www.VNMATH.com

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

MAI THỊ NGỌC HÀ

HIỆU CHỈNH PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN TUYẾN TÍNH LOẠI I

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.46.36

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2009

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.Lrc-tnu.edu.vn

www.VNMATH.com

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

-----------⊲ 🕮 ⊲----------

MAI THỊ NGỌC HÀ

HIỆU CHỈNH PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN TUYẾN TÍNH LOẠI I

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.46.36

TÓM TẮT LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2009

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên http://www.Lrc-tnu.edu.vn

www.VNMATH.com

Công trình được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học:

Người hướng dẫn khoa học: GS.TS NGUYỄN BƯỜNG

Phản biện 1: ....

Phản biện 2: ....

Luận văn được bảo vệ trước hội đồng chấm luận văn họp tại: Trường Đại học Khoa học - ĐHTN
Ngày tháng năm 2009

Có thể tìm hiểu luận văn tại thư viện Đại học Thái Nguyên

non

www.VNMATH.com

Mục lục

www.VNMATH.com

MỞ ĐẦU

Nhiều vấn đề khoa học, công nghệ, kinh tế, sinh thái,..... dẫn đến việc giải các bài toán mà nghiệm của chúng không ổn định theo dữ kiện ban đầu, tức là một thay đổi nhỏ của các dữ kiện (sai một ly) của các dữ kiện có thể dẫn đến sự sai khác rất lớn (đi một dặm) của nghiệm, thậm chí làm cho bài toán trở lên vô nghiệm hoặc vô định. Người ta nói những bài toán đó đặt không chỉnh *(ill-posed)*.

Do các số liệu thường được thu thập bằng thực nghiệm (đo đạc, quan trắc...) và sau đó lại được xử lý trên máy tính nên chúng không tránh khỏi sai số. Chính vì thế, yêu cầu đặt ra là phải có những phương pháp giải ổn định các bài toán đặt không chỉnh, sao cho khi sai số của dữ liệu càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán xuất phát. Những người có công đặt nền móng cho lý thuyết bài toán đặt không chỉnh là Tikhonov A. N., Lavrent'ev M. M, Lions J. J., Ivanov V. K....

Trong khuôn khổ của bản luận văn này, chúng tôi sẽ đề cập đến một bài toán đặt không chỉnh mà nó có ứng dụng lớn trong các bài toán phát sinh từ kĩ thuật.

Đó là phương trình tích phân tuyến tính Fredholm loại I:

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = f_0(t),\ t \in [c,d],$$

$$-\infty < a < b < +\infty, -\infty < c < d < +\infty$$

ở đây nghiệm là một hàm $x_0(s)$, vế phải $f_0(t)$ là một hàm số cho trước và nhân (hạch) $K(t,s)$ của tích phân cùng với $\partial K/\partial t$ được giả thiết là các hàm liên tục cho trước.

Luận văn sẽ nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh và tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh và nghiệm hiệu chỉnh khi đã được xấp xỉ hữu hạn chiều cho nghiệm của phương trình tích phân tuyến tính loại I trên sau đó đưa ra kết quả số minh họa.

Nội dung luận văn gồm 2 chương, phần kết luận và cuối cùng là phần tài liệu tham khảo.

Chương I sau khi đã trình bày một số khái niệm cơ bản của giải tích hàm, chúng tôi trình bày khái niệm về bài toán đặt không chỉnh và chỉ ra rằng bài toán tìm nghiệm của phương trình tích phân Fredholm loại I là bài toán đặt không chỉnh. Cuối cùng chúng tôi trình bày tóm tắt việc xây dựng phương pháp hiệu chỉnh tổng quát để giải bài toán đặt không chỉnh.

Chương II trình bày về nghiệm hiệu chỉnh của phương trình tích phân tuyến tính loại I, tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh, xấp xỉ hữu hạn chiều và tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh hữu hạn chiều đồng thời chỉ ra khi nào tốc độ hội tụ là tốt nhất. Cuối cùng chúng tôi đưa ra một số kết quả bằng số minh họa.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới PGS. TS Nguyễn Bường, người đã tận tình chỉ bảo, tạo điều kiện và giúp đỡ tôi có thêm nhiều kiến thức, khả năng nghiên cứu, tổng hợp tài liệu, nhờ đó mà tôi có thể hoàn thành được bản luận văn này.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành tới TS. Nguyễn Thị Thu Thuỷ, Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Khoa học đã nhiệt tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong suốt quá trình làm luận văn.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn tới tất cả các thầy cô giáo đã trực tiếp giảng dạy và trang bị cho tôi những kiến thức cơ bản trong suốt quá trình tôi học tập tại trường, các thầy cô giáo trong bộ môn Toán - Lý, và các thầy cô trong Khoa Khoa học Cơ bản trường Đại học Nông lâm Thái Nguyên đã tạo nhiều điều kiện thuận lợi, giúp đỡ, động viên tôi trong suốt quá trình

www.VNMATH.com

học tập và công tác.

Những lời cảm ơn cuối cùng tôi muốn gửi tới những người thân yêu nhất trong gia đình tôi đã giúp đỡ, chia sẻ, cũng như động viên tôi rất nhiều để tôi vượt qua khó khăn và đạt được kết quả trong học tập và công tác.

Thái Nguyên, tháng 10 *năm* 2009

Tác giả

Mai Thị Ngọc Hà

Chương 1

Một số kiến thức cơ bản

1.1 Một số kiến thức cơ bản của giải tích hàm

Các khái niệm, định lý, ví dụ và các kết quả trong mục này được tham khảo ở tài liệu [1] và [2].

1.1.1. Không gian mêtric

Định nghĩa 1.1.1. Không gian mêtric là một cặp (X, ρ), trong đó X là một tập hợp, $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ là một hàm xác định trên $X \times X$ thoả mãn các điều kiện sau:

1) Với $\forall x, y \in X$: $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2) Với $\forall x, y \in X$: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall x, y, z \in X$

Hàm ρ được gọi là một mêtric của không gian X. Mỗi phần tử của Xđược gọi là một điểm của không gian X, số $\rho(x, y)$ được gọi là khoảng cách giữa hai điểm x và y.

Định nghĩa 1.1.2. Ta nói dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ những phần tử của không gian mêtric (X, ρ) hội tụ đến phần tử $x_0 \in X$ nếu:

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0,$$

kí hiệu là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Định nghĩa 1.1.3. Dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ được gọi là dãy côsi hay dãy cơ bản nếu:

$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in N$ sao cho $\forall i, j \geq n_0$ luôn có $\rho(x_i, x_j) < \epsilon$.

Không gian mêtric (X, ρ) được gọi là không gian đầy đủ nếu mọi dãy côsi trong X đều hội tụ đến một phần tử thuộc X.

Định nghĩa 1.1.4. Một tập con M trong không gian mêtric X được gọi là tập compac nếu mọi dãy $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ đều có chứa một dãy con $\left\{x_{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ hội tụ đến một điểm thuộc M.

Trong không gian $C_{[a,b]}$ một tập M là compac nếu thoả mãn định lý sau:

Định lý 1.1.1. ***(*Định lý Arsela - Ascoli**) (xem [3])

Tập $M \subset C_{[a,b]}$ là compac khi và chỉ khi nó giới nội đều và liên tục đồng bậc.

1.1.2. Không gian Banach

Định nghĩa 1.1.5. Giả sử K là trường số thực $\mathbb{R}$. Tập hợp X khác rỗng cùng với hai ánh xạ (gọi là phép cộng và phép nhân vô hướng):

Phép cộng, kí hiệu: +

$$X \times X \to X$$
$$(x, y) \mapsto x + y$$

Phép nhân vô hướng, kí hiệu: .

$$\mathbb{R} \times X \to X$$
$$(\alpha, x) \mapsto \alpha.x$$

gọi là không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$ (hoặc không gian véc tơ thực) nếu hai phép toán cộng và nhân vô hướng thoả mãn các tính chất sau:

1) $\forall x, y \in X, x + y = y + x;$

2) $\forall x, y, z \in X, x + (y + z) = (x + y) + z;$

3) Với phần tử $0 \in X$ ta có: $\forall x \in X, x + 0 = 0 + x;$

4) Với mỗi $x \in X$, tồn tại phần tử $-x \in X : x + (-x) = 0;$

5) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in X : \alpha.(\beta.x) = (\alpha.\beta).x;$

6) $\forall x \in X : 1.x = x;$

7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, x \in X$ ta có: $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x;$

8) $\forall \beta \in \mathbb{R}, x, y \in X : \beta.(x + y) = \beta.x + \beta.y.$

Định nghĩa 1.1.6. Giả sử X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Hàm số: $\|.\|$: $X \to R$ được gọi là một chuẩn trên X nếu nó thoả mãn các điều kiện sau:

1) $\|x\| \geq 0, \forall x \in X; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|;$

3) $\forall \beta \in \mathbb{R}; \forall x \in X : \|\beta.x\| = |\beta|.\|x\|.$

Một không gian định chuẩn là một không gian tuyến tính X cùng với một chuẩn trên nó.

Nhận xét 1.1.1. Nếu đặt: $\rho(x, y) = \|x - y\|$ thì (X, ρ) trở thành không gian mêtric.

Định nghĩa 1.1.7. Không gian Bannach là không gian định chuẩn đầy đủ.

1.1.3. Không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1.8. Cho X là một không gian tuyến tính trên $\mathbb{R}$. Một tích vô hướng trong X là một ánh xạ $\langle ., . \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện sau:

1) $\langle x, x \rangle > 0,\ \forall x \neq 0;\ \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle,\ \forall x, y \in X;$

3) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle,\ \forall x, y \in X,\ \forall \alpha \in \mathbb{R};$

4) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle,\ \forall x, y, z \in X.$

Không gian tuyến tính X cùng với tích vô hướng $\langle ., . \rangle$ được gọi là không gian tiền Hilbert.

Nhận xét 1.1.2. Với hàm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ thì X trở thành không gian định chuẩn.

Định nghĩa 1.1.9. Không gian tiền Hilbert đầy đủ được gọi là không gian Hilbert.

Ví dụ 1.1.1. 1) Không gian các hàm $L_p[a, b]$ trong đó mỗi phần tử là các hàm đo được x(s) có $x^p(s)$ khả tích với chuẩn được xác định như sau:

$$\|x\|_{L_p} = \left\{\int_a^b |x(s)|^p ds\right\}^{1/p} < +\infty \tag{1.1}$$

là không gian Bannach, với p =2 ta có không gian Hilbert.
Đặc biệt, không gian Sobolev W_2^1 gồm những hàm $f \in L_2[a, b]$ sao cho $f' \in L_2[a, b]$, với chuẩn

$$\|f\|^2_{W_2^1} = \|f\|^2_{L_2} + \|f'\|^2_{L_2} < \infty$$

là không gian Hilbert.

2) Không gian các hàm x(s) liên tục trên đoạn [a, b] và

$$\|x\|_{C_{[a,b]}} = \max_{s\in[a,b]} |x(s)| \tag{1.2}$$

là không gian Bannach.

1.1.4. Sự hội tụ trong các không gian

Định nghĩa 1.1.10. Cho X là không gian định chuẩn. Dãy $\{x_n\} \subset X$ được gọi là hội tụ mạnh đến một phần tử $x_0 \in X$ khi $n \to \infty$, nếu $\|x_n - x_0\| \to 0$ khi $n \to \infty$. Hội tụ theo chuẩn được gọi là hội tụ mạnh.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ hoặc $x_n \to x_0$.

Định nghĩa 1.1.11. Cho X là không gian định chuẩn, X^* là không gian liên hợp của nó. Ta nói dãy $\{x_n\} \subset X$ hội tụ yếu đến $x_0 \in X$, nếu $\forall f \in X^*$ có $f(x_n) \to f(x_0)$, khi $n \to \infty$. Kí hiệu: $x_n \rightharpoonup x_0$.

Từ hội tụ mạnh suy ra hội tụ yếu, ngược lại từ hội tụ yếu suy ra hội tụ mạnh chỉ khi X là không gian định chuẩn hữu hạn chiều hoặc $\{x_n\} \subset M$ với M là một tập compac trong X.

