ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐÀO THỊ THANH THUỶ

LÝ THUYẾT NEVANLINNA VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2007

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

ĐÀO THỊ THANH THUỶ

LÝ THUYẾT NEVANLINNA VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành : GIẢI TÍCH
Mã số : 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học : GS.TSKH.HÀ HUY KHOÁI

THÁI NGUYÊN - 2007

MỤC LỤC

trang

Mở đầu 1

Chương 1 . **Kiến thức cơ sở 3**

1.1 . Trường định chuẩn không Acsimet 3

1.2 . Trường số p - adic 4

1.3. Hàm chỉnh hình trên trường không Acsimet 7

Chương 2 . **Lý thuyết Nevanlinna trên trường p - adic ………..……...14**

2.1 . Các hàm đặc trưng Nevanlinna 14

2.2 . Các định lý cơ bản về phân phối giá trị hàm phân hình 20

2.3 . Tập xác định duy nhất các hàm phân hình 25

Chương 3 . **Phương trình hàm *P*(*f*) = *Q*(*g*) trong trường p - adic............30**

Kết luận 54

Tài liệu tham khảo 55

MỞ ĐẦU

Luận văn trình bày một số kết quả cơ bản của Lý thuyết Nevanlinna và ứng dụng của nó đối với phương trình hàm $P(f) = Q(g)$ trong trường p - adic .

Nội dung luận văn gồm ba chương .

Chương 1: Trình bày một số kiến thức cơ bản về trường định chuẩn không Acsimet , trường số p - adic , và một số tính chất đặc biệt về hàm phân hình trên trường không Acsimet áp dụng cho chương sau .

Chương 2: Nêu định nghĩa , một số tính chất về các hàm đặc trưng Nevanlinna , hai định lý cơ bản của lý thuyết Nevanlinna và một số kết quả về bài toán xác định tập duy nhất của hàm phân hình trên trường p - adic .

Chương 3: Trình bày một số kết quả về phương trình hàm $P(f) = Q(g)$ trong trường p - adic .

Kết quả của luận văn :

Cho P , Q là các đa thức thuộc $K[x]$ với $P'Q' \neq 0$. Xét hai hàm phân biệt f , g giải tích hoặc phân hình trong đĩa $|x-a| < r$ (tương ứng trong K), thoả mãn $P(f) = Q(g)$. Sử dụng lý thuyết phân phối giá trị hàm phân hình Nevanlinna , đưa ra các điều kiện đủ về các không điểm của P', Q' để f và g bị chặn trong đĩa $|x-a| < r$ (hoặc tương ứng là hằng số) .

Trường hợp đặc biệt khi deg$P$ = 4, xét trường hợp riêng $Q = \lambda P \ (\lambda \in K)$ và đưa ra một số điều kiện đặc trưng cho sự tồn tại của hai hàm phân biệt khác hằng f , g phân hình trong K thoả mãn $P(f) = \lambda P(g)$.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn và chỉ bảo tận tình của GS . TSKH Hà Huy Khoái . Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc và thành kính nhất đến Thầy , Thầy không chỉ hướng dẫn tôi nghiên cứu khoa học mà Thầy còn thông cảm tạo mọi điều kiện động viên tôi trong suốt quá trình làm luận văn .

Tôi xin chân thành cảm ơn khoa Toán , khoa sau Đại học trường đại học sư phạm Thái Nguyên , Viện toán học Việt Nam đã giúp đỡ và tạo điều kiện để tôi hoàn thành luận văn này .

Cuối cùng tôi xin chân thành cảm ơn ban giám hiệu trường CĐCN Việt Đức , đặc biệt là các đồng nghiệp trong khoa KHCB , gia đình và bạn bè tôi đã hết sức quan tâm và giúp đỡ tôi trong thời gian học và hoàn thành luận văn .

Trong quá trình viết luận văn cũng như trong việc xử lý văn bản chắc chắn không tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót . Rất mong nhận được sự góp ý của các thầy cô, các bạn đồng nghiệp để luận văn được hoàn thiện hơn.

Thái Nguyên , tháng 8 năm 2007

Học viên

Đào Thị Thanh Thuỷ

Chương 1
Kiến thức cơ sở

1.1.Trường định chuẩn không Acsimet.

