ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TR□ ỜNG ĐẠI HỌC S□ PHẠM

BÙI THỊ HUỆ

LÝ THUYẾT FLOQUET
ĐỐI VỚI HỆ PH□ƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ CHỈ SỐ 1

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

BÙI THỊ HUỆ

LÝ THUYẾT FLOQUET
ĐỐI VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ CHỈ SỐ 1

CHUYÊN NGÀNH: GIẢI TÍCH
Mã số : 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Ng- ời h- ớng dẫn khoa học: TS Đào Thị Liên

Thái Nguyên - 2009

MỤC LỤC

MỘT SỐ KÝ HIỆU DÙNG TRONG LUẬN ÁN

$L($[redacted]: là tập hợp các toán tử tuyến tính liên tục trên [redacted]

A^T: ma trận chuyển vị của ma trận A

$im(A)$: ảnh của A

$\ker A$: không gian không của A

A^+: nghịch đảo Moore – Penrose A

$\det A$: định thức của ma trận A

$rank\ A$: hạng của ma trận A

$ind\ A$: chỉ số của cặp ma trận A

$ind\ (A, B)$: chỉ số của cặp ma trận (A, B)

$diag(m, N)$: ma trận chéo

I_r: ma trận đơn vị cấp r

$C_N^1 := \{x \in C($[redacted]: tập các véc tơ hàm liên tục trong [redacted] xác định trên [redacted]

$C^1($[redacted]: tập các ma trận hàm khả vi liên tục trong [redacted] và xác định trên [redacted]

$G := A + BQ$

$A_1 := A + B_0Q$

$B_0 := B - AP'$

$Q_s := QA_1^{-1}B = QG^{-1}B$: là phép chiếu chính tắc lên $N(t)$ dọc $S(t)$

$P_s := I - Q_s$ là phép chiếu chính tắc lên $N(t)$ dọc $S(t)$

$Span\ P(t)$: bao tuyến tính của $P(t)$

$S(t) := \{z \in$ [redacted] $\in im\ A(t)\}$

$< x, y >$: tính vô hướng

MỞ ĐẦU

Trong khoa học và ứng dụng thực tiễn hiện nay có nhiều bài toán, chẳng hạn mô tả hệ động lực, hệ thống mạng điện, những bài toán điều khiển ,... đòi hỏi phải giải và xét tính chất nghiệm những hệ phương trình dạng: $Ax'+Bx=0$ trong đó $A,B\in L($[redacted] hoặc $A,B\in L(I,$[redacted]$A=0$ gọi là hệ phương trình vi phân đại số. Một trong những lớp đơn giản nhất của các hệ phương trình đại số là hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1. Trường hợp $\det A\neq 0$ ta dễ dàng đưa hệ trên về hệ $x'=A^{-1}Bx$ (những phương trình này được coi là có chỉ số 0), nghĩa là hệ phương trình vi phân thường được xem là một trường hợp riêng của hệ phương trình vi phân đại số. Rất nhiều bài toán và kết quả của hệ phương trình thường được xét đối với hệ phương trình vi phân đại số. Trong luận văn này, chúng tôi trình bày các kết quả của các tác giả René Lamour-Roswitha Marz and Renate Winkler, Đào Thị Liên, Phạm Văn Việt về lý thuyết Floquet đối với các hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính chỉ số 1, từ đó tác giả đưa ra tiêu chuẩn ổn định của nghiệm tuần hoàn của hệ phi tuyến. Trong bài báo *"How Floquet Theory Applies to Index 1 Differential Algebraic Equations*", René Lamour-Roswitha Marz and Renate Winkler, nhiều kết quả chưa được chứng minh hoặc chỉ chứng minh vắn tắt. Luận văn này đã chi tiết các chứng minh và đưa ra những ví dụ minh họa cho các kết quả quan trọng trong bài báo. Ngoài mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo. Luận văn gồm 2 chương:

Chương 1. Các kiến thức cơ sở

Nội dung chương này là hệ thống các kết quả của lý thuyết Floquet đối với hệ phương trình vi phân thường và các kiến thức cơ bản về hệ phương trình vi phân đại số.

Chương 2. Lý thuyết Floquet đối với hệ phương trình vi phân đại số chỉ số 1. Đây là nội dung chính của luận văn. Ở đây các khái niệm được lấy ví dụ minh họa, các kết quả được chứng minh chi tiết và có ví dụ áp dụng.

LỜI CẢM ƠN

Tác giả chân thành cảm ơn **TS Đào Thị Liên**, trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, người đã hướng dẫn tác giả hoàn thành luận văn này. Xin được cám ơn Trường Đại học Sư phạm-Đại học Thái Nguyên, nơi tác giả hoàn thành Chương trình Cao học dưới sự giảng dạy nhiệt tình của các thày, cô giáo. Xin chân thành cảm ơn Sở Giáo dục và Đào tạo Tuyên Quang, trường THPT Thượng Lâm-Na Hang-Tuyên Quang đã tạo mọi điều kiện để tác giả hoàn thành chương trình học tập. Và cuối cùng, xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, động viên, giúp đỡ tác giả trong suốt thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn này.

Chương 1. KIẾN THỨC CƠ SỞ

1.1 HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN THƯỜNG

1.1.1 Các khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.1.1. Hệ phương trình vi phân thường (ODE) là hệ phương trình dạng:

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, ..., y_n), (i = 1, 2, \text{[redacted]}, \quad (1.1.1)$$

trong đó t là biến độc lập (thời gian); $y_1, ..., y_n$ là các hàm cần tìm, f_i là các hàm xác định trong một bán trụ

$$T = I_t^+ \times D_y, I_t^+ = \{t_0 < t < \infty\}.$$

và D_y là một miền mở thuộc [redacted].

Định nghĩa 1.1.2. Hệ phương trình vi phân thường tuyến tính có dạng

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + ... + a_{1n}(t)y_n + f_1(t) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + ... + a_{2n}(t)y_n + f_2(t) \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dt} = a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + ... + a_{nn}(t)y_n + f_n(t) \end{cases} \quad (1.1.2)$$

trong đó t là biến độc lập và $y_1(t), ..., y_n(t)$ là các ẩn hàm cần tìm, các hàm $a_{ij}(t)$ và $f_i(t)$ lần lượt được gọi là *các hệ số* và *hệ số tự do* của hệ. Chúng được giả thiết là liên tục trên khoảng $I = (a, b) \subset$ [redacted] nào đó.

Dùng ký hiệu ma trận, có thể viết hệ (1.1.2) dưới dạng thu gọn

$$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t) \quad (1.1.3)$$

trong đó $A(t) = (a_{ij}(t))$ là ma trận hàm cấp $n \times n$, $f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))^T$ là vector cột. Nếu $f(t) \equiv 0$, ta gọi hệ trên là *hệ tuyến tính thuần nhất,* ngược lại, ta gọi hệ trên là *hệ tuyến tính không thuần nhất*.

Định nghĩa 1.1.3. Nghiệm $Z = Z(t) \quad (a < t < \infty)$ của hệ

$$\frac{dY}{dt} = F(t, Y) \tag{1.1.4}$$

trong đó $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \text{[redacted]} \\ y_n \end{bmatrix}$ [redacted]n $(y_1, ..., y_n)$,

$$F(t, Y) = colon\left[f_1(t, Y), ..., f_n(t, Y) \right]$$

$$\frac{dY}{dt} = colon\left(\frac{dy_1}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, ..., \frac{dy_n}{dt} \right)$$

được gọi là *ổn định* theo nghĩa Lyapunov khi $t \to +\infty$ (hay ngắn gọn là ổn định), nếu với mọi $\varepsilon > 0$ và $t_0 \in (a, \infty)$, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ sao cho:

1. Tất cả các nghiệm $Y = Y(t)$ của hệ (1.1.4) (bao gồm cả nghiệm $Z(t)$) thỏa mãn điều kiện

$$\|Y(t_0) - Z(t_0)\| < \delta \tag{1.1.5}$$

xác định trong khoảng $[t_0, +\infty)$, tức là $Y(t) \in D_Y$ khi $t \in [t_0, \infty)$.

2. Đối với các nghiệm này bất đẳng thức sau thỏa mãn

$$\|Y(t) - Z(t)\| < \varepsilon \text{ khi } t_0 \le t < \infty \tag{1.1.6}$$

Định nghĩa 1.1.4. Nghiệm $Z = Z(t) \quad (a < t < \infty)$ được gọi là *ổn định tiệm cận* khi $t \to +\infty$, nếu:

1. Nó ổn định theo Lyapunov và

2. Với mọi $t_0 \in (a, \infty)$ tồn tại $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ sao cho mọi nghiệm $Y(t)$ $(t_0 \le t < \infty)$ thỏa mãn điều kiện $\|Y(t_0) - Z(t_0)\| < \Delta$ thì

$$\lim_{t \to \infty} \|Y(t) - Z(t)\| = 0 \tag{1.1.7}$$

1.1.2. Tính ổn định của hệ phương trình vi phân tuyến tính

Xét hệ vi phân tuyến tính (1.1.2), dưới dạng ma trận (1.1.3), trong đó ma trận $A(t)$ và véctơ $F(t)$ liên tục trong khoảng (a,∞).

Giả sử $X(t)=\left[x_{ij}(t)\right] \quad (\det X(t)\neq 0)$ (1.1.8)

là ma trận nghiệm cơ bản (tức là hệ nghiệm cơ bản được viết dưới dạng $(n\times n)$-ma trận) của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng

$$\frac{dY}{dt}=A(t)Y \tag{1.1.9}$$

tức là ma trận gồm n nghiệm độc lập tuyến tính của (1.1.9):

$$\begin{cases} X^{(1)}(t)=colon\left[x_{11}(t),...,x_{n1}(t)\right];\\ ....\\ X^{(n)}(t)=colon\left[x_{1n}(t),...,x_{nn}(t)\right].\end{cases}$$

Nếu ma trận nghiệm cơ bản $X(t)$ là *chuẩn hóa* tại $t=t_0$, tức là $X(t_0)=I_n$, thì

$$Y(t)=K(t,t_0)Y(t_0) \tag{1.1.10}$$

với
$$K(t,t_0)=X(t)X^{-1}(t_0)$$

có dạng

$$Y(t)=X(t)Y(t_0) \tag{1.1.11}$$

Định nghĩa 1.1.5. Hệ vi phân tuyến tính (1.1.3) được gọi là *ổn định* (hoặc không ổn định) nếu tất cả các nghiệm $Y=Y(t)$ của nó tương ứng ổn định (hoặc không ổn định) theo Lyapunov khi $t\to+\infty$.

Định nghĩa 1.1.6. Hệ vi phân tuyến tính (1.1.3) được gọi là *ổn định tiệm cận* nếu tất cả các nghiệm của nó ổn định tiệm cận khi $t\to+\infty$.

Định lý 1.1.1. *Điều cần và đủ để hệ vi phân tuyến tính* (1.1.3) *ổn định với số hạng tự do bất kì* $F(t)$ *là nghiệm tầm thường*

$$Y_0\equiv 0 \quad (t_0<t<\infty,\ t_0\in(a,\infty))$$

của hệ thuần nhất tương ứng (1.1.9) *ổn định.*

Định lý 1.1.2. *Hệ vi phân tuyến tính* (1.1.3) *ổn định tiệm cận khi và chỉ khi nghiệm tầm thường* $Y_0 \equiv 0$ *của hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng* (1.1.9) *ổn định tiệm cận khi* $t \to +\infty$.

Xét hệ vi phân tuyến tính thuần nhất (1.1.9), trong đó $A(t)$ liên tục trong khoảng (a, ∞).

Định lý 1.1.3. *Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất* (1.1.9) *ổn định theo nghĩa Lyapunov khi và chỉ khi mỗi nghiệm* $Y = Y(t)$ $(t_0 \le t < \infty)$ *của hệ đó bị chặn trên nửa trục* $t_0 \le t < \infty$.

Định lý 1.1.4. *Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất* (1.1.9) *ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tất cả các nghiệm* $Y = Y(t)$ *của nó dần tới không khi* $t \to +\infty$, *tức là*

$$\lim_{t \to \infty} Y(t) = 0 \qquad (1.1.12)$$

Xét hệ (1.1.9) trong đó $A = \left[a_{ij}\right]$ là ma trận hằng $(n \times n)$.

Định lý 1.1.5. *Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất* (1.1.9) *với ma trận hằng* A *ổn định khi và chỉ khi tất cả các nghiệm đặc trưng* $\lambda_i = \lambda_i(A)$ *của* A *đều có phần thực không dương.*

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A) \le 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

và các nghiệm đặc trưng có các phần thực bằng không đều có ước cơ bản đơn.

Định lý 1.1.6. *Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất* (1.1.9) *với ma trận hằng* A *ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tất cả các nghiệm đặc trưng* $\lambda_i = \lambda_i(A)$ *của* A *đều có phần thực âm, tức là*

$$\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0 \quad (i = 1, ..., n)$$

1.1.3. Lý thuyết Floquet

Xét ODE với hệ số tuần hoàn

$$x'(t) - W(t)x(t) = 0, \tag{1.1.13}$$

trong đó $W \in C($[redacted]$t) = W(t+T)$ với $\forall t \in$ [redacted], giả sử (1.1.13) có ma trận nghiệm cơ bản $X(t)$, với

$$X'(t) - W(t)X(t) = 0, \quad X(0) = I_n.$$

Định lý 1.1.7. (định lý Floquet [8]). *Ma trận nghiệm cơ bản $X(t)$ của (1.1.13) có thể viết dưới dạng*

$$X(t) = F(t)e^{tW_0}, \tag{1.1.14}$$

trong đó $F \in C^1($[redacted] *là không suy biến, $F(t) = F(t+T)$ với $\forall t \in$* [redacted]

Định lý 1.1.8. (định lý Lyapunov [9]). *(i) Giả sử $F \in C^1($*[redacted]*là không suy biến và T-tuần hoàn. Khi đó $x = F(t)\bar{x}$ biến* (1.1.13) *thành ODE tuyến tính thuần nhất với một ma trận hệ số T- tuần hoàn, nhân tử đặc trưng của chúng trùng với nhân tử đặc trưng của* (1.1.13).

(ii) Tồn tại $F \in C^1($[redacted] *không suy biến, T-tuần hoàn ($F \in C^1($*[redacted] *không suy biến, 2T-tuần hoàn) với $F(0) = I_n$ sao cho phép biến đổi $x = F(t)\bar{x}$ biến* (1.1.13) *thành một hệ tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng.*

Định nghĩa 1.1.7. Các giá trị riêng $\lambda_i\ (i = 1, 2, ..., n)$ của ma trận W_0 tức là nghiệm của phương trình $\det(W_0 - \lambda I) = 0,$ được gọi là các *số mũ đặc trưng* của hệ (1.1.13).

