ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LÝ ANH TIẾN

LÝ THUYẾT NEVANLINNA VÀ ỨNG DỤNG NGHIÊN CỨU PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Chuyên ngành: Giải tích
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: **GS-TSKH Hà Huy Khoái**

Thái nguyên 2008

MỞ ĐẦU

Vấn đề phân tích hàm phân hình, hàm nguyên là một trong những vấn đề quan trọng của lý thuyết hàm và giải tích phức, có nhiều ứng dụng trong lý thuyết hệ động lực. Trong những năm gần đây, các kết quả và công cụ của lý thuyết Nevanlinna được áp dụng rộng rãi vào bài toán phân tích các hàm nguyên và hàm phân hình.

Mục đích của luận văn là trình bày cơ sở lý thuyết Nevanlinna, đặc biệt là những phần liên quan đến bài toán phân tích hàm phân hình và trình bày một số kết quả gần đây trong lý thuyết phân tích hàm nguyên và hàm phân hình.

Nội dung luận văn gồm 2 chương:

Chương 1: *Cơ sở lý thuyết Nevanlinna*, trong chương này trình bày các định lý cơ bản, quan hệ số khuyết và một số ví dụ ứng dụng.

Chương 2: *Phương trình hàm* $P(f)=Q(g)$, trong chương này trình bày về sự tồn tại nghiệm f,g đối với phương trình hàm $P(f)=Q(g)$, khi P,Q là 2 đa thức thuộc $\mathbb{C}[z]$.

Để hoàn thành được luận văn này, tác giả xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới GS-TSKH Hà Huy Khoái, người thầy đã tận tình dạy bảo, hướng dẫn tác giả trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tác giả xin trân trọng bày tỏ lòng biết ơn đến các thầy cô giáo trong trường Đại học sư phạm Thái Nguyên, Đại học sư phạm Hà Nội, Viện toán học Việt Nam đã giảng dạy và giúp đỡ tác giả hoàn thành khoá học.

Đồng thời tác giả xin chân thành cảm ơn Sở giáo dục và đào tạo tỉnh Bắc Giang, trường THPT Lục Ngạn số 2 Bắc Giang, gia đình và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ về mọi mặt trong suốt quá trình tác giả học tập và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên tháng 9 năm 2008

CHƯƠNG 1
CƠ SỞ LÝ THUYẾT NEVANLINNA

1.1. Hàm phân hình

1.1.1. Định nghĩa. Điểm a được gọi là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ nếu hàm $f(z)$ chỉnh hình trong một lân cận nào đó của *a,* trừ ra tại chính điểm đó.

1.1.2. Định nghĩa. Điểm bất thường cô lập $z=a$ của hàm $f(z)$ được gọi là

a) Điểm bất thường *khử được* nếu tồn tại giới hạn hữu hạn của $f(z)$ khi z dần đến *a*.

b) *Cực điểm* của $f(z)$ nếu $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$.

c) Điểm bất thường *cốt yếu* nếu không tồn tại $\lim\limits_{z\to a} f(z)$.

1.1.3. Định nghĩa. Hàm $f(z)$ chỉnh hình trong toàn mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ được gọi là hàm nguyên.

Như vậy, hàm nguyên là hàm không có các điểm bất thường hữu hạn.

1.1.4. Định nghĩa. Hàm $f(z)$ được gọi là hàm phân hình trong miền $D\subset\mathbb{C}$ nếu nó là hàm chỉnh hình trong *D,* trừ ra tại một số bất thường là cực điểm.

Nếu $D=\mathbb{C}$ thì ta nói $f(z)$ phân hình trên $\mathbb{C}$, hay đơn giản, $f(z)$ là hàm phân hình.

*** Nhận xét.** Nếu $f(z)$ là hàm phân hình trên D thì trong lân cận của mỗi điểm $z\in D$, $f(z)$ có thể biểu diễn được dưới dạng thương của hai hàm chỉnh hình.

Với các phép toán cộng và nhân các hàm số thông thường trên lớp các hàm nguyên và phân hình, tập hợp các hàm nguyên sẽ tạo thành một vành và gọi là vành các hàm nguyên, kí hiệu là $\mathcal{A}(\mathbb{C})$. Tập hợp các hàm phân hình sẽ tạo thành một trường và gọi là trường các hàm phân hình, kí hiệu là $\mathcal{M}(\mathbb{C})$.

1.1.5. Định nghĩa. Điểm z_0 gọi là cực điểm cấp $m > 0$ của hàm $f(z)$ nếu trong lân cận của z_0, hàm $f(z) = \dfrac{1}{(z - z_0)^m} h(z)$, trong đó $h(z)$ là hàm chỉnh hình trong lân cận của z_0 và $h(z_0) \neq 0$.

1.1.6. Tính chất. Nếu $f(z)$ là hàm phân hình trên D thì $f'(z)$ cũng là hàm phân hình trên D. Hàm $f(z)$ và $f'(z)$ cũng có các cực điểm tại những điểm như nhau. Đồng thời, nếu z_0 là cực điểm cấp $m > 0$ của hàm $f(z)$ thì z_0 là cực điểm cấp $m+1$ của hàm $f'(z)$.

*** Nhận xét**. Hàm $f(z)$ không có quá đếm được các cực điểm trên D.

1.1.7. Tính chất. Cho hàm $f(z)$ chỉnh hình trong $\overline{\mathbb{C}}$, điều kiện cần và đủ để $f(z)$ không có các điểm bất thường khác ngoài cực điểm là $f(z)$ là hàm hữu tỷ.

1.2. Định lý cơ bản thứ nhất

1.2.1. Công thức Poisson – Jensen

Định lý: *Giả sử* $f(z) \not\equiv 0$ *là một hàm phân hình trong hình tròn* $\{|z| \le R\}$ *với* $0 < R < \infty$. *Giả sử* a_μ $(\mu = 1,2,...,M)$ *là các không điểm, mỗi không điểm được kể một số lần bằng bội của nó,* b_v $(v = 1,2,...,N)$ *là các cực điểm của* f *trong hình tròn đó, mỗi cực điểm được kể một số lần bằng bội của nó. Khi đó nếu* $z = r.e^{i\theta}$, $(0 < r < R)$, $f(z) \ne 0;\ f(z) \ne \infty$ *thì:*

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\phi})\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi$$

$$+\sum_{\mu=1}^{M}\log\left|\frac{R(z-a_\mu)}{R^2 - \overline{a}_\mu z}\right| - \sum_{v=1}^{N}\log\left|\frac{R(z-b_v)}{R^2 - \overline{b}_v z}\right|. \qquad (1.1)$$

Chứng minh.

***Trường hợp 1.** Hàm $f(z)$ không có không điểm và cực điểm trong $\{|z| \le R\}$. Khi đó ta cần chứng minh

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\phi})\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi\,. \qquad (1.1a)$$

*Trước hết ta sẽ chứng minh công thức đúng tại $z = 0$, nghĩa là cần chứng minh

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\phi})\right| d\phi\,.$$

Do $f(z)$ không có không điểm và cực điểm trong hình tròn nên hàm $\log f(z)$ chỉnh hình trong hình tròn đó. Theo định lý Cauchy ta có:

$$\log f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \log f(z)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(Re^{i\phi}) d\phi.$$

Lấy phần thực ta thu được kết quả tại $z = 0$

$$\log\left|f(0)\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(R\mathrm{e}^{i\phi})\right|d\phi.$$

*Với z tuỳ ý, chúng ta xét ánh xạ bảo giác biến $|\zeta| < R$ thành $|w| < 1$ và biến $\zeta = z$ thành $w = 0$. Đó là ánh xạ

$$w = \frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \overline{z}\zeta},$$

như vậy $|\zeta| = R$ tương ứng với $w = 1$. Trên $|\zeta| = R$, ta có:

$$\log w = \log\frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \overline{z}\zeta} = \log R + \log(\zeta - z) - \log(R^2 - \overline{z}\zeta),$$

Nên $$\frac{dw}{w} = \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{\overline{z}d\zeta}{R^2 - \overline{z}\zeta} = \frac{(R^2 - |z|^2)d\zeta}{(R^2 - \overline{z}\zeta)(\zeta - z)}. \qquad (1^*)$$

Do $\log f(z)$ là chỉnh hình trong $|z| \le R$, theo định lý Cauchy ta có

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\log f(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}. \qquad (2^*)$$

Mặt khác $$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\log f(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{R^2 - \overline{z}\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\log f(\zeta)\frac{-d\zeta}{\zeta - \dfrac{R^2}{\overline{z}}}. \qquad (3^*)$$

Do $|\overline{z}| = |z| < R$ suy ra $\left|\dfrac{R^2}{\overline{z}}\right| > R$ nghĩa là điểm $\dfrac{R^2}{\overline{z}}$ nằm ngoài vòng tròn $|\zeta| = R$, nên hàm $\log f(\zeta)\dfrac{1}{\zeta - \dfrac{R^2}{\overline{z}}}$ là hàm chỉnh hình. Như vậy tích phân trong vế bên phải của (3*) bằng 0. Kết hợp với (1*) và (2*) ta có:

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\log f(\zeta)\frac{(R^2 - |z|^2)d\zeta}{(R^2 - \overline{z}\zeta)(\zeta - z)}. \qquad (1.2)$$

Hơn nữa, trên $|\zeta| = R$, $\zeta = R.e^{i\phi}, d\zeta = iRe^{i\phi}d\phi$ và

$$(R^2 - \overline{z}\zeta)(\zeta - z) = R(R - re^{i(\phi-\theta)})(Re^{i\phi} - re^{i\theta}) =$$

$$= Re^{i\phi}\left\{R^2 - 2Rr\cos(\phi - \theta) + r^2\right\}.$$

kết hợp với (1.2) ta thu được

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log f(Re^{i\phi})\frac{(R^2 - r^2)d\phi}{R^2 - 2Rr\cos(\phi - \theta) + r^2}. \qquad (1.3)$$

lấy phần thực hai vế của đẳng thức (1.3) ta được

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\phi})|\frac{(R^2 - r^2)d\phi}{R^2 - 2Rr\cos(\phi - \theta) + r^2}.$$

Đây là điều cần chứng minh.

***Trường hợp 2.** Hàm $f(z)$ không có không điểm và cực điểm bên trong $\{|z| \le R\}$, nhưng có hữu hạn không điểm và cực điểm c_j trên biên $|\zeta| = R$, Với $\delta > 0$ nhỏ tuỳ ý, ta đặt:

$$D = \{|z| \le R\} - U_j\{|\zeta - c_j| < \delta\},$$

Gọi Γ_D là chu tuyến của D và γ_δ là các cung lõm vào trên Γ_D. Như vậy miền Γ_D bao gồm những phần trên đường tròn $|\zeta| = R$ cùng với các phần lõm vào của đường tròn nhỏ bán kính δ và tâm là các không điểm hoặc cực điểm $f(z)$ trên $|\zeta| = R$. Giả sử $z = re^{i\theta}$ trong miền $|z| < R$, tồn tại δ đủ nhỏ sao cho $z \in D$. Khi đó:

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_D} \log f(\zeta)\frac{(R^2 - |z|^2)d\zeta}{(R^2 - \overline{z}\zeta)(\zeta - z)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_D \setminus \cup\gamma_\delta} + \sum \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\delta}. \qquad \textbf{(}1.2a\textbf{)}$$

Giả sử z_0 là một không điểm hay cực điểm của $f(z)$ trên $|z| = R$ và γ_δ là cung tròn ứng với z_0 trên Γ_D. Khi đó trên γ_0,

$$f(z) = c(z - z_0)^m + \ldots$$

trong đó $m > 0$ nếu z_0 là không điểm và $m < 0$ nếu z_0 là cực điểm. Suy ra

$$\log|f(z)| = O(\log\frac{1}{\delta}) \text{ khi } \delta \to 0.$$

Như vậy

$$\left|\sum \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_\delta} \quad\right| = O(\log\frac{1}{\delta}).M.\delta,$$

trong đó M là một đại lượng bị chặn. Ta thấy

$$O(\log\frac{1}{\delta}).M.\delta \to 0 \text{ khi } \delta \to 0$$

Cho $\delta \to 0$ trong công thức **(**1.2a**),** tính tích phân thứ nhất sẽ dần đến tích phân trong vế phải của (1.3) , tích phân thứ hai sẽ dần đến 0. Như vậy ta cũng thu được công thức (1.3) trong trường hợp này và từ đó suy ra (1.1).

***Trường hợp 3.** Bây giờ ta xét trường hợp tổng quát, tức là $f(z)$ có các không điểm và cực điểm trong $|z| \le R$ đặt

$$\psi(\zeta) = f(\zeta)\frac{1}{\prod_{\mu=1}^{M}\frac{R(\zeta - a_\mu)}{R^2 - \overline{a}_\mu\zeta}}.\prod_{v=1}^{N}\frac{R(\zeta - b_v)}{R^2 - \overline{b}_v\zeta}. \qquad (1.4)$$

Hiển nhiên hàm $\psi(\zeta)$ không có không điểm hoặc cực điểm trong $|\zeta| < R$. Như vậy chúng ta có thể áp dụng công thức (1.1a) cho hàm $\psi(\zeta)$. Hơn thế nữa, nếu $\zeta = Re^{i\phi}$ thì:

$$\left|\frac{R(\zeta - a_\mu)}{R^2 - \overline{a}_\mu\zeta}\right| = \left|\frac{R(\zeta - a_\mu)}{\zeta(\overline{\zeta} - \overline{a}_\mu)}\right| = 1 \quad \text{và} \quad \left|\frac{R(\zeta - b_v)}{R^2 - \overline{b}_v\zeta}\right| = \left|\frac{R(\zeta - b_v)}{\zeta(\overline{\zeta} - \overline{b}_v)}\right| = 1,$$

nên

$$|f(\zeta)| = |\psi(\zeta)|.$$

vậy $$\log|\psi(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\psi(Re^{i\phi})|\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2}d\phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\phi})\right| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} d\phi . \qquad (1.5)$$

Mặt khác

$$\log\left|\psi(z)\right| = \log\left|f(z)\right| - \log\sum_{\mu=1}^{M}\left|\frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \overline{a}_\mu z}\right| + \log\sum_{v=1}^{N}\left|\frac{R(z - b_v)}{R^2 - \overline{b}_v z}\right|$$

$$= \log\left|f(z)\right| - \sum_{\mu=1}^{M}\log\left|\frac{R(z - a_\mu)}{R^2 - \overline{a}_\mu z}\right| + \sum_{v=1}^{N}\log\left|\frac{R(z - b_v)}{R^2 - \overline{b}_v z}\right|.$$

Thay $\log\left|\psi(z)\right|$ vào (1.5) ta thu được kết quả.

