ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN QUỲNH HOA

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CỔ ĐIỂN VÀ HỌ CHUẨN TẮC CÁC ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH TRONG GIẢI TÍCH PHỨC NHIỀU BIẾN

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2010

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN QUỲNH HOA

MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CỔ ĐIỂN VÀ HỌ CHUẨN TẮC CÁC ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH TRONG GIẢI TÍCH PHỨC NHIỀU BIẾN

Chuyên ngành: **Toán giải tích**
Mã số: **60.46.01**

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
PGS. TS. PHẠM VIỆT ĐỨC

THÁI NGUYÊN - 2010

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Họ chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu trong cả trường hợp một biến và nhiều biến phức. Lý thuyết về họ chuẩn tắc đã có nhiều ứng dụng và có mối liên hệ mật thiết với Giải tích phức hyperbolic. Mục đích của đề tài này là trình bày lại kết quả của J. E. Joseph và M. H. Kwach [19] về họ chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình nhiều biến phức và ứng dụng trong việc mở rộng một số định lý cổ điển của giải tích phức lên trường hợp nhiều biến.

Bố cục của luận văn được chia làm ba chương:

Chương I: Những kiến thức chuẩn bị

Nội dung của chương này là trình bày một số kiến thức cơ bản của Giải tích phức hyperbolic. Đồng thời, trình bày một số khái niệm và một số tính chất của chọ chuẩn tắc, họ chuẩn tắc đều các ánh xạ chỉnh hình. Những kiến thức này sẽ là cơ sở cho việc nghiên cứu ở các chương sau.

Chương II: Họ chuẩn tắc đều trên các đa tạp hyperbolic

Trong chương này, chúng tôi sẽ nghiên cứu một số tính chất quan trọng của họ chuẩn tắc đều các ánh xạ chỉnh hình trên các đa tạp hyperbolic. Những kết quả này có ý nghĩa quan trọng trong việc tổng quát hóa một số định lý cổ điển của Brody Lohwater và Pommerenke, Lehto và Virtanen, Hahn, Zaidenberg. Cuối chương, giới thiệu các khái niệm và một số kết quả về các ánh xạ chuẩn tắc và họ chuẩn tắc đều của các ánh xạ chỉnh hình của nhiều tác giả khác nhau.

Chương III: Họ chuẩn tắc đều trên các không gian phức và tổng quát hóa các định lý cổ điển của Schottky, Lappan, Bohr về các họ chuẩn tắc đều

Trong chương này, một số kết quả trong chương II về các họ chuẩn tắc đều trên các đa tạp hyperbolic đã được mở rộng đối với các họ chuẩn tắc đều trên các không gian phức tùy ý. Ngoài ra, các tính chất này còn được sử dụng để tổng quát hóa một số định lý cổ điển của Schottky, Hayman, bổ đề của Bohr và định lý 5 – điểm của Lappan cho trường hợp họ chuẩn tắc đều các ánh xạ chỉnh hình trên các không gian phức tùy ý.

Trong quá trình làm luận văn, chúng tôi đã nhận được sự hướng dẫn tận tình của PGS. TS. Phạm Việt Đức. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy. Đồng thời tác giả cũng xin phép gửi tới các thầy cô giáo trong khoa Sau đại học và khoa Toán – Trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên lời cảm ơn chân thành vì đã quan tâm và tạo mọi điều kiện thuận lợi để tác giả hoàn thành tốt luận văn của mình.

Tác giả cũng xin chân thành cảm cảm ơn các thầy cô phản biện đã dành thời gian đọc và đóng góp những ý kiến quý báu cho luận văn.

Thái Nguyên, ngày   tháng   năm 2010

Tác giả

Nguyễn Quỳnh Hoa

CHƯƠNG I

MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1 Một số khái niệm cơ bản

1.1.1 Giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức

Giả sử *X* là không gian phức, *x* và *y* là hai điểm tùy ý thuộc *X*; $H(D,X)$ là tập tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ *D* vào *X*, được trang bị tôpô compact mở. Xét dãy các điểm $p_0 = x, p_1, ..., p_k = y$ thuộc *X*, dãy các điểm $a_1, ..., a_k$ thuộc *D* và dãy các ánh xạ $f_1, ..., f_k$ thuộc $H(D,X)$ thỏa mãn:

$$f_i(0) = p_{i-1};\ f_i(a_i) = p_i \quad \forall i = 1, ..., k.$$

Tập hợp $\alpha = \{p_0, ..., p_k, a_1, ..., a_k, f_1, ..., f_k\}$ thỏa mãn điều kiện trên được gọi là một dây chuyền chỉnh hình nối *x* và *y* trong *X*.

Ta định nghĩa $k_X(x,y) = \inf\limits_{\alpha} \left\{ \sum\limits_{i=1}^{k} \rho_D(0; a_i);\ \alpha \in \Omega_{x,y} \right\}$, trong đó $\Omega_{x,y}$ là tập hợp tất cả các dây chuyền chỉnh hình nối *x* và *y* trong *X*. Khi đó, $k_X : X \times X \to \mathbb{R}^+$ thỏa mãn các tiên đề:

(1) $k_X(x,y) \geq 0,\ \forall x, y \in X,$

(2) $k_X(x,y) = k_X(y,x),\ \forall x, y \in X,$

(3) $k_X(x,y) + k_X(y,z) \geq k_X(x,z),\ \forall x, y, z \in X,$

được gọi là giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức *X*.

Tổng $\sum\limits_{i=1}^{k} \rho_D(0; a_i)$ được gọi là tổng Kobayashi của dây chuyền chỉnh hình α.

1.1.2 Không gian phức hyperbolic

Không gian phức *X* được gọi là không gian hyperbolic (theo nghĩa Kobayashi) nếu giả khoảng cách Kobayashi k_X là khoảng cách trên *X*, tức là $k_X(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,\ \forall x, y \in X.$

1.1.3 Định nghĩa

Giả sử $E = \mathbb{C}^{n+1}$ là một không gian véctơ phức *n* + 1 chiều. Gọi $P(E)$ là tập hợp tất cả các không gian con tuyến tính một chiều (hoặc là đường thẳng đi qua gốc 0) trong *E*. Ta định nghĩa ánh xạ $\rho : E \setminus \{0\} \to P(E)$ như sau: Với $x \in E \setminus \{0\}$ thì $\rho(x)$ là đường thẳng đi qua 0 và *x*.

Ta có $P(E) = P^n(\mathbb{C})$ là không gian xạ ảnh phức *n* chiều.

Ta gọi $P(E^*)$ là không gian xạ ảnh đối ngẫu của $P(E)$, và do đó $P^n(\mathbb{C}^*)$ là không gian xạ ảnh đối ngẫu của $P^n(\mathbb{C})$.

Lấy $H_1,...,H_q$ là các siêu phẳng trong $P(E)$, gọi $y_1,...,y_q$ là các điểm của $P(E^*)$ tương ứng với các siêu phẳng $H_1,...,H_q$. Giả sử $\rho^* : E^* \setminus \{0\} \to P(E^*)$ là phân thớ Hopf và $L_j \in E^* \setminus \{0\}$ sao cho $\rho^*(L_j) = y_j$. Khi đó, ta gọi L_j là dạng tuyến tính tương ứng với siêu phẳng H_j $(j = 1,...,q)$.

Ta nói rằng họ các điểm $y_1,...,y_q$ của $P(E^*)$ là ở vị trí tổng quát nếu với mỗi cách chọn $1 \le j_o < ... < j_k \le q,\ 0 \le k \le n,$ ta có $\dim\langle L_{j_0},...,L_{j_k}\rangle = k+1,$ trong đó $\langle L_{j_0},...,L_{j_k}\rangle$ là không gian con tuyến tính của E^* sinh bởi $L_{j_0},...,L_{j_k}$. Định nghĩa này không phụ thuộc vào cách chọn $L_1,...,L_q$ với $\rho^*(L_j) = y_j$.

Cho $H_1,...,H_q$ là các siêu phẳng trong $P^n(\mathbb{C})$. Ta nói rằng $H_1,...,H_q$ là ở vị trí tổng quát nếu họ các điểm $y_1,...,y_q$ của $P(E^*)$ tương ứng với $H_1,...,H_q$ là ở vị trí tổng quát.

Hay nói cách khác, cho $H_1,...,H_q$ là các siêu phẳng trong $P^n(\mathbb{C})$ và $L_1,...,L_q$ là các dạng tuyến tính tương ứng. Khi đó, $H_1,...,H_q$ là ở vị trí tổng quát nếu $\{L_{j_0},...,L_{j_n}\}$ là hệ độc lập tuyến tính, với mọi cách chọn $1 \le j_o < ... < j_n \le q$.

1.2 Họ các ánh xạ chuẩn tắc

1.2.1 Metric vi phân Kobayashi

Giả sử M là đa tạp hyperbolic. Khi đó, ta định nghĩa K_M là metric vi phân Kobayashi trên M được xác định bởi:

$$K_M(p,v) = inf\{r > 0 : \varphi(0) = p, d\varphi(0,re) = v; \text{ với } \varphi \in H(D,M)\},$$

trong đó $p \in M, v \in T_p(M)$, $d\varphi$ là ánh xạ tiếp xúc của φ và e là vectơ đơn vị 1 tại $0 \in D$.

1.2.2 Định nghĩa

Giả sử M là đa tạp hyperbolic, Y là không gian phức, E là hàm độ dài trên Y và d_E là hàm khoảng cách trên Y sinh bởi hàm độ dài E. Khi đó, ta định nghĩa chuẩn $|df|_E$ của ánh xạ tiếp xúc của $f \in H(M,Y)$ ứng với hàm độ dài E, xác định bởi:

$$|df|_E = sup\{|df(p)|_E : p \in M\},$$

trong đó $|df(p)|_E = sup\{E(f(p), df(p,v)) : K_M(p,v) = 1\}$.

1.2.3 Định nghĩa

Giả sử *X*, *Y* là các không gian phức và $F \subset C(X,Y)$. Khi đó, ta định nghĩa *F* là liên tục đồng đều từ $p \in X$ đến $q \in Y$ nếu với mỗi lân cận mở *U* chứa điểm *q* trong *Y* thì tồn tại các tập mở *V*, *W* trong *X*, *Y* chứa *p*, *q* tương ứng sao cho $\{f \in F : f(p) \in W\} \subset \{f \in F : f(V) \in U\}$.

Nếu F là liên tục đồng đều với mỗi $p \in X$ đến mỗi $q \in Y$ thì ta nói rằng F liên tục đồng đều từ X vào Y.

Khi đó, kết quả sau được coi như là cách phát biểu khác của định lý Arzela – Ascoli đối với họ liên tục đồng đều.

1.2.4 Mệnh đề

Giả sử X là một không gian chính quy compact địa phương và Y là một không gian chính quy. Khi đó, họ $F \subset C(X,Y)$ *là compact tương đối trong* $C(X,Y)$ *khi và chỉ khi hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

a) F là liên tục đồng đều,

b) $F(x) = \{ f(x) | f \in F \}$ *là compact tương đối trong Y với mỗi* $x \in X$.

Cho X, Y là các không gian phức. Ta ký hiệu:

+) $Y^{+} = Y \bigcup \{\infty\}$ là compact hóa một điểm Alexandroff của không gian tôpô Y và $Y^{+} = Y$ nếu Y là compact.

+) Nếu $F \subset C(Y,Z)$ và $G \subset C(X,Y)$ thì ta viết

$$F \circ G = \{ f \circ g : f \in F, g \in G \}.$$

1.2.5 Định nghĩa

Một họ F các ánh xạ chỉnh hình từ không gian phức X tới không gian phức Y được gọi là chuẩn tắc nếu F là compact tương đối trong $H(X,Y)$ đối với tôpô compact – mở.

