nhau cơ bản giữa hằng số và biến số. Tất cả phụ thuộc vào suy luận mà trong đó chữ được đưa vào. Trong một số suy luận, với cùng một chữ nhưng đầu tiên được xem như là hằng số, sau đó, được xem như là biến số (hoặc ngược lại). Trong trường hợp này, chữ có tên gọi là *tham số.*"

- "Cho hàm số f(x), ngoài đối số ra còn có các chữ a, b, c, … Nếu trong việc khảo sát và nghiên cứu, ta xem các chữ a, b, c, ... như là đã biết thì chúng được gọi là *tham số*, hay *thông số* hay *tham biến*." [36, tr.94]

Như vậy, tất cả các mô tả trên đây đều không đưa ra một tiêu chí thống nhất cho phép phân biệt khi nào tham số là biến số, khi nào nó đóng vai trò là hằng số. Điều này càng khẳng định : *tham số là một khái niệm paramathématique.*

Gắn liền với "tham số" là "phương trình chứa tham số" mà việc mô tả khái niệm thứ hai này sẽ được trình bày ngay dưới đây. Qua đó, bản chất của tham số (xét trong phương trình chứa tham số) cũng sẽ được nhìn nhận một cách rõ ràng hơn.

1.2.2. Một số mô tả về phương trình chứa tham số

Theo [38, tr.63 - 64], khái niệm "phương trình chứa tham số (hay tham biến" được hiểu thông qua việc chỉ ra các đặc trưng của phương trình nhiều biến như sau :

"Một phương trình nhiều biến có thể được xét dưới nhiều góc độ khác nhau, chẳng hạn :

- Tìm tất cả các bộ số là nghiệm của phương trình đó.
- Dùng như một công thức để biểu thị sự tương quan giữa nhiều đại lượng, ví dụ như S = vt. Khi ấy, vấn đề không phải ở chỗ tìm những bộ ba số thỏa mãn phương trình trên mà là ở chỗ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa quãng đường, vận tốc và thời gian trong chuyển động đều.
- *Dùng để đặc trưng cho một dạng phương trình nhất định.* Các phương trình 2x = 3 ; 0,4y = 2 ; $\frac{1}{2}t = 0{,}15$; $\frac{2}{3}a = \frac{4}{6}$ đều có cùng một dạng là ax = b. Vấn đề ở đây không phải là tìm những bộ ba số thỏa mãn phương trình này. Trong khi ở hai trường hợp

> đầu, vai trò của các biến là bình đẳng thì trong trường hợp thứ ba này các biến a, b có vai trò khác về căn bản so với biến x. Biến x là biến cần được biểu thị qua các biến còn lại, còn các biến a, b dùng để biểu thị dạng của phương trình nên còn gọi là *biến chỉ dạng* hay *tham biến*. Phương trình nhiều biến nếu được nhìn dưới góc độ như thế thì sẽ bao gồm được tất cả các phương trình có cùng một dạng. Dưới góc độ đó, phương trình nhiều biến được gọi là *dạng phương trình* hay *phương trình có chứa tham biến.* [...]
>
> Phương trình ax = b được gọi là phương trình một ẩn có chứa hai tham biến a và b. [...] ta cần hiểu rằng đây là một phương trình có *3 biến*, trong đó có sự phân biệt giữa hai loại biến: x là biến cần biểu thị qua các biến còn lại, còn a và b là các biến chỉ dạng phương trình. Thực chất của phương trình có tham biến là như vậy. Khi giải một phương trình chứa tham biến, các tham biến được xem như đại diện cho những số đã biết và ta phải biểu thị nghiệm qua các tham biến đó."

Ngoài ra, trong một số tài liệu khác, phương trình chứa tham số còn được mô tả như sau :

> "Phương trình f(x, a, b,...., c) = 0 với ẩn số $x \in C^n$ và các tham số a, b, ..., c được gọi là *phương trình chứa tham số*. Khi có một hệ thống giá trị thừa nhận được của tham số[1], phương trình trở thành phương trình cụ thể :
>
> $$f(x, \alpha, \beta, ..., \gamma) = 0$$
>
> với ẩn số $x \in C^n$ và không chứa tham số nữa, và tập nghiệm của nó hoàn toàn xác định (có thể rỗng). Giải phương trình chứa tham số là xác định tất cả các nghiệm của nó với mỗi hệ thống giá trị thừa nhận được của tham số." [36, tr.94 - 95]

Như vậy, trong các bài toán có chứa tham số, người ta phải xem xét đối tượng tham số ở hai khía cạnh :

- ***Tham số là* số *cố định.*** Tính cố định này cho phép xét tham số như một giá trị số.
- ***Tham số có độ tự do*** (sự thay đổi giá trị). Chính vì *độ tự do* của tham số nên dưới sự điều khiển của các ràng buộc, điều kiện cụ thể của bài toán mà nảy sinh sự phân chia trường hợp. Khi từng điều kiện, ràng buộc đã thỏa mãn thì tham số lại xuất hiện ở *tính cố định*. Tiến trình này gọi là *biện luận*.

Nói rõ hơn, ***biện luận*** chính là quá trình lập luận về số nghiệm của phương trình theo giá trị nhận được của tham số. Phần lớn các bài toán biện luận đều liên quan chặt chẽ đến việc phân chia các trường hợp riêng đối với tham số. Từ đó dẫn đến sự phân

---

[1] Giả sử $a = \alpha$, $b = \beta$, ..., $c = \gamma$ là tập hợp các giá trị bằng số nào đó của các chữ a, b, ..., c. Nếu thay các giá trị đó vào hàm số f thì ta được $f(x, \alpha, \beta, ..., \gamma)$. Nếu $f(x, \alpha, \beta, ..., \gamma)$ xác định một hàm số nào đó của đối số x thì $\alpha, \beta, ..., \gamma$ được gọi là hệ thống giá trị thừa nhận được của các tham số. Nếu $f(x, \alpha, \beta, ..., \gamma)$ không có nghĩa với mọi giá trị bằng số của x trên trường số đã cho thì $\alpha, \beta, ..., \gamma$ là một hệ thống giá trị không thừa nhận được.

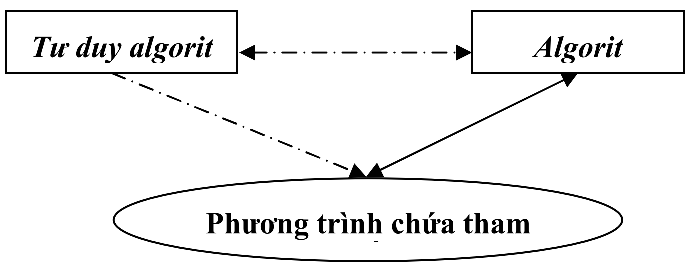
lớp các tập nghiệm, nghĩa là ứng với trường hợp này của tham số thì ta có tập nghiệm này và ứng với trường hợp kia ta lại có tập nghiệm kia …

1.3. MỐI QUAN HỆ GIỮA ALGORIT VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

Algorit và phương trình chứa tham số, hai đối tượng thoạt nhìn tưởng chừng như hoàn toàn biệt lập nhưng kỳ thực chúng có mối quan hệ khá gắn bó với nhau. Điều này được thể hiện qua một số điểm sau đây :

- *Thứ nhất*, xét cho cùng, phương trình chứa tham số chính là phương trình đại số có dạng tổng quát, nó đại diện cho một lớp các phương trình (với hệ số là các số đã cho). Đối với các phương trình này, việc sử dụng một công thức nào đó để tìm nghiệm chính là giải và biện luận một lớp phương trình theo một algorit nào đó. Ở đây, công thức tính nghiệm ấy lại là một hình thức thể hiện của algorit. Những lập luận có tính mắc xích vừa nêu đã minh chứng phần nào cho sự tồn tại của mối liên hệ giữa algorit và phương trình chứa tham số.

- *Thứ hai*, như đã biết, biện luận phương trình chứa tham số chính là quá trình *lập luận* về số nghiệm của phương trình theo giá trị nhận được của tham số. Phần lớn các bài toán biện luận đều liên quan chặt chẽ đến việc phân chia các trường hợp riêng đối với tham số sao cho : phân chia phải liên tục, triệt để, không bỏ sót, không được trùng lặp. Do đó, để đảm bảo được các yêu cầu này thì cùng với tư duy logic, tư duy algorit cũng đóng vai trò rất quan trọng ở đây ; bởi lẽ nó giúp cho việc giải phương trình chứa tham số được thực hiện theo một trình tự xác định, chặt chẽ và rõ ràng hơn. Thế mà tư duy algorit và khái niệm algorit lại liên hệ mật thiết với nhau. Từ đây có thể suy ra sự gắn bó giữa algorit với phương trình chứa tham số.



Tuy nhiên, cần lưu ý rằng vì vận dụng một algorit chính là thực hiện theo *"khuôn mẫu"* sẵn có nên dễ dẫn đến sự thu hẹp tính *tự do* trong quá trình biện luận. Hơn nữa, cách hiểu hình thức và máy móc của algorit giải còn có nguy cơ che khuất *nghĩa* của quá trình biện luận.

1.4. KẾT LUẬN CHƯƠNG 1

Những nghiên cứu ở trên cho phép chúng tôi đưa ra một số kết luận sau :

- **Về algorit**

Theo cách hiểu trực giác, có hai loại algorit : *algorit hiểu theo nghĩa chặt* và *algorit hiểu theo nghĩa rộng*.

Với algorit hiểu theo nghĩa chặt, 6 đặc trưng của nó có thể kể ra là : tính kết thúc, tính xác định, tính phổ dụng, đại lượng vào, đại lượng ra và tính hiệu quả.

- **Về tham số và phương trình chứa tham số**

Tham số là một khái niệm paramathématique.

Trong phương trình chứa tham số, tham số được hiểu là biến chỉ dạng và được xét ở hai khía cạnh : tham số là số *cố định* và tham số có *độ tự do*. Nói cách khác, khi giải một phương trình chứa tham số, người ta không chỉ xem các tham số đại diện cho những số đã biết mà còn phải biết biện luận các trường hợp tùy theo sự thay đổi giá trị của nó.

- **Về mối quan hệ giữa algorit và phương trình chứa tham số**

Mối quan hệ này thể hiện qua hai quan điểm sau đây :

Quan điểm 1 :

- Cần giải một lớp các phương trình cùng dạng $\rightarrow$ dùng tham số để biểu diễn các hệ số.
- Quá trình giải phụ thuộc vào các tham số $\rightarrow$ xuất hiện các algorit.

Ngược lại :

- Các phương trình cùng dạng có cách giải giống nhau $\rightarrow$ xuất hiện algorit.
- Đưa vào các tham số để phát biểu algorit.

Quan điểm 2 : Mối quan hệ giữa algorit và phương trình chứa tham số thể hiện ở mối quan hệ biện chứng giữa algorit, tư duy algorit và giải phương trình chứa tham số.

Những kết quả ở chương 1 sẽ là cơ sở phương pháp luận cho việc nghiên cứu ở các chương tiếp theo.

Chương 2

TỔ CHỨC TOÁN HỌC GẮN VỚI CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Chương này có mục đích trả lời cho nhóm câu hỏi Q_2. Cụ thể là :

Trong giáo trình Đại số tuyến tính ở đại học,

- *TCTH nào gắn với các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính không chứa tham số?*
- *TCTH nào gắn với các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính có chứa tham số?*

Về tài liệu tham khảo cho chương 2, một trong những sách viết về lịch sử quá trình hình thành các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính là [66]. Tuy nhiên, tác phẩm này lại không trình bày các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính một cách rõ ràng. Chính vì thế, để xây dựng TCTH tham chiếu, ngoài việc sử dụng [66], chúng tôi sẽ phải tham khảo thêm một số giáo trình đại học [1]. Cụ thể là :

[13] Nguyễn Minh Chương (chủ biên) (2001), *Giải tích số*, NXB Giáo dục.

[20] Nguyễn Viết Đông – Lê Thị Thiên Hương – Nguyễn Anh Tuấn – Lê Anh Vũ (1999), *Toán cao cấp tập 2* (dùng cho sinh viên giai đoạn đào tạo cơ bản của các trường đại học và cao đẳng), NXB Giáo dục.

[21] Nguyễn Viết Đông – Lê Thị Thiên Hương – Nguyễn Anh Tuấn – Lê Anh Vũ (1999), *Bài tập toán cao cấp tập 2*, NXB Giáo dục.

[24] Bùi Xuân Hải (chủ biên) (2001), *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.

2.1. VÀI NÉT VỀ SỰ TIẾN TRIỂN CỦA CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Trong lịch sử, có rất nhiều bài toán được giải quyết bởi hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn hoặc hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn. Những bài toán như thế thường gặp ở thời Babylon và Ai cập, cũng như vào thời trung cổ ở Ấn độ, hay trong những nước vùng Islam và ở châu Âu.

Trong số những phương pháp để giải hệ phương trình tuyến tính, phải kể đến các phương pháp của người Trung hoa. Từ thế kỉ thứ II trước công nguyên, người Trung

---

[1] Như đã biết, các tri thức trong giáo trình đại học rất gần với tri thức bác học.

hoa đã biết phương pháp để giải hệ phương trình tuyến tính. Những phương pháp này được thể hiện dưới dạng một chuỗi các chỉ dẫn. Tiêu biểu trong số đó có phương pháp *fangcheng* biểu diễn các hệ số của hệ phương trình qua bảng.

Dưới đây là một miêu tả [1] của phương pháp *fangcheng* [2] để giải hệ sau :

$$\begin{cases} x - 2y = 1 & (1) \\ 2x + 3y = 16 & (2) \end{cases}$$

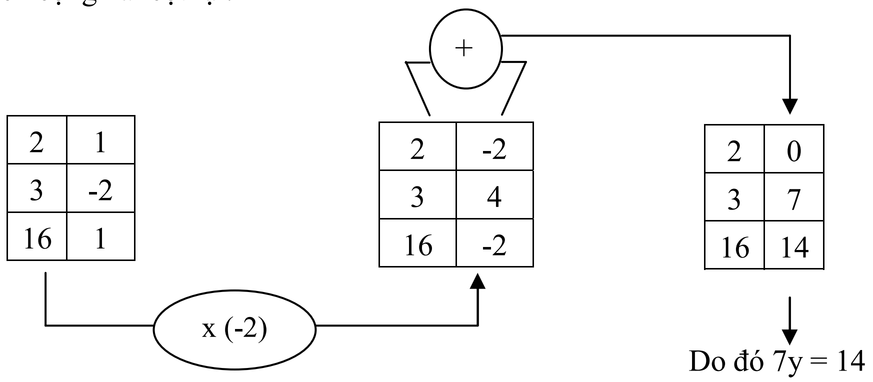
Bước 1 : Đặt các hệ số của x, y và các hệ số tự do (ở đây là 1 và 16) trong bảng dưới đây (người Trung hoa viết theo hàng dọc từ trái sang phải).

phương trình (2)

phương trình (1)

Hệ số của x	2	1
Hệ số của y	3	-2
Hệ số tự do	16	1

Bước 2 : Xóa hệ số của y (hoặc của x) bằng cách nhân một cột với một số và bằng cách cộng hai cột lại.



Do đó 7y = 14

Vậy y = 2

Bước 3 : Tính giá trị của x (hoặc của y) khi biết giá trị của y (hay của x).

Theo (1) x = 1 + 2y.

Vậy x = 1 + 2 x 2 = 5.

Có lẽ vào cuối thế kỉ thứ 17, lần đầu tiên hệ phương trình tuyến tính được giới thiệu với *hệ số là các chữ.* Năm 1750, nhà toán học người Thụy Sĩ, Gabriel Cramer (1704 – 1752) đã giới thiệu công thức tổng quát để giải bất cứ hệ phương trình tuyến tính nào mà số phương trình bằng số ẩn và định thức thành lập từ hệ số của các ẩn khác không.

---

(1) Mô tả này được tham khảo từ [65].

(2) Thật ra, đây là phương pháp *cộng đại số* mà chúng ta biết ngày nay.

Sau khi Cramer đưa ra quy tắc giải hệ phương trình tuyến tính thì quy tắc này trở thành *"mốt"* trong các công trình về toán ứng dụng trong một thời gian dài. Nhưng những câu hỏi về Thiên văn và Trắc địa học đã dẫn đến những hệ với số phương trình rất lớn mà để giải chúng cần có một lượng phép tính khổng lồ. Do đó, phương pháp Cramer trở nên khó áp dụng, chẳng hạn đối với hệ 10 phương trình 10 ẩn, cần phải thực hiện 300 triệu phép tính. Từ đấy, các nhà toán học khác đã có những phương pháp để rút gọn lại các phép tính, chẳng hạn như phương pháp Gauss.

Hơn nữa, từ việc đo đạc, người ta thu được các hệ phương trình mà hệ số của các phương trình trong hệ không thật chính xác và số phương trình thường là lớn hơn số ẩn. Do đó, vấn đề là tìm cách tốt nhất để giải những hệ này.

Trước tiên, các nhà toán học sẽ phải tìm ra một phương pháp để từ hệ ban đầu dẫn đến giải một hệ khác có số phương trình bằng với số ẩn và có nghiệm gần đúng nhất với giá trị cần tìm. Trong số những phương pháp được đề nghị, có phương pháp bình phương tối thiểu (moindres carrés) của Legendre và Gauss. Phương pháp này cho phép giảm bớt những sai số vì nó cho những giá trị với sai số trung bình là nhỏ nhất có thể.

Công việc thứ hai của các nhà toán học là tìm những phương pháp dễ áp dụng hơn công thức Cramer cũng như tìm kiếm sự loại bỏ những cách thức cổ điển theo phương pháp Gauss để giải hệ (n, n) (với n rất lớn) ; đặc biệt, những hệ xuất phát từ phương pháp bình phương tối thiểu.

Vào thế kỉ 19, các phương pháp lặp được phát triển đã cho phép tìm nghiệm với một sự chính xác cho trước.

Như vậy, để giải hệ phương trình tuyến tính, có hai nhóm phương pháp là :

- *Nhóm phương pháp trực tiếp* (nhóm phương pháp giải *"đúng"*) : Đặc điểm chung của nhóm phương pháp này là sau một số hữu hạn phép tính sẽ có kết quả. Vì vậy, nhóm phương pháp này thường được áp dụng với lớp các bài toán có kích thước nhỏ, và các số liệu ban đầu là đúng. Tuy nhiên, do phải thực hiện một số phép tính tương đối lớn nên có nguy cơ tích lũy sai số, nhất là đối với trường hợp số liệu ban đầu không thật chính xác.

- *Nhóm phương pháp gián tiếp* (phương pháp giải *"gần đúng"* hay phương pháp lặp) : Nhóm phương pháp này thường được áp dụng cho lớp các bài toán có kích thước lớn, số liệu ban đầu là có sai số.

2.2. CÁC TỔ CHỨC TOÁN HỌC

Trong các giáo trình đại học, hai kiểu nhiệm vụ chủ yếu liên quan đến hệ phương trình tuyến tính là :

$\mathrm{T}_{R}^{(m,\,n)}$: *Giải hệ phương trình tuyến tính không chứa tham số*

$\mathrm{T}_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$: *Giải hệ phương trình tuyến tính có chứa tham số*

Dưới đây, chúng tôi sẽ mô tả các TCTH tương ứng với hai kiểu nhiệm vụ này. Trong đó, chúng tôi đặc biệt quan tâm đến thành phần thứ hai (kỹ thuật) của các TCTH đó. [1]

2.2.1. TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ $\mathrm{T}_{R}^{(m,\,n)}$ *"Giải hệ phương trình tuyến tính không chứa tham số"*

Bằng một *"sự tổng hợp"* tất cả các giáo trình đại học đã nêu [2], chúng tôi nhận thấy có 9 kỹ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ $\mathrm{T}_{R}^{(m,\,n)}$. Các kỹ thuật này được ẩn dưới tên gọi *"phương pháp"*. Tuy nhiên, để tương thích với tên của thành phần thứ hai trong một TCTH ([$\mathrm{T}/\tau/\theta/\Theta$]), thay cho từ *"phương pháp"*, chúng tôi sẽ sử dụng từ *"kỹ thuật"*. Cụ thể là :

$\tau_{Cr}^{(n,\,n)}$: Kỹ thuật giải hệ Cramer

$\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$: Kỹ thuật đưa về hệ Cramer

τ_{G} : Kỹ thuật Gauss

$\tau_{G\text{-}J}$: Kỹ thuật Gauss – Jordan

τ_{Cho} : Kỹ thuật Cholesky

τ_{Rac} : Kỹ thuật căn bậc hai

τ_{Orth} : Kỹ thuật trực giao

τ_{Ite} : Kỹ thuật lặp đơn

τ_{Sei} : Kỹ thuật Seidel

Như đã nói, các kỹ thuật này có thể được phân loại thành 2 nhóm :

---

[1] Nhắc lại rằng một TCTH [$\mathrm{T}/\tau/\theta/\Theta$] bao gồm 4 thành phần (kiểu nhiệm vụ - kỹ thuật - công nghệ - lý thuyết).

[2] Như đã nói, nếu xét riêng một giáo trình đại học nào đó thì sự giới thiệu cũng như mô tả tất cả các kỹ thuật để giải quyết $\mathrm{T}_{R}^{(m,\,n)}$ là không đầy đủ.

Nhóm kỹ thuật giải *trực tiếp*	$\tau_{Cr}^{(n,\,n)}$, $\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$, τ_G, $\tau_{G\text{-}J}$
Nhóm kỹ thuật giải *gián tiếp*	τ_{Cho}, τ_{Rac}, τ_{Orth}, τ_{Ite}, τ_{Sei}

Từ đây, việc phân tích các TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ $T_R^{(m,\,n)}$ sẽ quy về việc phân tích từng TCTH gắn với mỗi kỹ thuật kể trên.

Tuy nhiên, vì các kỹ thuật τ_{Cho}, τ_{Rac}, τ_{Orth}, τ_{Ite} và τ_{Sei} không phổ biến (chỉ xuất hiện trong tài liệu *Giải tích số* hay *Phương pháp tính*) và vì chúng cũng không được dùng để tham chiếu cho bất kì kỹ thuật giải hệ phương trình nào được đề cập ở trường phổ thông nên ở đây, chúng tôi chỉ mô tả các TCTH gắn với 4 kỹ thuật thường gặp là $\tau_{Cr}^{(n,\,n)}$, $\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$, τ_G và $\tau_{G\text{-}J}$ bằng cách xem xét hệ phương trình tuyến tính trên trường K có dạng viết gọn :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ (\mathrm{i} = \overline{1,\ m})$$

hay viết dưới dạng ma trận :

$$\mathrm{AX = B}$$

với ma trận hệ số A = $\left(a_{ij}\right)_{mxn}$, cột ẩn số X, cột tự do B và ma trận mở rộng (hay bổ sung) $\overline{\mathrm{A}}$ = [A|B].

Như thế, nội dung cụ thể của từng kỹ thuật τ_{Cho}, τ_{Rac}, τ_{Orth}, τ_{Ite} và τ_{Sei} sẽ được trình bày trong phần phụ lục.

Để xây dựng TCTH gắn với bốn kỹ thuật $\tau_{Cr}^{(n,\,n)}$, $\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$, τ_G, $\tau_{G\text{-}J}$, trong phần dưới đây, chúng tôi chủ yếu chọn phân tích hai giáo trình [20] và [21]. Còn giáo trình [24] chỉ được sử dụng để đối chiếu trong một số trường hợp cần thiết.

2.2.1.1. TCTH gắn liền với kỹ thuật giải hệ Cramer và kỹ thuật đưa về hệ Cramer

❖ **Nội dung kỹ thuật giải hệ Cramer ($\tau_{Cr}^{(n,\,n)}$)** (1)

- Kiểm tra xem hệ phương trình đã cho có phải là hệ Cramer không (2).
- Nếu hệ phương trình là hệ Cramer thì tính nghiệm của hệ theo công thức :

$$\mathrm{x_j = \frac{D_j}{D},\ j = \overline{1,\,n}}$$

(1) Tham khảo [21, tr.32].

(2) *Hệ phương trình tuyến tính gồm n phương trình, n ẩn số được gọi là hệ Cramer nếu định thức của ma trận hệ số khác 0. Mọi hệ Cramer đều có nghiệm duy nhất.*

(trong đó D là định thức của ma trận hệ số của hệ, D_j là định thức nhận được từ D bằng cách thay cột thứ j bởi cột tự do ; j = $\overline{1, n}$).

Nghiệm của hệ Cramer còn có thể tìm được theo công thức :

$$X = A^{-1}B.$$

❖ **Nội dung kỹ thuật đưa về hệ Cramer ($\tau_{Cr}^{(m,n)}$)** [1]

Tính rank(A) và rank($\overline{A}$)

- Nếu rank(A) < rank($\overline{A}$) thì hệ vô nghiệm ;
- Nếu rank(A) = rank($\overline{A}$) thì hệ có nghiệm.
  + Chọn một định thức con cơ sở $D(r) \neq 0$ cấp r = rank(A) ($0 < r \leq \min\{m, n\}$).
  + Xác định các phương trình chính, các ẩn chính và các ẩn tự do. Bỏ đi các phương trình còn lại, chuyển các số hạng chứa các ẩn tự do sang vế phải và xem các ẩn tự do là tham số (nhận giá trị tùy ý trên K), ta thu được hệ Cramer đối với các ẩn chính tương đương với hệ đã cho.
  + Sau đó giải hệ Cramer bằng công thức Cramer : $x_j = \dfrac{D_j}{D}$; j = $\overline{1, r}$ (trong đó D là định thức của ma trận hệ số của hệ Cramer, D_j là định thức nhận được từ D bằng cách thay cột thứ j bởi cột tự do ; j = $\overline{1, r}$).

Nhận xét

- Kỹ thuật *giải hệ Cramer* $\tau_{Cr}^{(n,n)}$ chính là trường hợp riêng của kỹ thuật *đưa về hệ Cramer* $\tau_{Cr}^{(m,n)}$ khi số phương trình bằng số ẩn.
- Khi áp dụng kỹ thuật $\tau_{Cr}^{(m,n)}$, vì cột tự do chứa cả các ẩn tự do nên việc tính D_j sẽ rất phức tạp.

❖ **Công nghệ $\theta_{Cr}^{(m,n)}$ để giải thích các kỹ thuật $\tau_{Cr}^{(n,n)}$ và $\tau_{Cr}^{(m,n)}$**

Đó là các định lý sau :

- ***Định lý Kronecker - Capelli*** (*về tiêu chuẩn hệ có nghiệm*)

  Một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm khi và chỉ khi ma trận hệ số và ma trận mở rộng của hệ có hạng bằng nhau.

- ***Định lý Cramer***

  Mọi hệ Cramer n phương trình, n ẩn số đều có duy nhất một nghiệm cho bởi công thức

$$x_j = \frac{D_j}{D} \ ; \ j = \overline{1, n} \ ;$$

  trong đó D là định thức của ma trận hệ số của hệ, D_j là định thức nhận được từ D

---

(1) Tham khảo [20, tr.106].

bằng cách thay cột thứ j bởi cột tự do ; j = $\overline{1, n}$.

❖ **Lý thuyết $\Theta_{Cr}^{(m,n)}$ để giải thích công nghệ $\theta_{Cr}^{(m,n)}$**

- Lý thuyết hạng của ma trận.
- Lý thuyết ma trận (ma trận không suy biến, ma trận nghịch đảo).

Dưới đây là bảng tóm tắt các thành phần của TCTH gắn với hai kỹ thuật $\tau_{Cr}^{(n,n)}$ và $\tau_{Cr}^{(m,n)}$:

Kiểu nhiệm vụ	Kỹ thuật	Công nghệ	Lý thuyết
$T_R^{(m,n)}$	$\tau_{Cr}^{(n,n)}$	$\theta_{Cr}^{(m,n)}$	$\Theta_{Cr}^{(m,n)}$
	$\tau_{Cr}^{(m,n)}$		

2.2.1.2. TCTH gắn với kỹ thuật Gauss và kỹ thuật Gauss - Jordan

❖ **Nội dung kỹ thuật Gauss (τ_G) (1)**

- Lập ma trận bổ sung $\overline{A}$.
- Dùng các phép biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận $\overline{A}$ đưa ma trận $\overline{A}$ về dạng bậc thang dòng.
- Căn cứ vào hạng của A và hạng của $\overline{A}$ để kết luận về số nghiệm của hệ phương trình. Cụ thể :
  + Nếu rank(A) < rank($\overline{A}$) thì hệ vô nghiệm.
  + Nếu rank(A) = rank($\overline{A}$) thì hệ có nghiệm duy nhất.
  + Nếu rank(A) = rank($\overline{A}$) = r < n thì hệ có vô số nghiệm phụ thuộc n – r tham số. Trường hợp này trong dạng bậc thang dòng của A tồn tại định thức con cấp r, D(r) $\neq$ 0. Định thức con D(r) đó gọi là định thức con cơ sở. Các ẩn số có hệ số nằm trong D(r) gọi là các ẩn chính (có r ẩn chính), các ẩn số còn lại gọi là tham số (hay ẩn tự do). Tính các ẩn chính theo các tham số, ta được hệ nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho.

Khi áp dụng τ_G, trong quá trình biến đổi sơ cấp trên dòng của ma trận bổ sung $\overline{A}$, cần lưu ý mấy điểm sau :

- Nếu thấy xuất hiện một dòng bằng không thì có thể xóa bỏ dòng đó.
- Nếu thấy hai dòng bằng nhau hoặc tỉ lệ với nhau thì xóa đi một dòng.
- Nếu thấy xuất hiện một dòng dạng $[\,0, 0, \ldots, 0 \mid a]$, a $\in$ K\{0} (tức là dòng chỉ có một

(1) Tham khảo [21, tr.33].

phần tử khác không duy nhất ở cột tự do) thì kết luận ngay hệ vô nghiệm mà không cần biến đổi tiếp.

- Trong một vài trường hợp, nếu thấy hệ mới có thể giải dễ dàng thì không nhất thiết phải đưa $\overline{A}$ về dạng bậc thang dòng.

Về kỹ thuật Gauss τ_G, tài liệu [24] trình bày nó không phải bằng ngôn ngữ tự nhiên như trên mà qua các bước thực hiện, cụ thể là :

- Bước 1. Ma trận hóa hệ phương trình dưới dạng $\overline{A} = [A|B]$
  Đặt i : = 1 và j : = 1 rồi chuyển sang Bước 2.
- Bước 2. Nếu j > n hoặc i > m thì algorit kết thúc. Ngược lại thì ta chuyển sang Bước 3.
- Bước 3. Nếu $a_{ij} = 0$ thì chuyển sang Bước 4. Ngược lại thì lần lượt thực hiện các phép biến đổi

$$d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i, \quad k = \overline{i+1,\ m}, \quad (\text{với } d_k, d_i \text{ là kí hiệu của dòng thứ } k, \text{ thứ } i)$$

  ta thu được ma trận dạng

$$\begin{array}{cl}
\left(\begin{array}{ccccc|c}
\cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\
\ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\cdots & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\
\cdots & a_{ij} & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\
\cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet \\
\ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet
\end{array}\right) &
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow \text{dòng i} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}$$

$\uparrow$

cột j

  rồi chuyển sang Bước 5.
- Bước 4. Nếu tồn tại k > i sao cho $a_{kj} \neq 0$ thì ta thực hiện biến đổi $d_k \leftrightarrow d_i$ rồi quay lại Bước 3. Ngược lại, ta thay j bởi j + 1 rồi quay lại Bước 2.
- Bước 5. Thay i bởi i + 1 và j bởi j + 1 rồi quay lại Bước 2.

Nhận xét

Dù diễn đạt theo cách thức nào thì ý tưởng cơ bản của kỹ thuật Gauss cũng là *khử dần các ẩn.* Từ trên xuống dưới, số ẩn chính trong các phương trình sẽ giảm dần, cho đến phương trình cuối (nếu không kể các phương trình ứng với các dòng bằng không bị bỏ đi) chỉ còn đúng một ẩn chính.

❖ **Nội dung kỹ thuật Gauss - Jordan ($\tau_{G\text{-}J}$) (1)**

Trước hết, tính rank(A) và rank($\overline{A}$)

- Nếu rank(A) < rank($\overline{A}$) thì hệ vô nghiệm ;
- Nếu rank(A) = rank($\overline{A}$) thì hệ có nghiệm :
  + Chọn một định thức con cơ sở $D(r) \neq 0$ cấp r = rank(A) ($0 < r \leq \min\{m, n\}$). Xác định các phương trình chính, ẩn chính và ẩn tự do. Trong $\overline{A}$, loại bỏ các dòng không chứa phần tử của D(r), ta nhận được ma trận con $\overline{S}$ cấp r x (n + 1). Gọi S(r) là ma trận vuông cấp r con của $\overline{S}$ sao cho det S(r) = D(r).
  + Biến đổi sơ cấp trên các dòng của $\overline{S}$ (không biến đổi cột) để đưa S(r) về dạng chính tắc I_r (ma trận đơn vị cấp r). Lúc đó, $\overline{S}$ biến thành $\overline{S}'$.
  + Xét hệ phương trình mới (tương đương với hệ đã cho) với $\overline{S}'$ là ma trận mở rộng. Chuyển các số hạng chứa ẩn tự do sang vế phải và xem các ẩn tự do là tham số nhận giá trị tùy ý trên K, ta thu được nghiệm tổng quát của hệ đã cho.

Nhận xét

- Nếu diễn đạt theo algorit thì theo [24], kỹ thuật Gauss - Jordan nhận được bằng cách thay Bước 3 trong kỹ thuật Gauss bởi Bước 3' mạnh hơn sau :

> Bước 3'. Nếu $a_{ij} = 0$ thì ta chuyển sang Bước 4. Ngược lại thì ta thực hiện lần lượt các phép biến đổi
>
> $$\frac{1}{a_{ij}} d_{ij}\ ;\quad d_k - \frac{a_{kj}}{d_i},\quad \forall\, k \neq i,$$
>
> ta thu được ma trận dạng
>
> $$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccccc|c} \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet & & \bullet \\ \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet & & \bullet \\ \cdots & 1 & \bullet & \cdots & \bullet & & \bullet \\ \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet & & \bullet \\ \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \cdots & 0 & \bullet & \cdots & \bullet & & \bullet \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{dòng } i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{cột } j \end{array} & \end{array}$$
>
> rồi chuyển sang Bước 5.

- Kỹ thuật Gauss – Jordan cải tiến hơn kỹ thuật Gauss vì trong khi quá trình khử Gauss đưa hệ về hệ mới $UX = B^*$ (với U là ma trận tam giác trên) thì khử Gauss - Jordan thực hiện khử đưa hệ về dạng $I_n X = B^*$ (trong đó, I_n là ma trận đơn vị cấp n) ; lúc đó, nghiệm của hệ chính là $X = B^*$. Như vậy, với kỹ thuật Gauss - Jordan, quá

(1) Tham khảo [20, tr.110].

trình tính toán trong bước khử sẽ nhiều hơn kỹ thuật Gauss nhưng lại thu ngay được nghiệm.

- Hai kỹ thuật Gauss và Gauss - Jordan có các bước lặp lại nhiều lần và số bước không cố định trước.

❖ **Công nghệ θ_G để giải thích các kỹ thuật τ_G và $\tau_{G\text{-}J}$**

– ***Định lý***

Cho hai hệ phương trình tuyến tính trên K có cùng m phương trình của n ẩn số với ma trận mở rộng lần lượt là $\overline{A} = [A|B]$ và $\overline{A'} = [A' \mid B']$, $(m \geq 2)$. Khi đó, nếu $\overline{A'}$ nhận được từ $\overline{A}$ bởi một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp dòng thì hai hệ phương trình đã cho tương đương với nhau.

– ***Định lý Kronecker - Capelli***

Một hệ phương trình tuyến tính có nghiệm khi và chỉ khi ma trận hệ số và ma trận mở rộng của hệ có hạng bằng nhau.

❖ **Lý thuyết Θ_G để giải thích công nghệ θ_G**

– Lý thuyết ma trận.

Dưới đây là bảng tóm tắt các thành phần của TCTH gắn với hai kỹ thuật τ_G và $\tau_{G\text{-}J}$:

Kiểu nhiệm vụ	Kỹ thuật	Công nghệ	Lý thuyết
$T_R^{(m,\,n)}$	τ_G	θ_G	Θ_G
	$\tau_{G\text{-}J}$		

2.2.1.3. Một số nhận xét khác về bốn kỹ thuật giải trực tiếp

Tương ứng với kiểu nhiệm vụ $T_R^{(m,\,n)}$, 4 kỹ thuật $\tau_{Cr}^{(n,\,n)}$, $\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$, τ_G và $\tau_{G\text{-}J}$:

– đều mang bản chất đại số ;

– chủ yếu là các *algorit hiểu theo nghĩa rộng*.

- Ngoài kỹ thuật giải hệ Cramer, các kỹ thuật khác áp dụng đối với hệ phương trình tuyến tính có số phương trình và số ẩn bất kỳ.

- Ở các ví dụ và bài tập, số phương trình và số ẩn thường nằm giữa 3 và 5. Trong trường hợp số ẩn của hệ khá lớn, các tác giả khuyên dùng kỹ thuật Gauss hoặc Gauss - Jordan chứ không sử dụng kỹ thuật giải hệ Cramer hay kỹ thuật đưa về hệ Cramer vì nếu như thế thì việc tính toán sẽ rất cồng kềnh.

"*Việc tính toán sẽ rất cồng kềnh nếu ta dùng công thức Cramer để giải một hệ thống phương trình tuyến tính, nhất là khi số ẩn của hệ khá lớn. Vì vậy, ta thường dùng phương pháp Gauss để giải một hệ thống phương trình tuyến tính* [1], nội dung của các phương pháp này là dùng các phép biến đổi sơ cấp trên hệ đã cho để đưa nó về hệ tương đương, đơn giản, dễ tìm nghiệm." [25, tr.268]

"… quy tắc trên [2] tuy tường minh nhưng có nhược điểm là khá phức tạp. Trong thực tế, người ta *dùng thuật toán Gauss* để giải một hệ phương trình tuyến tính." [54, tr.153]

Mong muốn này thể hiện công khai khi tương ứng với kiểu nhiệm vụ $\mathrm{T}_R^{(m,\,n)}$, các đề toán đều yêu cầu sử dụng hai kỹ thuật τ_G hoặc $\tau_{G\text{-}J}$ (thậm chí đối với cả trường hợp số phương trình bằng số ẩn). Chẳng hạn :

Bài I.35 [21, tr.135]

Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss – Jordan và phương pháp Gauss rồi so sánh các công thức nghiệm.

[…]

Bài 2.28 [24, tr.65]

Dùng thuật toán Gauss hoặc Gauss - Jordan giải các hệ phương trình sau.

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 17 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$ […]

2.2.2. TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ $\mathrm{T}_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$ *"Giải hệ phương trình tuyến tính có chứa tham số"*

2.2.2.1. Trường hợp hệ có số phương trình và số ẩn bất kì

Theo giáo trình [20], về phương diện lý thuyết, có thể sử dụng một trong ba kỹ thuật sau để giải quyết $\mathrm{T}_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$:

- Kỹ thuật đưa về hệ Cramer $\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$;
- Kỹ thuật Gauss τ_G ;
- Kỹ thuật Gauss - Jordan $\tau_{G\text{-}J}$.

---

(1) Trong luận văn này, chúng tôi sẽ *in đậm, nghiêng*, hoặc *gạch dưới* dể làm nổi rõ một ý trích dẫn nào đó.
(2) Ý nói kỹ thuật *giải hệ Cramer* hay kỹ thuật *đưa về hệ Cramer*.

Nhận xét

- Mặc dù $T_{R}^{(m,\,n)}$ và $T_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$ cùng sử dụng $\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$, τ_{G}, $\tau_{G\text{-}J}$ nhưng các bước thực hiện tương ứng với kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$ sẽ phức tạp hơn. Tuy nhiên, các tác giả đã không có một lưu ý nào về điều đó và họ đồng nhất ba kỹ thuật giải này cho cả hệ phương trình tuyến tính không chứa tham số và hệ phương trình tuyến tính chứa tham số.

- Với ba kỹ thuật $\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$, τ_{G}, $\tau_{G\text{-}J}$ để giải quyết $T_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$, kỹ thuật Gauss τ_{G} được ưa chuộng hơn cả. Thật vậy, qua xem xét 2 giáo trình của nhóm tác giả Nguyễn Viết Đông, chúng tôi nhận thấy số ví dụ trong [20] và số bài tập trong [21] tương ứng với mỗi kỹ thuật này như sau :

Kiểu nhiệm vụ	Kỹ thuật	Ví dụ	Bài tập	Tổng cộng
$T_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$	$\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$	1	0	1
	τ_{G}	1	3	4
	$\tau_{G\text{-}J}$	0	0	0

Như vậy, về phương diện thực hành, để giải quyết $T_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$, kỹ thuật Gauss - Jordan không được vận dụng (có lẽ vì hệ chứa tham số nên khó đưa hệ về dạng $I_n X = B^*$) ; còn kỹ thuật $\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$ thì xuất hiện một cách khiêm tốn (thật ra kỹ thuật này cũng không mấy được ưa chuộng khi hệ không chứa tham số).

Nói tóm lại, để giải hệ phương trình tuyến tính chứa tham số có số phương trình và số ẩn bất kì, kỹ thuật Gauss τ_{G} đóng vai trò quan trọng.

2.2.2.2. Trường hợp hệ có số phương trình bằng số ẩn

Trong trường hợp hệ có số phương trình bằng số ẩn, để giải hệ phương trình tuyến tính chứa tham số, xuất hiện một kỹ thuật mới mà các tài liệu gọi là *"phương pháp Cramer"* hay *"phương pháp định thức"* (còn trong luận văn này, chúng tôi sẽ thay thế bằng tên gọi *"kỹ thuật Cramer"* hay *"kỹ thuật định thức"* và kí hiệu là τ_{Cramer}).