Định nghĩa 1.1.8. Các giá trị riêng $\rho_i\ (i = 1, 2, ..., n)$ của ma trận $X(T)$, tức là nghiệm của phương trình

$$\det[X(T) - \rho I] = 0 \tag{1.1.15}$$

được gọi là *các nhân tử.*

Định lý 1.1.9. *Với mọi nhân tử* ρ *tồn tại một nghiệm không tầm thường* $\xi(t)$ *của hệ tuần hoàn* (1.1.13*), thỏa mãn điều kiện*

$$\xi(t+T) = \rho\xi(t) \tag{1.1.16}$$

Ngược lại, nếu đối với một nghiệm $\xi(t)$ *không tầm thường nào đó điều kiện* (1.1.16) *được thỏa mãn thì số* ρ *sẽ là nhân tử của hệ đã cho.*

Hệ quả. *Hệ vi phân tuyến tính tuần hoàn* (1.1.13*) có nghiệm tuần hoàn* chu kì T *khi và chỉ khi có ít nhất một nhân tử* ρ *của nó bằng 1.*

Định lý 1.1.10. *Hệ vi phân tuyến tính với ma trận hệ số liên tục và tuần hoàn là khả qui.*

Định lý 1.1.11. *1) Hệ vi phân tuyến tính thuần nhất tuần hoàn với ma trận liên tục là ổn định khi và chỉ khi tất cả các nhân tử* $\rho_i\ (i=1,2,\ldots,n)$ *của nó nằm trong hình tròn đơn vị đóng* $|\rho| \le 1$ *và các nhân tử nằm trên đường tròn* $|\rho| = 1$ *đều có ước cơ bản đơn.*

2) Hệ tuần hoàn ổn định tiệm cận khi và chỉ khi tất cả các nhân tử của nó đều nằm trong hình tròn $|\rho| < 1$

Định lý 1.1.12. *Nếu hệ tuần hoàn thuần nhất tương ứng của (1.1.3) là (1.1.9) không có nghiệm tầm thường* $T-$*tuần hoàn, tức là tất cả các nhân tử của nó khác* $1 (\rho_i \ne 1, \forall i)$*, thì hệ* (1.1.3) *có nghiệm tuần hoàn duy nhất với chu kì* T.

Định lý 1.1.13. *Nếu hệ* (1.1.3) *có một nghiệm giới nội* $Y(t)\quad (t \ge 0)$*, thì nó có nghiệm* $T-$*tuần hoàn.*

1.2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ

1.2.1. Một số khái niệm cơ bản

Định nghĩa 1.2.1. *Phép chiếu* $P \in L($[redacted] (viết gọn là $P \in L($[redacted]) là một $(m \times m)$ - ma trận sao cho $P^2 = P$. Đối với mỗi phép chiếu P ta luôn có hệ thức sau

$$imP \oplus \ker P = \text{[redacted]}$$

Ngược lại, với mỗi một sự phân tích [redacted] thành tổng trực tiếp của hai không gian con

$$\text{[redacted]} V,$$

luôn luôn tồn tại duy nhất một phép chiếu P sao cho $im\, P = U$ và $\ker P = V$. Khi đó phép chiếu P được gọi là phép chiếu lên U dọc theo V. Rõ ràng rằng $Q = I - P$ là phép chiếu lên V dọc theo U.

Phép chiếu Q_{can} lên $\ker A$ dọc theo S được gọi là phép *chiếu chính tắc.*

Định nghĩa 1.2.2. [5] Cặp ma trận (A, B) được gọi là *chính qui* nếu tồn tại $z \in$ [redacted] sao cho $\det(zA + B) \neq 0$. Trường hợp ngược lại, ta gọi cặp (A, B) là *không chính qui.*

Chú ý. Nếu cặp ma trận (A, B) chính qui thì $\det(cA + B) \neq 0$ với hầu hết giá trị c $\in$ [redacted].

Định nghĩa 1.2.3. Với mỗi $(m \times m)$-ma trận A, *chỉ số* của ma trận A là số tự nhiên $k \in$ [redacted] nhỏ nhất sao cho $\ker A^k = \ker A^{k+1}$ và được kí hiệu như sau

$$ind(A) := \min\{k \in \text{[redacted]}) = \ker(A^{k+1})\}.$$

Định nghĩa 1.2.4. [5] Nếu cặp ma trận (A, B) chính qui và $\det(cA + B) \neq 0$ thì $ind((cA + B)^{-1}A)$ được gọi là *chỉ số của cặp ma trận* (A, B), ký hiệu $ind(A, B) := ind((cA + B)^{-1}A)$.

Chú ý. Trong [5] đã chỉ ra rằng chỉ số của cặp ma trận (A, B) không phụ thuộc vào việc chọn số $c \in$ [redacted].

Một số tính chất của cặp ma trận chính qui (A, B) (xem [5], [11]):

(i) Nếu cặp ma trận (A, B) chính qui thì cặp ma trận $(A, B+sA)$ cũng chính qui với mọi $s \in$ [redacted] và $ind\,(A, B) = ind\,(A, B+sA)$

(ii) Nếu cặp ma trận (A, B) chính qui, $ind\,(A, B) = k$ và $rank((cA+B)^{-1}A)^k = r$ thì tồn tại các ma trận $S, T \in L($[redacted] khả nghịch sao cho

$$A = S\ diag\,(I_r, N)T,\ \ B = S\ diag\,(M, I_{m-r})T,$$

trong đó $N^k = 0,\ N^l \neq 0$ với mọi $l < k$.

(iii) Nếu $A(t), B(t) \in C(J, L($[redacted] và $\eta(t,\lambda) = \det\,(\lambda A(t) + B(t)) = a_d(t)\lambda^d + \ldots + a_1(t)\lambda + a_0(t)$, với $a_d \neq 0$ trên J, thì tồn tại các ma trận khả nghịch $S, T \in (J, L($[redacted] sao cho

$$S(t)A(t)T^{-1}(t) = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix},\ \ S(t)B(t)T^{-1}(t) = \begin{pmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & I_{m-d} \end{pmatrix}$$

trong đó $N(t)$ là k-lũy linh tức là $N(t)^k = 0$ trên J và $N^l(t) \neq 0$ với mọi $l < k$. Ngoài ra nếu $A(t), B(t) \in C^i(J, L($[redacted]$(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ và

$$\deg\det(\lambda A + B) = rank\,A =: r \text{ với mọi } t \in J$$

thì tồn tại các ma trận khả nghịch $S(t), T(t) \in C^i(J, L($[redacted] sao cho

$$S(t)A(t)T^{-1}(t) = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ S(t)B(t)T^{-1}(t) = \begin{pmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}$$ (xem [11]).

Định lý 1.2.1. [5] *Giả sử $A \in L($[redacted] là ma trận suy biến, $B \in L($[redacted] khi đó 7 mệnh đề sau tương đương*

(i) Cặp ma trận (A, B) chính qui chỉ số 1;

(ii) Từ $x \in \ker A$ và $Bx \in imA$ kéo theo $x = 0$;

(iii) Cặp ma trận (A, B) chính qui và $\deg\det\,(\lambda A + B) = rank\,A$;

(iv) Cặp ma trận $(A, B+AW)$ chính qui và $ind(A, B+AW) = 1$ với mỗi ma trận $W \in L($[redacted]

(v) Ma trận $G := A + BQ$ không suy biến với mỗi phép chiếu Q lên $\ker A$

(vi) Với $S:=\{x: Bx\in im\,A\}$ *ta có hệ thức* $S\oplus\ker A=$[redacted]

(vii) Nhân vào bên trái với ma trận không suy biến thích hợp $E\in L($[redacted]

sao cho $EA=\begin{pmatrix}A_1\\0\end{pmatrix}$, $EB=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}$, $rank\,A=rank\,A_1$ *ta nhận được một ma trận không suy biến* $\begin{pmatrix}A_1\\B_2\end{pmatrix}\in L($[redacted]

Định nghĩa 1.2.5. [5] Ma trận $A^+\in L($[redacted] thỏa mãn các tính chất

(i) $A^+y=x\in im(A^T)$ với $y\in im(A)$ mà $Ax=y$,

(ii) $A^+y=0$ với $y\in\ker(A^T)$,

được gọi là *nghịch đảo Moore – Penrose* của ma trận $A\in L($[redacted].

Định lý 1.2.2. [5] *Giả sử* $A\in L($[redacted]*, khi đó*

(i) $A^+AA^+=A^+$ *và* $AA^+A=A$,

(ii) AA^+ *là phép chiếu vuông góc lên* $im\,(A)$ *dọc* $\ker(A^T)$ *và* A^+A *là phép chiếu vuông góc lên* $im\,(A^T)$ *dọc* $\ker(A)$.

Định lý 1.2.3. [5] *Nếu* $ind\,(A)=k, rank(A^k)=r$,

$$im(A^k)=span(s_1,...,s_r)$$

$$\ker(A^k)=span(s_{1+1},...,s_m) \text{ và } S=[s_1,...,s_m]$$

thì $A=S\,diag\,(M,N)S^{-1}$, *trong đó* M *là* $(r\times r)$*- ma trận không suy biến và* N là k -lũy linh.

Định nghĩa 1.2.6. Giả sử các ma trận $(A,B)\in L($[redacted] có $ind(A,B)=1$, khi đó $S:=\{x: Bx\in imA\}$ được gọi là *không gian liên hợp* của cặp (A,B).

Mệnh đề. [5] *Nếu cặp ma trận* (A,B) *chính qui,* $ind(A,B)=1$ *và* Q *là phép chiếu lên* $\ker A$ *thì các đẳng thức sau đây là đúng* $G^{-1}A=I-Q$, $G^{-1}BQ=Q$ *và* $QG^{-1}B=Q_{can}$, *trong đó* $G:=A+BQ$.

Định lý 1.2.4. [5] *Giả sử cặp ma trận* (A,B) *chính qui chỉ số 1 khi đó các hệ thức sau thỏa mãn*

$$S = im((cA+B)^{-1}A) \text{ và } Q_{can} = I - [(cA+B)^{-1}A]^D (cA+B)^{-1}A$$

trong đó $c \in$ [redacted] *sao cho* $cA+B$ *khả nghịch và* A^D *là nghịch đảo Drazin của* A.

1.2.2. Hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính

Định nghĩa 1.2.7. Phương trình vi phân đại số tuyến tính là phương trình dạng

$$A(t)x' + B(t)x = f(t), \quad t \in \text{[redacted]} \infty), \tag{1.2.1}$$

trong đó $A(t), B(t) \in C($[redacted]$(t) = r < m$ với mọi $t \in$ [redacted], và $N(t) = \ker A(t)$ có số chiều là $m-r$ với mọi $t \in$ [redacted].

Định nghĩa 1.2.8. Phương trình vi phân đại số tuyến tính (1.2.1) được gọi là *chính qui chỉ số 1* nếu cặp ma trận hệ số (A,B) chính qui chỉ số 1.

Định nghĩa 1.2.9. Giả sử $N(t) := \ker A(t)$ là trơn, nghĩa là tồn tại phép chiếu $Q \in C^1($[redacted] lên $N(t)$, $P = I - Q$. Hàm $x(t) \in C_N^1$ được gọi là *nghiệm* của phương trình (1.2.1) trên [redacted] nếu hệ thức $A(t)((P(t)x(t))' - P'(t)x(t)) + B(t)x(t) = q(t)$ thỏa mãn với mọi $t \in$ [redacted].

Hơn nữa đối với phương trình vi phân đại số tuyến tính thuần nhất chính qui chỉ số 1

$$A(t)x' + B(t)x = 0, \quad t \in \text{[redacted]} \tag{1.2.2}$$

thì $S(t) = imP_{can}$ là không gian nghiệm của (1.2.2), không gian nghiệm của (1.2.2) có số chiều là $r\ (r = rank\ A(t))$. Nói một cách chính xác, với mỗi $x_0 \in S(t_0)$, có đúng một nghiệm của (1.2.2) đi qua x_0 vào thời điểm t_0.

Nghiệm của phương trình thuần nhất (1.2.2) được xác định bởi $x(t) = P_{can}(t)u(t)$, trong đó $u(t) \in imP(t)$ là nghiệm của phương trình

$$u' = (P' - PA_1^{-1}B_0)u. \tag{1.2.3}$$

Định nghĩa 1.2.10. Phương trình (1.2.1) được gọi là chuyển được (transferable) trên [redacted] nếu $N(t)$ là trơn và ma trận $G(t) := A(t) + B(t)Q(t)$, trong đó

$Q(t) \in$ [redacted] là phép chiếu lên $N(t)$, có nghịch đảo bị chặn trên mỗi đoạn $[0, T] \subseteq$ [redacted].

Định nghĩa 1.2.11. Hai phương trình

$$u' = (P' - PA_1^{-1}B_0)u \tag{1.2.4}$$

và

$$u' = (P'(t)P_{can}(t) - P(t)G^{-1}(t)B(t))u(t) \tag{1.2.5}$$

được gọi là phương trình vi phân thường tương ứng của phương trình vi phân (1.2.2) dưới phép chiếu P.

Định nghĩa 1.2.12. [12] Phương trình (1.2.1) với các hệ số $A, B \in C($[redacted] được gọi là *phương trình vi phân đại số dạng chuẩn tắc Kronecker với chỉ số 1* nếu các ma trận hệ số có dạng $A(t) = \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & J(t) \end{pmatrix}$ và $B(t) = \begin{pmatrix} W(t) & 0 \\ 0 & I_{m-s} \end{pmatrix}$, trong đó, $J(t)$ là k-lũy linh và $\ker J(t) = \ker J(0)$.

Định nghĩa 1.2.13. Một ma trận vuông $X(t)$ cấp m được gọi là *ma trận nghiệm cơ bản* (FSM) của (1.2.2) nếu r véc tơ cột đầu tiên của nó là các nghiệm độc lập tuyến tính của (1.2.2) và $m-r$ véc tơ cột còn lại của $X(t)$ là các véc tơ không.

Chú ý. Mọi nghiệm $x(t)$ của (1.2.2) đều thuộc không gian nghiệm $im\, P_{can} = S(t)$ có số chiều là r, do đó ta có nhiều nhất r nghiệm độc lập tuyến tính. Vậy, tập hợp tất cả các nghiệm của (1.2.2) là không gian tuyến tính có số chiều $\leq r$. Hơn nữa, trong [5] đã chỉ ra rằng, nếu $p_j (j = 1, \ldots, r)$ là r véc tơ cột độc lập tuyến tính của $im\, P(0)$ và các véc tơ $u_j(t), x_j(t)$ được suy ra từ hệ phương trình trạng thái $x(t) = P_{can}(t)u(t)$ với điều kiện đầu $u_j(0) = p_j$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$, khi đó các véc tơ $x_1(t), \ldots, x_r(t)$ là độc lập tuyến tính và $im\, P(t) = span\,(u_1(t), \ldots, u_r(t))$, $S(t) = span\,(x_1(t), \ldots, x_r(t))$. Do đó, tập hợp tất cả các nghiệm (1.2.2) là không gian con tuyến tính có số chiều là r . Như vậy mọi ma trận nghiệm cơ bản của (1.2.2) đều có dạng $X(t)=[x_1(t),...,x_r(t),0,...,0]$. Để đơn giản, ta viết ma trận nghiệm cơ bản một cách ngắn gọn như sau: $X_r(t)=[x_1(t),$ [redacted].

Đặc biệt, ma trận nghiệm cơ bản $X_r(t)$ là *chuẩn hóa* khi $t=t_0$, tức là $X_r(t_0)=I_r$.