1.2.6 Định nghĩa

Giả sử X và Y là các không gian phức. Một họ $F \subset H(X,Y)$ được gọi là chuẩn tắc đều nếu $F \circ H(M,X)$ là compact tương đối trong $C(M,Y^{+})$ với mỗi đa tạp phức M. Ta nói rằng $f \in H(X,Y)$ là một ánh xạ chuẩn tắc nếu $\{ f \}$ là chuẩn tắc đều.

Từ định nghĩa trên ta thấy mỗi phần tử của một họ chuẩn tắc đều là một ánh xạ chuẩn tắc. Nhưng ngược lại, một họ các ánh xạ chuẩn tắc có thể không là chuẩn tắc đều. Thật vậy, ta có ví dụ:

Ví dụ

Định nghĩa họ $F \subset H\left(D, P^1(\mathbb{C})\right)$ được xác định bởi $F = \{ f_n : n = 1,2,...\}$ với $f_n(z) = \dfrac{1}{n(nz+1)}$. Khi đó, f_n là chuẩn tắc với mỗi $n = 1,2,...$ nhưng F không là chuẩn tắc đều.

Thật vậy, vì $\left|f_n(z)\right| \geq \dfrac{1}{n(n+1)}$ trên D nên f_n là một ánh xạ chuẩn tắc theo Lehto-Virtanen. Định nghĩa ánh xạ $\varphi_n \in A(D)$ được xác định bởi $\varphi_n(z) = \dfrac{n^3 z + (1-n^2)}{(1-n^2)z + n^3}$. Khi đó, ta có $f_n \circ \varphi_n\left(n^{-1} - n^{-3}\right) \to 0$, nhưng $f_n \circ \varphi_n(0)$ không dần đến 0. Vậy họ F không là chuẩn tắc đều.

Từ định nghĩa 1.2.6 ta có các mệnh đề sau:

1.2.7 Mệnh đề

Nếu M là đa tạp phức, Y là không gian phức và $F \subset H(M,Y)$ là chuẩn tắc đều thì F là compact tương đối trong $C(M, Y^+)$.

1.2.8 Mệnh đề

Nếu X, Y là các không gian phức và $F \subset H(X,Y)$ thì các mệnh đề sau tương đương:

(1) F là chuẩn tắc đều.

(2) Nếu Z là không gian phức và $G \subset H(Z,X)$ thì $F \circ G$ là chuẩn tắc đều.

(3) Nếu Z là không gian con phức của X thì họ các ánh xạ thuộc F hạn chế trên Z là chuẩn tắc đều.

1.2.9 Mệnh đề

Nếu X, Y là các không gian phức và $F \subset H(X,Y)$ thì các mệnh đề sau tương đương:

(1) *F là chuẩn tắc đều.*

(2) $F \circ H(D,X)$ *là chuẩn tắc đều.*

(3) $F \circ H(D,X)$ *là compact tương đối trong* $C(D,Y^+)$.

(4) *Bao đóng của F trong* $H(X,Y)$ *là chuẩn tắc đều.*

Chứng minh

Từ mệnh đề 1.2.7 và 1.2.8 ta có $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3); (4) \Rightarrow (1)$.

- Chứng minh $(3) \Rightarrow (1)$.

Giả sử (1) sai. Ta có thể giả sử $M = \{p \in \mathbb{C}^m : \|p\| < 1\}$.

Từ mệnh đề 1.2.4, ta có $F \circ H(M,X)$ không là họ liên tục đồng đều từ điểm $0 \in M$ đến điểm $q \in Y^+$.

Tồn tại các dãy $\{p_n\} \subset (M - \{0\}), \{f_n\} \subset F, \{\varphi_n\} \subset H(M,X)$ sao cho $\|p_n\| \to 0,\ f_n \circ \varphi_n(0) \to q$ và $f_n \circ \varphi_n(p_n)$ không hội tụ về *q*.

Lấy $\lambda_n \in H(D,X)$ xác định bởi $\lambda_n(z) = \varphi_n\left(\dfrac{z.p_n}{\|p_n\|}\right),\ f_n \circ \lambda_n(0) \to q.$

Trong khi đó, $f_n \circ \lambda_n(\|p_n\|)$ không hội tụ về *q*.

Từ mệnh đề 1.2.4 ta có $F \circ H(D,X)$ không là compact tương đối trong $C(D,Y^+)$. Suy ra mâu thuẫn với (3). Vậy $(3) \Rightarrow (1)$.

- Chứng minh $(1) \Rightarrow (4)$.

Ta cần chứng minh rằng với mỗi đa tạp phức *M* thì

$$\left(\overline{F} \cap H(X,Y)\right) \circ H(M,X) \subset \overline{F \circ H(M,X)}.$$

Thật vậy, lấy $g \in \overline{F} \cap H(X,Y), \varphi \in H(M,X)$. Khi đó, có dãy $\{f_n\} \subset F$ thỏa mãn $f_n \to g$. Do đó $f_n \circ \varphi \to g \circ \varphi$. Vậy mệnh đề được chứng minh.

1.2.10 Định nghĩa

Giả sử X là một không gian con phức của một không gian phức Y. Khi đó, X được gọi là nhúng hyperbolic trong Y nếu với mọi $p,q \in \overline{X}; p \neq q$ thì luôn tồn tại các lân cận mở V, W trong Y lần lượt chứa p và q sao cho $k_X(V \cap X, W \cap X) > 0$, trong đó k_X là giả khoảng cách Kobayashi trên X.

Từ mệnh đề 1.2.9, ta có thể chỉ ra một số lớp quan trọng của các không gian phức được xác định bởi các họ chuẩn tắc đều. Cụ thể, năm 1973, Kierman [21] đã chứng minh được kết quả sau:

1.2.11 Mệnh đề

Một không gian con phức compact tương đối của một không gian phức Y là nhúng hyperbolic trong Y khi và chỉ khi $H(D,X)$ là compact tương đối trong $H(D,Y)$; hay nói cách khác, khi và chỉ khi $H(D,X)$ là tập con chuẩn tắc đều của $H(D,Y)$.

Năm 1971, Royden [29] và Abate [3] năm 1993 đã chỉ ra

1.2.12 Mệnh đề

Một đa tạp phức M là hyperbolic khi và chỉ khi $H(D,M)$ là liên tục đều. Hơn nữa, ta có M là hyperbolic khi và chỉ khi $H(D,M)$ là compact tương đối trong $C(D,M^+)$. Do đó, $H(D,M)$ là họ chuẩn tắc đều khi và chỉ khi M là hyperbolic.

Năm 1994, Joseph và Kwack [18] đã chứng minh được

1.2.13 Mệnh đề

Một không gian con phức X *của một không gian phức* Y *là nhúng hyperbolic trong* Y *khi và chỉ khi* $H(D,X)$ *là compact tương đối trong* $C(D,Y^+)$*; hay khi và chỉ khi* $H(D,X)$ *là tập con chuẩn tắc đều của* $H(D,Y)$.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng họ các ánh xạ giảm khoảng cách giữa những không gian metric *X*, *Y* là compact tương đối trong tập các ánh xạ chỉnh hình từ không gian *X* vào không gian compact hóa một điểm Alexandroff của không gian *Y*.

1.2.14 Mệnh đề

Giả sử (Y,σ) *là một không gian metric compact địa phương, X là một không gian tôpô và cho* ρ *là giả metric trên X,* ρ *liên tục trên* $X \times X$*. Khi đó, nếu với mỗi* $f \in F \subset C(X,Y)$ *là giảm khoảng cách tương ứng với* ρ,σ *thì F là compact tương đối trong* $C(X,Y^+)$.

Chứng minh. Ta sẽ chỉ ra rằng họ *F* là liên tục đồng đều từ *X* vào Y^+.

Thật vậy, ta giả sử ngược lại họ *F* không liên tục đồng đều từ *X* vào Y^+.

Khi đó, tồn tại các điểm $p \in X; q, s \in Y^+$ và các dãy $\{p_\alpha\} \subset X$; $\{f_\alpha\} \subset F$ sao cho $p_\alpha \to p, s \neq q, f_\alpha(p_\alpha) \to s, f_\alpha(p) \to q.$

+) Nếu $q \in Y$ thì với mỗi α ta có:

$$\sigma(f_\alpha(p_\alpha),q) \leq \sigma(f_\alpha(p_\alpha), f_\alpha(p)) + \sigma(f_\alpha(p),q) \leq \rho(p_\alpha, p) + \sigma(f_\alpha(p),q).$$

Do đó, $\sigma(f_\alpha(p_\alpha),q) \to 0$ và $q = s.$ Suy ra mâu thuẫn.

+) Nếu $s \in Y$ thì với mỗi α ta có:

$$\sigma(f_\alpha(p),s) \leq \rho(p, p_\alpha) + \sigma(f_\alpha(p_\alpha),s).$$

Do đó, $\sigma(f_\alpha(p),s) \to 0$ và $q = s.$ Suy ra mâu thuẫn.

Vậy *F* là liên tục đồngđều từ *X* vào Y^+.

CHƯƠNG II

HỌ CHUẨN TẮC ĐỀU TRÊN CÁC ĐA TẠP HYPERBOLIC

Trong chương này, chúng tôi sẽ nghiên cứu các tính chất của họ chuẩn tắc đều trên các đa tạp hyperbolic. Từ đó, chúng tôi áp dụng những tính chất này để tổng quát hóa một số định lý của Brody, của Hahn, và của Zaidenberg; đồng thời những tính chất này cũng được sử dụng để đưa ra một định lý tương tự định lý của Aladro và Krantz. Hơn nữa, với những tính chất này ta còn có được những kết quả quan trọng trong chương 3.

2.1 Một số tính chất của họ chuẩn tắc đều trên các đa tạp hyperbolic

Brody đã chứng minh được định lý sau (xem [25], trang 68)

2.1.1 Định lý

Cho X là một không gian con phức compact tương đối của không gian phức Y. Khi đó, nếu X không là nhúng hyperbolic trong Y thì tồn tại các dãy $\{r_n\}, \{g_n\}$ *sao cho* $r_n > 0,\ g_n \in H\left(D_{r_n}, X\right)$ *và một ánh xạ khác hằng* $g \in H\left(\mathbb{C}, Y\right)$ *thỏa mãn* $r_n \uparrow \infty$ *và* $g_n \to g$ *trên các tập con compact của* $\mathbb{C}$.

Nhận xét. Trong định lý trên ta có thể giả sử rằng $r_n = n$.

Thật vậy, trước hết ta giả sử $r_1 > 1$ và $r_{n+1} - r_n > 1$. Nếu k là một số nguyên dương và $k \le r_1$ thì đặt $f_k = g_1$; nếu $r_n \le k \le r_{n+1}$ thì đặt $f_k = g_{n+1}$. Khi đó, ta có $f_k \in H\left(D_k, X\right)$ và $f_k \to g$ trên các tập con compact của $\mathbb{C}$.

2.1.2 Định nghĩa

Cho X, Y là các không gian phức và $F \subset H\left(X, Y\right)$. *Khi đó:*

(1) *Một dãy Brody đối với F là một dãy* $\left\{ f_n \circ g_n \right\}$, *trong đó* $f_n \in F$ *và* $g_n \in H\left(D_n, X\right)$.

(2) *Một ánh xạ* $h \in C(\mathbb{C}, Y^{+})$ *được gọi là một giới hạn Brody đối với F nếu tồn tại một dãy Brody* $\{h_n\}$ *đối với F sao cho* $h_n \to h$ *trên các tập con compact của* $\mathbb{C}$.

Nhận xét. Nếu *Y* là một không gian con phức compact tương đối của một không gian phức *Z*, và *X* là một không gian phức thì các dãy Brody đối với $F \subset H(X,Y)$ sẽ đồng nhất với các đường cong chỉnh hình của Zaidenberg và các giới hạn Brody đối với *F* sẽ đồng nhất với các ánh xạ *F* - giới hạn của Zaidenberg (xem [31]).