***Ý nghĩa.** Công thức Poisson-Jensen chỉ ra rằng, nếu biết giá trị của modulus $f(z)$ trên biên, các cực điểm, không điểm của hàm $f(z)$ trong $|z| < R$, thì ta có thể tìm được giá trị của modulus $f(z)$ bên trong đĩa $|z| < R$.

***Nhận xét.** Một trường hợp quan trọng của công thức Poisson-Jensen là khi $z = 0$. Cho $z = 0$ trong định lý (1.2.1) ta thu được công thức Jensen.

$$\log f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(Re^{i\phi}\right| d\phi + \sum_{\mu=1}^{M}\log\frac{|a_\mu|}{R} - \sum_{v=1}^{N}\log\frac{|b_v|}{R} \qquad (1.6)$$

với giả thiết $f(z) \neq 0, \infty$. Khi giả thiết không thỏa mãn, tức là $f(z)$ có tại 0 cực điểm hoặc không điểm cấp k, chỉ cần thay đổi công thức thích hợp bằng cách xét hàm $f(z)/z^k$.

1.2.2. Hàm đặc trưng

1.2.2.1. Một số khái niệm

Phần này trình bày khái niệm *hàm đếm, hàm xấp xỉ, hàm đặc trưng* và các tính chất của chúng. Trước hết ta định nghĩa:

$$\log^+ x = \max\{\log x, 0\}.$$

Rõ ràng nếu $x > 0$ thì $\log x = \log^+ x - \log^+(1/x)$.

Như vậy:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(Re^{i\phi})\right|d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(Re^{i\phi})\right|d\phi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|\frac{1}{f(Re^{i\phi})}\right|d\phi\ .$$

Ta đặt

$$m(R,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+\left|f(Re^{i\phi})\right|d\phi\ . \qquad (1.7)$$

Gọi $r_1, r_2, ..., r_N$, là các mô đun của các cực điểm $b_1, b_2, ..., b_N$ của $f(z)$ trong $|z| < R$. Khi đó

$$\sum_{v=1}^{N}\log\left|\frac{R}{b_v}\right| = \sum_{v=1}^{N}\log\frac{R}{r_v} = \int_0^R \log\frac{R}{t}dn(t,f)\ . \qquad (1.8)$$

trong đó $n(t,f)$ là số cực điểm của hàm $f(z)$ trong $|z| < t$, cực điểm bậc q được đếm q lần.

Thật vậy, trước hết bằng phương pháp tích phân từng phần ta có:

$$\int_0^R \log\frac{R}{t}dn(t,f) = \log\frac{R}{t}.n(t,f)\,|_0^R - \int_0^R n(t,f)d\log\frac{R}{t} = \int_0^R n(t,f)\frac{dt}{t}. \quad \text{(a)}$$

Mặt khác không mất tính tổng quát ta giả sử $0 \le r_1 \le r_2 \le ... r_N < R$. Khi đó

$$\int_0^R n(t,f)\frac{dt}{t} = \int_0^{r_1} n(t,f)\frac{dt}{t} + \int_{r_1}^{r_2} n(t,f)\frac{dt}{t} + ... + \int_{r_N}^R n(t,f)\frac{dt}{t}\ .$$

Ta thấy rằng:

$$n(t,f) = \begin{cases} 0 & \text{với } t \le r_1 \\ 1 & \text{với } r_1 \le t \le r_2 \\ 2 & \text{với } r_2 \le t \le r_3 \\ ... & \\ N & \text{với } r_{\mathrm{N}} \le t \le R \end{cases}$$

Nên

$$\int_0^R n(t,f)\frac{dt}{t} = \int_0^{r_1} n(t,f)\frac{dt}{t} + \int_{r_1}^{r_2} n(t,f)\frac{dt}{t} + ... + \int_{r_N}^R n(t,f)\frac{dt}{t} =$$

$$= \int_0^{r_1} 0.\frac{dt}{t} + \int_{r_r}^{r_2} 1.\frac{dt}{t} + \ldots + \int_{r_N}^{R} N.\frac{dt}{t}$$

$$= \log t \,\Big|_{r_1}^{r_2} + 2\log t \,\Big|_{r_2}^{r_3} + \ldots + N \log t \,\Big|_{r_N}^{R}$$

$$= \log r_2 - \log r_1 + 2(\log r_3 - \log r_2) + \ldots + N(\log R - \log r_N)$$

$$= N \log R + (\log r_1 - \log r_2 + .. + \log r_N)$$

$$= (\log R - \log r_1) + (\log R - \log r_2) + \ldots + (\log R - \log r_N)$$

$$= \sum_{v=1}^{N} \log \frac{R}{r_v}. \qquad \text{(b)}$$

Từ (a) và (b) ta có được (1.8).

Ta định nghĩa:

$$N(R,f) = \sum_{v=1}^{N} \log \left| \frac{R}{b_v} \right| = \int_0^R n(t,f)\frac{dt}{t}, \qquad (1.9)$$

$$N(R,\frac{1}{f}) = \sum_{v=1}^{N} \log \left| \frac{R}{a_\mu} \right| = \int_0^R n(t,\frac{1}{f})\frac{dt}{t}. \qquad (1.10)$$

Với cách định nghĩa này thì công thức Jensen (1.6) sẽ được viết lại như sau

$$\log|f(0)| = m(R,f) - m(R,1/f) + N(R,f) - N(R,1/f),$$

hoặc

$$m(R,f) + N(R,f) = m(R,1/f) + N(R,1/f) + \log|f(0)|.$$

Bây giờ ta đặt:

$$T(R,f) = m(R,f) + N(R,f). \qquad (1.11)$$

Khi đó công thức Jensen đươc viết lại một cách rất đơn giản là

$$T(R,f) = T(R,\frac{1}{f}) + \log|f(0)|. \qquad (1.12)$$

Giá trị $m(R,f)$ là hàm xấp xỉ độ lớn trung bình của $\log|f(z)|$ trên $|z| = R$ trong đó $|f|$ là lớn. Giá trị $N(R,f)$ có quan hệ với các cực điểm. Hàm

$T(r,f)$ được gọi là hàm đặc trưng của $f(z)$. Nó đóng vai trò quan trọng chủ yếu trong lý thuyết của hàm phân hình.

1.2.2.2. Một số tính chất của hàm đặc trưng

Chúng ta tiếp tục nghiên cứu một số tính chất đơn giản của hàm $m(R,f)$, $N(R,f)$ và $T(R,f)$. Chú ý rằng nếu $a_1,...,a_p$ là các số phức thì

$$\log^+\left|\prod_{v=1}^{p} a_v\right| \le \sum_{v=1}^{p} \log^+|a_v|,$$

và

$$\log^+\left|\sum_{v=1}^{p} a_v\right| \le \log^+(p\max_{v=1,...,p}|a_v|) \le \sum_{v=1}^{p}\log^+|a_v| + \log p.$$

Áp dụng các bất đẳng thức trên cho hàm phân hình $f_1(z),...,f_p(z)$ và sử dụng (1.7) chúng ta thu được các bất đẳng thức sau

$$1)\quad m\left(r,\sum_{v=1}^{p} f_v(z)\right) \le \sum_{v=1}^{p} m(r,f_v(z)) + \log p,$$

$$2)\quad m\left(r,\prod_{v=1}^{p} f_v(z)\right) \le \sum_{v=1}^{p} m(r,f_v(z)),$$

$$3)\quad N\left(r,\sum_{v=1}^{p} f_v(z)\right) \le \sum_{v=1}^{p} N(r,f_v(z)),$$

$$4)\quad N\left(r,\prod_{v=1}^{p} f_v(z)\right) \le \sum_{v=1}^{p} N(r,f_v(z)),$$

sử dụng (1.11) ta thu được

$$5)\quad T\left(r,\sum_{v=1}^{p} f_v(z)\right) \le \sum_{v=1}^{p} T(r,f_v(z)) + \log p,$$

$$6)\quad T\left(r,\prod_{v=1}^{p} f_v(z)\right) \le \sum_{v=1}^{p} T(r,f_v(z)).$$

Trong trường hợp đặc biệt khi $p=2,\ f_1(z)=f(z),\ f_2(z)=a=$ constant, ta suy ra $T(r,f+a)\le T(r,f)+\log^+|a|+\log 2$. Và từ đó chúng ta có thể thay thế $f+a, f$ bởi $f, f-a$ và a bởi $-a$, suy ra:

$$|T(r,f)-T(r,f-a)|\le \log^+|a|+\log 2. \qquad (1.13)$$

1.2.3. Định lý cơ bản thứ nhất của Nevanlinna

1.2.3.1. Định lý

Giả sử f là hàm phân hình, a là một số phức tùy ý, khi đó ta có

$$m\left(R,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(R,\frac{1}{f-a}\right)=T(R,f)-\log|f(0)-a|+\varepsilon(a,R).$$

trong đó $$|\varepsilon(a,R)|\le \log^+|a|+\log 2.$$

Ta thường dùng định lý cơ bản thứ nhất dưới dạng

$$m\left(R,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(R,\frac{1}{f-a}\right)=T(R,f)+O(1),$$

trong đó $O(1)$ là đại lượng giới nội.

***Ý nghĩa.** Vế trái trong công thức của định lý đo số lần $f=a$ và f *gần* a, vế phải là hàm $T(r,f)$ không phụ thuộc vào a, sai khác một đại lượng giới nội.

Chứng minh.

Theo (1.11) và (1.12) ta có:

$$m\left(R,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(R,\frac{1}{f-a}\right)=T\left(R,\frac{1}{f-a}\right)=T(R,f-a)+\log|f(0)-a|$$

Từ (1.13) ta suy ra $T(R,f-a)=T(R,f)+\varepsilon(a,R)$ với $|\varepsilon(a,R)|\le \log^+|a|+\log 2$. Từ đó ta có

$$m\left(R,\frac{1}{f-a}\right)+N\left(R,\frac{1}{f-a}\right)=T(R,f)+\log|f(0)-a|+\varepsilon(a,R),$$

với $|\varepsilon(a,R)|\le \log^+|a|+\log 2$. Định lý được chứng minh xong.

***Nhận xét.** Nếu hàm f cố định, ta có thể viết $m(R,a), N(R,a), n(R,a), T(R)$ lần lượt thay cho $m(R,\dfrac{1}{f-a})$, $N(R,\dfrac{1}{f-a})$, $n(R,\dfrac{1}{f-a})$, $T(R,f)$ nếu a là hữu hạn và $m(R,\infty), N(R,\infty), n(R,\infty)$ thay cho $m(R,f)$, $N(R,f)$, $n(R,f)$.

Nếu chúng ta cho R biến thiên thì định lý cơ bản thứ nhất có thể được viết dưới dạng như sau:

$$m(R,a) + N(R,a) = T(R) + O(1),$$

với mỗi a là hữu hạn hay vô hạn. Số hạng $m(R,a)$ dần tới trung bình nhỏ nhất có thể được của $f-a$ trên vòng tròn $|z| = R$, số hạng $N(R,a)$ dần đến số nghiệm của phương trình $f(z) = a$ trong $|z| < R$. Với mỗi giá trị của a, tổng của hai số hạng này có thể xem là không phụ thuộc vào a.

1.2.3.2. Một số ví dụ

Ví dụ 1. Xét hàm hữu tỷ

$$f(z) = c\frac{z^p + ... + a_p}{z^q + ... + b_q}, \text{ trong đó } c \neq 0.$$

Đầu tiên giả sử $p > q$. Khi đó $f(z) \to \infty$ khi $z \to \infty$, như vậy khi a hữu hạn $m(r,a) = 0$ với mọi $r > r_0$ nào đó. Phương trình $f(z) = a$ có p nghiệm sao cho $n(t,a) = p (t > t_0)$, và như thế

$$N(r,a) = \int_a^r n(t,a)\frac{dt}{t} = p\log r + O(1) \quad \text{khi } r \to \infty$$

Như vậy, khi $r \to \infty$

$$T(r,f) = p\log r + O(1),$$

và $\quad N(r,a) = p\log r + O(1), \quad m(r,a) = O(1), \quad$ với $a \neq \infty$.

Nếu $p < q$, $\quad T(r,f) = q\log r + O(1),$

$$N(r,a) = q\log r + O(1), \quad m(r,a) = O(1), \quad \text{với } a \neq 0.$$

Nếu $p = q$, $\qquad N(r,f) = q\log r + O(1)$,

$$N(r,a) = q\log r + O(1), \quad m(r,a) = O(1), \qquad \text{với } a \neq c.$$

Với tính toán trên đây ta thấy rằng trong mọi trường hợp

$$T(r,f) = d.\log r + O(1),$$

$$N(r,a) = d.\log r + O(1), \quad m(r,a) = O(1), \qquad \text{với } a \neq f(\infty).$$

trong đó $d = \max(p,q)$.

Như vậy trong trường hợp này, $m(r,a)$ là bị chặn khi $r \to \infty$ ngoại trừ một giá trị của a là $f(\infty)$. Nếu phương trình $f(z) = a$ có nghiệm bội α tại ∞ với $0 < \alpha < d$, thì

$$m(r,a) = \alpha \log r + O(1), \quad N(r,a) = (d-a)\log r + O(1).$$

Ví dụ 2. Xét hàm $f(z) = e^z = e^{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$, với $z = re^{i\theta}$. Khi đó

$$\log^+|f(z)| = \log^+\left|f(re^{i\theta})\right| = \log^+\left|e^{r\cos\theta a + ir\sin\theta}\right| = \log^+ e^{r\cos\theta}$$

$$= \begin{cases} \log e^{r\cos\theta} & \text{với } \cos\theta \geq 0 \\ 0 & \text{với } \cos\theta < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \log e^{r\cos\theta} & \text{với } -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 & \text{với } \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} r\cos\theta & \text{với } -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 & \text{với } \pi/2 < \theta < 3\pi/2 \end{cases}.$$

Từ đó ta có

$$m(f,a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\theta})\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos\theta\, d\theta = r/\pi .$$

Do hàm e^z không có không điểm trong $|z| < r$ nên $N(r,f) = 0$. Từ đó ta có

$$T(r,f) = m(r,\infty) + N(r,\infty) = r/\pi .$$

Như vậy $T(r,f) \sim r/\pi$.