Định nghĩa 1.1.1. Giả sử K là trường , chuẩn trên K là hàm

$$|\ .\ | : K \to R_+ \text{ thoả mãn :}$$

i) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

ii) $|xy| = |x|\ |y|,\ \forall\ x, y \in K,$

iii) $|x+y| \le |x| + |y|,\ \forall x, y \in K.$

Chuẩn | . | được gọi là chuẩn không Acsimet nếu thoả mãn điều kiện

iv) $|x+y| \le max\ \{|x|\ ,\ |y|\},\ \forall x, y \in K.$

Một chuẩn | . | trên K cảm sinh một hàm khoảng cách *d* được định nghĩa bởi

$$d(x,y) = |x-y|\ ,\ \forall x, y \in K.$$

Nếu chuẩn | . | là không Acsimet thì mêtric cảm sinh *d* thoả mãn:

$$d(x,y) \le max\ \{d(x,z)\ ,\ d(z,y)\},\ \forall x, y, z \in K.$$

mêtric ứng với chuẩn không Acsimet được gọi là siêu mêtric.

Ví dụ 1.1.2. Xét hàm

$$|\ .\ | : K \to R_+$$

$$x \mapsto |x| = \begin{cases} 1 & nếu\ \ x \ne 0 \\ 0 & nếu\ \ x = 0. \end{cases}$$

Khi đó , | . | là một chuẩn không Acsimet trên K và mêtric cảm sinh

$$d : K\times K \to R_+$$

$$(x,y) \mapsto d(x,y) = \begin{cases} 1 & nếu\ \ x \ne y \\ 0 & nếu\ \ x = y. \end{cases}$$

là một siêu mêtric. Mêtric này được gọi là mêtric tầm thường .

Ta xét một số đặc trưng của tôpô sinh bởi chuẩn không Acsimet thông qua các hình cầu như sau:

Với $r \in R_+$ ta định nghĩa hình cầu mở , đóng tâm a , bán kính r là :

$$K(a;r) = \{ x \in K \mid d(x,a) < r \}$$

$$K[a;r] = \{ x \in K \mid d(x,a) \le r \}$$

Mệnh đề 1.1.3. *Giả sử K là trường định chuẩn không Acsimet . Ta có* :

i) Nếu $b \in K(a;r)$ *thì* $K(a;r) = K(b;r)$

ii) Hình cầu $K(a;r)$ *là tập mở và cũng là tập đóng.*

iii) Hai hình cầu mở (hình cầu đóng) hoặc rời nhau hoặc chứa nhau.

Trường số *p* - adic1. 2.

Với $p \in Z$, p là số nguyên tố thì mọi số nguyên $a \neq 0$ có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng:

$$a = p^{\nu} a' \text{, với } p \text{ không chia hết } a',\ a' \in Z \setminus \{ 0 \} .$$

Kí hiệu : $\nu = \nu_p(a)$. Vậy ta có hàm :

$$\nu_p : Z \setminus \{ 0 \} \mapsto N$$

$$a \mapsto \nu_p(a).$$

Ta mở rộng hàm ν với $x = \dfrac{a}{b} \in Q$ như sau . Đặt :

$$\nu_p(x) = \begin{cases} \nu_p(a) - \nu_p(b), nếu\ x \neq 0 \\ +\infty,\ nếu\ x = 0 \end{cases}$$

Với mỗi số nguyên p , xét

$$\nu_p : Q \mapsto R \cup +\{\infty\}$$

$$x \mapsto |x|_p = \frac{1}{p^{\nu}} \quad , \ với\ \ \nu = \nu_p(x).$$

Khi đó , $|\ .\ |_p$ là một chuẩn không Acsimet trên Q và được gọi là chuẩn p - adic.

Mệnh đề 1.2.1(Ostrowski). *Mọi chuẩn không tầm thường trên Q đều tương đương với một trong hai chuẩn sau :*

1) Chuẩn p - adic , với p là số nguyên tố;

2) Giá trị tuyệt đối thông thường.

Như vậy ta có hai hướng làm đầy trường các số hữu tỷ Q.