2.1.3 Bổ đề

Cho M là một đa tạp hyperbolic, Y là một không gian phức với một hàm độ dài E và $f \in H(M,Y)$. *Khi đó:*

$$|df(p)| = sup\{|df \circ \varphi(0)| : \varphi \in H(D,M), \varphi(0) = p\} \qquad (p \in M),$$

$$|df| = sup\{|df \circ \varphi(0)| : \varphi \in H(D,M)\} = sup\{|df \circ \varphi| : \varphi \in H(D,M)\}.$$

Chứng minh. Cho $p \in M, v \in T_p(M)$ thỏa mãn $K_M(p,v) = 1$ và cho $\varepsilon > 0$.

Khi đó, tồn tại $\varphi \in H(D,M)$ và $r > 0$ sao cho $\varphi(0) = p,\ d(\varphi(0), re) = v$ và $r < 1 + \varepsilon$.

$$\begin{aligned} E(f(p), df(p,v)) &= E(f \circ \varphi(0), df \circ \varphi(0,re)) \le (1+\varepsilon)|df \circ \varphi(0)| \\ &\le (1+\varepsilon) sup\{|df \circ \varphi(0)| : \varphi \in H(D,M), \varphi(0) = p\} \\ &\le (1+\varepsilon) sup\{|df \circ \varphi| : \varphi \in H(D,M)\} \\ &\le (1+\varepsilon)|df|. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra các đẳng thức cần chứng minh.

2.1.4 Định lý

Cho M là một đa tạp hyperbolic, Y là không gian phức và họ $F \subset H(M,Y)$. *Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

(1) *F là chuẩn tắc đều.*

(2) *Với mỗi đa tạp phức* Ω, $F \circ H(\Omega, M)$ *là tập con liên tục đồng đều của* $H(\Omega, Y)$.

(3) $F \circ H(D, M)$ *là tập con liên tục đồng đều của* $H(D, Y)$.

(4) *Tồn tại một hàm độ dài E trên Y sao cho với mỗi* $f \in F$ *ta có* $|df|_E \leq 1$.

(5) *Tồn tại một hàm độ dài E trên Y sao cho với mỗi dãy Brody* $\{h_n\}$ *đối với F, ta có* $E(h_n(0), dh_n(0,e)) \to 0$.

(6) *Tồn tại một hàm độ dài E trên Y sao cho với mỗi dãy Brody* $\{h_n\}$ *đối với F có cùng một giá trị giới hạn Brody, ta có* $E(h_n(0), dh_n(0,e)) \to 0$.

Chứng minh

Hiển nhiên ta có $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ & $(5) \Rightarrow (6)$.

- $(3) \Rightarrow (4)$.

Ta có với mỗi hàm độ dài *E* trên *Y* và tập compact $Q \subset Y$, tồn tại $c > 0$ sao cho $|df(p)| \leq c$ trên $f^{-1}(Q)$ với mỗi $f \in F$.

Thật vậy, ta giả sử ngược lại, nếu tồn tại một tập compact $Q \subset Y$ không thỏa mãn điều kiện trong phát biểu trên đối với hàm độ dài *E* thì khi đó tồn tại các dãy $\{p_n\}, \{f_n\}, \{v_n\}$ và $q \in Q$, trong đó $p_n \in M$, $f_n \in F$, $v_n \in T_{p_n}(M)$, $f_n(p_n) \in Q$, $K_M(p_n, v_n) = 1$, $f_n(p_n) \to q$ và $E(f_n(p_n), df_n(p_n, v_n)) > n$.

Theo bổ đề 2.1.3, suy ra $|df_n(p_n)| \to \infty$ và tồn tại một dãy $\{\varphi_n\} \subset H(D, M)$ thỏa mãn: $\varphi_n(0) = p_n$ và $|df_n \circ \varphi_n(0)| \to \infty$.

Cho *V* là một lân cận compact tương đối của *q* nhúng hyperbolic trong *Y*.

Theo (3), vì $F \circ H(D,M)$ là tập con liên tục đồng đều của $H(D,Y)$ nên tồn tại một số $0 < r < 1$ sao cho $f_n \circ \varphi_n(D_r) \subset V$.

Mặt khác, có một dãy con là hạn chế của $\{f_n \circ \varphi_n\}$ trên D_r mà ta vẫn ký hiệu là $\{f_n \circ \varphi_n\}$, là chuẩn tắc đều và do đó ta có dãy $\{f_n \circ \varphi_n\}$ là compact tương đối trong $H(D_r,Y)$.

Suy ra, tồn tại một dãy con của dãy $\{f_n \circ \varphi_n\}$ hội tụ tới $h \in H(D_r,Y)$. Điều này mâu thuẫn với $|df_n \circ \varphi_n(0)| \to \infty$.

Vậy (4) được chứng minh.

- $(4) \Rightarrow (5)$.

Cho E là hàm độ dài thỏa mãn (4). Nếu $\{f_n \circ \varphi_n\}$ là một dãy Brody đối với F thì ta có:

$$E(f_n \circ \varphi_n(0), df_n \circ \varphi_n(0,e)) \le K_M(\varphi_n(0), d\varphi_n(0,e))$$
$$\le K_{D_n}(0,e) = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{khi } n \to \infty.$$

Do đó, (5) đúng.

- $(4) \Rightarrow (1)$.

Từ (4) suy ra tồn tại hàm khoảng cách d_E trên Y sao cho với mỗi $f \in F \circ H(D,M)$ là ánh xạ giảm khoảng cách từ k_D tới d_E. Khi đó, từ mệnh đề 1.2.9 và 1.2.14 suy ra (1) đúng.

- $(6) \Rightarrow (4)$.

Giả sử (4) sai, khi đó với bất kỳ hàm độ dài E trên Y tồn tại các dãy $\{f_n\} \subset F$ và $\{\varphi_n\} \subset H(D,M)$ thỏa mãn $|df_n \circ \varphi_n(0)| \to \infty$.

Khi đó, ta có tồn tại một dãy Brody $\{g_n\}$ và giới hạn Brody g đối với F thỏa mãn $g_n \to g$ trên các tập con compact của $\mathbb{C}$ và thỏa mãn:

$$E\left(g_n(0), dg_n(0)\right) = 1.$$

Điều này mâu thuẫn với (6). Suy ra (4) đúng.

Vậy định lý hoàn toàn được chứng minh.

Nhận xét. Ta có thể nói thêm rằng điều kiện (4) của định lý 2.1.4 là tổng quát hóa định lý của Lehto và Virtanen [26] vì mọi hàm độ dài trên các không gian phức compact là tương đương. Hahn [11] đã tổng quát hóa định lý này với $f \in H\left(\Omega, P^n(\mathbb{C})\right)$, trong đó Ω là miền thuần nhất bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

Việc chứng minh $(6) \Rightarrow (4)$ trong định lý trên có thể chứng minh bằng một cách khác với lập luận tương tự chứng minh khi tổng quát định lý cổ điển của Lohwater và Pommerenke [26] trong định lý 2.2.5 của chương này.

2.1.5 Định lý

Hàm phân hình $f : D \to P^1(\mathbb{C})$ là chuẩn tắc khi và chỉ khi $|df| < \infty$.

2.1.6 Hệ quả

Cho M là một đa tạp hyperbolic, $F \subset H(M, Y)$ là họ chuẩn tắc đều. Khi đó:

(1) Mọi dãy Brody đối với F đều có một dãy con hội tụ tới một giới hạn Brody đối với F trên các tập con compact của $\mathbb{C}$.

(2) Mọi giới hạn Brody đối với F đều là hằng.

Chứng minh. Trước hết, từ (4) trong định lý 2.1.4 suy ra tồn tại hàm độ dài E trên Y thỏa mãn F làm giảm khoảng cách từ k_M tới d_E.

- Chứng minh (1).

Nếu m là một số nguyên dương và $\{g_n\}$ là một dãy Brody đối với F thì với mỗi $g \in G = \{g_n : n \geq m\}$ là ánh xạ giảm khoảng cách từ k_{D_m} tới d_E.

Vì vậy, theo mệnh đề 1.2.14 suy ra G là compact tương đối trong $C\left(D_m, Y^+\right)$.

- Chứng minh (2).

Giả sử $\{g_n\}$ là một dãy Brody đối với F và g là một giới hạn Brody đối với F thỏa mãn $g_n \to g$ trên các tập con compact của $\mathbb{C}$. Khi đó:

+) Nếu $p, q \in \mathbb{C}$ và $g(p), g(q) \in Y$ thì với n đủ lớn ta có:

$$d_E\left(g_n(p), g_n(q)\right) \leq k_{D_n}(p,q).$$

Vì $k_{D_n}(p,q) \to 0$ nên $g(p) = g(q)$.

+) Nếu $g(p) = \infty$ thì từ tính liên tục của g và tính liên thông của $\mathbb{C}$ ta có $g(q) = \infty$ vì $g(\mathbb{C}) \cap Y$ có nhiều nhất là một điểm. Hệ quả được chứng minh.

Hệ quả sau là một tiêu chuẩn đối với họ chuẩn tắc đều trên các đa tạp hyperbolic.

2.1.7 Hệ quả

Giả sử M là một đa tạp hyperbolic, Y là một không gian phức và $F \subset H(M,Y)$ thỏa mãn $F(x)$ là compact tương đối trong Y với mỗi $x \in M$.

Khi đó, F là họ chuẩn tắc đều nếu và chỉ nếu mỗi giới hạn Brody đối với F là hằng.

Chứng minh. Trước hết, theo (2) của hệ quả 2.1.6 thì ta có nếu F là họ chuẩn tắc đều thì mỗi giới hạn Brody đối với F là hằng.

Ngược lại, giả sử với mỗi giới hạn Brody đối với F là hằng nhưng F không là họ chuẩn tắc đều. Khi đó, giới hạn Brody g được xây dựng trong phần chứng minh $(6) \Rightarrow (4)$ của định lý 2.1.4 không là hằng vì $g(0) \in Y$. Hơn nữa, $g_n \to g$ mà $E\left(g_n(0), dg_n(0)\right) = 1$ nên $E\left(g(0), dg(0)\right) = 1$. Do đó, $dg \neq 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Suy ra F là họ chuẩn tắc đều. Vậy hệ quả được chứng minh.

Trong trường hợp đối với mặt cầu Riemann $P^1(\mathbb{C})$ ta có kết quả sau.

2.1.8 Hệ quả

Cho M là một đa tạp hyperbolic, $F \subset H(M,\mathbb{C})$. Khi đó, các mệnh đề sau tương đương:

(1) *F là chuẩn tắc đều.*

(2) *F là chuẩn tắc đều như là một tập con của $H(M, P^1(\mathbb{C}))$.*

(3) *Nếu g là một giới hạn Brody đối với F và $g \in H(\mathbb{C},\mathbb{C})$ thì g là hằng.*

Chứng minh. Từ hệ quả 2.1.7 và bổ đề Hurwitz ta có ngay các kết luận của hệ quả 2.1.8.

Tiếp theo, từ những kết quả trên về giới hạn của các dãy Brody, chúng ta có một số tính chất đặc trưng của không gian hyperbolic và không gian nhúng hyperbolic. Nhưng trước hết, ta đưa ra khái niệm không gian phức hyperbolic Brody như sau:

2.1.9 Định nghĩa

Một không gian phức Y được gọi là hyperbolic Brody nếu mỗi ánh xạ chỉnh hình $f \in H(\mathbb{C},Y)$ đều là ánh xạ hằng.

Nhận xét. Không gian phức Y là hyperbolic Brody nếu và chỉ nếu mọi giới hạn Brody đối với ánh xạ đồng nhất $i: Y \to Y$ với giá trị trong Y là hằng . Tức là, nếu $f \in H(\mathbb{C},Y)$ và $\{f_n\}$ là một dãy thỏa mãn $f_n \in H(D_n,Y)$ và $f_n \to f$ trên các tập con compact của $\mathbb{C}$, thì f là hằng.

Các hệ quả 2.1.10 – 2.1.12 là đặc trưng của không gian hyperbolic và không gian nhúng hyperbolic thông qua dãy Brody.