Ví dụ 3. Xét $P(z) = az^p + ... + a_p$ là một đa thức và $f(z) = e^{P(z)}$. Khi đó

$$f(z) = e^{P(z)} = e^{az^p + ... + a_p}.$$

Như vậy $T(r,f) \leq T(r,e^{az^p}) + ... + T(r,e^{a_p}) \sim p.T(r,e^{az^p}) + \log^+ e^{a_p}$

$$= p.T(r,e^{az^p}) + O(1).$$

Bây giờ ta sẽ tính $T(r,e^{az^p})$. Đặt $g = e^{az^p}$.

$$T(r,g) = m(r,g) + N(r,g).$$

Do g chỉnh hình nên

$$N(r,g) = 0 \text{ suy ra } T(r,g) = m(r,g) = m(r,e^{az^p}).$$

$$m(r,e^{az^p}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left| e^{a(re^{i\phi})p} \right| d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \left| e^{ar^p \cos(p\phi) + i\sin(p\phi))} \right| d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a|.r^p.\cos(p\phi)} d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2p}^{\pi/2p} |a|.r^p.\cos(p\phi) d\phi$$

$$= \frac{1}{2\pi}.\frac{1}{p}|a|.r^p \sin(p\phi)\Big|_{-\pi/2p}^{\pi/2p} = \frac{|a|r^p}{\pi p}.$$

Như vậy $T(r,g) = \dfrac{|a|r^p}{\pi p}$ suy ra $T(r,f) = \dfrac{|a|}{\pi} r^p + O(1)$.

Ví dụ 4. Giả sử rằng $f(z) = e^{e^z}$ khi đó ta có thể chứng minh được rằng

$$T(r,f) \sim \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{1/2}}.$$

(ví dụ này được đưa ra bởi Arakeljan).

Ví dụ 5. Giả sử rằng $f(z)$ là một hàm phân hình trong $|z| < R,$ và

$$g(z) = \frac{af+b}{cf+d},$$

trong đó a,b,c,d là các hằng số thỏa mãn $ad - bc \neq 0$, và nếu $f(0) \neq 0$, $g(0) \neq \infty$ thì

$$T(r,f) = T(r,g) + O(1), \text{ với } 0 < r < R$$

Thật vậy, ta xét các hàm số sau đây:

$$f_0 = f;\ f_1 = f_0 + d/c;\ f_2 = c.f_1;\ f_3 = 1/f_2;\ f_4 = \frac{(bc-ad)f_3}{c},$$

$$g = f_5 = f_4 + a/c,$$

Theo các tính chất của số hạng $T(r,f)$ ta có

$$T(r,f+c) \leq T(r,f) + T(r,c) + \log 2 = T(r,f) + \log^+|c| + \log 2,$$

nên
$$T(r,f+c) = T(r,f) + O(1);$$

và
$$T(r,cf) \leq T(r,f) + T(r,c) = T(r,f) + \log^+|c|,$$

do đó $T(r,cf) = T(r,f) + O(1)$, với $f(z)$ là hàm phân hình trong $|z| < R$, c là hằng số. Từ đó chúng ta thu được, nếu $c \neq 0$ thì

$$f(r,f_{v+1}) = T(r,f_v) + O(1), \quad (v = 0...4)\ .$$

Như thế: $T(r,f) = T(r,f_0) = T(r,f_1) + O(1) = T(r,f_2) + O(1)$

$$= T(r,f_3) + O(1) = T(r,f_4) + O(1) = T(r,f_5) + O(1)$$

$$= T(r,g) + O(1).$$

Ta được điều phải chứng minh.

1.2.4. Định lý Cartan về đồng nhất thức và tính lồi

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh một số định lý của H.Cartan

1.2.4.1. Định lý *Giả sử $f(z)$ là một hàm phân hình trong $|z| < R$. Khi đó:*

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,e^{i\theta})d\theta + \log^+|f(0)|, \textit{ với } (0 < r < R).$$

Chứng minh. Ta áp dụng công thức Jensen (1.6) cho hàm $f(z) = a - z$ với $R = 1$ và thu được:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|a - e^{i\theta}\right| d\theta = \begin{cases} \log|a| & \text{nếu } |a| \geq 1 \\ \log|a| - \log|a| = 0 & \text{nếu } |a| < 1 \end{cases}$$

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|a - e^{i\theta}\right| d\theta = \log^+|a|. \qquad \text{(t)}$$

Bây giờ chúng ta lại áp dụng (1.6) cho hàm số $f(z) - e^{i\theta}$ và có:

$$\log\left|f(0) - e^{i\theta}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(r.e^{i\phi}) - e^{i\theta}\right| d\phi + N(r,\infty) - N(r, e^{i\theta}).$$

Lấy tích phân hai vế theo biến θ và thay đổi thứ tự lấy tích phân trong tích phân vế phải ta có:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(0) - e^{i\theta}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(r.e^{i\phi}) - e^{i\theta}\right| d\phi\right) d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,\infty) d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}) d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(r.e^{i\phi}) - e^{i\theta}\right| d\theta\right) d\phi + N(r,\infty) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}) d\theta .$$

Áp dụng công thức (t) ta có:

$$\log^+|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\phi}\right| d\phi + N(r,\infty) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}) d\theta ,$$

Từ đó: $N(r,\infty) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\phi})\right| d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}) d\theta + \log^+|f(0)|$

$$\Leftrightarrow N(r,f) + m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}) d\theta + \log^+|f(0)|$$

$$\Leftrightarrow T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r, e^{i\theta}) d\theta + \log^+|f(0)|, \text{ với } (0 < r < R).$$

Vậy Định lý được chứng minh.

1.2.4.2. Hệ quả 1 *Hàm đặc trưng Nevanlinna* $T(r,f)$ *là một hàm lồi tăng của* $\log r$ *với* $0 < r < R$.

Chứng minh. Ta thấy rằng $N(r,e^{i\theta})$ hiển nhiên là hàm tăng, lồi của $\log r$ nên ta suy ra hàm $T(r,f)$ cũng có tính chất như vậy và bổ đề được chứng minh. Trong trường hợp này chúng ta có:

$$r\frac{d}{dr}T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(r,e^{i\theta})d\theta \ .$$

1.2.4.3. Hệ quả 2. *Trong mọi trường hợp chúng ta đều có:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta \le \log 2 .$$

Chứng minh. Sử dụng định lý cơ bản thứ nhất cho hàm $f(z)$ với $a = a^{i\theta}$ chúng ta có:

$$T(r,f) = m(r,e^{i\theta}) + N(r,e^{i\theta}) + \log\left|f(0) - e^{i\theta}\right| + G(\theta) ,$$

trong đó $G(\theta) \le \log 2$. Lấy tích phân hai vế theo biến θ ta có:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(r,f)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N(r,e^{i\theta})d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(0) - e^{i\theta}\right|d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(\theta)d\theta \ .$$

Sử dụng định lý (1.2.4.1), công thức (t) ta sẽ thu được:

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta + T(r,f) - \log^+\left|f(0)\right| + \log^+\left|f(0)\right| + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(\theta)d\theta \ .$$

Như thế

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} m(r,e^{i\theta})d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(\theta)d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log 2d\theta = \log 2 .$$

Hệ quả 2 được chứng minh.

1.3. Định lý cơ bản thứ hai

1.3.1. Giới thiệu:

Trong mục trước chúng ta đã định nghĩa hàm đặc trưng Nevanlinna và có được định lý: với mỗi số phức a, $m(R,a)+N(R,a)=T(R)+O(1)$. Từ đó chúng ta cũng thấy rằng tổng $m+N$ có thể xem là độc lập với a. Đó chính là kết quả của định lý cơ bản thứ nhất. Định lý cơ bản thứ hai sẽ cho ta thấy rằng trong trường hợp tổng quát số hạng $N(R,a)$ chiếm ưu thế trong tổng $m+N$ và thêm nữa trong $N(R,a)$ chúng ta không thể làm giảm tổng đó nhiều nếu các nghiệm bội được tính một lần. Từ kết quả này cũng suy ra định lý Picard, nói rằng hàm phân hình nhận mọi giá trị, trừ ra cùng lắm là hai giá trị.

Trong phần này, chúng tôi sẽ trình bày định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna và đưa ra một số ứng dụng trực tiếp của định lý đó.

1.3.2. Bất đẳng thức cơ bản

Để đơn giản, chúng ta sẽ viết $m(r,a)$ thay cho $m(r,1/f-a)$ và $m(r,\infty)$ thay cho $m(r,f)$.

1.3.2.1. Định lý. *Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình khác hằng số trong $|z|\le r$. Giả sử $a_1,a_2,...,a_q$ là các số phức hữu hạn riêng biệt,$\delta>0$ và $|a_\mu - a_v|\ge\delta$ với $1\le\mu<v\le q$. Khi đó:*

$$m(r,\infty)+\sum_{v=1}^{q} m(r,a_v)\le 2T(r,f)-N_1(r)+S(r),$$

trong đó: $N_1(r)$ dương và được định nghĩa bởi:

$$N_1(r)=N(r,1/f')+2N(r,f)-N(r,f'), \text{ và}$$

$$S(r)=m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+m\left(r,\sum_{v=1}^{q}\frac{f'}{f-a_v}\right)+q\log^+\frac{3q}{\delta}+\log 2+\log\frac{1}{|f'(0)|}.$$

Chứng minh. Với các số phân biệt a_v; $(1 \le v \le q)$, ta xét hàm:

$$F(z)=\sum_{v=1}^{q}\frac{1}{(f(z)-a_v)}$$

a) Giả sử rằng với một số v nào đó. $|f(z)-a_v|<\delta/3q$. Khi đó với $\mu \ne v$, ta có:

$$|f(z)-a_\mu| \ge |a_\mu - a_v| - |f(z)-a_v| \ge \delta - \frac{\delta}{3q} \ge \frac{2}{3}\delta \ .$$

Bởi vậy, với $\mu \ne v$

$$\frac{1}{|f(z)-a_\mu|} \le \frac{3}{2\delta} \le \frac{1}{2q}\frac{1}{|f(z)-a_v|}$$

Như thế ta có:

$$|F(z)| \ge \frac{1}{|f(z)-a_v|} - \sum_{\mu \ne v}\frac{1}{|f(z)-a_\mu|} \ge \frac{1}{|f(z)-a_v|}\left(1-\frac{q-1}{2q}\right) \ge \frac{1}{2|f(z)-a_v|}\,.$$

Từ đó ta có:

$$\log^+|F(z)| \ge \log^+\frac{1}{|f(z)-a_v|} - \log 2\,.$$

Trong trường hợp này:

$$\log^+|F(z)| \ge \sum_{\mu=1}^{q}\log^+\frac{1}{|f(z)-a_\mu|} - q\log^+\frac{2}{\delta} - \log 2$$

$$\ge \sum_{\mu=1}^{q}\log^+\frac{1}{|f(z)-a_\mu|} - q\log^+\frac{3q}{\delta} - \log 2\,. \qquad (*)$$

Bởi vì, với $\mu \ne v$

$$\log^+\frac{1}{|f(z)-a_\mu|} \le \log^+\frac{3}{2\delta} \le \log^+\frac{2}{\delta}\,.$$

nên ta có:

$$\sum_{\mu=1}^{q}\log^+\frac{1}{|f(z)-a_\mu|} = \log^+\frac{1}{|f(z)-a_v|} + \sum_{\mu \ne v}\log^+\frac{1}{|f(z)-a_\mu|}$$

$$\le \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_v|} + (q-1)\log^+ \frac{2}{\delta}.$$

suy ra:

$$\sum_{\mu \ne v} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_\mu|} \le (q-1)\log^+ \frac{2}{\delta}.$$

từ đó ta có:

$$\log^+ |f(z)| \ge \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_v|} - \log 2 =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_\mu|} - \sum_{\mu \ne v} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_\mu|} - \log 2$$

$$\ge \sum_{\mu=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_\mu|} - (q-1)\log^+ \frac{2}{\delta} - \log 2,$$

suy ra: $$\log^+ |F(z)| \ge \sum_{\mu=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_\mu|} - q\log^+ \frac{3q}{\delta} - \log 2.$$

Vậy (*) đã được chứng minh.

Như vậy nếu tồn tại một giá trị $v \le q$ để $|f(z)-a_v| < \delta/3q$ thì (*) hiển nhiên đúng.

b) Ngược lại, giả sử $|f(z)-a_v| \ge \delta/3q$, $\forall v$, khi đó có một điều hiển nhiên là:

$$\log^+ |F(z)| \ge \sum_{v=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_v|} - q\log^+ \frac{3q}{\delta} - \log 2.$$

Bởi vì, do $|f(z)-a_v| \ge \delta/3q$ $\forall v$ nên $\dfrac{1}{|f(z)-a_v|} \le 3q/\delta$ $\forall v$ suy ra

$$\log^+ \frac{1}{|f(z)-a_v|} \le \log^+ 3q/\delta,$$

suy ra $$\sum_{v=1}^{q} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a_v|} \le q\log^+ 3q/\delta + \log 2.$$

Từ đó: $\log^+\left|F(z)\right| \geq 0 \geq \sum_{v=1}^{q}\log^+\frac{1}{\left|f(z)-a_v\right|} - q\log^+ 3q/\delta - \log 2$.