Chúng ta xét DAEs tuyến tính thuần nhất tương ứng của (1.2.1)

$$A(t)x'(t)+B(t)x(t)=0, \tag{1.2.6}$$

trong đó $A,B\in C($ [redacted].

Giả sử rằng không gian hạch $N(t):=\ker A(t)$ là trơn, nghĩa là nó là bao tuyến tính của những hàm cơ sở khả vi liên tục.

Trong trường hợp $A(t)$ có hạng không đổi, rõ ràng, tất cả các nghiệm của (1.2.6) thuộc về không gian con $S(t):=\{z\in$ [redacted].

Giả sử (1.2.6) có chỉ số 1, nghĩa là $S(t)$ [redacted] $0\}$.

Khi đó, có đúng một nghiệm qua mỗi điểm của $S(t)$ tại thời điểm t (xem [5]). Sử dụng bất kỳ hàm chiếu $Q(t)$ thuộc lớp C^1 lên $N(t)$ và $P(t):=I-Q(t)$, bài toán giá trị ban đầu (IVPs) là đúng với điều kiện đầu $P(0)(x(0)-x^0)=0$

. (1.2.7)

Bài toán giá trị ban đầu (IVP) (1.2.6), (1.2.7) có nghiệm duy nhất với $\forall x^0\in$ [redacted].

Các nghiệm của DAE (1.2.6) phải thuộc về không gian hàm $C_N^1:=\{x\in C: Px\in C^1\}$.

Điều này dễ dàng hiểu được nhờ các đồng nhất thức

$$A(t)=A(t)P(t),\quad A(t)Q(t)=0,\ A(t)x'(t)=A(t)P(t)x'(t)=A(t)\{(Px)'(t)-P'(t)x(t)\}.$$

Do tính chính quy của nghiệm, các hệ số $A(t),B(t)$ phải trơn.

Tiếp theo, cho $x\in C_N^1$, chúng ta hiểu biểu thức $A(t)x'(t)$ là viết tắt của

$$A(t)\{(Px)'(t)-P(t)x(t)\}. \tag{1.2.8}$$

Cần phải nhấn mạnh rằng, không gian hàm C_N^1 và giá trị của biểu thức (1.2.8) là độc lập với việc chọn hàm chiếu. Tức là, với hai hàm chiếu $P,\overline{P}$ thuộc lớp C^1 đã cho. Cả $P(t)$ và $\overline{P}(t)$ chiếu dọc theo $N(t)$. Nếu $x \in C, Px \in C^1$ thì $\overline{P}x = \overline{P}Px$ thuộc về lớp C^1, vì $\overline{P}$ và Px cũng như vậy. Ngoài ra, chúng ta tính:

$$\begin{aligned} A(t)\{(Px)'(t) - P'(t)x(t)\} &= A(t)\overline{P}(t)\{(Px)'(t) - P'(t)x(t)\} \\ &= A(t)\left\{(\overline{P}Px)'(t) - \overline{P}'(t)P(t)x(t) - \overline{P}(t)P'(t)x(t)\right\} \\ &= A(t)\left\{(\overline{P}Px)'(t) - (\overline{P}P)'(t)x(t)\right\} \\ &= A(t)\left\{(\overline{P}x)'(t) - \overline{P}'(t)x(t)\right\}. \end{aligned}$$

Nhờ ma trận nghiệm cơ bản $X(t)$ của IVP

$$\begin{cases} A(t)X'(t) + B(t)X(t) = 0 \\ P(0)(X(0) - I) = 0 \end{cases}$$

chúng ta có thể viết các nghiệm của (1.2.6), (1.2.7) là : $x(t;x^0) = X(t)x^0$

Chúng ta sử dụng dạng biểu diễn của ma trận cơ bản X của DAE, sử dụng ma trận cơ bản U của ODE (xem [5])

$$\begin{cases} U' + [-P'P_{can} + P(A+BQ)^{-1}B]U = 0 \\ U(0) = I \in L(\text{[redacted]} \end{cases} \qquad (1.2.9)$$

Ở đây, $P_{can}(t)$ là phép chiếu chính tắc dọc theo $N(t)$ lên $S(t)$. Khi đó

$$X(t) = P_{can}(t)U(t)P(0). \qquad (1.2.10)$$

Ta nhấn mạnh rằng $X(t)$ là độc lập với phép chiếu đặc biệt P được dùng ở (1.2.9) và (1.2.10). Trong bất kì trường hợp nào, chúng ta có : $X(0) = P_{can}(0)$.

Hơn nữa, trong khi $U \in C^1$, nói chung phép chiếu chính tắc $P_{can}(t)$ là liên tục nhưng không thuộc lớp C^1.

Trong phần sau chúng ta biến đổi DAEs tuyến tính với hệ số tuần hoàn về hệ số hằng số DAEs.

Áp dụng phép biến đổi đại số $x = F(t)\overline{x}, F \in C^1($ [redacted] và E, F không suy biến, DAE (1.2.6) biến thành:

$$\overline{A}(t)\overline{x}'(t) + \overline{B}(t)\overline{x}(t) = 0, \qquad (1.2.11)$$

với $\overline{A} = EAF, \quad \overline{B} = E(BF + AF')$. (1.2.12)

Phương trình (1.2.11) gọi là có dạng chuẩn tắc Kronecker nếu:

$$\overline{A}(t)=\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix}, \qquad B(t)=\begin{pmatrix} \mathrm{W(t)} & \\ & \mathrm{I} \end{pmatrix}$$

Hệ thức giữa không gian con riêng và phép chiếu chính tắc có thể mô tả bằng $\overline{N}(t)=F^{-1}(t)N(t)$, $\overline{S}(t)=F^{-1}(t)S(t)$ và $\overline{P}_{can}(t)=F^{-1}(t)P_{can}(t)F(t)$. Với dạng chuẩn tắc Kronecker phép chiếu lên $\overline{S}(t):=\left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}: z_2=0\right\}$

dọc theo

$$\overline{N}(t):=\left\{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}: z_1=0\right\}$$

là $\overline{P}_{can}(t)=diag(I,0)$. Do đó, bắt đầu với hệ chỉ số 1 dạng chuẩn tắc Kronecker và sử dụng phép biến đổi F thuộc lớp C^1 chúng ta thu được DAEs với những phép chiếu chính tắc khả vi liên tục. Như một hệ quả, coi dạng chuẩn tắc Kronecker thay cho DAEs với hệ số liên tục, chúng ta áp dụng phép biến đổi đối với một lớp rộng hơn. Trong phần sau, chúng ta thấy lớp C_N^1 là phù hợp đối với phép biến đổi F.

Định nghĩa 1.2.14. Hệ phương trình $Ax'+Bx=0$ được gọi là *chính qui chỉ số* k nếu cặp ma trận (A,B) là chính qui chỉ số k.

Bổ đề. Khi cặp ma trận (A,B) là chính qui chỉ số k và $rank\left[(cA+B)^{-1}A\right]^k=r$ thì tồn tại các ma trận khả nghịch W,T sao cho

$$A=W\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}T^{-1}, \quad U \text{ là } k \text{ lũy linh}$$

$$B=W\begin{pmatrix} -B_1 & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}T^{-1},$$

Định nghĩa 1.2.15. Giá trị phức $\lambda\neq\infty$ được gọi là *giá trị riêng hữu hạn* của cặp ma trận (A,B) nếu $\det(\lambda A+B)=0$.

Nếu λ là một giá trị riêng hữu hạn thì có một véc tơ $x \neq 0$ sao cho $\lambda Ax = -Bx$. Véc tơ x như thế được gọi là *véc tơ riêng* của cặp ma trận (A, B) tương ứng với giá trị riêng λ.

Định nghĩa 1.2.16. Cặp ma trận (A, B) được gọi là có giá trị riêng $\lambda = \infty$ nếu có một véc tơ $x \neq 0$ sao cho $Ax = 0$. Véc tơ x như thế gọi là véc tơ riêng của cặp ma trận (A, B) ứng với giá trị riêng $\lambda = \infty$.

Định nghĩa 1.2.17. Nghiệm tầm thường $x \equiv 0$ của $Ax' + Bx = 0$ được gọi là ổn định theo nghĩa Lyapunov nếu với mỗi phép chiếu P đã biết dọc theo không gian con bất biến cực đại của cặp (A, B) liên hợp với các giá trị riêng hữu hạn, bài toán giá trị ban đầu (IVP) $\begin{cases} Ax' + Bx = 0, \\ P(x(0) - x_0) = 0 \end{cases}$ với mỗi $x_0 \in$ [redacted] có một nghiệm $x(t, x_0)$ xác định trên $[0, \infty)$.

Hơn nữa, với mỗi $\varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon$ với $\forall t \geq 0$ và $\forall x_0 \in$ [redacted] thỏa mãn $\|P(x_0)\| < \delta_0$, thì ta có $x(t, x_0) \to 0$ khi $t \to \infty$.

Định lý 1.2.5. *Nghiệm tầm thường $x \equiv 0$ của $Ax' + Bx = 0$ là ổn định tiệm cận nếu và chỉ nếu tất cả các giá trị riêng hữu hạn của cặp ma trận (A, B) có phần thực âm.*

Định nghĩa 1.2.18. Hệ phương trình vi phân dạng: $A(t)x'(t) + B(t)x(t) = q(t)$ trong đó $A, B \in C(I, L($[redacted]$,$ q liên tục trên I, $\det A(t) = 0$ với $\forall t \in I$ gọi là hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính với hệ số biến thiên.

Trường hợp $A, B \in L($[redacted] ta gọi hệ trên là *hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính với hệ số hằng.*

Ví dụ 1. Xét hệ $\begin{cases} x_1' - x_1 = 0 \\ t\, x_2' - x_2 = 0 \end{cases}$, $t \in$ [redacted] $\quad (\alpha)$

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\t&0\end{bmatrix}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} rank\ A=1\\ A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\t\,x_1\end{bmatrix}\end{array}\right.\ ;\ B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow im\ A=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\tx_1\end{bmatrix}\right\}.$$

$N(t)=\ker A(t)=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\t&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\tx_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_1=0\\x_2\in\end{bmatrix}\right.$ [redacted] $=\left\{\begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix}\middle|x_2\in\right.$ [redacted].

$S(t)=\{z\in$ [redacted] $mA\}$

$=\{z\in$ [redacted] $\begin{pmatrix} & 0\\ & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_1\\-x_2\end{pmatrix}\in im\ A\}\Leftrightarrow x_2=tx_1=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\tx_1\end{bmatrix},\quad x_1\in\right.$ [redacted].

N [redacted] $\Rightarrow$ hệ (α) đã cho là chính qui chỉ số 1.

P_{can} là phép chiếu chính tắc lên S dọc theo N tức là $\begin{cases}Pu=0, & \forall u\in N\\ Pv=v, & \forall v\in S\end{cases}$ (*)

Đặt $P_{can}=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{bmatrix}$ (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, & \forall x_2\in \text{[redacted]}\\ \begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{21}&p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\tx_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\tx_1\end{bmatrix}, & \forall x_1\in \text{[redacted]}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}p_{12}x_2=0\\p_{22}x_2=0\end{cases}, & \forall x_2\in \text{[redacted]}\ p_{22}=0\\ \begin{cases}p_{11}x_1+p_{12}tx_1=x_1\\(p_{21}+p_{22}t)x_1=tx_1\end{cases}, & \forall x_1\in \text{[redacted]}\ p_{21}=1\end{cases}\Rightarrow P_{can}=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow Q_{can}=I-P_{can}=\begin{bmatrix}0&0\\-1&1\end{bmatrix}$$

Xét $G(t)=A+BQ=\begin{pmatrix}1&0\\t&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\t&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\t+1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det G=-1\neq0,\forall t\in$ [redacted].

$$\Rightarrow G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t+1 & -1 \end{pmatrix}$$

Dùng các phép chiếu P_{can}, Q_{can} nói trên hệ (α)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_{can}x' + P_{can}G^{-1}BP_{can}x = 0 \\ Q_{can} + Q_{can}G^{-1}BP_{can}x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x_1' - x_1 = 0 \\ x_1' - x_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0x_1 + 0x_2 = 0 \\ -tx_1 + x_2 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Thật vậy,

$$P_{can}x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_1' \end{pmatrix},\ Q_{can}x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$P_{can}G^{-1}BP_{can}x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t+1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t+1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_1 \\ [-(t+1)+1]x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_1 \\ -tx_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

$$Q_{can}G^{-1}BP_{can}x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t+1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -x_1 \\ -tx_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - tx_1 \end{pmatrix}$$

1.2.3. Hệ phương trình vi phân đại số phi tuyến

Định nghĩa 1.2.19. Hệ phương trình vi phân đại số phi tuyến là hệ phương trình có dạng

$$f(x'(t), x(t), t) = 0. \tag{1.2.13}$$

trong đó hàm $f: G\times$ [redacted] được giả thiết là liên tục và có Jacobians $f_y'(y,x,t)$, $f_x'(y,x,t)$ phụ thuộc liên tục vào các đối số của chúng của chúng. Hơn nữa, không gian hạch của $f_y'(y,x,t)$ được coi là độc lập với (y,x), nghĩa là

$$\ker f_y'(y,x,t) =: N(t),$$

và biến thiên trơn theo t. Hơn nữa, $P(t)$ là hàm chiếu bất kỳ lớp C^1 dọc theo $N(t)$. Giả sử (1.2.13) có chỉ số 1, nghĩa là

$N(t)$ [redacted]

trong đó $S(y,x,t):=\{z\in$ [redacted] $x,t)z\in im\ f_y'(y,x,t)\}$. Khi đó, như trong trường hợp tuyến tính chỉ số 1, IVPs được phát biểu chính xác với điều kiện đầu

$$P(0)(x(0)-x^0)=0. \qquad (1.2.14)$$

nghiệm của (1.2.13) thuộc C_N^1

Giả sử rằng có một nghiệm $x_*\in C_N^1([0,\infty))$ của (1.2.13), (1.2.14), điều mà chúng ta sẽ quan tâm đến là tính ổn định của nghiệm. Như trong trường hợp tuyến tính, chỉ phần $P(0)x^0$ của điều kiện đầu ảnh hưởng tới nghiệm $x(t;x^0)$. Điều đó được phản ánh trong định nghĩa sau của tính ổn định (theo nghĩa Lyapunov) của nghiệm của DAEs.

Định nghĩa 1.2.2 [13]. Nghiệm x_* của phương trình (1.2.13) là *ổn định* theo nghĩa của Lyapunov nếu có $\tau>0$ và, với mỗi $\varepsilon>0$, $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sao cho

(i) $\forall x^0$ với $\left|P(0)(x_*(0)-x^0)\right|\le\tau$ (1.2.13), (1.2.14) có nghiệm $x(t;x^0)$ xác định trên $[0,\infty)$ và

(ii) $\forall x^0$ với $\left|P(0)(x_*(0)-x^0)\right|\le\delta$ chúng ta có $\left|x(t;x^0)-x_*(t)\right|\le\varepsilon\quad\forall t>0.$

Hơn nữa, x_* được gọi là *ổn định tiệm cận* theo nghĩa của Lyapunov nếu nó là ổn định và có $\sigma\in(0,\tau)$ sao cho

(iii) $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|x(t;x^0)-x_*(t)\right\|=0$, $\forall x^0$ với $\left|P(0)(x_*(0)-x^0)\right|\le\sigma.$

Chương 2: LÝ THUYẾT FLOQUET ĐỐI VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ

2.1. LÝ THUYẾT FLOQUET ĐỐI VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Bổ đề [13]. *Phép biến đổi ẩn hàm* $x(t) = F(t)\overline{x}(t)$ *với* $F \in C_N^1$, F *không suy biến, biến DAE (1.2.6) thành (1.2.11), với*

$$\overline{A} = AF, \qquad \overline{B} = BF + AF' \tag{2.1.1}$$

là liên tục và $\overline{A}$ *có không gian hạch trơn.*

Chú ý rằng, chúng ta hiểu AF' như là sự rút gọn của $A\{(PF)' - P'F\}$ với P bất kì.