Dưới đây là một mô tả TCTH gắn với kỹ thuật Cramer (τ_{Cramer})

❖ **Nội dung kỹ thuật Cramer (τ_{Cramer})**

– Tính D = det A và các định thức D_j (là định thức nhận được từ D bằng cách thay cột thứ j bởi cột tự do ; $j = \overline{1, n}$).

– Nếu $D \neq 0$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ với } x_j = \frac{D_j}{D}$$

hoặc $X = A^{-1}B$.

– Nếu D = 0 và tồn tại $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho $D_j \neq 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

– **Nếu D = 0 và $D_j = 0$, $\forall j = \overline{1, n}$ thì hệ không có nghiệm duy nhất (nghĩa là hệ *vô nghiệm* hoặc *vô số nghiệm*). Trong trường hợp này, muốn biết hệ vô nghiệm hay có vô số nghiệm (và giải tìm nghiệm) thì ta phải quay lại giải trực tiếp bằng kỹ thuật Gauss τ_G hoặc Gauss -Jordan $\tau_{G\text{-}J}$.**

Nhận xét

- Khi $D \neq 0$, τ_{Cramer} chính là kỹ thuật giải hệ Cramer $\tau_{Cr}^{(n,\, n)}$.
- τ_{Cramer} được sự trợ giúp của τ_G hoặc $\tau_{G\text{-}J}$ trong trường hợp D = 0 và $D_j = 0$, $\forall j = \overline{1, n}$.

❖ **Công nghệ θ_{Cramer} để giải thích kỹ thuật τ_{Cramer}**

Đó là các định lý sau :

– ***Định lý***

Cho $A \in M_n(K)$. Khi đó rank(A) = n khi và chỉ khi hệ AX = B có nghiệm duy nhất với mọi $B \in M_{nx1}(K)$.

– ***Định lý Cramer*** *(đã trình bày ở trên).*

❖ **Lý thuyết Θ_{Cramer} để giải thích công nghệ θ_{Cramer}**

– ***Định lý***

Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, với mỗi i, j, đặt c_{ij} là phần bù đại số của a_{ij} và $C = (c_{ij}) \in M_n(K)$. Khi đó :

$$A C^T = C^T A = |A| I_n.$$

Suy ra A khả nghịch thì $A^{-1} = |A|^{-1} C^T$.

– Lý thuyết định thức.

– Lý thuyết ma trận (hạng của ma trận, ma trận không suy biến, ma trận nghịch đảo).

Như đã phân tích, về phương diện lý thuyết, mặc dù kỹ thuật đưa về hệ Cramer và kỹ thuật Gauss - Jordan hoàn toàn có thể được sử dụng để giải quyết kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$, nhưng trong phần thực hành, chúng rất ít được nhắc đến.

Như vậy, có thể nói, liên quan đế hệ phương trình chứa tham số, chỉ có kỹ thuật Gauss τ_G và kỹ thuật Cramer τ_{Cramer} được quan tâm.

2.2.2.3. Nhận xét về kỹ thuật Gauss và kỹ thuật Cramer để giải quyết kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$

- *τ_G và τ_{Cramer} có tần suất sử dụng như nhau.*

Thật vậy, trong phần ôn chương (sách *"Bài tập toán cao cấp tập 2"* của nhóm tác Nguyễn Viết Đông), số bài tập tương ứng với các hệ có "số phương trình *khác* số ẩn" (số phương trình *bé hơn* hoặc *lớn hơn* số ẩn) chiếm tỉ lệ tương đương với số bài tập tương ứng với các hệ có "số phương trình *bằng* số ẩn" .

Số phương trình (*m*), số ẩn (*n*)	Số bài tập
$m = n$	4
$m \neq n$	6

- *Với hệ chứa tham số có số phương trình bằng số ẩn, τ_{Cramer} và τ_G có vai trò bình đẳng như nhau.*

Thật vậy, trong trường hợp hệ chứa tham số có "số phương trình *bằng* số ẩn", ngoài ví dụ sử dụng τ_{Cramer} còn xuất hiện ví dụ dùng kỹ thuật τ_G. Chẳng hạn :

Bài tập 4.3.3 [20, tr.39] (Sử dụng kỹ thuật Gauss τ_G)

Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số k

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -k \\ x_1 - x_2 + kx_3 + x_4 = k \\ x_1 + kx_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ kx_1 + kx_2 - x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

Tính bình đẳng này càng được nhấn mạnh khi trong phần bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$, người ta đã không chỉ định cụ thể kỹ thuật sử dụng. Từ đây ngầm hiểu là có thể thực hành giải hệ chứa tham số (có số phương trình và số ẩn bằng nhau) hoặc theo theo τ_{Cramer}, hoặc theo τ_G.

2.3. KẾT LUẬN

Những phân tích trên đây cho phép chúng tôi trả lời cho các câu hỏi đặt ra.

Cụ thể là :

❖ Các thành phần của TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ $T_R^{(m,n)}$ *"Giải hệ phương trình tuyến tính không chứa tham số"* :

Kiểu nhiệm vụ	Kỹ thuật		Công nghệ	Lý thuyết
$T_{R\text{-}D}^{(m,n)}$	*giải trực tiếp*	$\tau_{Cr}^{(n,n)}$	$\theta_{Cr}^{(m,n)}$	$\Theta_{Cr}^{(m,n)}$
		$\tau_{Cr}^{(m,n)}$		
		τ_G	θ_G	Θ_G
		$\tau_{G\text{-}J}$		
	giải gián tiếp	τ_{Cho}	θ_{Cho}	$\Theta_{moindres\ carres}$
		τ_{Rac}	θ_{Rac}	
		τ_{Orth}	θ_{Orth}	
		τ_{Ite}	θ_{Ite}	
		τ_{Sei}	θ_{Sei}	

Về những nhận xét, đánh giá cụ thể về nhóm kỹ thuật giải trực tiếp, xin xem lại mục 2.2.1 ở trên.

❖ Các thành phần của TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(m,n)}$ *"Giải hệ phương trình tuyến tính có chứa tham số"* :

Kiểu nhiệm vụ	Kỹ thuật	Công nghệ	Lý thuyết
$T_{R\text{-}D}^{(m,n)}$	$\tau_{Cr}^{(m,n)}$	$\theta_{Cr}^{(m,n)}$	$\Theta_{Cr}^{(m,n)}$
	τ_{Cramer}	θ_{Cramer}	Θ_{Cramer}
	τ_G	θ_G	Θ_G
	$\tau_{G\text{-}J}$		

Sự xuất hiện của tham số gắn liền với việc giới thiệu kỹ thuật Cramer τ_{Cramer} (để giải quyết kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(m,n)}$ trong trường hợp số phương trình bằng số ẩn). Thế nhưng, điều đó không có nghĩa là kỹ thuật τ_{Cramer} giữ vị trí *"độc quyền"* vì đi cùng với nó còn có 3 kỹ thuật $\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$, τ_G và $\tau_{G\text{-}J}$; đặc biệt là kỹ thuật Gauss τ_G rất được chú trọng.

❖ Có hai TCTH địa phương gắn với $\mathrm{T}_R^{(m,\,n)}$ và $\mathrm{T}_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$ mà các thành phần của chúng là :

TCTH địa phương	Kiểu nhiệm vụ	Kỹ thuật	Công nghệ	Lý thuyết
OM_{L_1}	$\mathrm{T}_R^{(m,\,n)}$	$\tau_{Cr}^{(n,\,n)}$	$\theta_{Cr}^{(m,\,n)}$	$\Theta_{Cr}^{(m,\,n)}$
		$\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$		
	$\mathrm{T}_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$	$\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$		
OM_{L_2}	$\mathrm{T}_R^{(m,\,n)}$	τ_G	θ_G	Θ_G
		$\tau_{G\text{-}J}$		
	$\mathrm{T}_{R\text{-}D}^{(m,\,n)}$	τ_G		
		$\tau_{G\text{-}J}$		

Mô tả TCTH tham chiếu ở chương 2 cho phép phân tích trở lại sự xây dựng có thể của các TCTH cần giảng dạy trong chương trình và SGK ở chương 3.

Chương 3

NGHIÊN CỨU MỐI QUAN HỆ THỂ CHẾ VỚI CÁC ĐỐI TƯỢNG ALGORIT VÀ THAM SỐ

Mục đích của chương 3 là tìm hiểu mối quan hệ thể chế với các đối tượng algorit và tham số, nghĩa là chúng tôi sẽ giải quyết các vấn đề đặt ra trong bốn nhóm câu hỏi còn lại : Q_3, Q_4, Q_5 và Q_6. Cụ thể như sau :

Q_3. Trong các chương trình toán THPT, algorit và tham số xuất hiện ở đâu và như thế nào? Sự tiến triển của từng đối tượng và mối quan hệ giữa chúng thể hiện ra sao?

Q_4. Liên quan đến nội dung "Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn" ở trường phổ thông, các phương pháp để giải quyết nó được đưa vào như thế nào? Chúng có phải là algorit hay không? Đâu là TCTH được xây dựng xung quanh các phương pháp này? Có sự chênh lệch nào giữa TCTH ở bậc đại học với TCTH ở trường phổ thông? Sự chênh lệch đó bắt nguồn từ những điều kiện và ràng buộc nào của thể chế?

Q_5. Những quy tắc của hợp đồng didactic có thể được hình thành giữa giáo viên và học sinh trong quá trình làm việc với algorit và tham số cũng như khi dạy - học giải và biện luận hệ phương trình (2, 2)? Chúng được thể hiện cụ thể ở những kiểu nhiệm vụ, những kỹ thuật nào?

Q_6. Cách trình bày của SGK có ảnh hưởng gì đến việc giải và biện luận hệ (2, 2) chứa tham số của học sinh?

3.1. ALGORIT VÀ THAM SỐ TRONG CÁC CHƯƠNG TRÌNH

Dạy - học toán ở trường THPT Việt nam được đánh dấu bởi cuộc CCGD 1990 trên quy mô toàn quốc. Đến năm 2000, người ta hợp nhất 3 bộ sách của giai đoạn trước lại thành một theo tinh thần giảm nhẹ nội dung và yêu cầu đối với học sinh. Trong năm học 2003 - 2004, SGK mới (soạn theo chương trình phân ban) bắt đầu được thí điểm trước khi được triển khai đại trà kể từ năm học 2006 - 2007.

Để trả lời cho nhóm câu hỏi Q_3, chúng tôi sẽ *phân tích một cách tổng quát* các chương trình 1990, 2000 và 2003 (ban KHTN). Ở đây, hai đối tượng algorit và tham số chủ yếu sẽ được xem xét trong *"phương trình"*, một chủ đề mang tính truyền thống và luôn chiếm vị trí quan trọng qua các giai đoạn dạy học khác nhau. Khi phân tích chương trình, trong những trường hợp cần thiết, chúng tôi sẽ lướt qua SGK để xem các tác giả đã thể hiện chương trình đề ra như thế nào.

3.1.1. Chương trình CCGD 1990

3.1.1.1. Về algorit

❖ **Lớp 10**

Trong chương trình lớp 10 CCGD, algorit xuất hiện với tư cách là đối tượng của tin học và toán học.

➢ ***Trong tin học***

Khái niệm algorit hiểu theo nghĩa trực giác xuất hiện một cách tường minh (1) trong chương *"Một số yếu tố về phương pháp và kĩ thuật tính toán"*. Chương này bao gồm các mục sau :

1. Thông tin và biểu diễn thông tin. Mã. Đại cương về ngôn ngữ.
2. Thuật toán. Sơ đồ khối. Tính chất. Các dạng thuật toán. Ví dụ về lập trình.
3. Sơ lược về máy tính điện tử. Lịch sử, vai trò.
4. Khái niệm về phương pháp số. Một vài phương pháp số đơn giản.

Với việc đưa algorit vào một nội dung như thế, theo ý kiến của [67] : "Điều này có thể mang lại một vài điều kiện thuận lợi cho việc đưa vào dạy học đối tượng giải gần đúng phương trình". Bởi lẽ, algorit, giải gần đúng phương trình (một phần của phương pháp số) và máy tính điện tử có mối liên hệ với nhau (2). Tuy nhiên, cũng theo [67], "sự xuất hiện của các phương pháp số dường như chỉ liên quan đến hai đối tượng mới là máy vi tính và tin học. Chính vì vậy, khả năng giảng dạy giải gần đúng phương trình (một phần của phương pháp số) vẫn còn nhiều điều để mở đối với các nhà soạn SGK […]."

➢ ***Trong toán học***

Trong Đại số 10, người ta đưa vào hàng loạt các phương trình, hệ phương trình như sau :

- phương trình bậc nhất một ẩn $ax + b = 0$,
- phương trình bậc hai một ẩn $ax^2 + bx + c = 0$,
- phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$,
- hệ phương trình (2, 2), v.v…

Và một trong những yêu cầu đặt ra đối với học sinh trong việc học chủ đề phương trình (3) là :

---

(1) [26, tr.112] giới thiệu khái niệm algorit (thuật toán) : *"Một danh sách các lệnh cần phải làm theo từng bước một để giải quyết một bài toán nào đó được gọi là một thuật toán để giải bài toán đó."*

(2) Về mối liên hệ giữa *algorit – phương pháp số – máy tính điện tử*, tham khảo phần Phụ lục.

(3) Trong nhà trường phổ thông, khái niệm phương trình được nhìn ở cả hai phương diện : phương diện cú pháp và phương diện ngữ nghĩa (xem phần phụ lục).

> "Học sinh […] thành thạo với việc giải phương trình hay bất phương trình theo <u>*thuật giải*</u>, theo <u>*công thức*</u> hoặc theo <u>*một hệ thống quy tắc biến đổi xác định*</u>, …" [38, tr.67]

Xuất phát từ yêu cầu đó, SGK lớp 10 đưa vào các "thuật giải" (hay algorit). Cụ thể:

Giải và biện luận phương trình ax + b = 0

Phương trình ax + b = 0
• $a \neq 0$: phương trình có nghiệm duy nhất $x = -\frac{b}{a}$ • $a = 0$ và $b \neq 0$: phương trình vô nghiệm   • $a = 0$ và $b = 0$: phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbf{R}$

Giải và biện luận phương trình ax^2 ***+ bx + c = 0***

$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2)$ $\Delta = b^2 - 4ac$; $(\Delta' = b'^2 - ac)$
1) $a \neq 0$:   Khi $\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$), (2) vô nghiệm.   Khi $\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$), (2) có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ (hay $-\frac{b'}{a}$).   Khi $\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$), (2) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\left(\text{hay } \frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}\right)$; $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\left(\text{hay } \frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}\right)$.   2) $a = 0$: Trở về giải và biện luận phương trình $bx + c = 0$.

Các kỹ thuật đại số trên chính là các algorit để giải và biện luận phương trình bậc nhất - bậc hai một ẩn, bất phương trình bậc nhất một ẩn,... Chúng mô tả một phương pháp cho phép tính toán hoặc tìm nghiệm chính xác của một phương trình.

❖ Lớp 11

Trong lớp học này, *"phương trình"* tiếp tục là một trong những vùng sống ngầm ẩn của algorit. Cụ thể, algorit thể hiện qua cách giải các phương trình lượng giác sau đây :

- Phương trình mũ dạng $a^x = b$,
- Phương trình mũ dạng $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, trong đó $f(x) = g(x)$ đã biết cách giải,
- Phương trình logarit dạng $f(x) = \log_a g(x)$, trong đó $f(x) = g(x)$ đã biết cách giải,

- Các phương trình lượng giác cơ bản

  sinx = sint, cosx = cost, tgx = tgt, cotgx = cotgt
- Các phương trình bậc nhất đối với một hàm số lượng giác

  $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$, $a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$,

  $a\,tg^2 x + b\,tgx + c = 0$, $a\,cotg^2 x + b\,cotgx + c = 0$
- Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx

  asinx + bcosx + c = 0
- Phương trình đẳng cấp đối với sinx và cosx

  $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = m$

❖ **Lớp 12**

Chủ đề phương trình không còn được đề cập đến nữa. Vùng sống của algorit lúc này là hàm số với các algorit liên quan đến việc khảo sát hàm số, tính toán giá trị số của hàm, tính đạo hàm hay nguyên hàm, …

3.1.1.2. Về tham số

Chúng tôi tự hỏi : trong chương trình CCGD 1990, mục đích của việc đưa vào tham số là gì?

Qua bài viết *"Đừng đánh giá thấp học sinh"* (Báo *Giáo dục và Thời đại*, số 52, 24/12/1995), giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn đã đưa ra phần nào lời giải đáp cho câu hỏi trên :

> "Tôi nhớ có lần cơ quan quản lý khi chỉ đạo việc dạy toán đã quyết định […] *"bỏ biện luận theo thông số"*. […] Thiện chí của người quản lý là sợ *"khó"* đối với đa số học sinh khi yêu cầu họ […] "biện luận theo thông số". Nhưng cách giải quyết thì sai ở chỗ từ bỏ nguyên tắc (*rèn luyện về phương pháp luận*) trong lúc đúng ra là phải mềm dẻo về sách lược, tìm cho được […] những bài toán đòi hỏi biện luận, nhưng mức độ khó dễ khác nhau, phù hợp với từng loại học sinh (giỏi, trung bình, khá)."

Như vậy, sự hiện diện của tham số trong bài toán chứa tham số được xem là một trong những cách để rèn luyện cho học sinh về mặt phương pháp luận.

❖ **Lớp 10**

Ở lớp 10, đối tượng tham số hiện diện tường minh qua một chuỗi các chủ đề như phương trình bậc nhất - bậc hai một ẩn, hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, bất phương trình bậc nhất một ẩn, … Theo đó, mục tiêu của chương trình Đại số 10 là :

> "– Biết cách giải và biện luận phương trình, hệ phương trình bậc nhất một ẩn và hai ẩn chứa tham số.
>
> – Biết cách giải phương trình bậc hai một ẩn chứa tham số." [30, tr.5]

Chính việc giới thiệu một loạt chủ đề nối tiếp nhau như thế đã tạo nên một hệ sinh thái vô cùng phong phú cho đối tượng tham số. Chẳng hạn :

Việc giới thiệu trước cách giải và biện luận phương trình bậc nhất một ẩn chứa tham số sẽ là tiền đề thuận lợi cho quá trình xây dựng kỹ thuật Cramer (đi từ kỹ thuật cộng đại số) để giải và biện luận hệ (2, 2) chứa tham số. [1]

Khi giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ hay bất phương trình bậc nhất $ax + b < 0$ chứa tham số, việc xét hai trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$ là những thao tác tương tự như đối với phương trình $ax + b = 0$.

Không những thế, liên quan đến phương trình, ở lớp 10, tham số còn được đề cập trong các vấn đề như :

- *tìm điều kiện của tham số sao cho phương trình, bất phương trình có nghiệm (hoặc vô nghiệm) ;*
- *tìm điều kiện của tham số để bất phương trình được thỏa mãn với mọi x nằm trong một khoảng (đoạn) cho trước ;*
- *tìm tham số sao cho các nghiệm của phương trình thỏa mãn điều kiện nào đó ;*
- *những bài toán liên quan đến tam thức bậc hai, ...*

❖ **Lớp 11**

Ở lớp học này, tham số xuất hiện trong phương trình, hệ phương trình, bất phương trình lượng giác, phương trình mũ và logarit.

❖ **Lớp 12**

Vì chương trình 12 CCGD không đưa ra một thông tin nào về tham số cũng như phương trình chứa tham số nên chúng tôi phải quay về xem xét SGK của lớp học này.

Trong SGK 12, xuất hiện một kiểu nhiệm vụ liên quan đến phương trình chứa tham số, đó là : T_{Graph} *"Biện luận số nghiệm của phương trình chứa tham số bằng đồ thị"*. Chúng tôi nhận thấy kiểu nhiệm vụ T_{Graph} được phát biểu dưới hai dạng sau :

***Dạng 1** :*

Cho hàm số f được định nghĩa bởi một biểu thức đại số f(x).

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số f.
2) Biện luận bằng đồ thị số nghiệm của phương trình g(x, m) = 0 (biết rằng phương trình g(x, m) = 0 có thể biến đổi thành phương trình f(x) = m).

***Dạng 2** :* Biện luận bằng đồ thị số nghiệm của phương trình g(x, m) = 0.

---

[1] Vì việc xây dựng kỹ thuật Cramer đi từ kỹ thuật cộng đại số sẽ dẫn đến phương trình bậc nhất một ẩn chứa tham số.

Dưới đây là kỹ thuật giải tương ứng với mỗi dạng trên :

***Kỹ thuật 1** :*

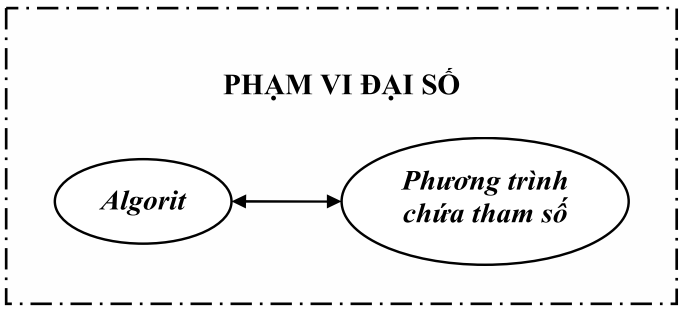
- Biến đổi phương trình đã cho g(x, m) = 0 về dạng f(x) = m với f là hàm số đã được khảo sát và vẽ đồ thị trước đó.
- Biện luận số nghiệm của phương trình f(x) = m bằng cách dựa trên số giao điểm của đường thẳng (d) : y = m và đồ thị (C) của hàm số f.

***Kỹ thuật 2** :*

- Biến đổi phương trình đã cho g(x, m) = 0 về dạng f(x) = m.
- Vẽ đồ thị (C) của hàm số y = f(x) và đường thẳng (d) : y = m trên cùng một hệ trục tọa độ.
- Biện luận bằng đồ thị số nghiệm của phương trình f(x) = m dựa trên số giao điểm của đường thẳng (d) và đồ thị (C).

Nhận xét

So với các kỹ thuật đại số để giải quyết kiểu nhiệm vụ "giải và biện luận phương trình, hệ phương trình, bất phương trình chứa tham số", hai kỹ thuật trên thực ra chỉ mới là các bước hướng dẫn chứ chưa phải là algorit. Vả lại, chúng không được nêu một cách tường minh mà là do chúng tôi mô tả lại thông qua một số lời giải của các ví dụ trong SGK (hay của các bài tập trong sách giáo viên). Điều này cho thấy : nếu như trong phạm vi đại số, mối quan hệ giữa algorit với tham số (hay giữa algorit với phương trình chứa tham số) là khá "chặt chẽ" thì trong phạm vi hình học, mối quan hệ này lại khá "rời rạc".



3.1.2. Chương trình CLHN 2000

3.1.2.1. Về algorit

Khác với chương trình CCGD, nội dung *"Một số yếu tố về phương pháp và kĩ thuật tính toán"* bị loại ra khỏi chương trình toán 10 kể từ năm học 2000 – 2001. (1)

(1) Theo [67, tr.17], đó là do : ràng buộc thời gian didactique, ràng buộc của quan hệ dinh dưỡng, ràng buộc của lựa chọn didactique, ràng buộc liên quan đến phương pháp lặp nói riêng.

Trong chương trình CLHN, *"nơi cư trú"* ngầm ẩn của đối tượng algorit cũng không có gì thay đổi so với chương trình CCGD. Nghĩa là phương trình và hàm số vẫn là vùng sống nổi bật của algorit.

3.1.2.2. Về tham số

❖ **Lớp 10**

Một trong hai quan điểm cơ bản của Bộ Giáo dục và Đào tạo trong đợt CLHN ba bộ sách toán THPT CCGD là : giảm tải, nghĩa là giảm nhẹ mức độ yêu cầu, đồng thời giản lược những nội dung quá phức tạp hoặc xét thấy không cần thiết. [(1)]

> "Việc giảm tải chủ yếu là bỏ bớt một số nội dung lý thuyết không cần thiết và giảm mức độ khó của các bài tập […]. *Về bài tập, giảm bớt các bài tập biện luận theo tham số (đặc biệt đối với phương trình và bất phương trình bậc hai)* […]." [14, tr.5]

❖ **Lớp 11**

Trong chương trình lớp 11 CLHN, người ta còn không đặt ra yêu cầu về "giải và biện luận các phương trình mũ và logarit có chứa tham số" như chương trình 11 CCGD.

❖ **Lớp 12**

Tương tự như ở giai đoạn trước, chương trình 12 không có một phát biểu nào về "phương trình chứa tham số". Thế nhưng qua xem xét SGK 12 - chương "Ứng dụng của đạo hàm", chúng tôi nhận thấy sự hiện diện trở lại của kiểu nhiệm vụ T_{Graph} "Biện luận số nghiệm của phương trình chứa tham số bằng đồ thị" (sau khi nó xuất hiện thoáng qua trong phần bài học về phương trình bậc hai ở lớp 10).

3.1.3. Chương trình thí điểm 2003

3.1.3.1. Về algorit

Tương tự như chương trình 2000, trong chương trình này, dù thuật ngữ "algorit" (hay "thuật toán") không được đề cập nhưng nói chung algorit vẫn xuất hiện ngầm ẩn qua phương pháp giải các phương trình. Một trong những lý do của việc đưa vào các phương pháp đó là :

[(1)] Trong phân môn *Hình học*, người ta cũng bắt đầu tránh đề cập đến phương trình chứa tham số. Cụ thể, không còn phương trình tham số của mặt phẳng như trước đây, tuy vẫn có cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng.

"…các vấn đề về phương trình và hệ phương trình bậc nhất và bậc hai cũng là một nội dung trọng tâm của chương trình. Chúng được trình bày chính xác hơn, đầy đủ hơn, hệ thống hơn so với lớp dưới. Trong đó, *điều đáng lưu ý và tương đối khó là vấn đề giải và biện luận phương trình. Bởi vậy, chương trình đòi hỏi những kỹ năng thành thạo trong việc giải các phương trình và hệ phương trình bậc nhất và bậc hai trên cơ sở các phương pháp cơ bản mà sách giáo khoa đã cung cấp*." (1) (M_1, tr.63)

Nói như thế có nghĩa là "các phương pháp cơ bản" hay algorit sẽ *"hỗ trợ cho việc suy luận"* đối với bài toán chứa tham số.

Ngoài ra, trong chương trình 2003, việc MTBT cùng các vấn đề về sai số, ước lượng số ngày càng được quan tâm lại là một trong những yếu tố khích lệ các hoạt động giải toán theo algorit (2). Điều này sẽ được minh chứng rõ hơn qua việc phân tích chương trình của hai khối lớp 10 và 11.

❖ **Lớp 10**

Liên quan đến hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn, khác với chương trình cũ, chương trình mới đưa thêm nội dung "giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn" bằng kỹ thuật Gao-xơ. Ngoài ra, kỹ năng sử dụng MTBT để giải hệ cũng được chú trọng hơn. Sách giáo viên toán 10 nêu rõ :

"… đối với những nơi có điều kiện, yêu cầu học sinh phải sử dụng được máy tính bỏ túi để giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn và giải phương trình bậc hai theo công thức (không giải theo chương trình cài sẵn trong máy)." (G_2, tr.52)

❖ **Lớp 11**

Ở lớp 11, xuất hiện bài đọc thêm với nhan đề *"Tìm giá trị gần đúng nghiệm của phương trình"*. Qua đó, các tác giả đưa vào một cách ngầm ẩn *phương pháp chia đôi*. Phương pháp này vừa có cơ chế kiểm chứng về mặt lý thuyết (vì nó là một áp dụng của hệ quả trong định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục), vừa có cơ chế như một algorit để tính giá trị gần đúng của nghiệm với sai số mà người ta có thể kiểm tra bằng các tri thức lý thuyết hay bằng MTBT.

---

(1) Nhắc lại rằng những dòng in đậm và in nghiêng là do chúng tôi thực hiện.

(2) Một số đặc trưng của chương trình 2003 là :

- "Máy tính bỏ túi, ngoài vai trò hỗ trợ tính toán còn được khai thác ở việc tính gần đúng, sử dụng các algorit có kết hợp máy tính bỏ túi (giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, giải phương trình bậc hai) và có hướng dẫn sử dụng các chương trình cài sẵn (phương trình, hệ phương trình, lượng giác). Công năng của máy tính bỏ túi được "tận dụng" nhiều hơn và cũng hoạt động nhiều hơn so với các chương trình trước đây." [23, tr.20]
- Cùng với việc sử dụng MTBT, vấn đề sai số, ước lượng số cũng ngày càng được chú ý. Thật vậy, trong chương trình toán 10 trước thí điểm, vấn đề này nằm ở *chương cuối* và thường bị coi nhẹ. Trong chương trình toán 10 thí điểm 2003, chúng không những được gộp vào *chương đầu* khi nói về tập số thực mà còn được thể chế yêu cầu nhắc lại ở các chương sau.

]Có thể nói, đây là một tín hiệu cho thấy các nhà soạn chương trình bắt đầu quan tâm trở lại đến "giải gần đúng phương trình", một kiểu nhiệm vụ đã từng xuất hiện trong chương trình CCGD 1990, sau đó bị loại bỏ khỏi chương trình 2000.

3.1.3.2. Về tham số

Liên quan đến tham số và bài toán chứa tham số, định hướng về xây dựng chương trình phân ban môn toán nêu rõ :

> "Đối với ban Khoa học tự nhiên việc suy luận sẽ được tăng cường hơn so với ban Khoa học xã hội và nhân văn thông qua hai biện pháp : *Một là **bổ sung một số lý thuyết hỗ trợ cho việc suy luận, chẳng hạn khái niệm định thức cấp hai để biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn theo tham số** hay định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai*, […]. Hai là […]." (G_2, tr.4)

Như thế, chính độ phức tạp của bài toán "giải và biện luận" đã tạo cơ hội cho algorit xuất hiện nhằm giúp học sinh phân chia các trường hợp riêng một cách thuận lợi hơn.

❖ **Lớp 10**

Tiếp nối tinh thần của chương trình 2000, chương trình thí điểm 2003 đặc biệt giảm nhẹ yêu cầu về vấn đề biện luận những phương trình, hệ phương trình phức tạp :

> *"Giảm bớt những yêu cầu về kĩ năng, tránh các ví dụ, bài toán phức tạp, đòi hỏi nhiều kĩ thuật nhỏ (**kĩ năng giải và biện luận phương trình, bất phương trình**)."* [56, tr.21]

(Thế nhưng, SGK thí điểm 10 lại quan tâm hơn đến kiểu nhiệm vụ T_{Graph} "Biện luận số nghiệm của phương trình chứa tham số bằng đồ thị" (T_{Graph} không chỉ xuất hiện trong phần bài học mà cả trong phần bài tập của bài phương trình bậc hai)).

❖ **Lớp 11**

Trong trình thí điểm 11, người ta đề nghị : *"Không yêu cầu giải và biện luận phương trình lượng giác chứa tham số."*

Giải thích lí do cho đề nghị trên, [46, tr.12] cho rằng :

> "*… vì đa số các bài toán loại này thường dẫn đến phần biện luận khá phức tạp.* Các vấn đề phức tạp như thế, nếu cần, nên đưa vào chương trình các chuyên đề tự chọn."

❖ **Lớp 12**

Trong lớp học này, chúng tôi cũng không tìm thấy một bình luận nào của chương trình về "phương trình chứa tham số". Nhưng từ hai bộ SGK 12 thí điểm, chúng tôi nhận thấy : kiểu nhiệm vụ "Giải và biện luận các phương trình mũ và logarit chứa tham số" đã bị loại bỏ ; còn kiểu nhiệm vụ T_{Graph} "Biện luận số nghiệm của phương trình chứa tham số bằng đồ thị" tiếp tục hiện diện qua chương "Ứng dụng của đạo hàm".

3.1.4. Kết luận

- **Về algorit**

Trong chương trình 1990, mặc dù algorit theo nghĩa trực giác được mô tả nhưng nó chỉ xuất hiện với tư cách là đối tượng của tin học ; với toán học, nó là đối tượng ngầm ẩn. Còn trong các chương trình 2000 và 2003, thuật ngữ *"algorit"* hay *"thuật toán"* không được nhắc đến. Algorit trong các giai đoạn đóng vai trò như một phương tiện dạy học cho phép hình thành và lĩnh hội vững chắc các kỹ năng, nắm bắt các phương pháp toán học.

Liên quan đến Đại số và Giải tích, *phương trình* và *hàm số* là vùng sống khá ổn định của đối tượng này. Algorit để giải các phương trình thường dựa trên những kỹ thuật biến đổi đại số.

Dưới đây là bảng tổng kết sự tiến triển của algorit qua các chương trình :

Chương trình	Vùng sống	Chức năng
CCGD 1990	- Phương trình - Hàm số - Tin học	- Mô tả phương pháp tìm nghiệm *"chính xác"* của phương trình, hệ phương trình, bất phương trình và biện luận trong trường hợp có chứa tham số - Xét tính chẵn - lẻ, đồng biến - nghịch biến của hàm số - Làm quen với máy tính và tin học - Tính giới hạn của dãy số, hàm số - Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm - Khảo sát hàm số - Tính tích phân, nguyên hàm
CLHN 2000	- Hàm số - Phương trình	- Giống chương trình CCGD 1990 (nhưng không có mục *"Làm quen với máy tính và tin học"*)
Thí điểm 2003	- Hàm số - Phương trình	- Giống chương trình CLHN 2000 - Giải hệ (3, 3) - Tìm nghiệm gần đúng của phương trình - Sử dụng MTBT

Như vậy, mặc dù hiện tại algorit vẫn chưa phải là đối tượng toán học được giảng dạy nhưng nhìn chung, chương trình toán ở trường THPT có khả năng to lớn để hình thành, nghiên cứu và áp dụng algorit thông qua các chủ đề toán học như được đề cập đến ở trên. Đặc biệt, trong chương trình thí điểm phân ban 2003, MTBT ngày càng trở nên thông dụng cũng góp phần cổ vũ những hoạt động có tính algorit. Điều này dường như mở ra một tương lai đối với việc hiện đại hóa chương trình giảng dạy toán ở trường phổ thông là : *tạo mối liên hệ chặt chẽ hơn giữa algorit, phương pháp tính (mà một bộ phận của nó là giải gần đúng phương trình) và máy tính điện tử (máy vi tính hoặc MTBT)*.

- **Về tham số**

Bảng dưới đây tóm tắt sự tiến triển của đối tượng tham số qua các chương trình.

<table>
<tr><th>Chương trình</th><th>Lớp</th><th>Mục đích của việc đưa vào tham số</th><th>Vùng sống</th><th>Kiểu nhiệm vụ chủ yếu</th></tr>
<tr><td rowspan="3">CCGD 1990</td><td>10</td><td rowspan="7">Rèn luyện cho học sinh tư duy logic và tổ hợp.</td><td>- Phương trình : bậc nhất một ẩn, hai ẩn, trùng phương
- Bất phương trình bậc nhất một ẩn
- Hệ phương trình : bậc nhất hai ẩn, bậc hai hai ẩn</td><td rowspan="7">- Giải và biện luận phương trình (hệ phương trình, bất phương trình)

- T_{Graph} “Biện luận số nghiệm của phương trình chứa tham số bằng đồ thị”

- Tìm điều kiện của tham số thỏa mãn điều kiện nào đó

- Biện luận theo m số cực trị của hàm số</td></tr>
<tr><td>11</td><td>- Phương trình : lượng giác, mũ, logarit
- Bất phương trình lượng giác
- Hệ phương trình lượng giác</td></tr>
<tr><td>12</td><td>- Hàm số
- Phương trình</td></tr>
<tr><td rowspan="3">CLHN 2000</td><td>10</td><td>- Phương trình : bậc nhất một ẩn, hai ẩn
- Bất phương trình bậc nhất một ẩn
- Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn</td></tr>
<tr><td>11</td><td>- Phương trình lượng giác
- Bất phương trình lượng giác</td></tr>
<tr><td>12</td><td>- Hàm số
- Phương trình</td></tr>
<tr><td>Thí điểm 2003</td><td>10</td><td>- Phương trình : bậc nhất một ẩn, hai ẩn
- Bất phương trình bậc nhất một ẩn</td></tr>
</table>

			- Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn	
	11			
	12		- Hàm số - Phương trình	

Như vậy, trong khi chương trình CCGD *rất chú trọng* đến việc giải và biện luận phương trình chứa tham số thì vấn đề này ngày càng được *giảm nhẹ* ở chương trình CLHN và đặc biệt là ở chương trình thí điểm phân ban 2003.

Qua các giai đoạn khác nhau, tham số thường gắn liền với phương trình và hàm số. Trong đó, *vùng sống nổi bật nhất của tham số là các chủ đề về phương trình ở Đại số 10.* Ở lớp 10, chính việc giới thiệu một loạt chủ đề nối tiếp nhau như phương trình bậc nhất - bậc hai một ẩn, hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, bất phương trình bậc nhất một ẩn, … đã tạo nên một hệ sinh thái phong phú cho đối tượng tham số.

Vả lại, phương trình chứa tham số được xét trong cả hai phạm vi đại số và hình học, thể hiện chủ yếu qua kiểu nhiệm vụ "Giải và biện luận phương trình" hay kiểu nhiệm vụ T_{Graph} "Biện luận số nghiệm của phương trình bằng đồ thị". Ở lớp 10, "Giải và biện luận phương trình" tập trung dày đặc, còn T_{Graph} chỉ xuất hiện thoáng qua. Lên lớp 12, T_{Graph} được đề nghị nhiều hơn nhưng nhìn chung nó chỉ là một trong những ứng dụng của đạo hàm và hàm số nên mật độ xuất hiện cũng khá thưa thớt. Tất cả điều này nói lên rằng để giải quyết các phương trình chứa tham số, trong khi kỹ thuật đại số luôn thể hiện rõ nét thì kỹ thuật hình học (đồ thị) mặc dù đang dần được quan tâm nhưng nhìn chung vẫn còn rất mờ nhạt. (1)

---

(1) Nhân nói về *đồ thị* và *phương trình*, chúng tôi cũng xin nêu một vài ghi nhận sau :

- ***Giai đoạn trước thí điểm 2003***

"… đồ thị chỉ đóng vai trò minh họa và giải thích những khái niệm hoặc tính chất toán học, hoặc nhìn lại những kết quả đạt được qua việc nghiên cứu lý thuyết. *Vấn đề nghiên cứu phương trình nhờ vào hàm số luôn chiếm vị trí yếu ớt trong chương trình cũng như trong SGK. Phương trình gần như chỉ được giải quyết trong phạm vi đại số, nghĩa là bởi kỹ thuật đại số.*" [67]

- ***Giai đoạn thí điểm 2003***

So với các SGK trước, SGK thí điểm chú trọng hơn đến việc rèn luyện cho học sinh khả năng *đọc* và *vẽ đồ thị*. Ngoài cách cho hàm số bằng biểu thức, bảng, biểu đồ, còn có hàm số cho *bằng đồ thị*. Hơn nữa, các kiểu nhiệm vụ như *dựa vào đồ thị* để : lập bảng biến thiên của hàm số ; tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số ; tìm các giá trị của hàm số dựa vào các giá trị của biến số ; tìm tập hợp các giá trị của biến số thỏa điều kiện nào đó của hàm số ; xác định tọa độ giao điểm của đường thẳng và parabol, hay như kiểu nhiệm vụ : tìm đồ thị nhận được từ một đồ thị được tịnh tiến, … thường xuyên xuất hiện.

Nói tóm lại, đối tượng tham số ở trường THPT sống trong những nơi rất đặc biệt mà tại đó gắn liền với algorit : các chủ đề phương trình - hệ phương trình - bất phương trình chứa tham số. Việc thực hành giải và biện luận phương trình chứa tham số theo một algorit sẽ góp phần hình thành ở học sinh khả năng suy luận có lí, hợp logic. Ngược lại, sự hiện diện của tham số trong chương trình đã phần nào khích lệ những hoạt động có tính algorit. Hơn nữa, các algorit để giải các phương trình chứa tham số chủ yếu bao gồm các phép biến đổi đại số.

Mặt khác, *trong khi algorit ngày càng được chú trọng thì các bài toán chứa tham số ngày càng thu hẹp đất sống.* Theo chúng tôi, điều này cũng dễ hiểu vì tùy theo mục tiêu đào tạo của từng giai đoạn mà vấn đề này hay vấn đề kia được quan tâm nhiều hơn. Ngày nay, việc nghiên cứu algorit sẽ là nền tảng rất tốt để tiếp cận dần với Tin học – môn học đã và đang thâm nhập mạnh mẽ vào mọi lĩnh vực hoạt động của con người. Nói như vậy không có nghĩa là bài toán chứa tham số không đóng vai trò gì. Thế nhưng, với thời lượng dành cho việc dạy học toán ở trường THPT không tăng lên mà có phần eo hẹp đi thì mọi vấn đề không thể đều được ưu tiên ngang nhau. Mặt khác, như đã biết, để rèn luyện cho học sinh "tư duy logic và tổ hợp" thì giải và biện luận phương trình chứa tham số không phải là cách duy nhất vì hầu hết các nội dung toán học ở trường phổ thông đều có thể đảm nhận nhiệm vụ này.

Để hiểu sâu sắc hơn mối quan hệ thể chế với các đối tượng algorit và tham số, tiếp theo chúng tôi sẽ thực hiện một nghiên cứu trong trường hợp "Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn". Nghĩa là chúng tôi sẽ đi tìm câu trả lời cho ba nhóm câu hỏi còn lại : Q_4, Q_5 và Q_6.

3.2. QUAN HỆ THỂ CHẾ VỚI CÁC ĐỐI TƯỢNG ALGORIT VÀ THAM SỐ. TRƯỜNG HỢP "HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN"

Trong nhà trường phổ thông [(1)], hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn được giới thiệu ở hai cấp độ :

- Cấp độ 1 : giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn *không chứa tham số* (gọi tắt là hệ (2, 2)), được trình bày chủ yếu ở lớp 9.
- Cấp độ 2 : giải và biện luận hệ (2, 2) *có chứa tham số* ; giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn *không chứa tham số* (gọi tắt là hệ (3, 3)), được trình bày ở lớp 10.