2.1.10 Hệ quả

Một không gian phức Y là hyperbolic khi và chỉ khi tồn tại một hàm độ dài E trên Y sao cho $E(f_n(0), df_n(0,e)) \to 0$ với mỗi dãy $\{f_n\}$ thỏa mãn

$f_n \in H(D_n, Y)$ và $f_n \to g \in C(\mathbb{C}, Y^+)$ trên các tập con compact của $\mathbb{C}$, trong đó ánh xạ g là hằng.

Chứng minh. Ta có nếu Y là hyperbolic thì $H(D,Y)$ là compact tương đối trong $C(D,Y^+)$.

Ngược lại, giả sử $H(D,Y)$ compact tương đối trong $C(D,Y^+)$ nhưng không là hyperbolic. Khi đó, trong Y có hai điểm phân biệt x_0, y_0 sao cho $k_Y(x_0, y_0) = 0$. Lấy các lân cận compact tương đối U,V của x_0 sao cho $V \subsetneq U$ và $y_0 \notin \overline{U}$. Với mỗi $n \in \mathbb{Z}^+$ ta đều có $f_n \in H(D_n, Y)$ sao cho $f_n(0) \in \overline{V}$ nhưng $f_n(D_{1/n}) \not\subset U$. Thật vậy, nếu có một số nguyên dương *n* sao cho $f_n(0) \in \overline{V}$ kéo theo $f_n(D_{1/n}) \subset U$ với mỗi $f \in H(D,Y)$. Khi đó, từ định nghĩa k_Y ta có $k_Y(x_0, y_0) \geq \rho_D(0, 1/n) > 0$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Từ đó, ta thấy rằng với mỗi số nguyên dương *n* đều có $f_n \in H(D_n, Y)$ và $t_n \in D_{1/n}$ sao cho $f_n(0) \in \overline{V}$ nhưng $f_n(t_n) \not\subset U$.

Vì $H(D,Y)$ compact tương đối trong $C(D,Y^+)$ nên $\{f_n\}$ có dãy con $\{f_{n_k}\}$ hội tụ tới $f \in H(D,Y^+)$. Mặt khác, theo trên ta có $f_{n_k}(t_{n_k})$ không hội tụ tới $f(0) \in \overline{V}$. Suy ra mâu thuẫn.

Do đó, Y là hyperbolic khi và chỉ khi $H(D,Y)$ compact tương đối trong $C(D,Y^+)$. Đặt $F = H(D,Y)$. Khi đó, Y là hyperbolic $\Leftrightarrow F = H(D,Y)$ là tập con chuẩn tắc đều của $C(D,Y^+)$ $\Leftrightarrow$ Tồn tại hàm độ dài *E* trên Y sao cho $E(f_n(0), df_n(0,e)) \to 0$ với mỗi dãy Brody $\{f_n\}$ đối với *F* có giới hạn Brody.

Vậy Y là không gian hyperbolic khi và chỉ khi tồn tại hàm độ dài E trên Y sao cho $E\left(f_n(0), df_n(0,e)\right) \to 0$ với mỗi dãy Brody $\{f_n\}$, trong đó $f_n \in H(D_n, Y)$ và $f_n \to g \in H(\mathbb{C}, Y^+)$.

2.1.11 Hệ quả

Một không gian con phức Y của không gian phức Z là nhúng hyperbolic trong Z khi và chỉ khi tồn tại một hàm độ dài E trên Z sao cho $E\left(f_n(0), df_n(0,e)\right) \to 0$ *với mỗi dãy* $\{f_n\}$ *thỏa mãn* $f_n \in H(D_n, Y)$ *và* $f_n \to g \in C(\mathbb{C}, Z^+)$ *trên các tập con compact của* $\mathbb{C}$; *trong đó ánh xạ g là hằng.*

Chứng minh. Ta có, Y là nhúng hyperbolic trong Z $\Leftrightarrow$ $H(D,Y)$ compact tương đối trong $H(D,Z)$ $\Leftrightarrow$ $F = H(D,Y)$ là tập con chuẩn tắc đều của $H(D,Z)$ $\Leftrightarrow$ tồn tại một hàm độ dài E trên Z sao cho $E\left(f_n(0), df_n(0,e)\right) \to 0$ với mỗi dãy $\{f_n\}$ thỏa mãn $f_n \in H(D_n, Y)$ và $f_n \to g \in C(\mathbb{C}, Y^+)$ trên các tập con compact của $\mathbb{C}$; trong đó g cần phải là hàm hằng.

2.1.12 Hệ quả

Giả sử Y là một không gian con phức compact tương đối của không gian phức Z. Khi đó, Y không là nhúng hyperbolic trong Z nếu và chỉ nếu tồn tại hàm $g \in H(\mathbb{C}, Z)$ *và một dãy* $\{g_n\}$ *sao cho* $g_n \in H(D_n, Y)$, $g_n \to g$ *trên các tập con compact của* $\mathbb{C}$.

Chứng minh. Ta có Y không là nhúng hyperbolic trong $Z \Leftrightarrow H(D,Y)$ không compact tương đối trong $H(D,Z) \Leftrightarrow F = H(D,Y)$ không là tập con chuẩn tắc đều của $H(D,Z)$.

Vì *Y* là compact tương đối nên $F(x)$ compact tương đối trong *Y*.

Do đó, theo hệ quả 2.1.7 thì F không là họ chuẩn tắc đều khi và chỉ khi có một giới hạn Brody đối với F không là hằng. Vậy Y không là nhúng hyperbolic trong Z khi và chỉ khi tồn tại $\{g_n\} \subset H(D_n, Y)$, $g \in H(\mathbb{C}, Z)$ thỏa mãn $g_n \to g$ trên các tập con compact của $\mathbb{C}$. Hệ quả được chứng minh.

2.2 Tổng quát hóa một số định lý cổ điển của giải tích phức đối với họ chuẩn tắc đều trên các đa tạp hyperbolic

Trong phần này, ta sẽ áp dụng những tính chất của họ chuẩn tắc đều các ánh xạ chỉnh hình trên các đa tạp hyperbolic để tổng quát hóa một số định lý cổ điển trong giải tích phức.

2.2.1 Định nghĩa

Một hàm phân hình f trên D được gọi là chuẩn tắc nếu dãy $\{f \circ \varphi : \varphi \in A(D)\}$ là chuẩn tắc theo nghĩa của Montel, tức là dãy $\{f \circ \varphi\}$ chứa một dãy con hoặc là hội tụ đều trên mỗi tập con compact hoặc là phân kỳ compact, trong đó $A(D)$ là nhóm các tự đẳng cấu bảo giác của D.

Năm 1957, Lehto và Virtanen [26] đã chứng minh được kết quả cổ điển sau:

2.2.2 Định lý

Một hàm phân hình $f : D \to P^1(\mathbb{C})$ là chuẩn tắc nếu $|df| < \infty$.

Khi đó, vì tất cả các hàm độ dài trên những không gian phức là tương đương nên chúng ta thấy rằng mệnh đề (4) trong định lý 2.1.4 chính là sự tổng quát hóa định lý 2.2.2 của Lehto và Virtanen đối với ánh xạ chỉnh hình $f \in F \subset H(M, Y)$. Mặt khác, năm 1986, Hahn [7] đã chứng minh được kết quả này đối với hàm chỉnh hình $f \in H(\Omega, P^n(\mathbb{C}))$, trong đó Ω là một miền bị chặn thuần nhất trong $\mathbb{C}^n$.

Năm 1991, Aladro và Krantz [5] đã chứng minh được định lý sau

2.2.3 Định lý

Giả sử Ω *là một miền hyperbolic trong* $\mathbb{C}^n$ *và M là một đa tạp Hermit đầy đủ thì họ* $F \subset H(\Omega, M)$ *không là chuẩn tắc khi và chỉ khi tồn tại tập compact* $Q \in \Omega$ *và các dãy* $\{p_n\} \subset Q, \{f_n\} \subset F, \{\alpha_n\}$ *với* $\alpha_n > 0, \alpha_n \to 0^+$ *và một dãy* $\{v_n\}$ *các véctơ đơn vị Ơclit trong* $\mathbb{C}^n$*, sao cho dãy* $\{g_n\} \subset H(\mathbb{C}, M)$ *xác định bởi* $g_n(z) = f_n(p_n + \alpha_n v_n z)$ *hội tụ đều trên các tập con compact của* $\mathbb{C}$ *đến một hàm nguyên g khác hằng.*

2.2.4 Hệ quả

Giả sử M là một đa tạp hyperbolic, Y là một không gian phức và $F \subset H(M, Y)$*. Khi đó, F không là chuẩn tắc đều nếu và chỉ nếu với mỗi hàm độ dài E trên Y, tồn tại một dãy Brody* $\{g_n\}$ *đối với F và một giới hạn Brody g đối với F sao cho* $g_n \to g$ *và* $\lim E(g_n(0), dg_n(0, e)) > 0$.

Ta chú ý rằng, nếu $g(\mathbb{C}) \cap Y \neq \phi$ thì *g* không là ánh xạ hằng.

Từ hệ quả 2.2.4, ta có kết quả sau chính là sự tổng quát hóa định lý của Lohwater và Pommerenke [26] năm 1973 đối với họ các ánh xạ phân hình chuẩn tắc cho trường hợp họ chuẩn tắc đều các ánh xạ chỉnh hình từ miền *D* vào một không gian phức tùy ý.

2.2.5 Định lý

Cho Y là một không gian phức và $F \subset H(D, Y)$*. Khi đó, F không là chuẩn tắc đều nếu và chỉ nếu với mỗi hàm độ dài E trên Y, tồn tại các dãy* $\{f_n\} \subset F, \{p_n\} \subset D, \{r_n\} \subset (0; \infty)$ *và* $\{\varphi_n\}$ *thỏa mãn các điều kiện sau:*

(1) $r_n \downarrow 0,\ \dfrac{r_n}{1-|p_n|} \to 0,$

(2) $\varphi_n \in H\left(D_{s_n}, D\right)$ *được xác định bởi* $\varphi_n(z) = p_n + zr_n$*, trong đó* $s_n = \dfrac{1}{r_n}\left(1 - |p_n|\right)$,

(3) $f_n \circ \varphi_n \to g \in C\left(\square, Y^+\right)$,

(4) $\lim sup E\left(f_n \circ \varphi_n(z), df_n \circ \varphi_n(z,e)\right) \le 1$ *với* $z \in \square$ *và* $E\left(f_n \circ \varphi_n(0), df_n \circ \varphi_n(0,e)\right) = 1.$

Hơn nữa, nếu $g(\square) \cap Y \neq \varnothing$ *thì trong điều kiện* (3) *g sẽ không cần là hàm hằng.*

Chứng minh

- Điều kiện đủ được suy ra từ hệ quả 2.2.4 và nhận xét ở mục 2.1.1.
- Để chứng minh điều kiện cần, giả sử *F* không là chuẩn tắc đều và cho *E* là một hàm độ dài trên *Y*.

Suy ra, tồn tại các dãy $\{z_n\} \subset D$, $\{f_n\} \subset F$ thỏa mãn $\left|df_n(z_n)\right| \to \infty.$

Lấy $\sigma_n > 0$ xác định bởi:

$$\sigma_n^2 = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & \text{khi } 7|z_n|^2 \le 1 \\ \dfrac{2|z_n|^2}{1+|z_n|^2} & \text{khi } 7|z_n|^2 > 1. \end{cases}$$

Khi đó, σ_n thỏa mãn các điều kiện sau:

a) $\sigma_n^2 \in \left[\dfrac{1}{4};1\right)$; $|z_n| < \sigma_n$; $1 - \left|\dfrac{z_n}{\sigma_n}\right|^2 \ge \dfrac{1-|z_n|^2}{2}$ và ta có thể giả sử

b) $\left(1 - \left|\dfrac{z_n}{\sigma_n}\right|^2\right) E\left(f_n(z_n), df_n(z_n, e)\right) \uparrow \infty.$

Đặt $M_n = max\left\{\left(1-\left|\frac{z}{\sigma_n}\right|^2\right)E\left(f_n(z), df_n(z,e)\right):|z|\leq \sigma_n\right\}.$

Giả sử M_n đạt được tại p_n, đặt $r_n = \frac{1}{E\left(f_n(p_n), df_n(p_n,e)\right)}.$

Ta có $\frac{r_n}{\sigma_n - |p_n|} \to 0.$

Giả sử $M_n \uparrow \infty$, $\frac{r_n}{1-|p_n|} \downarrow 0.$ Đặt $s_n = \frac{1-|p_n|}{r_n}.$

Định nghĩa $\varphi_n \in H\left(D_{s_n}, D\right)$ xác định bởi $\varphi_n(z) = p_n + zr_n$.