1.1.5. Toán tử trong các không gian

Định nghĩa 1.1.12. Cho X và Y là hai không gian tuyến tính bất kì. Toán tử $A : X \to Y$ gọi là tuyến tính nếu:

1) $A(x + y) = Ax + Ay$ với $\forall x, y \in X$;

2) $A(\alpha x) = \alpha Ax$ với $\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Nếu $f : X \to \mathbb{R}$ là một toán tử tuyến tính thì ta nói f là một phiếm hàm tuyến tính.

Định nghĩa 1.1.13. Giả sử X và Y là hai không gian định chuẩn, một toán tử tuyến tính $A : X \to Y$ gọi là liên tục nếu từ $x_n \to x_0$ luôn luôn kéo theo $Ax_n \to Ax_0$.

Định nghĩa 1.1.14. Toán tử tuyến tính A gọi là bị chặn (giới nội) nếu có một hằng số $K > 0$ để cho

$$(\forall x \in X), \|Ax\| \leq K\|x\|$$

Một toán tử tuyến tính A bị chặn thì liên tục và ngược lại.

Định nghĩa 1.1.15. Toán tử tuyến tính $A : X \to Y$ với X và Y là các không gian định chuẩn, được gọi là toán tử hoàn toàn liên tục (toán tử compact), nếu nó biến mỗi tập đóng bị chặn thành tập compact nghĩa là nếu $\|x_n\| \leq K(n = 1, 2, ...)$ kéo theo sự tồn tại một dãy $\{Ax_{n_k}\}$ hội tụ.

Kí hiệu $K(X, Y)$ là tập tất cả các toán tử hoàn toàn liên tục từ X vào Y. Dễ nhận thấy $K(X, Y) \subset B(X, Y)$, ở đây $B(X, Y)$ là tập tất cả các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y.

Trong không gian vô hạn chiều, nếu A là một toán tử hoàn toàn liên tục thì A^{-1} không liên tục.

Bổ đề 1.1.1. (Bổ đề Tikhonov) (xem [1] và các tài liệu dẫn)

Cho X và Y là các không gian Bannach. Cho toán tử $A : X \to Y$ *đưa tập* $X_0 \subseteq X$ *lên* $Y_0 = A(X_0)$. *Nếu A là một song ánh, liên tục và* X_0 *là một tập compact của* X, *thì* A^{-1} *cũng là một ánh xạ liên tục từ* Y_0 *lên* X_0.

Định nghĩa 1.1.16. Bài toán tìm cực tiểu phiếm hàm $f(x)$ trên không gian Bannach X như sau: Tìm phần tử $x_0 \in X$ sao cho

$$f(x_0) = \inf_{x \in X} f(x). \tag{1.3}$$

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là dãy cực tiểu hoá cho bài toán cực tiểu trên (của phiếm hàm f), nếu

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Điều này tương đương với:

$\forall \epsilon > 0, \exists N(\epsilon) : \forall n > N(\epsilon), f(x_0) - \epsilon \leq f(x_n) \leq f(x_0) + \epsilon.$

1.1.6. Giải hệ phương trình đại số tuyến tính

Để tìm nghiệm một hệ phương trình đại số tuyến tính, tồn tại nhiều phương pháp số khác nhau.Tuỳ đặc điểm của từng ma trận hệ số, ta có thể chọn phương pháp nào cho có lợi hơn cả. Khi tìm nghiệm hiệu chỉnh đã được rời rạc hoá của bài toán không chỉnh, ta thường sử dụng tính đối xứng và tính không âm của ma trận hệ số. Trong mục này, chúng tôi giới thiệu phương pháp căn bậc 2, các phương pháp khác có thể xem trong [2].

• Phương pháp căn bậc 2

Cho hệ phương trình đại số $Ax = b$ với A là một ma trận vuông cấp n đối xứng và xác định dương. Các thành phần của A được kí hiệu là a_{ij} và $b = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$ là chuyển vị của véctơ hàng. Ta có thể biểu diễn ma trận $A = U^*U$ với

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

và U^* là ma trận chuyển vị của U. Các thành phần u_{ij} được xác định lần lượt theo công thức sau

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}}, u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}},\ j = 2, 3, ...n;$$
$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2},\ i = 2, 3, ..., n;$$
$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}}(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}u_{kj}),\ i < j;\ u_{ij} = 0,\ i > j.$$

Do đó hệ phương trình $Ax = b$ được chia làm hai hệ phương trình $U^*y = b$ và $Ux = y$. Lần lượt giải hai hệ phương trình đại số với ma trận tam giác ta có nghiệm x.

1.2 Khái niệm về bài toán đặt chỉnh và bài toán đặt không chỉnh

Khái niệm về bài toán đặt chỉnh được J. Hadamard đưa ra khi nghiên cứu về ảnh hưởng của các điều kiện biên lên nghiệm của các phương trình elliptic cũng như parabolic (xem [6]).

Định nghĩa 1.2.1. Giả sử X và Y là hai không gian metric với các độ đo tương ứng là $\rho_X(x_1, x_2)$; $\rho_Y(f_1, f_2)$ và A là toán tử từ X vào Y. Xét phương trình:

$$Ax = f, f \in Y, \tag{1.4}$$

Bài toán tìm nghiệm $x \in X$ theo dữ kiện $f \in Y$ được gọi là bài toán đặt chỉnh trên cặp không gian mêtric (X, Y) nếu:

1) $\forall f \in Y, \exists x_f \in X : A(x_f) = f$;

2) x_f được xác định một cách duy nhất;

3) x_f phụ thuộc liên tục vào f.

Định nghĩa 1.2.2. Nếu một trong ba điều kiện trên không thoả mãn thì bài toán đã cho gọi là bài toán đặt không chỉnh.

Chú ý 1.1.1.

i) Đối với các bài toán phi tuyến thì điều kiện thứ hai hầu như không thoả mãn. Do vậy hầu hết các bài toán phi tuyến đều là bài toán đặt không chỉnh.

ii) Bài toán tìm nghiệm x phụ thuộc vào dữ kiện f, nghĩa là $x = R(f)$, được gọi là ổn định trên cặp không gian (X, Y) nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một số $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho từ $\rho_Y(f_1, f_2) \leq \delta(\varepsilon)$ cho ta $\rho_X(x_1, x_2) \leq \varepsilon$, ở đây

$$x_i = R(f_i), \quad x_i \in X,\ f_i \in Y, \quad i = 1, 2.$$

iii) Một bài toán có thể đặt chỉnh trên cặp không gian này nhưng lại đặt không chỉnh trên cặp không gian khác.

Trong nhiều ứng dụng thì vế phải của (1.4) thường được cho bởi đo đạc, nghĩa là thay cho giá trị chính xác f, ta chỉ biết xấp xỉ f_δ của nó thoả mãn $\|f_\delta - f\| \leq \delta$. Giả sử x_δ là nghiệm của (1.4) với f thay bởi f_δ (giả thiết rằng nghiệm tồn tại). Khi $\delta \to 0$ thì $f_\delta \to f$ nhưng với bài toán đặt không chỉnh thì x_δ nói chung không hội tụ đến x.

Ví dụ 1.2.1. Bài toán tìm nghiệm của phương trình tích phân Fredholm loại I là bài toán đặt không chỉnh.

Xét phương trình Fredholm loại I:

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = f_0(t),\ t \in [a,b], \tag{1.5}$$
$$-\infty < a < b < +\infty$$

ở đây nghiệm là một hàm $x_0(s)$, vế phải $f_0(t)$ là một hàm số cho trước và nhân (hạch) $K(t,s)$ của tích phân cùng với $\partial K/\partial t$ được giả thiết là các hàm liên tục cho trước. Ta xét hai trường hợp sau:

• *Trường hợp 1*

$$\begin{aligned} A:\quad & C[a,b] \to L^2[a,b] \\ & x(s) \mapsto f_0(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds. \end{aligned}$$

Sự thay đổi vế phải được đo bằng độ lệch trong không gian $L_2[a,b]$, tức là khoảng cách giữa hai hàm $f_1(t)$ và $f_2(t)$ trong $L_2[a,b]$ được xác định bởi

$$\rho_{L_2[a,b]}(f_1,f_2) = \left\{\int_a^b |f_1(t)-f_2(t)|^2 dt\right\}^{1/2}.$$

Giả sử phương trình (1.5) có nghiệm $x_0(s)$. Khi đó với vế phải

$$f_1(t) = f_0(t) + N\int_a^b K(t,s)sin(\omega.s)ds$$

Phương trình (1.5) có nghiệm $x_1(s) = x_0(s) + Nsin(\omega.s)$. Với N bất kì, ω đủ lớn thì khoảng cách giữa hai hàm f_0, f_1 trong $L_2[a,b]$ là:

$$\rho_{L_2[a,b]}(f_0,f_1) = |N|\left[\int_a^b\left(\int_a^b K(t,s)sin(\omega.s)ds\right)^2 dt\right]^{1/2}$$

có thể làm nhỏ tuỳ ý. Thật vậy, đặt:

$$K_{max} = \max_{s\in[a,b]\ t\in[a,b]} |K(t,s)|$$

Ta tính được

$$\rho_{L_2[a,b]}(f_0,f_1) \le |N|\left[\int_a^b\left(K_{max}.\frac{1}{\omega}.cos(\omega.s)\ |_a^b\right)^2 dt\right]^{1/2} \le \frac{|N|.K_{max}.c_0}{\omega}.$$

ở đây c_0 là một hằng số dương. Ta chọn N và ω lớn tuỳ ý nhưng $\dfrac{N}{\omega}$ lại nhỏ. Khi đó:

$$\rho_{C[a,b]}(x_0, x_1) = \max_{s\in[a,b]} |x_0(s) - x_1(s)| = |N|$$

có thể lớn bất kì.

• *Trường hợp 2*

$$\begin{aligned} A: \quad & L^2[a,b] \to L^2[a,b] \\ & x(s) \mapsto f_0(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)ds, \end{aligned}$$

Khoảng cách giữa hai nghiệm x_0, x_1 trong $L_2[a,b]$ cũng có thể lớn bất kì. Thật vậy,

$$\rho_{L_2[a,b]}(x_0, x_1) = \left[\int_a^b |x_0(s) - x_1(s)|^2 ds\right]^{1/2} = |N|\left[\int_a^b \sin^2(\omega.s)ds\right]^{1/2}$$
$$= |N|\sqrt{\frac{b-a}{2} - \frac{1}{2\omega} sin(\omega(b-a)).cos(\omega(b+a))}.$$

Dễ dàng nhận thấy hai số N và ω có thể chọn sao cho $\rho_{L_2[a,b]}(f_0, f_1)$ rất nhỏ nhưng vẫn cho kết quả $\rho_{L_2[a,b]}(x_0, x_1)$ rất lớn. Như vậy sự thay đổi nhỏ của dữ kiện ban đầu dẫn đến sự thay đổi lớn về nghiệm. Do đó bài toán tìm nghiệm của phương trình tích phân Fredholm loại I là bài toán đặt không chỉnh.

1.3 Khái niệm về thuật toán hiệu chỉnh

Xét bài toán

$$Ax = f_0, \tag{1.6}$$

trong đó A là một toán tử từ không gian metric X vào không gian mêtric Y và $f_0 \in Y$. Để tìm nghiệm xấp xỉ của (1.6) trong trường hợp tổng quát A.N. Tikhonov đã đưa ra một khái niệm mới. Đó là phương pháp hiệu chỉnh

www.VNMATH.com

dựa trên việc xây dựng toán tử hiệu chỉnh và cách chọn một giá trị của một tham số mới đưa vào (xem $[4] - [5]$).