Chứng minh.

Từ (1.2.6) $A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0$ thế trực tiếp

$x = F(t)\overline{x}(t)$ ta được $A(t)\left[F(t)\overline{x}'(t)\right] + \left[B(t)F(t) + A(t)F'(t)\right]\overline{x}(t) = 0$

$\Leftrightarrow \overline{A}(t)\overline{x}'(t) + \overline{B}(t)\overline{x}(t) = 0$, ở đây $\overline{A}, \overline{B}$ là liên tục vì $A, B \in C$ và $F \in C^1$.

\+ Chứng minh $\overline{A}$ có không gian hạch $\overline{N}$ trơn.

Xét phép chiếu trực giao $\overline{P}_\perp$ dọc theo $\overline{N}$. Lấy P là phép chiếu trơn dọc theo N thì $\overline{N} = \ker AF = \ker PF$

Thật vậy:

- $\forall x \in \ker AF \Leftrightarrow AFx = 0 \Leftrightarrow Fx \in \ker A = N$, lại vì P là phép chiếu dọc theo $N \Rightarrow PFx = 0 \Rightarrow x \in \ker PF$
- $\forall x \in \ker PF \Leftrightarrow PFx = 0 \Rightarrow APFx = 0$, do $AP = A \Rightarrow AFx = 0 \Rightarrow x \in \ker AF$

\+ Từ $\overline{N} = \ker PF \Rightarrow \overline{P_\perp} = (PF)^+(PF)$ (Xem [5]) mà PF trơn $\Rightarrow \overline{P_\perp}$ trơn $\Rightarrow \overline{N}$ trơn.

Chú ý 1. Nếu P là một phép chiếu trơn dọc theo N, khi đó $F^{-1}PF$ là một phép chiếu dọc theo $\overline{N}$, nhưng trong trường hợp tổng quát $F^{-1}PF$ là không trơn. Nếu chúng ta chọn phép chiếu trực giao $P = \overline{P}_{\perp}$, thì $F^{-1}P_{\perp}F$ nói chung là không trơn và không trực giao.

Chú ý 2. Thực hiện phép biến đổi đại số $x = F(t)\overline{x}$ với $F \in C_N^1$ và F không suy biến, ta có những kết quả sau:

$$-\overline{N}(t) = \ker \overline{A}(t) = F^{-1}N(t);$$
$$-\overline{X}(t) = F^{-1}(t)X(t)F(0);$$
$-\overline{S}(t) := \{z \in$ [redacted] $\in im\,\overline{A}(t)\} = F^{-1}(t)S(t);$
$$-\overline{P}_{can}(t) = F^{-1}(t)P_{can}(t)F(t).$$

- Ta chứng minh $\overline{N}(t) = \ker \overline{A}(t) = F^{-1}N(t)$:

$\forall x \in \ker AF \Leftrightarrow AFx = 0 \Leftrightarrow Fx \in \ker A \Leftrightarrow x \in F^{-1}\ker A$

Ta có $\overline{N}(t) = \ker \overline{A} = \ker EAF = \ker AF$ (vì E không suy biến), theo chứng minh trên thì $\ker AF = F^{-1}\ker A \Rightarrow \overline{N}(t) = F^{-1}\ker A = F^{-1}N(t)$.

- Ta chứng minh $\overline{S}(t) = F^{-1}(t)s(t)$:

+ Nếu $z \in \overline{S}(t) \Leftrightarrow \overline{B}z \in im\,\overline{A}$ hay $\overline{B}z = \overline{A}x, x \in$ [redacted] $\Rightarrow E(BF + AF')z = EAFx$

$\Leftrightarrow BFz = A(Fx - F'z) \in im\,A \Rightarrow Fz \in S \Leftrightarrow z \in F^{-1}(t)S(t)$, tức là $\overline{S}(t) \subset F^{-1}S(t)$. (*)

+ Ngược lại, nếu $z \in F^{-1}(t)S(t) \Leftrightarrow Fz \in S(t) \Leftrightarrow BFz \in imA \Leftrightarrow BFz = Ax, x \in$ [redacted].

$\Leftrightarrow BFz + AF'z = A(x + F'z) \Leftrightarrow E(BF + AF')z = EA(x + F'z) = EAFF^{-1}(x + F'z)$

$\Leftrightarrow \overline{B}z = \overline{A}(F^{-1}x + F^{-1}F'z) \in im\,\overline{A} \Leftrightarrow z \in \overline{S}(t)$, tức là $F^{-1}(t)S(t) \subset \overline{S}(t)$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra: $S(t) = F^{-1}(t)S(t)$.

- Chứng minh $\overline{P}_{can}(t) = F^{-1}(t)P_{can}(t)F(t)$:

- Trước hết ta chứng minh $F^{-1}(t)P_{can}(t)F(t)$ là một phép chiếu.

Thật vậy $[F^{-1}(t)P_{can}(t)F(t)]^2 = F^{-1}(t)P_{can}(t)F(t).F^{-1}(t)P_{can}(t)F(t)$

$$= F^{-1}(t)P_{can}(t).P_{can}(t)F(t)$$

$$= F^{-1}(t)[P_{can}(t)]^2F(t)$$

$$= F^{-1}(t)P_{can}(t).F(t)$$

- Tiếp theo, ta lấy $\bar{x} \in \bar{N}(t) \Rightarrow \bar{x} = F^{-1}(t)x,\ x \in N(t)$

$$\Rightarrow (F^{-1}(t)P_{can}(t)F(t))\bar{x} = (F^{-1}(t)P_{can}(t)F(t))F^{-1}(t)x$$
$$= F^{-1}(t)P_{can}(t)x$$
$$= F^{-1}(t).0 \ (\text{ vì } x \in N(t))$$
$$= 0$$

- Bây giờ, ta lấy $\bar{y} \in \bar{S}(t) \Rightarrow \bar{y} = F^{-1}(t)y, \quad y \in S(t)$

$$\Rightarrow (F^{-1}(t)P_{can}(t)F(t))\bar{y} = (F^{-1}(t)P_{can}(t)F(t))F^{-1}(t)y$$
$$= F^{-1}(t)P_{can}(t)y$$
$$= F^{-1}(t)y \ (\text{ vì } y \in S(t))$$
$$= \bar{y}$$

Vậy, $F^{-1}(t)P_{can}(t)F(t)$ là phép chiếu lên $\bar{S}(t)$ dọc theo $\bar{N}(t)$ tức là

$$\bar{P}_{can}(t) = F^{-1}(t)P_{can}(t)F(t)$$

Vì $\bar{N}(t)$ [redacted], phép biến đổi DAE (1.2.11) là chỉ số 1 nếu và chỉ nếu (1.2.6) cũng là chỉ số 1 . Rõ ràng, (2.1.1) gợi ý cho ta về một quan hệ tương đương đối với DAEs tuyến tính với hệ số liên tục. Từ đó chúng ta sẽ quan tâm đến tính tiệm cận, chúng ta áp dụng khái niệm sự tương đương của lý thuyết ổn định ODE vào DAEs được xét ở đây. Sự tương đương không làm thay đổi tính ổn định của nghiệm.

Định nghĩa 2.1.1 [13]. DAEs (1.2.6) và (1.2.11) đã nói ở trên là *tương đương* nếu tồn tại các ma trận hàm không suy biến $F \in C_N^1$, $E \in C$ thỏa mãn (1.2.12) và

$$\sup_{t\in [redacted]} |F(t)| < \infty, \qquad \sup |F(t)^{-1}| < \infty$$ [redacted]

2.1.1. Ma trận cơ bản

Chúng ta xét DAEs tuyến tính thuần nhất với hệ số tuần hoàn

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0, \tag{2.1.2}$$

trong đó $A, B \in C($[redacted]$(t) = A(t+T),\ B(t) = B(t+T)$ với $\forall t \in$ [redacted].

Việc áp dụng định lý Floquet và định lý Lyapunov cho DAEs có ý nghĩa như thế nào? Chúng ta sẽ đi trả lời câu hỏi này.

Sử dụng phương pháp phân rã tự nhiên

[redacted] $\oplus S(t)$

cho DAEs chỉ số 1. Chú ý rằng, $N(t)$ và $S(t)$ đều là T-tuần hoàn vì hệ số $A(t)$ và $B(t)$ là T-tuần hoàn. $N(t)$ được giả thiết là trơn, tức là $N(t)$ là bao tuyến tính của các hàm thuộc lớp C^1, T-tuần hoàn:

$$N(t) = span\{n_{r+1}(t), ..., n_m(t)\}, \quad r = rank\ A(t).$$

$S(t)$ chỉ liên tục và $S(t)$ là bao tuyến tính của các hàm liên tục, T-tuần hoàn:

$$S(t) = span\{s_1(t), ..., s_r(t)\}.$$

Tiếp theo, chúng ta chọn một phép chiếu $P(t)$ dọc theo $N(t)$, như vậy P không chỉ trơn mà còn tuần hoàn. Vì phép chiếu P_{can} lên S dọc theo N, chúng ta có biểu diễn

$$P_{can}(t) = V(t)\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(t),$$

với

$$V(t) := [s_1(t), ..., s_r(t), n_{r+1}(t), ..., n_m(t)] \in L($$ [redacted].

Như trường hợp ODE, chúng ta có $X(t+T) = X(t)X(T)$, trong đó $X(T)$ là ma trận đơn đạo của DAEs.

Để xây dựng một phép biến đổi đặc biệt, chúng ta chọn phép chiếu P sao cho $P(0) = P_{can}(0)$. Áp dụng (1.2.10) cho ma trận cơ bản (xem (1.2.9)),

$$\begin{aligned} X(t) &= P_{can}(t)U(t)P(0) \\ &= P_{can}(t)U(t)P_{can}(0) \\ &= V(t)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(t)U(t)V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0) \\ &=: V(t)\begin{pmatrix} Z(t) & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0), \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

trong đó $Z \in C($[redacted]$) = I$, và ma trận đơn đạo

$$X(T) = V(T)\begin{pmatrix} Z(T) & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0) = V(0)\begin{pmatrix} Z(T) & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0). \tag{2.1.4}$$

Từ rank $X(t) = r$ là hằng số, $Z(t) \in L($[redacted] là không suy biến với mọi $t \in$ [redacted]. Theo đại số tuyến tính (xem [10]), ta biết tất cả các ma trận không suy biến $C \in L($[redacted] có thể biểu diễn được dưới dạng:

$$C = e^{W} \qquad \text{với } W \in L(\text{[redacted]}$$

và

$$C^2 = e^{\overline{W}} \qquad \text{với } \overline{W} \in L(\text{[redacted]}$$

Bây giờ, giả sử

$$Z(T) = e^{TW_0}, \quad W_0 \in L(\text{[redacted]} \tag{2.1.5}$$

và

$$Z(2T) = Z(T)^2 = e^{2TW_0}, \quad W_0 \in L(\text{[redacted]} \tag{2.1.5'}$$

tương ứng. Ở đây $Z(2T) = Z(T)^2$ từ tính chất tương ứng của X và hệ thức $V(2T) = V(T) = V(0)$.

Thay phép đổi biến (1.1.14) trong định lý của Floquet cho ODEs chúng ta có

$$F_K(t) := V(t)\begin{pmatrix} Z(t)e^{-tW_0} & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix} \tag{2.1.6}$$

$$= X(t)V(0)\begin{pmatrix} e^{-tW_0} & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix} + V(t)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix} \tag{2.1.7}$$

Từ (2.1.6) chúng ta thấy phép biến đổi này là không suy biến.

Nếu chúng ta coi các ODE (1.1.13) như một trường hợp đặc biệt của DAE (2.1.2), chúng ta có thể chọn $V(t) = I_{m-r}$ và khi đó (2.1.6) trùng với (1.1.14). Chú ý rằng, phép biến đổi (2.1.6) có thể là không trơn. Vì $S(t)$ không trơn và $V(t),\ X(t)$ cũng vậy.

Định lý 2.1.1 [13]. *Ma trận nghiệm cơ bản $X(t)$ của DAEs tuyến tính thuần nhất (2.1.2) có dạng*

$$X(t) = F(t)\begin{pmatrix} e^{tW_0} & \\ & I \end{pmatrix} F(0)^{-1},$$

trong đó $F \in C_N^1($[redacted] *là không suy biến và T-tuần hoàn.*

Chứng minh

Trước hết, xét

$$\begin{aligned}
F_k(t) &= V(t)\begin{pmatrix} Z(t)e^{-tW_0} & \\ & I \end{pmatrix} \\
&= V(t)\begin{pmatrix} Z(t)e^{-tW_0} & \\ & I \end{pmatrix} + V(t)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix} \\
&= V(t)\begin{pmatrix} Z(t) & \\ & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} e^{-tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} + V(t)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix} \\
&= V(t)\begin{pmatrix} Z(t) & \\ & 0 \end{pmatrix} V(0)^{-1}.V(0)\begin{pmatrix} e^{-tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} + V(t)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix} \\
&= X(t)V(0)\begin{pmatrix} e^{-tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} + V(t)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lấy $F(t) = F_k(t)$ thì vì

$$\begin{aligned}
F(t)\begin{pmatrix} e^{-tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} F(0)^{-1} &= X(t)V(0)\begin{pmatrix} e^{-tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} F(0)^{-1} + V(t)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} F(0)^{-1} \\
&= X(t)V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} F(0)^{-1} + V(t)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} F(0)^{-1} \\
&= X(t)V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V(0)^{-1}
\end{aligned}$$

Mặt khác, từ $X(t) = V(t)\begin{pmatrix} Z(t) & \\ & 0 \end{pmatrix} V(0)^{-1}$

$$\Rightarrow X(t)V(0) = V(t)\begin{pmatrix} Z(t) & \\ & 0 \end{pmatrix} V(0)^{-1}V(0)$$

$$= V(t)\begin{pmatrix} Z(t) & \\ & 0 \end{pmatrix} = V(t)\begin{pmatrix} Z(t) & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X(t)V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V(0)^{-1} = V(t)\begin{pmatrix} Z(t) & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V(0)^{-1}$$

$$= V(t)\begin{pmatrix} Z(t) & \\ & 0 \end{pmatrix} V(0)^{-1} = X(t)$$

Vậy, $X(t) = F(t)\begin{pmatrix} e^{tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} F(0)^{-1}$

+ Ta chứng minh: $X(t+T) = X(t)X(T), \quad \forall t \in \blacksquare.$

Từ $X(t) = V(t)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(t)U(t)V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0), \quad \forall t \in \blacksquare.$

$$\Rightarrow X(T) = V(T)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(T)U(T)V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0)$$

$$= V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0)U(T)V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0)$$

$$\Rightarrow X(t+T) = V(T)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(t+T)U(t+T)V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0)$$

$$= V(t)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(t)U(t)U(T)V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0) \qquad (*)$$

$$\Rightarrow X(t)X(T) = V(t)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(t)U(t)V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0)$$

$$= V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0)U(T)V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0)$$

$$= V(t)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(t)U(t)U(T)V(0)\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0) \qquad (**)$$

Vậy, $X(t+T) = X(t)X(T)$

+ Ta chứng minh F là T- tuần hoàn:

$$F(t+T) = X(t+T)V(0)\begin{pmatrix} e^{-(t+T)W_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} + V(t+T)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix}$$

$$= X(t)X(T)V(0)\begin{pmatrix} e^{-(t+T)W_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} + V(t+T)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix}$$

$$= X(t)V(0)\begin{pmatrix} Z(T) & \\ & 0 \end{pmatrix} + V(0)^{-1}V(0)\begin{pmatrix} e^{-(t+T)W_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} + V(t+T)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix}$$

$$= X(t)V(0)\begin{pmatrix} e^{TW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-(t+T)W_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} + V(t)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix}$$

$$= X(t)V(0)\begin{pmatrix} e^{-TW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} + V(t)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix} = F(t), \quad \forall t \in$$ [redacted]

Thật vậy, $(PF)(t) = P(t)X(t)V(0)\begin{pmatrix} e^{-tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} + P(t)V(t)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix}$

Mà $P(t)X(t)$ là trơn và $P(t)V(t)\begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix} = 0$

+ Ta chứng minh $F \in C_N^1($[redacted]nghĩa là $\det F \neq 0$.