Như vậy trong mọi trường hợp ta đều có được:

$$\log^+\left|F(z)\right| \geq \sum_{v=1}^{q}\log^+\frac{1}{\left|f(z)-a_v\right|} - q\log^+\frac{3q}{\delta} - \log 2,$$

Với $z = re^{i\theta}$ lấy tích phân hai vế chúng ta suy ra:

$$\int_0^{2\pi}\log^+\left|F(re^{i\theta})\right|d\theta \geq \int_0^{2\pi}\left(\sum_{v=1}^{q}\log^+\frac{1}{\left|f(z)-a_v\right|} - q\log^+\frac{3q}{\delta} - \log 2\right)d\theta .$$

Nên $$m(r,F) \leq \sum_{v=1}^{q} m(r,a_v) - \log^+\frac{3q}{\delta} - \log 2. \qquad (1.14)$$

mặt khác, ta xét:

$$m(r,F) = m\left(r,\frac{1}{f}\frac{f}{f'}f'F\right) \leq m\left(r,\frac{1}{f}\right) + m\left(r,\frac{f}{f'}\right) + m(r,f'F). \qquad (1a)$$

Theo công thức Jensen (1.12) ta có:

$$T(r,f) = T(r,1/f) + \log\left|f(0)\right|,$$

$$T\left(r,\frac{f}{f'}\right) = T\left(r,\frac{f'}{f}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|, \text{ hay}$$

$$m\left(r,\frac{f}{f'}\right) + N\left(r,\frac{f}{f'}\right) = m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + N\left(r,\frac{f'}{f}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|$$

suy ra:

$$m\left(r,\frac{f}{f'}\right) = m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + N\left(r,\frac{f'}{f}\right) - N\left(r,\frac{f}{f'}\right) + \log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right| \qquad (2a)$$

và ngoài ra ta có:

$$T(r,f) = m\left(r,\frac{1}{f}\right) + N\left(r,\frac{1}{f}\right) + \log\left|f(0)\right|$$

Hay

$$m\left(r,\frac{1}{f}\right)=T(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log\frac{1}{|f(0)|}\,. \qquad (3a)$$

Kết hợp (2a) và (3a) thay vào bất đẳng thức (1a) ta được:

$$m(r,F)\le T(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\log\frac{1}{|f(0)|}+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+$$

$$+N\left(r,\frac{f'}{f}\right)-N\left(r,\frac{f}{f'}\right)+\log\left|\frac{f(0)}{f^{'}(0)}\right|+m(r,f'F)\,.$$

Bất đẳng thức trên kết hợp với (1.14) chúng ta sẽ có:

$$\sum_{v=1}^{q}m(r,a_v)+m(r,\infty)\le m(r,F)+m(r,f)+q\log^{+}\frac{3q}{\delta}+\log 2$$

$$\le T(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N\left(r,\frac{f'}{f}\right)-N\left(r,\frac{f}{f'}\right)+m\left(r,\frac{f'}{f}\right)+$$

$$+m(r,f'F)+\log\frac{1}{|f'(0)|}+T(r,f)-N(r,f)+q\log^{+}\frac{3q}{\delta}+\log 2\,.$$

Sử dụng công thức Jensen cho hàm $\frac{f}{f^{'}}$ ta có:

$$\log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f(re^{i\phi})}{f'(re^{i\phi})}\right|d\phi+N\left(r,\frac{f}{f'}\right)-N\left(r,\frac{f'}{f}\right)$$

Suy ra:

$$N\left(r,\frac{f'}{f}\right)-N\left(r,\frac{f}{f'}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|\frac{f(re^{i\phi})}{f'(re^{i\phi})}\right|d\phi-\log\left|\frac{f(0)}{f'(0)}\right|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f(re^{i\phi})\right|d\phi-\log|f(0)|$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|f'(re^{i\phi})\right|d\phi-\log|f'(0)|$$

$$=N\left(r,\frac{1}{f}\right)-N(r,f)-N\left(r,\frac{1}{f'}\right)+N(r,f')\,.$$

Cuối cùng chúng ta nhận được:

$$\sum_{v=1}^{q} m(r,a_v) + m(r,\infty) \le 2T(r,f) - \left\{2N(r,f) - N(r,f') + N(r,\frac{1}{f'})\right\}$$

$$+m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + m(r,f'F) + \log\frac{1}{|f'(0)|} + q\log^{+}\frac{3q}{\delta} + \log 2\,.$$

Chú ý rằng $m(r,f'F) = m\left(r,\sum_{v=1}^{q}\frac{f'}{f-a_v}\right)$ và đặt

$$N_1(r) = N(r,1/f') + 2N(r,f) - N(r,f')\,,$$

và $S(r) = m\left(r,\frac{f'}{f}\right) + m\left(r,\sum_{v=1}^{q}\frac{f'}{f-a_v}\right) + q\log^{+}\frac{3q}{\delta} + \log 2 + \log\frac{1}{|f'(0)|}\,,$

khi đó ta có:

$$\sum_{v=1}^{q} m(r,a_v) + m(r,\infty) \le 2T(r,f) - N_1(r) + S(r)\,.$$

Đây là điều cần chứng minh.

1.3.2.2. Nhận xét

$N_1(r)$ trong định lý (1.3.2.1) là dương vì:

$$N(r,f) = \sum_{v=1}^{q}\log\left|\frac{R}{b_v}\right|,$$

trong tổng trên nếu b_v là cực điểm bội k thì được tính k lần. Giả sử $b_1,...,b_N$ là các cực phân biệt của $f(z)$ với cấp lần lượt là: $k_1,...,k_N$. Xét tại điểm b_v ta thấy khai triển của $f(z)$ sẽ có dạng:

$$f(z) = \frac{c_{-k_v}}{(z-b_v)^{k_v}} + \ldots$$

Khi đó $f'(z)$ sẽ có khai triển là:

$$f(z) = \frac{c_{-k_v-1}}{(z-b_v)^{k_v+1}} + \ldots$$

Tức là b_v sẽ là cực điểm cấp $k_v + 1$ của hàm $f'(z)$. Như vậy $b_1,...,b_N$ sẽ là các cực điểm của $f'(z)$ với cấp lần lượt là $k_1+1,...,k_N+1$. Tất nhiên $f'(z)$ không có cực điểm nào khác. Như vậy:

$$N(r,f)=\sum_{v=1}^{N}k_v\log\left|\frac{R}{b_v}\right| \quad \text{và} \quad N(r,f')=\sum_{v=1}^{N}(k_v+1)\log\left|\frac{R}{b_v}\right|,$$

Nên: $$2N(r,f)-N(r,f')=\sum_{v=1}^{N}2k_v\log\left|\frac{R}{b_v}\right|-\sum_{v=1}^{N}(k_v+1)\log\left|\frac{R}{b_v}\right|$$

$$=\sum_{v=1}^{N}((2k_v-(k_v+1))\log\left|\frac{R}{b_v}\right|$$

$$=\sum_{v=1}^{N}(2k_v-1)\log\left|\frac{R}{b_v}\right|\geq 0.$$

Từ đó ta có:

$$N_1(r)=N(r,1/f')+2N(r,f)-N(r,f')\geq 0.$$

1.3.3. Định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna

Định lý.

Giả sử f là một hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$ và $a_1,a_2,...,a_q$ là $q>2$ điểm phân biệt. Khi đó

$$(q-1)T(r,f)\leq N(r,f)+\sum_{j=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)-N_1(r,f)+S(r,f)$$

$$\leq \overline{N}(r,f)+\sum_{j=1}^{q}\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-a_j}\right)-N_0(r,f)+S(r,f).$$

trong đó $S(r,f)=o(T(r,f))$ khi $r\to\infty$, r nằm ngoài một tập có độ đo hữu hạn, $N_1(r,f)=N(r,1/f')+2N(r,f)-N(r,f')$ và $N_0(r,1/f')$ là hàm đếm tại các không điểm của f mà không phải là không điểm của $f-a_j$, với $j=1...q$..

1.3.4. Quan hệ số khuyết

Chúng ta kí hiệu lại: $n(t,a) = n(t,a,f)$ là số các nghiệm của phương trình $f(z) = a$ trong $|z| < t$, nghiệm bội được tính cả bội và kí hiệu $\overline{n}(t,a)$ là số nghiệm phân biệt của $f(z) = a$ trong $|z| < t$. Tương ứng ta định nghĩa:

$$N(r,a) = N(r,a,f) = \int_0^r \frac{n(t,a) - n(0,a)}{t} dt + n(0,a)\log r,$$

$$\overline{N}(r,a) = \overline{N}(r,a,f) = \int_0^r \frac{\overline{n}(t,a) - \overline{n}(0,a)}{t} dt + \overline{n}(0,a)\log r.$$

Như trước đây, chúng ta sẽ kí hiệu $N(r,f)$, $T(r,f)$ tương ứng thay cho $N(r,\infty,f)$, $T(r,\infty,f)$. Chúng ta sẽ giả sử rằng $f(z)$ là hàm phân hình trong $|z| < R_0$, và như thế: $T(r,f) \to +\infty$ khi $r \to R_0$,

Theo định lý (1.2.3.1): $m(r,a) + N(r,a) = T(r,f) + O(1)$, khi $r \to R_0$.

Chúng ta định nghĩa:

$$\delta(a) = \delta(a,f) = \underline{\lim}_{r\to R_0} \frac{m(r,a)}{T(r)} = 1 - \overline{\lim}_{r\to R_0} \frac{N(r,a)}{T(r)};$$

$$\Theta(a) = \Theta(a,f) = 1 - \overline{\lim}_{r\to R_0} \frac{\overline{N}(r,a)}{T(r)};$$

$$\theta(a) = \theta(a,f) = \underline{\lim}_{r\to R_0} \frac{N(r,a) - \overline{N}(r,a)}{T(r)}.$$

Hiển nhiên, cho cho $\varepsilon > 0$, với r đủ gần R_0 chúng ta có:

$$N(r,a) - \overline{N}(r,a) > \{\theta(a) - \varepsilon\}T(r), \quad N(r,a) < \{1 - \delta(a) + \varepsilon\}T(r).$$

và từ đó ta có: $\overline{N}(r,a) < \{1 - \delta(a) - \theta(a) + 2\varepsilon\}T(r),$

như vậy: $\Theta(a) \geq \delta(a) + \theta(a)$.

Lượng $\delta(a)$ được gọi là *số khuyết* của giá trị a, $\theta(a)$ gọi là *bậc của bội*.

Bây giờ chúng ta chứng minh một kết quả cơ sở của lý thuyết Nevanlinna Định lý sau đây được gọi là *quan hệ số khuyết*.

1.3.4.1. Định lý. *Giả sử* $f(z)$ *là hàm phân hình khác hằng số trong* $|z| < R_0$. *Khi đó tập hợp các giá trị của* a *mà* $\Theta(a) > 0$ *cùng lắm là đếm được, đồng thời ta có:*

$$\sum_a \{\delta(a) + \theta(a)\} \leq \sum_a \Theta(a) \leq 2.$$

Chứng minh. $S(r_n, f) = o\{T(r_n, f)\}$ khi $r_n \to R_0$.

Chúng ta chọn một dãy $\{r_n\}$, sao cho $r_n \to R_0$ khi $n \to \infty$. Xét q điểm khác nhau $a_1, a_2, ..., a_q$. Theo bất đẳng thức cơ bản ta có:

$$m(r_n, \infty) + \sum_{v=1}^{q} m(r_n, a_v) \leq 2T(r_n, f) - N_1(r_n) + o(T(r_n, f)).$$

Cộng thêm đại lượng $N(r_n, \infty) + \sum_{v=1}^{q} N(r_n, a_v)$ vào hai vế của bất đẳng thức trên, ta có:

$$T(r_n, f) + qT(r_n, f) \leq 2T(r_n, f) + N(r_n, \infty) + \sum_{v=1}^{q} N(r_n, a_v) - N_1(r_n) + o(T(r_n, f)).$$

Suy ra:

$$\{(q-1)T(r_n, f) + o(T(r_n, f))\} \leq N(r_n, \infty) + \sum_{v=1}^{q} N(r_n, a_v) - N_1(r_n) .$$

Mặt khác ta biết: $N_1(r_n) = N(r_n, 1/f') + 2N(r_n, f) - N(r_n, f')$. Đặt:

$$A = N(r_n, \infty) + \sum_{v=1}^{q} N(r_n, a_v) - N(r_n, 1/f') - 2N(r_n, f) + N(r_n, f') .$$

Khi đó bất đẳng thức trên được viết lại là:

$$\{(q-1)T(r_n, f) + o(T(r_n, f))\} \leq A . \tag{1.15}$$

Giả sử f có cực điểm cấp k tại a_v, khi đó:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - a_v)^k} + ...$$

$$f'(z) = \frac{c'_{-k-1}}{(z-a_v)^{k+1}} + \dots$$

Do đó a_v sẽ là cực điểm cấp $k+1$ của f'.

Giả sử b_v; $v = \overline{1,p}$ là các cực điểm phân biệt của hàm f, với bội tương ứng là $k_1, k_2, \dots, k_p$ Khi đó:

$$N(r_n,\infty) = N(r_n,f) = \sum_{v=1}^{p} k_p \log\left|\frac{r_n}{b_v}\right|; \quad N(r_n,f') = \sum_{v=1}^{p}(k_p+1)\log\left|\frac{r_n}{b_v}\right|.$$

Từ đó

$$N(r_n,\infty) - 2N(r_n,f) + N(r_n,f') = \sum_{v=1}^{p}(k_p - 2k_p + k_p + 1)\log\left|\frac{r_n}{b_v}\right|$$

$$= \sum_{v=1}^{p}\log\left|\frac{r_n}{b_v}\right| = \bar{N}(r_n,\infty).$$

Như vậy (1.15) có thể viết lại như sau:

$$\{q-1+o(1)\}T(r_n,f) \le \sum_{v=1}^{q} N(r_n,a_v) + \bar{N}(r_n,\infty) - N(r_n,1/f').$$

Chúng ta thấy rằng một nghiệm của phương trình $f(z) = a_v$ có bậc p thì nó cũng là không điểm bậc $p-1$ của $f'(z)$ và như thế nó đóng góp một lần vào $n(t,a_v) - n(t,1/f')$. Như vậy chúng ta có thể viết lại bất đẳng thức trên như sau:

$$\{q-1+o(1)\}T(r_n,f) \le \sum_{v=1}^{q} \bar{N}(r_n,a_v) + \bar{N}(r_n,\infty) - N_0(r_n,1'/f). \qquad (1.16)$$

Trong đó $N_0(r_n,1/f')$ được tính tại những điểm là không điểm của f' nhưng không phải là nghiệm của phương trình $f(z) = a_v$, với $v = 1 \dots q$. Chú ý rằng $N_0(r_n,1/f') \ge 0$ nên từ (1.16) ta có

$$\{q-1+o(1)\}T(r_n,f) \le \sum_{v=1}^{q} \bar{N}(r_n,a_v) + \bar{N}(r_n,\infty). \qquad (1.17)$$

Chia cả hai vế của (1.17) cho $T(r_n, f)$ và bỏ qua đại lượng $o(1)$ ta có:

$$\sum_{v=1}^{q}\frac{\overline{N}(r_n,a_v)}{T(r_n,f)}+\frac{\overline{N}(r_n,\infty)}{T(r_n,f)}\geq q-1.$$

Lấy giới hạn khi $r_n \to R_0$ ta suy ra:

$$\overline{\lim_{r_n\to R_0}}\sum_{v=1}^{q}\frac{\overline{N}(r_n,a_v)}{T(r_n,f)}+\overline{\lim_{r_n\to R_0}}\frac{\overline{N}(r_n,\infty)}{T(r_n,f)}\geq q-1,$$

hay $$\sum_{v=1}^{q}\overline{\lim_{r_n\to R_0}}\sum_{v=1}^{q}\frac{\overline{N}(r_n,a_v)}{T(f)}+\overline{\lim_{r_n\to R_0}}\frac{\overline{N}(r_n,\infty)}{T(f)}\geq q-1,$$

tức là $$\sum_{v=1}^{q}\{1-\Theta(a_v)\}+1-\Theta(\infty)\geq q-1,$$

hay $$\sum_{v=1}^{q}\Theta(a_v)+\Theta(\infty)\leq 2,$$

Do q bất kỳ nên định lý được chứng minh xong.