Giả sử A^{-1} không liên tục và thay cho f_0 ta biết $f_\delta : |f_\delta - f_0| \leq \delta \to 0$. Bài toán đặt ra là dựa vào thông tin về (A, f_δ) và mức sai số δ, tìm một phần tử xấp xỉ nghiệm chính xác x_0. Rõ ràng là không thể xác định phần tử xấp xỉ x_δ theo quy tắc $x_\delta = A^{-1}.f_\delta$, vì thứ nhất là A^{-1} có thể không xác định với $f \in Y$, thứ hai là A^{-1} không liên tục nên $A^{-1}f_\delta$ nếu tồn tại, cũng chưa chắc đã xấp xỉ $A^{-1}f$.

Tham số δ chỉ cho ta mức độ sai số vế phải của (1.6). Vì vậy vấn đề đặt ra là có thể xây dựng phần tử xấp xỉ phụ thuộc vào một tham số nào đó và tham số này được chọn tương thích với δ sao cho khi $\delta \to 0$ thì phần tử xấp xỉ này hội tụ tới nghiệm chính xác x_0.

Như vậy, tồn tại một toán tử tác động từ không gian Y vào không gian X theo quy tắc với mỗi $f_\delta \in Y$ ta có phần tử xấp xỉ thuộc X.

Định nghĩa 1.3.1. Toán tử $R(f, \alpha)$, phụ thuộc tham số α, tác động từ Y vào X được gọi là một toán tử hiệu chỉnh cho phương trình (1.6) nếu:

1) Tồn tại hai số dương δ_1 và α_1 sao cho toán tử $R(f, \alpha)$ xác định với mọi $\alpha \in (0, \alpha_1)$ và với mọi $f \in Y : \rho_Y(f, f_0) \leq \delta, \delta \in (0, \delta_1)$;

2) Tồn tại một sự phụ thuộc $\alpha = \alpha(f, \delta)$ sao cho $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) \leq \delta_1 :$ $\forall f \in Y, \rho_Y(f, f_0) \leq \delta \leq \delta_1 \Longrightarrow \rho_Y(x_\alpha, x_0) \leq \epsilon$, ở đây $x_\alpha \in R(f, \alpha(f, \delta))$.

Chú ý 1.1.2.

i) Trong định nghĩa này không đòi hỏi tính đơn trị của toán tử $R(f, \alpha)$.

ii) Phần tử $x_\alpha \in R(f_\delta, \alpha)$ được gọi là nghiệm hiệu chỉnh của phương trình (1.6), ở đây $\alpha = \alpha(f_\delta, \delta) = \alpha(\delta)$ được gọi là tham số hiệu chỉnh.

Dễ dàng nhận thấy từ định nghĩa trên nghiệm hiệu chỉnh ổn định với dữ kiện ban đầu.

Định nghĩa 1.3.2. Như vậy việc tìm nghiệm xấp xỉ phụ thuộc liên tục vào vế phải của (1.6) gồm hai bước:

1) Tìm toán tử hiệu chỉnh $R(f, \alpha)$.

2) Xác định giá trị của tham số hiệu chỉnh α dựa vào thông tin của bài toán về phần tử f_δ và sai số δ.

Phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ theo quy tắc trên gọi là phương pháp hiệu chỉnh.

Ví dụ 1.3.1. Phương pháp này đã được sử dụng từ thời Newton cho bài toán cổ điển: Tính giá trị $z = \dfrac{df(t)}{dt}$ (trong metric C), khi f(t) chỉ biết gần đúng. Đạo hàm z tính được dựa vào tỷ sai phân:

$$R(f, \alpha) = \frac{f(t+\alpha) - f(t)}{\alpha}$$

Nếu thay cho $f(t)$ ta biết xấp xỉ của nó là $f_\delta(t) = f(t) + g(t)$, ở đây $|g(t)| \leq \delta$ với mọi t, khi đó,

$$R(f_\delta, \alpha) = \frac{f(t+\alpha) - f(t)}{\alpha} + \frac{g(t+\alpha) - g(t)}{\alpha}$$

Cho $\alpha \to 0$, ta nhận được

$$\frac{f(t+\alpha) - f(t)}{\alpha} \to z.$$

Số hạng thứ 2 được đánh giá bởi

$$|\frac{g(t+\alpha) - g(t)}{\alpha}| \leq \frac{2\delta}{\alpha}.$$

Nếu chọn $\alpha = \dfrac{\delta}{\eta(\delta)}$, với $\eta(\delta) \to 0$, khi $\delta \to 0$, thì $2\dfrac{\delta}{\alpha} = 2\eta(\delta) \to 0$. Vì vậy với,

$$\alpha = \alpha_1(\delta) = \frac{\delta}{\eta(\delta)}, R(f_\delta, \alpha_1(\delta)) \to z.$$

1.4 Sự tồn tại toán tử hiệu chỉnh

Giả sử (1.6) có một nghiệm duy nhất x_0, khi vế phải f_0 cho chính xác. Nếu vế phải f_δ chỉ biết xấp xỉ $\rho_Y(f_\delta, f_0) \leq \delta \to 0$ thì việc tìm phần tử x_δ xấp xỉ nghiệm x_0 được giới hạn trong tập

$$Q_\delta = \left\{ z \in X, \rho_Y(Az, f_\delta) \leq \delta \right\} \qquad (1.7).$$

do $x_0 \in Q_\delta$. Để tìm được phần tử x_δ với mỗi δ sao cho thoả mãn: $x_\delta \to x_0$ khi $\delta \to 0$, người ta đưa ra một nguyên lý dựa trên quy tắc cực tiểu phiếm hàm đặc biệt, được gọi là phiếm hàm ổn định (xem [1]).

Định nghĩa 1.4.1. Phiếm hàm $\Omega(x) \geq 0$ xác định trên $X_1 \subseteq X$; $\overline{X_1} = X$, được gọi là phiếm hàm ổn định nếu:

1) $x_0 \in D(\Omega)$, miền xác định của Ω,

2) $\forall d_0 > 0$, $X_1^{d_0} = \left\{ z \in X_1 : \Omega(z) \leq d_0 \right\}$ là một tập compact.

Khi đã có một phiếm hàm như vậy ta có thể tiến hành việc tìm nghiệm xấp xỉ z_δ dựa vào việc giải bài toán:

$$\Omega(z_\delta) = \inf_{z \in Q_\delta^1} \Omega(z), Q_\delta^1 = Q_\delta \cap X_1. \qquad (1.8)$$

Phần tử z_δ, nếu nó tồn tại, có thể coi như là kết quả của một sự tác động lên $f_\delta \in Y$ bởi một toán tử $\tilde{R}$ nào đó phụ thuộc tham số δ, có nghĩa là $z_\delta = \tilde{R}(f_\delta, \delta)$. Khi đó $\tilde{R}(f_\delta, \delta)$ là một toán tử hiệu chỉnh cho phương trình (1.6) (xem [1]).

Khi $X \equiv H$ là một không gian Hillbert, B là tập đóng của H, $f(z)$ là một phiếm hàm không âm liên tục trên H.

Xét phiếm hàm phụ thuộc tham số:

$$\tilde{\Omega}(z) = f(z) + \alpha.\Omega(z), \alpha > 0 \qquad (1.9)$$

Khi đó ta có

Định lý 1.4.1. (xem [1]) *Tồn tại phần tử $\tilde{z} \in B \cap X_1$ sao cho*

$$\tilde{\Omega}(\tilde{z}) = \inf_{z \in B \cap X_1} \tilde{\Omega}(z) \tag{1.10}$$

Sự tồn tại phần tử z_δ của bài toán (1.8) được suy ra từ định lý trên khi lấy $f \equiv 0$ và $\alpha = 1$ (xem [1]).

1.5 Xây dựng thuật toán hiệu chỉnh

Định nghĩa 1.5.1. Phiếm hàm

$$M^\alpha[z, f_\delta] = \rho_Y^2(Az, f_\delta) + \alpha.\Omega(z) \tag{1.11}$$

gọi là phiếm hàm làm trơn, trong đó $\rho_Y(Az, f_\delta)$ gọi là độ không khớp của phương trình $Az = f_\delta$ và $\Omega(z)$ là một phiếm hàm ổn định.

Xét bài toán cực tiểu phiếm hàm $M^\alpha[z, f_\delta]$ trong đó tham số α được xác định từ điều kiện:

$$\rho_Y(Az, f_\delta) = \delta. \tag{1.12}$$

Đặt

$$R_1(f_\delta, \alpha) = \left\{ z_\delta : M^\alpha[z_\delta, f_\delta] = \inf_{z \in X_1} M^\alpha[z, f_\delta] \right\}. \tag{1.13}$$

Ta sẽ chứng tỏ $R_1(f_\delta, \alpha)$ là một toán tử hiệu chỉnh cho phương trình $Az = f$.

Định lý 1.5.1. (xem [1]) *Cho A là một toán tử liên tục từ không gian Hillbert H vào không gian mêtric Y, $\Omega(z)$ là một phiếm hàm ổn định xác định trên $X_1 \subseteq H$. Khi đó với $\forall f \in Y$ và $\alpha > 0$ tồn tại phần tử z_α làm cực tiểu phiếm hàm $M^\alpha[z, f]$ có nghĩa là:*

$$M^\alpha[z_\alpha, f_\delta] = \inf_{z \in X_1} M^\alpha[z, f_\delta] \tag{1.14}$$

Như vậy với $\forall f \in Y$ và với $\forall \alpha > 0$ xác định một toán tử $R_1(f, \alpha)$ có ảnh thuộc vào $X \equiv H$ sao cho phần tử $z_\alpha = R_1(f, \alpha)$ làm cực tiểu phiếm hàm $M^\alpha[z, f]$.

Chứng minh: Vì $M^\alpha[z,f]$ không âm nên tồn tại

$$M_1^\alpha := \inf_{z\in X_1} M^\alpha[z,f].$$

Do đó tồn tại dãy$\{z_n^\alpha\} \subset X_1 : M_n^\alpha := M^\alpha[z_n^\alpha, f] \to M_1^\alpha$ khi $n \to +\infty$. Ta có đánh giá

$$\alpha.\Omega(z_n^\alpha) \le \rho_Y^2(Az_n^\alpha, f) + \alpha.\Omega(z_n^\alpha) = M_n^\alpha \le C,\ \forall n$$
$$\Rightarrow \Omega(z_n^\alpha) \le \frac{C}{\alpha} = r$$

Vì vậy dãy $\{z_n^\alpha\}$ thuộc tập X_1^r là tập compact. Do vậy từ dãy đó ta có thể rút ra một dãy con $\{z_{n_k}^\alpha\}$ hội tụ tới phần tử $z_\alpha \in X_1$. Khi đó:

$$M_{n_k}^\alpha := M^\alpha[z_{n_k}^\alpha, f] \longrightarrow M^\alpha[z_\alpha, f] = M_1^\alpha$$

Vậy $z_\alpha \in M^\alpha[z,f]$.

□

Kí hiệu: T_δ là một lớp các hàm không âm, không giảm liên tục trên đoạn $[0,\delta]$.

Định lý 1.5.2. (xem [1]) *Cho A là một toán tử liên tục từ X vào Y với x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $Ax = f$. Khi đó với $\forall\epsilon > 0$ và hai hàm $\beta_1(\delta), \beta_1(\delta)$ cố định từ lớp T_{δ_1} sao cho $\beta_2(0) = 0$ và*

$$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \le \beta_2(\delta) \tag{1.15}$$

tồn tại một số $\delta_0 = \delta_0(\epsilon, \beta_1, \beta_2)$, để với mọi $\tilde{f} \in Y$ và $\delta \le \delta_0 : \rho_Y(\tilde{f}, f_0) \le \delta$ và α thoả mãn:

$$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \le \alpha \le \beta_2(\delta) \tag{1.16}$$

ta có $\rho_X(\tilde{z}_\alpha, x_0) \le \epsilon$, ở đây $\tilde{z}_\alpha \in R_1(\tilde{f}, \alpha)$.