+ Làm đầy theo giá trị tuyệt đối thông thường ta thu được trường các số thực R

+ Làm đầy theo chuẩn p - adic ta thu được trường các số p - adic.

Cụ thể là , chúng ta có thể xây dựng Q_p đầy đủ hoá của Q theo chuẩn $|\ .\ |_p$ như sau .

Dãy $\{x_n\}$ được gọi là dãy Cauchy theo $|\ .\ |_p$ nếu $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in N$ sao cho $\forall\, m$, $n > n_0$ thì $|x_m - x_n|_p < \varepsilon$. Hai dãy Cauchy $\{x_n\}$, $\{y_n\}$được gọi là tương đương nếu $|x_n - y_n|_p \to 0$. Với $\{x_n\}$ là dãy Cauchy theo $|\ .\ |_p$, ta kí hiệu $\overline{\{x_n\}}$ là tập các dãy Cauchy tương đương với $\{x_n\}$. Đặt Q_p là tập tất cả các lớp tương đương theo chuẩn $|\ .\ |_p$.

Trên Q_p trang bị các phép toán như sau.

Với $\overline{\{x_n\}}$, $\overline{\{y_n\}} \in Q_p$, ta định nghĩa:

$$\overline{\{x_n\}} + \overline{\{y_n\}} = \overline{\{x_n + y_n\}}\ ; \quad \overline{\{x_n\}}\,.\overline{\{y_n\}} = \overline{\{x_n.y_n\}}\ .$$

Ta thấy định nghĩa trên không phụ thuộc vào phần tử đại diện của lớp tương đương . Khi đó , Q_p là một trường và là trường định chuẩn với chuẩn $|\ .\ |_p$.

Định nghĩa 1.2.2. *Với $\lambda \in Q_p$ và $\{x_n\} \in Q$ sao cho $\overline{\{x_n\}} = \lambda$ thì ta xác định :*

$$|\lambda|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p.$$

Chú ý rằng định nghĩa trên xác định theo tính chất sau của chuẩn p - adic.

Mệnh đề 1.2.3. *Q_p là đầy đủ hoá của Q theo chuẩn $|\ .\ |_p$ và tập giá trị của Q và Q_p theo $|\ .\ |_p$ là trùng nhau , đó là tập* $\{p^n, n \in Z\} \cup \{0\}$.

Tương tự như quá trình đầy đủ hoá Q theo $|\ .\ |_\infty$, ta nhận được một trường Q_p đầy đủ nhưng không đóng đại số . Người ta đã giải quyết vấn đề này bằng một mở rộng trường như sau

Xét mở rộng chuẩn tắc $Q_p \subset K$ và nhóm Galois $G(K/Q_p)$. Đặt:

$$N_{K/Q_p} : K \to Q_p$$

$$\alpha \mapsto N_{K/Q_p}(\alpha) = \prod_{\sigma\in G(K/Q_p)} \sigma(\alpha),$$

với σ là tự đẳng cấu trên K giữ nguyên các phần tử của Q_p . Chú ý rằng nếu bậc của mở rộng trường $[K : Q_p] = n$ thì $N_{K/Q_p}(\alpha) = \alpha^n$, $\forall \alpha \in Q_p$.

Mệnh đề 1.2.4. *Giả sử K/Q_p là mở rộng chuẩn tắc bậc n . Khi đó tồn tại duy nhất một chuẩn không Acsimet $|\ .\ |$ trên K mở rộng chuẩn p - adic trên và được xác định như sau* :

$$|x| = \sqrt[n]{\left|N_{K/Q_p}(x)\right|_p},$$

và trường K đầy đủ với chuẩn $|\ .\ |$.

Đặt $\overline{Q_p}$ là trường đóng đại số của Q_p . Trên $\overline{Q_p}$ ta trang bị một chuẩn không Acsimet như sau :

Với mọi $x \in \overline{Q_p}$, tồn tại một mở rộng chuẩn tắc bậc n sao cho $x \in K$, khi đó :

$$|x| = \sqrt[n]{\left|N_{K/Q_p}(x)\right|_p}.$$

và chuẩn $|x|$ không phụ thuộc vào sự tồn tại của K .