Chúng ta có định lí sau, là hệ quả trực tiếp của quan hệ số khuyết.

1.3.4.2. Định lý Picard. *Giả sử $f(z)$ là hàm phân hình, không nhận 3 giá trị $0,1,\infty$ Khi đó f là hàm hằng.*

Chứng minh. Giả sử f không phải là hàm hằng. Không mất tổng quát, có thể xem $f(z)$ không nhận 3 giá trị $0,1,\infty$. Từ đó, $\overline{N}(r,0)=0$; $\overline{N}(r,1)=0$; $\overline{N}(r,f)=0$.

Suy ra $\Theta(0)=1$; $\Theta(1)=1$; $\Theta(\infty)=1$, nên $\sum_{a\in\overline{\mathbb{C}}}\Theta(a)\geq 3$: điều này mâu thuẫn với quan hệ số khuyết. Vậy $f(z)$ phải là hàm hằng.

1.4. Một số ứng dụng của các định lý cơ bản

1.4.1. Một số ví dụ:

Ví dụ 1: Giả sử $f(z)=a$ vô nghiệm. Khi đó ta có $N(r,a)=0,\ \forall r$ suy ra $\delta(a)=1$. Chẳng hạn: $f=e^z \Rightarrow \delta_f(0)=1$.

Ví dụ 2: Giả sử có $N(r,a) = O(T(r,f)) \Rightarrow \delta(a) = 1$ (số khuyết bằng 1 khi số nghiệm của phương trình quá ít so với cấp tăng của nó).

Ví dụ 3: cho f là một hàm phân hình, khi đó tập hợp các giá trị của a sao cho phương trình $f(z) = a$ gồm toàn nghiệm bội có không quá 4 điểm.

Thật vậy, nếu mọi nghiệm của phương trình $f(z) = a$ đều là nghiệm bội thì ta có:

$$\bar{N}(r,a) \leq \frac{1}{2}N(r,a) \leq \frac{1}{2}T(r,f)$$

Suy ra: $$\frac{\bar{N}(r,a)}{T(r,f)} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \Theta(a) = 1 - \overline{\lim}\frac{\bar{N}(r,a)}{T(r,f)} \geq \frac{1}{2}.$$

Theo định lý số khuyết ta có $\sum_a \Theta(a) \leq 2$ nên số các điểm a để phương trình $f(z) = a$ gồm toàn nghiệm bội sẽ không quá 4 điểm.

Trong thực tế tồn tại hàm phân hình mà có 4 giá trị của a để phương trình $f(z) = a$ gồm toàn nghiệm bội 2. Đó chính là hàm elliptic Weiestrass $\wp(z)$, là hàm thoả mãn phương trình:

$$\wp'(z)^2 = (\wp(z) - a_1)(\wp(z) - a_2)(\wp(z) - a_3).$$

với a_1, a_2, a_3 là các số phức hữu hạn phân biệt. Rõ ràng $\wp'(z) = 0$ khi $\wp(z) = a_v$ với $v = 1,2,3$. Như vậy, mọi nghiệm của 3 phương trình $\wp(z) = a_1$; $\wp(z) = a_2$; $\wp(z) = a_3$ đều là nghiệm bội. Ngoài ra hàm elliptic Weiestrass có cực điểm bội 2 tại ∞. Đặt $E = \{a_1, a_2, a_3, \infty\}$ Từ đó ta sẽ có:

$$\Theta(a) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } a \notin E \\ \dfrac{1}{2} & \text{nếu } a \in E \end{cases}$$

Và

$$\sum \Theta(a) = 2.$$

Ví dụ 4: Giả sử f là hàm nguyên, khi đó f không có cực điểm nên $\Theta(\infty)=1.$ Như vậy $\sum_{a\in C}\Theta(a)\le 1.$ Từ đó suy ra phương trình $f(z)-a=0$ có nghiệm với mọi a trong mặt phẳng phức, trừ ra cùng lắm một giá trị. Chẳng hạn ta thấy hàm $f(z)=e^z$ là chỉnh hình trên C và $\Theta(0)\ge\delta(0)=1,$ như thế hàm $e^z=a$ sẽ có nghiệm với mọi $a\ne 0$.

Một số vấn đề đặt ra là có bao nhiêu giá trị của a để phương trình $f(z)-a=0$ gồm toàn nghiện bội . Câu trả lời là: cùng lắm có 2 giá trị, bởi vì giả sử tại a_1 và a_2 phương trình $f(z)-a_1=0;$ $f(z)-a_2=0$ gồm toàn nghiệm bội. Khi đó $\Theta(a_1)=\Theta(a_2)=1/2,$ thế thì $\Theta(a_1)+\Theta(a_2)+\Theta(\infty)=2$ nên với tất cả các giá trị a khác $a_1;a_2$ phương trình $f(z)=a$ đều phải có nghiệm đơn. Chẳng hạn xét hàm $f(z)=\sin z$, với $a_1=1;$ $a_2=-1$ ta thấy: khi $\sin z=\pm 1$ thì $(\sin z)'=\cos z=0$ như thế nghĩa là các phương trình $\sin z=a_1;\sin z=a_2$ đều gồm toàn nghiệm bội. Nếu $\Theta(-1)\ge\theta(-1)=\dfrac{1}{2};$ $\Theta(1)\ge\theta(1)=\dfrac{1}{2}$, suy ra phương trình $\sin z=a$ sẽ có nghiệm đơn với mọi a khác -1 và +1.

Ví dụ 5: Trước hết ta định nghĩa: Giá trị a được gọi là bội ít nhất $m(m\ge 2)$ nếu các nghiệm của phương trình $f(z)=a$ bội lớn hơn hoặc bằng m. Bây giờ ta giả sử $f(z)$ là hàm phân hình và giả sử $\{a_v\}$ là tập hợp các giá trị bội ít nhất $\{m_v\}$. Khi đó ta có:

$$\overline{N}(r,a_v)\le\frac{1}{m_v}N(r,a_v)\le\frac{1}{m_v}T(r,f)+O(1).$$

từ đó ta sẽ có: $\Theta(a_v)\ge 1-\dfrac{1}{m_v}.$ Theo định lý Nevanlinna về số khuyết ta sẽ có:

$$\sum_{v}(1-\frac{1}{m_v}) \leq 2.$$

Mặt khác do $m \geq 2$ nên ta có: $\left(1-\dfrac{1}{m_v}\right) \geq \dfrac{1}{2}$. Như vậy ta thấy rằng đối với hàm phân hình thì chỉ có nhiều nhất 4 giá trị a mà nghiệm của phương trình $f(z)=a$ có bội lớn hơn hoặc bằng 2.

+) Trong trường hợp có 4 giá trị của a thoả mãn, khi đó $m_v = 2$. Ví dụ cụ thể của hàm loại này chính là hàm elliptic Weiestrass.

+) Trong trường hợp có đúng 3 giá trị của a thoả mãn, do

$$\sum_{v=1}^{3}\left(1-\frac{1}{m_v}\right) = 3-\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}\right) \leq 2$$

nên $\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{1}{m_3} \geq 1$. Khi đó chúng ta sẽ có các bộ $(m_1;m_2;m_3)$ như sau:

$(2;2;m)$ $(2;3;3)$ $(2;3;4)$ $(2;3;5)$

$(2;3;6)$ $(2;4;4)$ $(3;3;3)$.

Trường hợp $(2;2;m)$ tồn tại và ví dụ cụ thể về nó là hàm $f(z)$ là $\sin z$; $\cos z$. với $f(z)=\pm 1$ gồm toàn nghiệm bội 2 và $f(z)=\infty$. Trong các trường hợp khác, vấn đề nói chung là rất khó và đã được nhiều nhà toán học nghiên cứu và cho kết quả trong trường hợp tổng quát (Christoffel-Schwarz, Lê Văn Thiêm, Drasin…).

1.4.2. Định lý 5 điểm của Nevanlinna

1.4.2.1. Định nghĩa. Giả sử f là hàm phân hình trên $\mathbb{C}$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$. Ta định nghĩa: $\overline{E}_f(a) = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z)=a\}$ (tập các nghiệm phân biệt của phương trình $f(z)=a$).

1.4.2.2. Định lý. *Giả sử rằng* $f_1(z)$, $f_2(z)$ *là các hàm phân hình trên* $\mathbb{C}$. *Nếu tồn tại 5 điểm* a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 *sao cho:*

$$\overline{E}_{f_1}(a_j) = \overline{E}_{f_2}(a_j) \quad \forall j = 1,...,5$$

Khi đó hoặc f_1 và f_2 là hằng số hoặc $f_1 \equiv f_2$.

Chứng minh. Ta giả sử rằng f_1, f_2 là các hàm không đồng thời là các hàm hằng và cũng không đồng nhất với nhau. Gọi a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 là các số phức phân biệt sao cho: $\overline{E}_{f_1}(a_j) = \overline{E}_{f_2}(a_j) \quad \forall j = 1,...,5$. Khi đó ta viết:

$$\overline{N}_j(r) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1 - a_j}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f_2 - a_j}\right) \quad (j = 1,...,5)$$

*) Giả sử một trong hai hàm f_1, f_2 là hàm hằng, không mất tính tổng quát ta giả sử f_1=const, khi đó f_1 khác ít nhất 4 giá trị trong 5 giá trị $a_j \ (j = 1,...,5)$, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử các giá trị đó là a_1, a_2, a_3, a_4, như thế:

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f_1 - a_j}\right) = 0, \ \forall j = 1...4.$$

Vì thế:

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f_2 - a_j}\right) = 0, \ \forall j = 1...4.$$

nghĩa là $f_2(z)$ không nhận 4 giá trị a_1, a_2, a_3, a_4, theo định lý Pical $f_2(z)$ phải là hàm hằng.

*****) f_1, f_2 là các hàm khác hàm hằng, sử dụng bất đẳng thức cơ bản cho hàm f_1 với 5 điểm a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ta sẽ có:

$$m(r,\infty) + \sum_{j=1}^{5} m(r, a_j) \le 2T(r, f_1) - N(r, \frac{1}{f_1'}) - 2N(r, f_1) + N(r, f_1') + S(r).$$

Cộng thêm vào 2 vế bất đẳng thức trên một đại lượng là

$N(r,\infty) + \sum_{j=1}^{5} N(r, a_j)$, ta được:

$$6T(r,f_1) \le 2T(r,f_1) + \sum_{j=1}^{5}(N,a_j) - N(r,1/f') + N(r,\infty)$$

$$-2N(r,f_1) + N(r,f_1') + S(r).$$

Do $\sum_{j=1}^{5} N(r,a_j) - N(r,1/f') = \sum_{j=1}^{5} \overline{N}(r,a_j) - N_0(r,1/f')$, $(N_0(r,1/f')$ đo các cực điểm của $1/f'$ mà không phải là không điểm của $f-a_j$ và $N(r,\infty) =$ $N(r,f)$. Suy ra:

$$4T(r,f_1) \le \sum_{j=1}^{5} \overline{N}(r,a_j) - N_0(r,1/f') - N(r,f_1) + N(r,f_1') + S(r)$$

$$= \sum_{j=1}^{5} \overline{N}(r,a_j) - N_0(r,1/f') + \overline{N}(r,f_1) + S(r)$$

$$\le \sum_{j=1}^{5} \overline{N}(r,a_j) + \overline{N}(r,f_1) + S(r) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{5} \overline{N}_j(r) + T(r,f_1) + O(T(r,f_1).$$

Như vậy:

$$3T(r,f_1) \le \sum_{j=}^{5} \overline{N}_j(r) + o(T(r,f_1).$$

Hoàn toàn tương tự ta có:

$$3T(r,f_2) \le \sum_{j=}^{5} \overline{N}_j(r) + o(T(r,f_2)$$

Bây giờ chúng ta sẽ xét: $T\left(r,\dfrac{1}{f_1-f_2}\right)$. Theo định lý cơ bản thứ nhất chúng ta sẽ có: $T\left(r,\dfrac{1}{f_1-f_2}\right) = T(r,f_1-f_2) - \log|(f_1-f_2)(0)| + \varepsilon(a,r)$

$$= T(r,f_1-f_2) + O(1)$$

$$\leq T(r,f_1)+T(r,f_2)+O(1)$$

$$\leq \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{5}\overline{N}_j(r)+o(T(r,f_1))+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{5}\overline{N}_j(r)+o(T(r,f_2)+O(1)$$

$$\leq \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{5}\overline{N}_j(r)+o(T(r,f_1)+T(r,f_2)).$$

Ta thấy rằng, nếu z là nghiệm chung của các phương trình $f_1=a, f_2=a$ thì z là nghiệm của phương trình $f_1-f_2=0$, nên ta suy ra:

$$\sum_{j=1}^{5}\overline{N}_j(r)\leq \overline{N}\left(r,\frac{1}{f_1-f_2}\right)\leq T\left(r,\frac{1}{f_1-f_2}\right)+O(1).$$

Như vậy:

$$\sum_{j=1}^{5}\overline{N}_j(r).$$

là giới nội khi $r\to\infty$, điều này mâu thuẫn vì f_1,f_2 khác hàm hằng.

Như vậy định lý được chứng minh.

***Nhận xét:** Nghịch ảnh của 5 điểm đủ đảm bảo xác định một hàm phân hình. Số 5 đó là tốt nhất và không thể thay thế bởi số nhỏ hơn. Ta có thể lấy ví dụ để chứng tỏ điều này. Xét hàm $f=e^z; g=e^{-z}$. Với các điểm $a_1=0;$ $a_2=1;$ $a_3=-1;$ $a_4=\infty.$ Thấy rằng:

$$\overline{E}_f(a_1)=\overline{E}_q(a_1)=\emptyset,$$

$$\overline{E}_f(a_2)=\overline{E}_q(a_2)=\{2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}\},$$

$$\overline{E}_f(a_3)=\overline{E}_q(a_3)=\{(2k+1)\pi i,\ k\in\mathbb{Z}\}.$$

$$\overline{E}_f(a_4)=\overline{E}_q(a_4)=\emptyset.$$

Nhưng $f\not\equiv g$ và là các hàm khác hằng trên $\overline{\mathbb{C}}$.