---

(1) Lớp 9 hiện hành và lớp 10 thí điểm 2003.

Để nghiên cứu mối quan hệ thể chế với algorit và tham số, dĩ nhiên chúng tôi sẽ phải quan tâm đến cả hai cấp độ này.

Ở đây, chúng tôi sẽ phân tích SGK toán 9 hiện hành và hai bộ SGK Đại số lớp 10 viết theo chương trình thí điểm 2003 ban KHTN. Để cho tiện, chúng tôi dùng kí hiệu M_0 để chỉ SGK toán 9 hiện hành, M_1 để chỉ SGK Đại số 10 do nhóm tác giả Đoàn Quỳnh biên soạn và M_2 để chỉ Đại số 10 do nhóm tác giả Trần Văn Hạo biên soạn.

Đi kèm với mỗi SGK là sách giáo viên. Trong nhiều trường hợp, để hiểu rõ ý đồ của tác giả, chúng tôi sẽ phải tham khảo các sách giáo viên này mà chúng tôi lần lượt kí hiệu là G_0, G_1 và G_2**.**

3.2.1. Hệ (2, 2) trong sách giáo khoa toán 9 hiện hành

Trong M_0, chương III "Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn" gồm các nội dung :

§1 - Phương trình bậc nhất hai ẩn

§2 - Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

§3 - Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế

§4 - Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số

§5 và §6 - Giải toán bằng cách lập hệ phương trình

Mục tiêu chủ yếu của chương này là :

> "Cung cấp *phương pháp* và *rèn luyện kỹ năng* giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn cùng các ứng dụng trong việc giải toán bằng cách lập hệ phương trình." (G_0, tr.3)

3.2.1.1. Các TCTH liên quan đến hệ (2, 2) không chứa tham số

Qua phân tích SGK toán 9, chúng tôi nhận thấy có hai kiểu nhiệm vụ liên quan đến hệ phương trình (2, 2) không chứa tham số :

$t_R^{(2,\,2)}$: *Giải hệ phương trình (2, 2)* [(1)]

T_d : *Đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình (2, 2) và giải thích rõ lí do*

Tương ứng với kiểu nhiệm vụ $t_R^{(2,\,2)}$, có 3 kỹ thuật giải, đó là : *kỹ thuật hình học (đồ thị)* và các *kỹ thuật đại số* (kỹ thuật thế hoặc kỹ thuật cộng đại số).

Bằng cách xem xét hệ có dạng tổng quát : (I) $\begin{cases} ax + by = c & (1) \quad (d) \\ a'x + b'y = c' & (2) \quad (d') \end{cases}$ (a, b, c , a', b', c' khác 0), chúng tôi sẽ phân tích các TCTH gắn với hai kiểu nhiệm vụ trên ; từ đó,

---

[(1)] Chúng tôi sử dụng kí hiệu $t_R^{(2,\,2)}$ để *nhất quán* với việc gọi tên *nhiệm vụ* ở phần phân tích các sách M_1 và M_2 về sau.

chúng tôi sẽ làm rõ những điều kiện và ràng buộc của thể chế đối với các kỹ thuật giải và xác định một số qui tắc của hợp đồng didactic.

Để thuận lợi cho việc trình bày, chúng tôi kí hiệu :

- τ_g, τ_s, τ_c lần lượt là các kỹ thuật : hình học, thế và cộng đại số.
- τ_d là kỹ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ T_d.

a) TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ $t_R^{(2,\,2)}$ *"Giải hệ phương trình (2, 2)"*

Như đã nói, có 3 kỹ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ $t_R^{(2,\,2)}$. Do vậy, việc phân tích TCTH gắn với $t_R^{(2,\,2)}$ sẽ quy về việc phân tích lần lượt từng TCTH gắn với mỗi kỹ thuật.

❖ TCTH gắn với kỹ thuật hình học τ_g

Vì τ_g không được nêu tường minh trong M_0 nên để mô tả lại nó, chúng tôi sẽ phải xem xét lời giải của các ví dụ và bài tập.

Kỹ thuật τ_g :

- Tìm phương trình của hai đường thẳng bằng cách tính y từ hai phương trình của hệ.
- Vẽ hai đường thẳng trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Dựa vào đồ thị, xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng :
  + Nếu hai đường thẳng cắt nhau :
    - Đọc tọa độ giao điểm của chúng ;
    - Để đảm bảo tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ, thử lại bằng các phép tính.
  + Nếu hai đường thẳng trùng nhau thì hệ (I) có vô số nghiệm, tập nghiệm của hệ được biểu diễn bởi một trong hai phương trình đường thẳng.
  + Nếu hai đường thẳng song song thì hệ (I) vô nghiệm (lưu ý : để chắc chắn hai đường thẳng song song, sử dụng hệ số góc và tung độ gốc của chúng).

Nhận xét – đánh giá τ_g

- τ_g là kỹ thuật thuần túy hình học trong trường hợp hai đường thẳng cắt nhau.
- Rất khó dùng τ_g để có thể tìm chính xác tọa độ giao điểm của hai đường thẳng nếu đó không phải là tọa độ nguyên hoặc hữu tỷ đặc biệt (thí dụ : -1,5 ; -0,5 ; 0,5 ; 1,5 ; …).
- τ_g *không là vết của kỹ thuật nào ở đại học.* Điều này cũng thật dễ hiểu vì các hệ phương trình tuyến tính ở bậc đại học thường có số ẩn và số phương trình từ 3 đến

5 nên không tồn tại kỹ thuật cho phép xác định được nghiệm trong không gian có số chiều lớn hơn 2.

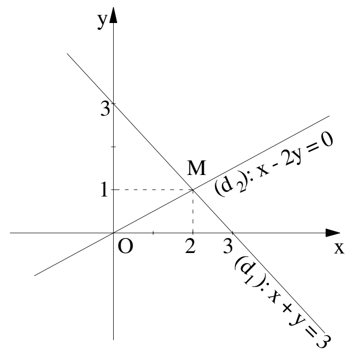
- *Một ràng buộc của thể chế dạy học đối với τ_g : Sau khi giải hệ bằng kỹ thuật hình học τ_g, phải thử lại nghiệm.*

Ràng buộc này được nhấn mạnh qua lưu ý :

> "Khi minh họa tập nghiệm của hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, ta cũng có thể tìm được nghiệm của hệ phương trình bằng cách xác định tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (biểu diễn hai tập nghiệm của hai phương trình thuộc hệ). Tuy nhiên, kết quả thu được có thể không chính xác. *Bởi vậy, khi muốn khẳng định chính xác một cặp số là nghiệm của hệ phương trình, ta nên thử lại bằng tính toán*." (G_0, tr.7)

Và nó được cụ thể hóa, chẳng hạn qua ví dụ 1 (M_0, tr.9 – tr.10) như sau :

> Xét hệ phương trình
>
> $$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$
>
> Gọi hai phương trình xác định bởi hai phương trình đã cho trong hệ là (d_1) và (d_2).
>
> Vẽ (d_1) và (d_2) trong cùng một hệ tọa độ, ta thấy chúng cắt nhau tại một điểm duy nhất M. Ta xác định được tọa độ của điểm M là (2 ; 1). (Thử lại, ta thấy (2 ; 1) là một nghiệm của hệ.)



> Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (x ; y) = (2 ; 1).

Như vậy, theo các tác giả sách giáo viên và SGK, việc giải quyết kiểu nhiệm vụ $t_R^{(2,\,2)}$ bằng đồ thị chỉ là *công cụ trực giác* và *cần thiết phải được bổ sung bằng các phép tính*.

Ngoài ra, lưu ý trên còn cho thấy :

- Vai trò chính của τ_g là để *"minh họa hình học tập nghiệm"* chứ không phải để *"giải hệ"* (thể hiện qua câu thứ nhất của lưu ý).
- τ_g chỉ được khuyến khích vận dụng để tìm *"nghiệm đúng"* chứ chưa được khuyến khích để tính *"giá trị gần đúng của nghiệm"* (thể hiện qua hai câu còn lại của lưu ý). Chẳng hạn, nếu như nghiệm của hệ phương trình là số vô tỉ thì kết quả thu được bằng đồ thị chỉ là gần đúng. Trong trường hợp ấy, dù có thử lại bằng bao nhiêu phép tính cũng không thể làm xuất hiện dấu *" = "* ở mỗi phương trình như sách giáo viên mong muốn và do đó, bước cuối cùng *"thử nghiệm"* sẽ chẳng có ý nghĩa gì cả.

Công nghệ θ_g của kỹ thuật τ_g

Phát biểu dưới đây đóng vai trò như công nghệ giải thích cho τ_g :

"Trên mặt phẳng tọa độ, nếu gọi (d) là đường thẳng ax + by = c và (d') là đường thẳng $a'x + b'y = c'$ thì điểm chung (nếu có) của hai đường thẳng ấy có tọa độ là nghiệm chung của hai phương trình của (I). *Vậy, tập nghiệm của hệ phương trình (I) được biểu diễn bởi tập hợp các điểm chung của (d) và (d').*" (M_0, tr.9)

Đặc trưng của các hệ phương trình được gắn với kỹ thuật τ_g

- **Đặc trưng 1** : Các hệ số của hệ là những *số nguyên không quá lớn*.
- **Đặc trưng 2** : Nghiệm của hệ bao giờ cũng *duy nhất* và là *nghiệm nguyên (nghiệm đúng)*.

Thí dụ :

Bài 7 – câu b) (M_0, tr.12)

Cho hai phương trình 2x + y = 4 và 3x + 2y = 5.

a) Tìm nghiệm tổng quát của mỗi phương trình trên.

b) <u>Vẽ các đường thẳng biểu diễn tập nghiệm</u> của hai phương trình trong cùng một hệ tọa độ, rồi xác định nghiệm chung của chúng.

Đáp số : câu b), nghiệm (3 ; -2).

Bài 8 (M_0, tr.12)

Cho hệ phương trình sau :

a) $\begin{cases} x = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2y = 4 \end{cases}$

Trước hết, hãy đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình trên (giải thích rõ lí do). Sau đó, tìm tập nghiệm của các hệ đã cho <u>bằng cách vẽ hình</u>.

Đáp số : a) (2 ; 1) ; b) (- 4 ; 2).

❖ **TCTH gắn với kỹ thuật thế τ_s**

Kỹ thuật τ_s

(Kỹ thuật này chính là phương pháp thế)

- Từ một phương trình của hệ đã cho (coi là phương trình thứ nhất), ta biểu diễn một ẩn theo ẩn kia rồi thế vào *phương trình thứ hai* để được một phương trình mới (chỉ còn một ẩn).
- Dùng phương trình mới ấy để *thay thế cho phương trình thứ hai* trong hệ (phương trình thứ nhất cũng thường được thay thế bởi hệ thức biểu diễn một ẩn theo ẩn kia có được ở bước 1).

– Giải hệ phương trình một ẩn vừa có, rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Có thể diễn đạt ngắn gọn lại các bước trên như sau :

– Biểu diễn x theo y (hay y theo x) từ một trong hai phương trình.
– Thế kết quả đó vào phương trình thứ hai.
– Giải phương trình thứ hai theo y (hay x).
– Tính x theo y (hay y theo x).
– Kết luận nghiệm của hệ đã cho.

Nhận xét – đánh giá về kỹ thuật τ_s

- τ_s có thể xem như một algorit để giải quyết kiểu nhiệm vụ $t_R^{(2,\,2)}$. Algorit này được hiểu theo nghĩa chặt vì nó đảm bảo các đặc trưng cơ bản của algorit là tính kết thúc, tính xác định, tính phổ dụng, tính hiệu quả, …

- Khi sử dụng τ_s, [22, tr.83] chỉ dẫn :

  "… *cần xét xem nên rút ẩn nào theo ẩn còn lại*. Trong trường hợp có ẩn có hệ số bằng 1 hay (-1) sẽ rút ẩn đó, nếu không xảy ra trường hợp này thì thường ẩn được rút có hệ số nhỏ hơn hệ số ẩn còn lại (về giá trị tuyệt đối)."

Còn M_0 (tr.14) thì lưu ý :

> "Nếu trong quá trình giải hệ phương trình bằng phương pháp thế, ta thấy xuất hiện *phương trình có các hệ số của cả hai ẩn đều bằng 0 thì hệ phương trình đã cho có thể có vô số nghiệm hoặc vô nghiệm.*"

Những chi tiết trên đây cho thấy cần có sự linh hoạt khi sử dụng τ_s.

- τ_s *không là vết của kỹ thuật nào ở đại học.* Có thể thấy, nếu số ẩn từ 4 trở lên thì việc khử ẩn bằng τ_s sẽ trở nên khá rườm rà.

Công nghệ θ_s giải thích kỹ thuật τ_s

Đó chính là định lý sau về phép biến đổi tương đương hệ phương trình.

> Nếu từ một phương trình của hệ đã cho ta biểu thị một ẩn số theo ẩn số kia rồi thế vào phương trình thứ hai của hệ được một phương trình mới có một ẩn số thì hệ phương trình lập bởi phương trình mới này với phương trình thứ nhất của hệ là tương đương với hệ đã cho.

Đặc trưng của các hệ phương trình gắn với kỹ thuật τ_s

- *Hệ số của một ẩn trong phương trình bằng 1 hay –1.* Nói cách khác, SGK luôn tạo thuận lợi để sau khi rút ẩn này theo ẩn kia, có thể thế vào phương trình còn lại dễ dàng. Chẳng hạn :

  Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế :

Bài 16 (M_0, tr.16)

a) $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 5x + 2y = 23 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x - y = -8 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3} \\ x + y - 10 = 0 \end{cases}$

Bài 17 (M_0, tr.16)

a) $\begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 \\ x + y\sqrt{3} = \sqrt{2} \end{cases}$; b) $\begin{cases} x - 2\sqrt{2}y = \sqrt{5} \\ x\sqrt{2} + y = 1 - \sqrt{10} \end{cases}$; c) $\begin{cases} \left(\sqrt{2-1}\right)x - y = \sqrt{2} \\ x + \left(\sqrt{2+1}\right)y = 1 \end{cases}$

- Có đến 18/19 hệ trong §3 đều có nghiệm *duy nhất*.

❖ TCTH gắn với kỹ thuật cộng đại số τ_c

Kỹ thuật τ_c

(Đây chính là phương pháp cộng đại số)

- Nhân hai vế của mỗi phương trình với một số thích hợp (nếu cần) sao cho các hệ số của một ẩn nào đó trong hai phương trình của hệ là bằng nhau hoặc đối nhau.
- Cộng trừ từng vế hai phương trình của hệ phương trình vừa nhận để được một phương trình mới.
- Dùng phương trình mới ấy *thay thế cho một trong hai phương trình của hệ* (và giữ nguyên phương trình kia).
- Giải phương trình một ẩn vừa thu được rồi suy ra nghiệm của hệ đã cho.

Nhận xét – đánh giá τ_c

- τ_c chính là *algorit* hiểu theo *nghĩa rộng* vì với chỉ dẫn ở bước thứ nhất, có nhiều cách chọn số thực để nhân vào hai vế của phương trình, tức chưa có sự thống nhất trong hành động cần thực hiện ; nói cách khác, bước này vi phạm tính xác định của một algorit.
- τ_c *chính là vết của kỹ thuật Gauss ở đại học ứng với số phương trình và số ẩn bằng 2.*

Công nghệ θ_c của kỹ thuật τ_c

Đó chính là các định lý sau về phép biến đổi tương đương hệ phương trình.

- Nếu nhân hai vế của một phương trình của hệ với một số $k \neq 0$ thì hệ phương trình mới tương đương với hệ đã cho.
- Nếu cộng hay trừ từng vế hai phương trình của hệ đã cho được một phương trình mới thì hệ phương trình lập bởi phương trình này với một trong hai phương trình cũ là tương đương với hệ đã cho.

Đặc trưng của các hệ phương trình gắn với kỹ thuật τ_c : Có đến 19/20 hệ trong §4 có nghiệm *duy nhất*.

b) **TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ T_d** ***"Đoán nhận số nghiệm của hệ (2, 2) và giải thích rõ lý do"***

Trước hết, chúng tôi xin trích dẫn một số bài tập đặc trưng cho kiểu nhiệm vụ T_d :

Bài 4 (M_0, tr.11)

Không cần vẽ hình, hãy cho biết số nghiệm của mỗi phương trình sau đây và giải thích vì sao :

a) $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ y = 3x - 1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 3 \\ y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 2y = -3x \\ 3y = 2x \end{cases}$; d) $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - \dfrac{1}{3}y = 1 \end{cases}$

Bài 9 (M_0, tr.12)

Đoán nhận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau, giải thích vì sao :

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -6x + 4y = 0 \end{cases}$

Khi đó :

Kỹ thuật τ_d dưới đây cho phép giải quyết kiểu nhiệm vụ T_d

– Biến đổi (I) thành $\begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b} & (1) \quad (d) \\ y = -\dfrac{a'}{b'}x + \dfrac{c'}{d'} & (2) \quad (d') \end{cases}$

– Xét các trường hợp :

+ Hệ (I) có vô số nghiệm nếu (d) và (d') có cùng hệ số góc và tung độ gốc, nghĩa là: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ và $\dfrac{c}{d} = \dfrac{c'}{d'}$.

+ Hệ (I) vô nghiệm nếu (d) và (d') có cùng hệ số góc và khác tung độ gốc, nghĩa là: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{a'}{b'}$ và $\dfrac{c}{d} \neq \dfrac{c'}{d'}$.

+ Hệ (I) có một nghiệm duy nhất nếu (d) và (d') có hệ số góc khác nhau, nghĩa là: $\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{a'}{b'}$.

Nhận xét – đánh giá về kỹ thuật τ_d

- τ_d hoàn toàn bao gồm các thao tác biến đổi đại số : trước hết là biến đổi (I) thành hệ hai phương trình đường thẳng với hệ số góc và tung độ gốc được hiển thị một cách rõ ràng ; kế đến là so sánh các hệ số góc và tung độ gốc để kết luận về số nghiệm của hệ. Như vậy, *thực chất* τ_d *không phải là một kỹ thuật hình học* mặc dù bước thứ hai của τ_d liên quan đến việc xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.

- τ_d không cho phép tìm nghiệm nhưng *lại cho phép xác định nhanh chóng số nghiệm.*

Công nghệ θ_d của kỹ thuật τ_d

Chúng tôi nhận thấy công nghệ θ_d của kỹ thuật τ_d nằm ở lời giải thích sau :

> "… có thể đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn (I) *bằng cách xét vị trí tương đối của hai đường thẳng* $ax + by = c$ và $a'x + b'y = c'$." (M_0, tr.11)

c) Đánh giá chung về các kỹ thuật (gắn với $t_R^{(2,\ 2)}$)

Ngoài một số nhận xét – đánh giá đối với riêng từng kỹ thuật (tương ứng với kiểu nhiệm vụ $t_R^{(2,\ 2)}$) như đã nêu, trong phần này, chúng tôi chủ yếu nhìn nhận lại một cách sâu sắc hơn các kỹ thuật này dựa trên quan điểm so sánh.

❖ **Kỹ thuật thế τ_s và kỹ thuật cộng đại số τ_c**

Điểm chung của của τ_s cũng như của τ_c là *khử ẩn*. Tuy nhiên, τ_s nhanh chóng giúp ta đạt được mục đích này hơn τ_c.

Thật vậy, như đã biết, điểm quan trọng trong kỹ thuật τ_s là phải nắm được quy tắc thế, và một khi đã nắm được quy tắc thế thì ta có ngay hệ phương trình, trong đó một phương trình chỉ còn một ẩn, tức là ta nhanh chóng đạt được mục đích khử ẩn.

Trong khi đó, đối với kỹ thuật cộng đại số τ_c, để đạt được mục đích khử ẩn, ta phải sử dụng quy tắc cộng đại số kết hợp với việc biến đổi các phương trình của hệ một cách hợp lí. Theo các nhà soạn SGK, đây là điều không đơn giản. Cho nên, đối với τ_c, phương pháp tiếp cận được sử dụng trong SGK là *"dẫn dắt từ trường hợp đơn giản (các hệ số của cùng một ẩn trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau) đến trường hợp phức tạp, đòi hỏi phải biến đổi phương trình để đưa về trường hợp thứ nhất"*. (G_0, tr.15)

Tóm lại, từ §3 (Giải hệ phương trình bằng phương pháp thế) sang §4 (Giải hệ phương trình bằng phương pháp cộng đại số), *"kĩ năng giải hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bắt đầu nâng dần lên"* (G_0, tr.15).

❖ Kỹ thuật hình học τ_g và các kỹ thuật đại số τ_s, τ_c

Bảng dưới đây cho thấy ưu – khuyết điểm của kỹ thuật hình học, kỹ thuật thế và kỹ thuật cộng đại số để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn :

Kỹ thuật	**Ưu điểm**	**Khuyết điểm**
τ_g	Có thể *"nhìn thấy"* nghiệm.	Nghiệm không chính xác khi nó không phải là nghiệm nguyên.
τ_s	- Tìm nghiệm chính xác. - Dễ sử dụng khi có hệ số của một ẩn trong phương trình bằng 1 hay -1.	Không thể nhìn thấy nghiệm một cách nhanh chóng.
τ_c	- Tìm nghiệm chính xác. - Dễ sử dụng cho dù hệ có hệ số là số thập phân hay phân số.	Không thể nhìn thấy nghiệm một cách nhanh chóng.

Như vậy, mỗi kỹ thuật đều có *ưu – khuyết điểm* riêng. Ưu điểm của kỹ thuật hình học có thể là khuyết điểm của các kỹ thuật đại số và ngược lại.

Vậy, thể chế dạy học Việt nam đã có sự lựa chọn như thế nào giữa các kỹ thuật này?

Quan điểm chỉ đạo xây dựng chương trình môn toán THCS nêu rõ :

> "Yêu cầu chủ yếu là học sinh nắm vững cách giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng *phương pháp cộng* và *phương pháp thế.*" (tr.92)

Như thế, để giải hệ (2, 2), người ta không coi trọng kỹ thuật hình học τ_g. Điều này càng được minh chứng qua hai sự kiện sau :

- *Thứ nhất* là qua số lượng bài tập [1] tương ứng với mỗi kỹ thuật (đây là những bài tập mà M_0 chỉ định *đích danh* kỹ thuật cần phải sử dụng) :

Kỹ thuật	τ_g	τ_s	τ_c
Số lượng bài tập	2	8	8
Tỉ lệ	$\approx 11\%$	$\approx 44\%$	$\approx 44\%$

- *Thứ hai* là qua việc *kỹ thuật hình học* τ_g chỉ xuất hiện sau phần lý thuyết có nội dung liên quan, còn với các nội dung khác như "giải bài toán bằng cách lập hệ

[1] Mỗi bài tập bao gồm nhiều hệ phương trình.

phương trình”, kỹ thuật này *hoàn toàn vắng bóng*. Nói rõ hơn, trong bài “Giải toán bằng cách lập hệ phương trình”, đối với phần lý thuyết, tất cả các ví dụ đưa ra đều được giải quyết bằng *hai kỹ thuật đại số* (τ_s hoặc τ_c). Riêng phần bài tập, mặc dù sách giáo viên chỉ cho biết đáp số nhưng với một số hệ được thiết lập có dạng như :

Bài 44 (M_0, tr.27) $\begin{cases} x + y = 124 \\ \frac{10}{89}x + \frac{1}{7}y = 15 \end{cases}$

Bài 46 (M_0, tr.27) $\begin{cases} x + y = 720 \\ \frac{115}{100}x + \frac{112}{100}y = 819 \end{cases}$

thì làm thế nào học sinh có thể vẽ chính xác những đường thẳng tương ứng để xác định giao điểm bởi qui tắc chia khoảng trên các trục tọa độ?

Tóm lại, vai trò chủ yếu của τ_g là để *minh họa hình học tập nghiệm* (sau khi giải hệ bằng các kỹ thuật đại số τ_s, τ_c) chứ không phải để giải hệ. Khi đó, nhằm hướng vào việc sử dụng τ_g, đề toán thường phải kèm theo cụm từ *“bằng minh họa hình học”*. Cụ thể là với hệ (IV) $\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 8x + 2y = 1 \end{cases}$ (hoạt động 3, tr.15), M_0 đề nghị : *“Bằng minh họa hình học và bằng phương pháp thế, chứng tỏ rằng hệ (IV) vô nghiệm”.*

Từ đây, chúng tôi tự hỏi : liệu khi thiếu vắng cụm từ này, học sinh đã có kỹ năng phối hợp cả hai kỹ thuật (hình học và đại số) để giải hệ phương trình hay chưa, hay họ luôn tìm cách giải hệ bằng các *kỹ thuật đại số*?

d) Sự hỗ trợ của kỹ thuật τ_d đối với các kỹ thuật τ_g, τ_s và τ_c

Sự hỗ trợ này thể hiện trước hết qua khẳng định sau đây của G_0 :

> “*Không cần **tính nghiệm** hay **vẽ đồ thị*** [(1)], ta cũng có thể biết được một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước có một nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm […]. Muốn vậy, ta biểu diễn tập nghiệm của mỗi phương trình trong hệ bởi một đường thẳng rồi xét xem hai thẳng đó cắt nhau, song song với nhau hay trùng nhau (nói chung, *ta có thể nhận biết được điều đó thông qua hệ số góc và tung độ gốc của các đường thẳng được xét*).” (G_0, tr.7)

❖ Sự hỗ trợ của τ_d đối với τ_g

Kỹ thuật τ_d sẽ hỗ trợ cho τ_g, đặc biệt trong trường hợp hệ *vô nghiệm*.

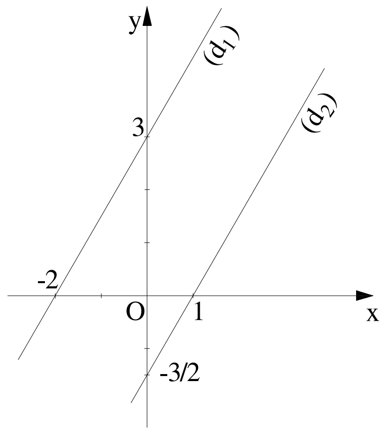
[(1)] Có nghĩa là không cần giải hệ bằng các kỹ thuật *đại số* hay bằng kỹ thuật *hình học.*

Chúng ta xét dưới đây một ví dụ được trình bày trong M_0 :

Ví dụ 2 (M_0, tr.10)

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x - 2y = -6 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$



Do 3x – 2y = – 6 ⇔ y = $\frac{3}{2}$x + 3 nên tập nghiệm của phương trình thứ nhất được biểu diễn bởi đường thẳng (d_1) : y = $\frac{3}{2}$x + 3.

Tương tự, tập nghiệm của phương trình thứ hai được biểu diễn bởi phương trình đường thẳng (d_2) : y = $\frac{3}{2}$x – $\frac{3}{2}$.

Hai đường thẳng (d_1) và (d_2) có tung độ gốc khác nhau và có cùng hệ số góc bằng $\frac{3}{2}$ nên song song với nhau. Chúng không có điểm chung. Điều đó chứng tỏ hệ đã cho vô nghiệm.

❖ Sự hỗ trợ của τ_d đối với τ_s và τ_c

Dù sử dụng kỹ thuật thế τ_s hay kỹ thuật cộng đại số τ_c thì kỹ thuật τ_d của kiểu nhiệm vụ T_d *"Đoán nhận số nghiệm…"* vẫn tỏ ra rất hữu hiệu khi cho phép đưa ra kết luận nhanh chóng trong trường hợp hệ vô nghiệm hay vô số nghiệm. Chính bởi ưu điểm đó mà một trong những yêu cầu của thể chế đặt ra đối với giáo viên cũng như học sinh khi dạy – học các kỹ thuật đại số là :

- Đối với giáo viên :

  "Nói chung, trước khi giải hệ phương trình, nên tạo cho học sinh *thói quen nhận xét về số nghiệm của hệ* (có nghiệm duy nhất, vô nghiệm hay vô số nghiệm). Nếu không chắc rằng hệ vô nghiệm hay vô số nghiệm thì giải bằng phương pháp cộng đại số (hay phương pháp thế). *Nếu chắc chắn rằng hệ vô nghiệm hay có vô số nghiệm thì nên lập luận để rút ra tập nghiệm mà không cần dùng phương pháp cộng đại số hay phương pháp thế.*" (G_0, tr.15)

- Đối với học sinh :

  "Trước khi giải hệ phương trình nói chung, học sinh nên có *thói quen đoán nhận về số nghiệm* của hệ phương trình sẽ giải để sơ bộ biết trước rằng hệ phương trình sẽ có nghiệm duy nhất hay vô nghiệm hay vô số nghiệm." (G_0, tr.15)

Tóm lại, kỹ thuật τ_d được sử dụng như một biện pháp *bổ sung đắc lực* cho các kỹ thuật đại số trong khâu "đoán nhận số nghiệm".

3.2.1.2. Tham số trong hệ phương trình (2, 2)

Nếu như ở Tiểu học, tham số chỉ ẩn sau các chữ trong biểu thức chứa chữ [1] thì ở cấp THCS, vùng sống của nó được mở rộng hơn rất nhiều. Trong phạm vi Số học và Đại số ở cấp 2, tham số được làm quen một cách ngầm ẩn không chỉ thông qua việc nghiên cứu *biểu thức đại số* (trường hợp riêng của biểu thức chứa chữ) mà còn qua việc nghiên cứu *phương trình* và *hàm số*.

Với hệ (2, 2) ở lớp 9, đối tượng tham số xuất hiện không tường minh chỉ qua hai bài tập trong SGK có dạng như sau :

Bài 15 (M_0, tr.15)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+3y=1 \\ (a^2+1)x+6y=2a \end{cases}$ trong mỗi trường hợp sau :

a) a = –1 ; b) a = 0 ; c) a = 1.

Bài 42 (M_0, tr.27)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y=m \\ 4x-m^2y=2\sqrt{2} \end{cases}$ trong mỗi trường hợp sau :

a) $m=-\sqrt{2}$; b) $m=\sqrt{2}$ c) m = 1.

Trên đây là hai bài toán trong SGK toán 9 hiện hành và dường như nó không gây khó khăn gì đáng kể đối với học sinh, có chăng chỉ là thêm thao tác thế giá trị của tham số vào hệ đã cho để nhận được hệ với hệ số bằng số.

Như vậy, trong giai đoạn ngầm ẩn này, giải hệ phương trình chứa tham số thể hiện qua việc giải hệ đó ứng với một số giá trị cho trước của tham số, tức là vẫn giải những hệ phương trình với hệ số bằng số. Một điểm đáng lưu ý là các giá trị của tham số rất khéo chọn sao cho hệ hoặc có nghiệm *duy nhất*, hoặc *vô nghiệm*, hoặc *vô số nghiệm* ; nghĩa là đã bao quát hết ba trường hợp về tập nghiệm của hệ (2, 2).

Lưu ý rằng trước khi đưa vào giảng dạy đại trà, cũng với hệ phương trình như trong bài 42 trên đây nhưng SGK thí điểm lớp 9 lại đặt ra những yêu cầu sau :

Bài 47 [8, tr.30]

Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x-y=m \\ 4x-m^2y=2\sqrt{2} \end{cases}$

---

[1] Theo [34] : "Việc dạy các biểu thức chứa chữ trước hết nhằm khái quát hóa một số tính chất của các phép tính số học. Mỗi chữ trong biểu thức có thể nhận các giá trị số khác nhau, đó là sự làm quen với khái niệm *"biến"*, nhưng mỗi chữ trong biểu thức cũng có thể nhận giá trị xác định nào đó, đây cũng là cách giới thiệu về đại lượng không đổi : *"hằng số"*. Nói cách khác, chúng ta có thể gặp các biểu thức chứa chữ mà các chữ trong nó đóng vai trò là *"tham số"* ".

a) Với giá trị nào của m thì hệ phương trình vô nghiệm?
b) Với giá trị nào của m thì hệ phương trình có vô số nghiệm? Khi đó, tìm dạng tổng quát nghiệm của hệ phương trình.
c) Với giá trị nào của m thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất?

Vậy khi đó, bài tập 47 sẽ được giải quyết như thế nào?

Sách giáo viên tương ứng đã đưa ra hướng dẫn giải ở trang 19 như sau :

Cách 1 : ***(Dùng kỹ thuật thế)***

Từ phương trình đầu ta có : $y = 2x - m$. Thế vào phương trình sau khử ẩn thì được :

$$4x - m^2(2x - m) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2(2 - m^2)x = 2\sqrt{2} - m^3$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{2} - m)(\sqrt{2} + m)x = (\sqrt{2} - m)(2 + m\sqrt{2} + m^2) \quad (1)$$

a) Hệ phương trình vô nghiệm nếu và chỉ nếu (1) vô nghiệm. Điều kiện là

$$2(\sqrt{2} - m)(\sqrt{2} + m) = 0 \text{ và } (\sqrt{2} - m)(2 + m\sqrt{2} + m^2) \neq 0 \Leftrightarrow m = -\sqrt{2}$$

b) Hệ phương trình có vô số nghiệm khi và chỉ khi (1) có vô số nghiệm. Điều kiện là

$$2(\sqrt{2} - m)(\sqrt{2} + m) = 0 \text{ và } (\sqrt{2} - m)(2 + m\sqrt{2} + m^2) = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{2}$$

Khi đó, công thức nghiệm là $\begin{cases} x \in R \\ y = 2x - \sqrt{2} \end{cases}$

c) Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (1) có nghiệm duy nhất. Điều kiện là

$$2(\sqrt{2} - m)(\sqrt{2} + m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2}.$$

Cách 2 : ***(Dùng kỹ thuật cộng đại số)***

Nhân hai vế của phương trình đầu với –2 rồi cộng từng vế hai phương trình thì được

$$2(2 - m^2)y = 2(\sqrt{2} - m). \quad (2)$$

a) Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ $m = -\sqrt{2}$.
b) Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow$ $m = \sqrt{2}$.
c) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ $m \neq \pm\sqrt{2}$.

Như vậy, điểm mấu chốt của cả hai kỹ thuật trên là khử ẩn để đưa về *phương trình bậc nhất một ẩn chứa tham số.*

Thế nhưng, ở lớp 9, giải và biện luận các phương trình chưa được giảng dạy. Trong tình huống này, phương trình bậc nhất một ẩn chứa tham số, theo hai lời giải trên, đã được xử lý dựa vào *cách giải phương trình bậc nhất* không chứa tham số $ax + b = 0$ ($a \neq 0$) và dựa vào *tính hợp thức của phép chia* (để thực hiện được phép tính chia, số bị chia phải khác 0 ; trong trường hợp này, vì số bị chia chứa tham số, chưa biết khác 0 hay không nên phải chia trường hợp để giải).

Tuy nhiên, không hẳn cứ đi theo một trong hai cách trên thì tất cả học sinh đều giải quyết tốt bài tập 47, vì điều đó còn tùy thuộc vào khả năng lập luận chặt chẽ, rõ ràng và chính xác của họ. Vậy trong tình huống này, liệu tồn tại kỹ thuật nào khác khả thi hơn kỹ thuật thế và kỹ thuật cộng đại số hay không? Nếu có thì phải chăng trong thời điểm kỹ thuật khả thi đó chưa xuất hiện :

- SGK toán 9 thí điểm, một mặt đã không đưa vào hệ phương trình với tất cả các hệ số đều chứa tham số ; mặt khác, luôn tạo thuận lợi cho kỹ thuật thế – kỹ thuật cộng đại số được sử dụng? [1]
- Còn M_0, rút kinh nghiệm từ sách thí điểm, đã cải biên bài tập này thành bài tập 42 với yêu cầu "nhẹ nhàng" hơn?

Cuối cùng, tại sao sách giáo viên (sách tương ứng với chương trình thí điểm toán 9) lại không khai thác kỹ thuật τ_d khi mà nó có thể cho phép dễ dàng giải bài tập 47 trên đây? Phải chăng τ_d chỉ được ưu tiên cho các hệ (2, 2) không chứa tham số?

3.2.1.3. Kết luận

- **Về các TCTH liên quan đến hệ (2, 2) không chứa tham số**

Các TCTH gắn với hai kiểu nhiệm vụ $t_R^{(2,\,2)}$ "Giải hệ (2, 2) không chứa tham số" và T_d "Đoán nhận số nghiệm của hệ phương trình và giải thích rõ lí do" được mô tả tóm tắt lại như sau :

<table>
<tr><th>Kiểu nhiệm vụ</th><th colspan="2">Kỹ thuật</th><th>Công nghệ</th><th>Lý thuyết</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$t_R^{(2,\,2)}$</td><td>hình học</td><td>τ_g</td><td>θ_g</td><td rowspan="4">vắng mặt</td></tr>
<tr><td rowspan="2">đại số</td><td>τ_s</td><td>θ_s</td></tr>
<tr><td>τ_c</td><td>θ_c</td></tr>
<tr><td>T_d</td><td colspan="2">τ_d</td><td>θ_d</td></tr>
</table>

Để giải hệ (2, 2), hai kỹ thuật đại số : *thế* τ_s và *cộng đại số* τ_c luôn chiếm ưu thế còn kỹ thuật hình học τ_g không được coi trọng. Vai trò chủ yếu của τ_g là để *minh họa hình học tập nghiệm* (sau khi giải hệ bằng các kỹ thuật đại số τ_s, τ_c) chứ không phải để giải hệ. Mặt khác, τ_s, τ_c có thể xem như là những algorit ; chúng được mô tả tường minh trong M_0. Còn τ_g thì không phải là một algorit ; nó ẩn trong lời giải của các ví

[1] Ở bài 47, tồn tại hệ số của ẩn y trong phương trình đầu bằng – 1 (cổ vũ phương pháp thế) ; hệ số của ẩn x trong phương trình thứ hai gấp đôi hệ số của ẩn x trong phương trình thứ nhất (khuyến khích sử dụng phương pháp cộng).

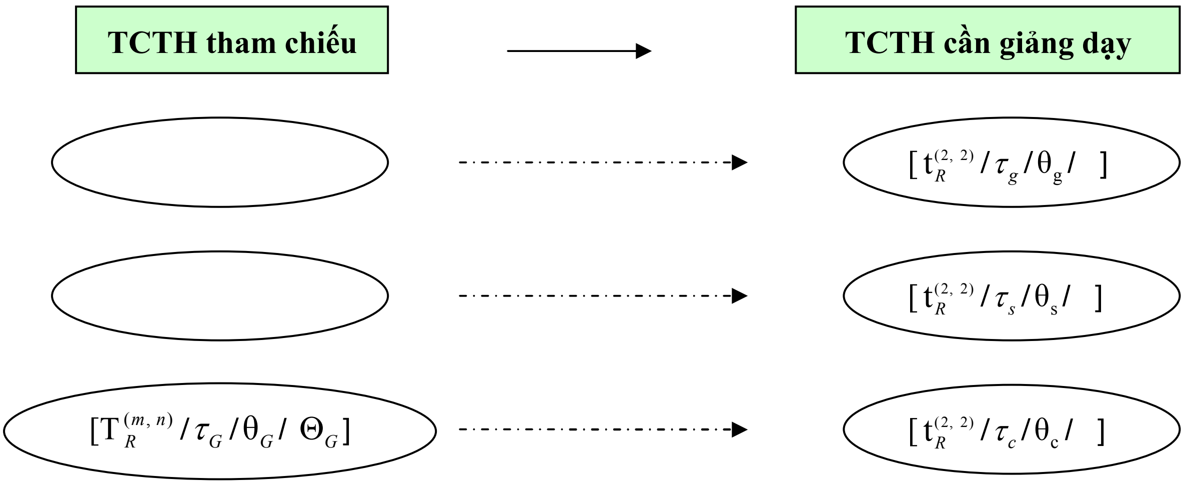
dụ và bài tập.

Trong trường hợp hệ được giải bằng τ_g, kỹ thuật này sẽ chịu các ràng buộc sau :

- Giải hệ bằng kỹ thuật hình học là tìm *nghiệm đúng* của hệ.
- Sau khi giải hệ bằng kỹ thuật hình học, học sinh có trách nhiệm *thử lại* nghiệm bằng các phép tính.

Còn với kỹ thuật τ_d, tuy nó không cho phép tìm nghiệm nhưng lại giúp xác định nhanh chóng *số nghiệm*. Như thế, τ_d sẽ hỗ trợ τ_g, đặc biệt trong trường hợp hệ *vô nghiệm* và nó được sử dụng như một biện pháp *bổ sung đắc lực* cho các kỹ thuật đại số trong khâu "đoán nhận số nghiệm".

- **Về TCTH tham chiếu và TCTH cần giảng dạy**



Như vậy, τ_g, τ_s không xuất hiện trong các giáo trình đại học. Còn τ_c chính là vết của kỹ thuật Gauss ở đại học ứng với số phương trình và số ẩn bằng 2.

- **Về tham số**

Trong giai đoạn này, tham số vẫn giữ vai trò ngầm ẩn. *Hệ phương trình chứa tham số được giới thiệu trong khung cảnh của những hệ phương trình số.* Như vậy, dù học sinh chưa biết "giải và biện theo tham số" là gì nhưng rõ ràng là đây là cơ sở ban đầu, là bước chuẩn bị để tạo thuận lợi cho việc tiếp thu hệ phương trình có chứa tham số ở lớp học tiếp theo.

Một điểm đáng lưu ý nữa là mặc dù kỹ thuật thế và kỹ thuật cộng đại số chiếm ưu thế đối với hệ (2, 2) không chứa tham số nhưng khi tham số xuất hiện thì chúng lại không mô tả một quy trình rõ ràng cho phép giải quyết nhanh chóng mọi hệ (2, 2) có chứa tham số. Vậy, liệu có kỹ thuật nào khác "trội" hơn hai kỹ thuật đại số ở lớp 9 hay không? Câu trả lời sẽ được làm rõ trong nội dung kế tiếp.