Ta có kết quả sau :

Mệnh đề 1.2.5. *Hàm* $|\,.\,| : \overline{Q_p} \rightarrow R_+$ *xác định như trên là chuẩn không Acsimet duy nhất mở rộng chuẩn p - adic trên* Q_p. *Tuy nhiên,* $\overline{Q_p}$ *không đầy đủ theo chuẩn* $|\,.\,|$.

Ta đầy đủ hoá $\overline{Q_p}$ theo mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.2.6. *Tồn tại một trường* C_p *với chuẩn không Acsimet* $|\,.\,|$ *sao cho:*

i) $\overline{Q_p}$ *trù mật trong* C_p *và chuẩn không Acsimet* $|\,.\,|$ *là mở rộng của chuẩn trên* $\overline{Q_p}$ *ban đầu;*

ii) C_p *đầy đủ với chuẩn* $|\,.\,|$ *và* C_p *là một trường đóng đại số.*

1.3 Hàm chỉnh hình trên trường không Acsimet.

Ta kí hiệu K là trường đóng đại số , đầy đủ với chuẩn không Acsimet $|\,.\,|$ và có đặc số 0.

Các khái niệm về dãy , về chuỗi và sự hội tụ của dãy, của chuỗi giống như trong trường định chuẩn Acsimet. Tuy nhiên với chuẩn không Acsimet ta có một số tính chất đặc biệt sau.

Bổ đề 1.3.1 *Giả sử* $\{x_n\}$ *là một dãy trong* K . *Dãy* $\{x_n\}$ *là dãy Cauchy nếu và chỉ nếu* $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1} - x_n| = 0$.

Chứng minh

Điều kiện đủ hiển nhiên theo định nghĩa dãy Cauchy.

Ta chứng minh điều kiện cần với mọi n , $p \in N$ ta có :

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq max\,\{|x_{n+p} - x_{n+p-1}|, |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}|, \ldots, |x_{n+1} - x_n|\}\end{aligned}$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n| = 0$ nên suy ra điều phải chứng minh. □

Từ các tính chất trên và theo định nghĩa sự hội tụ của chuỗi số , chuỗi luỹ thừa , ta có các tính chất sau:

Mệnh đề 1.3.2. *Chuỗi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $a_n \in K$ *hội tụ khi và chỉ khi* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Khi đó ta có:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \le \max_n |a_n|$$

Chuỗi luỹ thừa $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \in K$ *hội tụ tại z khi và chỉ khi* $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n z^n| = 0$.

Mệnh đề 1.3.3. *Đặt* $\rho = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ *, khi đó ta có* :

i) Nếu $\rho = 0$ *thì* $f(z)$ *chỉ hội tụ tại* $z = 0$.

ii) Nếu $\rho = +\infty$ *thì* $f(z)$ *hội tụ với mọi* $z \in K$.

iii) Nếu $0 < \rho < +\infty$ *và* $|a_n|\rho^n \to 0$ *thì* $f(z)$ *hội tụ khi và chỉ khi* $|z| \le \rho$.

iv) *Nếu* $0 < \rho < +\infty$ *và* $|a_n|\rho^n \quad 0$ *thì* $f(z)$ *hội tụ khi và chỉ khi* $|z| < \rho$.

Khi đó , ρ được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi luỹ thừa $f(z)$.

Tập các chuỗi luỹ thừa $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *an* ∈ K thoả mãn với cấu trúc cộng và nhân hai luỹ thừa là một vành , kí hiệu là $A_r(K)$.

Đặt $A(K) = A_\infty(K)$ - tập các hàm nguyên trên K , và

$$A_r(K) = \{\, f(z) \mid \textit{bán kính hội tụ } \rho \le r \,\}.$$

Ta có :

$$A_r(K) = \bigcap_{s\le r} A_s(K) \quad .$$

Định nghĩa 1.3.4. Với $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in A_\rho(K)$ và $0 < r \leq \rho$, ta định nghĩa số hạng lớn nhất : $\mu(r, f) = \max_{n\geq 0} |a_n| r^n$

và $\upsilon(r, f) = max \{n \mid |a_n| r^n = \mu(r, f)\}$ là chỉ số ứng với số hạng lớn nhất $\mu(r, f)$.