Chương 2

PHƯƠNG TRÌNH HÀM $P(f)=Q(g)$

2.1. Giới thiệu:

Trong phần này, chúng ta sẽ nghiên cứu sự tồn tại nghiệm f,g đối với phương trình hàm $P(f)=Q(g)$, khi P,Q là 2 đa thức thuộc $\mathbb{C}[z]$.

Ta nhắc lại *Bài toán thứ 10* nổi tiếng của Hilbert: tìm thuật toán chỉ ra tất cả nghiệm nguyên của phương trình $F(x,y)=0$, khi $F(x,y)$ là một đa thức. Thue đã chứng minh được rằng phương trình $F(x,y)=d$ chỉ tồn tại một số hữu hạn nghiệm nguyên, khi $F(x,y)$ là đa thức thuần nhất bậc $n\geq 3$ với x,y nguyên, $F(x,y)$ bất khả quy trong miền hữu tỷ. Đối với hàm $F(x,y)$ không thuần nhất, vấn đề sẽ khó xử lý hơn. Cho đường cong γ xác định bởi phương trình bậc 3: $y^2=x^3-nx-m$, trong đó m,n đều nguyên. Định lý Mordell-Weil [4] nói rằng: tồn tại một tập hợp hữu hạn điểm (x_m,y_m) trên γ sao cho mọi điểm (x,y) khác mà toạ độ đều là các số hữu tỷ có thể nhận được từ tập hợp trên bằng phương pháp tiếp tuyến dây cung .

Một cách tự nhiên, người ta nghiên cứu tương tự vấn đề thứ 10 của Hilbert đối với các hàm phân hình. Đặc biệt hơn, chúng ta đặt câu hỏi đối với phương trình $F(x,y)=0$, (F là đa thức với x và y là các biến): có hay không nghiệm f, g khác hằng số, thoả mãn $F(f,g)=0$? Đầu những năm 1920, sử dụng lý thuyết phân phối giá trị, Nevanlinna đã chứng minh rằng một hàm phân hình khác hằng số được xác định duy nhất bởi nghịch đảo của 5 giá trị phân biệt .

Năm 1982 Gross-Yang [1] đã mở rộng bằng cách xem xét nghịch ảnh của một tập hợp, tức là xét vấn đề khi nào thì với tập S điều kiện:

$f^{-1}(S) = g^{-1}(S)$ đối với 2 hàm khác hằng f và g suy ra $f = g$? Liên quan đến vấn đề trên, Li- Yang [3] đưa ra khái niệm sau:

2.2. Đa thức xác định duy nhất hàm phân hình

Trong phần này, chúng ta sẽ sử dụng một số kí hiệu sau: m_0 là một số nguyên dương hoặc bằng ∞, $\widehat{\mathbb{C}}$ là không gian xạ ảnh một chiều trên $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}$ là một họ hàm nào đó xác định trên $\mathbb{C}$, lấy giá trị trên $\widehat{\mathbb{C}}$.

2.2.1. Định nghĩa.

Đa thức khác hằng $P(z)$ được gọi là *đa thức xác định duy nhất* nếu điều kiện $P(f) = P(g)$ với hai hàm f và g khác hằng số kéo theo $f = g$.

2.2.2. Định nghĩa.

Đa thức khác hằng $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ được gọi là *đa thức xác định duy nhất mạnh* (hay *đa thức duy nhất mạnh*) đối với họ hàm $\mathcal{F}$ nếu đối với các hàm khác hằng $f, g \in \mathcal{F}$ và hằng số khác không $c \in \mathbb{C}$, thoả mãn điều kiện $P(f) = cP(g)$ thì $f = g$. Tương tự, đa thức khác hằng $P(z) \in K[z]$ được gọi là *đa thức xác định duy nhất yếu* (hay *đa thức duy nhất yếu*) cho $\mathcal{F}$ nếu đối với các hàm khác hằng $f, g \in \mathcal{F}$ thoả mãn điều kiện $P(f) = P(g)$ thì $f = g$.

***Chú ý:** Từ nay nếu không nói gì thêm, ta hiểu đa thức duy nhất mạnh (hay đa thức duy nhất yếu) là đa thức xác định duy nhất mạnh (hay đa thức xác định duy nhất yếu) cho các hàm phân hình.

2.2.3. Định nghĩa. Giả sử $P(z)$ là đa thức bậc q và $P'(z)$ có dạng:

$$P'(z) = q(z - d_1)^{q_1}(z - d_2)^{q_2}...(z - d_k)^{q_k},$$

trong đó $q_1 + q_2 + ... + q_k = q - 1$. Khi đó k được gọi là *chỉ số đạo hàm* của $P(z)$. Nói cách khác chỉ số đạo hàm của $P(z)$ là số nghiệm phân biệt của đa thức đạo hàm của đa thức đó.

***Nhận xét:**

Giả sử $P(z)$ là đa thức xác định duy nhất các hàm phân hình. Khi đó chỉ số đạo hàm của $P(z)$ phải lớn hơn 1.

Chứng minh. Giả sử chỉ số đạo hàm của $P(z)$ bằng 1, nghĩa là

$$P'(z) = q(z-d)^{q-1} \Rightarrow P(z) = (z-d)^q + C.$$

Ta lấy bất kỳ hàm $f(z)$ khác hằng nào đó và đặt hàm:

$$g(z) = \zeta f(z) + (1-\zeta)d, \text{ trong đó } \zeta \in \mathbb{C};\ \zeta^q = 1.$$

Hiển nhiên $f(z) \neq g(z)$. Nhưng khi đó:

$$P(g) = (\zeta f + (1-\zeta)d - d)^q + C = (\zeta(f-d))^q + C$$

$$= \zeta^q (f-d)^q + C = (f-d)^q + C = P(f).$$

Với nhận xét này, từ nay về sau khi xét đến đa thức duy nhất chúng ta sẽ chỉ xét các đa thức có chỉ số đạo hàm lớn hơn hoặc bằng 2.

2.2.4. Ví dụ.

Xét đa thức: $$P(z) = z^{2n} + z^{2n-2} + ... + z^2 + a.$$

Xét hàm $f(z)$ bất kỳ và $g(z) = -f(z)$. Hiển nhiên $f(z) \neq g(z)$ nhưng $P(f) = P(g)$. Như vậy $P(z)$ không phải là đa thức xác định duy nhất hàm phân hình.

Một vấn đề đặt ra là làm thế nào để có thể tìm được các đa thức là đa thức duy nhất. Rất nhiều nhà toán học đã nghiên cứu về vấn đề này và đã đưa ra được rất nhiều điều kiện đại số để một đa thức là đa thức duy nhất. Tiếp theo tôi sẽ trình bày một trong số *điều kiện đại số* đó.

2.2.5 Điều kiện (H) (*Hirotaka Fujimoto*).

2.2.5.1. Định nghĩa. Đa thức $P(z)$ có $P'(z) = q(z-d_1)^{q_1}(z-d_2)^{q_2}...(z-d_k)^{q_k}$ được gọi là thoả mãn điều kiện (H) nếu:

$$P(d_i) \neq P(d_j),\ \ \forall i \neq j.$$

2.2.5.2. Định lý. *Giả sử $P(z)$ là đa thức thoả mãn điều kiện (H) và có chỉ số đạo hàm lớn hơn hoặc bằng 4. Khi đó $P(z)$ là đa thức xác định duy nhất hàm phân hình.*

Chứng minh.

Giả sử $P(z)$ thoả mãn điều kiện (H) và chỉ số đạo hàm lớn hơn hoặc bằng 4, nghĩa là: $P'(z) = q(z-d_1)^{q_1}(z-d_2)^{q_2}...(z-d_k)^{q_k}$, với $k \geq 4$.

Khi đó $P(z)$ sẽ có bậc lớn hơn hoặc bằng 5.

Giả sử $P(z)$ không phải là đa thức xác định duy nhất, tức là tồn tại các hàm phân hình $f(z) \neq g(z)$ khác hằng để $P(f) = P(g)$. Đặt hàm

$$\phi(z) = \frac{1}{f(z)} - \frac{1}{g(z)} \neq 0.$$

Khi đó:

$$T(r,\phi) \leq T(r,\frac{1}{f}) + T(r,\frac{1}{g}) \leq T(r,f) + T(r,g) + O(1).$$

Áp dụng bất đẳng thức cơ bản của Nevanlinna cho k điểm $d_1, d_2, ..., d_k$ và thực hiện tương tự như trong chứng minh định lý 5 điểm, chúng ta sẽ có:

$$(k-1)T(r,f) \leq \sum_{j=1}^{k} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-d_j}\right) - \overline{N}(r,f) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r), \qquad (*)$$

trong đó $N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ được tính tại những điểm là không điểm của f' mà không phải là nghiệm của phương trình $f(z) - d_j$. Xuất phát từ $P(f) = P(g)$, đạo hàm 2 vế ta thu được: $f'P'(f) = g'P'(g)$,

hay

$$f'q(f-d_1)^{q_1}(f-d_2)^{q_2}...(f-d_k)^{q_k} = g'q(g-d_1)^{q_1}(g-d_2)^{q_2}...(g-d_k)^{q_k}$$

Từ đó ta thấy rằng, khi f nhận một giá trị d_i nào đó thì hàm g phải nhận giá trị d_j nào đó.

Mặt khác từ $P(f) = P(g)$, tức là:

$$f^n + a_1 f^{n-1} + ... + a_n = g^n + a_1 g^{n-1} + ... + a_n,$$

suy ra f và g có cùng số cực điểm như nhau và cùng bội. Như vậy, nếu z là một cực điểm của f thì nó cũng là một cực điểm của g nên nó sẽ là không điểm của $\phi(z)$, tức là z sẽ là không điểm của $\frac{1}{\phi}$.

Bây giờ chúng ta xét:

$$\sum_{j=1}^{k} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - d_j}\right).$$

Từ (*) chúng ta sẽ có :

$$(k-1)T(r,f) \le \overline{N}\left(r, \frac{1}{\phi}\right) + \sum_{j=1}^{k} N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right)\Bigg|_{f=d_j} - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S(r).$$

Tương tự ta cũng có:

$$(k-1)T(r,g) \le \overline{N}\left(r, \frac{1}{\phi}\right) + \sum_{j=1}^{k} N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right)\Bigg|_{g=d_j} - N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) + S(r),$$

Cộng hai vế của hai bất đẳng thức trên ta được:

$$(k-1)T(r,f) + T(r,g) \le 2\overline{N}\left(r, \frac{1}{\phi}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) + S(r) + \\ + \sum_{j=1}^{k} N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right)\Bigg|_{g=d_j} + \sum_{j=1}^{k} N_0\left(r, \frac{1}{g'}\right)\Bigg|_{f=d_j}. \quad (**)$$

Mà ta lại có: $\overline{N}(r, \frac{1}{\phi}) \le 2T(r,\phi) + O(1) \le 2T(r,f) + T(r,g) + O(1)$,

Khi đó (**) sẽ được viết lại như sau:

$$(k-3)(T(r,f) + T(r,g)) \le S(r) = o(T(r,f) + T(r,g)).$$

Với giả thiết $k \geq 4$ thì bất đẳng thức trên không thể xảy ra. Như vậy điều giả sử là sai, nói cách khác $P(z)$ là đa thức xác định duy nhất hàm phân hình.

Định lý được chứng minh xong.

Gần đây, Ha- Yang [2] đã nghiên cứu trường hợp tổng quát bằng cách xét các cặp đa thức $P(z)$, $Q(z)$ sao cho chỉ có nghiệm f, g thoả mãn $P(f) = Q(g)$ là các nghiệm f = const, g = const; và sử dụng chủ yếu lý thuyết kỳ dị và khái niệm *giống của đường cong* (trong hình học đại số). Họ đã chứng minh các định lý sau đây:

2.2.6. Định lý. *Cho 2 đa thức* (P,Q)*, phương trình hàm* $P(f) = Q(g)$ *không có nghiệm trong tập của hàm phân hình khác hằng số, nếu* $p(= \deg P)$ *và* $q(= \deg Q)$ *thoả mãn một trong các điều kiện sau:*

i) $(p,q) = 1$, $p > q \geq 2$, và $p \geq 5$;

ii) $(p,q) \geq 2$, $p \geq 6$;

iii) $p = q \geq 4$.

2.2.7. Định lý. *Cho* $P(z)$ *và* $Q(z)$ *như được xác định ở Định lý 2.2.6. Cho*

$$P'(z) = c_1(z - d_1)^{p_1} \ldots (z - d_k)^{p_k},$$

$$Q'(z) = c_2(z - l_1)^{q_1} \ldots (z - l_t)^{q_t},$$

với $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = p - 1$ *và* $q_1 + q_2 + \ldots + q_t = q - 1$. *Giả thiết thêm rằng* $P(d_1) \neq Q(l_j)$ *với* $i = 1,2,\ldots,k$ *và* $j = 1,2,\ldots,t$ *và* p, q *thoả mãn một trong các điều kiện của Định lý 2.2.6. Khi đó đối với các hàm* f, g *phương trình* $P(f) = Q(g)$ *chỉ có nghiệm* f *và* g *là hằng số.*

***Nhận xét.** Một kết quả nổi tiếng của Picard's [6] khẳng định rằng nếu giống của đường cong xác định bởi phương trình $F(x, y) = 0$ lớn hơn 1, thì không tồn tại hàm phân hình f, g khác hằng số nào để $F(f, g) = 0$. Vì vậy Định lý 2.2.6 chủ yếu có được bằng cách tính toán giống của đường cong xác định bởi phương trình $P(x)-Q(y)=0$. Tuy vậy, không dễ để tìm ra được giống của đường cong như vậy.

Trong bài này, chúng ta sẽ dùng lý thuyết phân phối giá trị để xét vấn đề trên. Hơn nữa, chúng ta có thể giải quyết được trường hợp khi $q=3$ và $p=4$ (trường hợp này không có trong Định lý 2.2.6). Khi $p=q=4$, một số điều kiện cần và đủ được đưa ra để đảm bảo cho sự tồn tại của f,g thoả mãn $P(f)=Q(g)$. Cuối cùng, chúng ta đưa ra vài giả thuyết đối với các hàm phân hình tương tự vấn đề thứ 10 của Hilbert.