Vì $F(t) = V(t)\begin{pmatrix} Z(t)e^{-tW_0} & \\ & I \end{pmatrix}$ nên

$$\det F(t) = \det V(t) \det\begin{pmatrix} Z(t)e^{-tW_0} & \\ & I \end{pmatrix}$$

$$= \det V(t) \det(Z(t)e^{-tW_0})$$

$$= \det V(t) \det(Z(t)) \det e^{-tW_0} \neq 0.$$

Nhận xét

(i) Phép biến đổi $F = F_k(t) = V(t)\begin{bmatrix} Z(t)e^{-tW_0} & \\ & I \end{bmatrix}$ là không suy biến, nhưng F có thể không trơn vì $S(t)$ có thể không trơn $\Rightarrow V(t)$ có thể không trơn.

(ii) $Ker\, X(t) = N(0), \quad \forall t \in$ [redacted]

Thật vậy, $X(t) = P_{can}(t)U(t)P_{can}(0)$

- Chọn phép chiếu $P: \quad P(0) = P_{can}(0)$

+ Nếu $z \in \ker X(t)$ thì $X(t)z = 0, \quad \forall t$

$$\Leftrightarrow P_{can}(t)U(t)P_{can}(0)z = 0$$

$$\Rightarrow U(t)P_{can}(0)z \in \ker A(t) = N(t)$$

$$\Rightarrow P_{can}(0)z = 0$$

$$\Leftrightarrow P_{can}(t)P(t)X(t)P_{can}(0)z = 0$$

$$\Leftrightarrow P_{can}(t)X(t)P_{can}(0)z = 0$$

$$\Leftrightarrow X(t)P_{can}(0)z \in \ker A(t) = N(t)$$

$$\Rightarrow P(t)X(t)P_{can}(0)z = 0$$

$$\Leftrightarrow U(t)P_{can}(0)z = 0 \text{ vì } \det U(t) \neq 0$$

nên ta suy ra $P_{can}(0)z = 0 \Leftrightarrow z \in \ker P_{can}(0) \Rightarrow z \in N(0)$ (i)

+ Nếu $z \in N(0) \quad \Rightarrow P_{can}(0)z = 0$

$$\Leftrightarrow P_{can}(t)U(t)P_{can}(0)z = 0$$

$$\Leftrightarrow X(t)z = 0 \quad \Leftrightarrow z \in \ker X(t) \qquad \text{(ii)}$$

Từ (i) và (ii) $\Rightarrow \ker X(t) = N(0)$

Chú ý. Từ chứng minh trên, ta thấy ma trận đơn đạo $X(T)$ có $m-r$ giá trị riêng không ứng với $N(0)$ là không gian riêng, r giá trị riêng khác không của $X(T)$ ứng với không gian véc tơ riêng $S(0)$.

Các giá trị riêng khác không của ma trận đơn đạo $X(T)$ cho biết nhân tử đặc trưng của (2.1.2) và các giá trị riêng của $W_0 \in L($[redacted] là số mũ đặc trưng của (2.1.2). Như trong trường hợp của ODE, chúng ta có hệ thức

$$\lambda = e^{T\mu}$$

giữa một nhân tử đặc trưng λ và một số mũ đặc trưng tương ứng μ.

Ví dụ 2.

$$\begin{cases} x_1' + (\cos t)x_1 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \quad (\beta)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad rank(A) = 1; \quad \det A = 0$$

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in$$ [redacted].

$$N = \ker A = \{x \in$$ [redacted]

$$S = \{x \in$$ [redacted] $m\ A\}$.

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos t)x_1 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos t)x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

tức là $x_1 + 3x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1 = -3x_2 \right\} \Rightarrow N$ [redacted]

$$P_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} Pu = 0, & u \in N \\ Pv = v, & v \in S \end{cases}$$

Dùng các phép chiếu P_{can}, Q_{can} nói trên hệ (β) trở thành

$$\begin{cases} \begin{cases} x_1' + (\cos t)x_1 = 0 \\ -\frac{1}{3}x_1' - \frac{1}{3}(\cos t)x_1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0x_1 + 0x_2 = 0 \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' + (\cos t)x_1 = 0 & (\beta 1) \\ \frac{1}{3}x_1 + x_2 = 0 & (\beta 2) \end{cases}$$

Thật vậy,

$$G = A + BQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$|G| = 3 \neq 0 \Rightarrow G$ khả nghịch.

$$\Rightarrow G^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$P_{can}x'=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1'\\ -\frac{1}{3}x_1'\end{pmatrix};\quad P_{can}x=\begin{pmatrix}x_1\\ -\frac{1}{3}x_1\end{pmatrix}$$

$$Q_{can}x=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}x_1+x_2\end{pmatrix}$$

$$P_{can}G^{-1}BP_{can}x=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ -\frac{1}{3}x_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\cos t)x_1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\cos t)x_1\\ -\frac{1}{3}(\cos t)x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\cos t)x_1\\ -\frac{1}{3}(\cos t)x_1\end{pmatrix}$$

Xét $P_{can}x'+P_{can}G^{-1}BP_{can}x=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1'+(\cos t)x_1=0\\ -\frac{1}{3}x_1'-\frac{1}{3}(\cos t)x_1=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad x_1'+(\cos t)x_1=0\quad(\beta 1)$$

$$Q_{can}G^{-1}BP_{can}x=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\cos t)x_1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\cos t)x_1\\ -\frac{1}{3}(\cos t)x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$Q_{can}x+Q_{can}G^{-1}BP_{can}x=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{3}x_1+x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\frac{1}{3}x_1+x_2=0\quad(\beta 2)$$

Xét phương trình vi phân $x_1'+(\cos t)x_1=0$.

$$x_1 = e^{-\sin t} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} e^{-\sin t} \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ma trận cơ bản là $U = \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$

thỏa mãn $U(0) = I$ là : $U(t) = \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ma trận cơ bản của (β) thỏa mãn điều kiện $P(0)(X(0) - I) = 0$ là

$$X(t) = (P_{can} U(t) P(0))$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ -\frac{1}{3} e^{-\sin t} & 0 \end{pmatrix}$$

Mặt khác, ta có $N = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$$S = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1 + 3x_2 = 0\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$V(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V^{-1} = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z(t) & \\ & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (V^{-1}(t) U(t) V(0)) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3e^{-\sin t} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ -e^{-\sin t}+1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow z(t) = e^{-\sin t}$

Lại vì $z(T) = e^{TW_0}$, $T = 2\pi \Rightarrow e^{-\sin t} = e^{2\pi . W_0} \Rightarrow W_0 = 0$

$$\Rightarrow F_k(t) = V(t)\begin{pmatrix} z(t)e^{-tW_0} & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^{-\sin t} & 0 \\ e^{-\sin t} & 1 \end{pmatrix}$$

$$F_k^{-1}(t) = -\frac{1}{3e^{-\sin t}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{-\sin t} & -3e^{-\sin t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3e^{-\sin t}} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{e^{\sin t}}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Rõ ràng: $F_k(t)$ không suy biến và $2\pi -$tuần hoàn.

$$\Rightarrow F_k^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Xét $F_k(t)\begin{pmatrix} e^{tW_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F^{-1}(0) = \begin{pmatrix} -3e^{-\sin t} & 0 \\ e^{-\sin t} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{tw_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -3e^{-\sin t} & 0 \\ e^{-\sin t} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\sin t} & 0 \\ -\frac{1}{3}e^{-\sin t} & 0 \end{pmatrix} = X(t)$$

Nghĩa là ma trận cơ bản $X(t)$ của (β) biểu diễn được dưới dạng

$$X(t) = F(t)\begin{pmatrix} e^{tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} F^{-1}(0)$$

trong đó $F(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-\sin t} & 0 \\ e^{-\sin t} & 1 \end{pmatrix}$ thỏa mãn:

(i) $F \in C_N^1($[redacted]

(ii) F không suy biến

(iii) F là 2π tuần hoàn; $W_0 = 0$.

Ma trận monodromy $X(T)$ của (β) là

$$X(T) = X(2\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|X(T) - \lambda I_2\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 \end{array}\right.$$

$$+\ \lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ -\frac{1}{3}v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_1 = 0$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \in N = N(0)$$

$$+\ \lambda_2 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3}v_1 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_2 = -\frac{1}{3}v_1$$

$$\Rightarrow v \in S$$

$\Rightarrow$ Ma trận $X(t)$ có giá trị riêng $\lambda_1 = 0$ ứng với véc tơ riêng $v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \in N$ và $X(t)$ có một giá trị $\lambda_2 = 1$ ứng với véc tơ riêng $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ -\frac{1}{3}v_1 \end{pmatrix} \in S$

$\Rightarrow$Nhân tử đặc trưng của hệ (β) là $\lambda = 1$.

Số mũ đặc trưng của (β) là $\mu = 0$ vì $W_0 = 0 \Rightarrow$ giá trị riêng của W_0 là 0

Khi đó, $\lambda = e^{0.2\pi} = 1$, luôn đúng.

2.1.2. Biến đổi tương đương tuần hoàn

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu khái niệm tương đương tuần hoàn của hai DAEs tuyến tính với hệ số T-tuần hoàn và một định lý tổng quát của Lyapunov.

Định nghĩa 2.1.2 [13]. Hai DAEs tuyến tính thuần nhất, T-tuần hoàn được gọi là *tương đương (tuần hoàn)* nếu**:**

$$\overline{A} = EAF \qquad \text{và} \qquad \overline{B} = E(BF + AF'), \tag{2.1.8}$$

trong đó $F \in C_N^1,\ E \in C$ là T-tuần hoàn và không suy biến.

Định lý 2.1.2 [13]. *i) Nếu hệ hai phương trình vi phân đại số tuyến tính thuần nhất, T- tuần hoàn là tương đương (tuần hoàn) thì các ma trận đơn đạo của chúng đồng dạng. Vì vậy các nhân tử đặc trưng của chúng bằng nhau.*

ii) Nếu các ma trận đơn đạo của hai hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính thuần nhất, T- tuần hoàn là đồng dạng thì chúng tương đương tuần hoàn.

iii) Hệ phương trình vi phân đại số: $A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0$ *tương đương tuần hoàn với một hệ tuyến tính T- tuần hoàn dạng chuẩn tắc Kronecker với hệ số hằng số.*

Chứng minh

i) Gọi $X(t)$ và $\overline{X}(t)$ lần lượt là các ma trận cơ bản của hai hệ

$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = 0$ và $\overline{A}(t)\overline{x}'(t) + \overline{B}(t)\overline{x}(t) = 0$ thì

$\overline{X}(T) = F^{-1}(T)X(T)F(0) = F^{-1}(0)X(T)F(0)$

$\Rightarrow \overline{X}(T)$ và $X(T)$ là đồng dạng

Mặt khác, $\det(\overline{X}(T) + \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \det(F^{-1}(0)X(T)F(0) + \lambda I) = 0$

$\Leftrightarrow \det(F^{-1}(T)F(0) + F^{-1}(0)\lambda I F(0)) = 0$

$\Leftrightarrow \det(X(T) + \lambda I) = 0$

Suy ra các nhân tử đặc trưng của chúng trùng nhau.

ii) Thực hiện phép biến đổi $x = F(t).x(t)$

(trong đó $F(t) = F_k(t) = V(t)\begin{pmatrix} Z(t)e^{-tW_0} & \\ & I \end{pmatrix}$)

Ta có: $A = AF; \quad B = BF + AF'$

$$N = \ker A(t) \; = F^{-1}(t)N(t)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-tW_0}z^{-1}(t) & \\ & I \end{pmatrix} V^{-1}(t)N(t)$$

Và vì $V^{-1}(t)n_k(t) = e_k, \quad \forall k = r+1,...,m$

$\Rightarrow N(t) = span\{e_{r+1},...,e_m\} = \{0\}^r \times$ [redacted]

Tương tự

$$S(t) = F^{-1}(t)S(t)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{tW_0}z^{-1}(t) & \\ & I \end{pmatrix} V^{-1}(t)S(t)$$

Vì $V^{-1}(t)S_k(t) = e_k, \quad \forall k = 1,2,..., \; r$

$\Rightarrow S(t) = span\{e_1,...,e_r\} =$ [redacted]

Phép chiếu chính tắc P_{can} lên S dọc theo N là: $P_{can} = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$

Tiếp theo ta tìm E phù hợp:

Lấy $E = G^{-1}; \quad G = A + BQ_{can}; \quad Q_{can} = I - P_{can} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & I \end{pmatrix}$

$\Rightarrow G^{-1}$ cũng T- tuần hoàn và không suy biến, vì hệ (2.1.2) là chính quy chỉ số 1.