Cho $r > 0$, $s_n > r$. Với $z \in D_r$ ta có:

$$\begin{aligned} E\left(f_n \circ \varphi_n(z), df_n \circ \varphi_n(z,e)\right) &= r_n E\left(f_n \circ \varphi_n(z), df_n\left(\varphi_n(z), e\right)\right) \\ &\leq r_n M_n \left(1-\left|\frac{p_n + zr_n}{\sigma_n}\right|^2\right)^{-1} \\ &\leq \left(1-\frac{r_n r}{\sigma_n - |p_n|}\right)^{-1} . \left(1+\frac{r_n r}{\sigma_n + |p_n|}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

và biểu thức vế phải của bất đẳng thức cuối cùng dần tới 1.

Do đó, $\{f_n \circ \varphi_n\}$ là liên tục đồng đều trên D_r ứng với metric Euclid trên D_r và d_E trên Y.

Từ mệnh đề 1.2.14 suy ra $\{f_n \circ \varphi_n\}$ là compact tương đối trong $C\left(D_r, Y^+\right)$.

Do đó ta có thể giả sử $f_n \circ \varphi_n \to g \in C\left(\mathbb{C}, Y^+\right)$.

Dễ thấy điều kiện $(1), (2), (3)$ được thỏa mãn bởi $\{f_n\}, \{p_n\}, \{r_n\}, \{\varphi_n\}$.

Mặt khác, ta có $E\left(f_n \circ \varphi_n(0), df_n \circ \varphi_n(0,e)\right) = 1$. Vậy (4) đúng.

Định lý hoàn toàn được chứng minh.

Giả sử M là đa tạp hyperbolic thuần nhất. Ta ký hiệu $A(M)$ là không gian các tự đẳng cấu của M. Định lý 2.2.6 sau đây là một đặc trưng cho họ chuẩn tắc đều trên các đa tạp hyperbolic thuần nhất và hệ quả 2.2.7 chỉ ra rằng tại sao chúng ta lại sử dụng thuật ngữ "họ chuẩn tắc đều".

2.2.6 Định lý

Cho M là một đa tạp hyperbolic thuần nhất, Y là không gian phức và $F \subset H(M,Y)$. *Khi đó các mệnh đề sau tương đương:*

(1) *F là chuẩn tắc đều.*

(2) $F \circ A(M)$ *là một tập con liên tục đồng đều của* $H(M,Y)$.

(3) $F \circ A(M)$ *là compact tương đối trong* $C(M,Y^+)$.

(4) $F \circ H(M,M)$ *là compact tương đối trong* $C(M,Y^+)$.

Chứng minh

- $(1) \Rightarrow (2)$. Điều này dễ dàng được suy ra từ định nghĩa 1.2.6 và mệnh đề 1.2.4.
- $(2) \Rightarrow (3)$. Giả sử (3) không xảy ra. Ta cần chỉ ra rằng $F \circ A(M)$ là liên tục đồng đều từ M vào Y^+.

Thật vậy, giả sử $x \in M$, $p \in Y$ và $\{x_n\}, \{f_n\}, \{\varphi_n\}$ là các dãy tương ứng trong M, F và $A(M)$ thỏa mãn $x_n \to x$, $f_n \circ \varphi_n(x) \to \infty$ và $f_n \circ \varphi_n(x_n) \to p$.

Lấy các tự đẳng cấu $\lambda_n \in A(M)$ thỏa mãn $\lambda_n(x) = x_n$.

Suy ra $f_n \circ \varphi_n \circ \lambda_n$ không là liên tục đồng đều từ x tới p. Do đó, (2) không xảy ra.

- $(3) \Rightarrow (1)$. Ta sẽ chỉ ra rằng $F \circ H(D,M)$ là một tập con liên tục đồng đều của $H(M,Y)$.

Thật vậy, giả sử $F \circ H(D,M)$ không là liên tục đồng đều từ $0 \in D$ đến $p \in Y$.

Suy ra tồn tại các dãy $\{z_n\}\subset D, \{f_n\circ\varphi_n\}\subset F\circ H(D,M)$ và một lân cận U của p trong Y sao cho $z_n\to 0,\ f_n\circ\varphi_n(0)\to p$ và $f_n\circ\varphi_n(z_n)\notin U.$

Lấy $a\in M, \{\lambda_n\}\subset A(M)$ thỏa mãn $\lambda_n(a)=\varphi_n(0).$

Khi đó, ta có $f_n\circ\lambda_n(a)\to p$ và $f_n\circ\lambda_n\left(\lambda_n^{-1}(\varphi_n(z_n))\right)\notin U.$

Vì mọi ánh xạ $f\in A(M)$ đều bảo toàn khoảng cách hyperbolic; và mỗi $f\in H(D,M)$ đều 1 giảm khoảng cách đối với k_D và k_M nên ta có $k_M\left(\lambda^{-1}(\varphi_n(z_n)),a\right)=k_M\left(\varphi_n(z_n),\lambda_n(a)\right)=k_M\left(\varphi_n(z_n),\varphi_n(0)\right)\le k_D(z_n,0).$

Mặt khác, vì $z_n\to 0$ nên suy ra $k_M\left(\lambda^{-1}(\varphi_n(z_n)),a\right)\to 0$.

Do đó $\lambda_n^{-1}(\varphi_n(z_n))\to a.$ Suy ra mâu thuẫn với giả thiết của mệnh đề (3).

Vậy $F\circ H(D,M)$ là một tập con liên tục đồng đều của $H(M,Y)$. Theo định lý 2.1.4 suy ra F là chuẩn tắc đều.

- $(3)\Rightarrow(4)$.

Do $F\circ A(M)$ là compact tương đối trong $C(M,Y^+)$ nên $F\circ A(M)$ là liên tục đều từ M đến Y^+. Như vậy, với mỗi $x\in M,\ y\in Y^+$ và mọi $U\in\sum(y)$ trong Y đều có $V\in\sum(x)$ trong M và $W\in\sum(y)$ trong Y^+ sao cho

$$\{f\in F\circ A(M): f(x)\in W\}\subset\{f\in F\circ A(M): f(V)\subset U\}.$$

Suy ra với mỗi $x\in M,\ y\in Y$ và mọi $U\in\sum(y)$ trong Y đều có $V\in\sum(x)$ trong M và $W\in\sum(y)$ trong Y sao cho

$$\{f\in F\circ A(M): f(x)\in W\}\subset\{f\in F\circ A(M): f(V)\subset U\}.$$

Nói cách khác, $F\circ A(M)$ là liên tục đồng từ M đến Y.

Vì $F\circ A(M)\subset H(M,Y)$ nên $F\circ A(M)$ là tập con liên tục đồng đều của $H(M,Y)$.

- $(4) \Rightarrow (1)$.

Vì $F \circ A(M) \subset F \circ H(M, M)$ nên chứng minh tương tự như $(3) \Rightarrow (1)$ ta có điều phải chứng minh.

2.2.7 Hệ quả

Giả sử M là một đa tạp hyperbolic thuần nhất, Y là một không gian phức và giả sử họ $F \subset H(M, Y)$ *thỏa mãn* $F = F \circ A(M)$. *Khi đó:*

(1) *F là chuẩn tắc đều khi và chỉ khi F là compact tương đối trong* $C(M, Y^{+})$;

(2) *Nếu* $M = D, Y = \mathbb{C}$ *thì F là chuẩn tắc đều khi và chỉ khi F là chuẩn tắc theo định nghĩa của Wu [30].*

Chứng minh. Sự khẳng định (1) được suy ra từ mệnh đề 1.2.7 và mệnh đề (4) của định lý 2.1.4. Sự khẳng định (2) được suy ra từ (1) và bổ đề Hurwitz.

Nhận xét. Hayman [15] gọi $F \subset H(D, P^{1}(\mathbb{C}))$ là bất biến nếu $F = F \circ A(D)$ và gọi một họ bất biến là chuẩn tắc đều nếu nó là họ chuẩn tắc theo định nghĩa của Montel.

2.3 Một số ví dụ về các họ chuẩn tắc đều

2.3.1 Ví dụ

Giả sử $f \in H(D, P^{1}(\mathbb{C}))$ và $\Delta \subset D$ là một đĩa đóng và ký hiệu $\partial\Delta$ là biên của Δ, cho $J(f(\Delta))$ và $L(f(\Delta))$ lần lượt là diện tích cầu của $f(\Delta)$ và độ dài cầu của $f(\partial\Delta)$. Lấy $h > 0$ và

$$F(h) = \left\{ f \in H(D, P^{1}(\mathbb{C})) : J(f(\Delta)) \leq hL(f(\Delta)) \text{ với mỗi đĩa đóng } \Delta \subset D \right\}.$$

Khi đó, Hayman ([15], trang 164) đã chứng chỉ ra rằng $F(h)$ là bất biến và chuẩn tắc theo định nghĩa của Montel. Do đó, $F(h)$ là chuẩn tắc đều theo hệ quả 2.2.7.

2.3.2 Ví dụ

Giả sử M là một đa tạp phức, $r > 0,$ và $F \subset H(M, P^1(\mathbb{C}))$ là một họ các ánh xạ sao cho với mỗi $f \in F$ tồn tại các điểm $a_f, b_f, c_f \in P^1(\mathbb{C}) - f(M)$ với $\chi(a_f, b_f)\chi(c_f, b_f)\chi(c_f, a_f) \geq r,$ trong đó χ là metric cầu. Khi đó, Carathéodory ([6], trang 202) đã chứng minh rằng $F \circ H(D, M)$ là chuẩn tắc theo định nghĩa của Montel. Vì vậy F là chuẩn tắc đều.

Tất cả những ánh xạ xác định trong các ví dụ 2.3.3 – 2.3.9 là những ánh xạ chuẩn tắc theo định nghĩa 1.2.5.

2.3.3 Ví dụ

Lehto và Virtanen [27] đã định nghĩa ánh xạ $f \in H(\Omega, P^1(\mathbb{C}))$ là chuẩn tắc nếu $f \circ A(\Omega)$ là một họ chuẩn tắc theo định nghĩa của Montel, trong đó Ω là một miền thuần nhất bị chặn trong $\mathbb{C}$.

2.3.4 Ví dụ

Hahn [16] định nghĩa ánh xạ $f \in H(\Omega, Y)$ là chuẩn tắc nếu $f \circ H(D, \Omega)$ là chuẩn tắc theo định nghĩa của Wu [30], trong đó Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và Y là một không gian con phức compact tương đối của một đa tạp Hermit.

2.3.5 Ví dụ

Funahashi [9] định nghĩa ánh xạ $f \in H(\Omega, Y)$ là chuẩn tắc nếu $f \circ A(\Omega)$ là compact trong $H(\Omega, Y)$, trong đó Ω là một miền thuần nhất bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và Y là một không gian phức.

2.3.6 Ví dụ

Cima và Krantz [7] định nghĩa ánh xạ $f \in H\left(\Omega, P^1(\mathbb{C})\right)$ là chuẩn tắc nếu $\left|df\left(z,v\right)\right| \le cK_{\Omega}\left(z,v\right)$ với mỗi $c>0,$ trong đó Ω là một miền hyperbolic trong $\mathbb{C}^n$. Hơn nữa, họ cũng chỉ ra rằng f là chuẩn tắc khi và chỉ khi $f \circ H\left(D,\Omega\right)$ là compact tương đối trong $H\left(\Omega, P^1(\mathbb{C})\right)$.