Chứng minh: Vì phiếm hàm $M^\alpha[z,\tilde{f}]$ nhận giá trị cực tiểu khi $z = \tilde{z}_\alpha$ nên

$$M^\alpha[\tilde{z}_\alpha; \tilde{f}] \le M^\alpha[x_0, \tilde{f}].$$

Do đó,

$$\begin{aligned}\alpha.\Omega(\tilde{z}_\alpha) &\le M^\alpha[\tilde{z}_\alpha, \tilde{f}] \le M^\alpha[x_0, \tilde{f}]\\ &= \rho_Y^2(Ax_0, \tilde{f}) + \alpha.\Omega(x_0)\\ &= \rho_Y^2(f_0, \tilde{f}) + \alpha.\Omega(x_0)\\ &\le \delta^2 + \alpha.\Omega(x_0) = \alpha\left\{\frac{\delta^2}{\alpha} + \Omega(x_0)\right\}\end{aligned}$$

Từ giả thiết: $\dfrac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \le \alpha \longrightarrow \dfrac{\delta^2}{\alpha} \le \beta_1(\delta) \le \beta_1(\delta_1)$. Do đó ta có:

$$\frac{\delta^2}{\alpha} + \Omega(x_0) \le \beta_1(\delta_1) + \Omega(x_0) =: d_0(d_0 = const).$$

Vậy $\Omega(\tilde{z}_\alpha) \le d_0$ và $\Omega(x_0) \le d_0$. Suy ra $\tilde{z}_\alpha, x_0$ thuộc vào tập compact $X_1^{d_0}$.

Ta kí hiệu: $Y_{d_0} = AX_1^{d_0}$. Do A là một ánh xạ liên tục từ $X_1^{d_0}$ vào Y_{d_0}, nghiệm của phương trình $Ax = f, f \in Y_{d_0}$ là duy nhất và $X_1^{d_0}$ là một tập compact của X nên theo bổ đề Tikhonov, ánh xạ ngược A^{-1} từ Y_{d_0} lên $X_1^{d_0}$ cũng liên tục.

Điều đó có nghĩa là: $\forall\epsilon > 0$ tìm được số $\gamma(\epsilon) > 0$ sao cho từ:

$$\rho_Y(f_1, f_2) \le \gamma(\epsilon), f_1, f_2 \in Y_{d_0}$$

suy ra có $\rho_X(x_1, x_2) \le \epsilon$, ở đây $f_1 = Ax_1, f_2 = Ax_2$. Hơn nữa đối với $\tilde{f}_\alpha = A\tilde{z}_\alpha$ thì

$$\begin{aligned}\rho_Y^2(\tilde{f}_\alpha, \tilde{f}) &= \rho_Y^2(A\tilde{z}_\alpha, \tilde{f}) \le M^\alpha[\tilde{z}_\alpha, \tilde{f}]\\ &\le M^\alpha[x_0, \tilde{f}] = \rho_Y^2(Ax_0, \tilde{f}) + \alpha.\Omega(x_0) = \rho_Y^2(f_0, \tilde{f}) + \alpha.\Omega(x_0)\\ &\le \delta^2 + \alpha.\Omega(x_0).\end{aligned}$$

Từ $\alpha \le \beta_2(\delta)$ dẫn đến

$$\rho_Y(\tilde{f}_\alpha, \tilde{f}) \le \left\{\delta^2 + \beta_2(\delta).\Omega(x_0)\right\}^{\frac{1}{2}} = \varphi(\delta). \tag{1.17}$$

Dễ thấy $\varphi \in T_{\delta_1}$ và $\varphi(0) = 0$, hơn nữa:

$$\begin{aligned}\rho_Y(\tilde{f}_\alpha, f_0) &\le \rho_Y(\tilde{f}_\alpha, \tilde{f}) + \rho_Y(\tilde{f}, f_0)\\ &\le \varphi(\delta) + \delta = \psi(\delta) \text{ (theo giả thiết và (1.17))}\end{aligned}$$

ở đây $\psi(\delta)$ có tính chất như của $\varphi(\delta)$. Đặt $\delta_0 = \psi^{-1}(\gamma(\epsilon))$ với $\psi^{-1}(y)$ là hàm ngược của hàm $y = \psi(\delta)$ và sử dụng tính liên tục của ánh xạ ngược $A^{-1} : Y^{d_0} \to X_1^{d_0}$ ta nhận được $\rho_Y(\tilde{f}, f_0) \le \delta \le \delta_0$ với mọi α thoả mãn bất đẳng thức trong định lý. Định lý được chứng minh.

□

Phần chứng minh định lý cho ta thấy khi xây dựng thuật toán hiệu chỉnh dựa trên việc cực tiểu phiếm hàm làm trơn $M^\alpha[z, f_\delta]$, tham số hiệu chỉnh $\alpha = \alpha(\delta)$ được xác định không duy nhất. Sự phụ thuộc α vào δ cũng có thể được xác định từ nguyên lý độ lệch, tức tham số α được xác định từ điều kiện:

$$\rho_Y(Az_\alpha, f_\delta) = \delta. \tag{1.18}$$

Việc làm cách nào tìm ra sự phụ thuộc đó hoàn toàn dựa vào các thông tin tiên nghiệm của bài toán.

Trong trường hợp đơn giản khi A là toán tử tuyến tính trong không gian Hillbert H. Tikhonov đã xây dựng phiếm hàm làm trơn dạng:

$$M^\alpha[x, f_0] := \|Ax - f_0\|^2 + \alpha.\|x\| \tag{1.19}$$

Từ đó xác định toán tử hiệu chỉnh $R^\alpha[x, f_0]$ cho bài toán $Ax = f_0$ và đưa ra phương pháp chọn tham số hiệu chỉnh α.

www.VNMATH.com

Chương 2

Hiệu chỉnh cho phương trình tích phân tuyến tính loại I

2.1 Nghiệm hiệu chỉnh của phương trình tích phân tuyến tính loại I

Các kết quả, định lý trong phần này được tham khảo chủ yếu trong tài liệu [1] và các tài liệu dẫn.

2.1.1. Cơ sở lý thuyết

Xét phương trình tích phân Fredholm loại I

$$\begin{gathered} Ax \equiv \int_a^b K(t,s)x(s)ds = f_0(t),\ t \in [c,d], \\ -\infty < a < b < +\infty, -\infty < c < d < +\infty \end{gathered} \tag{2.1}$$

ở đây nghiệm là một hàm $x_0(s)$, vế phải $f_0(t)$ là một hàm số cho trước và nhân (hạch) $K(t,s)$ của tích phân cùng với $\partial K/\partial t$ được giả thiết là các hàm liên tục cho trước.

Sự thay đổi của vế phải được cho bằng độ đo trong không gian $L_2[c;d]$, tức là khoảng cách giữa hai hàm $f_1(t)$ và $f_2(t)$ trong $L_2[c;d]$ được xác định bởi

$$\rho_{L_2[c,d]}(f_1,f_2) = \left\{\int_c^d |f_1(t)-f_2(t)|^2 dt\right\}^{1/2}.$$

Nghiệm $x_0(s)$ được giả thiết thuộc vào lớp các hàm liên tục trên $[a;b]$ với khoảng cách

$$\rho_{C[a,b]}(x_1,x_2) = \max_{s\in[a,b]} |x_1(s)-x_2(s)|.$$

Kí kiệu

$$X^1 = \left\{ x(s) \in C[a,b] : \ \exists x'(s), \ \int_a^b |x'(s)|^2 ds < +\infty \right\}.$$
$$X^n = \left\{ x(s) \in C[a,b] : \exists x^{(k)}(s), \int_a^b |x^{(k)}(s)|^2 ds < +\infty, 1 \leq k \leq n \right\}.$$

Giả sử phương trình (2.1) có nghiệm $x_0(s) \in X^1$ theo nghĩa thông thường và để cho đơn giản ta coi nghiệm này là duy nhất. Đồng thời, thay cho vế phải $f_0(t)$ ta có $f_\delta(t)$ thỏa mãn

$$\int_c^d |f_\delta(t) - f_0(t)|^2 dt \leq \delta^2 < \int_c^d |f_\delta(t)|^2 dt.$$

Khi đó, dựa vào phương trình

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = f_\delta(t)$$

ta chỉ có thể tìm nghiệm xấp xỉ cho cho $x_0(s)$ mà thôi.

Để tìm xấp xỉ cho $x_0(s)$, trước tiên ta xác định tập

$$\tilde{Q}_\delta^1 = \left\{ x(s) \in X^1 : \rho_{L_2[c,d]}(Ax, f_\delta) \leq \delta \right\}.$$

Tiếp theo từ $\tilde{Q}_\delta^1$ chọn một phần tử $\tilde{x}_\delta(s)$ làm cực tiểu phiếm hàm

$$\Omega(x) = \int_a^b \left\{ q(s)x^2(s) + p(s)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \right\} ds,$$

ở đây $p(s)$ và $q(s)$ là hai hàm liên tục, không âm và $p(s) \geq p_0 > 0$. Ta có kết quả sau.

Định lý 2.1.1. (xem [1]) *Với mỗi $\delta > 0$ và $f_\delta(t) \in L_2[c;d]$ thoả mãn $\rho_{L_2[c;d]}(f_\delta, f_0) \leq \delta$, tồn tại $\tilde{x}_\delta \in \tilde{Q}_\delta^1$ sao cho*

$$\Omega(\tilde{x}_\delta) = \inf_{x \in \tilde{Q}_\delta^1} \Omega(x).$$

Để chứng minh định lý này, ta xét bổ đề sau.

Bổ đề 2.1.1. *Với mỗi $d_0 > 0$, tập $\Phi = \{x \in X^1 : \Omega(x) \leq d_0\}$ là một tập compact của $C[a;b]$.*

Chứng minh: Từ $\Omega(x) \leq d$ suy ra

$$\int_a^b q(s)x^2(s)ds \leq d_0, \tag{2.2}$$

$$\int_a^b p(s)(x')^2(s)ds \leq d_0. \tag{2.3}$$

Bất đẳng thức (2.2) cho ta

$$\forall x \in \Phi\ \exists s_0 \in [a,b] :\ \sqrt{q(s_0)}|x(s_0)| \leq \sqrt{\frac{d_0}{b-a}}.$$

Nếu không như vậy, thì

$$\sqrt{q(s)}|x(s)| > \sqrt{\frac{d_0}{b-a}},\ \forall s \in [a,b].$$

Khi đó,

$$\int_a^b q(s)x^2(s)ds > \int_a^b \frac{d_0}{b-a}ds = d_0.$$

Điều này trái với bất đẳng thức (2.2). Mặt khác,

$$\forall s_1, s_2 \in [a,b], (s_2 > s_1),\ x \in \Phi,$$

$$|x(s_2) - x(s_1)|^2 = \left| \int_{s_1}^{s_2} x'(s)ds \right|^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Byniakovskii ta được

$$\begin{aligned} |x(s_2) - x(s_1)|^2 &\leq |s_2 - s_1| \left| \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds \right| \\ &\leq |s_2 - s_1| \frac{1}{p_0} \int_{s_1}^{s_2} p(s) \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds \\ &\leq |s_2 - s_1| \frac{1}{p_0} \int_a^b p(s) \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 ds \\ &\leq |s_2 - s_1| \frac{d_0}{p_0}. \end{aligned}$$

Có nghĩa là

$$|x(s_2) - x(s_1)| \le \sqrt{|s_2 - s_1|}\sqrt{\frac{d_0}{p_0}}.$$

Điều đó nói lên rằng Φ là họ các hàm liên tục đồng bậc.

Bây giờ, nếu lấy $s_1 = s_0$, thì với mọi $s_2 \in [a, b]$ ta có

$$|x(s_2) - x(s_0)| \le \sqrt{|s_2 - s_0|}\sqrt{\frac{d_0}{p_0}}.$$

Rõ ràng

$$\begin{aligned} |x(s_2)| &\le |x(s_2) - x(s_0)| + |x(s_0)| \\ &\le \sqrt{|s_2 - s_0|}\sqrt{\frac{d_0}{p_0}} + \sqrt{\frac{d_0}{b-a}}/q^{1/2}(s_0). \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ Φ là tập các hàm giới nội đều. Theo định lý Arsela - Ascoli tồn tại $\{x_n(s)\} \subset \Phi$ hội tụ đều trên $[a, b]$ đến một hàm $\tilde{x}$ và $\tilde{x}$ cũng liên tục trên $[a, b]$. Tức là Φ là một tập compact của $C[a, b]$.