2.3. Bổ đề

2.3.1. Bổ đề. *Cho $P(z)$ và $Q(z)$ là 2 đa thức lần lượt có bậc là p và q tương ứng, với $2\le p<q$. Nếu tồn tại không điểm r_0 của $P'(z)$ sao cho phương trình $Q(z)-P(r_0)=0$ không có nghiệm bội, và nếu tồn tại hai hàm phân hình f,g khác hằng số sao cho $P(f)=Q(g)$, thì $q-p=(p,q)$ (ước số chung lớn nhất của p và q), và r_0 là số không điểm của $P'(z)$. Hơn nữa, tất cả các bất đẳng thức sau thoả mãn:*

$$T(r,f)=\bar{N}\left(r,\frac{1}{f-r_0}\right)+S(r,f), \tag{2.1}$$

$$T(r,g)=\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-a}\right)+S(r,g), \tag{2.2}$$

$$T(r,f)=N(r,f)+S(r,f), \tag{2.3}$$

$$N(r,f)=\frac{q}{q-p}\bar{N}(r,f)+S(r,f), \tag{2.4}$$

$$T\left(r,\frac{g'}{f-r_0}\right)=S(r,f), \tag{2.5}$$

Khi $a\in\mathbb{C}$ thì không có không điểm nào của $Q(z)-P(r_0)$.

Chứng minh. Giả sử r_0 là một không điểm của $P'(z)$ sao cho phương trình $Q(z) - P(r_0) = 0$ không có nghiệm bội. Nếu tồn tại 2 hàm phân hình f và g khác hằng số sao cho

$$P(f) = Q(g), \tag{2.6}$$

thì chúng ta có:

$$pT(r, f) = qT(r, g) + O(1). \tag{2.7}$$

Điều này dẫn tới $S(r, f) = S(r, g) = S(r)$, với $S(r, f)$ là một số thoả mãn $S(r, f) = o(T(r, f))$ khi $r \to \infty$, ngoại trừ, có thể, một tập có độ đo tuyến tính hữu hạn của $r \in (0, \infty)$. Cho n là ước số chung lớn nhất của p và q. Khi đó tồn tại 2 số nguyên p_1 và q_1 nguyên tố cùng nhau, sao cho

$$p = p_1 n, \quad q = q_1 n. \tag{2.8}$$

Giả thiết rằng z_0 là cực điểm của f của bội k. Khi đó từ (2.6) z_0 cũng là cực điểm của g bội l, và $kp = lq$, có nghĩa là $kp_1 = lq_1$. Do p_1 và q_1 gần bằng nhau, chúng ta thấy rằng q_1 chia hết cho k. Từ đây bội của bất cứ cực điểm nào của f ít nhất là q_1. Điều này có nghĩa là:

$$q_1 \overline{N}(r, f) \le N(r, f). \tag{2.9}$$

Do r_0 là nghiệm của $P'(z) = 0$, tồn tại một đa thức $R(z)$ bậc $p - s$ $(s \ge 2)$ sao cho $R(r_0) \ne 0$ và

$$P(z) - P(r_{0)}) = (z - r_0)^s R(z). \tag{2.10}$$

Điều này và (2.6) dẫn đến

$$(f - r_0)^s R(f) = Q(g) - P(r_0). \tag{2.11}$$

Do $Q(z) - P(r_0) = 0$ không có nghiệm bội, theo định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna ta có:

$$qT(r, g) \le \overline{N}\left(r, \frac{1}{Q(g) - P(r_0)}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g - a}\right) + \overline{N}(r, g) + S(r). \tag{2.12}$$

Theo (2.11) ta có:

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{Q(g)-P(r_0)}\right)\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{f-r_0}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{R(f)}\right)+S(r)$$
$$\le (p-s+1)T(r,f)+S(r).$$

Theo (2.9) ta có:

$$\bar{N}(r,g)=\bar{N}(r,f)\le \frac{1}{q_1}N(r,f)\le \frac{1}{q_1}T(r,f).$$

Từ các bất đẳng thức trên và (2.7) dẫn đến

$$T(r,g)-\bar{N}\left(r,\frac{1}{g-a}\right)+\frac{p(q-1)}{q}T(r,f)\le\left(p-s+1+\frac{1}{q_1}\right)T(r,f)+S(r),$$

có nghĩa là

$$\frac{p(q-1)}{q}\le p-s+1+\frac{1}{q_1}.$$

Do $p/q=p_1/q_1$, bất đẳng thức trên tương đương với $(s-1)q_1\le p_1+1$. Mặt khác, theo giả thiết của Bổ đề 2.3.1, chúng ta có $p<q$, và vì vậy $p_1+1\le q_1$. Lưu ý rằng $s\ge 2$, chúng ta có thể suy ra rằng $s=2$ và $q_1=p_1+1$. Do đó tất cả các bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Từ đây ta được (2.1), (2.2), (2.3) và (2.4). Hơn nữa, $q-p=(q_1-p_1)n=n$ là thừa số chung lớn nhất của p và q. Từ $R(r_0)\ne 0$, từ (2.10) ta thấy rằng r_0 là không điểm đơn của $P'(z)$.

Bây giờ cho φ là hàm phân hình được xác định bởi:

$$\varphi=\frac{g'}{f-r_0}. \tag{2.13}$$

Từ (2.1) và (2.3) ta được

$$m(r,f)=S(r) \text{ và } m\left(r,\frac{1}{f-r_0}\right)=S(r). \tag{2.14}$$

Do đó, từ (2.6) ta được $m(r,g)=S(r)$ và vì vậy $m(r,g')=S(r)$. Từ đây $m(r,\varphi)=S(r)$. Mặt khác, từ (2.4) ta thấy rằng các cực điểm của f không là cực điểm của φ. Từ (2.11), chúng ta có:

$$(f-r_0)R_1(f)f'=Q'(g)g', \tag{2.15}$$

với $R_1(z)=2R(z)+(z-r_0)R'(z)$ là một đa thức bậc $p-2$. Giả sử rằng z_0 là không điểm của $f-r_0$. Khi đó từ (2.11) ta có $Q(g(z_0))=P(r_0)$. Do $Q(z)-P(r_0)=0$ không có nghiệm bội, ta thấy rằng $Q'(g(z_0))\neq 0$. Tiếp theo từ (2.15) ta có z_0 không là cực điểm của $\varphi=g'/(f-r_0)$. Do đó, $N(r,\varphi)=S(r)$, và từ đó (2.5) xảy ra.

2.3.2. Bổ đề. *Cho $P(z)$ và $Q(z)$ là 2 đa thức lần lượt có bậc là p và q, với $2\le p\le q$. Nếu tồn tại một không điểm bội r_0 của $P'(z)$ để cho phương trình $Q(z)-P(r_0)=0$ không có nghiệm bội, và nếu tồn tại 2 hàm phân hình khác hằng số f và g để cho $P(f)=Q(g)$, thì $p=q$ và r_0 là không điểm của $P'(z)$. Hơn nữa tất cả các bất đẳng thức sau thoả mãn:*

$$T(r,f)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-r_0}\right)+S(r,f),$$

$$T(r,g)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-a}\right)+S(r,g),$$

$$T(r,f)=\overline{N}(r,f)+S(r,f),$$

$$T\left(r,\frac{g'}{(f-r_0)^2}\right)=S(r,f),$$

với $a\in\mathbb{C}$ không phải là không điểm của $Q(z)-P(r_0)$.

Chứng minh. Do r_0 là một không điểm bội của $P'(z)$, tồn tại một đa thức $R(z)$ bậc $p-s$ $(s\ge 3)$ sao cho $R(r_0)\neq 0$ và

$$P(z)-P(r_0)=(z-r_0)^sR(z).$$

Tương tự với phần chứng minh Bổ đề 2.3.1, ta có thể chứng minh được $s=3$ và $p_1=q_1$ và kết thúc chứng minh Bổ đề 2.3.2.

2.3.3. Bổ đề. *Cho $P(z)$ và $Q(z)$ là 2 đa thức có bậc lần lượt là p và q tương ứng, với $2\le p\le q$. Nếu tồn tại hai không điểm khác nhau r_1 và r_2 của $P'(z)$ sao cho mỗi phương trình $Q(z)-P(r_j)=0 \quad (j=1,2)$ không có các nghiệm bội, và nếu tồn tại 2 hàm phân hình f và g khác hằng số sao cho $P(f)=Q(g)$, thì $p=q$ và $r_j \ (j=1,2)$ là các không điểm đơn của $P'(z)$. Hơn nữa tất cả các bất đẳng thức sau thoả mãn*

$$T(r,f)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{f-r_j}\right)+S(r,f),\ j=1,2,$$

$$T(r,g)=\overline{N}\left(r,\frac{1}{g-a}\right)+S(r,g),$$

$$T(r,f)=\overline{N}(r,f)+S(r,f),$$

$$T\left(r,\frac{g'}{(f-r_1)(f-r_2}\right)=S(r,f),$$

với $a\in\mathbb{C}$ không là không điểm nào của của $Q(z)-P(r_j),\ (j=1,2)$.

Chứng minh. Do $r_j\ (j=1,2)$ là không điểm của $P'(z)$, tồn tại một đa thức $R_j(z)$ bậc $p-s_j,\ (s_j\ge 2)$ sao cho $R_j(r_j)\ne 0$ và

$$P(z)-P(r_j)=(z-r_j)^{s_j}R_j(z).$$

Nếu $P(r_1)=P(r_2)$ thì tồn tại một đa thức $R(z)$ bậc $p-s_1-s_2$ để $R(r_j)\ne 0$ và $\qquad P(z)-P(r_1)=(z-r_1)^{s_1}(z-r_2)^{s_2}R(z).$

Từ đây và các lập luận tương tự đã được dùng ở Bổ đề 2.3.1, ta có thể chứng minh được: $s_1=s_2=2,\ p_1=q_1=1$, và vì vậy ta được các kết luận cho Bổ đề 2.3.3.

Nếu $P(r_1) \neq P(r_2)$, thì $Q(z) - P(r_1)$ và $Q(z) - P(r_2)$ không có không điểm chung và cả 2 đều không có không điểm bội. Theo định lý cơ bản thứ 2 của Nevanlinna, ta có:

$$2qT(r,g) \leq \sum_{j=1}^{2} \overline{N}\left(r, \frac{1}{Q(g) - P(r_j)}\right) + \overline{N}(r,f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{g-a}\right) + S(r).$$

Từ đây ta có thể chứng minh được $s_1 = s_2 = 2$, $p_1 = q_1 = 1$, và vì vậy ta được các kết luận cho Bổ đề 2.3.3, theo các lập luận tương tự với phần chứng minh ở Bổ đề 2.3.1.

2.4. Sự tồn tại nghiệm phân hình của phương trình hàm

2.4.1. Định lý. *Giả sử rằng* $P(z)$ *và* $Q(z)$ *là 2 đa thức lần lượt có bậc* p *và* q. *Khi đó không tồn tại các hàm phân hình khác hằng số* f *và* g *thoả mãn:*

$$P(f) = Q(g) \tag{2.16}$$

nếu $P(z)$ *và* $Q(z)$ *thoả mãn một trong các điều kiện sau:*

C-1) $p < q$ *và* $q - p$ *không là ước số chung lớn nhất của* p *và* q, *và tồn tại không điểm* r_0 *của* $P'(z)$ *để* $Q(z) - P(r_0) = 0$ *không có không điểm bội.*

C-2) $p < q$ *và tồn tại hai không điểm khác nhau* r_1 *và* r_2 *của* $P'(z)$ *sao cho* $Q(z) - P(r_j) = 0,\ (j = 1,2)$ *không có nghiệm bội.*

C-3) $p < q$ *và tồn tại không điểm bội* r_0 *của* $P'(z)$ *sao cho* $Q(z) - P(r_0) = 0$ *không có nghiệm bội.*

C-4) $p \leq q$ *và tồn tại không điểm* r_1 *của* $P'(z)$ *và không điểm bội* r_2 *của* $P'(z)$ $(r_1 \neq r_2)$ *sao cho cả* $Q(z) - P(r_j) = 0,\ (j = 1,2)$ *không có nghiệm bội.*

C-5) $p \leq q$ *và tồn tại 3 không điểm* r_j, $(j = 1,2,3)$ *của* $P'(z)$ *để tất cả các phương trình* $Q(z) - P(r_j) = 0,\ (j = 1,2,3)$ *không có nghiệm bội.*

C-6) $p \le q$ *và tồn tại không điểm* r_0 *của* $P'(z)$ *sao cho* $Q(z) - P(r_0) = 0$ *không có nghiệm bội.*

Chứng minh. Từ Bổ đề 2.3.1 ta thấy rằng không tồn tại các hàm phân hình khác hằng số f và g thoả mãn (16) khi $P(z)$ và $Q(z)$ thoả mãn C-1) hay C-3). Nếu $P(z)$ và $Q(z)$ thoả mãn C-2), và nếu có 2 hàm phân hình khác hằng số f và g thoả mãn (2.16), thì theo Bổ đề 2.3.1 ta có:

$$T\left(r, \frac{g'}{f - r_1}\right) = S(r) \text{ và } T\left(r, \frac{g'}{f - r_2}\right) = S(r).$$

Từ đây có $T(r, f) = S(r)$, vô lý. Tương tự từ Bổ đề 2.3.2 và Bổ đề 2.3.3 ta thấy không tồn tại các hàm phân hình f và g khác hằng số, thoả mãn (2.16) khi $P(z)$ và $Q(z)$ thoả mãn C-4), hay C-5), hay C-6).

2.4.2. Hệ quả. *Giả sử rằng* $P(z)$ *và* $Q(z)$ *là 2 đa thức lần lượt có bậc là* p *và* q *tương ứng. Nếu* $2 = p \le q \le 4$ *hoặc* $p = q = 3$*, thì tồn tại các hàm phân hình khác hằng số* f *và* g *thoả mãn* $P(f) = Q(g)$.