3.2.2. Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn trong các SGK toán 10 thí điểm 2003 [(1)]

Dưới đây, thông qua việc phân tích một số TCTH gắn với "Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn" trong hai bộ SGK Đại số lớp 10 thí điểm M_1 và M_2, chúng tôi sẽ cố gắng làm sáng tỏ mối quan hệ thể chế với algorit và tham số ; từ đấy có thể chỉ ra được quy tắc của hợp đồng didactic liên quan đến hai đối tượng này.

Như chúng tôi đã nói, đi kèm với mỗi SGK là các sách giáo viên G_1 và G_2 ; ngoài ra còn có cả sách bài tập mà chúng tôi lần lượt kí hiệu là E_1 và E_2. Trong nhiều trường hợp, để hiểu rõ hơn ý định của các tác giả, chúng tôi sẽ phải tham khảo thêm sách giáo viên và sách bài tập này.

Trong bài "Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn", cấu trúc phần lý thuyết và phần bài tập của hai bộ sách tương đối giống nhau.

Về lý thuyết, đầu tiên các tác giả đều giới thiệu một số khái niệm cơ bản : hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, nghiệm của hệ, giải hệ, quy tắc (kỹ thuật) Cramer được xây dựng dựa vào kỹ thuật cộng đại số. Tiếp đó là các nội dung : ý nghĩa hình học của tập nghiệm (hay biểu diễn hình học của tập nghiệm), thực hành giải và biện luận, giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn.

Về bài tập, trong M_1 và M_2 xuất hiện các kiểu nhiệm vụ sau :

- T_R : Giải hệ phương trình không chứa tham số

  Hai nhiệm vụ thuộc kiểu nhiệm vụ T_R là :
  - $t_R^{(2,\,2)}$: Giải hệ (2, 2) không chứa tham số
  - $t_R^{(3,\,3)}$: Giải hệ (3, 3) không chứa tham số
- $T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$: Giải và biện luận hệ phương trình (2, 2) có chứa tham số
- T_{Rp} : Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình

  Hai nhiệm vụ thuộc kiểu nhiệm vụ T_{Rp} là :
  - $t_{Rp}^{(2,\,2)}$: Giải bài toán bằng cách lập hệ (2, 2)
  - $t_{Rp}^{(3,\,3)}$: Giải bài toán bằng cách lập hệ (3, 3)
- T_{Tc} : Tìm điều kiện của tham số thỏa mãn yêu cầu của đề bài
- T_{Cal} : Tính nghiệm gần đúng của hệ phương trình
- T_{Cc} : Chọn kết luận đúng trong các khẳng định

Dĩ nhiên, một số trong số những kiểu nhiệm vụ trên cũng hiện diện ở phần lý thuyết của cả hai bộ sách.

---

(1) Đã có một công trình nghiên cứu đề cập đến hệ phương trình (2, 2), đó là [23]. Có thể thấy, mặc dù cùng xem xét hệ phương trình (2, 2) nhưng những vấn đề mà chúng tôi quan tâm là hoàn toàn mới mẻ.

Trước hết, chúng tôi thống kê số lượng ví dụ và bài tập [1] tương ứng với từng kiểu nhiệm vụ :

Kiểu nhiệm vụ	Nhiệm vụ	Ví dụ	Bài tập trong M_1	Bài tập trong E_1	Tổng cộng	Ví dụ	Bài tập trong M_1	Bài tập trong E_1	Tổng cộng	TỔNG CỘNG
T_R	$t_R^{(2,\,2)}$	2	2	2	6	1	1	1	3	9
	$t_R^{(3,\,3)}$	2	2	2	**6**	2	5	4	**11**	**17**
$T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$		1	3	3	**7**	1	2	2	**5**	**12**
T_{Rp}	$t_{Rp}^{(2,\,2)}$	0	3	1	4	1	2	0	3	7
	$t_{Rp}^{(3,\,3)}$	0	0	2	**2**	2	4	0	**6**	**8**
T_{Tc}		0	2	2	4	0	1	5	6	10
T_{Cal}		0	1	2	3	0	1	0	1	4
T_{Cc}		0	2	0	2	0	0	0	0	2
TỔNG CỘNG		5	15	14	**34**	7	16	12	**35**	**69**

Trong sáu kiểu nhiệm vụ vừa nêu, T_R và $T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$ là hai kiểu nhiệm vụ trọng tâm và gắn bó mật thiết với hai đối tượng algorit và tham số. Thế nên, để nội dung phân tích được tập trung, chúng tôi quan tâm chủ yếu đến các TCTH gắn với hai kiểu nhiệm vụ này ; trong đó, chúng tôi đặc biệt lưu ý đến thành phần thứ hai (kỹ thuật) của mỗi TCTH.

3.2.2.1. TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ T_R "Giải hệ phương trình không chứa tham số"

a) TCTH gắn với nhiệm vụ $t_R^{(2,\,2)}$ "Giải hệ phương trình (2, 2)"

❖ **Phần lý thuyết**

Đặc trưng của hệ phương trình gắn với nhiệm vụ $t_R^{(2,\,2)}$:

- Giải hệ (2, 2) thì bao giờ hệ cũng có *nghiệm duy nhất*. Nói cách khác, đó là các *hệ Cramer*.
- Không giải hệ (2, 2) *thuần nhất*.

---

[1] Kể cả phần *ôn tập chương* và *ôn tập cuối năm*.

Đặc trưng này thể hiện ở tất cả các ví dụ và hoạt động trong cả hai bộ SGK.

Trong M_1

Ví dụ 1 (M_1, tr.79)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x - 2y = -9 \\ 4x + 3y = 2 \end{cases}$$

Nghiệm (–1 ; 2)

Hoạt động 3 (M_1, tr.79)

Bằng định thức, giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 3y = 13 \\ 7x + 4y = 2 \end{cases}$$

Nghiệm (2 ; –3)

Trong M_2

Hoạt động 2 (M_2, tr.80)

Giải hệ phương trình

$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 2x - 5y = 3 \end{cases}$ bằng quy tắc Cramer.

Nghiệm $\left(\frac{17}{23}\ ; -\frac{7}{23}\right)$

Như thế, để giải hệ (2, 2) không chứa tham số, có thể sử dụng *"định thức"* (theo cách nói của M_1) hay sử dụng *"quy tắc Cramer"* (theo cách nói của M_2) ; nghĩa là có thể vận dụng hoặc bảng tóm tắt ở trang 78 của M_1, hoặc bảng tóm tắt ở trang 80 của M_2 (chúng tôi sẽ trình bày nội dung cụ thể của hai bảng này ở mục 3.2.2.2). Thế nhưng, vì *"Quy tắc Cramer chỉ áp dụng cho những hệ phương trình mà định thức khác 0."* (G_2, tr.77) nên thật ra kỹ thuật để giải hệ Cramer (2, 2) chỉ gồm các bước đơn giản như sau:

- Tính các định thức D ($D \neq 0$), D_x, D_y.
- Kết luận : hệ có nghiệm duy nhất (x ; y) = $\left(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D}\right)$.

Chúng tôi gọi đây là kỹ thuật giải hệ Cramer (2, 2) và kí hiệu là $\tau_{Cr}^{(2,\,2)}$.

Nhận xét

- $\tau_{Cr}^{(2,\,2)}$ là algorit hiểu theo nghĩa chặt.
- $\tau_{Cr}^{(2,\,2)}$ *chính là vết của kỹ thuật giải hệ Cramer* $\tau_{Cr}^{(n,\,n)}$ *ở đại học.*
- Mức độ ưu tiên giữa kỹ thuật $\tau_{Cr}^{(2,\,2)}$ và hai kỹ thuật đại số ở lớp 9 (kỹ thuật thế, kỹ thuật cộng đại số) không được M_1 và M_2 đề cập đến. Nhưng nó đã từng xuất hiện trong [26, tr.43] như sau :

"Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể dùng tùy ý phương pháp cộng, phương pháp thế hoặc sử dụng công thức Cramer. Tuy nhiên, trong mỗi trường hợp sau đây, ta có thể dùng một phương pháp giải thích hợp hơn

- Nếu a = $\pm$ a' hoặc b = $\pm$ b' : ta dùng phương pháp cộng.
- Nếu a = $\pm$ 1 hoặc b = $\pm$ 1 : ta dùng phương pháp thế.
- Nếu các hệ số a, b, c, a', b', c' là các số phức tạp, ta dùng công thức Cramer.” [1]

❖ Phần bài tập

Trong hệ thống bài tập của cả hai bộ sách, người ta cũng chỉ yêu cầu giải các hệ phương trình Cramer (2, 2) .

Trong M$_1$

Bài 15 (M_1, tr.81)

Bằng định thức, giải các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$

Nghiệm $\left(-\dfrac{5}{17}\ ;\ -\dfrac{19}{17}\right)$

b) $\begin{cases} \sqrt{3}x + \sqrt{2}y = -1 \\ 2\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases}$

Nghiệm $\left(\sqrt{3}\ ;\ -2\sqrt{2}\right)$

Trong M$_2$

Bài 2 (M_2, tr.87)

Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ -2x + 7y = 5 \end{cases}$

Nghiệm $\left(\dfrac{53}{11}\ ;\ \dfrac{23}{11}\right)$

b) $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x - \dfrac{2}{3}y = 4 \\ \dfrac{3}{4}x + \dfrac{4}{3}y = -9 \end{cases}$

Nghiệm $\left(-\dfrac{4}{7}\ ;\ -\dfrac{45}{7}\right)$

c) $\begin{cases} \sqrt{2}x - 3y = 1 \\ 4x + \sqrt{3}y = \sqrt{6} \end{cases}$

Nghiệm $\left(\dfrac{\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{\sqrt{6}+12}\ ;\ \dfrac{2\sqrt{3}-4}{\sqrt{6}+12}\right)$

d) $\begin{cases} 0,3x - 0,2y = 0,33 \\ 1,2x + 0,4y = 0,6 \end{cases}$

Nghiệm $\left(0,7\ ;\ -0,6\right)$

---

[1] Chẳng hạn, với những hệ có hệ số phức tạp như : $\begin{cases} 1,4x + 3,8y = 3,4 \\ 2,5x - 1,7y = -10,5 \end{cases}$ thì hẳn nhiên là các kỹ thuật ở lớp 9 tỏ ra kém hiệu quả hơn kỹ thuật $\tau_{Cr}^{(2,\ 2)}$.

Xem xét các bài tập trên, chúng tôi nhận thấy hệ số của ẩn trong một số hệ phương trình là không đơn giản để sử dụng các kỹ thuật đại số ở lớp 9 (chẳng hạn như câu b) bài 15 và câu c) bài 2). Và có vẻ như các hệ phương trình này ngầm nói lên ưu thế của kỹ thuật giải hệ Cramer so với kỹ thuật thế và cộng đại số trong trường hợp hệ số của ẩn là các số phức tạp.

b) TCTH gắn liền với nhiệm vụ $t_R^{(3,\ 3)}$ "Giải hệ phương trình (3, 3)"

❖ **Phần lý thuyết**

Khác với SGK 2000, các SGK thí điểm trình bày thêm nội dung "Giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn" (gọi tắt là hệ (3, 3)).

"Đó là hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

trong đó x, y, z là ba ẩn, các chữ còn lại là các hệ số." [1] (M_2, tr.82)

Mục đích của việc đưa vào hệ phương trình (3, 3) là :

"... nhằm phục vụ cho việc giải các bài toán trong thực tiễn cũng như để sử dụng trong các lớp sau. Chẳng hạn việc tìm giao điểm của đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) ở lớp 12". (G_2, tr.76)

Từ đó, mỗi SGK đều trình bày kỹ thuật để giải quyết nhiệm vụ $t_R^{(3,\ 3)}$. Chúng tôi ký hiệu $\tau_1^{(3,\ 3)}$ là kỹ thuật xuất hiện trong M_1 và $\tau_2^{(3,\ 3)}$ là kỹ thuật trong M_2.

Trong M_1

Từ lời giải cho ví dụ dưới đây :

Ví dụ 3 (M_1, tr.80 – 81)

"Giải hệ phương trình [...]

$$\text{(III)} \begin{cases} x + y + z = 2 & (6) \\ x + 2y + 3z = 1 & (7) \\ 2x + y + 3z = -1 & (8) \end{cases}$$

Cách giải : "Từ (6) ta có

$$z = 2 - x - y. \qquad (9)$$

Thay thế z trong (7) và (8) bởi (9) :

[1] Ở đây, M_1 và M_2 không nói gì đến tổng bình phương các hệ số của ẩn trong mỗi phương trình trên có khác 0 hay không.

x + 2y + 3 (2 – x – y) = 1 ⇔ 2x + y = 5 ;

2x + y + 3 (2 – x – y) = -1 ⇔ x + 2y = 7.

Ta thu được hệ phương trình bậc nhất hai ẩn quen thuộc

$$(\text{IV}) \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$$

H4 Giải tiếp hệ (IV) để tìm x và y rồi thế vào (9) để tìm z và kết luận về nghiệm của hệ (III).”

M_1 nêu lên nhận xét :

“Qua ví dụ trên, ta thấy : *nguyên tắc chung để giải hệ phương trình nhiều ẩn là khử bớt ẩn để quy về giải các phương trình hay hệ phương trình có số ẩn ít hơn. Để khử bớt ẩn, ta cũng có thể dùng các phương pháp cộng đại số hay phương pháp thế giống như đối với hệ phương trình hai ẩn*.” (tr.81)

Nguyên tắc này chính là ý tưởng cơ bản của **kỹ thuật** $\tau_1^{(3,\,3)}$.

Nhận xét

- $\tau_1^{(3,\,3)}$ là algorit hiểu theo nghĩa rộng.
- Từ lời giải cho ví dụ 3, chúng tôi nhận thấy để khử bớt ẩn thì giữa hai kỹ thuật đại số, M_1 chú trọng hơn đến kỹ thuật thế.
- Nếu sử dụng kỹ thuật cộng đại số τ_c để khử ẩn thì $\tau_1^{(3,\,3)}$ *chính là vết của kỹ thuật Gauss* τ_G *ở bậc đại học* trong trường hợp số phương trình và số ẩn cùng bằng 3.

Công nghệ $\theta^{(3,\,3)}$ **của kỹ thuật** $\tau_1^{(3,\,3)}$: kỹ thuật thế τ_s hoặc kỹ thuật cộng đại số τ_c để giải hệ (2, 2) không chứa tham số.

Lý thuyết $\Theta^{(3,\,3)}$ **của công nghệ** $\theta^{(3,\,3)}$: các phép biến đổi hệ phương trình tương đương.

Trong một hệ phương trình, ta có thể thay một phương trình của hệ bởi một phương trình tương đương hoặc bởi một phương trình khác, có được bằng cách cộng (trừ, nhân) từng vế của hai phương trình trong hệ.

Trong M_2

Kỹ thuật $\tau_2^{(3,\,3)}$ được M_2 giới thiệu dưới tên gọi phương pháp Gao - xơ [1] (trong phân tích, chúng tôi gọi đây là kỹ thuật Gao - xơ).

Giải thích tại sao cần giảng dạy kỹ thuật $\tau_2^{(3,\,3)}$ cho học sinh, các tác giả nói rằng :

---

[1] Hay còn gọi là phương pháp Gauss.

"Về cách giải hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn. Quy tắc Cramer không chỉ áp dụng cho hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn mà còn áp dụng cho hệ n phương trình bậc nhất n ẩn, dựa trên khái niệm định thức cấp n. Tuy nhiên, quy tắc Cramer chỉ áp dụng cho những hệ phương trình mà định thức khác 0.

Hơn nữa, *việc áp dụng phương pháp này cho hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn thì phải trình bày khái niệm định thức cấp 3, là điều mà chương trình không cho phép, vì khá phức tạp. Do đó, SGK đã chọn phương pháp khử dần ẩn số (phương pháp Gao - xơ), để đưa hệ phương trình về dạng tam giác*." (G_2, tr.77)

Theo đó, các bước trong kỹ thuật $\tau_2^{(3,\,3)}$ lần lượt được làm rõ thông qua các hoạt động và ví dụ.

Trước hết, M_2 đề nghị giải hệ phương trình có ***dạng tam giác*** :

Hoạt động 4 (M_2, tr.82)

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x+3y-2z=-\dfrac{1}{4} \\ 4y+3z=\dfrac{3}{2} \\ 2z=3 \end{cases}$$

Đây có phải là hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn hay không [1] ? Hãy giải hệ phương trình đó.

Với yêu cầu "Hãy giải hệ phương trình đó", M_2 hướng dẫn :

"Việc giải hệ phương trình này rất đơn giản : từ phương trình cuối tính được z rồi thay vào phương trình thứ hai tính được y, cuối cùng thay y và z đã tính được vào phương trình đầu ta tính được x." (tr.82)

Nối tiếp hoạt động này là :

Ví dụ 1 (M_2, tr.82)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+2y+2z=\dfrac{1}{2} & (6) \\ 2x+3y+5z=-2 & (7) \\ -4x-7y+z=-4 & (8) \end{cases}$$

[1] Để trả lời cho câu hỏi : *"Đây có phải là hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn?"*, học sinh phải ngầm sử dụng kết quả *"Các hệ số của ẩn trong mỗi phương trình của hệ (3, 3) là không đồng thời bằng 0"* vì M_2 cũng như G_2 không hề cho biết điều này.

Giải. Nhân hai vế của phương trình (6) với (-2) rồi cộng vào phương trình (7), nhân hai vế của phương trình (6) với 4 rồi cộng vào phương trình (8) ta được hệ phương trình (đã khử x ở hai phương trình cuối) $\begin{cases} x + 2y + 2z = \frac{1}{2} \\ -y + z = -3 \\ y + 9z = -2 \end{cases}$

Tiếp tục cộng phương trình thứ hai vào phương trình cuối vế với vế, ta được hệ phương trình dạng tam giác $\begin{cases} x + 2y + 2z = \frac{1}{2} \\ -y + z = -3 \\ 10z = -5 \end{cases}$

Ta dễ dàng giải ra được $z = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{5}{2}$, $x = -\frac{7}{2}$.

Từ hoạt động và ví dụ trên, M_2 tổng kết nguyên tắc cơ bản để giải một hệ (3, 3) là *đưa hệ phương trình đã cho về hệ có dạng tam giác bằng cách khử dần ẩn số* và gọi nguyên tắc đó là phương pháp Gao - xơ (kỹ thuật $\tau_2^{(3,\,3)}$).

❖ Phần bài tập

Trong M_1

Tương ứng với nhiệm vụ $t_R^{(3,\,3)}$, số bài tập trong M_1 là 2. Tất cả các hệ (3, 3) được cho đều có *nghiệm duy nhất*.

Bài 18 (M_1, tr.82)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + z = 24 \end{cases}$$

Nghiệm (4 ; 2 ; 5)

Bài 26 (M_1, tr.86)

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 3 \end{cases}$$

Nghiệm (4 ; 2 ; 5)

Nhận xét

Việc khử ẩn trong các hệ phương trình trên khá đơn giản vì hệ số của các ẩn đa số là 1 hay -1.

Trong M_2

Dưới đây, chúng tôi sẽ xem xét một trong số 5 bài tập tương ứng với nhiệm vụ $t_R^{(3,\,3)}$.

Bài 5 (M_2, tr.87)

Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} x-3y+2z=-2 \\ -2x+5y+\ \ z=\ 5 \\ 3x-7y+4z=\ 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x+5y+\ \ z=2 \\ 2x-9y+2z=8 \\ 3x-4y+\ \ z=5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+5y-3z=3 \\ x+3y-2z=-1 \\ 3x-\ 2y+2z=4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -3x+2y+\ \ z=9 \\ 2x-3y-2z=-3 \\ 4x+3y-\ \ z=-11 \end{cases}$

Với các hệ số như trong bài tập 5, để khử ẩn, rõ ràng học sinh cần thực hiện nhiều phép biến đổi hệ phương trình.

Cụ thể, việc khử ẩn có thể được tiến hành như sau :

> "Về mặt thực hành, việc khử ẩn x ở hai phương trình cuối sẽ đơn giản nếu hệ số của x ở hai phương trình cuối là bội của hệ số x ở phương trình đầu (chẳng hạn nếu hệ số của x ở phương trình đầu là 1 hay –1).
>
> Nếu trường hợp này không xảy ra thì có thể có ba khả năng :
>
> a) Một trong hai phương trình dưới có hệ số của x là 1 hay –1, hay là ước của hệ số của x trong hai phương trình kia (chẳng hạn câu c) bài tập 5). Khi đó, ta đổi chỗ để đưa phương trình này lên đầu tiên và thực hiện việc khử ẩn x ở các phương trình còn lại.
>
> b) Khả năng trên cũng không xảy ra (chẳng hạn câu d) bài tập 5). Khi đó nếu hệ số của z trong phương trình đầu là ước của hệ số của z trong hai phương trình sau thì ta có thể khử z, đưa về dạng tam giác mà phương trình cuối chỉ còn ẩn x (hay y) mà thôi. […]
>
> c) Nếu cả hai khả năng trên đều không xảy ra thì ta phải nhân cả hai vế của một phương trình với cùng một số để tạo ra một trong các khả năng trên, hoặc chấp nhận có hệ số là phân số bằng cách chia cả hai vế của một phương trình với cùng một số […]." (G_2, tr.77 -78)

Ngoài cách làm trên, trong sách bài tập E_2, người ta còn cho biết có thể thực hiện việc khử ẩn nhờ kỹ thuật thế.

> "Dùng phương pháp thế biểu thị một ẩn qua hai ẩn kia từ một phương trình của hệ, rồi thay vào hai phương trình còn lại, đưa về hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn." (E_2, tr.80)

Từ những phân tích vừa nêu, chúng tôi trình bày lại kỹ thuật $\tau_2^{(3,\,3)}$ như sau :

- Khử ẩn (thực hiện như chỉ dẫn trên đây của G_2) để đưa phương trình đã cho về hệ có dạng tam giác hoặc bằng kỹ thuật thế (thực hiện như chỉ dẫn trên đây của E_2).

- Giải hệ tam giác tam giác bằng cách :
  - + từ phương trình cuối tính được ẩn thứ ba,
  - + thay ẩn thứ ba đã tính được vào phương trình thứ hai tính được ẩn thứ hai,
  - + thay ẩn thứ hai và thứ ba đã tính được vào phương trình đầu ta tính được ẩn thứ nhất.

Như vậy, nội dung của hai kỹ thuật $\tau_1^{(3,\,3)}$ và $\tau_2^{(3,\,3)}$ thật ra là một (vì cùng sử dụng kỹ thuật thế hoặc kỹ thuật cộng đại số để khử ẩn), duy chỉ có hình thức trình bày chúng trong mỗi SGK là khác nhau. Từ đó suy ra rằng hai kỹ thuật này có chung công nghệ $\theta^{(3,\,3)}$ và lý thuyết $\Theta^{(3,\,3)}$.

Nhận xét

- Có thể xem $\tau_2^{(3,\,3)}$ như một algorit hiểu theo nghĩa rộng.
- Để khử ẩn, nếu sử dụng kỹ thuật cộng đại số τ_c thì $\tau_2^{(3,\,3)}$ *chính là vết của kỹ thuật Gauss* τ_G *ở bậc đại học trường hợp số phương trình và số ẩn cùng bằng 3.*
- Vết $\tau_2^{(3,\,3)}$ thể hiện rõ nét hơn vết $\tau_1^{(3,\,3)}$ vì :
  - $\tau_2^{(3,\,3)}$ được mô tả cụ thể hơn $\tau_1^{(3,\,3)}$ (do đó, $\tau_2^{(3,\,3)}$ dễ vận dụng hơn $\tau_1^{(3,\,3)}$) ;
  - các hệ số của hệ (3, 3) trong M_2 đòi hỏi kỹ năng khử ẩn tốt hơn trong M_1 ;
  - số bài tập tương ứng với nhiệm vụ $t_R^{(3,\,3)}$ trong M_2 nhiều hơn trong M_1.
- Ngoài hệ (3, 3) có nghiệm duy nhất, trong M_2 còn xuất hiện một hệ phương trình vô nghiệm, đó là :

Bài 1 (M_2, tr.87)

Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x - 3y - \ z = 2 \\ 3x + 2y + 3z = 5 \\ 4x - 6y - 2z = -1 \end{cases}$$

Không cần giải chi tiết, có thể kết luận được hệ phương trình này *vô nghiệm* hay không?

Đây là bài tập duy nhất về hệ (3, 3) vô nghiệm.

Theo G_2, có thể lý giải hệ trên vô nghiệm như sau :

"Hệ phương trình vô nghiệm vì vế trái của phương trình thứ ba bằng vế trái của phương trình đầu nhân với 2, trong khi vế phải lại bằng vế phải của phương trình đầu chia cho –2." (G_2, tr.79)

Tuy nhiên, lời giải này chưa thể hiện rõ việc khử ẩn dựa vào kỹ thuật $\tau_2^{(3,\ 3)}$.

Vậy dường như cả hai kỹ thuật $\tau_1^{(3,\ 3)}$ và $\tau_2^{(3,\ 3)}$ chỉ áp dụng cho trường hợp hệ phương trình (3, 3) có nghiệm duy nhất.

c) Mối liên hệ giữa hai nhiệm vụ $\mathrm{t}_R^{(2,\ 2)}$ và $\mathrm{t}_R^{(3,\ 3)}$

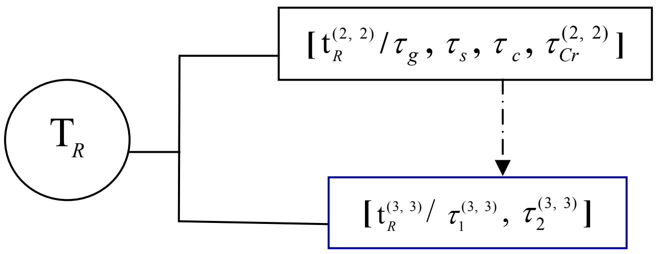
Cho đến thời điểm này,

Tương ứng với $\mathrm{t}_R^{(2,\ 2)}$ có 4 kỹ thuật, đó là : τ_g, τ_s, τ_c và $\tau_{Cr}^{(2,\ 2)}$, với :

- τ_g : là kỹ thuật mang bản chất *hình học*.
- τ_s, τ_c và $\tau_{Cr}^{(2,\ 2)}$: là các kỹ thuật mang bản chất *đại số*.

Tương ứng với $\mathrm{t}_R^{(3,\ 3)}$ có 2 kỹ thuật mang bản chất *đại số*, đó là : $\tau_1^{(3,\ 3)}$ và $\tau_2^{(3,\ 3)}$.

Về phương diện lý thuyết, có thể xem khối kỹ năng [$\mathrm{t}_R^{(2,\ 2)} / \tau_g$, τ_s, τ_c, $\tau_{Cr}^{(2,\ 2)}$] đóng vai trò như một phần của kỹ thuật $\tau_1^{(3,\ 3)}$ hoặc $\tau_2^{(3,\ 3)}$ để giải quyết nhiệm vụ $\mathrm{t}_R^{(3,\ 3)}$. Cụ thể là sau khi khử ẩn bằng kỹ thuật τ_s hoặc τ_c để đưa về hệ (2, 2), có thể sử dụng một trong bốn kỹ thuật τ_g, τ_s, τ_c hoặc $\tau_{Cr}^{(2,\ 2)}$ để giải tiếp hệ.



Nhưng *về phương diện thực hành*, chỉ có sự tham gia của [$\mathrm{t}_R^{(2,\ 2)} / \tau_s$, τ_c].

Sự vắng mặt của [$\mathrm{t}_R^{(2,\ 2)} / \tau_g$] có thể được lý giải là do kỹ thuật τ_g vốn không được chú trọng để giải quyết $\mathrm{t}_R^{(2,\ 2)}$. Nhưng còn [$\mathrm{t}_R^{(2,\ 2)} / \tau_{Cr}^{(2,\ 2)}$], tại sao khối kỹ năng này không thấy xuất hiện trong lời giải của các SGK và sách bài tập liên quan đến hệ (3, 3), đặc biệt khi kỹ thuật $\tau_{Cr}^{(2,\ 2)}$ được giới thiệu liền trước hai kỹ thuật $\tau_1^{(3,\ 3)}$ và $\tau_2^{(3,\ 3)}$? Về câu hỏi này, chúng tôi chưa tìm thấy lời giải thích nào của các tác giả.

3.2.2.2. TCTH gắn với kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$ "Giải và biện luận hệ phương trình (2, 2) có chứa tham số"

❖ **Phần lý thuyết**

Tương ứng với kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$, hệ được cho luôn có dạng chính tắc

$$\begin{cases} ax+by=c & (a^2+b^2\neq 0) \\ a'x+b'y=c' & (a'^2+b'^2\neq 0) \end{cases} \qquad \text{(trong } M_1\text{)}$$

hay
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (a_1^{\,2}+b_1^{\,2}\neq 0) \\ a_2x+b_2y=c_2 & (a_2^{\,2}+b_2^{\,2}\neq 0) \end{cases} \qquad \text{(trong } M_2\text{)}$$

Kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$ rất được ưu tiên.

G_1 nhấn mạnh : *"Trọng tâm của bài là phương pháp giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn bằng định thức cấp hai."* (tr.94 - 95)

Và một trong những mục tiêu quan trọng mà G_2 đặt ra cho học sinh là : *"Biết giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn chứa tham số."* (tr.73)

Khi đó, mỗi SGK đều xây dựng nên cùng một kỹ thuật cho phép giải quyết kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$. Chẳng hạn, dưới đây là quá trình xây dựng kỹ thuật này trong M_1.

"Xét hệ phương trình bậc nhất hai ẩn : (I) $\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$

- Nhân hai vế của (1) với b', hai vế của (2) với – b rồi cộng các vế tương ứng, ta được :

$$(ab' - a'b)x = cb' - c'b. \qquad (3)$$

- Nhân hai vế của (1) với – a', hai vế của (2) với a rồi cộng các vế tương ứng, ta được :

$$(ab' - a'b)y = ac' - a'c. \qquad (4)$$

- Trong (3) và (4) ta đặt D = ab' – a'b, D_x = cb' – c'b và D_y = ac'– a'c. Khi đó, ta có hệ phương trình hệ quả :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} Dx = D_x \\ Dy = D_y \end{cases}$$

Đối với hệ (II), ta xét các trường hợp sau :

1) $\mathbf{D\neq 0}$, lúc này hệ (II) có nghiệm duy nhất

$$(x\,;\,y) = \left(\frac{D_x}{D}\,;\,\frac{D_y}{D}\right).$$

Ta thấy đây cũng là nghiệm của hệ (I).

2) D = 0, lúc này hệ (II) trở thành : $\begin{cases} 0x = D_x \\ 0y = D_y \end{cases}$

- Nếu $D_y \neq 0$ hoặc $D_x \neq 0$ thì hệ (II) vô nghiệm nên hệ (I) vô nghiệm.
- Nếu $D_x = D_y = 0$ thì hệ (II) có vô số nghiệm.Tuy nhiên, muốn tìm nghiệm của hệ (I), ta phải trở về hệ (I) (do (II) chỉ là hệ phương trình hệ quả).

Theo giả thiết, hai số a và b không đồng thời bằng 0 nên ta có thể giả sử $a \neq 0$ (trường hợp $b \neq 0$ cũng giải tương tự). Ta có

$$D = ab' - a'b = 0 \Rightarrow b' = \frac{a'}{a}b \quad ;$$

$$D_y = ac' - a'c = 0 \Rightarrow c' = \frac{a'}{a}c.$$

Bởi vậy, hệ (I) có thể viết thành

$$\begin{cases} ax + by = c \\ \dfrac{a'}{a}(ax + by) = \dfrac{a'}{a}c \end{cases}$$

Do đó, tập nghiệm của hệ trùng với tập nghiệm của phương trình ax + by = c."

(M_1, tr.76 – 77)

Kế đến, kỹ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ $T^{(2,\,2)}_{R\text{-}D}$ được M_1 và M_2 mô tả qua các bảng tóm tắt sau :

Trong M_1

$$\begin{cases} ax + by = c & (a^2 + b^2 \neq 0) \\ a'x + b'y = c' & (a'^2 + b'^2 \neq 0) \end{cases}$$

1) $D \neq 0$: Hệ có nghiệm duy nhất (x ; y), trong đó

$$x = \frac{D_x}{D} \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D}$$

2) D = 0 :

- $\mathbf{D_x} \neq 0$ hoặc $\mathbf{D_y} \neq 0$: Hệ vô nghiệm.
- $\mathbf{D_x = D_y = 0}$: Hệ có vô số nghiệm, tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình ax + by = c.

Trong M_2

<table>
<tr><td>$\mathbf{D \neq 0}$</td><td colspan="2">$\mathbf{x = \dfrac{D_x}{D}}$; $\mathbf{y = \dfrac{D_y}{D}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\mathbf{D = 0}$</td><td>$\mathbf{D_x \neq 0}$ hoặc $\mathbf{D_y \neq 0}$</td><td>Hệ vô nghiệm</td></tr>
<tr><td>$\mathbf{D_x = D_y = 0}$</td><td>Giải phương trình $\boldsymbol{a_1 x + b_1 y = c_1}$</td></tr>
</table>

Về tên gọi của việc giải và biện luận theo các bảng tóm tắt trên, M_1 cho đó là giải và biện luận bằng *định thức* ; còn M_2 cho là giải và biện luận bằng *quy tắc Cramer*. Nhưng để thống nhất, trong luận văn này, chúng tôi sẽ gọi là giải và biện luận bằng *kỹ thuật Cramer* và kí hiệu kỹ thuật này là $\tau_{Cramer}^{(2,\,2)}$.

Công nghệ $\theta_{Cramer}^{(2,\,2)}$ **của kỹ thuật** $\tau_{Cramer}^{(2,\,2)}$: quá trình xây dựng kỹ thuật Cramer từ kỹ thuật cộng đại số (trình bày ở các trang 76 - 77 của M_1 và các trang 78 - 79 của M_2).

Lý thuyết $\Theta_{Cramer}^{(2,\,2)}$ **của công nghệ** $\theta_{Cramer}^{(2,\,2)}$: các phép biến đổi hệ phương trình tương đương.

Lưu ý : Kỹ thuật giải hệ Cramer $\tau_{Cr}^{(2,\,2)}$ và kỹ thuật Cramer $\tau_{Cramer}^{(2,\,2)}$ có cùng chung công nghệ và lý thuyết.

☆ Một số nhận xét liên quan đến kỹ thuật Cramer

Nhận xét 1

Trước khi xây dựng kỹ thuật Cramer, M_1 dẫn giải :

> "Ta đã biết, để giải một hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể dùng phương pháp hình học, phương pháp cộng đại số hoặc phương pháp thế. Dưới đây *chúng ta sẽ xây dựng công thức giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn trong trường hợp tổng quát.*" (M_1, tr.76)

Việc SGK đặt nhóm ba kỹ thuật *(hình học - thế - cộng đại số)* tương ứng với "giải hệ (2, 2) *không chứa tham số*" và kỹ thuật *Cramer* tương ứng với "giải và biện luận hệ (2, 2) *có chứa tham số*" như trên ngầm cho biết sự xuất hiện của tham số gắn liền với sự hiện diện của kỹ thuật Cramer. Thế nhưng, phát biểu này cùng với tất cả các nội dung khác trong SGK lại chưa cho phép làm sáng tỏ các câu hỏi dưới đây :

- *Bên cạnh kỹ thuật Cramer thì liệu ba kỹ thuật (hình học - thế - cộng đại số) có thể được sử dụng để giải và biện luận hệ (2, 2) hay không? Nếu có thì so với các kỹ thuật này, kỹ thuật Cramer có ưu điểm gì nổi bật?*

Chính vì vậy, để dự đoán khả năng ảnh hưởng của kỹ thuật hình học - thế - cộng đại số đối với học sinh, chúng tôi không những cần xem xét *"quá khứ"* (hay *"cuộc sống"*) của ba kỹ thuật này ở lớp 9 mà còn cần đặt chúng trong mối liên hệ với các đối tượng tri thức khác ở lớp 10.

Về ***kỹ thuật hình học***, một kỹ thuật vốn dĩ đã không được ưu tiên đối với hệ (2, 2) không chứa tham số thì với hệ có chứa tham số, dường như nó càng ít có cơ hội được vận dụng hơn. Bởi lẽ, khi ấy, bản chất của bài toán thay đổi ; đối tượng thao tác không còn là một hệ phương trình cụ thể với hệ số thuần số nữa mà là một *họ* các hệ phương trình với hệ số chứa tham số. Cho nên, muốn vận dụng tốt kỹ thuật hình học thì trước hết cần phải hiểu rằng tham số là một đại lượng mà giá trị của nó được dùng để phân biệt các phần tử của một tập hợp nào đó ; rằng trong hệ phương trình chứa tham số, tham số là biến chỉ dạng,… Thế nhưng, những mô tả về tham số và phương trình chứa tham số ở lớp 10 chưa cho phép học sinh nhận thức sâu sắc về điều này. Thật vậy, khái niệm về tham số và phương trình chứa tham số được đưa vào các SGK như sau :

> "Chúng ta còn xét cả những phương trình, trong đó ngoài ẩn số x còn có những chữ khác. Các chữ này được xem như <u>những số cho trước</u> và được gọi là *tham số*. Chẳng hạn, phương trình m(x + 2) = 3mx – 1 là một *phương trình chứa tham số* m." (M_1, tr.68)
>
> "Trong một phương trình, các biểu thức ở hai vế có thể chứa những chữ khác ngoài các ẩn. Các chữ này được xem như những <u>hằng số</u> và được gọi là *tham số*. Lúc đó, phương trình được gọi là *phương trình chứa tham số*.
> Chẳng hạn, phương trình $|2x-1| = x+m$ và phương trình $2mx + y = 5$ chứa tham số m." (M_2, tr.70)

Ở đây, người ta xem tham số như *"hằng số"* chứ không phải là *"biến chỉ dạng"*. Mặt khác, việc mô tả "tham số như những chữ khác ngoài ẩn x" là khá đơn giản và chủ yếu dựa vào *hình thức biểu thị* của tham số. Như thế, khi chuyển sang phương trình chứa tham số, SGK đã làm việc trên *các đối tượng phô bày*. Những đối tượng phô bày chính là các kí tự, chúng cho biết khi nào thì thao tác với tham số, khi nào thì thao tác với hệ số. Cụ thể, các kí tự x, y, z, … ngầm chỉ đó là ẩn, và các chữ cái khác như m, n, … ngầm chỉ đó là tham số.

Nói tóm lại, các cách mô tả trên đây dễ dẫn đến việc hiểu không đúng bản chất của tham số ; từ đó gây khó khăn cho việc vận dụng kỹ thuật hình học để giải quyết kiểu nhiệm vụ "Giải và biện luận hệ (2, 2)".

Câu hỏi đặt ra

- *Trong trường hợp kỹ thuật hình học cho phép mang lại một lời giải tốt, liệu học sinh có biết vận dụng kỹ thuật này để giải và biện luận hệ (2, 2) hay không?*

Chúng tôi sẽ tìm cách trả lời câu hỏi này qua phần thực nghiệm ở chương 4.

Về ***hai kỹ thuật đại số – thế và cộng đại số***, như đã biết :

- Ở lớp 9, hai kỹ thuật này luôn chiếm ưu thế ;
- Ở lớp 10, phương trình bậc nhất một ẩn có chứa tham số đã chính thức được giảng dạy. Điều đó sẽ tạo điều kiện cho việc giải và biện luận hệ (2, 2) bằng kỹ thuật thế hay kỹ thuật cộng đại số.
- Hơn nữa, ở lớp 10, kỹ thuật cộng đại số còn tham gia vào quá trình xây dựng kỹ thuật Cramer.

Tất cả các sự kiện trên dường như cho thấy hai kỹ thuật đại số ở lớp 9 có thể ảnh hưởng đến thực hành giải và biện luận hệ (2, 2) của học sinh ở lớp 10.

Bây giờ, trở lại với câu hỏi thứ hai ở trên : *"So với các kỹ thuật đã biết ở lớp 9, kỹ thuật Cramer có ưu điểm gì nổi bật ?"*

Về ưu điểm của kỹ thuật Cramer, các tác giả chỉ nêu lên một nhận xét ngắn gọn như sau :

> "Trong thực hành giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, *định thức là một công cụ đem lại nhiều thuận tiện.*" (M_1, tr.78)

Ngoài câu nói này ra, các sách M_1, M_2, G_1 và G_2 không bình luận thêm gì nữa về kỹ thuật Cramer cũng như về thế mạnh của nó so với hai kỹ thuật đại số ở lớp 9.

Thế nhưng, nếu đứng ở góc độ toán học mà nói thì với riêng trường hợp hệ (2, 2) có chứa tham số, kỹ thuật Cramer đặc biệt đảm bảo được yêu cầu cơ bản của bài toán biện luận là phân chia các trường hợp riêng một cách triệt để, liên tục, không bỏ sót, không trùng lặp. Trong khi đó, hai kỹ thuật đại số τ_c hay τ_s lại không mô tả một quy trình rõ ràng cho phép giải và biện luận tốt mọi hệ (2, 2) [(1)]. Do vậy, theo *quy luật cạnh tranh*, $\tau_{Cramer}^{(2,\,2)}$ trở thành kỹ thuật *tối ưu* (ở trường phổ thông) đối với kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$.

Nhận xét 2

Kỹ thuật Cramer trong M_1 và M_2 chỉ là algorit hiểu theo nghĩa rộng chứ chưa phải là algorit hiểu theo nghĩa chặt để giải quyết kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$ vì nó vi phạm hai trong số những đặc trưng của một algorit là tính kết thúc và tính xác định.

- Liên quan đến *"tính kết thúc"*, $\tau_{Cramer}^{(2,\,2)}$ không đưa ra các kết quả cụ thể mà chỉ

(1) Xem lại mục 3.2.1.2.

cho biết các trường hợp biện luận.

– Liên quan đến *"tính xác định"*, $\tau^{(2,\,2)}_{Cramer}$ không mô tả tất cả các thao tác trong từng trường hợp biện luận.