Bây giờ trở lại Định lý 2.1.1. Trước hết ta chứng minh định lý trên ở dạng đơn giản. Xét tập

$$\begin{aligned} Q_M^2 &= \left\{ x \in X^2 : \int_a^b (x'')^2 ds \le M \right\}, \\ \tilde{Q}_\delta^{2M} &= \tilde{Q}_\delta^1 \cap Q_M^2. \end{aligned}$$

Ta chứng minh rằng

$$\begin{aligned} &\forall f_\delta \in L_2[c, d] : \rho_{L_2[c,d]}(f_\delta, f_0) \le \delta, \\ &\qquad \exists x_\delta(s) : \Omega(x_\delta) = \inf_{x \in \tilde{Q}_\delta^{2M}} \Omega(x) \end{aligned}$$

và $x_\delta(s)$ có đạo hàm liên tục trên $[a, b]$.

Thật vậy, do $\Omega(x)$ không âm, cho nên tồn tại

$$\Omega_0 = \inf_{x \in \tilde{Q}_\delta^{2M}} \Omega(x)$$

và dãy cực tiểu hoá $\{x_n(s)\},\ x_n(s) \in \tilde{Q}_\delta^{2M}$, sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \Omega(x_n) = \Omega_0.$$

Ta có thể giả thiết

$$\Omega(x_n) \leq \Omega(x_{n-1}) \leq ... \leq \Omega(x_1) := M_1.$$

Như vậy, $\Omega(x_n) \leq M_1, \forall n$. Theo Bổ đề 2.1.1 ta có dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ đều trên $[a, b]$ đến một hàm $\tilde{x}_\delta(s)$ nào đó, khi $k \to \infty$ và

$$\lim_{k\to\infty} \Omega(x_{n_k}) = \Omega_0.$$

Mặt khác,

$$\int_a^b p(s)((x'_{n_k})(s))^2 ds \leq M_1,$$

$$\int_a^b (x''_{n_k})^2 ds \leq M.$$

Đặt $d = \max(M, M_1)$. Theo Bổ đề 2.1.1 tồn tại một dãy con $\{x'_m(s)\}$ của $\{x'_{n_k}\}$ hội tụ đều trên $[a, b]$ đến $x_\delta(s)$ nào đó. Do $\{x_{n_k}\}$ hội tụ đến $\tilde{x}_\delta(s)$, cho nên $x_\delta(s) = \tilde{x}'_\delta(s)$. Dễ dàng nhận thấy $\tilde{x}_\delta(s) \in \tilde{Q}_\delta^1$ và

$$\lim_{m\to\infty} \Omega(x_m) = \Omega(\tilde{x}_\delta) = \Omega_0.$$

Điều đó có được nhờ qua giới hạn dưới dấu tích phân do $\{x_m\}$ và $\{x'_m\}$ hội tụ đều.

Bây giờ ta chứng minh Định lý 2.1.1. Xét tích vô hướng $\langle x_1, x_2 \rangle_1$ trên X^1 được xác định như sau

$$\langle x_1, x_2 \rangle_1 = \int_a^b \Big\{ q(s)x_1(s)x_2(s) + p(s)x'_1(s)x'_2(s) \Big\} ds$$

với chuẩn $\|x\|_1 = \sqrt{\langle x, x \rangle_1}$ và khoảng cách $\rho_1(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|_1$. Đây chính là chuẩn của không gian W_2^1.

Do $\Omega(x) \geq 0$ tồn tại

$$\Omega_0 = \inf_{x \in \tilde{Q}_\delta^1} \Omega(x)$$

và dãy cực tiểu hoá $\{\tilde{x}_n(s)\},\ \tilde{x}_n(s) \in \tilde{Q}_\delta^1$, sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \Omega(\tilde{x}_n) = \Omega_0.$$

Đặt $\Omega_n = \Omega(\tilde{x}_n)$. Khi đó, ta có thể giả thiết là $\Omega_n \leq \Omega_{n-1},\ \forall n$. Theo Bổ đề 2.1.1, tồn tại dãy con $\{\tilde{x}_{n_k}\}$ hội tụ đều trên $[a, b]$ đến một hàm $\tilde{x}$ nào đó, với mỗi δ cố định. Ta chứng minh rằng $\tilde{x}_{n_k}$ hội tụ đến $\tilde{x}$ theo chuẩn $\|.\|_1$. Giả sử ngược lại, tức là $\|\tilde{x}_{n_k} - \tilde{x}\|_1$ không dần tới 0, khi $k \to \infty$. Như vậy, tồn tại một số ε_0 nào đó và dãy số nguyên $\{m\}, \{p_m\}$ sao cho $\|\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+p_m}\|_1 \geq \varepsilon_0$.

Đặt $\beta_m = \tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+p_m}$. Xét dãy $\xi_m = 0,5(\tilde{x}_m + \tilde{x}_{m+p_m})$. Rõ ràng $\xi_m = \tilde{x}_m - 0,5\beta_m = \tilde{x}_{m+p_m} + 0,5\beta_m$ và

$$\Omega(\xi_m) = \|\tilde{x}_m\|_1^2 - \big\langle \tilde{x}_m, \beta_m \big\rangle_1 + 0,25\|\beta_m\|_1^2 \geq \Omega_0.$$

Do $\|\tilde{x}_m\|_1^2 = \Omega(\tilde{x}_m)$ và $\Omega(\tilde{x}_m) \to \Omega_0$ khi $m \to \infty$, cho nên

$$-\big\langle \tilde{x}_m, \beta_m \big\rangle_1 + 0,25\|\beta_m\|_1^2 \geq -\Delta'_m, \tag{2.4}$$

ở đây $\Delta'_m = \Omega(\tilde{x}_m) - \Omega_0$ và $\Delta'_m \to 0$, khi $m \to \infty$.

Tương tự, sử dụng $\xi_m = \tilde{x}_{m+p_m} + 0,5\beta_m$ ta có

$$\Omega(\xi_m) = \|\tilde{x}_{m+p_m}\|_1^2 - \big\langle \tilde{x}_{m+p_m}, \beta_m \big\rangle_1 + 0,25\|\beta_m\|_1^2 \geq \Omega_0.$$

Suy ra

$$\big\langle \tilde{x}_{m+p_m}, \beta_m \big\rangle_1 + 0,25\|\beta_m\|_1^2 \geq -\Delta''_m, \tag{2.5}$$

ở đây $\Delta''_m = \Omega(\tilde{x}_{m+p_m}) - \Omega_0$ và $\Delta''_m \to 0$, khi $m \to \infty$. Cộng hai bất đẳng thức (2.4) và (2.5) ta được

$$-\big\langle \tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+p_m}, \beta_m \big\rangle_1 + 0,5\|\beta_m\|_1^2 \geq -(\Delta'_m + \Delta''_m)$$

hay

$$-0,5\|\beta_m\|_1^2 \geq -(\Delta'_m + \Delta''_m).$$

Suy ra $\|\beta_m\|_1^2 = \|\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+p_m}\|_1^2 \leq 2(\Delta'_m + \Delta''_m) \to 0$, khi $m \to \infty$. Như vậy phải tồn tại $m(\varepsilon_0):\ m > m(\varepsilon_0)$, $\|\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+p_m}\|_1 < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$. Điều này mâu thuẫn với $\|\tilde{x}_m - \tilde{x}_{m+p_m}\|_1 \geq \varepsilon_0$. Như vậy, $\{\tilde{x}_m\}$ là một dãy Cauchy trong không gian đầy đủ W_2^1. Do đó $\tilde{x}_{n_k}$ hội tụ trong $\|.\|_1$ đến một hàm $\tilde{x}$ nào đó. Tức là dãy $\{\tilde{x}_{n_k}\}$ hội tụ đều trên $[a,b]$ đến $\tilde{x}(s) := \tilde{x}_\delta \in \tilde{Q}_\delta^1$. Định lý được minh.

□

Định lý 2.1.2. (xem [1]) *Dãy $\{\tilde{x}_\delta\}$ hội tụ đến $x_0(s)$, khi $\delta \to 0$.*

Chứng minh: Lấy một dãy số δ_n bất kì dần tới 0, khi $n \to \infty$. Tương ứng, ta có dãy $\{\tilde{x}_{\delta_n}\} : \rho_{L_2[c,d]}(A\tilde{x}_{\delta_n}, f_{\delta_n}) \leq \delta_n$. Với mỗi n cố định ta có tập $\tilde{Q}_{\delta_n}^1$ và

$$\Omega(\tilde{x}_{\delta_n}) = \inf_{x \in \tilde{Q}_{\delta_n}^1} \Omega(x),\ \tilde{x}_{\delta_n} \in W_2^1.$$

Suy ra $\Omega(\tilde{x}_{\delta_n}) \leq \Omega(x^0) := d$. Theo Bổ đề 2.1.1, tồn tại một dãy con $\{\tilde{x}_{\delta_{nk}}\}$ hội tụ đều đến $\tilde{x}$. Do $\tilde{x}_{\delta_n} \in \tilde{Q}_{\delta_n}^1$, cho nên

$$\rho_{L_2[c,d]}(A\tilde{x}_{\delta_{nk}}, f_{\delta_{n_k}}) \leq \delta_{n_k}.$$

Vì $\tilde{x}_{\delta_{nk}}$ hội tụ đều trên $[a,b]$ đến $\tilde{x}(s)$, ta có $\rho_{L_2[c,d]}(A\tilde{x}, f_0) = 0$. Phương trình tích phân (2.1), theo giả thiết chỉ có một nghiệm $x_0(s)$, cho nên $\tilde{x}(s) = x_0(s)$. Cũng lý do đó, $\tilde{x}_\delta$ hội tụ đều đến $x_0(s)$, khi $\delta \to 0$. Định lý được chứng minh.

□

Chú ý 2.1.1. Ta có thể xây dựng phiếm hàm

$$\Omega(x) = \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^n q_k(s) \left(\frac{d^k x}{ds^k} \right)^2 \right\} ds,$$

www.VNMATH.com

ở đây $q_k(s),\ k = 0, ..., n$ liên tục, không âm và $q_n(s) \geq c > 0$.

Nếu thay cho $\tilde{Q}_\delta^1$ lấy

$$\tilde{Q}_\delta^n = \{x \in X^n : \rho_{L_2[c,d]}(Ax, f_\delta) \leq \delta\}$$

ta được nghiệm xấp xỉ $\tilde{x}_\delta(s)$ có độ trơn bậc n (đạo hàm cấp n).

Bổ đề 2.1.2.

$$\rho_{L_2[c,d]}(A\tilde{x}_\delta, f_\delta) = \delta. \tag{2.6}$$

Chứng minh: Giả sử

$$\rho_{L_2[c,d]}(A\tilde{x}_\delta, f_\delta) = \beta < \delta.$$

Theo giả thiết

$$\delta^2 < \int_c^d (f_\delta(t))^2 dt$$

và $\Omega(0) = 0$, cho nên $\tilde{x}_\delta \not\equiv 0$. Do toán tử tích phân (2.1) liên tục trên X^1, tồn tại một lân cận $\mathcal{U}(\tilde{x}_\delta)$ của $\tilde{x}_\delta$ sao cho

$$\rho_{L_2[c,d]}(Ax(s), A\tilde{x}_\delta) < \frac{\delta - \beta}{2},\ x(s) \in \mathcal{U}(\tilde{x}_\delta)$$

và

$$\rho_{L_2[c,d]}(Ax, f_\delta) < \delta, \forall x \in \mathcal{U}(\tilde{x}_\delta).$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned}\rho_{L_2[c,d]}(Ax, f_\delta) &\leq \rho_{L_2[c,d]}(Ax, A\tilde{x}_\delta) + \rho_{L_2[c,d]}(A\tilde{x}_\delta, f_\delta)\\ &< \frac{\delta - \beta}{2} + \beta = \delta.\end{aligned}$$

Có nghĩa là mọi hàm $x \in \mathcal{U}(\tilde{x}_\delta)$ đều thoả mãn $\|Ax - f_\delta\|_{L_2[c,d]} < \delta$. Điều này dẫn đến việc tìm được một hàm $\overline{x}_\delta \in \mathcal{U}(\tilde{x}_\delta)$ sao cho $\Omega(\overline{x}_\delta) < \Omega(\tilde{x}_\delta)$. Bất đẳng thức đó trái với kết luận $\tilde{x}_\delta$ cực tiểu phiếm hàm $\Omega(x)$ trên $\tilde{Q}_\delta$. Như vậy, bổ đề được chứng minh.