Với $r = 0$, ta định nghĩa :

$$\mu(0, f) = \lim_{r\to 0^+} \mu(r, f) \quad ; \quad \upsilon(0, f) = \lim_{r\to 0^+} \upsilon(r, f) \quad .$$

Từ định nghĩa của số hạng lớn nhất , ta có kết quả sau.

Mệnh đề 1.3.5. *Với $r > 0$, hàm $\mu(r,.)$: $A_r(K) \to R_+$ thoả mãn* :

i) $\mu(r, f) \geq 0$; $\mu(r, f) = 0$ *khi và chỉ khi* $f = 0$;

ii) $\mu(r, fg) = \mu(r, f)\,\mu(r, g)$ *, do đó* $\mu(r, \lambda f) = |\lambda|\,\mu(r, f)$ *, với* $\lambda \in K$;

iii) $\mu(r, f + g) \leq max\,\{\mu(r, f)\ ;\ \mu(r, g)\}$;

Khi đó , $\mu(r,.)$ *là một chuẩn không Acsimet trên* $A_r(K)$ *và*

iv) $A_r(K)$ *đầy đủ với chuẩn* $\mu(r,.)$;

v) Vành đa thức $K[z]$ *trù mật trong* $A_r(K)$ *theo* $\mu(r,.)$.

Định lí 1.3.6 ***(Định lí Weierstrass).*** *Với* $f \in A_r(K) \setminus \{0\}$, $r > 0$, *tồn tại một đa thức* :

$$g(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_\upsilon z^\upsilon \in K[z] \quad \text{với } \upsilon = \upsilon(r, f)$$

và một chuỗi luỹ thừa :

$$h[z] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad , cn \in K .$$

thoả mãn :

i) $f(z) = h(z)\,g(z)$,

ii) $\mu(r, g) = |b_\upsilon|\ r^\upsilon$,

iii) $h \in A_r(K)$,

iv) $\mu(r, h-1) < 1$ *và* $\mu(r, f-g) < \mu(r, f)$.

Định nghĩa 1.3.7. Với $U \subset K$ là tập mở , hàm $f : U \to K$ được gọi là khả vi tại $z_0 \in U$ nếu tồn tại :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} := f'(z_0)$$

Hàm f được gọi là khả vi trên U nếu f khả vi tại mọi $z \in U$.

Ta có mối liên hệ giữa hàm f và đạo hàm f' như sau:

Mệnh đề 1.3.8. *Giả sử chuỗi* $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *có bán kính hội tụ* $\rho \neq 0$ *và* $z \in K$. *Nếu* $f(z)$ *hội tụ thì* $f'(z)$ *tồn tại và* :

$$f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}.$$

Hơn nữa f và f' *có cùng bán kính hội tụ* ρ *và thoả mãn* :

$$\mu(r, f') \leq \frac{1}{r}\mu(r, f) \quad ,\forall 0 < r < \rho.$$

Mệnh đề 1.3.9. *Với dãy* $\{z_n\} \subset K_* : |z_n| \to \infty$ *thì tích vô hạn*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{z_n})$$

là một hàm nguyên.

Ngược lại , giả sử f là một hàm nguyên khác đa thức thì f có thể biểu diễn dạng :

$$f(z) = az^m \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{z_n})$$

với $m > 0$ *,* $a \in K$ *,* $z_n \neq 0$ *,* $|z_n| \to \infty$ *và* $f(z_n) = 0$.

Hệ quả 1.3.10. *Nếu f là hàm nguyên khác đa thức thì f có vô số không điểm ;*

Nếu f là hàm nguyên không có không điểm thì f là hàm hằng;

Tồn tại ước chung lớn nhất của một họ hữu hạn các hàm nguyên.

Hệ quả 1.3.11. *Giả sử f , g* $\in A(K)\setminus\{0\}$ *. Nếu* fg *là hàm hằng thì f và g là những hàm hằng.*

Giả sử f, g $\in A(d(a,r))\setminus\{0\}$*. Nếu* fg *bị chặn thì f và g là những hàm bị chặn.*

Định nghĩa 1.3.12. Giả sử D là tập vô hạn trong K , $R(D)$ là tập các hàm hữu tỉ h không có cực điểm trong D . Khi đó , với mọi $h \in R(D)$ đặt :

$$\|h\|_D = \sup_{z\in D}|h(z)|$$

Kí hiệu , $H(D)$là đầy đủ hoá của $R(D)$ theo tô pô sinh bởi chuẩn hội tụ đều trên D.