Áp dụng $E := G^{-1}$ ta có: $\overline{A} = EA = G^{-1}A = P_{can} = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$

Và $\overline{B} = EB = G^{-1}B = \begin{pmatrix} \overline{B}_{11} & \overline{B}_{12} \\ \overline{B}_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix}$; ta cần xác định các khối $\overline{B}_{ij} \quad (i, j = \overline{1,2})$

Sử dụng $\qquad P_{can}G^{-1}BQ_{can} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{B}_{11} & \overline{B}_{12} \\ \overline{B}_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \overline{B}_{11} & \overline{B}_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \overline{B}_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \overline{B}_{12} = 0$$

Sử dụng $\quad Q_{can} G^{-1} B = Q_{can}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{B}_{11} & \overline{B}_{12} \\ \overline{B}_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \overline{B}_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{B}_{21} = 0 \\ \overline{B}_{22} = I_{m-r} \end{cases} \Leftrightarrow \overline{B} = \begin{pmatrix} \overline{B}_{11} & 0 \\ 0 & I_{m-r} \end{pmatrix}$$

Mặt khác, $\overline{X}(t) = X(t) = F^{-1}(t)X(t)F(0)$

$$= F^{-1}(t)F(t)\begin{pmatrix} e^{tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix}F^{-1}(0)F(0) = \begin{pmatrix} e^{tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

Thay vào phương trình: $\quad \overline{A}\,\overline{x}' + \overline{B}\,\overline{x} = 0 \qquad (2.1.9)$

với $\quad \overline{A} = \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix};\ \overline{B} = \begin{pmatrix} \overline{B}_{11} & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix}$

Ta được $\quad \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix}W_0\begin{pmatrix} \overline{B}_{11} & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{tW_0} & \\ & 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow W_0 e^{tW_0} + \overline{B}_{11} e^{tW_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{B}_{11} = -W_0 \quad \Leftrightarrow \overline{B}_{11} = \begin{pmatrix} -W_0 & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix}$$

Vậy (2.1.2) tương đương với $\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix}\bar{x}(t) + \begin{pmatrix} -W_0 & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix}x(t) = 0$ -đây là phương trình vi phân đại số dạng chuẩn tắc Kronecker với hệ số hằng.

ii) Giả sử (2.1.2) và (2.1.9) là hai hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính thuần nhất T- tuần hoàn có hai ma trận đơn đạo $X(t)$ và $\overline{X}(t)$ đồng dạng. Ta chứng minh chúng tương đương tuần hoàn. Theo chứng minh trên $\exists E, F; \overline{E}, \overline{F}$

sao cho (2.1.2) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} x'(t) + \begin{pmatrix} -W_0 & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix} x(t) = 0$

và (2.1.9) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix} \overline{x}'(t) + \begin{pmatrix} -\overline{W}_0 & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix} \overline{x}(t) = 0$

Mỗi phương trình tương ứng có một ma trận đơn đạo $X(T)$ và $\overline{X}(T)$ đồng dạng $\Rightarrow W_0$ và $\overline{W}_0$ cũng đồng dạng

Kí hiệu D là phép biến đổi đồng dạng thì $W_0 = D^{-1}\overline{W}_0 D$

Đặt: $\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} D & \\ & I \end{pmatrix}$; $E = \overline{E}^{-1}\mathfrak{D}E$; $F = F\mathfrak{D}^{-1}\overline{F}^{-1} \Rightarrow E, F$ là không suy biến.

Ta có: $\overline{A} = EAF$ vì $EAF = \begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix}$ và $\overline{E}\,\overline{A}\,\overline{F} = \begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \overline{A} = \overline{E}^{-1}\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix}\overline{F}^{-1}$

Mặt khác, $EAF = \overline{E}^{-1}\begin{pmatrix} D & \\ & I \end{pmatrix}(EAA)\begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & I \end{pmatrix}\overline{F}^{-1}$

$$= \overline{E}^{-1}\begin{pmatrix} D & \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & I \end{pmatrix}\overline{F}^{-1}$$

$$= \overline{E}^{-1}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & I \end{pmatrix}\overline{F}^{-1}$$

$$= \overline{E}^{-1}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\overline{F}^{-1}$$

$$= \overline{A}$$

Ta cũng có $\overline{B} = EBF + EAF'$. Thật vậy,

Ta có $E(BF + AF') = \begin{pmatrix} -W_0 & \\ & I \end{pmatrix} \Rightarrow BF + AF' = E^{-1}\begin{pmatrix} -W_0 & \\ & I \end{pmatrix}$

và $\overline{E}(\overline{B}\,\overline{F} + \overline{A}\,\overline{F}') = \begin{pmatrix} -\overline{W}_0 & \\ & I \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \overline{B}\overline{F} = \overline{E}^{-1}\begin{pmatrix} -\overline{W}_0 & \\ & I \end{pmatrix} - \overline{A}\overline{F}'$$

$$\Rightarrow \overline{B} = \left[\overline{E}^{-1}\begin{pmatrix} -\overline{W}_0 & \\ & I \end{pmatrix} - \overline{A}\overline{F}'\right]\overline{F}^{-1}$$

$$= \overline{E}^{-1}\begin{pmatrix} D & \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -W_0 & \\ & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & I \end{pmatrix}\overline{F}^{-1} - \overline{A}\overline{F}'\overline{F}^{-1}$$

$$= \overline{E}^{-1}\begin{pmatrix} D & \\ & I \end{pmatrix}E.\overline{E}^{-1}\begin{pmatrix} -W_0 & \\ & I \end{pmatrix}\overline{F}^{-1}F\begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & I \end{pmatrix}\overline{F}^{-1} - EAF\overline{F}'\overline{F}^{-1}$$

$$= E(B + AF'\overline{F}^{-1})F - EAF\overline{F}'\overline{F}^{-1}$$

$$= EBF + EA\left[F'\overline{F}^{-1}F\begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & I \end{pmatrix}\overline{F}^{-1}.(F'\begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & I \end{pmatrix} - F'\overline{F})\overline{F}^{-1}\right]$$

$$= EBF + EA\left[F'\begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & I \end{pmatrix}F^{-1} - F'\begin{pmatrix} D^{-1} & \\ & I \end{pmatrix}\overline{F}^{-1} + F'\right]$$

$$= EBF + EAF'$$

Vậy (2.1.2) và (2.1.9) là tương đương tuần hoàn.

Nhận xét

1.Tương tự như hệ phương trình vi phân tuyến tính thường với hệ số liên tục tuần hoàn, mọi hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính chính quy chỉ số 1 với hệ số liên tục, tuần hoàn đều khả quy.

2. Có thể biến đổi mọi hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính chính quy chỉ số 1 với hệ số liên tục tuần hoàn thành hệ chính tắc Kronecker với hệ số hằng nhờ $\begin{matrix} F(t) = V(t) \\ E(t) = G^{-1}(t) \end{matrix}$

Ví dụ 3. Xét hệ $\begin{cases} x_1' + (\sin t)x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$ (*)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B\begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dễ dàng tìm được $X(t)=\begin{pmatrix} e^{\cos t-1} & 0 \\ -\frac{1}{2}e^{\cos t-1} & 0 \end{pmatrix}$ (làm tương tự ví dụ 2)

Chọn $E=I_2,\quad F=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin t+2 \end{pmatrix}\in C_N^1$

Rõ ràng E, F không suy biến, $2\pi-$ tuần hoàn và

$$\overline{A}=EAF=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin t+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{B}=E(BF+AF')=E(BF+(AF)'-A'F)$$

$$=E(BF+AF') \text{ (vì } A \text{ là hằng nên } A'=0)$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{bmatrix} \sin t & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin t+2 \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \cos t \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 1 & 2\sin t+4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 1 & 2(\sin t+2) \end{pmatrix}$$

tức là ta thu được hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính $2\pi-$ tuần hoàn

$$\overline{A}\,\overline{x}'(t)+\overline{B}\,\overline{x}(t)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x_1'}+(\sin t)\overline{x}_1=0 \\ \overline{x_1}+2(\sin t+2)\overline{x}_2=0 \end{cases} \qquad (**)$$

Rõ ràng (*) và (**) là tương đương tuần hoàn

Bây giờ, ta biến đổi để (*) trở thành hệ có dạng Kronecker chuẩn tắc hệ số hằng:

Chọn $F=F_k(t)=\begin{pmatrix} -2e^{\cos t-1} & 0 \\ e^{\cos t-1} & 1 \end{pmatrix}$

$$A=AF=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2e^{\cos t-1} & 0 \\ e^{\cos t-1} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2e^{\cos t-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B=BF+AF'=\begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2e^{\cos t-1} & 0 \\ e^{\cos t-1} & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sin t\cdot e^{\cos t-1} & 0 \\ -\sin t\cdot e^{\cos t-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\sin t \cdot e^{\cos t - 1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sin t \cdot e^{\cos t - 1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dễ thấy

$$P_{can} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q_{can} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Khi đó $G = A + BQ_{can} = \begin{pmatrix} -2e^{\cos t - 1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2e^{\cos t - 1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{\cos t - 1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow G^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{\cos t - 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, lấy $E = G^{-1}$

$$\Rightarrow \overline{A} = EAF = A = EA$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{\cos t - 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2e^{\cos t - 1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

và $\overline{B} = E(BF + AF') = EB = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{\cos t - 1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -W_0 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix} \Rightarrow W_0 = 0.$$

$\Rightarrow$ Hệ (*) tương đương tuần hoàn với hệ Kronecker chuẩn tắc:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{x}_1' \\ \overline{x}_2' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{x}_1' = 0 \\ \overline{x}_2 = 0 \end{cases}$$

*Chú ý***.** Đối với định lý 2.1.2 (ii), chúng ta cũng có thể viết dưới dạng phép biến đổi đại số của F đó là sự biến đổi $X(t)$ thành $\overline{X}(t)$. Với kí hiệu tương ứng đối với (2.1.9), chúng ta có

$$X(T) = V(0)\begin{pmatrix} Z(T) & \\ & 0 \end{pmatrix} V^{-1}(0),$$

$$\overline{X}(T) = \overline{V}(0)\begin{pmatrix} \overline{Z}(T) & \\ & 0 \end{pmatrix} \overline{V}^{-1}(0),$$

trong đó $Z(T)$ và $\overline{Z}(T)$ là đồng dạng. Giả sử $\overline{Z}(T) = D^{-1}Z(T)D$ với $D \in L($[redacted]không suy biến. Khi đó

$$F(t) := V(t)\begin{pmatrix} Z(t)D\overline{Z}(t)^{-1} & \\ & I \end{pmatrix} \overline{V}(t)^{-1}$$

thoả mãn các điều kiện của bài toán.

Trước hết, chúng ta chú ý rằng, F là không suy biến.

Thứ hai, F là T-tuần hoàn, từ V và $\overline{V}$ là T-tuần hoàn và

$$Z(t+T)D\overline{Z}(t+T)^{-1} = Z(t)Z(T)D\overline{Z}(t+T)^{-1}$$

$$= Z(t)D\overline{Z}(T)\overline{Z}(t+T)^{-1} = Z(t)D\overline{Z}(t)^{-1}.$$

Thứ ba,

$$F(t)^{-1}X(t)F(0) = \overline{V}(t)\begin{pmatrix} \overline{Z}(t)D^{-1}Z(t)^{-1} & \\ & I \end{pmatrix} V(t)^{-1}V(t)\begin{pmatrix} Z(t) & \\ & 0 \end{pmatrix} \times V(0)^{-1}V(0)\begin{pmatrix} D & \\ & I \end{pmatrix} \overline{V}(0)^{-1}$$

$$= \overline{V}(t)\begin{pmatrix} \overline{Z}(t) & \\ & 0 \end{pmatrix} \overline{V}(0)^{-1} = \overline{X}(t).$$

Bây giờ, ta xét hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính

$$Ax' + B(t)x = 0 \qquad (2.1.10)$$

trong đó $A \in$ [redacted] $A = 0$, $rank\ A = r$

$B(t) \in L($[redacted] hoặc $B(t) \in L($[redacted]

Giả sử W và T là các ma trận hằng khả nghịch sao cho

$$A = W(diag(I_r, 0))T$$

Khi đó hệ (2.1.10) được viết thành

$$W(diag(I_r, 0))Tx' + B(t)x = 0,$$

và hệ này tương đương với hệ

$$diag(I_r,0)\xi' + G(t)\xi' = 0 \tag{2.1.11}$$

trong đó $\xi = Tx, G(t) = W^{-1}B(t)T^{-1}$.

Vì các tính chất nghiệm của các hệ (2.1.10) và (2.1.11) là như nhau nên không mất tính tổng quát , ở đây ta chỉ xét hệ dạng (2.1.11)

Xét hệ
$$(diag(I_r,0))x' + B(t)x = 0 \tag{2.1.12}$$

với các giả thiết sau

i) Hệ (2.1.12) là chính qui chỉ số 1 với $\forall t$ (xem [5]).

ii) $B(t+\omega) = B(t), \quad \forall t \in$ [redacted], $\quad B(t) \in C($[redacted]

Đặt $A = diag(I_r,0), \quad B(t) = \begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t) \\ B_{21}(t) & B_{22}(t) \end{pmatrix}$,

với $B_{11}(t)$ là ma trận vuông cấp r, $B_{22}(t)$ là ma trận vuông cấp $m-r$, $diag(I_r,0)$ là ma trận hằng cấp $m\times m$ và $x = colon\,(x^{(1)},...,x^{(m)})$, trong đó $x^{(i)}$ là thành phần thứ i của $x\,(i=1,2,...,m)$. Đặt $Q = diag\,(0, I_{m-r}), \;\; P = I_m - Q = diag\,(I_r,0)$, khi đó Q là phép chiếu lên $\ker A$ dọc theo imA và P là phép chiếu lên imA dọc theo $\ker A$

và ta có
$$A_1(t) = A + B(t)Q = \begin{pmatrix} I_r & B_{12}(t) \\ 0 & B_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{2.1.13}$$

Do đó hệ (2.1.12) là chính qui chỉ số 1 khi và chỉ khi giả thiết ma trận $A_1(t)$ là khả nghịch, với $\forall t$, tức là

$$\det A_1(t) = \det B_{22}(t) \neq 0, \quad \forall t \tag{2.1.14}$$

Sử dụng các phép chiếu P, Q ở trên, ta đưa hệ (2.1.12) về hệ

(xem [5], [11]):
$$\begin{cases} x_1' + [B_{11}(t) - B_{12}(t)]B_{22}^{-1}(t)B_{21}(t)x_1 = 0 & (a) \\ x_2 + B_{22}^{-1}(t)B_{12}(t)x_1 = 0 & (b) \end{cases} \tag{2.1.15}$$

trong đó $x_1 = colon\,(x^{(1)}, x^{(2)},...,x^{(r)}); \quad x_2 = colon\,(x^{(r+1)},...,x^{(m)})$ và $x = colon\,(x_1,x_2)$.

xét hệ
$$x_1' + [B_{11}(t) - B_{12}(t)]B_{22}^{-1}(t)B_{21}(t)x_1 = 0 \tag{2.1.15'}$$

Đây là hệ phương trình vi phân thường trong [redacted]. Rõ ràng, ma trận cơ bản chuẩn hóa tại $t=0$ của hệ (2.1.15') có dạng

$$X_1(t) = \phi(t)e^{\wedge t}, \qquad (2.1.16)$$

trong đó $\quad X_1(0) = I_r; \quad \phi(t) \in C^1, \quad \det \phi(t) \neq 0, \ \forall t;$

$$\phi(t+\omega) = \phi(t), \quad \phi(0) = I_r; \quad \wedge = \frac{1}{\omega} Ln X_1(\omega);$$

$X_1(\omega)$ là ma trận đơn đạo của (2.1.15')

Từ hệ (2.1.15') ta thấy rằng ma trận nghiệm cơ bản của (2.1.12) tương ứng với ma trận $X_1(t)$ là

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) & 0 \\ -B_{22}^{-1}(t)B_{21}(t)X_1(t) & 0 \end{pmatrix} \qquad (2.1.17)$$

trong đó $X_1(t)$ có biểu diễn (2.1.16)

Ta có hệ quả sau của định lý 2.1.1

Hệ quả [2]. *Ma trận cơ bản bất kỳ $X(t)$ của hệ (2.1.12) đều được viết dưới dạng*

$$X(t) = \psi(t)e^{t\Delta} \qquad (2.1.18)$$

trong đó $\psi(t+\omega) = \psi(t), \quad \forall(t); \quad \psi(t)P \in C^1($[redacted]*, và* Δ *là ma trận hằng.*

Các nghiệm của phương trình

$$\det(\lambda - \lambda I_r) = 0 \qquad (2.1.19)$$

được gọi là *các giá trị riêng* của hệ (2.1.15') và các nghiệm của phương trình

$$\det\,(X_1(\omega) - \rho I_r) = 0 \qquad (2.1.20)$$

được gọi là *các nhân tử* của hệ (2.1.15').