2.3.7 Ví dụ

Krantz ([23], trang 115) định nghĩa ánh xạ $f \in H\left(\Omega,\mathbb{C}\right)$ là một ánh xạ Bloch nếu $\left|df\left(p,v\right)\right| \le cK_{\Omega}\left(p,v\right)$ với mỗi $c>0,$ trong đó Ω là một miền hyperbolic trong $\mathbb{C}^n$.

2.3.8 Ví dụ

Aladro và Krantz [5] định nghĩa ánh xạ $f \in H\left(\Omega,Y\right)$ là chuẩn tắc nếu tồn tại một số $c>0$ sao cho $E\left(f\left(p\right), df\left(p,v\right)\right) \le cK_{\Omega}\left(p,v\right),$ trong đó Ω là một miền hyperbolic trong $\mathbb{C}^n$ và Y là một đa tạp Hermitian phức đầy đối với hàm độ dài Hermit *E*.

2.3.9 Ví dụ

Giả sử *Y* là các không gian phức và *X* là không gian con phức compact tương đối trong *Y*. Đặt

$$F_{X,Y} = \left\{ f \in Hol\left(D,Y\right) \mid f^{-1}\left(Y \setminus X\right) \text{ gồm nhiều nhất một điểm} \right\}.$$

Joseph và Kwack [18] đã chứng minh rằng một không gian con phức X của một không gian phức Y là nhúng hyperbolic trong Y khi và chỉ khi $F_{X,Y}$ là compact tương đối trong $C\left(D,Y^+\right)$ và do đó X nhúng hyperbolic trong Y khi và chỉ khi $\overline{F}_{X,Y} \cap H\left(D,Y\right)$ là một họ chuẩn tắc đều.

CHƯƠNG III

HỌ CHUẨN TẮC ĐỀU TRÊN CÁC KHÔNG GIAN PHỨC VÀ TỔNG QUÁT HÓA CÁC ĐỊNH LÝ CỔ ĐIỂN CỦA SCHOTTKY, LAPPAN, BOHR VỀ CÁC HỌ CHUẨN TẮC ĐỀU

Trong chương này ta sử dụng những kết quả trong chương I và II để nghiên cứu tính chất của các họ chuẩn tắc đều trên những không gian phức tùy ý, đồng thời tổng quát hóa một số định lý cổ điển của Schottky, Hayman và Lappan bằng cách thay thế những miền bị chặn trong $\mathbb{C}$ bởi những không gian phức tùy ý thông qua các tính chất của họ chuẩn tắc đều.

3.1 Một số tính chất của họ chuẩn tắc đều trên không gian phức tùy ý

Trước hết, ta có kết quả sau đây đối với các dãy Brody và các giới hạn Brody.

3.1.1 Mệnh đề

Giả sử X, Y là các không gian phức và $F \subset H(X,Y)$. Khi đó:

(1) $\{g_n\}$ *là một dãy Brody đối với F nếu và chỉ nếu* $\{g_n\}$ *là một dãy Brody đối với* $F \circ H(D,X)$.

(2) *g là một giới hạn Brody đối với F nếu và chỉ nếu g là một giới hạn Brody đối với* $F \circ H(D,X)$.

Chứng minh

- Chứng minh (1).

Nếu $g_n = f_n \circ \varphi_n$, trong đó $f_n \in F, \varphi_n \in H(D_n, X)$, thì $g_n = f_n \circ \varphi_n \circ m_n \circ m_n^{-1}$ với $m_n \in H(D, D_n)$ là phép nhân với *n*.

Khi đó $f_n \circ \varphi_n \circ m_n \in F \circ H(D,X)$, $m_n^{-1} \in H(D_n,D)$.

Suy ra $\{g_n\}$ là một dãy Brody đối với $F \circ H(D,X)$ nếu $\{g_n\}$ là một dãy Brody đối với *F*.

Mặt khác, với $h_n \in F \circ H(D,X), \varphi_n \in H(D_n,D)$, nếu $g_n = h_n \circ \varphi_n$ thì $g_n = f_n \circ \alpha_n \circ \varphi_n$, trong đó $f_n \in F$, $\alpha_n \circ \varphi_n \in H(D_n,X)$.

Vậy mỗi dãy Brody đối với $F \circ H(D,X)$ là một dãy Brody đối với *F*.

- Chứng minh (2).

Ta có, (2) dễ dàng được suy ra trực tiếp từ (1).

Vậy mệnh đề được chứng minh.

Ta có kết quả sau đây chính là tiêu chuẩn của họ chuẩn tắc đều trên các không gian phức tùy ý.

3.1.2 Định lý

Giả sử X, Y là các không gian phức và $F \subset H(X,Y)$. *Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương*:

(1) *F là chuẩn tắc đều.*

(2) $F \circ H(M,X)$ *là một tập con liên tục đồng đều của* $H(M,Y)$ *với mỗi đa tạp phức M.*

(3) $F \circ H(D,X)$ *là một tập con liên tục đồng đều của* $H(D,Y)$.

(4) *Tồn tại một hàm độ dài E trên Y sao cho* $|dg|_E \leq 1$ *với mỗi* $g \in F \circ H(D,X)$.

(5) *Tồn tại một hàm độ dài E trên Y sao cho* $E(h_n(0), dh_n(0,e)) \to 0$ *với mỗi dãy Brody* $\{h_n\}$ *đối với F.*

(6) *Tồn tại một hàm độ dài E trên Y sao cho* $E(h_n(0), dh_n(0,e)) \to 0$ *với mỗi dãy Brody* $\{h_n\}$ *đối với F có cùng một giới hạn Brody.*

Chứng minh. Ta có định lý 3.1.2 là hệ quả trực tiếp từ định nghĩa 1.2.5 kết hợp với các mệnh đề 1.2.9, 3.1.1 và định lý 2.1.4.

3.1.3 Định lý

Giả sử X là một không gian phức và $F \subset H(X,Y)$ *là chuẩn tắc đều. Khi đó, ta có:*

(1) *Mọi dãy Brody đối với F đều có một dãy con hội tụ tới một giới hạn Brody đối với F trên các tập con compact của* $\mathbb{C}$.

(2) *Mọi giới hạn Brody đối với F đều là hằng.*

Chứng minh. Ta có định lý 3.1.3 là hệ quả suy ra trực tiếp từ mệnh đề 1.2.9, 3.1.1 và hệ quả 2.1.6.

3.1.4 Định lý

Giả sử X, Y là các không gian phức và $F \subset H(X,Y)$ *thỏa mãn* $F(x)$ *là compact tương đối trong Y với mỗi* $x \in X$. *Khi đó, F là chuẩn tắc đều nếu và chỉ nếu mọi giới hạn Brody đối với F đều là hằng.*

Chứng minh. Ta có kết luận của định lý là hệ quả được suy ra từ các mệnh đề 1.2.9, 3.1.1 và hệ quả 2.1.7.

3.1.5 Định lý

Giả sử X là một không gian phức và $F \subset H(X,\mathbb{C})$. *Ta có các mệnh đề sau là tương đương:*

(1) *F là một họ chuẩn tắc đều.*

(2) *F là một tập con chuẩn tắc đều của* $H(X, P^1(\mathbb{C}))$.

(3) *Nếu* $g \in H(\mathbb{C},\mathbb{C})$ *là một giới hạn Brody đối với F thì ánh xạ g là hằng.*

Chứng minh. Xem hệ quả 2.1.8.

3.2 Tổng quát hóa một số định lý cổ điển của giải tích phức đối với họ chuẩn tắc đều trên các không gian phức tùy ý

Định lý sau là sự tổng quát hóa một định lý của Lohwater và Pommerenke cho những họ chuẩn tắc đều trên những không gian phức tùy ý.

3.2.1 Định lý

Giả sử X, Y là các không gian phức và $F \subset H(X,Y)$. *Khi đó, F không là họ chuẩn tắc đều nếu và chỉ nếu với mỗi hàm độ dài E trên Y tồn tại một dãy Brody* $\{g_n\}$ *đối với F và một giới hạn Brody g đối với F sao cho* $g_n \to g$, $\lim supE(g_n(z), dg_n(z,e)) \le 1$ *với mỗi* $z \in \mathbb{C}$ *và* $E(g_n(0), dg_n(0,e)) = 1$.

Chứng minh. Xem hệ quả 2.2.4 và 2.2.5.

Hơn nữa, Hayman ([15], trang 165) đã chứng minh được một kết quả mạnh hơn định lý của Schottky. Cụ thể, ta có định lý sau:

3.2.2 Định lý

Giả sử $F \subset H(D,\mathbb{C})$ *là một họ chuẩn tắc bất biến. Khi đó, tồn tại một số* $c > 0$ *chỉ phụ thuộc vào F sao cho* $\sup\limits_{|z|=r} |f(z)| \le \mu^{\frac{1+r}{1-r}} exp\left(\dfrac{2cr}{1-r}\right)$ *với mỗi* $f \in F$, $0 \le r < 1$ *và* $\mu = max\{1, |f(0)|\}$.

Giả sử X là một không gian phức, với mỗi $f \in H(X,\mathbb{C})$ và $x \in X$ ta ký hiệu $max\{1, |f(x)|\}$ bởi $\mu(f,x)$. Khi đó, kết luận của định lý 3.2.2 có thể được thay thế bởi sự tồn tại của số $c > 0$ chỉ phụ thuộc vào F sao cho $\mu(f,x) \le [\mu(f,0)]^{\frac{1+|z|}{1-|z|}} exp\left(\dfrac{2c|z|}{1-|z|}\right)$ với mỗi $f \in F$ và $z \in D$.

Mặt khác, Zaidenberg [31] đã mở rộng kết quả của Hayman cho các họ chuẩn tắc đều trên những đa tạp phức. Ở đây, ta sẽ sử dụng kỹ thuật chứng minh định lý 3.2.2 của Hayman để mở rộng kết quả của Zaidenberg cho các họ chuẩn tắc đều trên các không gian phức tùy ý. Ta có định lý sau:

3.2.3 Định lý

Giả sử X là một không gian phức và $F \subset H(X,\mathbb{C})$. *Khi đó, các mệnh đề sau tương đương:*

(1) *F là một họ chuẩn tắc đều.*

(2) *Tồn tại một số* $c > 0$ *sao cho mọi hàm* $f \in F$, $x, y \in X$ *thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\mu(f,x) \le \left[\mu(f,y)\right]^{exp\left[2k_X(x,y)\right]} exp\left[c\left[exp\left[2k_X(x,y)\right]-1\right]\right].$$

(3) *Tồn tại một số* $c > 1$ *sao cho mọi hàm* $f \in F$, $x, y \in X$ *thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\log\left(c\mu(f,x)\right) \le \left[exp\left[2k_X(x,y)\right]\right]\log\left(c\mu(f,y)\right).$$

(4) *Tồn tại một số* $c > 1$ *sao cho mọi hàm* $f \in F$, $x \in X$ *và* $\varnothing \ne Q \subset X$ *thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\log\left(c\mu(f,x)\right) \le \left[\sup_{y\in Q}\log\left(c\mu(f,y)\right)\right] exp\left[2k_X(x,Q)\right].$$

(5) *Tồn tại một số* $c > 1$ *sao cho mọi hàm* $f \in F$, $x, y \in X$ *thỏa mãn bất đẳng thức*

$$c\mu(f,x) \le \left[c\mu(f,y)\right]^{exp\left[2k_X(x,y)\right]}.$$

(6) *Tồn tại một số* $c > 1$ *sao cho mọi hàm* $f \in F$, $\varphi \in H(D,X)$, $x,y \in D$ *thỏa mãn bất đẳng thức*

$$c\mu(f\circ\varphi,x) \le \left[c\mu(f\circ\varphi,y)\right]^{exp\left[2k_D(x,y)\right]}.$$

Chứng minh

- $(1) \Rightarrow (2)$.