Chúng tôi sẽ làm rõ hai khía cạnh này thông qua các ví dụ sau đây :

Ví dụ 2 (M_1, tr.79 – 80) :

"Giải và biện luận hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

Giải : Trước hết, ta tính định thức

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1) ;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2) ;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m - 1.$$

Ta phải xét các trường hợp sau :

1) $D \neq 0$, tức $m \neq \pm 1$. Ta có

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{(m-1)(m+2)}{(m-1)(m+1)} = \frac{m+2}{m+1} ;$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{m-1}{(m-1)(m+1)}\frac{1}{2} = \frac{1}{m+1} ;$$

Hệ có một nghiệm duy nhất $(x ; y) = \left(\frac{m+2}{m+1}; \frac{1}{m+1}\right)$.

2) $D = 0$, tức là $m = 1$ hoặc $m = -1$.

- Nếu $m = 1$ thì $D = D_x = D_y = 0$ và hệ trở thành $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$. Ta có $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$x + y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R \\ y = 2 - x \end{cases}$.

- Nếu $m = -1$ thì $D = 0$ nhưng $D_x \neq 0$ nên hệ vô nghiệm.

Kết luận : […]"

Ví dụ (M_2, tr.80)

"Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m :

$$\begin{cases} 3x - my = 1 \\ -mx + 3y = m - 4 \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -m \\ -m & 3 \end{vmatrix} = 9 - m^2 = (3 - m)(3 + m) ;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m-4 & 3 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = (m - 1)(m - 3) ;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -m & m-4 \end{vmatrix} = 4m - 12 = 4(m - 3).$$

Biện luận :

1) $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$ và $m \neq -3$. Lúc đó hệ có một nghiệm duy nhất (x ; y) với

$$x = \frac{(m-1)(m-3)}{(3-m)(3+m)} = \frac{1-m}{3+m},$$

$$y = \frac{4(m-3)}{(3-m)(3+m)} = \frac{-4}{3+m}.$$

2) $D = 0 \Leftrightarrow m = 3$ hoặc $m = -3$.

a) $m = 3 \Rightarrow D = D_x = D_y = 0$. Lúc đó hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 3x - 3y = 1 \\ -3x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow 3x - 3y = 1.$$

Hệ có vô số nghiệm (x ; y) với $\begin{cases} x \text{ tuỳ ý thuộc } R \\ y = \dfrac{3x-1}{3} \end{cases}$ […].

b) $m = -3 \Rightarrow D_x = 24$: Hệ vô nghiệm."

Hai ví dụ trên cho thấy :

- Kỹ thuật Cramer trong M_1 và M_2 chỉ giúp phân chia các trường hợp biện luận theo D, D_x, D_y.
- Để giải và biện luận hệ (2, 2) có chứa tham số, ta cần thực hiện nhiều bước biến đổi đại số hơn so với các bước trong kỹ thuật Cramer. Chẳng hạn, với trường hợp D = 0, cần phải tiến hành thêm thao tác tìm giá trị của tham số sao cho D = 0 ; sau đó, lần lượt thế các giá trị này vào D_x, D_y, vào hệ phương trình đã cho để biện luận tiếp, v.v…

  Chính vì thế, một trong những điểm quan trọng mà G_2 nhắc nhở giáo viên là :

  "… giáo viên nên nhấn mạnh cho học sinh, trong trường hợp D = 0, ta cần giải ra các giá trị của tham số rồi thay vào hệ phương trình đã cho để giải trong từng trường hợp cụ thể." (G_2, tr.76)

  Còn trong phần ôn tập của E_2, các tác giả lại lưu ý học sinh :

  "Thông thường, trong trường hợp D = 0, ta tính được giá trị của tham số. Thay giá trị của tham số vào hệ ta được một hệ phương trình với các hệ số bằng số, từ đó có các kết luận cụ thể." (E_2, tr.80)

Vậy, có thể nói kỹ thuật Cramer chưa phải là một algorit để giải và biện luận hệ phương trình (2, 2) mà ẩn đằng sau nó mới là một algorit với nhiều phép biến đổi đại số hơn.

Nhận xét 3

Tồn tại một ràng buộc của thể chế dạy học đối với kỹ thuật Cramer : $\tau_{Cramer}^{(2,\,2)}$ chỉ cho phép giải quyết kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$ với điều kiện *"tổng bình phương các hệ số của ẩn trong mỗi phương trình của hệ phải khác 0 với mọi giá trị của tham số"* (chúng tôi gọi đây là điều kiện (*)).

Về vấn đề này, G_1 nhắc nhở :

> "Cần tạo cho học sinh tính thận trọng : Khi giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, *phải xét xem liệu có thể xảy ra trường hợp có một phương trình của hệ suy biến (cả hai hệ số của ẩn bằng 0) hay không. Bởi vì nếu thế thì nên xét riêng trường hợp đó mà không tính định thức. Chỉ sau khi đã chắc chắn rằng hệ phương trình đã cho là hệ phương trình bậc nhất thì mới giải và biện luận bằng định thức*." [1] (G_1, tr.95)

Còn theo cách lý giải của G_2 thì :

> *"Trường hợp $a_1 = b_1 = 0$ hoặc $a_2 = b_2 = 0$, hệ này không phải là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn nên không nằm trong việc giải và biện luận ở trên."* (G_2, tr.75)

Ấy thế mà những lưu ý trên đây lại không hề được thể hiện qua các ví dụ minh họa. Thật vậy, ở bước đầu tiên của hai lời giải đã nêu trong nhận xét 2, người ta luôn tính ba định thức D, D_x, D_y chứ không kiểm tra các hệ số của ẩn có thỏa điều kiện (*) hay chưa.

Tất cả những ghi nhận trên cho thấy dường như tồn tại quy tắc của hợp đồng didactic sau :

> **R** : *Học sinh không có trách nhiệm kiểm tra xem tổng bình phương các hệ số của ẩn trong mỗi phương trình có luôn khác 0 với mọi giá trị của tham số hay không.*

(1) Nhắc lại rằng tất cả các câu trích dẫn được in nghiêng, in đậm hay gạch dưới trong luận văn này là do chúng tôi thực hiện.

Lưu ý rằng trong các giáo trình đại học, khi nói về kỹ thuật Cramer để giải hệ phương trình tuyến tính có chứa tham số, người ta không đặt điều kiện cho các hệ số [(1)]. Với cách trình bày này, khi $D = D_x = D_y = 0$ sẽ xảy ra hai khả năng : hệ *vô nghiệm* hoặc *có vô số nghiệm*.

Câu hỏi đặt ra

- *Tại sao thể chế ở trường THPT Việt nam lại đặt ra ràng buộc về các hệ số của ẩn ngay từ bước đầu tiên của lời giải và biện luận hệ (2, 2)?* [(2)]

Để trả lời cho câu hỏi này, trước hết chúng tôi phải quay trở lại bài học "Phương trình bậc nhất hai ẩn ax + by = c" vì hệ phương trình đang nghiên cứu được tạo thành từ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

Có thể thấy, trong phương trình bậc nhất hai ẩn, ràng buộc về "các hệ số của ẩn không đồng thời bằng 0" đã từng xuất hiện.

"Nhắc lại rằng phương trình bậc nhất hai ẩn (x và y) là phương trình dạng

ax + by = c (với $a^2 + b^2 \neq 0$)." (M_1, tr.74)

"Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng

ax + by = c

trong đó x và y là hai ẩn ; a, b, c là các số đã cho, với điều kiện *a và b không đồng thời bằng 0.*" (M_2, tr.74)

Qua đó, các tác giả mong muốn :

"… giúp cho việc giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn ở tiết sau được đơn giản hơn, đồng thời khi biểu diễn hình học ta đưa ngay về đồ thị hàm số bậc nhất." (G_2, tr.68)

Phù hợp với mong muốn này, G_2 cũng lưu ý :

"Trước khi định nghĩa hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn, nên cho học sinh nhắc lại định nghĩa phương trình bậc nhất hai ẩn ax + by = c với điều kiện a và b không đồng thời bằng 0. Sau đó việc định nghĩa hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn sẽ <u>đơn giản</u>." (G_2, tr.73)

Vậy *"sự đơn giản hơn"* đó sẽ được thể hiện ở đâu và như thế nào trong quá trình giải và biện luận hệ (2, 2) có chứa tham số khi hệ phương trình đã thỏa $a^2 + b^2 \neq 0,\ a'^2 + b'^2 \neq 0$?

[(1)] Xem lại mục 2.2.2.1.

[(2)] Khi xem xét [65, tr.133], chúng tôi nhận thấy thể chế dạy học ở Pháp đã không hề đưa ra bất cứ điều kiện nào về hệ số của phương trình bậc nhất hai ẩn cũng như của hệ (2, 2).

Theo như cách xây dựng kỹ thuật Cramer được mô tả trong các SGK, điều kiện "$a^2 + b^2 \neq 0,\ a'^2 + b'^2 \neq 0$" (*) chỉ thật sự có ý nghĩa đối với trường hợp $D = D_x = D_y = 0$ [(1)]. Nói rõ hơn, trong trường hợp này, nếu không có điều kiện (*) thì hệ hoặc vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm ; còn với điều kiện (*), có thể kết luận ngay rằng hệ có vô số nghiệm. Chính vì thế mà có lẽ sự xuất hiện của điều kiện (*) sẽ làm đơn giản hơn quá trình biện luận.

Như vậy, ràng buộc về điều kiện (*) đã dẫn đến sự khác biệt giữa kỹ thuật Cramer $\tau_{Cramer}^{(2,\,2)}$ trong SGK phổ thông với kỹ thuật Cramer τ_{Cramer} trong giáo trình đại học. Cụ thể là trong trường hợp tất cả các định thức triệt tiêu, với $\tau_{Cramer}^{(2,\,2)}$, ta có thể kết luận ngay rằng hệ có vô số nghiệm còn với τ_{Cramer}, ta chưa thể khẳng định gì (vì khi đó, hệ có thể vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm).

Tuy nhiên, trong SGK, điều kiện (*) và trường hợp $D = D_x = D_y = 0$ lại được đặt tách biệt nhau (nói cách khác, chúng không cùng nằm trong một bước biện luận). Điều này làm nảy sinh ở chúng tôi câu hỏi :

- *Liệu học sinh có nhận ra được mối liên hệ giữa điều kiện $a^2 + b^2 \neq 0,\ a'^2 + b'^2 \neq 0$ với trường hợp $D = D_x = D_y = 0$ hay không ?*

Có thể thấy, câu trả lời cho câu hỏi trên là hệ quả của quy tắc hợp đồng didactic R. Nghĩa là nếu thực nghiệm ở chương 4 chứng tỏ tính hợp thức của R thì điều đó cũng đồng thời nói lên rằng mối liên hệ giữa điều kiện $a^2 + b^2 \neq 0,\ a'^2 + b'^2 \neq 0$ và trường hợp $D = D_x = D_y = 0$ đã không được học sinh nhận ra. Từ đây cho phép chúng tôi khẳng định lại một lần nữa rằng kỹ thuật Cramer không phải là một algorit hiểu theo nghĩa chặt (vì như đã biết, với một algorit hiểu theo nghĩa chặt, các thao tác phải hết sức chặt chẽ và không thể gây nên sự nhập nhằng, lẫn lộn).

❖ Phần bài tập

Trong M_2, E_1 và E_2, tất cả các hệ phương trình đều được cho với điều kiện (*). Phải chăng vì thế mà các tác giả cho rằng không nhất thiết phải ghi ra bước kiểm tra điều kiện này?

Thế nhưng, ngay cả với hai hệ phương trình sau đây trong M_1 [(2)] :

Bài 23, câu a) (M_1, tr.85)

[(1)] Còn khi $D = 0$ mà D_x hoặc D_y khác 0 thì vì hệ vô nghiệm nên (*) không có cơ hội được sử dụng ; khi $D \neq 0$ (tương đương $ab' - a'b \neq 0$) thì trường hợp này đã bao hàm (*).

[(2)] Đây là hai hệ phương trình duy nhất trong M_1, M_2, E_1 và E_2 có các hệ số của ẩn chưa thỏa điều kiện (*).

Giải và biện luận các hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x + (a-2)y = a \\ (a+3)x + (a+3)y = 2a \end{cases}$$

Bài 61, câu b) (M_1, tr.100)

Giải và biện luận các hệ phương trình

$$\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - 3my = 2m + 3 \end{cases}$$

người ta cũng bắt đầu bằng việc tính D, D_x, D_y mặc dù $m^2 + (-3m)^2 = 10m^2$ và $(a+3)^2 + (a+3)^2 = 2(a+3)^2$ không phải luôn khác 0 với mọi giá trị của m hay mọi giá trị của a.

Điều này cho phép chúng tôi nhắc lại quy tắc của hợp đồng didactic R mà chúng tôi đã phát biểu khi phân tích phần lý thuyết trên đây :

R : *Học sinh không có trách nhiệm kiểm tra xem tổng bình phương các hệ số của ẩn trong mỗi phương trình có luôn khác 0 với mọi giá trị của tham số hay không.*

3.2.2.3. Nội dung "Ý nghĩa hình học của tập nghiệm"

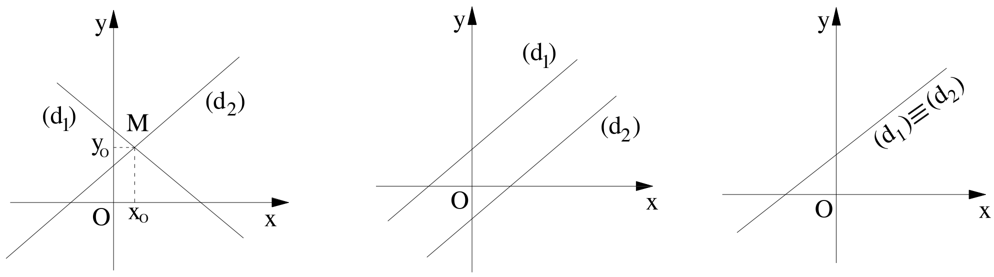
❖ **Phần lý thuyết**

Các SGK trình bày nội dung này chỉ vỏn vẹn qua mấy ý sau đây :

Trong M_1

"Giả sử (d) là đường thẳng ax + by = c và (d') là đường thẳng a'x + b'y = c'. Khi đó

1) Hệ (I) có nghiệm duy nhất ⇔ (d) và (d') cắt nhau.
2) Hệ (I) vô nghiệm ⇔ (d) và (d') song song với nhau.
3) Hệ (I) vô số nghiệm ⇔ (d) và (d') trùng nhau." (M_1, tr.78)

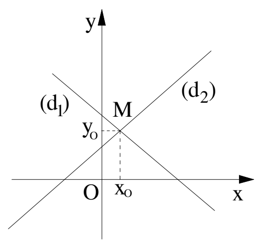
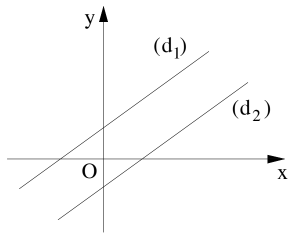
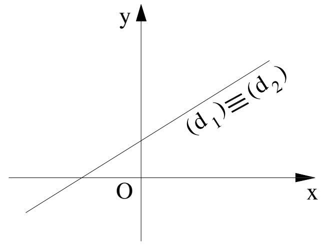


Trong M_2

"Trong tiết trước chúng ta đã biết tập nghiệm của các phương trình (1) và (2) lần lượt được biểu diễn bởi hai đường thẳng, kí hiệu là (d_1) và (d_2). Do đó, tập nghiệm của hệ (I) là tập các tọa độ điểm chung của (d_1) và (d_2).

- Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi (d_1) và (d_2) cắt nhau.
- Hệ (I) vô nghiệm khi và chỉ khi (d_1) và (d_2) song song với nhau.
- Hệ (I) vô số nghiệm khi và chỉ khi (d_1) và (d_2) trùng nhau." (M_2, tr.81)

Nếu các hệ số khác 0, ta có bảng

$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
		
Nghiệm duy nhất	Vô nghiệm	Vô số nghiệm

Nhận xét

Thoạt đầu, khi bắt gặp tiêu đề "Ý nghĩa hình học" (trong M_1) hay "Biểu diễn hình học của tập nghiệm" (trong M_2), chúng tôi rất hy vọng đây là một cơ hội để *phương diện ngữ nghĩa của kỹ thuật Cramer* được đề cập đến. Phương diện này thể hiện ở cách nhìn tập nghiệm của hệ phương trình dưới *"con mắt" giao điểm của hai đường thẳng*; nghĩa là nhận ra được mối liên hệ giữa ba trường hợp biện luận theo D, D_x, D_y với vị trí tương đối của hai đường thẳng (hay với ba trường hợp về hệ số góc và tung độ gốc của hai đường thẳng). Chẳng hạn, từ (hệ (2, 2) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ *(d)* và *(d')* cắt nhau) có thể suy ra là ($D \neq 0 \Leftrightarrow$ *(d)* và *(d')* cắt nhau) hay ($D \neq 0 \Leftrightarrow$ hệ số góc của hai đường thẳng khác nhau).

Với cách nhìn như thế, có thể khắc phục được tính hình thức và máy móc trong việc áp dụng các bước theo kỹ thuật Cramer.

Nhưng rõ ràng nội dung trên hoàn toàn không có gì mới hơn so với ở lớp 9. Mối liên hệ giữa các trường hợp biện luận theo D, D_x, D_y với các trường hợp về hệ số góc và tung độ gốc của hai đường thẳng đã không được xem xét. Vả lại, kèm theo phần trình bày hết sức sơ lược này đã không có lấy một ví dụ minh họa nào.

Từ đây, chúng tôi tự hỏi

- *Liệu học sinh có thiết lập được mối liên hệ giữa vị trí tương đối của hai đường thẳng với các trường hợp biện luận theo D, D_x, D_y trong kỹ thuật Cramer hay không?*

Mặt khác, như tiêu đề viết trong các SGK, người ta không đặt ra vấn đề giải và biện luận hệ phương trình bằng đồ thị mà chỉ là *"biểu diễn hình học của tập nghiệm"*. Như thế, với kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$, kỹ thuật hình học đã không được các tác giả quan tâm. Vậy nên ở đây, một lần nữa chúng tôi tự hỏi :

- *Trong trường hợp kỹ thuật hình học cho phép mang lại một lời giải tốt, liệu học sinh có biết vận dụng kỹ thuật này để giải và biện luận hệ (2, 2) hay không?*

❖ Phần bài tập

Trong M_1, xuất hiện một bài tập thuộc kiểu nhiệm vụ T_{Tc} *"Tìm điều kiện của tham số thỏa mãn yêu cầu của đề bài"*.

Bài 25 (M_1, tr.86)

Cho hai đường thẳng (d_1) : x + my = 3 và (d_2) : mx + 4y = 6.

1. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng cắt nhau?
2. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng ấy song song với nhau?
3. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng ấy trùng nhau?

Nhận xét

Để giải quyết bài 25, G_1 đã hướng dẫn sử dụng kỹ thuật Cramer. Chính vì vậy, có thể nói đây là một gạch nối liên hệ giữa vị trí tương đối của hai đường thẳng với các trường hợp về ba định thức D, D_x, D_y. Nhưng gạch nối này quả là rất *"mờ nhạt"* bởi trong M_1 (và cả trong M_2), chỉ có duy nhất một bài tập như thế. Chính điều này lại càng dẫn chúng tôi trở lại với câu hỏi trên đây :

- *Liệu học sinh có thiết lập được mối liên hệ giữa vị trí tương đối của hai đường thẳng với ba trường hợp biện luận theo D, D_x, D_y trong kỹ thuật Cramer hay không?*

Chúng tôi sẽ cố gắng tìm lời giải đáp cho câu hỏi này bằng thực nghiệm được trình bày ở chương 4.

3.2.2.4. Kết luận (sau khi phân tích M_1 và M_2)

- **Về TCTH gắn liền với hai kiểu nhiệm vụ T_R và $T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$**

Các thành phần của các TCTH gắn liền với hai kiểu nhiệm vụ T_R và $T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$ được thể hiện qua bảng dưới đây :

Kiểu nhiệm vụ	Nhiệm vụ	Kỹ thuật	Công nghệ	Lý thuyết
T_R *Giải hệ phương trình*	$t_R^{(2,\,2)}$ *Giải hệ (2, 2)*	$\tau_{Cr}^{(2,\,2)}$	$\theta_{Cramer}^{(2,\,2)}$	*Các phép biến đổi hệ phương trình tương đương*
	$t_R^{(3,\,3)}$ *Giải hệ (3, 3)*	$\tau_1^{(3,\,3)}$	$\theta^{(3,\,3)}$	
		$\tau_2^{(3,\,3)}$		
$T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$ *Giải và biện luận hệ (2, 2)*		$\tau_{Cramer}^{(2,\,2)}$	$\theta_{Cramer}^{(2,\,2)}$	

Với kiểu nhiệm vụ *"Giải hệ phương trình không chứa tham số"*, ba kỹ thuật $\tau_{Cr}^{(2,\,2)}$, $\tau_1^{(3,\,3)}$ và $\tau_2^{(3,\,3)}$ áp dụng cho những hệ phương trình có nghiệm *duy nhất*. Chúng đều là các algorit ($\tau_{Cr}^{(2,\,2)}$ hiểu theo nghĩa chặt, còn $\tau_1^{(3,\,3)}$ và $\tau_2^{(3,\,3)}$ thì hiểu theo nghĩa rộng). Tương ứng với $t_R^{(3,\,3)}$, $\tau_2^{(3,\,3)}$ dễ vận dụng hơn $\tau_1^{(3,\,3)}$.

Với kiểu nhiệm vụ *"Giải và biện luận hệ (2, 2) có chứa tham số"*, kỹ thuật Cramer không là algorit hiểu theo nghĩa chặt ; khi đó, trong thực hành giải và biện luận hệ phương trình, người ta cần thực hiện thêm nhiều thao tác biến đổi đại số hơn các thao tác mô tả trong kỹ thuật Cramer $\tau_{Cramer}^{(2,\,2)}$.

- **Về các kỹ thuật tham chiếu và các kỹ thuật cần giảng dạy**

Liên quan đến kiểu nhiệm vụ *"Giải hệ phương trình"*

Kiểu nhiệm vụ	Kỹ thuật	
$T_R^{(m,\,n)}$ *Giải hệ phương trình (m, n)*	giải trực tiếp	$\tau_{Cr}^{(n,\,n)}$ (giải hệ Cramer)
		$\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$ (đưa về hệ Cramer)
		τ_G (Gauss)
		$\tau_{G\text{-}J}$ (Gauss – Jordan)

<table>
<tr><th>Kiểu nhiệm vụ</th><th>Nhiệm vụ</th><th colspan="4">Kỹ thuật</th></tr>
<tr><td rowspan="3">T_R
Giải hệ phương trình</td><td>$t_R^{(2,\,2)}$
Giải hệ (2, 2)</td><td rowspan="3">đại số</td><td>$\tau_{Cr}^{(2,\,2)}$</td><td>vết của $\tau_{Cr}^{(n,\,n)}$</td><td>*thể hiện rõ nét*</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$t_R^{(3,\,3)}$
Giải hệ (3, 3)</td><td>$\tau_1^{(3,\,3)}$</td><td rowspan="2">vết của τ_G</td><td>*thể hiện không rõ nét*</td></tr>
<tr><td>$\tau_2^{(3,\,3)}$</td><td>*thể hiện rõ nét*</td></tr>
</table>

Kỹ thuật Gauss τ_G để lại đến ba vết là τ_c (ở lớp 9) và $\tau_1^{(3,\,3)}$, $\tau_2^{(3,\,3)}$ (ở lớp 10)).

Vết $\tau_2^{(3,\,3)}$ thể hiện rõ nét hơn vết $\tau_1^{(3,\,3)}$ vì : $\tau_2^{(3,\,3)}$ được mô tả cụ thể hơn $\tau_1^{(3,\,3)}$; các hệ số của hệ (3, 3) trong M_2 đòi hỏi kỹ năng khử ẩn tốt hơn trong M_1 và số bài tập tương ứng với nhiệm vụ $t_R^{(3,\,3)}$ trong M_2 nhiều hơn trong M_1.

Liên quan đến kiểu nhiệm vụ *"Giải và biện luận hệ phương trình"*

<table>
<tr><th>Kiểu nhiệm vụ</th><th colspan="2">Kỹ thuật</th><th>Đặc trưng của kỹ thuật</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$T_{R-D}^{(m,\,n)}$
Giải và biện luận hệ (m, n)</td><td colspan="2">τ_{Cramer}</td><td>Khi D = 0 và D_j = 0, hệ *vô nghiệm* hoặc *có vô số nghiệm.*</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\tau_{Cr}^{(m,\,n)}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">τ_G</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$\tau_{G\text{-}J}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$
Giải và biện luận hệ (2, 2)</td><td>$\tau_{Cramer}^{(2,\,2)}$</td><td>vết của τ_{Cramer}</td><td>Khi D = D_x = D_y = 0, hệ *có vô số nghiệm.*</td></tr>
</table>

Như vậy, liên quan đến các hệ số của ẩn, do có sự khác biệt về cách trình bày trong giáo trình đại học và trong SGK phổ thông nên dẫn đến sự khác biệt giữa $\tau_{Cramer}^{(2,\,2)}$ và τ_{Cramer} trong trường hợp các định thức bằng 0.

Hơn nữa, đối với kiểu nhiệm vụ "Giải và biện luận hệ phương trình", trong khi ở đại học, kỹ thuật Cramer có vị trí bình đẳng so với kỹ thuật Gauss thì ở lớp 10 phổ thông, nó lại tỏ ra lấn át các kỹ thuật đại số ở lớp 9.

- **Về các giả thuyết nghiên cứu**

Qua phân tích các SGK M_1 và M_2 liên quan đến algorit và tham số trong "Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn", chúng tôi còn rút ra được ba giả thuyết nghiên cứu sau đây :

Giả thuyết H_1 : Tương ứng với kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(2,\ 2)}$ "Giải và biện luận hệ (2, 2)", tồn tại quy tắc hợp đồng didactic :

> **R** : *Học sinh không có trách nhiệm kiểm tra xem tổng bình phương các hệ số của ẩn trong mỗi phương trình có luôn khác 0 với mọi giá trị của tham số hay không.*

Giả thuyết H_2 : Khi giải và biện luận hệ (2, 2), kỹ thuật đại số được ưu tiên hơn so với kỹ thuật hình học, ngay cả trong trường hợp kỹ thuật hình học cho phép mang lại một lời giải tốt.

Giả thuyết H_3 : Mối liên hệ giữa vị trí tương đối của hai đường thẳng với các bước biện luận theo D, D_x, D_y trong kỹ thuật Cramer chưa thật sự được thiết lập ở học sinh.

3.2.3. Kết luận (sau khi phân tích M_0, M_1 và M_2)

Phân tích mối quan hệ của thể chế đối với algorit và tham số trong "Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn" đã cho phép chúng tôi đưa ra các kết luận ở mục 3.2.1.3 và 3.2.2.4.

Như thế, trong các SGK phổ thông M_0, M_1 và M_2, các kỹ thuật giải hệ phương trình (2, 2), hệ phương trình (3, 3) là những algorit (hiểu theo nghĩa rộng hoặc nghĩa chặt). Ở lớp 9, để giải hệ (2, 2) không chứa tham số, hai kỹ thuật thế và cộng đại số luôn được ưu tiên hơn so với kỹ thuật hình học. Lên lớp 10, sự xuất hiện của tham số một mặt cản trở các kỹ thuật *"cũ"* tham gia vào việc giải và biện luận, mặt khác lại khích lệ sự ra đời của một kỹ thuật giải *"mới"*, đó là kỹ thuật Cramer. Kỹ thuật này chỉ cho phép giải quyết tốt mọi hệ (2, 2) có chứa tham số với điều kiện tổng bình phương các hệ số của ẩn trong mỗi phương trình của hệ đã luôn khác 0 với mọi giá trị của tham số.

3.3. KẾT LUẬN CHƯƠNG 3

Phân tích mối quan hệ thể chế với algorit và tham số trong dạy học chủ đề phương trình ở trường THPT và trong trường hợp cụ thể là "Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn" đã cho phép chúng tôi trả lời các câu hỏi Q_3, Q_4, Q_5 và Q_6 đặt ra.

Như vậy, trong các chương trình toán THPT, vùng sống nổi bật nhất và phong phú nhất của algorit và tham số là chủ đề về phương trình. Việc thực hành giải và biện luận phương trình chứa tham số theo một algorit sẽ góp phần hình thành cho học sinh khả năng suy luận hợp logic ; ngược lại, sự hiện diện của tham số đã phần nào khích lệ những hoạt động có tính algorit. Algorit để giải phương trình chứa tham số chủ yếu bao gồm các phép biến đổi đại số. Nói rõ hơn, để giải phương trình chứa tham số, kỹ thuật đại số luôn thể hiện rõ nét, còn kỹ thuật hình học (đồ thị) nhìn chung khá mờ nhạt. Hơn nữa, qua các giai đoạn khác nhau, trong khi algorit ngày càng được chú trọng thì bài toán chứa tham số ngày càng được giảm nhẹ về số lượng cũng như về mức độ, yêu cầu (xem lại mục 3.1).

Những kết quả nghiên cứu trong trường hợp tổng quát về các chủ đề “phương trình” cũng thể hiện rõ khi xem xét “Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn”. Ngoại trừ kỹ thuật hình học, các kỹ thuật đại số hiện diện trong bài học này đều là các algorit (một số hiểu theo nghĩa chặt còn một số hiểu theo nghĩa rộng). Cụ thể là có đến bốn algorit[(1)] để giải hệ không chứa tham số (trong đó, việc giới thiệu kỹ thuật Gao-xơ để giải hệ (3, 3) là một điểm mới của SGK thí điểm 10 so với các SGK trước đây). Ở lớp 10, chính sự phức tạp của quá trình “giải và biện luận” theo tham số đã tạo cơ hội cho việc bổ sung vào kỹ thuật Cramer (một algorit hiểu theo nghĩa rộng) nhằm giúp học sinh phân chia các trường hợp riêng một cách thuận lợi hơn (xem lại mục 3.2.1 và 3.2.2).

Việc phân tích SGK M_0 liên quan đến kiểu nhiệm vụ “Giải hệ (2, 2) không chứa tham số” đã cho phép chúng tôi làm rõ một số điều kiện và ràng buộc của thể chế dạy học đối với các kỹ thuật giải, đặc biệt là những ràng buộc đối với kỹ thuật hình học (xem lại mục 3.2.1.3).

Việc phân tích các SGK M_1 và M_2 liên quan đến kiểu nhiệm vụ “Giải và biện luận hệ (2, 2) có chứa tham số” còn giúp chúng tôi đã đưa ra ba giả thuyết nghiên cứu, trong đó có một giả thuyết về quy tắc hợp đồng didactic (xem lại mục 3.2.2.4).

Vấn đề là cần phải quay trở về thực tế dạy - học để kiểm chứng tính hợp thức của các giả thuyết này. Và việc giải quyết vấn đề đó cũng chính là một trong những mục đích nghiên cứu mà chúng tôi sẽ thực hiện ở chương sau.

---

(1) Kỹ thuật thế, cộng đại số, giải hệ Cramer và kỹ thuật Gao-xơ.

Chương 4

NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM

4.1. GIẢ THUYẾT VÀ MỤC ĐÍCH NGHIÊN CỨU

Liên quan đến algorit và tham số, phân tích trong chương 3 đã dẫn chúng tôi đến với ba giả thuyết nghiên cứu mà việc kiểm chứng tính thỏa đáng của chúng chính là mục đích của thực nghiệm.

H_1 : Tương ứng với kiểu nhiệm vụ $T_{R\text{-}D}^{(2,\,2)}$ "Giải và biện luận hệ (2, 2)", tồn tại quy tắc hợp đồng didactic :

R : *Học sinh không có trách nhiệm kiểm tra xem tổng bình phương các hệ số của ẩn trong mỗi phương trình có luôn khác 0 với mọi giá trị của tham số hay không.*

H_2 : Khi giải và biện luận hệ (2, 2), kỹ thuật đại số được ưu tiên hơn so với kỹ thuật hình học, ngay cả trong trường hợp kỹ thuật hình học cho phép mang lại một lời giải tốt.

H_3 : Mối liên hệ giữa vị trí tương đối của hai đường thẳng với các bước biện luận theo D, D_x, D_y trong kỹ thuật Cramer chưa thật sự được thiết lập ở học sinh.

4.2. PHƯƠNG PHÁP NGIÊN CỨU

Để đạt được mục đích trên, chúng tôi tiến hành thực nghiệm trên hai đối tượng : giáo viên và học sinh (thực nghiệm về phía giáo viên được tiến hành trước).

- *Về phía giáo viên* : Chúng tôi dự định thăm dò ý kiến của một số giáo viên dạy toán 10 qua bộ câu hỏi điều tra. Sẽ có câu hỏi mà trong đó chúng tôi cần đặt giáo viên trước những ứng xử của học sinh không phù hợp với điều giáo viên mong đợi. Chính đánh giá của giáo viên về những ứng xử này cũng cho ta thấy được hiệu ứng của hợp đồng didactic R.

- *Về phía học sinh* : Học sinh sẽ làm việc cá nhân (hoặc theo nhóm) nhằm giải quyết các bài toán đặt ra. Những bài toán này đối với học sinh "quen thuộc" hoặc "dường như quen thuộc". Việc phân tích những câu trả lời do học sinh cung cấp, những cách sử dụng tri thức của học sinh một mặt sẽ chỉ ra cho chúng tôi hiệu ứng của hợp đồng didactic, mặt khác còn cho phép chúng tôi hợp thức hóa hay bác bỏ tính thỏa đáng của những giả thuyết đã nêu ra.

4.3. VỀ PHÍA GIÁO VIÊN

4.3.1. Hình thức thực nghiệm

Thực nghiệm chủ yếu tiến hành trên giáo viên của hai trường : trường THPT Thị xã Cao Lãnh (1) (sử dụng bộ SGK của nhóm tác giả Đoàn Quỳnh) và trường THPT Nguyễn Trãi (2) (sử dụng bộ SGK của nhóm tác giả Trần Văn Hạo). Trong những trường hợp cần thiết, chúng tôi sẽ hỏi thêm ý kiến của một số giáo viên đang dạy theo chương trình CLHN 2000.

Dưới đây sẽ là phần phân tích bộ câu hỏi điều tra và những câu trả lời nhận được.

4.3.2. Giới thiệu bộ câu hỏi điều tra

Từ nghiên cứu ở chương 3, chúng tôi đã soạn ra bộ câu hỏi thực nghiệm dành cho giáo viên. Bộ câu hỏi gồm 4 câu với mục đích như sau :

- *Câu 1* : nhằm tìm hiểu quan điểm của giáo viên về chủ đề phương trình có chứa tham số ở trường THPT.
- *Câu 2, 3 và 4* : nhằm kiểm chứng một phần (3) tính đúng đắn của ba giả thuyết nghiên cứu đã đề cập đến ở trên.

Câu hỏi	Kiểm chứng		
	H_1 (R)	H_2	H_3
Câu 2	x		
Câu 2		x	
Câu 2			x

Dưới đây là nội dung bộ câu hỏi điều tra dành cho giáo viên.

Câu 1

Thầy Cô nghĩ gì nếu trong tương lai, Bộ Giáo dục và Đào tạo quyết định *loại bỏ* các chủ đề phương trình, hệ phương trình, bất phương trình có chứa tham số ra khỏi chương trình toán ở bậc trung học phổ thông?

(1) Trường thuộc tỉnh Đồng Tháp.
(2) Trường thuộc tỉnh Đồng Nai.
(3) “Một phần” nghĩa là chỉ mới có thể kiểm chứng các giả thuyết nghiên cứu trên đối tượng giáo viên.

Câu 2

Bài toán sau dành cho học sinh lớp 10 :

An và Bình cùng giải và biện luận hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer (định thức cấp hai) :

$$(*)\quad \begin{cases}(m-1)x+(m^2-1)y=0\\ m(m-1)x+(1-m^2)y=1\end{cases}\qquad (\textit{m là tham số})$$

nhưng khi tìm được giá trị của m sao cho $D = D_x = D_y = 0$, mỗi bạn lại đưa ra kết luận trong trường hợp này như sau :

An : "Hệ (*) *có vô số nghiệm*."

Bình : "Hệ (*) *vô nghiệm*."

Theo em, bạn nào có lý? Giải thích sự lựa chọn của em.

Dưới đây là lời giải thích của hai em học sinh.

Lời giải A

Ta có :

$$D = \begin{vmatrix} m-1 & m^2-1\\ m(m-1) & 1-m^2\end{vmatrix} = m^4 - 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & m^2-1\\ 1 & 1-m^2\end{vmatrix} = m^2 - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m-1 & 0\\ m(m-1) & 1\end{vmatrix} = m - 1$$

Bạn Bình nói đúng vì với $D = D_x = D_y = 0$ thì m = 1. Thế m = 1 vào hệ phương trình (*), ta được : $\begin{cases}0=0\\ 0=1\end{cases}$ (Vô lý). Vậy trong trường hợp này, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải B

Trước tiên, ta xét :

$(m-1)^2 + (m^2-1)^2 = (m-1)^2\,[1 + (m+1)^2]$ khác 0 khi $m \neq 1$.

$[m(m-1)]^2 + (1-m^2)^2 = (m-1)^2\,[m^2 + (m+1)^2]$ khác 0 khi $m \neq 1$.

Tiếp theo, ta tính các định thức D, D_x, D_y (tính như trên).

Khi $D = D_x = D_y = 0$, suy ra m = 1 : mâu thuẫn với điều kiện $m \neq 1$.

Do đó, trong trường hợp này, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy bạn Bình nói đúng.

Với hai lời giải trên đây, Thầy Cô mong đợi lời giải nào nhất? Xin vui lòng cho biết lí do?

Câu 3

Cho bài toán :

Hãy giải hệ phương trình sau bằng nhiều phương pháp khác nhau.

$$\begin{cases} mx + y = m \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Theo Thầy Cô, học sinh lớp 10 có biết giải và biện luận hệ phương trình trên bằng nhiều phương pháp khác nhau hay không?

Nếu có thì những phương pháp nào có khả năng được học sinh sử dụng?

Câu 4

Sau khi giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng định thức (quy tắc Cramer), Thầy Cô có yêu cầu học sinh nhìn lại mối liên hệ giữa vị trí tương đối của hai đường thẳng với các trường hợp biện luận theo ba định thức D, D_x, D_y trong quy tắc Cramer hay không?

a) Thường xuyên
b) Ít khi
c) Chưa bao giờ

Xin Thầy Cô vui lòng cho biết lí do vì sao.

4.3.3. Phân tích bộ câu hỏi điều tra

4.3.3.1. Câu hỏi 1

Nghiên cứu ở chương 3 chỉ ra rằng qua các lần thay đổi chương trình và SGK, chủ đề phương trình chứa tham số ngày càng được giảm nhẹ về số lượng cũng như về mức độ yêu cầu. Tuy nhiên, với tư cách là những người trực tiếp truyền thụ kiến thức cho học sinh, các giáo viên có thật sự mong mỏi như vậy không hay họ chỉ bị buộc thực hiện đúng theo những gì mà Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định? Câu hỏi thứ nhất sẽ cho phép chúng tôi tìm hiểu điều đó. Trong câu hỏi này, chúng tôi đưa ra tình huống giả định trong tương lai, bởi vì với một chủ trương vẫn còn nằm trong mệnh đề "nếu…", có lẽ giáo viên sẽ dễ tỏ rõ quan điểm hơn.

Với câu hỏi 1, chúng tôi dự đoán rằng ít có giáo viên chấp nhận quyết định này của Bộ. Nói rõ hơn, tính "truyền thống" vốn có của phương trình chứa tham số trong dạy học toán ở trường THPT Việt nam có thể sẽ khiến cho giáo viên chưa muốn "loại bỏ" chủ đề này.

4.3.3.2. Câu hỏi 2

Trong câu hỏi này, chúng tôi đã đặt giáo viên vào tình huống mà cả hai lời giải giả định A và B đều mang lại kết quả đúng. Chính sự lựa chọn và đánh giá của giáo viên về hai lời giải này sẽ giúp chúng tôi nhận ra được hiệu ứng của hợp đồng didactic R.

Phân tích ở chương 3 cho phép chúng tôi dự đoán rằng B sẽ là lời giải không phù hợp với điều mà giáo viên mong đợi.

4.3.3.3. Câu hỏi 3

Hệ phương trình trong câu hỏi 3 hoàn toàn có thể được giải quyết một cách nhanh chóng bởi 4 kỹ thuật (*thế, cộng đại số,Cramer,* thậm chí là kỹ thuật *hình học*). Ở đây, các câu trả lời của giáo viên sẽ cho phép chúng tôi kiểm chứng sự hợp thức của giả thuyết H_2.

4.3.3.4. Câu hỏi 4

Câu hỏi 4 liên quan đến giả thuyết H_3.

"Nghĩa hình học [(1)] của các bước biện luận trong kỹ thuật Cramer *rất ít* được các SGK nhắc đến. Chỉ có duy nhất một bài tập thuộc M_1 (bài 25, tr.86) mang lại cơ hội cho học sinh nhận ra được mối quan hệ giữa vị trí tương đối của hai đường thẳng với các trường hợp biện luận theo ba định thức D, D_x, D_y trong kỹ thuật Cramer*"*. Đó là một trong số những kết quả mà chúng tôi rút ra được từ nghiên cứu các SGK M_1 và M_2. Còn trong thực hành giảng dạy, giáo viên đã chú ý đến vấn đề này hay chưa? Căn cứ vào câu trả lời của giáo viên cho câu hỏi 4, chúng tôi có thể kiểm chứng một phần tính đúng đắn của giả thuyết H_3.