Kí hiệu $\lambda_j (j = 1,2,...,r)$ và $\rho_j = (1,2,...,r)$ là các nghiệm tương ứng của phương trình (2.1.19) và (2.1.20). Khi đó

$$\prod_{j=1}^{r} \rho_j = \det X_1(\omega) = \exp\left(-\int_0^{\omega} Sp(B_{11}(t) - B_{12}(t)B_{22}^{-1}(t)B_{21}(t))dt\right)$$

và $$\lambda_j = \frac{1}{\omega} Ln\,\rho_j = \frac{1}{\omega}\left[\ln|\rho i| + i(\arg \rho i + k2\pi)\right],$$

trong đó $j = 1,2,...,r$ và $k \in$ [redacted].

Định nghĩa 2.1.3 [2]. Ta gọi các nghiệm của phương trình (2.1.19) và (2.1.20) tương ứng là *các giá trị riêng và các nhân tử* của hệ (2.1.12).

Định lý sau đây là kết quả tương tự định lý 1.3.1.

Định lý 2.1.4 [2]. *Với mỗi nhân tử ρ, tồn tại nghiệm không tầm thường $\xi(t)$ của (2.1.12) thỏa mãn điều kiện $\xi(t+\omega)=\rho\xi(t)$ (2.1.21). Ngược lại, nếu nghiệm không tầm thường $\xi(t)$ nào đó của hệ (2.1.12) thỏa mãn điều kiện (2.1.21) thì ρ là một nhân tử của hệ này.*

Chứng minh

Giả sử $x^0 = colon(x_1, x_2) \in$ [redacted], trong đó

$x_1^0 = colon\,(x_1^{01}, x_1^{02},$ [redacted]

$x_2^0 = colon\,(x_2^{0r+1}, x_2^{0r+2},$ [redacted]

Từ (2.1.15, a) ta có nghiệm $x(t)$ của hệ (2.1.12) thoả mãn điều kiện đầu $Px(t_0) = Px_0$ là:

$$x(t) = \begin{pmatrix} X_1(t)x_1^0 \\ -B_{22}^{-1}(t)B_{21}(t)X_1(t)x_1^0 \end{pmatrix}$$

trong đó $X_1(t)x_1^0$ là nghiệm của (2.1.15, a) thỏa mãn điều kiện đầu $x_1^0 = x_1(0)$.

Giả sử $\xi_1(0)$ thỏa mãn $X_1(\omega)\xi_1(0) = \rho\xi_1(0)$

Khi đó, $\xi_1(t) = X_1(t)\xi_1(0)$ là nghiệm của (2.1.15a) thỏa mãn $\xi_1(t+\omega) = \rho\xi_1(t)$. Nghiệm $\xi(t) \neq 0$ của (2.1.12) thỏa mãn điều kiện đầu

$P\xi(0) = colon(\xi_1(0), 0)$ là $\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ -B_{22}^{-1}(t)B_{21}(t)\xi_1(t) \end{pmatrix}$

Từ đó, ta có $\xi(t+\omega) = \rho\xi(t)$

Ngược lại, nếu hệ (2.1.12) có nghiệm không tầm thường $\xi(t)$ thoả mãn $\xi(t+\omega) = \rho\xi(t)$ thì ρ là nghiệm của phương trình

$$\det(X_1(\omega) - \rho I_r) = 0$$

Hệ quả [2]. *(i) Hệ (2.1.12) có nghiệm tuần hoàn khi và chỉ khi hệ này có ít nhất một nhân tử bằng 1.*

(ii) Hệ (2.1.12) có nghiệm tuần hoàn khi và chỉ khi hệ (2.1.15, a) có nghiệm tuần hoàn.

2.2. ÁP DỤNG LÝ THUYẾT FLOQUET ĐỐI VỚI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN ĐẠI SỐ PHI TUYẾN

Xét DAEs phi tuyến dạng đặc biệt

$$Ax'(t)+Bx(t)+h(x'(t),x(t),t)=0, \quad t\in J:=[t_0,\infty)\,, \tag{2.2.1}$$

với phần tuyến tính có hệ số hằng số $A,B\in L($[redacted] và phần phi tuyến tính nhỏ. Chính xác hơn, chúng ta giả sử $h:\mathrm{G}\times J\to$ [redacted] là liên tục và có Jacobians $h'_y(y,x,t),\ \ h'_x(y,x,t)$ phụ thuộc liên tục vào các đối số của chúng. $\mathrm{G}\subseteq$ [redacted] là mở. Hơn nữa, giả sử

$$N:=\ker A\subseteq \ker h'_y(y,x,t), \quad (y,x,t)\in \mathrm{G}\times J\,, \tag{2.2.2}$$

sao cho với phép chiếu bất kì $P\in L($[redacted] dọc theo N và đồng nhất thức

$$h(y,x,t)\equiv h(Py,x,t)$$

là đúng.

Bổ đề [13]. *Giả sử* $0\in\mathrm{G}$ *và với mỗi* $\varepsilon>0$ *tồn tại* $\delta(\varepsilon)>0$ *sao cho*

$$(y,x,t)\in\mathrm{G}\times J, \quad |Py|+|x|\le\delta(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow |h(y,x,t)|\le\varepsilon(|Py|+|x|) \tag{2.2.3}$$

$$\Rightarrow |h'_x(y,x,t)|\le\varepsilon, \quad |h'_y(y,x,t)|\le\varepsilon\ , \tag{2.2.4}$$

Giả sử cặp ma trận $\{A,B\}$ *là chính quy chỉ số 1 và tất cả các giá trị riêng hữu hạn của nó nằm ở* [redacted] *, nghĩa là* $(\det(\lambda A+B)=0\Rightarrow\lambda\in$ [redacted]*. Khi đó, nghiệm* $x_*(t)\equiv 0$ *của hệ (2.2.1) là ổn định tiệm cận (theo nghĩa Lyapunov).*

Chứng minh:

Hiển nhiên $h(0,0,t)\equiv 0\Rightarrow x_*(.)\equiv 0$ thoả mãn (2.2.1)

Từ (2.2.4) $\Rightarrow h'_x(0,0,t)=0$ và $h'_y(0,0,t)=0$

Không mất tính tổng quát ta chọn $P = P_{can}$ là phép chiếu chuẩn tắc lên S dọc theo N. Đặt $Q = I - P = Q_{can}$ và $G = A + BQ_{can}$ ta có: $G^{-1}A = P_{can}$; $G^{-1}BQ_{can}$; $Q_{can} = Q_{can}G^{-1}B$

Từ hệ (2.2.1): $Ax' + Bx + h(x', x, t) = 0$

$$\Leftrightarrow APx' + BQPx' + Bx + h(x', x, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (A + BQ)Px' + Bx + h(x', x, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow Px' + G^{-1}Bx + G^{-1}h(x', x, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (Px') + PG^{-1}BPx + QG^{-1}BPx + G^{-1}BQx + G^{-1}h(x', x, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (Px(t))' + PG^{-1}BPx(t) + Qx(t) + G^{-1}h(x', x, t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (Px(t))' + PG^{-1}BPx(t) + (P + Q)G^{-1}h(x', x, t) + Qx(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (Px(t))' + PG^{-1}BPx(t) + PG^{-1}h(x', x, t) + Qx(t) + QG^{-1}h(x', x, t) = 0$$

Vì $S \oplus N =$ [redacted] nên hệ tương đương:

$$\begin{cases} (Px(t))' + PG^{-1}BPx(t) + PG^{-1}h(x', x, t) = 0 \\ Qx(t) + QG^{-1}h(x', x, t) = 0 \end{cases}$$

Đặt $u = Px(t)$, $v = Qx(t)$ $\Rightarrow U(t_0) = Px(t_0) \in imP;$ $x = u + v.$

Từ giả thiết $h(x', x, t) = h(Px', x, t)$

$= h((Px)', x, t)$ (vì P hằng).

$= h(u', u + v, t)$

Khi đó hệ đã cho (2.2.1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u'(t) + PG^{-1}Bu(t) + PG^{-1}h(u'(t), u(t) + v(t), t) = 0 & (2.2.5) \\ v(t) + QG^{-1}h(u'(t), u(t) + v(t), t) = 0 & (2.2.6) \\ u(t_0) \in imP & (2.2.7) \end{cases}$$

Nếu $u(.) \in C^1, v(.) \in C$ nghiệm đúng (2.2.5) - (2.2.7) trên khoảng $[t_0, T]$ thì

$$\begin{cases} u(t) = Pu(t) \\ v(t) = Qv(t) \end{cases}$$

và $x(.) = u(.) + v(.) \in C_N^1$ thỏa mãn (2.2.1)

Hiển nhiên (2.2.5) – (2.2.7) có nghiệm tầm thường $u_*(t) = 0,$ $v_*(t) = 0$

Từ (2.2.6) $\Rightarrow v = -QG^{-1}h(u'(t), u(t)+v(t), t)$ (trong đó $u', u \in$ [redacted]).

Sử dụng định lý hàm ẩn ta tìm được hàm

$$\psi: \overline{B}(0, \zeta_{u'}) \times \overline{B}(0, \zeta_u) \times J \to \overline{B}(0, \zeta_v)$$

thỏa mãn 6 tính chất sau:

(1) $\psi(u', u, t) = QG^{-1}h(u', u+\psi(u', u, t), t)$ mọi $|u| \le \tilde{n}_u, |u'| \le \tilde{n}_{u'}, t \in J$,

(2) $\psi(0,0,t) = 0$,

(3) $\psi(u', u, t) = Q\psi(u', u, t)$,

(4) ψ là liên tục cùng với đạo hàm riêng $\psi'_{u'}, \psi'_u$,

(5) $\psi(0,0,t) = 0, \psi'_{u'}(0,0,t) = 0$,

(6) với mỗi $\varepsilon > 0$ có một $\sigma_\psi(\varepsilon) > 0$ sao cho $|u'| + |u| \le \sigma_\psi(\varepsilon)$ kéo theo $|\psi(u', u, t)| \le \varepsilon(|u'| + |u|)$ đều với $t \in J$.

Tiếp theo, ta viết lại (2.2.5), (2.2.6) dưới dạng tương đương sau

$$\begin{cases} u'(t) + PG^{-1}BU(t) + PG^{-1}h(u', u+v(u', u, t), t) = 0 \\ v(t) = \psi(u', u, t) \end{cases} \tag{2.2.8}$$

$$\Rightarrow u'(t) = g(u(t), t) \tag{2.2.9}$$

hàm $g: \overline{B}(0, \rho_u) \times J \to \overline{B}(0, \rho_{u'})$ có 6 tính chất sau:

(i) $g(u,t) + PG^{-1}Bu + PG^{-1}h(g(u,t), u+\psi(g(u,t), u, t), t = 0$ với $u \in B(0, \tilde{n}_u), t \in J$,

(ii) $g(0,t) = 0$,

(iii) $g(u,t) = Pg(u,t)$,

(iv) g là liên tục cùng với đạo hàm riêng g'_u của nó,

(v) $g'_u(0,t) = -PG^{-1}B$,

(vi) với mỗi $\varepsilon > 0$ có một $\sigma_g(\varepsilon) > 0$ sao cho $|u| \le \sigma_g(\varepsilon)$ suy ra $\left|g(u,t) + PG^{-1}Bu\right| \le \varepsilon|u|$ đều với $\forall t \in J$.

Đặt $g(u,t) = g(u,t) + PG^{-1}Bu$, nhờ (2.2.9) ta có

$$u'(t) = g(u,t) - PG^{-1}.$$

$$= -PG^{-1}Bu + g(u,t) \qquad (2.2.10)$$

Đặt $M = -PG^{-1}B$ thì $MP = PM = M$.

Từ giả thiết mọi giá trị riêng hữu hạn của cặp (A,B) đều $\in C^-$

$\Rightarrow r$ giá trị riêng không tầm thường của M đều có phần thực âm ($m-r$ giá trị riêng bằng 0 vì $rank A = r$). Không gian riêng N có số nhiều $m-r$. Theo [7.p.57] $\langle z_1, z_2\rangle_C = \langle C^{-1}z_1, C^{-2}z_2\rangle$ với C là ma trận vuông cấp m không suy biến $z_1, z_2 \in$ [redacted]

sao cho với $z \in imP$ thì $\exists \beta > 0$ để $Re\langle Mz, z\rangle_C \le -\beta|z|_C^2$ (2.2.11)

Đặt $W(u(t)) = |u(t)|_C^2 = |Pu(t)|_C^2 = \langle Pu(t), Pu(t)\rangle_C$

$= \langle C^{-1}Pu(t), C^{-1}Pu(t)\rangle_2$, với mọi $t = [t_0, T]$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(u(t)) &= \frac{d}{dt}\langle Pu(t), Pu(t)\rangle_C \\
&= \frac{d}{dt}\langle C^{-1}Pu(t), C^{-1}Pu(t)\rangle_2 \\
&= \left\langle \left[C^{-1}Pu(t)\right]', C^{-1}Pu(t)\right\rangle_2 + \langle C^{-1}Pu(t), (C^{-1}Pu(t))'\rangle_2 \\
&= 2Re\langle (C^{-1}Pu(t))', C^{-1}Pu(t)\rangle_2 \\
&= 2Re\langle C^{-1}Pu'(t), C^{-1}Pu(t)\rangle_2
\end{aligned}$$

Thay $u' = Mu(t) + g(u,(t),t)$ ta có :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}W(u(t)) &\le 2Re\langle C^{-1}PMu(t), C^{-1}Pu(t)\rangle_2 + 2Re\langle C^{-1}P.g(u(t),t), C^{-1}Pu(t)\rangle_2 \\
&= 2Re\langle C^{-1}Mu(t), C^{-1}u(t)\rangle + 2Re\langle C^{-1}gu(t),t), C^{-1}u(t)\rangle_2 \\
&\le -2\beta|u(t)|_C^2 + 2\|C^{-1}\|.|g(u(t),t)|_2.|C^{-1}u(t)|_2 \\
&\le -2\beta|u(t)|_C^2 + 2\|C^{-1}\|.\varepsilon.|u(t)|_2.|u(t)|_C \\
&= -2\beta|u(t)|_C^2 + 2\|C^{-1}\|.\varepsilon.\|C\|.|u(t)|_C^2 \\
&= (-2\beta + \gamma\varepsilon)|u(t)|_C^2.
\end{aligned}$$

Chọn ε_* đủ nhỏ: $-2\beta + \gamma\varepsilon) \le -2\beta_0$, $\beta_0 > 0$

Khi đó $\quad \dfrac{d}{dt}W(u(t)) \le (-2\beta_0 |u(t)|_C^2 = -2\beta_0 W(u(t))$

Tích phân 2 vế $\Rightarrow W(u(t)) = e^{\beta_0(t-t_0)}W(u(t_0)) \quad \Rightarrow u(t) \le e^{-\beta_0(t-t_0)}|u(t_0)|_C$

Với $\tau \in \sigma_g(\varepsilon_*)$, hệ (2.2.1) với điều kiện đầu $Px(t_0) = Px^0 = u_0 = u(t_0)$ có nghiệm $x(t)$ xác định trên $[t_0, +\infty)$.