Dễ thấy, theo hệ quả 2.2.7, $F \circ H(D,X)$ là chuẩn tắc đều, bất biến.

Do đó, $F \circ H(D,X)$ là họ chuẩn tắc theo định nghĩa của Montel.

Mặt khác, Hayman ([15], trang 165) đã chỉ ra rằng tồn tại một số $c>0$ sao cho với mọi hàm $g \in F \circ H(D,X)$ ta có $|g'(0)| \le 2\mu_0(\log \mu_0 + c)$, trong đó $\mu_0 = max\{1, |g(0)|\}$.

Với mỗi $z \in D$, ta định nghĩa $\psi_z \in A(D)$ được xác định bởi $\psi_z(w) = \dfrac{w+z}{1+\bar{z}w}$.

Khi đó, với mỗi hàm $g \in F \circ H(D,X)$ ta có:

$$\left(1-|z|^2\right)|g'(z)| = \left|(g \circ \psi_z)'(0)\right| \le 2\mu_z(\log \mu_z + c),$$

trong đó $\mu_z = max\{1, |g(z)|\}$. Lấy $x, y \in X$, $f \in F$ và số $\varepsilon > 0$.

Khi đó, tồn tại một số nguyên $j>1$, $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_j \in H(D,X)$ và $a_1, a_2, ..., a_j \in (0;1)$ thỏa mãn $\varphi_1(0) = y$, $\varphi_i(a_i) = \varphi_{i+1}(0)$ với mọi $i = 1, ..., j-1$ và $\varphi_j(a_j) = x$.

Ta có thể giả sử $|f(x)| > 1$; và $g_i([0,a_i]) \subset \overline{D}$ hoặc $g_i([0,a_i]) \subset \mathbb{C} - D$, trong đó $g_i = f \circ \varphi_i$; và giả sử $\sum_i k_D(0,a_i) < k_X(x,y) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Đặt $I = \{i : g_i([0,a_i]) \subset \mathbb{C} - D\}$. Khi đó, với mỗi $i \in I$ ta có:

$$\frac{|g_i'(z)|}{|g_i(z)|\left(\log|g_i(z)| + c\right)} \le \frac{2}{1-|z|^2} \quad \text{với } z \in [0,a_i].$$

Do đó, với mỗi $i \in I$, có:

$$\log\left[\frac{\log|g_i(a_i)| + c}{\log|g_i(0)| + c}\right] \le 2k_D(0,a_i).$$

Nếu $1 \in I$ thì

$$\log\left[\frac{\log|f(x)|+c}{\log|f(y)|+c}\right] \le 2k_X(x,y)+\varepsilon.$$

Nếu $1 \notin I$, gọi α là phần tử nhỏ nhất trong *I*. Khi đó, $|g_\alpha(0)|=1$ và

$$\log\left[\frac{\log|f(x)|+c}{\log|g_\alpha(0)|+c}\right] \le 2k_X(x,y)+\varepsilon.$$

Từ đó suy ra (2).

- $(2)\Rightarrow(3)$. Thay c bởi $\log c$ trong kết quả của (2) ta được điều cần chứng minh.
- $(3)\Rightarrow(4)$. Nếu $\varnothing \ne Q \subset X$ và $x \in X$ thì lấy dãy $\{y_n\} \subset Q$ sao cho $d_X(x,y_n) \to d_X(x,Q)$. Khi đó, ta có điều cần chứng minh.
- $(4)\Rightarrow(5)$. Hiển nhiên.
- $(5)\Rightarrow(6)$. Nếu $f \in F, \varphi \in H(D,X)$ và $x, y \in D$ thì từ (5) ta có:

$$c\mu(f\circ\varphi,x)=c\mu(f,\varphi(x))\le\left[c\mu(f,\varphi(y))\right]^{exp\left[2k_X(\varphi(x),\varphi(y))\right]}$$
$$\le\left[c\mu(f,\varphi(y))\right]^{exp\left[2k_D(x,y)\right]}=\left[c\mu(f\circ\varphi,y)\right]^{exp\left[2k_D(x,y)\right]}.$$

- $(6)\Rightarrow(1)$.

Từ mệnh đề 1.2.9 và do tính thuần nhất của *D*, nếu ta chỉ cần chỉ ra rằng nếu $\{f_n\}, \{\varphi_n\}$ lần lượt là các dãy trong *F* và $H(D,X)$ thì tồn tại dãy con của dãy $\{f_n \circ \varphi_n\}$ hội tụ đến $g \in C(V,Y^+)$ trên một lân cận *V* của 0.

Thật vậy, nếu với mỗi tập con compact $K \subset Y$ và một lân cận *V* của 0, ta có $f_n \circ \varphi_n(V) \cap K = \varnothing$ thì ta có điều cần chứng minh.

Ngược lại, ta có thể giả sử có một dãy $\{z_n\} \subset D_{1/2}$ sao cho dãy $\{f_n \circ \varphi_n(z_n)\}$ bị chặn. Khi đó, tồn tại một số $c > 1$ sao cho với mỗi $z \in D_{1/2}$ ta có $c\mu(f_n \circ \varphi_n, z) \leq [c\mu(f_n \circ \varphi_n, z_n)]^{exp[2k_D(z,z_n)]}$ và $\{f_n \circ \varphi_n\}$ bị chặn đều trên $D_{1/2}$. Vậy định lý hoàn toàn được chứng minh.

Hayman ([15], trang 50) đã chứng minh được bổ đề của Bohr sau đây:

3.2.4 Bổ đề

Giả sử $w = f(z)$ *là hàm chính quy trong đĩa đơn vị* $|z| \leq 1$, *thỏa mãn* $f(0) = 0$ *và* $\max_{|z|=1/2} |f(z)| \geq 1$. *Khi đó,* $f(z)$ *xác định trong đĩa đơn vị* $|z| < 1$ *sẽ nhận tất cả các giá trị trên đường tròn* $|w| = r$, *trong đó* $r > A$ *và A là một hằng số dương.*

Ta có kết quả sau là sự mở rộng bổ đề của Bohr đối với các hàm chỉnh hình được định nghĩa trên các không gian phức tùy ý.

3.2.5 Hệ quả

Giả sử X là một không gian phức, và $B \subset X$, $f \in H(X, \mathbb{C})$ *thỏa mãn:*

(1) *B là bị chặn đối với giả khoảng cách* k_X,

(2) $\sup_{x \in B} |f(x)| > 1$,

(3) $0 \in f(B)$.

Khi đó, tồn tại $r > 0$ *không phụ thuộc vào* f *sao cho hoặc* $\{w \in \mathbb{C} : r < |w| < 2r\} \subset f(X)$ *hoặc* $\{w \in \mathbb{C} : 4r < |w| < 5r\} \subset f(X)$.

Chứng minh. Ta chú ý rằng $H(X, \mathbb{C} - \{0,1\})$ là họ chuẩn tắc đều trong $H(X, \mathbb{C})$. Từ (2) trong định lý 3.2.3, suy ra tồn tại $c > 0$ sao cho:

$$|\alpha(p)| \leq exp[c[exp(2k_X(p,q)) - 1]]$$

với mọi $p,q \in B, \alpha \in H\left(X, \mathbb{C}-\{0,1\}\right)$ thỏa mãn $\left|\alpha\left(q\right)\right| \le 1.$

Đặt $A = exp\left[c\left[exp\left(2\sup_{x,y\in B} k_X\left(x,y\right)\right)-1\right]\right]$ và $r = \left(7A+2\right)^{-1}.$

Giả sử $w_1 \in \left\{w \in \mathbb{C} : r < |w| < 2r\right\} - f\left(X\right),\ w_2 \in \left\{w \in \mathbb{C} : 4r < |w| < 5r\right\} - f\left(X\right).$

Định nghĩa $\varphi \in H\left(X, \mathbb{C}-\{0,1\}\right)$ xác định bởi $\varphi\left(p\right) = \dfrac{f\left(p\right)-w_1}{w_2-w_1}.$

Khi đó, tồn tại $q \in B$ sao cho $f\left(q\right) = 0.$

Do đó $\left|\varphi\left(q\right)\right| \le 1.$

Mặt khác, với mỗi $p \in B$ ta có $\left|\varphi\left(p\right)\right| \le A$ và

$$\left|f\left(p\right)\right| = \left|\varphi\left(p\right)\left(w_2-w_1\right)+w_1\right| \le A\left(|w_2|+|w_1|\right)+|w_1| \le \left(7A+2\right)r = 1.$$

Suy ra mâu thuẫn với giả thiết. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Các tương đương $(1)\Rightarrow(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$ của định lý 3.2.4 đã được Zaidenberg [31] chứng minh đối với các họ chuẩn tắc đều trên các đa tạp phức.

Năm 1974, Lappan [25] đã chứng minh được định lý 5 điểm sau

3.2.6 Định lý

Cho A là một tập con của $P^1(\mathbb{C})$ và chứa ít nhất 5 điểm. Khi đó, $f \in H\left(D, P^1(\mathbb{C})\right)$ là hàm chuẩn tắc nếu và chỉ nếu

$$\sup\left\{\left|f'\left(z\right)\right|\frac{1-|z|^2}{1+\left|f\left(z\right)\right|^2} : z \in f^{-1}\left(A\right)\right\} < \infty.$$

Ta sẽ mở rộng định lý này của Lappan cho họ các hàm chuẩn tắc đều từ những không gian phức tùy ý đến không gian xạ ảnh phức *n* chiều $P^n(\mathbb{C})$.

3.2.7 Định nghĩa

Ta nói rằng $g \in H\left(\mathbb{C}^m, P^n(\mathbb{C})\right)$ là suy biến nếu $g\left(\mathbb{C}^m\right) \subset \pi$ với π là một siêu phẳng nào đó trong không gian xạ ảnh phức $P^n(\mathbb{C})$.

3.2.8 Định nghĩa

Cho π là siêu phẳng trong $P^n(\mathbb{C})$, ký hiệu T_π là một phiếm hàm tuyến tính khác không trên $\mathbb{C}^{n+1}$ sao cho π là hạt nhân của nó. Gọi σ là tập hợp các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $P^n(\mathbb{C})$. Khi đó, ta nói rằng một hàm không suy biến $g \in H(\mathbb{C}^m, P^n(\mathbb{C}))$ là rẽ nhánh toàn cục trên σ nếu với mỗi $\pi \in \sigma$ thì ta có $(T_\pi \circ g)'(\zeta) = 0,$ trong đó $T_\pi \circ g(\zeta) = 0.$

Bổ đề sau của Hahn [11] tổng quát hóa một kết quả nổi tiếng trong lý thuyết Nevanlinna cho những hàm phân hình (xem [16], trang 231).

3.2.9 Bổ đề

Giả sử $\sigma = \{\pi_1, ..., \pi_q\}$ là một tập hợp bất kỳ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $P^n(\mathbb{C})$. Khi đó, nếu $g \in H(\mathbb{C}^m, P^n(\mathbb{C}))$ là rẽ nhánh toàn cục trên σ thì $q \le 2n + 2$.

Áp dụng những kỹ thuật chứng minh bổ đề trên của Hahn, ta sẽ mở rộng định lý 5 – điểm cổ điển của Lappan đối với họ chuẩn tắc từ không gian phức tùy ý vào không gian các xạ ảnh phức $P^n(\mathbb{C})$. Nhưng trước hết, ta sẽ mở rộng cho trường hợp đối với họ chuẩn tắc đều trên các đa tạp hyperbolic. Cụ thể, ta có kết quả sau:

3.2.10 Định lý

Giả sử M là đa tạp hyperbolic, σ là tập hợp chứa ít nhất $2n + 3$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $P^n(\mathbb{C})$ và cho $A = \bigcup_\sigma \pi$. Khi đó, $F \subset H(M, P^n(\mathbb{C}))$ là chuẩn tắc đều nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

1. $sup\left\{|df(p)| : p \in \bigcup_F f^{-1}(A)\right\} < \infty,$
2. *Mọi giới hạn Brody suy biến đối với F đều là hằng.*

Chứng minh.