Chứng minh. Hiển nhiên cho $q = 2$. Nếu $p = 2$ và $q = 3$. Khi đó ta có thể viết lại phương trình hàm $P(f) = Q(g)$ dưới dạng:

$$(f - a)^2 = b_0(g - b_1)(g - b_2)(g - b_3) \qquad (2.17)$$

với a, b_j, $(j = 0,1,2,3)$ là những số phức và $b_0 \neq 0$. Nếu hai trong các số b_1, b_2 và b_3 bằng nhau, chẳng hạn $b_1 = b_2$, thì (2.17) tương ứng với: $h^2 = b_0(g - b_3)$ với $h = (f - a)/(g - b_1)$. Rõ ràng rằng, (2.17) có các nghiệm phân hình khác hằng số. Nếu không có 2 trong các số b_1, b_2 và b_3 bằng nhau thì tồn tại hàm eliptic thoả mãn:

$$(g')^2 = b_0(g - b_1)(g - b2)(g - b_3).$$

Do đó, trong trường hợp này suy ra (2.17) có một nghiệm phân hình khác hằng số. Nếu $p=2$ và $q=4$, thì chúng ta có thể viết lại phương trình $P(f)=Q(g)$ dưới dạng:

$$(f-a)^2 = b_0(g-b_1)(g-b_2)(g-b_3)(g-b_4), \qquad (2.18)$$

với a, b_j, $(j=0,1,2,3,4)$ là những số phức và $b_0 \neq 0$. Nếu 2 trong 4 số b_1, b_2, b_3 và b_4 bằng nhau, chẳng hạn $b_1 = b_2$, thì (2.18) tương đương với:

$$h^2 = b(g-b_2)(g-b_3)(g-b_4), \text{ với } h = (f-a)/(g-b_1).$$

Do đó, theo kết luận của trường hợp $q=3$, ta thấy rằng (2.18) có nghiệm phân hình khác hằng số. Giả sử rằng không có cặp số nào trong 4 số b_1, b_2, b_3, b_4 bằng nhau. Khi đó (2.18) tương đương với:

$$f_1^2 = c_0(g_1-c_1)(g_1-c_2)(g_1-c_3),$$

với

$$f_1 = \frac{f-a}{(g-b_4)^2}, \quad g_1 = \frac{1}{g-b_4},$$

$$c_0 = (b_4-b_1)(b_4-b_2)(b_4-b_3),$$

$$c_j = \frac{1}{b_j-b_4}, \ j=1,2,3.$$

Theo kết luận trong trường hợp $p=2$, $q=3$, ta thấy rằng (2.18) và vì vậy $P(f)=Q(g)$ có nghiệm phân hình khác hằng số.

Nếu $p=q=3$, thì $P(z)$ và $Q(z)$ có thể được viết lần lượt là:

$$P(z) = a_0(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3) \text{ và } Q(z) = b_0(z-b_1)(z-b_2)(z-b_3),$$

Cho $\quad f_1 = 2(a_0 g_1^3 - b_0)(g-b_1) + a_0(2a_1-a_2-a_3)g_1^2 - b_0(2b_1-b_2-b_3),$

$$g_1 = (f-a_1)/(g-b_1).$$

Khi đó thì phương trình $P(f)=Q(g)$ tương đương với:

$$f_1^2 = a_0^2(a_2-a_3)^2 g_1^4 + 4a_0b_0(b_1-b_2)(b_1-b_3)g_1^3$$

$$-2a_0b_0(2a_1-a_2-a_3)(2b_1-b_2-a_3)g_1^2 +$$

$$+4a_0b_0(a_1-a_2)(a_1-a_3)g_1 + b_0^2(b_2-b_3)^2.$$

Dựa vào kết luận trong trường hợp $p=2$ và $q=4$, phương trình trên có một nghiệm của hàm phân hình khác hằng số. Từ đây phương trình $P(f)=Q(g)$ cũng có nghiệm phân hình khác hằng số.

Đối với trường hợp đặc biệt $p=3$ và $q=4$, ta có:

2.4.3. Định lý. *Giả sử rằng $P(z)=a_0z^3+...$ và $Q(z)=b_0z^4+...$ lần lượt là 2 đa thức bậc 3 và 4. Khi đó phương trình $P(f)=Q(g)$ có nghiệm phân hình khác hằng số f và g khi và chỉ khi tồn tại không điểm r_1 của $P'(z)$ sao cho $Q(z)-P(r_1)=0$ có ít nhất một nghiệm bội, và*

$$P(z)-P(r_1)=a_0(z-r_1)^2(z-a_1), \tag{2.19}$$

$$Q(z)=P(r_1)=b_0(z-b_1)^2(z-b_2)(z-b_3), \tag{2.20}$$

với $a_1,\ b_j,\ (j=1.2.3)$ *là những số phức để cho đa thức*

$$a_0^2z^6+2a_0b_0(b_2+b_3-2b_1)z^3+4a_0b_0(r_1-a_1)z^2+b_0^2(b_2-b_3)^2, \tag{2.21}$$

có ít nhất một không điểm bội.

Chứng minh. Cho r_1 và r_2 là các không điểm của $P'(z)$. Nếu cả hai phương trình $Q(z)-P(r_1)=0$ và $Q(z)-P(r_2)=0$ không có nghiệm bội, thì theo định lý 2.4.1 ta thấy rằng phương trình $P(f)=Q(g)$ không có nghiệm hàm phân hình khác hằng số f và g. Nếu có một trong hai số r_1 và r_2, chẳng hạn r_1, sao cho $Q(z)-P(r_1)=0$ có ít nhất một nghiệm bội, thì tồn tại các số phức $b_j, (j=1,2,3)$ và a_1 sao cho (2.19) và (2.20) thoả mãn. Do đó phương trình $P(f)=Q(g)$ tương đương với:

$$a_0(f-r_1)^2(f-a_1)=b_0(g-b_1)^2(g-b_2)(g-b_3). \qquad (2.22)$$

Cho: $\quad f_1 = 2b_0g - b_0b_2 - b_0b_3 + 2b_0b_1 - a_0g_1^3, \qquad g_1 = (f-r_1)/(g-b_1).$

Khi đó (2.22) có thể được viết lại dưới dạng

$$f_1^2 = a_0^2g_1^6 + 2a_0b_0(b_2+b_3-2b_1)g_1^3 + 4a_0b_0(r_1-a_1)g_1^2 + b_0^2(b_2-b_3)^2. \quad (2.23)$$

Nếu đa thức (2.21) không có không điểm bội thì tồn tại f_1 và g_1 thoả mãn (2.23). Do đó $P(f)=Q(g)$ không có nghiệm phân hình khác hằng số. Nếu đa thức (2.21) có ít nhất một không điểm bội r, thì (2.23) tương đương với:

$$f_2^2 = a_0^2(g_1-c_1)(g_1-c_2)(g_1-c_3)(g_1-c_4),$$

với c_j, $(j=1,2,3,4)$ là các số phức và $f_2 = f_1/(g_1-r)$. Theo hệ quả 2.4.2, phương trình trên có một số nghiệm phân hình khác hằng số.
Định lý 2.4.3 được chứng minh.

Trong trường hợp $p=q=4$, theo định lý 2.4.1 và lập luận tương tự đối với phần chứng minh của định lý 2.4.3, ta được:

2.4.4. Định lý. *Giả sử rằng cả $P(z)=a_0z^4+...$ và $Q(z)=b_0z^4+...$ đều là các đa thức bậc 4, và $P(z)\not\equiv Q(z)$. Khi đó phương trình $P(f)=Q(g)$ có nghiệm phân hình khác hằng số f và g khi và chỉ khi tồn tại một không điểm a_1 của $P'(z)$ sao cho $Q(z)-P(a_1)=0$ có ít nhất một nghiệm bội, và*

$$P(z)-P(a_1)=a_0(z-a_1)^2(z-a_2)(z-a_3), \qquad (2.24)$$

$$Q(z)-P(a_1)=b_0(z-b_1)^2(z-b_2)(z-b_3), \qquad (2.25)$$

với a_j, b_j, (j=1,2,3) là các số phức để cho đa thức:

$$\begin{aligned} & a_0^2(a_2-a_3)^2z^6 + 4a_0b_0(b_2-b_1)(b_3-b_1)z^4 \\ & -2a_0b_0(a_2+a_3-2a_1)(b_2+b_3-2b_1)z^3 \\ & +4a_0b_0(a_2-a_1)(a_3-a_1)z^2 + b_0^2(b_2-b_3)^2, \end{aligned}$$

có ít nhất một không điểm bội.

2.5. Một số ứng dụng và giả thuyết

Ví dụ 1. Không tồn tại các hàm phân hình f và g khác hằng số sao cho:

$$f^3 - f = g^4 - g.$$

Đối với các đa thức $P(z) = z^3 - z$ và $Q(z) = z^4 - z$, ta thấy rằng $P'(z) = 0$ có nghiệm $r_1 = 1/\sqrt{3}$ và $r_2 = -1/\sqrt{3}$. Dễ ràng thấy rằng $P(z) - P(r_j) = 0$, $j = 1, 2$ không có nghiệm bội. Từ đây, theo định lý 2 không tồn tại các hàm phân hình f và g khác hằng số thoả mãn:

$$f^3 - f = g^4 - g.$$

Ví dụ 2. Không tồn tại các hàm phân hình f và g khác hằng số sao cho:

$$f^2(f - a) = g^3(g - b), \qquad (*)$$

với a, b là các số phức khác không.

Từ $a.b \neq 0$, thấy đa thức

$$z^6 + 2bz^3 - 4az^2 + b^2 = (z^3 - 2\sqrt{a}z + b)(z^3 + 2\sqrt{a}z + b)$$

không có các không điểm bội. Từ đây theo Định lý 2, phương trình (*) không có nghiệm hàm phân hình khác hằng số.

Ví dụ 3. Cho

$$P(z) = (z - a_1)^2(z - a_2) \text{ và } Q(z) = (z - b_1)^2(z - b_2)^2, \qquad (2.26)$$

với a_1, a_2, b_1 và b_2 là các số phức. Khi đó tồn tại hai hàm phân hình f và g khác hằng số sao cho $P(f) = Q(g)$.

Ví dụ 4. Cho

$$P(z) = 4z^3 - 3z \text{ và } Q(z) = 2(2z^2 - 1)^2 - 1.$$

Khi đó tồn tại 2 hàm phân hình f và g khác hằng số sao cho $P(f) = Q(g)$.

Có thể thử lại với $f(z) = \cos z$ và $g(z) = \cos\frac{3}{4}z$.

2.5.1. Định lý. *Giả sử* $P(z)$ *và* $Q(z)$ *là 2 đa thức có bậc lần lượt là* $p(\geq 2)$ *và* $q(\geq 2)$. *Nếu* $p \neq q$, *và nếu tồn tại một không điểm* a_1 *của* $P'(z)$ *sao cho phương trình* $Q(z) - P(a_1) = 0$ *không có nghiệm bội, thì tồn tại hàm phân hình* f *khác hằng số thoả mãn* $P(f) = Q(f^{(k)})$ *hoặc* $P(f^{(k)}) = Q(f)$, *với* $k \geq 2$ *nguyên dương.*

Nhận xét. Thực tế là phương trình $(f')^2 = (f - b_1)(f - b_2)(f - b_3)$ có nghiệm phân hình siêu việt (chẳng hạn các hàm elliptic) đối với các số phức thích hợp b_1, b_2 và b_3. Điều đó chỉ ra rằng điều kiện $k \geq 2$ là cần cho định lý 2.5.1.

2.5.2. Định lý *Giả sử cả* $P(z)$ *và* $Q(z)$ *đều là các đa thức có bậc* $p\ (\geq 2)$. *Nếu tồn tại một không điểm bội* a_0 *của* $P'(z)$ *để phương trình* $Q(z) - P(a_0) = 0$ *có nghiệm bội, hoặc nếu tồn tại 2 nghiệm đơn phân biệt* a_1 *và* a_2 *của* $P'(z)$ *sao cho mỗi phương trình* $Q(z) - P(a_j) = 0,\ (j = 1, 2)$ *không có nghiệm bội, thì không tồn tại* f *hàm phân hình khác hằng số thoả mãn* $P(f) = Q(f^{(k)})$ *hoặc* $P(f^{(k)}) = Q(f)$, *với* $k \geq 1$ *nguyên dương.*

Cuối cùng, chúng tôi dẫn ra giả thuyết của C.C. Yang và P. Li, tương tự với giả thuyết nổi tiếng của Mordell như sau:

***Giả thuyết**

Nếu một phương trình Diophant, $F(x, y) = 0$ (F là một đa thức chứa x và y bậc lớn hơn 3 với các hệ số là số hữu tỷ) không có hoặc hầu như không có nhiều nghiệm nguyên xác định, thì phương trình tương ứng F không có hoặc hầu như không có nhiều nghiệm phân hình khác hằng số $f\ (= x)$ và $g\ (= y)$.

KẾT LUẬN

Luận văn trình bày cơ sở lý thuyết Nevanlinna, đặc biệt là những phần liên quan đến bài toán pân tích hàm phân hình và ứng dụng vào nghiên cứu phương trình hàm.

Chương 1 trình bày các định lý cơ bản thứ nhất, định lý cơ bản thứ 2 của Nevanlinna, quan hệ số khuyết và một số ví dụ ứng dụng.

Chương 2 trình bày khái niệm và điều kiện để tìm đa thức xác định duy nhất hàm phân hình, sự tồn tại nghiệm f, g đối với phương trình P(f) = Q(g), khi P,Q là 2 đa thức thuộc C[z] và một số ứng dụng.

Nhiều vấn đề của lý thuyết hàm phân hình còn chưa được làm sáng tỏ. Hy vọng sẽ được quan tâm trong thời gain tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. F. Gross and C. C. Yang, *On preimages and range sets of meromorphic functions*, Proc. Japan Acad., 58 (1982), 17-20.

[2]. Ha Huy Khoai, C. C. Yang, *On the functional equation* $P(f)=Q(g)$, Value Distribution Theory, Marcel Dekker, NewYork, 2003, 201-231.

[3]. P. Li and C. C. Yang, *On the unique range sets of meromorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc, 124 (1996), 177-185.

[4]. L.J. Mordell, *Diophantine Equations*, Academic Press, New York, 1969.

[5]. B. Shiffman, *Uniqueness of entire and meromorphic functions sharing sets, Complex Variables*, vol. 4, (2001), pp.433-450.

[6]. R. Nevanlinna, *Uniformiserung*, Springer 1953, p.272.

[7]. C.C. Yang *Unicity and factorization of meromorphic functions, Proc. Second Asian Math.* Conf. (1995), World Scientific.

[8]. C.C. Yang and X. H. *Hua Unique polynomials of entire and meromorphic functions, Math. Fizika, analiz, geometriya*, 4(1997), vol. 131, pp. 391-398.