Lại vì $x(t) = u(t) + \psi(g(u(t),t), u(t), t), t \in [t_0, +\infty) \quad \Rightarrow |x(t)|_2 \le K_1 |u(t)|_C$

$$\Leftrightarrow |x(t)|_2 \le K_1 e^{-\beta_0(t-t_0)}|u(t_0)|_C \Leftrightarrow |x(t)|_2 \le e^{-\beta_0(t-t_0)}K_1 |px^0|_C$$

$$\Leftrightarrow |x(t)|_2 \le e^{-\beta_0(t-t_0)}K_1 |c^{-1}px^0|_2$$

$$\Leftrightarrow |x(t)|_2 \le e^{-\beta_0(t-t_0)}.K_1.\|c^{-1}\|.|px^0|_C \to 0 \quad (t \to +\infty)$$

$\Leftrightarrow x_* = 0$ là ổn định tiệm cận (theo nghĩa Lyapunov).

Bây giờ chúng ta xét trường hợp phương trình phi tuyến tính dạng

$$f(x'(t), x(t), t) = 0, \tag{2.2.12}$$

với $f : G\times$ [redacted] mở và liên thông, và $f(y,x,t) = f(y,x,t+T)$ với $\forall (x,y) \in G,\ t \in$ [redacted]. Giả sử rằng f và các đạo hàm riêng $f'_y, f'_x, f''_{yy}, f''_{xx}, f''_{yx}$ tồn tại và liên tục trên $G \in$ [redacted]. Ngoài ra, giả sử ker $f'_y(y,x,t) := N(t)$ là trơn, giả sử $P(t)$ là trơn và là phép chiếu tuần hoàn dọc theo $N(t)$, và giả sử rằng (2.2.12) là có chỉ số 1. Bây giờ, giả sử $x_* \in C_N^1$ là T-nghiệm tuần hoàn của (2.2.12), với tính chất ổn định đã được xét. Để đạt được định lý giống định lí đã biết của Lyapunov đối với ODEs và để đảm bảo rằng nghiệm tuần hoàn là ổn định với điều kiện nhất định. Vì vậy, chúng tôi xét phương trình tuyến tính thuần nhất:

$$\begin{cases} A(t)X'(t) + B(t)X(t) = 0 \\ P(0)(X(0) - I) = 0 \end{cases} \tag{2.2.13}$$

trong đó $A(t) := f'_y(x'_*(t), x_*(t), t), \qquad B(t) := f'_x(x'_*(t), x_*(t), t)$ (2.2.14)

và ma trận đơn đạo $X(T)$.

Định lý [13]. *Giả sử hệ phương trình* $f(x',x,t)=0$ *với các giả thiết từ (1)–(6) có nghiệm tuần hoàn* $x_*(t)$. *Nếu ma trận Monodromy* $X(T)$ *của hệ*

$$\begin{cases} f'_{y'}(x'_*,x_*,(t)X'(t)+f'_x(x'_*,x_*,(t).X(t)=0 \\ P(0)(X(0)-I)=0 \end{cases}$$

có tất cả các giá trị riêng thuộc $\{z\in$ [redacted] *thì* $x_*(t)$ *là ổn định tiệm cận (theo nghĩa Lyapunov).*

Chứng minh

• Theo định lý 2.1.2 (iii) ta luôn tìm được ma trận $F\in C^1_N($[redacted] và $E\in C($[redacted] đều là $T-$tuần hoàn và không suy biến, để biến đổi hệ

$$A(t)x'(t)+B(t)x(t)=0 \qquad (2.2.15)$$

về dạng Kronecker với hệ số hằng:

$$\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}\bar{x}'(t)+\begin{pmatrix} -W_0 & \\ & I_{m-r} \end{pmatrix}\bar{x}(t)=0\,.$$

• Tiếp theo ta áp dụng tương tự $F\,\&\,E$ cho phương trình phi tuyến tính: Ta tuyến tính hóa phương trình

$$f(x'_*(t)+y,x_*(t)+x,t)=A(t)y+B(t)x+h(y,x,t) \qquad (2.2.16)$$

h được xác định $\forall(x,y)$ trong một lân cận của $(0,0)$, $t\in$ [redacted]

h trơn như f thỏa mãn : $\begin{cases} h(0,0,t)=0 \\ h'_y(0,0,t)=0, \quad \forall t\in \text{[redacted]} \\ h'_x(0,0,t)=0 \end{cases}$

và
$$|h(y,x,t)|\le C(|x|+|y|)^2 \qquad (2.2.17)$$

$$h(y,x,t)=h(p(t)y,x,t)\text{; với } x\in C^1_N$$

thì
$$h(x'(t),x(t),t)=h(P(x)'(t)-P'x(t),x(t),t))$$

Ta xét nghiệm của phương trình: $A(t)x'(t)+B(t)x(t)+h(x',x,t)=0$ (2.2.18)

Với ma trận $E(t)$ và phép biến đổi $x=F(t)\bar{x}(t)$ ta nhận được

$$\begin{pmatrix} I & \\ & 0 \end{pmatrix}\overline{x}' + \begin{pmatrix} -W_0 & \\ & I \end{pmatrix}\overline{x}(t) + \overline{h}(\overline{x}', \overline{x}, t) = 0\,. \qquad (2.2.19)$$

$$\overline{h}(\overline{y}, \overline{x}, t) = E(t)h(P(t)F(t)\overline{y} - P(t)F'(t)\overline{x}, F(t)\overline{x}, t)$$

$$\overline{h}_y(\overline{y}, \overline{x}, t) = E(t)h'_y(P(t)F(t)\overline{y} - P(t)F'(t)\overline{x}, F(t)\overline{x}, t)P(t)F(t)$$

$$\Rightarrow \overline{N} = \ker\overline{A} \subset \overline{h'_y}(\overline{y}, \overline{x}, t) \text{ (vì } \ker \overline{f} \supseteq \ker B(t)F(t) = \ker A(t)F(t)$$

$$= \ker\overline{A}(t) = \overline{N})$$

Từ (2.2.17) $\Rightarrow$ $\left|\overline{h}(\overline{y}, \overline{x}, (t)\right| \le \overline{C}(\left|\overline{x}\right| + \left|\overline{P}\,\overline{y}\right|)$

lại vì $X(T)$ có tất cả các giá trị riêng thuộc $\{z \in$ [redacted]

$\Rightarrow$ mọi giá trị riêng hữu hạn của cặp $\{A, B\}$ đều $\in C^-$

Áp dụng bổ đề trên đối với hệ thức (2.2.19), thì (2.2.19) có nghiệm ổn định tiệm cận (theo nghĩa Lyapunov)

$\Rightarrow$ nghiệm của (2.2.18) cũng ổn định tiệm cận $\Rightarrow x_*$ T-tuần hoàn là ổn định tiệm cận (theo nghĩa Lyapunov)

$\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Ví dụ 4. Xét hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính

$$\begin{cases} x_1' + x_1 - x_2 - x_1x_3 + (x_3 - 1)\sin t = 0 \\ x_2' + x_1 + x_2 - x_2x_3 + (x_3 - 1)\cos t = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

có nghiệm 2π-tuần hoàn $x_*(t) = (\sin t, \cos t, 0)^T$.

$$f'_y f(y, x, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f'_x(y, x, t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \sin t \\ 1 & 1 & \cos t \\ 2x_1 & 2x_2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker f_y'(y,x,t) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad z_3 \in \right.$$ [redacted]

vì $\forall z \in$ [redacted] ta có $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ z_3 \in \end{cases}$ [redacted]

$$\Rightarrow im\ f_y'(y,x,t) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| z_1, z_2 \in \right.$$ [redacted].

Đặt $N = \ker f_y'(y,x,t) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad z_3 \in \right.$ [redacted].

$S(x) = \{ z \in$ [redacted] $x,t)z \in im\ f_y'(y,x,t) \}$

$= \{ z \in$ [redacted] $+ 2x_2 z_2 + z_3 = 0 \}$.

Rõ ràng N [redacted] $\Rightarrow$ hệ đã cho chính qui chỉ số 1.

Dễ dàng kiểm tra được $x_*(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$ là một nghiệm $2\pi-$tuần hoàn của hệ đã cho.

Ta xét tính chất ổn định tiệm cận của nghiệm này.

Xét hệ phương trình vi phân đại số tuyến tính

$$\begin{cases} A_*(t)X'(t) + B_*(t)X(t) = 0 \\ P_*(0)[X(0) - 1] = 0 \end{cases} \qquad (\eta)$$

với $A_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2\sin t & 2\cos t & 1 \end{pmatrix}$

ta có $N_* = \{z \in$ [redacted].

$S_* = \{z \in$ [redacted] $t)z_1 + (2\cos t)z_2 + z_3 = 0\}$

P_* là phép chiếu chính tắc lên S_* dọc theo N_*

ta tính được $P_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\sin t & -2\cos t & 0 \end{pmatrix}$; $Q_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\sin t & 2\cos t & 1 \end{pmatrix}$.

$$G_* = A_* + B_* Q_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\sin t & 2\cos t & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow G_*^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\sin t & -2\cos t & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{hệ } (\eta) \Leftrightarrow \begin{cases} P_* u' + P_* G_*^{-1} B_* P_* u = 0 & (\gamma) \\ Q_* u + Q_* G_*^{-1} B_* P_* u = 0 \end{cases}$$

Để ý $(\gamma) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1' + u_1 - u_2 = 0 \\ u_2' + u_1 + u_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = e^{-(1-i)t} \\ u_2 = e^{-(1-i)t} \end{cases}$

có ma trận cơ bản chuẩn hóa tại $t = 0$ là $U(t) = \begin{pmatrix} e^{-(1-i)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(1+i)t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Ma trận cơ bản của (η) là:

$$X(t) = P_*(t)U(t)P_*(0) = \begin{pmatrix} e^{-(1-i)t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(1+i)t} & 0 \\ -2\sin t.e^{-(1+i)t} & -2\cos t.e^{-(1+i)t} & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận đơn đạo $X(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{-(1-i)2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(1+i)2\pi} & 0 \\ 0 & -2e^{-(1+i)2\pi} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi} & 0 \\ 0 & -2e^{-2\pi} & 0 \end{pmatrix}$

Dễ thấy $X(2\pi)$ có các giá trị riêng $\lambda_1 = \lambda_2 = e^{-2\pi}, \lambda_3 = 0$ thuộc $\{z \in$ [redacted]

theo định lý trên $\Rightarrow x_*(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$ là ổn định tiệm cận theo nghĩa Lyapunov.

KẾT LUẬN

Lý thuyết ổn định là một bộ phận quan trọng của lý thuyết định tính phương trình vi phân và nó được ứng dụng rất nhiều trong thực tế đặc biệt là trong lĩnh vực kinh tế và khoa học kĩ thuật, trong sinh thái học và môi trường học,…. Vì thế lý thuyết ổn định được rất nhiều nhà khoa học quan tâm và đang được phát triển mạnh theo hai hướng ứng dụng và lý thuyết. Những kết quả và thành tựu đạt được trong lĩnh vực này là rất nhiều và sâu sắc. Trong phạm vi của luận văn, tác giả cố gắng trình bày một số vấn đề cơ bản của việc áp dụng lý thuyết Floquet cho phương trình vi phân đại số dưới dạng một tổng quan tương đối đầy đủ.

Nhiều vấn đề về lý thuyết ổn định đối với phương trình vi phân đại số còn chưa được làm sáng tỏ. Ví dụ: Phương pháp thứ nhất của Lyapunov, phương pháp thứ hai của Lyapunov cho phương trình vi phân đại số hoặc những áp dụng trong nhiều bài toán thực tế, kỹ thuật, hoá học, vật lý,….tác giả hy vọng sẽ tiếp tục được tiếp cận trong thời gian tới. Do thời gian và kiến thức còn hạn chế, nên luận văn không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được được các ý kiến đóng góp quý báu của các thầy cô giáo và các bạn đồng nghiệp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Nguyễn Thế Hoàn và Phạm Phu, Cơ sở phương trình vi phân và lý thuyết ổn định, NXB Giáo dục, 2009.*

2.	Đào Thị Liên, *Về sự ổn định của hệ phương trình vi phân và hệ phương trình vi phân đại số*, (Luận án tiến sĩ), ĐHSP Hà Nội, 2004.
3.	Hoàng Nam, *Lý thuyết số mũ Lyapunov cho phương trình vi phân đại số tuyến tính chính quy chỉ số 1*, (Luận án tiến sĩ), ĐHSP Hà Nội, 2005.
4.	Vũ Tuấn (2002),*"Tổng quan về phương trình vi phân đại số"*; Thông báo khoa học của các trường Đại học, Toán-Tin học, Bộ GD&ĐT, trang 7-13.
5.	E. Griepentrog and R. März,*"Differential-Algebraic Equations and Their Numerical Treatment"*, Teubner-Texte Math 88, Leipzig 1986.
6.	C.W. Gear, L.R. Petzold (1984) ,*"ODE methods for the solution of differential algebraic systems"*, SIAM J. Numer. Anal., 21, pp. 716 – 728.
7.	M. Hanke, E. Griepentrog, and R. März,*"Berlin Seminar on Dierential-Algebraic Equations"*, Seminarbericht 92-1, Humboldt-Universitát, Berlin, 1992.
8.	G.Floquet ,*'' Sur les équation differentielles linéeires a coecientsperiodiques'', Ann, Sci, École Norm*. Sup, 12, 47-89, 1883.
9.	A.M. Lyapunov,*" The General Problem of the Stability of Motion", Taylor & Francis, London*, 1992. (Originally: Kharkov, 1892, Russian).
10.	L.S. Pontryagin,*"Gewöhnliche Differentialgleichungen"*, Berlin 1965.
11.	J. P La Salle, S. Lefschetz,*"Stability by Lyapunov's Drect Method with Application"*, Academic Press, NewYork,1961.
12.	C. Tischendorf, On the stability of solutions of autonomous index-1 tractable and quasilinear index-2 tractable DAEs. *Circuits Systems Signal Process* 13 (1994), 139-154.
13.	R. Lamour. R. Marz and R. Winker (1986), *How floquet- theory applies to Index 1 differential-algebraic equations*, J. of Math. Analysis and Applications 217, 372-394.