4.3.4. Phân tích các câu trả lời nhận được từ giáo viên

Sau khi gởi phiếu tham khảo ý kiến đến giáo viên, chúng tôi nhận được hồi âm của 35 người. Cũng cần nói thêm rằng vì đây là năm thứ ba thí điểm nên các giáo viên đã có ít nhiều kinh nghiệm trong việc dạy toán 10 phân ban. Hơn thế, hầu hết các thầy cô giáo mà chúng tôi tham khảo ý kiến đều có thâm niên công tác trung bình là 15 năm trở lên. Do đó, chúng tôi rất hy vọng những câu trả nhận được sẽ có tính khách quan cao.

4.3.4.1. Câu hỏi 1

[(1)] *"Nghĩa hình học"* được hiểu là mối liên hệ giữa vị trí tương đối của hai đường thẳng với các trường hợp biện luận theo ba định thức D, D_x, D_y trong Cramer.

Cả 35/35 giáo viên đều không chấp nhận quyết định *"loại bỏ* các chủ đề phương trình, hệ phương trình, bất phương trình có chứa tham số*"* của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Tựu trung lại, có hai nhóm ý kiến sau đây :

– *Không nên loại bỏ*

– *Không loại bỏ hẳn*

Đi kèm theo đó là 32 lời giải thích và đề nghị có nội dung được tóm tắt lại như sau:

Ý kiến		***Giải thích***		***Đề nghị***	
35	***"Không nên"*** hay ***"Không nên loại bỏ hẳn"***	**32**	- Vì đây là phần giúp học sinh rèn luyện tư duy logic khi xét hết các trường hợp xảy ra của bài toán. - Vì tham số đóng một phần quan trọng trong tư duy toán học. - Vì dựa vào mục tiêu của môn toán ở bậc THPT, tùy theo yêu cầu của từng ban, chủ đề trên được giới thiệu với mục đích rèn khả năng suy luận logic.	**32**	- Chỉ cho ở số lượng ít. - Chỉ nên đưa dưới dạng bài tập đơn giản để củng cố cho học sinh điều kiện có nghiệm. - Chỉ bỏ bớt các bài tập khó, phức tạp. - Chỉ để chúng ở mức độ "vừa phải". - Nên đưa chủ đề này vào các chuyên đề tự chọn, nâng cao. - Có thể giữ lại một số bài toán dạng đơn giản. - Không nên bỏ nhưng cũng đừng quá nặng nề trong việc biện luận. - Không nên loại bỏ hoàn toàn. Học sinh ban KHTN cần được đào sâu về chuyên đề tham số, còn học sinh ban khoa học xã hội không cần thiết phải học chuyên đề này.

Liên quan đến câu hỏi 1, chúng tôi cũng đã tham khảo thêm ý kiến của 8 giáo viên (thuộc trường THPT Trần Quốc Toản – tỉnh Đồng Tháp) đang dạy theo chương trình CLHN 2000. Kết quả là tất cả giáo viên đều nhận định : *"Vì đây là một trong những chủ đề rất hay ở trường phổ thông nên không được loại bỏ"*, thậm chí có giáo viên còn nhấn mạnh : *"Không bao giờ có chuyện đó!"*.

Như vậy, đã có sự thay đổi trong quan điểm của giáo viên dạy theo chương trình thí điểm 2003. Rõ ràng 32/35 giáo viên có câu trả lời đều rất ý thức về tính phức tạp của bài toán giải và biện luận phương trình chứa tham số. Theo họ, việc giảm tải là cần thiết; *"giảm tải"* chứ không *"loại bỏ"* bởi đây là chủ đề mang lại nhiều cơ hội để rèn luyện tư duy logic cho học sinh.

4.3.4.2. Câu hỏi 2

Cả 35/35 giáo viên được hỏi đều cho rằng lời giải mà họ mong đợi nhất là lời giải A. Sau đây là một số lời giải thích tiêu biểu của giáo viên [1] về sự lựa chọn đó :

Giải thích :

P_6 : Thật ra, việc kiểm tra điều kiện $a^2 + b^2 \neq 0$, $a'^2 + b'^2 \neq 0$ như lời giải B là không cần thiết bởi vì trong trường hợp D = D_x = D_y = 0, ta chỉ cần hướng dẫn học sinh thế giá trị của tham số vào hệ phương trình là sẽ tìm ra tập nghiệm của hệ như với lời giải A.
P_{18} : Để tránh cho học sinh nhiều rắc rối trong việc giải và biện luận hệ này, nên làm theo lời giải A.
P_{23} : Lời giải B tuy đúng nhưng quá nặng nề đối với học sinh lớp 10.
P_{24} : Không cần thiết kiểm tra các hệ số như lời giải B vì học sinh mất nhiều thời gian khi giải toán và lúng túng trong tính toán.
P_{31} : Cả hai lời giải đều đúng. Tuy nhiên, trong thực hành, nên làm theo lời giải A, còn nếu thực hiện theo lời giải B thì không cần tách riêng việc kiểm tra điều kiện $a^2 + b^2$ và $a'^2 + b'^2$ mà chỉ cần kiểm tra $a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2$ có khác 0 với mọi giá trị của tham số hay không.

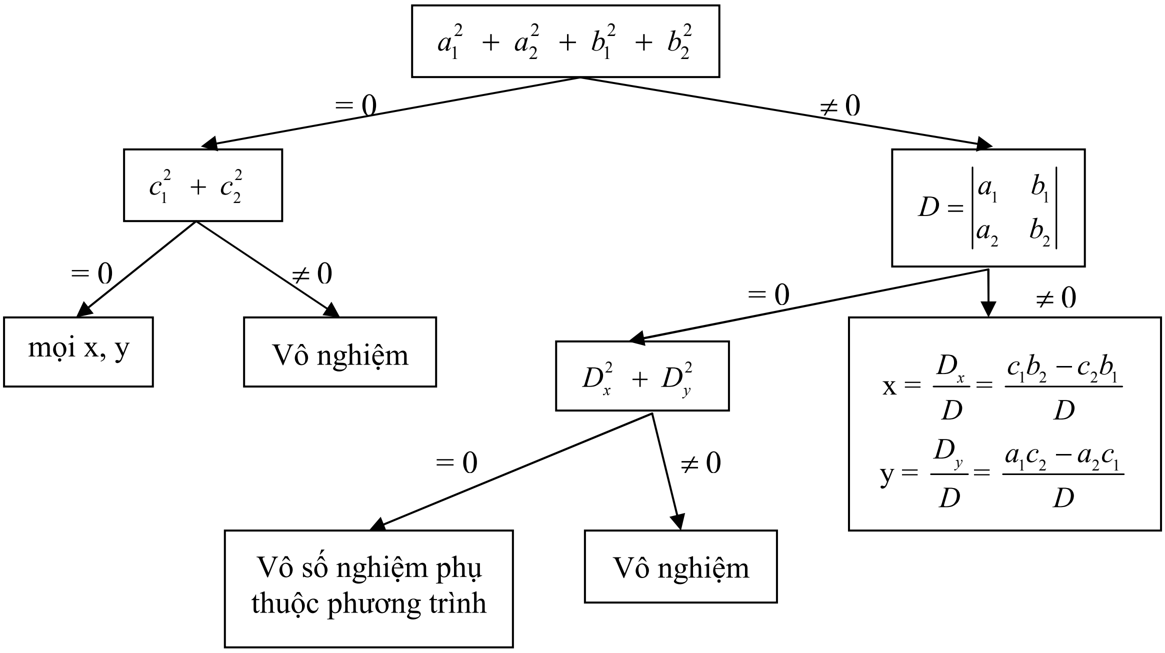
Như thế, B không phải là lời giải mong đợi của giáo viên. Điều này nói lên rằng quy tắc hợp đồng didactic R đã được kiểm chứng một phần (về phía giáo viên).

Ngoài ra, trong số các câu trả lời nhận được, chúng tôi còn chú ý đến 2 lời giải thích tương tự như ý kiến của giáo viên P_{31}. Có thể thấy vấn đề ở đây là kiểm tra tổng $a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2$ có khác 0 với mọi giá trị của tham số hay không. Điều đáng nói là điều kiện này không hề có mặt trong SGK thí điểm cũng như các SGK trước đó.

Để lý giải cách ứng xử này của giáo viên, chúng tôi đã tìm được một số tài liệu, chẳng hạn, trong [49], người ta có đưa ra sơ đồ cho phép biện luận nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ như sau :

Sơ đồ

[1] Chúng tôi mã hóa tên gọi giáo viên bởi kí hiệu P_1, P_2, …, P_{35}.



Như vậy là mối quan hệ cá nhân của một bộ phận giáo viên với việc kiểm tra các hệ số của ẩn đã không chịu ảnh hưởng hoàn toàn của mối quan hệ của thể chế dạy học ở trường THPT với việc kiểm tra các hệ số của ẩn trong hệ phương trình (2, 2) có chứa tham số.

4.3.4.3. Câu hỏi 3

Có 35/35 giáo viên trả lời câu hỏi 3.

Theo giáo viên, các kỹ thuật giải mà học sinh có thể sử dụng là :

Kỹ thuật	Số lượng giáo viên
hình học	1
thế	35
cộng đại số	27
Cramer	35
hệ số góc – tung độ gốc	2

Chỉ có 1/35 giáo viên đề cập đến kỹ thuật hình học.

Như thế, trong khi các kỹ thuật đại số (Cramer, thế, cộng đại số) chiếm ưu thế thì kỹ thuật hình học lại rất ít được học sinh biết đến, mặc dù nó cũng dễ dàng cho phép giải và biện luận hệ $\begin{cases} mx + y = m \\ x + 2y = 1 \end{cases}$. Điều này đồng nghĩa với việc giả thuyết H_2 đã được kiểm chứng (về phía giáo viên).

Còn với kỹ thuật dựa vào hệ số góc và tung độ gốc của hai đường thẳng, dù nó chỉ cho phép *biện luận số nghiệm* chứ không thể tìm được nghiệm nhưng giáo viên cho rằng học sinh cũng có khả năng sử dụng đến.

Bên cạnh việc chỉ ra các kỹ thuật khác, một số giáo viên còn lưu ý thêm :

- Kỹ thuật thế nhiều hơn - Kỹ thuật cộng đại số ít hơn.
- Chỉ có học sinh khá - giỏi mới giải theo cách khác, đặc biệt là kỹ thuật hình học.
- Rất ít học sinh biết đầy đủ các kỹ thuật. Học sinh chỉ có thể sử dụng một vài kỹ thuật ở lớp 9 như cộng, thế.
- Học sinh khá - giỏi mới biết dùng kỹ thuật thế, cộng đại số để giải và biện luận.
- Sử dụng kỹ thuật thế hay kỹ thuật cộng đại số đã học ở lớp 9 hoặc xét vị trí tương đối giữa hai đường thẳng thông qua hệ số góc của chúng.

Điều này cho thấy ngay cả với kỹ thuật thế và kỹ thuật cộng đại số, theo giáo viên, không phải tất cả học sinh đều nghĩ đến mà thường chỉ có học sinh khá – giỏi mới biết sử dụng chúng. Khi được hỏi "Tại sao?", đa số giáo viên cho rằng vì học sinh chỉ quen giải và biện luận bằng định thức hoặc vì sử dụng kỹ thuật thế hay kỹ thuật cộng đại số sẽ dẫn đến việc giải và biện luận phương trình bậc nhất một ẩn theo x (hoặc y), nhưng sau đó học sinh thường không biết suy ngược trở lại y (hoặc x).

4.3.4.4. Câu hỏi 4

Bảng thống kê :

Lựa chọn	Số lượng giáo viên	Giải thích
a) ***Thường xuyên***	**4**	- Giúp học sinh nhìn nhận tập nghiệm của hệ (2, 2) khi nào là một điểm, một đường thẳng hay toàn bộ mặt phẳng tọa độ. - Vì bài toán này cũng chính là bài toán biện luận sự tương giao giữa hai đường thẳng có phương trình là hai phương trình có mặt trong hệ. - Vì phát hiện ngay tập nghiệm. - Tư duy bằng hình ảnh bao giờ cũng gần gũi với học sinh hơn. - Giúp học sinh hiểu được phần nào sự tương quan giữa các lĩnh vực toán học (cụ thể : đại số và hình học).
b) ***Ít khi***	**26**	- Tùy theo từng đối tượng học sinh ở các lớp *khá giỏi* hay *trung bình.* - Chỉ nói qua dưới dạng tổng quát để học sinh hiểu được ý nghĩa hình học của tập nghiệm của hệ phương trình còn khi giải hệ phương trình cụ thể thì chỉ lập luận để cho ra kết quả thôi.

		- Khi biện luận, ít chú ý về ý nghĩa hình học. Tuy nhiên, khi giải phương trình bình thường sẽ nhắc đến ý nghĩa hình học của tập nghiệm. - Ý nghĩa hình học của tập nghiệm được trình bày trong SGK, chỉ yêu cầu học sinh nhìn lại nếu thấy cần thiết. - Vì đa số học sinh trong lớp là *trung bình yếu*. - Việc đó không thật cần thiết nếu ý hỏi là "giải và biện luận hệ phương trình". - Có 3 lý do : + Chương trình học còn quá nhiều vấn đề khác nữa ; + Việc vẽ đồ thị trên bảng gây tốn thời gian lại lạc hậu ; + Điều kiện trang thiết bị dạy học còn thiếu thốn nên rất khó có được phòng máy vi tính để biểu diễn hệ phương trình đường thẳng chứa tham số. - Vì thời gian không cho phép và tùy đối tượng học sinh (ở đối tượng *khá - giỏi* thường lưu ý điều này). - Học sinh đã học trong SGK và được nhắc lại khi học vị trí tương đối của hai đường thẳng trong hình học giải tích. - Bài toán không yêu cầu thì khỏi làm. Vả lại, thi không có kiểu câu hỏi này. - Vì ít khi dạy hình học giải tích trong mặt phẳng. - Chỉ với học sinh *khá - giỏi*, còn với học sinh khác thì không cần thiết.
c) ***Chưa bao giờ***	**5**	- Vì thật sự không cần thiết. - Vì học sinh còn mơ hồ khi biểu diễn hình học của tập nghiệm ax + by = c. - Vì trình độ của học sinh chỉ ở mức *trung bình.* - Vì trong thi cử, đề toán không đòi hỏi phải hình dung như thế, nhất là việc giải xong một bài toán về biện luận hệ đã là cả một vấn đề đối với học sinh.

31/35 giải thích tương ứng với lựa chọn *"ít khi"* và *"chưa bao giờ"* chứng tỏ các giáo viên này đã chưa quan tâm đúng mức đến việc cho học sinh nhận ra nghĩa hình học của kỹ thuật Cramer. Trong số đó, có 13 giáo viên nói rằng do học sinh học yếu hay trung bình.

Còn trong số 4 lựa chọn *"thường xuyên",* chúng tôi được biết có một giáo viên đang dạy tại lớp mà học lực của học sinh rất tốt : lớp $10A_6$ của trường THPT Thị xã Cao Lãnh.

Tất cả những lời giải thích liên quan đến trình độ của học sinh như thế đã làm nảy sinh ở chúng tôi câu hỏi :

- *Phải chăng việc khắc sâu "nghĩa hình học" của các bước biện luận trong kỹ thuật Cramer chỉ nên dành cho đối tượng học sinh khá - giỏi trở lên ?*

4.3.5. Kết luận

Những câu trả lời nhận được tương ứng với câu hỏi 1 cho thấy : theo giáo viên, giảm tải số lượng bài tập và yêu cầu đối với các chủ đề phương trình có chứa tham số là cần thiết nhưng không loại bỏ vì có thể khai thác chúng để rèn luyện tư duy logic cho học sinh. Một số ý kiến còn cho rằng nên đưa "phương trình chứa tham số" vào các chuyên đề tự chọn hoặc nâng cao ; nghĩa là việc học hay không chủ đề này không phải là một yêu cầu bắt buộc mà tùy ở nguyện vọng của học sinh.

Ngoài ra, kết quả thực nghiệm tương ứng với các câu hỏi 2, 3 và 4 còn cho phép chúng tôi kiểm chứng tính hợp thức của quy tắc hợp đồng didactic R (thuộc giả thuyết H_1) cùng hai giả thuyết H_2 và H_3.

Trong quá trình kiểm chứng quy tắc R, chúng tôi còn nhận thấy ở một bộ phận giáo viên, khi giải và biện luận hệ (2, 2), vấn đề chỉ cần kiểm tra xem có ít nhất một hệ số của ẩn có khác 0 hay không mà thôi.

Ngoài ra, liên đến giả thuyết H_3, chúng tôi còn đặt ra câu hỏi :

- *Phải chăng việc khắc sâu "nghĩa hình học" của các bước biện luận trong kỹ thuật Cramer chỉ nên dành cho đối tượng học sinh khá - giỏi trở lên ?*

Chúng tôi hy vọng câu hỏi này sẽ được làm sáng tỏ khi chúng tôi tiến hành thực nghiệm trên đối tượng học sinh.

4.4. VỀ PHÍA HỌC SINH

4.4.1. Hình thức thực nghiệm

Thực nghiệm được tiến hành trên 192 học sinh của bốn lớp 10 đang theo học chương trình thí điểm 2003. Trong 4 lớp tham gia thực nghiệm, có hai lớp thuộc trường THPT Thị xã Cao Lãnh (với 89 học sinh), sử dụng bộ sách của nhóm tác giả Đoàn Quỳnh và hai lớp thuộc trường THPT Nguyễn Trãi (với 103 học sinh), sử dụng bộ sách do Trần Văn Hạo làm tổng chủ biên.

Thời điểm thực nghiệm được triển khai sau khi học sinh đã học xong bài "Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn".

Tổng thời gian thực nghiệm dành cho ba bài toán là 40 phút. Đối với bài 1 và bài 3, học sinh làm việc cá nhân (mỗi bài trong khoảng 10 phút). Còn với bài 2, học sinh làm việc theo nhóm (trong khoảng 20 phút).

Nhằm tránh cho học sinh không thể tham chiếu vào câu hỏi của bài sau để trả lời cho bài trước, chúng tôi đã không cung cấp ba bài toán cùng lúc mà cho học sinh giải quyết từng bài một ; sau khi thu lại lời giải của bài tập trước, chúng tôi mới giới thiệu đề của bài tập kế tiếp.

Với bài 2, chúng tôi đã phát cho từng nhóm nhiều tờ giấy bài làm cùng lúc nhằm :

- tạo thuận lợi cho sự phân công công việc giữa các thành viên vì sau khi bàn bạc, thống nhất ý kiến với các học sinh khác, mỗi cá nhân có thể chọn một chiến lược để trình bày mà không bị phụ thuộc vào một tờ giấy làm bài duy nhất ;
- tiết kiệm được thời gian cho hoạt động này.

Để tìm hiểu rõ hơn *"thành phần tư"* của học sinh, chúng tôi đã thu lại giấy nháp và yêu cầu học sinh không được tẩy xóa trên tờ giấy bài làm.

Một số bài giải của học sinh sẽ được giới thiệu trong phần phụ lục.

4.4.2. Giới thiệu hệ thống bài toán thực nghiệm

Chúng tôi xây dựng 3 bài toán thực nghiệm với nội dung cụ thể như sau :

Bài 1 *(làm việc cá nhân)*

Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) tùy theo giá trị của tham số m :

$$(d_1):\ mx+(m-1)y=m$$

$$(d_2):\ (m+1)x+(m+1)y=2m$$

Bài 2 *(làm việc theo nhóm)*

Hãy giải hệ phương trình sau bằng *nhiều phương pháp khác nhau*.

$$\begin{cases} mx+y=m & (d_1) \\ x+2y=1 & (d_2) \end{cases}$$

Nhóm *thắng cuộc* là nhóm có nhiều phương pháp giải nhất.

Bài 3 *(làm việc cá nhân)*

An và Bình cùng giải và biện luận hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer (định thức cấp hai) :

(*) $\begin{cases}(m-1)x+(m^2-1)y=0\\ m(m-1)x+(1-m^2)y=1\end{cases}$ (*m là tham số*)

nhưng khi tìm được giá trị của m sao cho D = D_x = D_y = 0, mỗi bạn lại đưa ra kết luận trong trường hợp này như sau :

An : "Hệ (*) *có vô số nghiệm*."

Bình : "Hệ (*) *vô nghiệm*."

Theo em, bạn nào có lý? Giải thích sự lựa chọn của em.

Thông qua các bài toán trên, chúng tôi muốn kiểm chứng tính hợp thức của ba giả thuyết nghiên cứu, cụ thể là :

Bài toán	Kiểm chứng		
	H_1(R)	H_2	H_3
Bài 1	x		x
Bài 2	x	x	
Bài 3	x		

4.4.3. Phân tích a priori hệ thống các bài toán thực nghiệm

4.4.3.1. Phân tích a priori tổng quát

a) Các chiến lược có thể

Kỹ thuật Cramer để giải và biện luận hệ (2, 2) luôn được chú trọng. Tuy nhiên, như đã phân tích, các kỹ thuật thế, cộng đại số và hình học rất có khả năng ảnh hưởng đến thực hành giải và biện luận hệ (2, 2) của học sinh dù rằng không phải lúc nào chúng cũng được tạo thuận lợi. Từ đó, chúng tôi dự đoán một số chiến lược giải có thể xuất hiện ở học sinh như sau :

- **S_s : *Chiến lược "thế"*** : sử dụng kỹ thuật thế để giải và biện luận hệ (2, 2) có chứa tham số.
- **S_c : *Chiến lược "cộng"*** : sử dụng kỹ thuật cộng đại số để giải và biện luận hệ (2, 2) có chứa tham số.
- **S_{Cr} : *Chiến lược "Cramer"*** : sử dụng kỹ thuật Cramer để giải và biện luận hệ (2, 2) có chứa tham số.
- **S_g : *Chiến lược "hình học"*** : sử dụng đồ thị để giải và biện luận hệ (2, 2) có

chứa tham số.

S_s, S_c và S_{Cr} được xếp vào nhóm chiến lược *"đại số"*.

Hơn nữa, từ những lưu ý của giáo viên (tương ứng với câu hỏi 3), chúng tôi còn dự đoán thêm chiến lược sau đây :

- **S_d : *Chiến lược "hệ số góc – tung độ gốc"*** : dựa vào hệ số góc và tung độ gốc của hai đường thẳng để biện luận *số nghiệm* của hệ (2, 2).

Rõ ràng, với việc cho phép biện luận số nghiệm của hệ phương trình, chiến lược S_d chỉ đáp ứng vế sau của kiểu nhiệm vụ "giải và biện luận".

b) Biến

Việc xây dựng hệ thống bài toán thực nghiệm đặt cơ sở chủ yếu trên các biến didactic và biến tình huống sau đây :

❖ **Biến didactic**

- **Biến V_1 : Mật độ xuất hiện của tham số**

Phân tích trong chương 3 cho thấy chiến lược *"Cramer"* tỏ ra rất hiệu quả trong việc giải và biện luận mọi hệ (2, 2) có chứa tham số ; còn các chiến lược *"thế"* và *"cộng"* được xét đến với điều kiện tham số chỉ hiện diện tại một số ít các hệ số [1]. Riêng chiến lược *"hình học"*, tuy rất khó có cơ hội vận dụng được nhưng nếu như tham số càng ít xuất hiện thì rất có thể nó được khuyến khích vì khi đó, vị trí của đồ thị sẽ ít bị phụ thuộc vào sự thay đổi giá trị của tham số.

Tóm lại, chắc chắn mật độ xuất hiện của tham số có ảnh hưởng đến việc lựa chọn các chiến lược giải của học sinh. Thế nên, trước hết, chúng tôi chọn biến V_1 với các giá trị như sau :

- Giá trị V_{11} : *Tham số có mặt tại hầu hết các hệ số của ẩn.*
- Giá trị V_{12} : *Tham số chỉ có mặt tại một số ít các hệ số của ẩn.*

Từ những lý giải trên đây, rõ ràng là giá trị V_{11} tuy ngăn cản sự xuất hiện của S_s, S_c và S_g nhưng lại tạo ưu thế rõ rệt cho chiến lược S_{Cr}.

Ngược lại, bên cạnh sự hiện diện của S_{Cr}, giá trị V_{12} có khả năng mở lối để đưa vào các chiến lược S_s, S_c và S_g. Nói là *"mở lối"* bởi việc chúng có thật sự được vận dụng hay không thì điều đó còn phải phụ thuộc vào một số yếu tố khác mà tiêu biểu là việc lựa chọn giá trị của các biến V_2 và V_3 sẽ được trình bày ngay sau đây.

---

[1] Xem lại phần phân tích liên quan đến hệ (2, 2), mục 3.2.1.2 và nhận xét 1, mục 3.2.2.2.

- **Biến V_2 : Hệ số của ẩn**

Để S_s và S_c có cơ hội được tiếp cận hơn thì bên cạnh sự lựa chọn giá trị V_{12} (của biến V_1), trong khi soạn thảo đề toán, rất cần thiết phải bổ sung một trong hai giá trị sau đây của biến V_2 :

– Giá trị V_{21} : *Tồn tại một hệ số của một ẩn trong phương trình bằng 1 hoặc –1 (khi đó, cùng với S_{Cr}, chiến lược S_s có khả năng xuất hiện).*

– Giá trị V_{22} : *Hệ số của cùng một ẩn trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau (khi đó, cùng với S_{Cr}, chiến lược S_c có khả năng xuất hiện).*

- **Biến V_3 : Vị trí tương đối của hai đường thẳng (tạo bởi hai phương trình trong hệ)**

Biến này nhận các giá trị sau :

– Giá trị V_{31} : *Hai đường thẳng song song $\rightarrow$ tạo thuận lợi cho* S_g, S_d.

– Giá trị V_{32} : *Hai đường thẳng trùng nhau $\rightarrow$ tạo thuận lợi cho* S_g, S_d.

– Giá trị V_{33} : *Hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm (giả sử đó là M):*

+ V_{33a} : *M cố định (nghĩa là M không phụ thuộc vào tham số) $\rightarrow$ cổ vũ S_g xuất hiện vì khi đó, có thể dựa vào đồ thị để xác định được tọa độ của M.*

+ V_{33b} : *M không cố định (nghĩa là M phụ thuộc vào tham số) $\rightarrow$ không cổ vũ S_g xuất hiện vì khi đó, không thể dựa vào đồ thị để xác định tọa độ của M.*

- **Biến V_4 : Phạm vi thiết lập đề toán**

Hai phạm vi thiết lập đề toán mà chúng tôi xem xét ở đây là *đại số* và *hình học*. Chúng có ảnh hưởng đến việc lựa chọn chiến lược giải. Thật vậy :

Nếu những phát biểu hay ghi chú trong đề toán được diễn tả bằng ngôn ngữ hay kí hiệu của đại số, chẳng hạn như *"giải và biện luận hệ phương trình"*, thì sẽ thúc đẩy nhóm chiến lược đại số (S_s, S_c, S_{Cr}) xuất hiện ;

Còn nếu chúng được diễn tả bằng ngôn ngữ hay kí hiệu hình học, chẳng hạn như *"tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng"* hay *"xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng"*, thì sẽ khuyến khích các chiến lược S_g và S_d.

Tóm lại, biến V_4 được gán bởi hai giá trị :

– Giá trị V_{41} : *Phạm vi đại số (cổ vũ* S_s, S_c, S_{Cr}*).*

– Giá trị V_{42} : *Phạm vi hình học (cổ vũ S_g, S_d).*

❖ **Biến tình huống**

- **Biến V_5 : Tổng bình phương các hệ số của ẩn**

Trước hết, cần nhấn mạnh rằng sự thay đổi giá trị của biến V_5 sẽ không gây ra những thay đổi trong việc lựa chọn chiến lược giải. Biến V_5 chỉ được xét trong trường hợp giả định rằng học sinh đang sử dụng chiến lược *"Cramer"*. Khi đó, so với V_{51}, việc sử dụng giá trị V_{52} dưới đây chỉ nhằm để tăng tính thuyết phục của việc kiểm chứng quy tắc hợp đồng didactic R.

- Giá trị V_{51} : *Tổng bình phương các hệ số của ẩn luôn khác 0 với mọi giá trị của tham số.*
- Giá trị V_{52} : *Tổng bình phương các hệ số của ẩn có thể triệt tiêu, tùy theo giá trị của tham số.*

- **Biến V_6 : Số kỹ thuật giải được yêu cầu tìm** (mở hay đóng).

Biến V_6 có thể nhận hai giá trị sau :

– Giá trị V_{61} : *Số kỹ thuật giải không được chỉ rõ* (*yêu cầu mở*).

Khi đó, đề toán dạng này sẽ cho phép khai thác tất cả các kỹ thuật giải có thể hiện diện trong suy nghĩ hoàn toàn độc lập và chủ động của học sinh.

– Giá trị V_{62} : *Số kỹ thuật giải được chỉ rõ* (*yêu cầu đóng*).

Khi đó, vì yêu cầu này mang tính định hướng sẵn nên rất có thể chính từ việc học sinh cố tìm ra cho đủ số kỹ thuật sẽ dẫn đến sự hiện diện không mấy tự nhiên của một số kỹ thuật giải nào đấy. Mặt khác, có lẽ đề toán như thế sẽ không thúc đẩy một cách mạnh mẽ tinh thần cạnh tranh học tập giữa các nhóm.

- **Biến V_7 : Tổ chức hoạt động**

Nhằm giải quyết một vấn đề nào đó, hẳn nhiên sự cộng tác giữa các thành viên trong nhóm nhiên bao giờ cũng có lợi hơn làm việc cá nhân. Nói rõ hơn, nhờ có sự trao đổi trong nhóm mà các chiến lược giải được tìm một cách nhanh nhất và nhiều nhất có thể.

Với quan điểm trên, chúng tôi đã đề nghị hai giá trị cho biến *"tổ chức hoạt động"* như sau :

- Giá trị V_{71} : *Làm việc cá nhân.*
- Giá trị V_{72} : *Làm việc theo nhóm.*

- **Biến V_8 : Giải hệ rồi đưa ra kết luận hay giải thích kết luận giả định được chọn.**

Biến này có hai giá trị :

– Giá trị V_{81} : *Giải hệ rồi đưa ra kết luận (đề đóng).*

– Giá trị V_{82} : *Lựa chọn và giải thích các kết luận giả định (đề mở).*

Với giá trị V_{82}, học sinh không buộc phải giải hệ để tìm nghiệm mà vấn đề là chúng cần phải đưa ra những lập luận có căn cứ để chứng minh cho sự lựa chọn của mình. Chính những lập luận này sẽ giúp chúng tôi tìm hiểu *"thành phần tư"* của học sinh ẩn sau một chiến lược giải nào đó.

- **Biến V_9 : Kết luận về tập nghiệm của học sinh giả định**

Như đã biết, với kỹ thuật Cramer, nếu không chú ý đến các hệ số của ẩn thì trong trường hợp $D = D_x = D_y = 0$, chưa thể kết luận gì bởi hệ có thể hệ vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm. Chính vì thế khi xét biến V_9 liên quan đến tập nghiệm của hệ phương trình (2, 2) có chứa tham số, chúng tôi đã chọn hai giá trị sau :

– Giá trị V_{91} : *Kết luận "Hệ có vô số nghiệm".*

– Giá trị V_{92} : *Kết luận "Hệ vô nghiệm".*

Cũng như V_5, biến V_9 chỉ được xét trong trường hợp giả sử rằng học sinh đang sử dụng chiến lược *"Cramer"*. Khi đó, việc sử dụng giá trị V_{91} hay V_{92} sẽ gợi lên các hướng giải quyết tương ứng (chúng tôi sẽ trình bày cụ thể chúng ở mục 4.4.3.3 dưới đây). Và chính từ những hướng giải quyết này mà chúng tôi có thể tìm hiểu sâu hơn về mối quan hệ cá nhân của học sinh với việc kiểm tra các hệ số của ẩn trong kỹ thuật Cramer.

4.4.3.2. Phân tích a priori chi tiết

a) Bài toán 1

❖ **Lựa chọn bài toán**

Sự tương ứng về tọa độ giao điểm của hai đường thẳng và nghiệm của hệ phương trình là một biểu hiện cho thấy *"nghĩa hình học"* của các bước biện luận trong công thức Cramer được nhận ra. Để kiểm chứng H_3 – một giả thuyết liên quan đến kỹ thuật Cramer – cần thiết xây dựng đề toán sao cho vừa khuyến khích việc sử dụng S_{Cr}, vừa hạn chế được việc giải theo các chiến lược khác. Dựa trên tiêu chí này mà bài toán 1 được soạn thảo với nội dung như đã nêu.

Ngoài mục đích chủ yếu là để kiểm tra tính hợp thức của giả thuyết H_3, bài toán 1 còn giúp chúng tôi kiểm chứng quy tắc R của giả thuyết H_1 thông qua việc học sinh giải và biện luận hệ được tạo thành từ hai phương trình đường thẳng, đặc biệt khi trong phương trình đường thẳng (d_2), tổng bình phương các hệ số của ẩn không phải lúc nào cũng khác 0 với mọi giá trị của tham số.

❖ Lựa chọn giá trị của biến và giải thích sự lựa chọn

Bài 1 được xây dựng dựa trên các giá trị của các biến V_1, V_4 và V_5.

Bài 1			
Biến	V_1	V_4	V_5
Giá trị của biến	V_{11}	V_{42}	V_{52}

– Giá trị V_{11} : *Tham số có mặt tại hầu hết các hệ số của ẩn.*

Như đã trình bày ở trên, giá trị này vừa đóng vai trò như *"rào chắn"* ngăn cản các chiến lược S_s, S_c, S_{Cr} và S_g, lại vừa như *"đòn bẩy"* để nâng hiệu suất sử dụng của chiến lược S_{Cr}.

– Giá trị V_{42} : *Phạm vi hình học*

Xét trong phạm vi này, ban đầu chúng tôi có đôi chút lưỡng lự giữa việc chọn một trong hai cách phát biểu sau cho đề toán :

Phát biểu 1 : *Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng.*

Phát biểu 2 : *Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng.*

Nhưng cuối cùng, chúng tôi đã quyết định chọn cách phát biểu thứ nhất vì nếu chọn cách phát biểu hai thì học sinh hoàn toàn có thể sử dụng chiến lược *"hệ số góc - tung độ gốc"* mà không cần phải giải hệ. Và như thế sẽ không tạo thuận lợi cho chiến lược *"Cramer"*.

– Giá trị V_{52} : *Tổng bình phương các hệ số của ẩn có thể triệt tiêu, tùy theo giá trị của tham số.*

Nhắc lại rằng biến V_5 có hai giá trị : V_{51} và V_{52}. Cả hai giá trị này đều cho phép *"đo"* được mức độ ảnh hưởng của quy tắc hợp đồng R. Tuy nhiên, nếu chọn giá trị V_{52} thì việc *"đo lường"* này sẽ mang tính thuyết phục hơn.

❖ Các chiến lược có thể

$\mathbf{S_s}$: Chiến lược *"thế"*

$\mathbf{S_{Cr}}$: Chiến lược *"Cramer"*

S_d : Chiến lược *"hệ số góc – tung độ gốc"* : chiến lược này có khả năng xuất hiện vì đề toán được cho trong phạm vi hình học.

☞ Lưu ý : S_c (chiến lược *"cộng"*) mặc dù cho phép giải quyết bài toán này nhưng chúng tôi dự đoán rằng học sinh sẽ không lựa chọn vì quá trình biến đổi hệ phương trình rất phức tạp.

❖ Những lời giải có thể quan sát

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} mx + (m-1)y = m & (1) \\ (m+1)x + (m+1)y = 2m & (2) \end{cases}$$

Lời giải tương ứng với S_s

Với $m \neq 0$, từ (1) suy ra : x = $\frac{m-(m-1)y}{m}$, thế vào (2) được: (m + 1)y = m(m – 1) (3)

- Nếu $m \neq -1$ thì y = $\frac{m(m-1)}{m+1}$. Suy ra x = $\frac{m(3-m)}{m+1}$. Vậy (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm có tọa độ $\left(\frac{m(3-m)}{m+1}; \frac{m(m-1)}{m+1}\right)$.
- Nếu m = –1 thì (3) vô nghiệm y. Suy ra hệ phương trình vô nghiệm. Vậy (d_1) và (d_2) không có điểm chung.

Với m = 0. Suy ra x = 0 và y = 0. Nói cách khác, (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm (0 ; 0).

Tóm lại :

- $m \neq -1$: (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm có tọa độ $\left(\frac{m(3-m)}{m+1}; \frac{m(m-1)}{m+1}\right)$.
- m = – 1 : (d_1) và (d_2) song song nhau.

Lời giải tương ứng với S_{Cr}

Trước hết, ta tính các định thức :

$$D = \begin{vmatrix} m & m-1 \\ m+1 & m+1 \end{vmatrix} = m + 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m & m-1 \\ 2m & m+1 \end{vmatrix} = m(3 - m)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m \\ m+1 & 2m \end{vmatrix} = m(m - 1)$$

Trường hợp : $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Khi đó, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất (x ; y), trong đó

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{m(3-m)}{m+1} \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{m(m-1)}{m+1}.$$

Trường hợp : D = 0 $\Leftrightarrow$ m = – 1. Khi đó, $D_x \neq 0$ và $D_y \neq 0$: Hệ phương trình vô nghiệm.

Kết luận :

- m $\neq$ – 1 : (d_1) và (d_2) cắt nhau tại điểm có tọa độ $\left(\frac{m(3-m)}{m+1}; \frac{m(m-1)}{m+1}\right)$.
- m = – 1 : (d_1) và (d_2) song song nhau.

Lời giải tương ứng với S_d

(d_1) và (d_2) cắt nhau khi $\frac{m}{m+1} \neq \frac{m-1}{m+1}$, tương đương với m $\neq$ – 1.

(d_1) và (d_2) song song nhau khi $\frac{m}{m+1} = \frac{m-1}{m+1}$ và $\frac{m}{m+1} \neq \frac{m}{2m}$, tương đương với m = – 1.

(d_1) và (d_2) trùng nhau khi $\frac{m}{m+1} = \frac{m-1}{m+1}$ và $\frac{m}{m+1} = \frac{m}{2m}$, tương đương với m $\in \phi$.

b) Bài toán 2

❖ Lựa chọn bài toán

Bài 2 được thiết kế như một hoạt động nhóm. Lúc ấy, với sự nỗ lực của tất cả các thành viên, nếu kỹ thuật hình học (đồ thị) vẫn không được tìm ra thì điều đó có nghĩa là giả thuyết H_2 được kiểm chứng rất thuyết phục.

Với dự đoán rằng các kỹ thuật giải hệ (2, 2) không chứa tham số ở lớp 9 có thể ảnh hưởng đến học sinh trong thực hành giải và biện luận hệ (2, 2) chứa tham số, chúng tôi đã đặt thẳng vấn đề cho các nhóm là *"Hãy giải hệ phương trình ở bài 2 bằng nhiều phương pháp khác nhau"* mà không cần hỏi *"Có hay không các kỹ thuật khác?"*. Hơn nữa, nếu hỏi *"Có hay không…"* thì dường như không phù hợp với ghi chú *"Nhóm thắng cuộc là nhóm có nhiều phương pháp giải nhất."* [(1)] vì ghi chú này đã ngầm trả lời *"Có"* cho câu hỏi trên.

Thông qua việc học sinh giải và biện luận hệ phương trình, dĩ nhiên bài toán này còn cho phép chúng tôi kiểm chứng cả quy tắc R.

❖ Lựa chọn giá trị của biến và giải thích sự lựa chọn

Trước hết, với tiêu chí là tạo điều kiện cho tất cả các chiến lược đều có thể vận dụng được một cách nhanh chóng (nghĩa là khả năng sử dụng chúng là bình đẳng

---

[(1)] Một chú thích rất quan trọng, góp phần kích thích việc tìm ra các chiến lược giải ở học sinh.

ngang nhau), ban đầu, chúng tôi chọn 4 giá trị tương ứng với 3 biến didactic V_2, V_3, V_4 như sau:

- Giá trị V_{21} : *Tồn tại một hệ số của một ẩn trong phương trình bằng 1 hoặc –1.*

  Khi đó, cùng với S_{Cr}, chiến lược S_s có khả năng xuất hiện.

- Giá trị V_{22} : *Hệ số của cùng một ẩn trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau.*

  Hệ phương trình có thể dễ dàng được biến đổi sao cho hệ số của cùng một ẩn trong hai phương trình bằng nhau hoặc đối nhau. Do đó, cùng với S_{Cr}, chiến lược S_c có khả năng xuất hiện.

- Giá trị V_{33a} : *Tồn tại điểm cố định mà hai đường thẳng (tạo bởi hai phương trình của hệ) luôn đi qua với mọi giá trị của tham số.*

  Giá trị này sẽ cổ vũ S_g xuất hiện.

- Giá trị V_{42} : *Phạm vi hình học*

  Các ghi chú (d_1), (d_2) bên cạnh mỗi phương trình trong hệ sẽ thúc đẩy S_g hoặc S_d xuất hiện.

Nhưng để chắc chắn rằng các chiến lược giải được tìm là hoàn toàn xuất phát từ suy nghĩ độc lập và chủ động của học sinh, chúng tôi đã bổ sung thêm giá trị V_{61} :

- Giá trị V_{61} : *Số kỹ thuật không được chỉ rõ (đề mở).*

Cuối cùng, chúng tôi chọn thêm giá trị V_{72} nhằm thúc đẩy học sinh tìm được càng nhiều càng tốt các chiến lược giải. Nói rõ hơn, với việc tăng cường giá trị V_{72}, chiến lược S_g và S_d càng có khả năng xuất hiện ở bài 2.

- Giá trị V_{72} : *Làm việc theo nhóm.*

Bài 2						
Biến	V_2		V_3	V_4	V_6	V_7
Giá trị của biến	V_{21}	V_{22}	V_{33a}	V_{42}	V_{61}	V_{72}

❖ **Các chiến lược có thể** : S_s, S_c, S_{Cr}, S_g và S_d.