□

www.VNMATH.com

Chú ý 2.1.2. Bổ đề này chứng tỏ việc tìm phần tử $\tilde{x}_\delta \in \tilde{Q}^1_\delta$ làm cực tiểu $\Omega(x)$ tương đương với bài toán

$$\text{Tìm } \ x(s) \in X^1 : \|Ax - f_\delta\|_{L_2[c,d]} = \delta. \tag{2.7}$$

Bài toán sau cùng quy về việc tìm $\tilde{x}_\delta$ làm cực tiểu

$$M^\alpha[x, f_\delta] = \rho_{L_2[c,d]}(Ax, f_\delta)^2 + \alpha\Omega(x), \tag{2.8}$$

và chọn tham số $\alpha = \alpha(\delta)$ sao cho $\rho_{L_2[c,d]}(A\tilde{x}_\delta, f_\delta) = \delta$.
Ta có kết quả sau.

Định lý 2.1.3. (xem [1]) *Với mỗi $\alpha > 0$ và $f \in L_2[c,d]$ tồn tại duy nhất một hàm $x^\alpha(s)$ có đạo hàm $(x^\alpha(s))'$ và $\int_a^b((x^\alpha(s))')^2 ds < +\infty$ sao cho*

$$M^\alpha[x^\alpha, f] = \inf_{x \in X^1} M^\alpha[x, f]. \tag{2.9}$$

Chứng minh: Với mỗi $\alpha > 0$ cố định, $M^\alpha[x, f] \geq 0, \forall x \in X^1$. Do đó, tồn tại dãy cực tiểu $\{\tilde{x}^\alpha_n(s)\} \subset X^1$ để

$$\lim_{n\to\infty} M^\alpha[\tilde{x}^\alpha_n, f] = \inf_{x \in X^1} M^\alpha[x, f].$$

Kí hiệu $M^\alpha_n = M^\alpha[\tilde{x}^\alpha_n, f]$. Ta có thể chọn dãy cực tiểu $\{\tilde{x}^\alpha_n(s)\}$ sao cho $M^\alpha_n \leq M^\alpha_{n-1}, \forall n$. Khi đó, $\Omega(\tilde{x}^\alpha_n(s)) \leq M^\alpha_1/\alpha,\ \forall n$. Như vậy, theo Bổ đề 2.1.1 dãy $\{\tilde{x}^\alpha_n(s)\}$ là một tập compact. Do đó, tồn tại một dãy con, vẫn kí hiệu là $\{\tilde{x}^\alpha_n(s)\}$, hội tụ đều trên $[a, b]$ đến $\tilde{x}^\alpha(s) \in X^1$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh dãy con này là một dãy cơ bản trong chuẩn của X^1. Giả sử ngược lại, khi đó tồn tại một số dương và dãy số nguyên $\{m,\ p_m\}$ sao cho $\|\tilde{x}^\alpha_m(s) - \tilde{x}^\alpha_{m+p_m}(s)\|_1 \geq \varepsilon_0$.
Đặt $\beta^\alpha_m = \tilde{x}^\alpha_m - \tilde{x}^\alpha_{m+p_m}$. Xét dãy $\xi^\alpha_m = 0,5(\tilde{x}^\alpha_m + \tilde{x}^\alpha_{m+p_m})$. Rõ ràng

$$\xi^\alpha_m = \tilde{x}^\alpha_m - 0,5\beta^\alpha_m = \tilde{x}^\alpha_{m+p_m} + 0,5\beta^\alpha_m$$

và

$$\begin{aligned} M^\alpha[\xi_m^\alpha, f] &= \|A\xi_m^\alpha - f\|^2_{L_2[c,d]} + \alpha\Omega(\xi_m^\alpha) \\ &= \|A\xi_m^\alpha - f\|^2_{L_2[c,d]} + \alpha[\|\tilde{x}_m^\alpha\|_1^2 - \langle \tilde{x}_m^\alpha, \beta_m^\alpha \rangle_1 + 0,25\|\beta_m^\alpha\|_1^2] \\ &\geq M_0^\alpha. \end{aligned}$$

Do dãy $\{\tilde{x}_n^\alpha\}$ hội tụ đều đến $\tilde{x}^\alpha$, cho nên $\|\xi_m^\alpha - \tilde{x}^\alpha\|_{C[a,b]} \to 0$ và $\|\xi_m^\alpha - \tilde{x}_m^\alpha\|_{C[a,b]} \to 0$, khi $m \to \infty$. Mặt khác, vì A là một toán tử liên tục, suy ra

$$\|A\xi_m^\alpha - f\|^2_{L_2[c,d]} \leq \|A\tilde{x}_m^\alpha - f\|^2_{L_2[c,d]} + 0,5\|A(\tilde{x}_m^\alpha - \tilde{x}_{m+p_m}^\alpha)\|_{L_2[c,d]} + \Delta'_m$$

và $\Delta'_m \to 0$, khi $m \to \infty$. Do đó,

$$\alpha[-\langle \tilde{x}_m^\alpha, \beta_m^\alpha \rangle_1 + 0,25\|\beta_m^\alpha\|_1^2] \geq M_0^\alpha - M_m^\alpha - |\Delta'_m| := \Delta''_m$$

ở đây $\Delta''_m > 0$ và $\Delta''_m \to 0$, khi $m \to \infty$.

Tương tự, thay $\xi_m^\alpha = \tilde{x}_{m+p_m}^\alpha + 0,5\beta_m^\alpha$ ta được

$$\alpha[\langle \tilde{x}_{m+p_m}^\alpha, \beta_m^\alpha \rangle_1 + 0,25\|\beta_m^\alpha\|_1^2] \geq -\Delta'''_m,$$

ở đây $\Delta'''_m > 0$ và $\Delta'''_m \to 0$, khi $m \to \infty$. Cộng hai bất đẳng thức cuối cùng ta có

$$-\langle \tilde{x}_m^\alpha - \tilde{x}_{m+p_m}^\alpha, \beta_m^\alpha \rangle_1 + 0,5\|\beta_m^\alpha\|_1^2 \geq -(\Delta''_m + \Delta'''_m)$$

hay

$$-0,5\|\beta_m^\alpha\|_1^2 \geq -(\Delta''_m + \Delta'''_m).$$

Điều này dẫn đến $\|\beta_m^\alpha\|_1^2 = \|\tilde{x}_m^\alpha - \tilde{x}_{m+p_m}^\alpha\|_1^2 \leq 2(\Delta''_m + \Delta'''_m) \to 0$, khi $m \to \infty$. Như vậy phải tồn tại $m(\varepsilon_0) :\ m > m(\varepsilon_0)$,

$$\|\tilde{x}_m^\alpha - \tilde{x}_{m+p_m}^\alpha\|_1 < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Bất đẳng thức này mâu thuẫn với $\|\tilde{x}_m^\alpha - \tilde{x}_{m+p_m}^\alpha\|_1 \geq \varepsilon_0$. Như vậy, $\{\tilde{x}_m^\alpha\}$ là một dãy Cauchy trong không gian đầy đủ W_2^1. Do đó $\tilde{x}_{n_k}^\alpha$ cũng hội tụ trong

$\|.\|_1$ đến hàm x^α nào đó thuộc X^1. Do dãy $\{\tilde{x}^\alpha_{n_k}\}$ hội tụ đều trên $[a,b]$ đến $\tilde{x}^\alpha(s) \in \tilde{Q}^1_\delta$. Cho nên $\tilde{x}^\alpha = x^\alpha$. Định lý được chứng minh.

□

Như vậy, với mọi $f \in L_2[c,d]$ và $\alpha > 0$ ta xác định được một toán tử $R(f,\alpha)$ theo quy tắc $\tilde{x}^\alpha = R(f,\alpha)$, ở đây $\tilde{x}^\alpha$ là phần tử cực tiểu phiếm hàm $M^\alpha[x,f]$ trên X^1. Để chứng tỏ $R(f,\alpha)$ là một thuật toán hiệu chỉnh phải chỉ ra được mối quan hệ $\alpha = \alpha(\delta)$ sao cho phần tử $\tilde{x}^{\alpha(\delta)}$ làm cực tiểu phiếm hàm $M^\alpha[x,f_\delta]$ hội tụ đến $x_0(s)$ trong X^1. Điều đó được khẳng định ở định lý sau.

Định lý 2.1.4. (xem [1]) *Giả sử* $\forall\delta > 0,\ f_\delta \in L_2[c,d]$ *và hàm* $\beta_1(\delta),\ \beta_2(\delta)$ *thoả mãn điều kiện* $\beta_2(0) = 0, \delta^2 \le \beta_1(\delta)\beta_2(\delta),\ \delta \in (0,\delta_1]$, *là các hàm số dương, liên tục và giảm dần tới không. Khi đó, với* $\alpha = \alpha(\delta)$*:*

$$\frac{\delta^2}{\beta_1(\delta)} \le \alpha(\delta) \le \beta_2(\delta), \tag{2.10}$$

ta có

$$\max_{s\in[a,b]} |\tilde{x}^{\alpha(\delta)}(s) - x_0(s)| \to 0. \tag{2.11}$$

Chứng minh: Vì $M^\alpha[x,f_\delta]$ đạt giá trị cực tiểu tại $x = \tilde{x}^{\alpha(\delta)}$, cho nên

$$M^\alpha[\tilde{x}^\alpha, f_\delta] \le M^\alpha[x_0, f_\delta].$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}\alpha\Omega(\tilde{x}^\alpha) &\le M^\alpha[\tilde{x}^\alpha, f_\delta] \le M^\alpha[x_0, f_\delta]\\ &= \|Ax_0 - f_\delta\|^2_{L_2[c,d]} + \alpha\Omega(x_0)\\ &\le \|f_0 - f_\delta\|^2_{L_2[c,d]} + \alpha\Omega(x_0)\\ &\le \delta^2 + \alpha\Omega(x_0) = \alpha[\frac{\delta^2}{\alpha} + \Omega(x_0)],\end{aligned}$$

ở đây $\alpha = \alpha(\delta)$. Do $\delta^2/\beta_1(\delta) \le \alpha(\delta)$, cho nên

$$\frac{\delta^2}{\alpha} \le \beta_1(\delta) \le \beta_1(\delta_1)$$

và

$$\frac{\delta^2}{\alpha} + \Omega(x_0) \le \beta_1(\delta_1) + \Omega(x_0) := \tilde{d}.$$

Như vậy, $\Omega(\tilde{x}^\alpha) \le \tilde{d}, \Omega(x_0) \le \tilde{d}$. Có nghĩa là $\{\tilde{x}^\alpha\}$ và x_0 thuộc Φ. Gọi $\{f_{\delta_n}\} \subset L_2[c,d], \|f_{\delta_n} - f_0\|_{L_2[c,d]} \le \delta_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Khi đó, tồn tại một dãy $\{\tilde{x}^{\alpha_n}\} \subset X^1$ với $\alpha_n = \alpha(\delta_n)$ làm cực tiểu phiếm hàm $M^{\alpha_n}[x, f_{\delta_n}]$ và $\Omega(\tilde{x}^{\alpha_n}) \le \tilde{d}$. Theo Bổ đề 2.1.1, tồn tại một dãy con của $\{\tilde{x}^{\alpha_n}\}$ hội tụ trên $[a,b]$ đến một hàm $\tilde{x}(s)$ nào đó. Để cho đơn giản, vẫn giữ nguyên kí hiệu đó cho dãy con, ta có

$$\begin{aligned}
0 \le \|A\tilde{x}^{\alpha_n} - f_0\|_{L_2[c,d]} &\le \|A\tilde{x}^{\alpha_n} - f_{\delta_n}\|_{L_2[c,d]} + \delta_n \\
&\le \sqrt{M^{\alpha_n}[\tilde{x}^{\alpha_n}, f_{\delta_n}]} + \delta_n \\
&\le \sqrt{M^{\alpha_n}[x_0, f_{\delta_n}]} + \delta_n \\
&\le \sqrt{(\|Ax_0 - f_0\|_{L_2[c,d]} + \delta_n)^2 + \alpha_n\Omega(x_0)} + \delta_n \\
&\le \sqrt{\delta_n^2 + \alpha_n\Omega(x_0)} + \delta_n.
\end{aligned}$$