- Vì tất cả các hàm độ dài trên $P^n(\mathbb{C})$ là tương đương và theo (4), (6) của định lý 2.1.4, nên ta có điều kiện cần của định lý là hiển nhiên.

- Để chứng minh điều kiện đủ, ta sẽ chỉ ra rằng nếu điều kiện (2) xảy ra và *F* không là chuẩn tắc đều thì điều kiện (1) không xảy ra.

Thật vậy, vì $P^n(\mathbb{C})$ là compact và F không là chuẩn tắc đều nên từ (6) trong định lý 2.1.4 suy ra tồn tại một giới hạn Brody khác hằng $g \in H(\mathbb{C}, P^n(\mathbb{C}))$ đối với *F*.

Lấy các dãy $\{f_k\}, \{\psi_k\}$ thỏa mãn $f_k \in F, \psi_k \in H(D_k, M)$ và $f_k \circ \psi_k \to g.$

Khi đó, từ (2) ta có *g* là không suy biến, và từ bổ đề 3.2.9 ta có *g* không là rẽ nhánh toàn cục trên $\{\pi\}$ với $\pi \in \sigma.$

Chọn hệ tọa độ thuần nhất $[w^0, ..., w^n]$ trong $P^n(\mathbb{C})$ sao cho π được xác định bởi $w^0 = 0.$

Nếu $g_k = f_k \circ \psi_k$ thì ta biểu diễn g, g_k bởi những tọa độ thuần nhất $[g^0, ..., g^n], [g_k^0, ..., g_k^n]$ với g^s, g_k^s $(s = 0, ..., n)$ là các hàm chỉnh hình và $g_k^0 \to g^0.$

Mặt khác, phương trình $g^0(z) = 0$ có nghiệm $z_0 \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(g^0)'(z_0) \neq 0.$

Do đó, nếu *E* là hàm độ dài trên $P^n(\mathbb{C})$ thì $E(g(z_0), dg(z_0, e)) = \alpha \neq 0.$

Theo bổ đề của Hurwitz, tồn tại một dãy $\{z_k\} \subset \mathbb{C}$ thỏa mãn $z_k \to z_0,\ g_k^0(z_k) = 0$ và $E(g_k(z_k), dg_k(z_k, e)) \to \alpha.$

Đặt $p_k = \psi_k(z_k).$ Khi đó:

$$\left|df_k(p_k)\right| \geq E\left(f_k \circ \psi_k\left(z_k, k\left(1 - \left|\frac{z_k}{k}\right|^2\right)e\right)\right) \geq k\left(1 - \left|\frac{z_k}{k}\right|^2\right)E\left(g_k(z_k), dg_k(z_k, e)\right).$$

Do đó $\left|df_k(p_k)\right| \to \infty.$ Vì $p_k \in f_k^{-1}(\pi) \subset f_k^{-1}(A)$ nên (1) không xảy ra.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bây giờ ta sẽ mở rộng định lý 5 - điểm của Lappan cho trường hợp đối với họ chuẩn tắc đều từ không gian phức tùy ý tới không gian xạ ảnh phức $P^n(\mathbb{C})$. Ta có định lý

3.2.11 Định lý

Giả sử X là không gian phức, σ là tập hợp chứa ít nhất $2n+3$ siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong $P^n(\mathbb{C})$ và giả sử $A = \bigcup_{\sigma} \pi$. Khi đó, $F \subset H(X, P^n(\mathbb{C}))$ là chuẩn tắc đều nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

(1) $sup\left\{\left|df \circ \varphi(0)\right| : \varphi \in H(D, X),\, \varphi(0) \in \bigcup_{F} f^{-1}(A)\right\} < \infty,$

(2) *Mọi giới hạn Brody suy biến của đối với F đều là hằng.*

Chứng minh

Từ định lý 3.2.10 và mệnh đề 1.2.9 ta có *F* là chuẩn tắc đều nếu và chỉ nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

a) $sup\left\{\left|dg(p)\right| : g \in F \circ H(D, X),\, p \in \bigcup g^{-1}(A)\right\} < \infty,$

b) Mọi hàm giới hạn Brody suy biến đối với $F \circ H(D, X)$ đều là hằng.

Điều kiện $a)$, $b)$ lần lượt tương đương với điều kiện (1), (2) trong mệnh đề 3.2.11 và ta có đẳng thức sau:

$$\left\{\left|dg(p)\right| : g \in F \circ H(D, X),\, p \in \bigcup g^{-1}(A)\right\} = \left\{\left|d(f \circ \varphi)(0)\right| : \varphi \in H(D, X),\, \varphi(0) \in \bigcup_{F} f^{-1}(A)\right\}.$$

Vậy định lý được chứng minh.

3.2.12 Hệ quả

Giả sử X là một không gian phức. Khi đó, $F \subset H(X, P^1(\mathbb{C}))$ là họ chuẩn tắc đều nếu và chỉ nếu $sup\left\{\left|d(f \circ \varphi)(0)\right| : \varphi \in H(D, X),\, \varphi(0) \in \bigcup_{F} f^{-1}(A)\right\} < \infty,$ với $A \subset P^1(\mathbb{C})$ là tập có nhiều hơn 4 phần tử (tương ứng A có nhiều hơn hai phần tử hữu hạn nếu $F \subset H(X, \mathbb{C})$).

3.2.13 Hệ quả

Giả sử M là một đa tạp hyperbolic. Khi đó $F \subset H\left(M, P^1(\mathbb{C})\right)$ *là họ chuẩn tắc đều nếu và chỉ nếu* $sup\left\{\left|df\left(p\right)\right| : p \in \bigcup_F f^{-1}\left(A\right)\right\} < \infty$, *với* $A \subset P^1\left(\mathbb{C}\right)$ *là tập có nhiều hơn 4 phần tử* (*tương ứng A có nhiều hơn hai phần tử hữu hạn nếu* $F \subset H\left(M, \mathbb{C}\right)$).

KẾT LUẬN

Nội dung chính của luận văn "Một số định lý cổ điển và họ chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình trong giải tích phức nhiều biến" là nghiên cứu các tính chất của họ chuẩn tắc, họ chuẩn tắc đều các ánh xạ chỉnh hình trên các đa tạp hyperbolic và trên các không gian phức tùy ý. Từ đó, áp dụng những kết quả này để tổng quát hóa một số định lý cổ điển của Giải tích phức đối với họ chuẩn tắc đều. Những kết quả chính luận văn đã đạt được là:

- Trình bày một số tiêu chuẩn họ chuẩn tắc đều của các ánh xạ chỉnh hình trên các đa tạp hyperbolic và trên các không gian phức tùy ý.
- Trình bày việc tổng quát hóa các định lý cổ điển của Lehto – Virtanen, Aladro – Krantz, Lohwater và Pommerenke đối với họ chuẩn tắc đều trên các đa tạp hyperbolic.
- Trình bày việc tổng quát hóa các định lý cổ điển của Lohwater và Pommerenke đối với họ chuẩn tắc trên các không gian phức tùy ý.
- Trình bày việc mở rộng định lý cổ điển của Schottky cho trường hợp họ chuẩn tắc đều.
- Trình bày việc mở rộng bổ đề của Bohr đối với các ánh xạ chỉnh hình trên các không gian phức tùy ý.
- Trình bày việc mở rộng định lý 5 – điểm của Lappan đối với họ chuẩn tắc đều các ánh xạ chỉnh hình từ một không gian phức tùy ý vào không gian xạ ảnh phức *n* chiều $P^n(\mathbb{C})$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Phạm Việt Đức (2005), *Mở đầu về lý thuyết các không gian phức hyperbolic*, Nhà xuất bản Đại học sư phạm, Hà Nội.

[2] Đoàn Quỳnh (2000), *Hình học vi phân*, Nhà xuất bản Đại học sư phạm, Hà Nội.

Tiếng Anh

[3] M. Abate (1993), *A characterization of hyperbolic manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. 117, 789 - 793.

[4] G. Aladro (1987), *Applications of the Kobayashi metric to normal functions of several complex variables*, UtilitasMath. 31, 13 - 24.

[5] G. Aladro and S. G. Krantz (1991), *A criterion for normality in* □^{n}, J. Math. Anal. and Appl. 161, 1 - 8.

[6] C. Carathéodory (1954), *Theory of Functions*, vol. II.Chelsea, NY.

[7] J. A. Cima and S. G. Krantz (1983), *The Lindelof principle and normal functions of several complex variables*, Duke Math. J. 50, 303 - 328.

[8] E. E Collingwood and A. J. Lohwater (1966), *The Theory of Cluster Sets*, Cambridge University Press, London.

[9] K. Funahashi (1984), *Normal holomorphic mappings and classical theorems of function theory*, Nagoya Math. J. 94, 89c104.

[10] M. L. Green (1977), *The hyperbolicity of the complement of 2n+1 hyperplanes in general position in* P_n, *and related results*, Proc. Amer. Math. Soc. 66, 109-113.

[11] K. T. Hahn (1986), *Higher dimensional generalizations of some classical theorems on normal meromorphic functions*, Complex Variables 6, 109 - 121.

[12] K. T. Hahn (1988), *Non-tangential limit theorems for normal mappings*, Pac. J. Math. 135, 57 - 64.

[13] K. T. Hahn (1987), *Boundary behavior of normal and nonnormal holomorphic mappings*, Proc. KIT Math. Workshop, Analysis and Geometry, KIT Math. Research Center, Taejon, Korea.

[14] K. T. Hahn (1989), *Hyperbolicity of the complement of closed subsets in a compact Hermitian manifold*, Complex Anal. and Appl. '87,Sofia, 211 - 218.

[15] W. K. Hayman (1964), *Meromorphic Functions*, Oxford University Press, Oxford.

[16] E. Hille (1962), *Analytic Function Theory*, vol. II, Ginn, Lexington, MA.

[17] P. Jarvi (1988), *An extension theorem for normal functions in several variables*, Proc. AMS 103, 1171 - 1174.

[18] J. E. Joseph and M. H. Kwack (1994), *Hyperbolic imbedding and spaces of continuous extensions of holomorphic maps*, J. Geom. Analysis 4, 3, 361 - 378.

[19] J. E. Joshep and M. H. Kwack (1996), *Some classical theorems and families of normal maps in several complex variables*, Complex Variables, Vol. 29, 343 - 362.

[20] J. L. Kelley (1955), *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, NJ.

[21] P. Kiernan (1973), *Hyperbolically imbedded spaces and the big Picard theorem*, Math. Ann. 204, 203 - 209.

[22] S. Kobayashi (1970), *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, Marcel Dekker, New York.

[23] S. G. Krantz (1993), *Geometric Analysis and Function Spaces*, CBMS, Amer. Math Soc. 81, Providence, RI.

[24] S. Lang (1987), *Introduction to Complex Hyperbolic Spaces*, Springer - Verlag, NY.

[25] P. Lappan (1974), *A criterion for a meromorphic function to be normal*, Comment. Math. Helvetici 49, 492 - 495.

[26] A. J. Lohwater and Ch. Pommerenke (1973), *On normal meromorphic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A1 550.

[27] O. Lehto and K. I. Virtanen (1957), *Boundary behaviour and normal meromorphic functions*, Acta Math. 97, 47 - 65.

[28] K. Noshiro (1938), *Contributions to the theory of meromorphic functions in the unit circle*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 7, 149 - 159.

[29] H. Royden (1971), *Remarks on the Kobayashi metric, Proc. Maryland Conference on Several Complex Variables*, Lecrure Notes 185, Springer - Verlag, Berlin.

[30] H. Wu (1967), *Normal families of holomorphic mapping*, Acta Math. 119, 193 - 233.

[31] M. G. Zaidenberg (1992), *Schottky - Landau growth estimates for s-normal families of holomorphic mappings*, Math. Ann 293, 123 - 141.

[32] M. G. Zaidenberg (1983), *Picard's theorem and hyperbolicity*, Siberian Math. J. 24, 858 - 867.