❖ **Những lời giải có thể quan sát**

$$\begin{cases} mx + y = m & (1) \\ x + 2y = 1 & (2) \end{cases}$$

Lời giải tương ứng với chiến lược S_s

Từ (2) suy ra x = 1 – 2y. Thế vào (1) được : (1 – 2m)y = 0 (3)

- m $\neq$ 1/2 : (3) suy ra y = 0. Kéo theo x = 1. Vậy, hệ có nghiệm duy nhất (1 ; 0).
- m = 1/2 : (3) vô số nghiệm y. Do đó, hệ có vô số nghiệm dạng (x ; 1 – 2x), với $x \in \mathbf{R}$.

Lời giải tương ứng với chiến lược S_c

Nhân hai vế của (1) với 2 được : 2mx + 2y = 2m (1')

Lấy (1') trừ (2) vế theo vế, được (3).

Tiếp tục biện luận như trên.

Lời giải tương ứng với chiến lược S_{Cr}

Tính các định thức D, D_x, D_y, được :

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 1$$

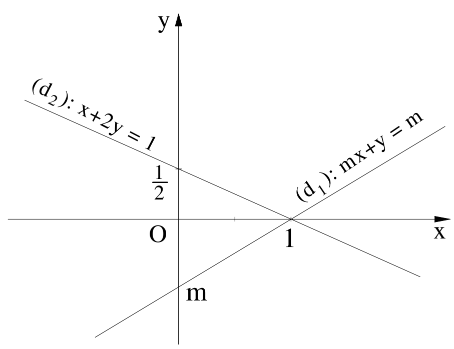
$$D_x = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- Nếu $m \neq \frac{1}{2}$ thì $D \neq 0$: hệ có nghiệm duy nhất : $(x ; y) = \left(\frac{D_x}{D};\frac{D_y}{D}\right) = (1 ; 0)$.
- Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì $D = D_x = D_y = 0$: hệ có vô số nghiệm dạng (x ; 1 – 2x), với $x \in \mathbf{R}$.

Lời giải tương ứng với chiến lược S_g

Dựa vào đồ thị, ta có :



- Nếu $m \neq \frac{1}{2}$ thì (d_1) cắt (d_2), suy ra hệ có nghiệm duy nhất (1 ; 0).
- Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì $(d_1) \equiv (d_2)$, suy ra hệ có vô số nghiệm, tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình x + 2y = 1.

Lời giải tương ứng với chiến lược S_d

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $\frac{m}{1} \neq \frac{1}{2}$, tương đương với $m \neq \frac{1}{2}$.

Hệ phương trình có vô số nghiệm khi $\frac{m}{1} = \frac{1}{2}$, tương đương với $m = \frac{1}{2}$. Khi đó, tập nghiệm của hệ là tập nghiệm của phương trình x + 2y = 1.

Hệ phương trình vô nghiệm khi $\frac{m}{1} = \frac{1}{2}$ và $\frac{m}{1} \neq \frac{1}{2}$, tương đương với $m \in \phi$.

c) Bài toán 3

❖ **Lựa chọn bài toán**

Để kiểm chứng quy tắc R, vấn đề là cần đặt học sinh vào tình huống ngắt quãng hợp đồng. Ngắt quãng hợp đồng thể hiện ở : tổng bình phương các hệ số của ẩn trong cả hai phương trình không phải luôn khác 0 với mọi giá trị của tham số và trong trường hợp $D = D_x = D_y = 0$, hệ đã cho *vô nghiệm*.

Ngoài ra, với mong muốn làm bộc lộ "thành phần tư" của học sinh về "mối liên hệ giữa điều kiện về các hệ số của ẩn và tập nghiệm của hệ phương trình", chúng tôi đưa ra hai kết luận giả định để học sinh lựa chọn, kèm theo đấy là yêu cầu "giải thích sự chọn lựa đó".

❖ **Lựa chọn giá trị của biến và giải thích sự lựa chọn**

Bài 2				
Biến	V_5	V_8	V_9	
Giá trị của biến	V_{52}	V_{82}	V_{91}	V_{92}

– Giá trị V_{52} : *Tổng bình phương các hệ số của ẩn có thể triệt tiêu, tùy theo giá trị của tham số*.

  Giá trị này làm tăng tính thuyết phục của việc kiểm chứng quy tắc R.

– Giá trị V_{82} : *Giải thích kết luận giả định được lựa chọn*.

  Bài toán cho dưới dạng câu hỏi *mở* : *"Theo em, bạn nào có lý? Giải thích sự lựa chọn của em."*

  Ở đây, học sinh không buộc giải bài toán để tự đưa ra kết luận. Vấn đề là họ phải giải thích được sự lựa chọn của mình. Dạng câu hỏi này sẽ cho phép khai thác rất tốt mối quan hệ cá nhân của học sinh với kỹ thuật Cramer để giải và biện luận hệ (2, 2) có chứa tham số.

– Giá trị V_{91} : *Kết luận "hệ phương trình có vô số nghiệm"*.

  Giá trị này gợi lên hướng giải quyết $L_{3_{2a}}$ và L_{3_3} (xem mục kế tiếp).

– Giá trị V_{92} : *Kết luận "hệ phương trình vô nghiệm".*
Giá trị này gợi lên hướng giải quyết L_{3_1} và $L_{3_{2b}}$ (xem mục kế tiếp).

❖ Những lời giải có thể quan sát

$$\begin{cases}(m-1)x+(m^2-1)y=0\\ m(m-1)x+(1-m^2)y=1\end{cases}$$

L_{3_1} : **Kiểm tra điều kiện về các hệ số của ẩn và tính các định thức D, D_x, D_y**

Ta có : $(m-1)^2 + (m^2-1)^2 = (m-1)^2[1+(m+1)^2]$ khác 0 khi $m \neq 1$.

$[m(m-1)]^2 + (1-m^2)^2 = (m-1)^2[m^2+(m+1)^2]$ khác 0 khi $m \neq 1$.

Tính các định thức :

$$D = \begin{vmatrix} m-1 & m^2-1 \\ m(m-1) & 1-m^2 \end{vmatrix} = m^4 - 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & m^2-1 \\ 1 & 1-m^2 \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ m(m-1) & 1 \end{vmatrix} = m - 1$$

Nhận thấy $D = D_x = D_y = 0$ chỉ khi m = 1 : mâu thuẫn với điều kiện $m \neq 1$. Vậy trong trường hợp này hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

L_{3_2} : **Không kiểm tra điều kiện về các hệ số của ẩn nhưng có tính D, D_x, D_y**

$L_{3_{2a}}$: **Áp dụng kỹ thuật Cramer và kết luận**

Tính D, D_x, D_y.

Với m = 1 thì $D = D_x = D_y = 0$. Khi đó, theo kỹ thuật Cramer : hệ (*) có vô số nghiệm.

$L_{3_{2b}}$: **Thế giá trị của tham số vào hệ đã cho rồi kết luận**

Tính D, D_x, D_y.

Với m = 1 thì $D = D_x = D_y = 0$.

Thế m = 1 vào (*), ta được : $\begin{cases}0=0\\0=1\end{cases}$. Vô lý.

Vậy trong trường hợp này, hệ (*) vô nghiệm.

L_{3_3} : **Không kiểm tra điều kiện về các hệ số và không tính D, D_x, D_y**

Theo kỹ thuật Cramer, trong trường hợp $D = D_x = D_y = 0$, hệ phương trình có vô số nghiệm.

4.4.4. Phân tích a posteriori các bài toán thực nghiệm

4.4.4.1. Ghi nhận ban đầu

Dưới đây là bảng thống kê kết quả các lời giải của học sinh đối với ba bài toán :

<table>
<tr><th rowspan="2">Bài toán</th><th colspan="5">Chiến lược</th><th rowspan="2">Tổng số học sinh</th><th rowspan="2">Làm bài</th><th rowspan="2">Bỏ trống</th></tr>
<tr><th>S_s</th><th>S_c</th><th>S_{Cr}</th><th>S_g</th><th>S_d</th></tr>
<tr><td>***Bài 1***</td><td>22</td><td>0</td><td>**82**</td><td>0</td><td>41</td><td rowspan="6">192</td><td>145</td><td>47</td></tr>
<tr><td>***Bài 2***</td><td>192</td><td>161</td><td>192</td><td>**3**</td><td>35</td><td>192</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">***Bài 3***</td><td colspan="5">**Kiểu lời giải**</td><td rowspan="4">175</td><td rowspan="4">17</td></tr>
<tr><td rowspan="2">L_{3_1}</td><td colspan="3">L_{3_2}</td><td rowspan="2">L_{3_3}</td></tr>
<tr><td>$L_{3_{2a}}$</td><td>$L_{3_{2b}}$</td><td>$L_{3_{2c}}$</td></tr>
<tr><td>0</td><td>50</td><td>48</td><td>43</td><td>34</td></tr>
</table>

Để tiện cho việc phân tích bài toán 2, chúng tôi giả sử rằng tất cả các học sinh trong mỗi nhóm đều tích cực suy nghĩ, và do đó, kết quả làm việc chung của nhóm cũng là kết quả làm việc của mỗi thành viên.

Với bài toán 3, qua phân tích thực nghiệm, chúng tôi nhận thấy xuất hiện *một kiểu lời giải mới* nằm ngoài dự kiến. Chúng tôi gọi kiểu lời giải này là $L_{3_{2c}}$.

Lời giải $L_{3_{2c}}$

Tính D, D_x, D_y.

Với m = 1 thì $D = D_x = D_y = 0$. Khi đó, theo kỹ thuật Cramer : hệ (*) có vô số nghiệm.

Thế m = 1 vào (*), được : $\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$. Vô lý.

Vậy trong trường hợp này, hệ (*) vô nghiệm.

4.4.4.2. Phân tích chi tiết

a) Ảnh hưởng mạnh mẽ của quy tắc hợp đồng didactic R

Như những gì chúng tôi dự đoán trong phân tích a priori, tình huống của các bài toán đã làm bộc lộ quy tắc hợp đồng didactic R (về phía học sinh).

Thật vậy, trong số 82 học sinh (đối với bài 1) và 192 học sinh (đối với bài 2) sử dụng chiến lược S_{Cr}, không một lời giải nào có bước kiểm tra điều kiện về tổng bình phương các hệ số của ẩn trong mỗi phương trình của hệ.

Đặc biệt, với bài toán 3, mặc dù giá trị V_{52} của biến V_5 được khai thác triệt để hơn so với hai bài toán trước (vì cả hai phương trình của hệ trong bài toán 3 đều có tổng bình phương các hệ số của ẩn có thể bằng 0 với một số giá trị nào đó của tham số) nhưng 175/175 học sinh có lời giải vẫn không thể thoát khỏi ảnh hưởng của quy tắc hợp đồng quen thuộc R.

b) Sự hợp thức của giả thuyết H_2

Những con số thống kê cho bài toán 2 chứng tỏ : *trong khi các kỹ thuật đại số chiếm ưu thế gần như tuyệt đối thì kỹ thuật hình học lại thể hiện quá mờ nhạt*, nó chỉ chiếm một tỉ lệ vô cùng khiêm tốn : 3/192 $\approx$ 0,16%. Cần nhắc lại rằng chúng tôi đã chủ ý đặt các ký hiệu (d_1), (d_2) bên cạnh mỗi phương trình với hy vọng sẽ khuyến khích học sinh tìm được chiến lược *"hình học"*. Thế nhưng, điều đó đã không diễn ra như mong muốn.

Với S_d, trước hết học sinh biện luận số nghiệm của hệ thông qua việc biện luận các trường hợp về hệ số góc và tung độ gốc của hai đường thẳng ; sau đó lấy lại kết quả về nghiệm cụ thể đã giải bởi các chiến lược đại số để gán vào. Từ đây có thể khẳng định : chiến lược hình học, hiểu theo đúng nghĩa của nó, vẫn chưa được vận dụng trong trường hợp này.

Như vậy, kết quả thực nghiệm ở bài 2 chỉ ra rằng *có sự "gián đoạn" giữa kỹ thuật đại số và kỹ thuật hình học*.

c) Sự hợp thức của giả thuyết H_3

Khi nhận được đề toán 1, quan sát cho thấy đa số học sinh không thể bắt tay ngay vào thực hiện lời giải. Trong số 145 học sinh thật sự làm bài, chiến lược S_{Cr} được sử dụng nhiều nhất. Thế nhưng, nếu nhìn lại tất cả những biến được huy động để xây dựng bài toán thì tỉ lệ 82/192 $\approx$ 42,7 % là một con số vẫn còn quá khiêm tốn.

Con số này nói lên rằng mối liên hệ giữa vị trí tương đối của hai đường thẳng với các bước biện luận theo D, D_x, D_y trong kỹ thuật Cramer chưa thật sự được thiết lập ở học sinh. Nghĩa là tính hợp thức của giả thuyết H_3 đã được xác định.

d) Một vài ghi nhận khác từ thực nghiệm

❖ **Với bài toán 1**

<table>
<tr><td>Bỏ trống</td><td colspan="7">Làm bài : 145</td></tr>
<tr><td rowspan="4">47</td><td>S_s</td><td>S_c</td><td colspan="3">S_{Cr}</td><td>S_g</td><td>S_d</td></tr>
<tr><td rowspan="3">22</td><td rowspan="3">0</td><td colspan="3">82</td><td rowspan="3">0</td><td rowspan="3">41</td></tr>
<tr><td>lớp 10A$_6$</td><td>lớp 10A$_1$</td><td>lớp khác</td></tr>
<tr><td>39</td><td>6</td><td>37</td></tr>
</table>

Sau khi phân tích 82 bài giải của học sinh sử dụng chiến lược S_{Cr}, xuất hiện một số chi tiết mà thiết nghĩ chúng tôi cần phải trình bày rõ ở đây.

- *Thứ nhất*, có 39 học sinh của lớp $10A_6$ [1] vận dụng S_{Cr} (chiếm tỉ lệ 39/82 ≈ 47,56%). Như đã đề cập đến ở mục 4.3.4.3, đây là một lớp học rất tốt và giáo viên dạy toán của lớp là người đã có sự lựa chọn a) cho câu hỏi 4. Sự kiện này cho phép chúng tôi trả lời câu hỏi (được đặt ra qua thực nghiệm đối với giáo viên) là việc khắc sâu "nghĩa hình học" của kỹ thuật Cramer phụ thuộc vào trình độ của học sinh.

Câu hỏi 4

Sau khi giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng định thức (quy tắc Cramer), Thầy Cô có yêu cầu học sinh nhìn lại mối liên hệ giữa vị trí tương đối của hai đường thẳng với các trường hợp biện luận theo ba định thức D, D_x, D_y trong quy tắc Cramer hay không?

a) Thường xuyên

b) Ít khi

c) Chưa bao giờ

Xin Thầy Cô vui lòng cho biết lí do vì sao.

- *Thứ hai*, chỉ có 6 học sinh lớp $10A_1$ [2] áp dụng S_{Cr} (chiếm tỉ lệ 6/82 ≈ 7,31%). Lưu ý rằng đây cũng là một lớp học khá tốt của trường THPT Thị xã Cao Lãnh nhưng giáo viên dạy toán của lớp này lại có sự lựa chọn c) cho câu hỏi 4. Sự kiện này cho thấy dù học lực của học sinh là khá - giỏi nhưng trong quá trình giảng dạy, nếu giáo viên không quan tâm đến việc nhận ra "nghĩa hình học" của kỹ thuật Cramer thì học sinh cũng không thể giải quyết tốt bài 1.

- *Thứ ba*, mặc dù M_2 không có một ví dụ và bài tập nào cho thấy mối liên hệ giữa vị trí tương đối của hai đường thẳng với các trường hợp của ba định thức trong kỹ thuật Cramer nhưng vẫn có đến 37 học sinh biết sử dụng S_{Cr} (chiếm tỉ lệ 37/82 ≈ 45,12%). Từ đây có thể dự đoán là trên lớp, giáo viên có chú ý đến việc cho học sinh nhận ra "nghĩa hình học"của kỹ thuật Cramer.

---

[1] Lớp thuộc trường THPT Thị xã Cao Lãnh, sỉ số của lớp là 45.

[2] Lớp thuộc trường THPT Thị xã Cao Lãnh với sỉ số là 44 học sinh.

Tóm lại, tất cả những nhận xét trên dường như nói lên rằng : *Để học sinh thấy được "nghĩa hình học" của kỹ thuật Cramer thì điều đó không chỉ phụ thuộc vào mối quan hệ của thể chế với đối tượng tri thức, không chỉ phụ thuộc vào trình độ học vấn của học sinh mà còn phụ thuộc vào thực hành giảng dạy của giáo viên.*

❖ **Với bài toán 2**

Các bài giải nhận được cho thấy học sinh nhớ khá tốt công thức tính các định thức. Từ đó suy ra hiện tượng ở bài 1 : rất nhiều bài giải không sử dụng chiến lược S_{Cr} không hẳn vì học sinh quên công thức mà lí do chính có lẽ là vì họ đã không nhận ra được nghĩa hình học của kỹ thuật Cramer.

Ngoài ra, trong lúc tiến hành thực nghiệm, *nổi lên một sự kiện* đáng chú ý là ngay sau khi phát đề bài toán 2, một học sinh (với vẻ mặt rất tự tin) đã hỏi chúng tôi :

> *"Thưa Cô, sử dụng định thức là cách duy nhất để giải và biện luận hệ, vậy tại sao ở đây Cô lại yêu cầu chúng em tìm thêm phương pháp khác?"*

Liền sau đó, một số học sinh khác cũng hưởng ứng theo.

Vậy nên, hoàn toàn có cơ sở khi nói rằng *đối với một bộ phận học sinh, kỹ thuật Cramer chiếm vị trí "độc quyền" để giải và biện luận hệ (2, 2) có chứa tham số.*

❖ **Với bài toán 3**

Ngoài việc kiểm chứng quy tắc hợp đồng didactic R, thực nghiệm còn cho thấy *tồn tại cách học máy móc ở học sinh khi sử dụng kỹ thuật Cramer.* Điều này được minh chứng qua ba lời giải : $L_{3_{2a}}$, $L_{3_{2c}}$ và L_{3_3} .

Thật vậy, học sinh đã không một chút đắn đo khi kết luận hệ phương trình có vô số nghiệm trong trường hợp $D = D_x = D_y = 0$ (thể hiện qua 50 bài làm sử dụng $L_{3_{2a}}$), thậm chí là họ không cần tính toán định thức chi hết và kết luận ngay có vô số nghiệm (thể hiện qua 34 lời giải L_{3_3}). Hơn nữa, 43 lời giải $L_{3_{2c}}$ còn chứng tỏ tính hình thức của kỹ thuật Cramer đã ảnh hưởng khá nặng nề đến học sinh, ngay cả khi các em có biểu hiện cố gắng thoát khỏi nó bằng cách thế giá trị của tham số nhận được từ trường hợp $D = D_x = D_y = 0$ vào hệ. Như vậy, nếu tính chung số học sinh qua các lời giải $L_{3_{2a}}$, $L_{3_{2c}}$ và L_{3_3} thì 50 + 43 + 34 sẽ là 127 học sinh và 127/175 $\approx$ 72,57 % quả thực là một tỉ lệ rất đáng lưu ý.

Mặt khác, với 48 học sinh chọn kiểu lời giải $L_{3_{2b}}$, chúng tôi có thể nhấn mạnh lại nhận định ở chương 3 rằng *kỹ thuật Cramer thật ra không phải là một algorit (hiểu theo nghĩa chặt) để giải và biện luận hệ (2, 2)* vì trong trường hợp $D = D_x = D_y = 0$, học sinh đã thực hiện thêm các thao tác sau :

- Tìm giá trị của tham số sao cho D = D_x = D_y = 0 ;
- Lần lượt thế các giá trị này vào hệ ;
- Tùy từng trường hợp mà kết luận hệ vô nghiệm hay vô số nghiệm.

Cuối cùng, tương ứng với lời giải $L_{3_{2c}}$, chúng tôi khá bất ngờ khi nhận được một số khẳng định sau :

- Cả An và Bình cùng đúng.
- Cả An và Bình cùng sai.
- Hai bạn An, Bình vừa đúng, vừa sai.

Có thể nói dù theo cách lập luận nào thì cả ba khẳng định trên đều chứng tỏ *khả năng suy luận logic của một số học sinh là rất kém.*

4.4.5. Kết luận

Qua phân tích lời giải của học sinh đối với 3 bài toán đặt ra, chúng tôi có thể khẳng định được tính hợp thức của các giả thuyết nghiên cứu đã nêu. Ngoài ra, thực nghiệm còn cho thấy việc áp dụng máy móc kỹ thuật Cramer có nguy cơ dẫn đến cách học hình thức ở học sinh.

4.5. KẾT LUẬN CHƯƠNG 4

Thực nghiệm được tiến hành trên hai đối tượng giáo viên và học sinh đã cho phép chúng tôi đưa ra một số kết luận sau :

- Khi giải và biện luận hệ (2, 2) chứa tham số, học sinh không có trách nhiệm kiểm tra tổng bình phương các hệ số trong mỗi phương trình của hệ có luôn khác 0 với mọi giá trị của tham số hay không (H_1 được kiểm chứng). Chính sự thỏa đáng này của quy tắc hợp đồng didactic R đã dẫn đến một hệ quả tất yếu là học sinh không nhận ra được mối liên hệ giữa trường hợp D = D_x = D_y = 0 và điều kiện $a^2 + b^2 \neq 0$, $a'^2 + b'^2 \neq 0$.

- Hơn nữa, trong khi các kỹ thuật đại số mà đặc biệt là kỹ thuật Cramer thường được học sinh ưu tiên lựa chọn thì ngược lại, kỹ thuật hình học, ngay cả ở những tình huống mà hoàn toàn có thể sử dụng nó, hầu như không được học sinh huy động đến (H_2 được kiểm chứng).

- Bên cạnh đó, mối liên hệ giữa vị trí tương đối của hai đường thẳng với các bước biện luận trong kỹ thuật Cramer chưa thật sự được thiết lập ở học sinh (H_3 được kiểm chứng). Thực nghiệm cho thấy để học sinh có thể nhận ra "nghĩa hình học" này, vấn đề không chỉ dựa vào thiết kế của SGK, phụ thuộc vào năng lực học tập của học sinh mà còn tùy vào thực hành giảng dạy của giáo viên.

- Ngoài ra, các câu trả lời nhận được từ phía giáo viên và học sinh còn cho phép chúng tôi khẳng định lại nhận định ở chương 3 rằng *kỹ thuật Cramer không phải là một algorit* mà ẩn đằng sau nó mới là một algorit với nhiều phép biến đổi đại số phức tạp hơn. Chính vì vậy, nếu học sinh vận dụng một cách máy móc các bước trong kỹ thuật này thì rất dễ mắc sai lầm, đặc biệt trong trường hợp ba định thức D, D_x và D_y triệt tiêu.

KẾT LUẬN

Qua luận văn này, chúng tôi đạt được những kết quả chủ yếu sau :

Trong chương 1, chúng tôi đã làm sáng tỏ mối quan hệ giữa algorit và tham số (hay giữa algorit và phương trình chứa tham số) thông qua việc chỉ ra một số đặc trưng toán học của các khái niệm algorit, tham số và phương trình chứa tham số.

Trong chương 2, việc phân tích TCTH gắn với các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính đã cho phép chúng tôi nhìn rõ hơn cuộc sống của algorit và tham số cùng mối liên hệ giữa chúng ở đại học.

Từ những kết quả đạt được ở hai chương đầu, chúng tôi bước vào chương 3 bằng việc nghiên cứu algorit và tham số trong mối quan hệ với thể chế dạy - học toán ở trường THPT. Trước hết, xét trong chủ đề phương trình, chúng tôi đã làm sáng tỏ sự tiến triển của hai đối tượng này cũng như mối quan hệ giữa chúng qua các chương trình (CCGD 1990, CLHN 2000 và thí điểm phân ban 2003). Kế đó, thông qua việc phân tích TCTH gắn với các phương pháp giải "Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn" xuất hiện trong SGK của lớp 9 và 10, chúng tôi không những đã có một cái nhìn sâu hơn về algorit và tham số mà còn chỉ ra được một số chênh lệch giữa TCTH ở trường phổ thông với TCTH ở đại học liên quan đến các phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính.

Ngoài những kết quả trên, nghiên cứu mối quan hệ thể chế với algorit và tham số trong trường hợp "Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn" còn dẫn chúng tôi đến với ba giả thuyết nghiên cứu H_1, H_2 và H_3 mà tính thỏa đáng của chúng đã được kiểm chứng bằng một thực nghiệm (về phía giáo viên và học sinh) ở chương 4.

Khi đó, sự hợp thức của quy tắc hợp đồng didactic R (thuộc giả thuyết H_1) kéo theo một hệ quả là học sinh không nhận ra được mối liên hệ giữa trường hợp $D = D_x = D_y = 0$ và điều kiện $a^2 + b^2 \neq 0$, $a'^2 + b'^2 \neq 0$ trong kỹ thuật Cramer ; từ đấy dẫn đến việc họ có thể mắc phải sai lầm khi kết luận về tập nghiệm của hệ phương trình trong trường hợp này.

Còn sự thỏa đáng của giả thuyết H_2 lại chứng tỏ có sự gián đoạn giữa kỹ thuật đại số và kỹ thuật hình học trong việc giải và biện luận hệ (2, 2) chứa tham số. Thật vậy, thực nghiệm về phía học sinh cho thấy trong khi kỹ thuật đại số luôn được ưu tiên thì kỹ thuật hình học gần như vắng bóng.

Và cuối cùng, sự hợp thức của giả thuyết H_3 nói lên rằng học sinh có nguy cơ không nhận ra được nghĩa hình học của kỹ thuật Cramer (mà điều đó lại rất cần thiết để hạn chế tính hình thức và máy móc của việc áp dụng các bước trong kỹ thuật này).

Từ những kết quả nghiên cứu đạt được ở hai chương 3, 4 và đặt trong bối cảnh xã hội mà công nghệ thông tin đã phát triển vô cùng mạnh mẽ như hiện nay, chúng tôi tự hỏi :

- *Khi dạy học hệ phương trình (2, 2) chứa tham số, nhằm giúp học sinh có được cái nhìn hình học đối với kỹ thuật Cramer, thay vì dựa vào kỹ thuật cộng đại số, giáo viên có thể xuất phát từ nội dung "ý nghĩa hình học của tập nghiệm" mà học sinh đã biết ở lớp 9 để xây dựng kỹ thuật Cramer được không?*
- *Mặt khác, để giúp học sinh nắm bắt kỹ thuật hình học một cách nhanh chóng, giáo viên nên khai thác các phương tiện dạy học và các phần mềm toán học (chẳng hạn : Sketchpad, Géométrie Plan, Cabri II Plus, ...) như thế nào? Từ các phần mềm này, giáo viên có thể giúp học sinh vẽ đồ thị và xác định tập nghiệm của hệ phương trình chứa tham số theo một algorit được hay không?*

Quả thật, các câu hỏi trên đây mở ra một cơ hội để xây dựng một tiểu đồ án didactic. Nhắc lại rằng đồ án này sẽ cho phép đạt được hai mục đích : thứ nhất là khắc sâu ở học sinh nghĩa hình học của kỹ thuật Cramer, thứ hai là tạo điều kiện cho học sinh tiếp cận với kỹ thuật hình học một cách trực quan và sinh động.

Tiếc là thời gian nghiên cứu còn hạn hẹp nên chúng tôi xin dành lại vấn đề đó cho những công trình tiếp theo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

1. Lê Khắc Bảo (2001), *172 bài toán có chứa tham số*, NXB Giáo dục.
2. Báo *Giáo dục và Thời đại* (1995), số 52.
3. Bộ Giáo dục và đào tạo (2002), *Chương trình (thí điểm) môn Toán trung học phổ thông*, Hà Nội.
4. Nguyễn Vĩnh Cận - Lê Thống Nhất - Phan Thanh Quang (2004), *Sai lầm phổ biến khi giải toán*, NXB Giáo dục.
5. Lê Thị Hoài Châu, *Hợp đồng didactic* – Bài giảng trong chương trình thạc sĩ Didactic toán, Đại học sư phạm Tp. HCM.
6. Lê Thị Hoài Châu, *Nghiên cứu khoa học luận* – Bài giảng trong chương trình thạc sĩ Didactic toán, Đại học sư phạm Tp. HCM.
7. Phan Đức Chính (tổng chủ biên) (2003), *Toán 9 - tập 1 (Sách giáo khoa thí điểm)*, NXB Giáo dục.
8. Phan Đức Chính (tổng chủ biên) (2003), *Toán 9 - tập 2 (Sách giáo khoa thí điểm)*, NXB Giáo dục.
9. Phan Đức Chính (tổng chủ biên) (2003), *Sách giáo viên toán 9 - tập 2*, NXB Giáo dục.
10. Phan Đức Chính - Vũ Dương Thụy - Đào Tam - Lê Thống Nhất (1994), *Các bài giảng luyện thi môn toán - tập 2*, NXBGD.
11. Hoàng Chúng (1998), *Phương pháp dạy học toán học ở trường THCS*, NXB Giáo dục.
12. Hoàng Chúng (2002), *Phương pháp dạy học số học và Đại số ở trường THCS*, NXB Giáo dục.
13. Nguyễn Minh Chương (chủ biên) (2001), *Giải tích số*, NXB Giáo dục.
14. Văn Như Cương - Trần Văn Hạo (2000), *Tài liệu hướng dẫn giảng dạy toán 10*, NXB Giáo dục.
15. Văn Như Cương - Trần Văn Hạo (2000), *Tài liệu hướng dẫn giảng dạy toán 11*, NXB Giáo dục.
16. Văn Như Cương, Ngô Thúc Lanh (2000), *Tài liệu hướng dẫn giảng dạy Toán 12*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
17. Ngô Hữu Dũng - Trần Kiều (1996), *Đại số 9*, NXB Giáo dục.

18. Phạm Huy Điển - Phan Huy Khải - Tạ Duy Phượng (2002), *Cơ sở giải tích phổ thông – Lý thuyết và thực hành tính toán*, NXB Khoa học kỹ thuật.

19. Nguyễn Huy Đoan (chủ biên) (2004), *Bài tập Đại số 10 - Sách giáo khoa thí điểm Ban khoa học tự nhiên - Bộ 1*, NXB Giáo dục.

20. Nguyễn Viết Đông - Lê Thị Thiên Hương - Nguyễn Anh Tuấn - Lê Anh Vũ (1999), *Toán cao cấp tập 2* (dùng cho sinh viên giai đoạn đào tạo cơ bản của các trường đại học và cao đẳng), NXB Giáo dục.

21. Nguyễn Viết Đông - Lê Thị Thiên Hương - Nguyễn Anh Tuấn - Lê Anh Vũ (1999), *Bài tập toán cao cấp tập 2*, NXB Giáo dục.

22. Phạm Gia Đức (chủ biên) (2000), *Phương pháp dạy học môn toán - tập 2* (sách Cao đẳng sư phạm), NXB Giáo dục.

23. Nguyễn Thị Như Hà (2004), *Máy tính bỏ túi trong dạy - học toán : trường hợp hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ở lớp 10*. Luận văn Thạc sĩ.

24. Bùi Xuân Hải (chủ biên) (2001), *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh.

25. Trần Văn Hãn (1996), *Đại số tuyến tính trong kỹ thuật*, Tủ sách trường Đại học đại cương.

26. Trần Văn Hạo - Phan Trương Dần - Hoàng Mạnh Để - Trần Thành Minh (1999), *Đại số 10*, NXB Giáo dục.

27. Trần Văn Hạo (tổng chủ biên) (2000), *Đại số 10*, NXB Giáo dục.

28. Trần Văn Hạo – Ngô Thúc Lanh (chủ biên) (2000), *Đại số 11*, NXB Giáo dục.

29. Trần Văn Hạo (tổng chủ biên) (2003), *Đại số 10 - Sách giáo khoa thí điểm Ban khoa học tự nhiên - Bộ 2*, NXB Giáo dục.

30. Trần Văn Hạo - Cam Duy Lễ (1998), *Sách giáo viên toán 10*, NXB Giáo dục.

31. Phan Văn Hạp - Lê Đình Thịnh (2000), *Phương pháp tính và các thuật toán*, NXB Giáo dục.

32. Nguyễn Xuân Huy (1988), *Thuật toán*, NXB Khoa học kỹ thuật.

33. Nguyễn Hữu Việt Hưng (2000), *Đại số tuyến tính*, NXB Giáo dục.

34. Lê Văn Hồng (1994), *Góp phần hoàn thiện nội dung và phương pháp dạy học chủ đề Biểu thức đại số trong môn toán trường phổ thông cơ sở Việt Nam*. Luận án Phó tiến sĩ khoa Sư phạm -Tâm lý, Viện khoa học Giáo dục.

35. Phan Huy Khải (2001), *Phương pháp đồ thị để biện luận hệ có chứa tham số*, NXB Giáo dục.

36. Hoàng Kỳ (2001), *Đại số sơ cấp,* NXB Giáo dục.

37. Nguyễn Bá Kim - Vũ Dương Thụy (1992), *Phương pháp dạy học toán - phần 1*, NXB Giáo dục.

38. Nguyễn Bá Kim (chủ biên) (1994), *Phương pháp dạy học toán - phần 2*, *Dạy học những nội dung cơ bản*, NXB Giáo dục.

39. Ngô Thúc Lanh (chủ biên) (2000), *Đại số 12*, NXB Giáo dục.

40. Ngô Thúc Lanh (1996), *Tìm hiểu giải tích phổ thông*, NXB Giáo dục.

41. Ngô Thúc Lanh (1970), *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp.

42. Trần Văn Minh (chủ biên) (2002), *Đại số tuyến tính*, NXB Giao thông vận tải.

43. Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên) (2003), *Đại số 10 - Sách giáo khoa thí điểm Ban khoa học tự nhiên - Bộ 1*, NXB Giáo dục.

44. Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên) (2003), *Đại số 10 - Ban khoa học tự nhiên - Bộ 1*, NXB Giáo dục.

45. Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên) (2004), *Sách giáo viên thí điểm ban khoa hoc tự nhiên Đại số 10 - Bộ 1*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

46. Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên) (2004), *Sách giáo viên thí điểm ban khoa hoc tự nhiên Đại số và Giải tích 11 - Bộ 1*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

47. Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên) (2005), *Sách giáo viên thí điểm ban khoa hoc tự nhiên Giải tích 12 - Bộ 1*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

48. *Tài liệu hướng dẫn sử dụng sách giáo khoa toán THPT CLHN năm 2000*, NXB Giáo dục.

49. *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* (1999), Số 6 (264).

50. *Tạp chí Nghiên cứu giáo dục* (2000), Số 12.

51. Vũ Dương Thụy (chủ biên) (1998), *Thực hành giải toán* (sách Cao đẳng sư phạm), NXB Giáo dục.

52. Lê Văn Tiến, *Lý thuyết nhân chủng học* – Bài giảng trong chương trình thạc sĩ Didactic toán, Đại học sư phạm Tp. HCM.

53. Lê Văn Tiến, *Lý thuyết tình huống* – Bài giảng trong chương trình thạc sĩ Didactic toán, Đại học sư phạm Tp. HCM.

54. Ngô Việt Trung (2001), *Giáo trình Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

55. Vũ Tuấn (chủ biên) (2003), *Bài tập Đại số 10 - Sách giáo khoa thí điểm Ban khoa học tự nhiên - Bộ 2*, NXBGD.

56. Trần Vui (chủ biên) (2005), *Một số xu hướng đổi mới trong dạy học toán ở trường THPT, Giáo trình bồi dưỡng thường xuyên giáo viên THPT chu kì III*, NXB Giáo dục.

Dịch sang tiếng Việt

57. Howard Eves (Trần Tất Thắng dịch) (1993), *Giới thiệu lịch sử toán học*, NXB Khoa học kỹ thuật.

58. Jean Pierre Kahane - Claude Castella - Alain Mercier - Philippe Clarou – IREM Grenoble (1997), *Một số kinh nghiệm giảng dạy toán ở Pháp*, NXB Giáo dục.

59. X.M.Nikolxki (chủ biên) (2002), *Từ điển bách khoa phổ thông toán học - tập 1*, NXB Giáo dục.

60. X.M.Nikolxki (chủ biên) (2002), *Từ điển bách khoa phổ thông toán học - tập 2*, NXB Giáo dục.

Tiếng Anh

61. Bittinger - Keedy - Ellenbogen, *Intermediate Algebra concepts and Applications.* Fourth edition.

62. Marvin L. Bittinger - Judith A. Beecher, *College Algebra*, Second edition.

Tiếng Pháp

63. Alain Bouvier - Michel George - Francois Le Lionnais, *Dictionnaire des mathématiques*, PUF.

64. *Collection terracher*, *Maths Seconde*, Hachette Éducation.

65. Gisèle Chapiron - Michel Mante - René Mulet-Marquis - Catherine Pérotin (1999), *Collection Triangle Mathématiques 3è*, Édition Hatier.

66. Jean - Luc Chabert và các tác giả, *Histoire d'Algorithmes*, Édition Belin.

67. Lê Văn Tiến (2001), *Étude didactique de liens entre fonctions et équations dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France et au Vietnam*. Thèse, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

68. Nguyễn Chí Thành (2002), *La notion d'algorithme dans l'enseignement des mathématiques au lycée – Comment l'émergence des notions de boucle et de variable en Informatique s'articule à des connaissances en Mathématiques?* Mémoire DEA, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

69. Odile Schneider (1979), *Le passage des équations numériques aux équations paramétriques en classe de seconde,* Mémoire DEA, Université d'Aix-Marseille.

PHỤ LỤC

Phụ lục 1

SỰ TIẾN TRIỂN CỦA KHÁI NIỆM ALGORIT TRONG TOÁN HỌC

Vì phạm vi tác động của algorit bao trùm hầu hết các lĩnh vực khác nhau của toán học như Số học, Hình học, Đại số, Giải tích, … nên ở đây, chúng tôi chỉ có thể nêu những nét khái quát nhất về lịch sử hình thành và tiến triển của khái niệm algorit qua ba giai đoạn chính sau :

1. Giai đoạn ngầm ẩn : *Giai đoạn Hy Lạp cổ đại đến thế kỉ 12*

Thật khó nói chính xác tư tưởng algorit có từ khi nào vì điều đó còn phụ thuộc vào nguồn tài liệu và quan điểm của mỗi người, nhưng một điều chắc chắn rằng, algorit đã tồn tại và được sử dụng trước cả khi xuất hiện thuật ngữ mô tả nó một cách rõ ràng. Algorit được biết đến như những qui tắc xác định và phổ dụng. Nó có thể là các thủ tục liên quan đến luật pháp hay toán học như ở thời Babylon ; nó cũng có thể là các phương thức ghi nhớ như ở thời Hy lạp ; là các qui tắc ngôn ngữ mà các nhà văn phạm Roma sử dụng hay các công thức về y học, nấu ăn, ...

Như vậy, ở giai đoạn Hy lạp cổ đại, khái niệm algorit được dùng và được hiểu một cách trực giác. Nó có cơ chế *protomathématique.* (1)

2. Giai đoạn bán tường minh : *Từ thế kỉ 12 đến cuối thế kỉ 19*

Khoảng thế kỉ 12, tác phẩm *Hisâb aljabr w'al-muquâbalah* của *Al-Khowârizmi* đến được châu Âu qua bản dịch La tinh. Từ đó, thuật ngữ *algorisme*, *algorismus* hay *algorithmus* được dùng để chỉ các qui tắc thực hiện các phép tính số học trên các số thập phân.

Đến năm 1857, người ta tìm thấy bản dịch sang tiếng La tinh cuốn sách bàn về cách dùng các chữ Hindu của *Al-Khowârizmi* và nó bắt đầu như sau : *"Algoritmi đã nói …"*. Xuất phát từ từ *algorithmi* – cách phiên âm sang tiếng La tinh tên của *Al-Khowârizmi*, thuật ngữ *algorit* ra đời. Lúc này, người ta gọi algorit là hệ đếm thập phân theo vị trí và nghệ thuật tính toán trong hệ ấy, bởi vì chính nhờ bản dịch sang tiếng La tinh (thế kỉ thứ 12) công trình của *Al-Khowârizmi* mà châu Âu mới biết đến hệ đếm theo vị trí.

Như vậy, cho tới giai đoạn này, khái niệm algorit vẫn được dùng và được hiểu một cách trực giác. Nó có cơ chế *paramathématique.* (2)

---

(1) chưa có tên và chưa được định nghĩa chính xác về mặt toán học

(2) có tên nhưng chưa được định nghĩa chính xác về mặt toán học

3. Giai đoạn tường minh : *Từ thế kỉ 20 đến nay*

Như đã đề cập, gắn liền với sự phát triển của toán học, khái niệm algorit trước thế kỉ 20 được dùng và được hiểu một cách trực giác : khả năng giải bài toán "*ở dạng tổng quát*" bao giờ cũng bao hàm về thực chất nắm được một algorit nào đó. Và như vậy, nhiều algorit được thực hiện trước khi khái niệm algorit được xác định một cách rõ ràng.

Đến đầu thế kỉ 20, trong toán học xuất hiện một số bài toán mà việc có algorit để giải chúng là rất đáng nghi ngờ. Người ta đặt vấn đề : liệu có thể chứng minh là không có algorit để giải bài toán đó hay không. Nếu như khái niệm trực giác về algorit là đủ dùng khi ta chứng minh việc có algorit cụ thể nào đó, thì ngược lại, nó không thể là cơ sở cho việc chứng minh không có algorit để giải bài toán này hay bài toán khác. Muốn chứng minh không có algorit, thì trước hết cần có một định nghĩa chính xác cho khái niệm này.

Vào ngày 8 tháng 8 năm 1900 tại Đại hội toán học Quốc tế ở Paris, David Hilbert – nhà toán học nổi tiếng người Đức đã phát biểu 23 bài toán khó, nhằm kêu gọi giới toán học của thế kỷ 20 cùng tập trung nỗ lực để giải quyết. Bài toán thứ 10 trong số các bài toán trên được Hilbert phát biểu như sau :

> *"Cho phương trình Điôphăng với số ẩn tùy ý và các hệ số nguyên tùy ý. Hãy chỉ ra phương pháp cho phép sau một số hữu hạn thao tác có thể xác định được rằng phương trình đã cho có nghiệm nguyên hay không."*

Như vậy, vấn đề đặt ra là xây dựng một algorit để nhận biết mỗi phương trình Điôphăng tùy ý xem nó có nghiệm nguyên hay không.