Vì $\alpha_n \le \beta_2(\delta_n)$, cho nên

$$0 \le \|A\tilde{x}_{\alpha_n} - f_0\|_{L_2[c,d]} \le \sqrt{\delta_n^2 + \beta_2(\delta_n)\Omega(x_0)} + \delta_n \to 0.$$

Do $\{\tilde{x}_{\alpha_n}\}$ hội tụ đều trên $[a,b]$ đến $\tilde{x}(s)$, cho nên $\|A\tilde{x} - f_0\|_{L_2[c,d]} = 0$. Tức là $\|A\tilde{x} - f_0\| = 0$. Điều đó nói lên rằng $\tilde{x}$ cũng là một nghiệm của (2.1). Từ tính duy nhất nghiệm của (2.1) suy ra $\tilde{x} = x_0$. Qua đó, dễ dàng nhận thấy là mọi dãy con hội tụ của $\{\tilde{x}^{\alpha(\delta)}\}$ đều hội tụ đến x_0. Cho nên cả dãy $\{\tilde{x}^{\alpha(\delta)}\}$ hội tụ đến x_0. Định lý được chứng minh.

□

2.1.2. Thuật toán hiệu chỉnh trên máy tính

Bây giờ, ta xét việc thực hiện thuật toán trên máy tính.

Lấy tích phân từng phần ta được

$$\Omega(x) = \int_a^b q(s)x^2(s)ds - \int_a^b x(s)(p(s)x'(s))'ds$$
$$+ p(b)x(b)x'(b) - p(a)x(a)x'(a)$$
$$= \langle x, Lx\rangle + p(b)x(b)x'(b) - p(a)x(a)x'(a),$$

trong đó $Lx(s) = q(s)x(s) - (p(s)x'(s))'$ còn tích vô hướng

$$\langle x, Lx\rangle = \int_a^b x(s)Lx(s)ds$$

và

$$M^\alpha[x, f_\delta] = \int_c^d \Big(\int_a^b K(t,s)x(s)ds - f_\delta(t)\Big)^2 dt + \alpha\langle x, Lx\rangle$$
$$+ \alpha[p(b)x(b)x'(b) - p(a)x(a)x'(a)].$$

Nếu $\tilde{x}^\alpha$ làm cực tiểu $M^\alpha[x, f_\delta]$ thì $\tilde{x}^\alpha$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{d}{d\gamma} M^\alpha[x + \gamma\nu, f_\delta]\Big|_{\gamma=0} = 0. \qquad (2.12)$$

Từ đây suy ra

$$\frac{d}{d\gamma}\int_c^d \Big\{\int_a^b K(t,s)[x(s) + \gamma\nu(s)]ds - f_\delta(t)\Big\}^2 dt\Big|_{\gamma=0}$$
$$+ \alpha\frac{d}{d\gamma}\langle x + \gamma\nu, L(x + \gamma\nu)\rangle\Big|_{\gamma=0}$$
$$+ \alpha\frac{d}{d\gamma}(p(b)x(b)x'(b) - p(a)x(a)x'(a)) = 0.$$

Kí hiệu

$$A^* v(s) = \int_c^d K(t,s)v(t)dt,$$
$$A^* Ax(s) = \int_a^b \overline{K(s,t)}x(t)dt,$$

ở đây

$$\overline{K(s,t)} = \int_c^d K(\mu, s)K(\mu, t)d\mu.$$

Điều kiện bằng 0 của đạo hàm ở trên cho ta

$$A^*Ax + \alpha Lx = A^*f_\delta$$

và

$$p(b)[x(b)v'(b) + x'(b)v(b)] - p(a)[x(a)v'(a) + x'(a)v(a)] = 0.$$

Như vậy, nghiệm xấp xỉ (hiệu chỉnh) $\tilde{x}^{\alpha(\delta)}$ là nghiệm của phương trình vi tích phân

$$\alpha\{q(s)x(s) - (p(s)x'(s))'\} + \int_a^b \overline{K(s,t)}x(t)dt = g(s), \qquad (2.13)$$

ở đây

$$g(s) = \int_c^d K(t,s)f_\delta(t)dt$$

thoả mãn một trong các điều kiện sau

- $x(a) = x(b) = 0,$
- $x(a) = x'(b) = 0,$
- $x'(a) = x(b) = 0,$
- $x'(a) = x'(b) = 0.$

Nó gần giống như bài toán tìm nghiệm chuẩn tắc cho hệ phương trình đại số tuyến tính mà ta đã xét ở trên.

Chú ý 2.1.3.

1. Điều kiện biên của nghiệm do tính chất của bài toán thực tế đặt ra.
2. Có thể dùng phép biến đổi sau để nghiệm có điều kiện biên bằng 0.

- Nếu $x(a) = x_1$ và $x(b) = x_2$, ta có thể đặt

$$x(s) = \tilde{x}(s) + \frac{x_2}{b-a}(s-a) + \frac{x_1}{b-a}(b-s).$$

Khi đó, dễ dàng kiểm tra được là $\tilde{x}(a) = 0$ và $\tilde{x}(b) = 0$.

- Nếu $x'(a) = m_1$ và $x'(b) = m_2$, ta có thể thế

$$x(s) = \tilde{x}(s) - \frac{m_1}{2(b-a)}(b-s)^2 + \frac{m_2}{2(b-a)}(s-a)^2.$$

Khi đó, cũng dễ dàng kiểm tra được là $\tilde{x}'(a) = 0$ và $\tilde{x}'(b) = 0$.

- Nếu $x(a) = x_1,\ x'(b) = m_2$, thì đặt

$$x(s) = \tilde{x}(s) + x_1 + \frac{m_2}{2(b-a)}(s-a)^2$$

ta được $\tilde{x}(a) = \tilde{x}'(b) = 0$. Trường hợp còn lại cũng xét tương tự.

2.1.3. Rời rạc hoá bài toán để tìm nghiệm xấp xỉ

Bây giờ, ta xét quá trình rời rạc hoá để tìm nghiệm xấp xỉ. Để cho đơn giản lấy

$$\Omega(x) = \int_a^b \{x^2(s) + p(x'(s))^2\}ds, \tag{2.14}$$

ở đây p là một hằng số dương. Giả thiết nghiệm chính xác $x(s) \in X^1$ thoả mãn điều kiện $x'(a) = x'(b) = 0$. Khi đó, nghiệm xấp xỉ $x^\alpha(s)$ xác định từ phương trình

$$\int_a^b \overline{K}(s,t)x(t)dt + \alpha(x(s) - px''(s)) = g(s),$$

$$x'(a) = x'(b) = 0,$$

$$g(s) = \int_c^d K(t,s)f_\delta(t)dt.$$

Ta chia $[a, b]$ ra làm n khoảng đều nhau với bước chia $h = (b-a)/n$ và xét các mốc chia

$$s_i = a + 0,5h + (i-1)h,\ i = 1, 2, ..., n.$$

Thay tích phân bằng công thức hình chữ nhật và thay x'' bằng tỷ sai phân ta được

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{K}(s_i, t_j) h x_j + \alpha x_i + \alpha \frac{2x_i - x_{i-1} - x_{i+1}}{h^2} = g_i,$$

$$i = 1, 2, ..., n; \; g_i = \int_c^d K(t, s_i) f_\delta(t) dt.$$

Cũng cần lưu ý là bước lưới chia theo biến t và s có thể khác nhau. Khi cho $i = 1$ và $i = n$, thì hai tham số x_0 và x_{n+1} không xác định. Để cho điều kiện biên thoả mãn ta lấy $x_0 = x_1$ và $x_{n+1} = x_n$.

Kí hiệu $B = [b_{i,j}], i, j = 1, .., n$ với $b_{ij} = \overline{K}(s_i, t_j)h$, ta có hệ phương trình đại số tuyến tính

$$B_\alpha x^n = Bx^n + \alpha C x^n = g^n, \tag{2.15}$$

ở đây véctơ x^n và g^n là các véctơ cột n chiều, trong đó $x^n = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ còn $g^n = (g_1, g_2, ..., g_n)^T$ và

$$\alpha C = \begin{bmatrix} \alpha(1+\frac{1}{h^2}) & -\frac{\alpha}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{h^2} & \alpha(1+\frac{2}{h^2}) & -\frac{\alpha}{h^2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha(1+\frac{2}{h^2}) & -\frac{\alpha}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\alpha}{h^2} & \alpha(1+\frac{1}{h^2}) \end{bmatrix}.$$

Như vậy, ta có B_α là một ma trận đối xứng và xác định dương. Cho nên hệ phương trình trên có thể giải bằng phương pháp căn bậc hai hoặc một số phương pháp khác.

2.2 Tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh cho phương trình tích phân tuyến tính loại I

Ta đã nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh để tìm nghiệm của phương trình tích phân tuyến tính loại I, dựa trên việc cực tiểu phiếm hàm ổn định hoặc phiếm hàm làm trơn Tikhonov. Ở mục này, ta tiếp tục nghiên cứu tốc độ hội tụ, xấp xỉ hữu hạn chiều cũng như tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh, khi đã được xấp xỉ hữu hạn chiều, của bài toán này. Đồng thời, ta cũng chỉ ra khi nào tốc độ hội tụ là tốt nhất.

Như đã biết, phương trình tích phân

$$(Ax)(s) = \int_0^1 K(s,t)x(t)dt = f_0(s), \tag{2.16}$$

là một bài toán đặt không chỉnh, khi $Im(A)$ không hữu hạn chiều. Khi đó, nghiệm bình phương tối thiểu $x_0(t)$ không phụ thuộc liên tục vào vế phải $f_0(s)$. Ta giả thiết có $f_0(s) \in Im(A)$, tức là (2.16) có nghiệm theo nghĩa thông thường.

Đặt $\tilde{A} = A^*A$. Khi đó, ta xét bổ đề sau.