Với *một số trường hợp riêng*, algorit nhận biết nghiệm nguyên của phương trình Điôphăng đã được xây dựng nhưng algorit *cho trường hợp tổng quát* vẫn chưa tìm được. [1]

Vào khoảng những năm đầu của thập kỉ 30, Gôdel, Kleene, Church, Turing và Post đã đưa ra một số định nghĩa nhằm chính xác hóa khái niệm algorit. Sau đó, nhiều tác giả khác tiếp tục đưa ra một số định nghĩa khác về algorit. Các định nghĩa đó nói chung đều tương đương nhau, tuy mỗi định nghĩa có một số thuận lợi riêng, thích hợp với việc nghiên cứu một lớp vấn đề nào đó. Có thể mô tả một số hình thức cho algorit như sau :

- Máy Turing (1936)
- Máy Post (1936)
- Hàm đệ qui (Gôdel 1931, Church 1936, Kleene 1936)
- Algorit chuẩn Marcov (1954)
- Văn phạm Chomsky kiểu O (1959)

---

[1] Cuối cùng, vào năm 1969, nhà toán học trẻ người Nga là Iu. Matiasievich đã chứng minh rằng sẽ không bao giờ tìm được algorit với chức năng tìm được nghiệm nguyên của phương trình Điôphăng tùy ý.

- Hầu hết các ngôn ngữ lập trình (từ 1950 đến nay)

Chẳng hạn dưới đây là định nghĩa về máy Turing.

Máy Turing [(1)]

Máy Turing là một khái niệm toán học nhằm chính xác hóa khái niệm algorit. Mọi quá trình algorit bất kỳ, xét đến cùng, đều là một trình tự thực hiện một số phép biến đổi cơ sở nào đó. Trong mô hình máy Turing, ta chỉ dùng một loại phép biến đổi cơ sở vô cùng đơn giản, đó là việc thay thế một ký hiệu này bằng một ký hiệu khác.

Khái niệm máy Turing có ưu việt ở chỗ nó mô tả một cách khoa học, trên cơ sở phân tích tỉ mỉ các quá trình algorit nói chung, vì vậy, ngoài các giá trị lý thuyết trừu tượng, nó còn là cơ sở cho việc nghiên cứu các quá trình tính toán. Sau khi xuất hiện các máy tính điện tử (MTĐT) (khoảng năm 1946), máy Turing trở thành một mô hình toán học thuận tiện cho các máy tính thực tế. Trên cơ sở mô hình đó, người ta có thể nghiên cứu lý thuyết chung về các quá trình tính toán.

Điểm khác nhau căn bản giữa máy Turing và MTĐT trong thực tế là tiềm năng vô hạn của bộ nhớ của máy Turing so với bộ nhớ hữu hạn của MTĐT. Như vậy, máy Turing không tồn tại về mặt vật lý vì nó có bộ nhớ vô hạn, nhưng cũng chính do đặc điểm này mà ta thấy máy Turing mạnh hơn bất cứ MTĐT nào. Thông qua máy Turing, chúng ta có thể chứng minh sự tồn tại hoặc không một algorit giải bài toán nào đó.

Với việc một số định nghĩa nhằm chính xác hóa khái niệm algorit, lịch sử algorit chuyển sang lịch sử của một lĩnh vực khoa học mới : *algorithmique* (khoa học nghiên cứu algorit). Nói cách khác, nghiên cứu algorit thực sự trở thành một lý thuyết. *Lý thuyết algorit* quan tâm đến những vấn đề sau :

- Những bài toán nào giải được bằng algorit, những bài toán nào không giải được bằng algorit.
- Tối ưu hóa algorit : thay những algorit chưa tốt bằng những algorit tốt hơn.
- Triển khai algorit : Xây dựng những ngôn ngữ thực hiện trên máy tính để mã hóa algorit, nói cách khác là viết algorit dưới dạng máy tính điện tử hiểu được và dĩ nhiên là sau đó máy tính phải thực hiện algorit để xác định kết quả cần tìm.

Hướng nghiên cứu thứ hai thuộc phạm vi của lĩnh vực phân tích algorit : đánh giá định lượng mức độ phức tạp của algorit. Hướng nghiên cứu thứ ba thường được xếp vào khoa học lập trình.

Cũng sau khi chính xác hóa khái niệm algorit, người ta thấy rằng còn khá nhiều vấn đề về algorit chưa được giải quyết trong toán học. Một trong các vấn đề đó đòi hỏi tìm được phương pháp chung để giải hàng loạt các bài toán cùng dạng. Những vấn đề tương tự xuất hiện trong nhiều ngành toán học khác nhau qua các thời kỳ phát triển của chúng, tuy nhiên

[(1)] Phần này viết dựa theo [32, tr.68 - 69].

nhiều vấn đề cho đến nay vẫn còn chưa giải quyết xong. Việc sử dụng ý tưởng và các phương pháp của logic toán học, sau khi khái niệm algorit đã được chính xác hóa, cho phép chứng minh rằng, thông thường không tồn tại các algorit đang tìm kiếm ấy. Trong trường hợp này, vấn đề algorit được xem xét gọi là không giải được. Các vấn đề algorit không giải được xuất hiện khá nhiều trong các ngành toán học truyền thống như đại số, logic, lí thuyết số, tôpô logic v.v… Như vậy, quan niệm của các nhà toán học về algorit đã thay đổi. Bây giờ, *vấn đề algorit* được hiểu là câu hỏi : tồn tại hay không algorit để giải một loạt các bài toán cùng loại và tìm ra algorit này khi nó tồn tại.

Việc nghiên cứu vấn đề algorit trong một ngành toán học nào đó thường đi kèm với ý tưởng và các phương pháp của logic toán học trong ngành đó, từ đó dẫn đến việc giải quyết các vấn đề khác không còn tính chất đặc trưng của algorit nữa. (1)

(1) Phần này viết dựa theo [60, tr.220].

Phụ lục 2

MỐI LIÊN HỆ GIỮA ALGORIT, PHƯƠNG PHÁP TÍNH VÀ MÁY TÍNH ĐIỆN TỬ

Về mối liên hệ giữa các đối tượng này, dưới đây chúng tôi xin được trích dẫn nguyên văn kết quả nghiên cứu của tác giả Lê Văn Tiến được in trên tạp chí *Nghiên cứu Giáo dục*, số 12/2000, trang 24 :

> "Nhiều bài toán của toán học, của các khoa học khác hay của thực tế đòi hỏi tìm ra kết quả bằng số. Rất thông thường người ta chỉ tính được các giá trị gần đúng của kết quả nhờ vào phương pháp tính. Việc cụ thể hóa các phương pháp tính dẫn đến hình thành các thuật toán (algorithme). Trước đây người ta phải dừng lại ở việc mô tả các thuật toán vì thiếu công cụ thực hiện. Việc phát triển mạnh mẽ của công nghệ thông tin đã khắc phục khó khăn này. Về nguyên tắc, ta có thể sử dụng trực tiếp MTĐT (máy tính bỏ túi hay máy vi tính) để thực hiện từng bước của một thuật toán. Tuy nhiên, để tiết kiệm thời gian, ta thường tự động hóa việc thực hiện này. Điều đó đòi hỏi phải viết các thuật toán liên quan trong một ngôn ngữ hoàn toàn hình thức hóa để máy có thể hiểu được, mà ta gọi là "chương trình". Công việc thiết lập chương trình gọi là "lập trình" (programmation). Như vậy hình thành nên một tổng thể :
>
> Phương pháp tính $\rightarrow$ Thuật toán $\rightarrow$ Chương trình
>
> Lập trình
>
> Tư duy thuật toán
>
> Tiếp cận Tin học
>
> Quả thực, việc nghiên cứu (Phương pháp tính $\rightarrow$ Thuật toán $\rightarrow$ Chương trình), một mặt góp phần hình thành nên một yếu tố quan trọng của học vấn phổ thông (tư duy thuật toán), mặt khác cho phép làm quen với các phương pháp lập trình, với MTĐT. Điều đó cho phép tiếp cần dần với tin học.
>
> Để làm rõ logic nội tại của tổ chức Phương pháp tính $\rightarrow$ Thuật toán $\rightarrow$ Chương trình, giải gần đúng phương trình là một trong những vùng đất phong phú cần khai thác. Giải gần đúng phương trình dẫn tới những thuật toán lặp, những chương trình dành cho MTĐT rất thú vị."

Phụ lục 3

PHƯƠNG TRÌNH VÀ DẠY - HỌC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

Vì nội dung của luận văn đề cập đến *"các đối tượng algorit và tham số trong dạy học vấn đề phương trình ở trường THPT"* nên thiết nghĩ để trả lời các câu hỏi trên, chúng tôi cần phải tìm hiểu xem ở trường phổ thông, *khái niệm phương trình* được định nghĩa ra sao và *dạy học giải phương trình* cần được tiến hành như thế nào.

1. Khái niệm phương trình

Trong nhà trường phổ thông, khái niệm phương trình được nhìn ở cả hai phương diện : phương diện cú pháp và phương diện ngữ nghĩa.

> "*Phương diện cú pháp* (syntaxic) của toán học là mặt xem xét cấu trúc hình thức và sự biến đổi hình thức những biểu thức toán học, sự làm việc theo những quy tắc xác định và nói riêng là sự làm việc theo *thuật giải.*
>
> *Phương diện ngữ nghĩa* (semantic) của toán học là mặt xem xét nội dung của những mệnh đề toán học và *nghĩa* của những cách đặt vấn đề toán học." [38, tr.80]

1.1. Phương diện cú pháp

Theo quan điểm *"cú pháp"*, phương trình được xem như một dãy kí hiệu có một dạng nhất định, và từ đó có khả năng nghiên cứu được cấu trúc của dãy kí hiệu trừu xuất khỏi những nội dung cụ thể.

> "*Phương trình* là hai biểu thức nối với nhau bởi dấu = ; trong các biểu thức đó có một hoặc nhiều biến, gọi là ẩn." [59, tr.295]

1.2. Phương diện ngữ nghĩa

Khái niệm phương trình còn có thể được hiểu theo phương diện *"ngữ nghĩa"*. Phương diện này coi phương trình như một *hàm mệnh đề* [(1)]. Chẳng hạn, trong trường số phức **C**, phương trình được định nghĩa như sau :

> "Cho hai hàm số n biến phức $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là f($x_1, x_2, \ldots, x_n$) và g($x_1, x_2, \ldots, x_n$). Ta gọi tập hợp n số phức $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C^n$ là một *điểm* trong không gian phức n chiều C^n. Khi đó các hàm số f($x_1, x_2, \ldots, x_n$) và g($x_1, x_2, \ldots, x_n$)

[(1)] Cần chú ý rằng nếu triệt để tuân theo quan điểm cú pháp thì không thể nói phương trình là một hàm mệnh đề mà chỉ có thể nói phương trình biểu thị một hàm mệnh đề.

được xem là các hàm một biến f(x), g(x) trong C^n. Giả sử f(x) có miền xác định là $D_1 \subset C^n$, g(x) có miền xác định là $D_2 \subset C^n$.

Ta định nghĩa *phương trình*

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

là ký hiệu của hàm mệnh đề "giá trị của hai hàm số f(x) và g(x) là bằng nhau."

Ta gọi x là ẩn của phương trình (1) ; nếu coi f và g là hàm của n biến x_1, x_2, …, x_n trong không gian **C** thì (1) là phương trình của n ẩn x_1, x_2, …, x_n. Tập hợp các giá trị thừa nhận được của các đối số gọi là miền xác định của phương trình (1), đó là tập $S = D_1 \cap D_2$. […]

Thay cho trường **C**, ta có thể lấy một trường số **K** bất kỳ (có thể là **Q**, **R**) làm trường cơ sở […]." [36, tr.92]

Hay một định nghĩa đơn giản hơn :

"Giả sử cho y = f(x) và y = g(x) là các hàm số mà giao hai miền xác định của chúng là M. Ta gọi hàm mệnh đề "*Số trị của f(x) và g(x) bằng nhau*" xác định trên M là một *phương trình* và kí hiệu là f(x) = g(x).

Tập M được gọi là miền xác định của phương trình đó." [38, tr.61]

2. Dạy học giải phương trình (1)

Tương ứng với hai quan điểm về phương trình, dạy học giải phương trình ở trường phổ thông cũng chú ý đến cả phương diện cú pháp lẫn phương diện ngữ nghĩa và giải quyết một cách hợp lí mối quan hệ giữa hai phương diện đó.

2.1. Phương diện cú pháp

Nói chung, phương diện cú pháp được chú trọng trong dạy học giải phương trình có cách giải tổng quát thông qua việc xem xét cấu trúc của dãy kí hiệu biểu thị phương trình và qua sự làm việc một cách hình thức với dãy kí hiệu đó. Như thế, ***theo quan điểm cú pháp, phương trình sẽ được giải nhờ một algorit hay nhờ một công thức nào đó.***

Theo [38, tr.85], để rèn luyện cho học sinh cách suy nghĩ về mặt cú pháp,

"… người thầy giáo cần tập luyện cho học sinh không chỉ quan tâm tới những phương trình trực tiếp có dạng trên mà còn tận dụng những cơ hội giải những phương trình có thể đưa về các dạng trên nhờ những phép biến đổi thực hiện trên dãy kí hiệu biểu thị phương trình. Trong những trường hợp này, người thầy giáo nên yêu cầu họ xét cấu trúc của dãy kí hiệu biểu thị phương trình để đề xuất những

(1) Phần này viết chủ yếu dựa theo [38].

phép biến đổi thích hợp và xác định mục tiêu biến đổi là đưa phương trình về dạng nào […]".

"Những phép biến đổi thích hợp" ở đây có thể hiểu là : *phương pháp đặt ẩn phụ, phương pháp phân tích thành nhân tử, phương pháp hệ số bất định*, v.v… Như thế, việc giải phương trình bằng các *phương pháp đại số* cũng có thể xem là một trường hợp của việc giải nó theo phương diện cú pháp.

2.2. Phương diện ngữ nghĩa

Nhiều công trình nghiên cứu đã vạch rõ rằng trong việc dạy học phương trình, ban đầu cần chú trọng chủ yếu là phương diện ngữ nghĩa, càng về sau càng tăng cường thêm những yếu tố về mặt cú pháp nhưng không bao giờ được lãng quên mặt ngữ nghĩa.

> "… để chống lại việc nắm kiến thức một cách hình thức và máy móc, thỉnh thoảng cũng nên quay lại phương diện ngữ nghĩa của những quy tắc, chẳng hạn yêu cầu học sinh giải thích cơ sở của những quy tắc đó." [38, tr.83]

> "… ngay cả khi học sinh đã học những phép biến đổi phương trình, nhiều công thức và thuật giải để giải nhiều dạng phương trình, người thầy giáo cũng không được sao lãng phương diện ngữ nghĩa, trái lại cần khéo léo kết hợp cả hai phương diện ngữ nghĩa và cú pháp." [38, tr.85 - tr.86]

Một trong những cách giúp học sinh quan tâm đến phương diện ngữ nghĩa chính là **giải phương trình bằng *đồ thị*.**

> "… theo chương trình hiện hành, ta cần chú ý yêu cầu học sinh giải phương trình và hệ phương trình *bằng đồ thị.* Nhờ vậy họ sẽ được tập luyện *xác định giá trị ra khi cho biết giá trị vào, xác định giá trị vào khi cho biết giá trị ra* đối với tập hợp số thực và tập hợp điểm trên mặt phẳng." [38, tr.139]

Nhận định về phương pháp đồ thị, tác giả Phan Huy Khải cho rằng :

> "Phương pháp này dựa trên những yếu tố hình học, đồ thị của hàm số tiềm ẩn trong các bài toán đưa ra (nhưng nhìn chung, chúng không được thể hiện một cách tường minh, hoặc phải sau các phép biến đổi mới phát hiện ra chúng) …" [35, tr.3]

Tất nhiên, cũng như các phương pháp giải khác, phương pháp đồ thị không phải là thích hợp cho mọi phương trình, bất phương trình chứa tham số, nhưng đặc điểm của phương pháp này là một khi đã có một cách nhìn "hình học" thì lời giải của bài toán sẽ đơn giản, sáng sủa hơn.

Một cách khác giúp học sinh hiểu sâu sắc hơn phương diện ngữ nghĩa chính là nhận biết được **mối liên hệ giữa *phương trình* và *hàm số*.**

> "… cần tận dụng những cơ hội thích hợp cho học sinh *giải phương trình* […] dựa vào việc *khảo sát hàm số.*" [38, tr.139]

Trên đây là hai trong số những cách giúp học sinh rèn luyện tư duy ngữ nghĩa khi giải phương trình. Hai cách đó có thể được gọi chung là *phương pháp giải tích*.

Tóm lại, trong dạy – học phương trình, cần chú trọng thích đáng cả phương diện ngữ nghĩa lẫn phương diện cú pháp và giải quyết một cách hợp lí mối quan hệ giữa hai phương diện đó.

> "Việc chú trọng về phương diện ngữ nghĩa sẽ làm cho học sinh hiểu về phương trình một cách sâu sắc, khắc phục được những hiểu biết hình thức và máy móc. Mặt khác, việc chú trọng về phương diện cú pháp sẽ góp phần rèn luyện cho học sinh kĩ năng và kĩ xảo trong việc giải phương trình." [38, tr.87]

Phụ lục 4

CÁC PHƯƠNG PHÁP GIÁN TIẾP ĐỂ GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

(Các nội dung dưới đây được viết dựa theo [13] và [31].)

Xét hệ phương trình tuyến tính :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Đặt $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ là ma trận hệ số, $\mathrm{B} \in R^n$ là vectơ hệ số tự do cho trước, $\mathrm{X} \in R^n$ là vectơ cột phải tìm, thì hệ (1) viết được ở dạng :

$$\mathrm{AX} = \mathrm{B} \qquad (2)$$

1. PHƯƠNG PHÁP CHOLESKY (PHƯƠNG PHÁP PHÂN RÃ)

Xét lại hệ phương trình : AX = B

Giả sử ma trận A có thể biểu diễn được ở dạng :

$$\mathrm{A} = \mathrm{BC} \qquad (3)$$

trong đó $$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

là ma trận tam giác dưới, còn C là ma trận tam giác trên :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & c_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Khi đó có : B = AX = BCX = BY với Y = CX

Vậy hệ (2) được phân rã thành 2 hệ dạng tam giác sau đây :

$$\begin{cases} BY = B \\ CX = Y \end{cases}$$

Vấn đề giải hệ trên rất đơn giản, đầu tiên là giải hệ :

BY = B

Và sau đó với Y vừa tìm được, ta giải hệ :

CX = Y

Có thể thấy rằng, nếu như ta có :

$$a_{11} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, ..., \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

thì ma trận A luôn có thể biểu diễn được ở dạng (3).

Thật vậy, xét hệ phương trình :

$$\sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{ik} c_{kj} = a_{ij} \ (i, j = 1,2,....., n) \tag{4}$$

Trong (4) nếu i = j = 1 thì có $b_{11}.c_{11} = a_{11}$

Nếu như đã biết c_{11} thì sẽ có b_{11}, từ điều kiện $a_{11} \neq 0$ ta có $b_{11}.c_{11} \neq 0$

Bây giờ xét i = 2, j = 1 và i = 1, j = 2 thì có :

$$\begin{cases} b_{21}.c_{11} = a_{21} \\ b_{11}.c_{12} = a_{12} \end{cases}$$

Vì $b_{11} \neq 0$, và $c_{11} \neq 0$ nên xác định được b_{21}, c_{12}.

Bây giờ xét i = j = 2 thì có :

$$b_{21}.c_{12} + b_{22}.c_{22} = a_{22}$$

Nếu biết c_{22} thì từ đó có b_{22} :

Kiểm tra trực tiếp thấy rằng :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = b_{11}c_{11}b_{22}c_{22} \neq 0 \Rightarrow b_{22}.c_{22} \neq 0$$

Quá trình lập luận tiếp tục sẽ xác định được tất cả các ẩn còn lại trong hệ (4)

2. PHƯƠNG PHÁP CĂN BẬC HAI

(Phương pháp này là trường hợp riêng của phương pháp Cholesky)

Trong mục này ta xét riêng trường hợp A là ma trận đối xứng (nghĩa là A = A'), khi đó ta có : A = B.B' với B là ma trận tam giác dưới, B' là ma trận chuyển vị của B, còn hệ (2) được phân rã thành hệ dạng :

$$\begin{cases} BY = B \\ B'X = Y \end{cases}$$

Thực hiện phép nhân B.B' và đồng nhất các phần tử tương ứng trong đẳng thức : A = B.B'

thì ta có : $$\begin{cases} b_{1i}^2 + b_{2i}^2 + ... + b_{ii}^2 = a_{ii} \\ b_{1i}b_{1j} + b_{2i}b_{2j} + ... + b_{ii}b_{ij} = a_{ij} \quad (i < j) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta có :

$$b_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}} \quad (j > 1)$$

$$b_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki}^2} \quad (1 < i \le n)$$

$$b_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki}b_{kj}}{b_{ii}} \quad (i < j)$$

$$b_{ij} = 0 \text{ khi i > j}$$

Chú ý rằng ta lấy :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Sau đó với tính chất đặc thù của hệ tam giác trên và hệ tam giác dưới, dùng phép thế ngược ta sẽ có được nghiệm của hệ phương trình phải tìm, cụ thể là :

$$y_1 = \frac{b_1}{b_{11}}, y_i = \frac{1}{b_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} b_{ki}y_k\right)(i > 1)$$

$$x_i = \frac{1}{b_{ii}}\left(y_i - \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik}x_k\right)(i < n), x_n = \frac{y_n}{b_{nn}}$$

Chú ý : Khối lượng tính toán của phương pháp này cỡ n^3 phép tính nhân chia.

Hệ phương trình AX = B với A là đối xứng thường gặp trong những bài toán xử lý số liệu bằng phương pháp bình phương tối thiểu.

Ví dụ : Giải hệ phương trình AX = B nhờ phương pháp phân rã trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vì $b_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1$, $b_{12} = \dfrac{a_{12}}{b_{11}} = \dfrac{2}{1} = 2$

$$b_{13} = \frac{a_{13}}{b_{11}} = \frac{1}{1} = 1, \qquad b_{22} = \sqrt{a_{22} - b_{12}^2} = 1$$

$$b_{23} = \frac{1}{b_{22}}\left(a_{23} - b_{12}b_{13}\right) = \frac{1-2}{1} = -1$$

$$b_{33} = \sqrt{a_{33} - \left(b_{13}^2 + b_{23}^2\right)} = 1$$

nên hệ trên đưa về hai hệ sau :

$$\begin{cases} 1.y_1 = 1 \\ 2.y_1 + 1.y_2 = 1 \\ 1.y_1 + (-1)y_2 + 1.y_3 = 1 \end{cases} \text{ với nghiệm } \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = -1 \end{cases}$$

và hệ $\begin{cases} 1.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 = 1 \\ 1.x_2 - 1.x_3 = -1 \\ 1.x_3 = -1 \end{cases}$ với nghiệm $\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

3. PHƯƠNG PHÁP TRỰC GIAO

Xét lại hệ phương trình : AX = B với ma trận hệ số A không suy biến.

Viết lại phương trình (2) ở dạng :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i = 0 \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Kí hiệu $a_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}, -b_i\right), i = \overline{1,n}$, ta có hệ n vectơ $\{a_i\}_{i=1}^{n}$. Nếu thêm vectơ $a_{i+1} = (0,....,0,1)$ thì có hệ (n + 1) véctơ $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$ trong đó $a_i \in R^{n+1}, \forall i = \overline{1, n+1}$.

Xét quá trình trực giao hóa Hilbert-Schmidt cho hệ $\{a_i\}_{i=1}^{n+1}$, ta thu được :

$$\begin{cases} u_1 = a_1, v_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} \\ u_k = a_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} (a_k, v_i) v_i, \quad v_k = \dfrac{u_k}{\|u_k\|}, k = 2, ..., (n+1) \end{cases} \tag{6}$$

Bây giờ xét $u_{n+1} = (t_1, t_2, ..., t_{n+1})$. Giả sử $t_{n+1} = 0$, theo tính chất dãy $\{u_i\}_{i=1}^{n+1}$ rút ra u_{n+1} trực giao với mọi vectơ a_i, $i = \overline{1, n}$; vậy ta có :

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} t_j = 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \tag{7}$$

Mặt khác, theo giả thiết A là ma trận không suy biến nên từ (7) rút ra $t_1 = t_2 = ... = t_n = 0$, vậy có $u_{n+1} = (0,0,....,0)$, vô lý, nghĩa là $t_{n+1} \neq 0$

Vì u_{n+1} trực giao với mọi a_i $(i = \overline{1, n})$; nên có :

$$\begin{cases} (u_{n+1}, a_i) = 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

hay khai triển ra ta có : $\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} t_j - b_i t_{n+1} = 0 \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$

Chú ý rằng $t_{n+1} \neq 0$, nên : $\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\dfrac{t_j}{t_{n+1}} \right) = b_i \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$ (8)

Hệ thức (8) chứng tỏ rằng $x = (x_j)_{j=1}^{n}$ với $x_j = \dfrac{t_j}{t_{n+1}}$, $j = \overline{1, n}$, là nghiệm của hệ phương trình (1).

Nhận xét : Phương pháp trực giao hoá tương đối đơn giản, dễ lập trình trên máy tính, khối lượng tính toán ít (cỡ n^3 phép tính).

4. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

Trong R^n , người ta thường xét ba chuẩn quen thuộc sau :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Khi đó với ma trận $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in R^{nxn}$ sẽ có các chuẩn tương ứng :

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ji}|$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1}$ (λ_1 là giá trị riêng lớn nhất của ma trận A'.A).

Để giải hệ phương trình AX = B (2) nhờ phương pháp lặp đơn, người ta biến đổi (2) về dạng :

$$X = BX + G \qquad (10)$$

Sau đó với $x^{(0)} \in R^n$, ta thiết lập dãy $\{x^{(k)}\}_k$ bằng cách đặt :

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = BX^{(k)} + G \\ k \ge 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Với một số điều kiện về ma trận B, dãy $\{x^{(k)}\}_k$ hội tụ đến nghiệm x^* của hệ (2).

Phương pháp lặp xác lặp theo hệ thức (11) để giải hệ phương trình (2) được gọi là phương pháp lặp đơn.

Các định lí cơ bản

Định lí 1

Nếu $\|B\| < 1$ thì với mọi $x^{(0)} \in R^n$, dãy $\{x^{(k)}\}_k$ xác định bởi (11) hội tụ đến nghiệm duy nhất x^* của hệ phương trình (2), hơn nữa ta có :

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \le \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.$$

Chứng minh

Xét toán tử $T : R^n \to R^n$ được xác định bởi TX = BX + G. Khi ấy $\|TX - TX'\| \le \|B\| \|X - X'\|, \forall X, X' \in R^n$, điều này chứng tỏ rằng T là toán tử co, áp dụng nguyên lí ánh xạ co ta có điều phải chứng minh.

Chú ý

1) Trong không gian R^n thì mọi chuẩn là tương đương cho nên nếu phép lặp (11) hội tụ với một chuẩn nào đó thì nó cũng hội tụ với các chuẩn khác.

2) Vấn đề đưa hệ phương trình (2) về dạng (10) với ma trận B thỏa mãn điều kiện $\|B\| < 1$ là không tầm thường. Nói chung, với mỗi ma trận A cụ thể phải có một kĩ thuật tương ứng kèm theo. Định lí dưới đây cho ta một vài trường hợp điển hình.

Định lí 2

Giả sử ma trận $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ thỏa mãn một trong hai điều kiện sau :

a) $\sum_{i \neq j=1}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \qquad \forall i = \overline{1,n}$

b) $\sum_{j \neq i=1}^{n} |a_{ij}| < |a_{jj}|, \qquad \forall j = \overline{1,n}$

Khi đó luôn có thể đưa được hệ phương trình (2) về dạng (10) với điều kiện $\|B\| < 1$.

Chứng minh

a. Giả sử điều kiện a) được thỏa mãn, khi đó ta viết lại (2) ở dạng :

$$\begin{cases} a_{ii}x_i + \sum_{i \neq j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Từ đó có :

$$\begin{cases} x_i = -\sum_{i \neq j=1}^{n} \left(\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right) x_j + \frac{b_i}{a_{ii}} \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Vậy ta đã đưa hệ (2) về hệ phương trình tương đương với nó, ở đó :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Từ điều kiện a) rút ra rằng :

$$\|B\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i \neq i=1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right) < 1$$

b. Giả sử điều kiện b) được thỏa mãn ta viết lại hệ phương trình (2) ở dạng :

$$\begin{cases} a_{ii}x_i + \sum_{i \neq j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

Đặt $z_i = a_{ii}x_i$ thì có hệ :

$$\begin{cases} z_i = -\sum_{i \neq j=1}^{n} \left(\dfrac{a_{ij}}{a_{jj}} \right) z_j + b_i \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

Vậy ta có hệ phương trình : Z = BZ + b (12)

Ở đó :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a_{12}}{a_{22}} & -\dfrac{a_{13}}{a_{33}} & \cdots & -\dfrac{a_{1n}}{a_{nn}} \\ -\dfrac{a_{21}}{a_{11}} & 0 & -\dfrac{a_{23}}{a_{33}} & \cdots & -\dfrac{a_{2n}}{a_{nn}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{a_{n1}}{a_{11}} & -\dfrac{a_{n2}}{a_{22}} & -\dfrac{a_{n3}}{a_{33}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Từ điều kiện ta có :

$$\|B\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{j \neq i=1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| \right) < 1$$

Tóm lại, ta có hệ phương trình : Z = BZ + b với $\|B\|_1 < 1$

Chú ý rằng nếu $Z^* = \left(z_1^*, ..., z_n^*\right)$ là nghiệm của hệ (12) thì $X^* = \left(\dfrac{z_1^*}{a_{11}}, \dfrac{z_2^*}{a_{22}}, ..., \dfrac{z_n^*}{a_{nn}} \right)$ là nghiệm của hệ phương trình (2).

Ví dụ : Giải hệ phương trình sau đây bằng phương pháp lặp đơn :

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 12 \\ x_1 + x_2 + 10x_3 = 8 \end{cases}$$

Dễ thấy hệ phương trình này thỏa mãn điều kiện a) ở trong định lí 3.6.2. Ta đưa hệ về dạng :

$$\begin{cases} x_1 = - 0,2x_2 - 0,1x_3 + 1 \\ x_2 = -0,1x_1 - 0,2x_3 + 1,2 \\ x_3 = -0,1x_1 - 0,1x_2 + 0,8 \end{cases}$$

Với xấp xỉ ban đầu $x^{(0)} = (0, 0, 0)$, ta thu được kết quả thể hiện qua bảng sau đây :

k	x_1	x_2	x_3
1	1	1,2	0,8
2	0,68	0,94	0,58
3	0,754	1,016	0,638
4	0,733	0,997	0,623

5	0,7383	1,0021	0,6270
6	0,73688	1,00077	0,62596
7	0,737250	1,00112	0,626235

Có thể thấy nghiệm đúng của hệ này là :

$$X^* = \left(\frac{707}{955}; \frac{956}{955}; \frac{598}{955}\right) \text{ và } X^{(7)} \text{ là tương đối chính xác.}$$

5. PHƯƠNG PHÁP SEIDEL

Trong mục này ta tiếp tục nghiên cứu vấn đề giải hệ phương trình AX = B (2).

Giả sử hệ (2) được đưa về dạng : X = BX + G (13)

Giả sử rằng đã có các xấp xỉ $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, …., $x^{(k-1)}$ thì lúc đó $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right)$ được xác định bởi :

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} b_{1j} x_j^{(k-1)} + g_1 \\ x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k)} + \sum_{j=i}^{n} b_{ij} x_j^{(k-1)} + g_i \\ i = \overline{2, n} \end{cases} \quad (14)$$

Dãy $\left\{x^{(k)}\right\}$ xây dựng theo hệ thức (14) để giải hệ phương trình (2) được gọi là dãy xấp xỉ xây dựng theo thuật toán Seidel hoặc theo phương pháp Seidel.

Định lí : Nếu $\|B\|_\infty = \max_{1 \le i \le n}\left(\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|\right) < 1$ thì dãy $\left\{x^{(k)}\right\}$ xây dựng bởi hệ thức (14) hội tụ đến nghiệm duy nhất của hệ phương trình (2).

Chứng minh

Theo định lí 3.6.1 thì hệ phương trình (2) có nghiệm duy nhất x^*, nghĩa là :

$$\begin{cases} x_i^* = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^* = g_i \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \quad (15)$$

Lấy (14) trừ đi (15) từng phương trình ta thu được :

$$x_i^{(k+1)} - x_i^* = \sum_{j=1}^{i=1} b_{ij}\left(x_j^{(k+1)} - x_j^*\right) + \sum_{j=i}^{n} b_{ij}\left(x_j^{(k)} - x_j^*\right)$$

Từ đó ta có :

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^*\right| = \sum_{j=1}^{i=1} \left|b_{ij}\right| \left|x_j^{(k+1)} - x_j^*\right| + \sum_{j=i}^{n} \left|b_{ij}\right| \left|x_j^{(k)} - x_j^*\right| \qquad (16)$$

Ta đặt : $\sum_{j=1}^{i-1} \left|b_{ij}\right| = \beta_i$, $\sum_{j=i}^{n} \left|b_{ij}\right| = \gamma_i$, chú ý đến $\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$, ta có :

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^*\right| \le \beta_i \left\|x^{(k+1)} - x^*\right\|_\infty + \gamma_i \left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty \qquad (17)$$

Gọi i_0 là chỉ số mà :

$$\left|x_{i_0}^{(k+1)} - x_{i_0}^*\right| = \max_{1 \le i \le n} \left|x_i^{(k+1)} - x_i^*\right| = \left\|x^{(k+1)} - x^*\right\|_\infty .$$

Từ (6) ta thu được :

$$\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\|_\infty \le \beta_{i_0} \left\|x^{(k+1)} - x^*\right\|_\infty + \gamma_{i_0} \left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty .$$

Vậy : $\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\|_\infty \le \dfrac{\gamma_{i_0}}{\left(1 - \beta_{i_0}\right)} \left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty$

Đặt $v = \max \dfrac{\gamma_{i_0}}{\left(1 - \beta_{i_0}\right)}$ thì sẽ có :

$$\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\|_\infty \le v \left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty \qquad (18)$$

Mặt khác dễ thấy : $\left(\beta_i + \gamma_i\right) - \dfrac{\gamma_i}{\left(1 - \beta_i\right)} \ge 0$, từ đó có :

$\|B\|_\infty = \max_i \left(\beta_i + \gamma_i\right) \ge v$, nên v < 1, do đó hệ thức (7) dẫn đến $\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^*$, nghĩa là dãy $\left\{x^{(k)}\right\}$ xây dựng theo phương pháp Seidel hội tụ đến nghiệm duy nhất x^*.

Nhận xét

1) Tốc độ hội tụ của phương pháp lặp đơn đối với hệ phương trình (2) là :

$$\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\| \le \|B\| . \left\|x^{(k)} - x^*\right\|$$

Mặt khác, tốc độ hội tụ của phương pháp Seidel là :

$$\left\|x^{(k+1)} - x^*\right\| \le v . \left\|x^{(k)} - x^*\right\| \text{ với } v < \|B\|$$

2) Nếu viết lại hệ (2) ở dạng : $X = (B_1 + B_2)X + G$, trong đó :

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

thì có thể viết (14) dưới dạng sau đây :

$$X^{(k+1)} = (E - B_1)^{-2} B_2 X^{(k)} + (E - B_1)^{-1} G$$

Như vậy phương pháp Seidel cũng là phương pháp lặp đơn được áp dụng cho hệ phương trình khác.

Ví dụ : Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Seidel :

$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 12x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases}$$

với xấp xỉ ban đầu $x^{(0)} = (0, 0, 0)$

Các tính toán cho bởi bảng sau :

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0	0	0
1	2,5	2,1	1,2
2	2,988	2,023	1,000
3	3,0086	1,9969	0,9965
4	2,99971	1,9979	1,00020
5	2,999871	2,00065	1,000048

Chú ý rằng nghiệm đúng của hệ là $x^* = (3, 2, 1)$, từ đó ta thấy trong trường hợp này, phương pháp Seidel hội tụ tương đối nhanh.

Phụ lục 5

PHIẾU THAM KHẢO Ý KIẾN GIÁO VIÊN

Thưa quý Thầy Cô,

Chúng tôi đang tiến hành một nghiên cứu nhỏ mà để hoàn thành xin được tham khảo ý kiến của quý Thầy Cô. Mong Thầy Cô giúp chúng tôi trả lời các câu hỏi dưới đây hoặc đánh dấu chéo vào câu mà Thầy cô muốn chọn.

Xin chân thành cám ơn.

Câu 1

Thầy Cô nghĩ gì nếu trong tương lai, Bộ Giáo dục và Đào tạo quyết định *loại bỏ* các chủ đề phương trình, hệ phương trình, bất phương trình có chứa tham số ra khỏi chương trình toán ở bậc trung học phổ thông?

....

....

....

....

Câu 2

Bài toán sau dành cho học sinh lớp 10 :

An và Bình cùng giải và biện luận hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer (định thức cấp hai) :

$$(*) \quad \begin{cases} (m-1)x+(m^2-1)y=0 \\ m(m-1)x+(1-m^2)y=1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

nhưng khi tìm được giá trị của m sao cho $D = D_x = D_y = 0$, mỗi bạn lại đưa ra kết luận trong trường hợp này như sau :

An : "Hệ (*) *có vô số nghiệm*."

Bình : "Hệ (*) *vô nghiệm*."

Theo em, bạn nào có lý? Giải thích sự lựa chọn của em.

Dưới đây là lời giải thích của hai em học sinh.

Lời giải A

Ta có :

$$D = \begin{vmatrix} m-1 & m^2-1 \\ m(m-1) & 1-m^2 \end{vmatrix} = m^4 - 1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & m^2-1 \\ 1 & 1-m^2 \end{vmatrix} = m^2 - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ m(m-1) & 1 \end{vmatrix} = m - 1$$

Bạn Bình nói đúng vì với $D = D_x = D_y = 0$ thì m = 1. Thế m = 1 vào hệ phương trình (*), ta được : $\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$ (Vô lý). Vậy trong trường hợp này, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Lời giải B

Trước tiên, ta xét :

$(m - 1)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m - 1)^2 [1 + (m + 1)^2]$ khác 0 khi $m \neq 1$.

$[m(m - 1)]^2 + (1 - m^2)^2 = (m - 1)^2 [m^2 + (m + 1)^2]$ khác 0 khi $m \neq 1$.

Tiếp theo, ta tính các định thức D, D_x, D_y (tính như trên).

Khi $D = D_x = D_y = 0$, suy ra m = 1 : mâu thuẫn với điều kiện $m \neq 1$.

Do đó, trong trường hợp này, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Vậy bạn Bình nói đúng.

Với hai lời giải trên đây, Thầy Cô mong đợi lời giải nào nhất? Xin vui lòng cho biết lí do?

....

....

....

....

....

Câu 3

Cho bài toán :

Hãy giải hệ phương trình sau bằng nhiều phương pháp khác nhau.

$$\begin{cases} mx + y = m \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

Theo Thầy Cô, học sinh lớp 10 có biết giải và biện luận hệ phương trình trên bằng nhiều phương pháp khác nhau hay không?

Nếu có thì những phương pháp nào có khả năng được học sinh sử dụng?

....

....

....

Câu 4

Sau khi giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn bằng định thức (quy tắc Cramer), Thầy Cô có yêu cầu học sinh nhìn lại mối liên hệ giữa vị trí tương đối của hai đường thẳng với các trường hợp biện luận theo ba định thức D, D_x, D_y trong quy tắc Cramer hay không?

a) Thường xuyên

b) Ít khi

c) Chưa bao giờ

Xin Thầy Cô vui lòng cho biết lí do vì sao.

....

....

....

....

Phụ lục 6

BỘ CÂU HỎI ĐIỀU TRA DÀNH CHO HỌC SINH

Trường : ....

Lớp : ....

Họ và tên : ....

☞ **Lưu ý** : *Học sinh làm bài ngay trên giấy đã phát và không được dùng bút xóa.*

Bài 1 *(làm việc cá nhân)*

Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng (d_1) và (d_2) tùy theo giá trị của tham số m :

(d_1) : $mx + (m-1)y = m$

(d_2) : $(m+1)x + (m+1)y = 2m$

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Bài 2 *(làm việc theo nhóm)*

Hãy giải hệ phương trình sau bằng *nhiều phương pháp khác nhau*.

$$\begin{cases} mx + y = m & (d_1) \\ x + 2y = 1 & (d_2) \end{cases}$$

Nhóm *thắng cuộc* là nhóm có nhiều phương pháp giải nhất.

Lời giải

Bài 3 *(làm việc cá nhân)*

An và Bình cùng giải và biện luận hệ phương trình sau bằng quy tắc Cramer (định thức cấp hai) :

$$(*)\quad \begin{cases}(m-1)x+(m^2-1)y=0\\ m(m-1)x+(1-m^2)y=1\end{cases}\qquad (\textit{m là tham số})$$

nhưng khi tìm được giá trị của m sao cho $D = D_x = D_y = 0$, mỗi bạn lại đưa ra kết luận trong trường hợp này như sau :

An : "Hệ (*) *có vô số nghiệm*."

Bình : "Hệ (*) *vô nghiệm*."

Theo em, bạn nào có lý? Giải thích sự lựa chọn của em.

Lời giải

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Phụ lục 7

MỘT SỐ BÀI LÀM CỦA HỌC SINH