Bổ đề 2.2.1. *Nếu $\alpha > 0$ và $w(t) \in L_2$ [0,1], thì*

$$(\alpha I + \tilde{A})^{-1} \int_0^1 K(t,.)w(t)dt = \int_0^1 (\alpha I + \tilde{A})^{-1} K(t,.)w(t)dt. \tag{2.17}$$

Chứng minh: Thật vậy, kí hiệu vế trái và phải của đẳng thức trên tương ứng là a và b. Do $\tilde{A}$ là một toán tử tự liên hợp nên $\alpha I + \tilde{A}$ với $\alpha > 0$ là toán tử liên hợp và xác định dương, ta chỉ cần chứng minh

$$(\alpha I + \tilde{A})b = (\alpha I + \tilde{A})a.$$

Ta bắt đầu với

$$(\alpha I + \tilde{A})b = \alpha \int_0^1 (\alpha I + \tilde{A})^{-1} K(t,.)w(t)dt$$
$$\tilde{A} \int_0^1 (\alpha I + \tilde{A})^{-1} K(t,.)w(t)dt.$$

Số hạng thứ hai thuộc vế phải của đẳng thức trên là tích phân bội. Ta có thể thay đổi thứ tự của tích phân này và nhận được

$$
\begin{aligned}
(\alpha I + \tilde{A})b &= \int_0^1 (\alpha I + \tilde{A})(\alpha I + \tilde{A})^{-1} K(t,.)w(t)dt \\
&= \int_0^1 K(t,.)w(t)dt \\
&(\alpha I + \tilde{A})(\alpha I + \tilde{A})^{-1} \int_0^1 K(t,.)w(t)dt \\
&= (\alpha I + \tilde{A})a.
\end{aligned}
$$

□

Định lý 2.2.1. (xem [1]) *Nếu* $x_0(t) \in Im(\tilde{A})$, $\alpha = O(\delta)$, *và tồn tại một hàm hai biến* $U_t(.) \in L_2$*([0,1]×[0,1]) sao cho* $k(t,s) = (\tilde{A}U_t(.))(s)$, *thì*

$$\|x_0 - x_\alpha^\delta\|_{L_2} = O(\delta), \tag{2.18}$$

ở đây x_α^δ *là nghiệm hiệu chỉnh của phương trình (2.16).*

Chứng minh: Do

$$\|x_0 - x_\alpha^\delta\|_{L_2} \le \|x_0 - x_\alpha\|_{L_2}\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\|_{L_2},$$

số hạng thứ nhất ở vế phải có bậc xấp xỉ là $O(\alpha) = O(\delta)$ (xem [1] hoặc xem [6]), theo điều kiện của định lý này, ta chỉ còn phải đánh giá bậc của số hạng thứ hai ở vế phải của bất đẳng thức trên. Sử dụng Bổ đề 2.2.1 ta được

$$
\begin{aligned}
x_\alpha - x_\alpha^\delta &= (\alpha I + \tilde{A})^{-1}\tilde{A}(f_0(t) - f_\delta(t)) \\
&= \int_0^1 (\alpha I + \tilde{A})^{-1} K(t,.)(f_0 - f_\delta)dt \\
&= \int_0^1 (\alpha I + \tilde{A})^{-1}\tilde{A}U_t(.)(f_0(t) - f_\delta(t))dt,
\end{aligned}
$$

ở đây f_δ là xấp xỉ của f_0 thoả mãn

$$\int_0^1 (f_0(t) - f_\delta(t))^2 dt \le \delta^2.$$

Do $\|(\alpha I+\tilde{A})^{-1}\tilde{A}\|\leq 1$ và sử dụng bất đẳng thức Caushy-Schwartz ta có

$$\begin{aligned}\|x_\alpha - x_\alpha^\delta\|_{L_2}^2 &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |(\alpha I+\tilde{A})^{-1}\tilde{A}U_t(.)(f_0(t)-f_\delta(t))|dt\right)^2 ds\\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |(\alpha I+\tilde{A})^{-1}\tilde{A}U_t(.)|^2 dt \int_0^1 |f_0(t)-f_\delta(t)|^2 dt\right) ds\\ &\leq (\|U_t(s)_{L_2}^2\delta^2)ds = O(\delta^2).\end{aligned}$$

Để nghiên cứu quá trình xấp xỉ hữu hạn chiều, ta giả thiết có một dãy không gian con hữu hạn chiều $V_m \subseteq L_2[0,1]$ và đặt

$$\gamma_n = \|A(I-P_m)\|_{L_2} = \|(I-P_m)A^*\|_{L_2}$$

ở đây A^* là liên hợp của A và P_m là phép chiếu vuông góc lên V_m.

Phần tử làm cực tiểu phiếm hàm làm trơn Tikhonov trên V_m được kí hiệu bằng $x_{m,\alpha}^\delta$ còn $A_m = A|_{V_m}$. Ta có kết quả sau.

Định lý 2.2.2. (xem [1]) *Cho $x_0 \in$ Im $(\tilde{A})$, $\gamma_m = O(\alpha), \alpha = O(\delta)$ và tồn tại một họ hàm giới nội đều$U_{m,t}(.) \in L_2$([0,1]×[0,1]) sao cho $A_m(t,s) = (\tilde{A}_m U_{m,t}(.))(s)$. Khi đó,*

$$\|x_0 - x_{m,\alpha}^\delta\|_{L_2} = O(\delta). \tag{2.19}$$

Chứng minh: Ta có

$$\begin{aligned}\|x_0 - x_{m,\alpha}^\delta\|_{L_2} \leq \|x_0 - x_\alpha\|_{L_2} + \|x_\alpha - x_{m,\alpha}\|_{L_2}\\ + \|x_{m,\alpha} - x_{m,\alpha}^\delta\|_{L_2}\end{aligned}$$

và $\|x_\alpha - x_{m,\alpha}\|_{L_2} = O(\gamma_m)$. Hơn nữa,

$$\begin{aligned}x_{m,\alpha} - x_{m,\alpha}^\delta &= (\alpha I + \tilde{A}_m)^{-1}A_m^*(f_0 - f_\delta)\\ &= \int_0^1 (\alpha I + \tilde{A}_m)^{-1}K(t,s)(f_0(t)-f_\delta(t))dt\\ &= \int_0^1 (\alpha I + \tilde{A}_m)^{-1}AU_{m,t}(.)(f_0(t)-f_\delta(t))dt.\end{aligned}$$

Sử dụng phương pháp đánh giá ở trong chứng minh Định lý 2.2.1. và tính giới nội đều của $U_{m,.}(.)$, ta nhận được

$$\|x_{m,\alpha} - x^{\delta}_{m,\alpha}\|_{L_2} \le \int_0^1 \|U_{m,.}(s)\|^2 \delta^2 ds = O(\delta^2).$$

Điều này cho ta

$$\|x_0 - x^{\delta}_{m,\alpha}\|_{L_2} = O(\alpha) + O(\delta) = O(\delta). \qquad \square$$

Như ở mục trước ta thấy tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh tốt hơn $O(\delta^{2/3})$ khi Im(A) hữu hạn chiều. Kết quả sau đây là một ví dụ về toán tử có miền giá trị là hữu hạn chiều.

Định lý 2.2.3. (xem [1]) *Nếu tồn tại hàm $U_s(t)$ như trong Định lý 2.2.1, thì Im(A) là không gian con hữu hạn chiều.*

Chứng minh: Do $K(s,t) = (\tilde{A}U_s(t)$, ta có

$$\begin{aligned}(Af)(s) &= \int_0^1 \tilde{A}U_s(t)f(t)dt \\ &= \int_0^1 (AU_s(v)(Af)(v)dv = \langle AU_s, Af\rangle_{L_2}.\end{aligned}$$

Gọi λ_j, φ_j là một hệ các giá trị riêng và véctơ riêng trực chuẩn tương ứng của A với $\lambda_1 > \lambda_2 > ...$ Do $\varphi_j \in$ Im(A), cho nên

$$\varphi_j(s) = \langle AU_s, \varphi_j\rangle_{L_2} = \lambda_j \langle U_s, \varphi_j\rangle_{L_2}$$

và

$$1 = \langle \varphi_j, \varphi_j\rangle_{L_2} = \langle \lambda_j \big\langle U_s, \varphi_j \big\rangle_{L_2}, \varphi_j(s)\rangle_{L_2}.$$

Suy ra,

$$\|U_s\|_{L_2} \ge \sum \langle \big\langle U_s, \varphi_j\big\rangle_{L_2}, \varphi_j(s)\rangle^2_{L_2} = \sum (1/\lambda_j)^2.$$

Như vậy, chuỗi bên phải hội tụ. Do đó, toán tử compact A chỉ có thể có hữu hạn giá trị riêng λ_j. Suy ra Im(A) hữu hạn chiều.

$\square$

2.3 Kết quả tính toán cụ thể

Xét phương trình tích phân sau

$$\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = f(t) \tag{2.20}$$

trong không gian $L^2[0,1]$ với

$$K(t,s) = \begin{cases} t(1-s) & \text{nếu } t \le s, \\ s(1-t) & \text{nếu } t > s. \end{cases}$$

Khi đó bài toán (2.20) là bài toán đặt không chỉnh.

Nếu chọn $x(t) = sin(2t+1)$ thì

$$f(t) = \frac{1}{4}(sin(2t+1) + t(sin1 - sin3) - sin1).$$

Ta chia $[0,1]$ ra làm n khoảng đều nhau với bước chia $h = 1/n$ và xét các mốc chia

$$s_i = a + 0,5h + (i-1)h,\ i = 1,2,...,n.$$

Khi đó ta có hệ phương trình (xem (2.15)): $(B + \alpha C)x^n = g^n$.

Giải hệ phương trình trên bằng phương pháp lặp ta có kết quả bằng số như sau:

• Bảng 2.1 được tính với $\alpha = 0.001$, số điểm chia $n = 5$.

Nghiệm xấp xỉ x_α	Nghiệm chính xác
0.84403	0.84147
0.98021	0.98545
0.96827	0.97385
0.80378	0.8085
0.51274	0.5155
0.15004	0.14112

Bảng 2.1

• Bảng 2.2 được tính với số điểm chia $n = 5$, tham số $\alpha = 0.0001$.

Nghiệm xấp xỉ x_α	Nghiệm chính xác
0.84174	0.84147
0.98412	0.98545
0.97215	0.97385
0.80696	0.8085
0.51456	0.5155
0.14204	0.14112

Bảng 2.2

• Bảng 2.3 được tính tương tự với tham số $\alpha = 0.0001$, số điểm chia $n = 10$.

Nghiệm xấp xỉ x_α	Nghiệm chính xác
0.84228	0.84147
0.93148	0.93204
0.98477	0.98545
0.99883	0.99957
0.97309	0.97385
0.90857	0.9093
0.80784	0.8085
0.67491	0.67546
0.51509	0.5155
0.33476	0.33499
0.14302	0.14112

Bảng 2.3

Nghiệm xấp xỉ x_α	Nghiệm chính xác
0.84155	0.84147
0.93187	0.93204
0.98519	0.98545
0.99925	0.99957
0.97349	0.97385
0.90894	0.9093
0.80817	0.8085
0.67519	0.67546
0.5153	0.5155
0.33488	0.33499
0.14131	0.14112

Bảng 2.4

• Bảng 2.4 được tính tương tự với tham số $\alpha = 0.00001$, số điểm chia $n = 10$. Các kết quả được tính toán bằng phương pháp lặp Jacobi, với xấp xỉ ban đầu $x_j^{(0)} = 0.5$, $j = 1, ..., n$ và tiêu chuẩn dừng của dãy lặp là

$$\max_{1 \leq j \leq n} |x_j^{(m+1)} - x_j^{(m)}| \leq 10^{-4},$$

KẾT LUẬN

Đề tài đã đề cập đến các vấn đề sau:

• Nghiên cứu nghiệm hiệu chỉnh của phương trình tích phân tuyến tính loại I.

• Nghiên cứu tốc độ hội tụ của nghiệm hiệu chỉnh và nghiệm hiệu chỉnh khi đã được xấp xỉ hữu hạn chiều.

• Đưa ra một ví dụ và kết quả số minh hoạ.

Với những ứng dụng quan trọng trong thực tế, những vấn đề được trình bày trong đề tài hiện đã và đang được nhiều nhà toán học quan tâm, đi sâu nghiên cứu.

Mặc dù đã có sự cố gắng và nỗ lực song chắc hẳn đề tài không tránh khỏi những hạn chế, thiếu sót. Tác giả rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các thầy cô giáo và các bạn đồng nghiệp để đề tài hoàn thiện hơn.

Xin trân trọng cảm ơn!

www.VNMATH.com

Tài liệu tham khảo

[1] Phạm Kỳ Anh và Nguyễn Bường, *Bài toán không chỉnh*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2005.

[2] Phạm Kỳ Anh, *Giải tích số*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2005.

[3] Hoàng Tụy, *Hàm thực và giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2003.

[4] A.N. Tikhonov, *On regularization for incorrectly posed problems*, Dokl. Acad. Nauk SSSR Math., **153** (1963), 49 - 51 (in Rusian).

[5] A.N. Tikhonov, *Regularization of inorrectly posed problems and the regularizationn method*, Dokl. Acad. Nauk SSSR Math., **4** (1963), 1624 - 1627 (in Russian).

[6] J. Hadamard, *Le probléme de Caushy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperpoliques*, Paris 1932.