Mỗi phần tử của $H(D)$được gọi là một hàm giải tích trên D

Khi đó , $H(D)$là một K - không gian véc tơ và mỗi hàm giải tích trên D là giới hạn đều của một dãy các hàm hữu tỉ $\in R(D)$.

Mệnh đề 1.3.13. Với $r \in R_+$, ta có $H(K[0;r]) = A_r(K)$.

Chứng minh

Vì vành các đa thức $K[z]$ trù mật trong $A_r(K)$ nên ta suy ra :

$$A_r(K) \subset H(K[0;r]) \qquad (*)$$

Ngược lại , với $\forall\ a \in K \setminus K[0;r]$, $k \in Z_+$ ta có:

$$\left(\frac{1}{z-a}\right)^k = \left(-\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n\right)^k .$$

$$= \left(-\frac{1}{a}\right)^k\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left(\frac{z}{a}\right)^n \in A_r(K)$$, với $bn \in Z_+$.

Vì $|a| > r$ nên suy ra:

$$\left|\frac{b^n}{a^n}\right|r^n \le \left(\frac{r}{|a|}\right)^n \to 0 .$$

Do đó: $\left(\dfrac{1}{z-a}\right)^k \in A_r(K)$ hay $R(K[0;r]) \subset A_r(K)$. (**)

Mặt khác , vì $\mu(r, f)$ liên tục tại r nên ta suy ra:

$$\sup_{|z|\le r}|f(z)| = \mu(r, f) \text{ ,với } 0 \le r \le \rho .$$

Do đó ta có:

$$\|f\|_{K[0,r]} = \mu(r, f) \ , f \in A_r(K) .$$

Vì $A_r(K)$ đầy đủ với chuẩn $\mu(r,.)$ nên $A_r(K)$ cũng đầy đủ với chuẩn $\| \ \|_{K[0;r]}$. Do đó từ (**) ta suy ra $A_r(K) \supset H(K[0;r])$. Kết hợp với (*) ta được điều phải chứng minh. □

Định nghĩa 1.3.14. Giả sử $D \subset K$ không có điểm cô lập .

Hàm $f : D \to K$ được gọi là giải tích địa phương nếu với mỗi $a \in D$, $\exists\ r \in R_+$, $\{a_n\} \subset K$ sao cho : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $\forall z \in D \cap K[a;r]$.

Mệnh đề 1.3.15. *Nếu hàm f giải tích địa phương trên tập mở D thì nó có đạo hàm mọi cấp trên D . Điểm $z_0 \in D$ là nghiệm bội q của f nếu và chỉ nếu : $f^{(n)}(z_0) = 0$, $\forall n < q$ và $f^{(q)}(z_0) \neq 0$.*

Định nghĩa 1.3.16. Với tập $D \subset K$ không có điểm cô lập .

Hàm $f : D \to K \cup \{\infty\}$ được gọi là hàm phân hình trên D nếu tồn tại một tập đếm được $S \subset D$, $\boldsymbol{S}$ không có điểm giới hạn trong D sao cho f là hàm chỉnh hình trên $D \setminus S$.

Kí hiệu M (D) là tập các hàm phân hình trên D .

Định nghĩa 1.3.17. Với tập $D \subset K$ không có điểm cô lập .

Hàm $f : D \to K \cup \{\infty\}$ được gọi là hàm phân hình địa phương trên D nếu với $\forall\ a \in D$, $r \in R_+$, $q \in Z_+$ và $an \in K$ sao cho:

$$f(z) = \sum_{n=-q}^{\infty} a_n (z-a)^n \ , \ \forall z \in D \cap K[a \ ; \ r] .$$

Vậy mỗi hàm phân hình là một hàm phân hình địa phương.

Đặt $M_{(\rho}(K) = M(K(0 \ ; \ \rho))$. Ta có kết quả sau :

Mệnh đề 1.3.18. *Giả sử* $f \in M_{(\rho}(K)$ *, khi đó tồn tại* g *,* $h \in A_{(\rho}(K)$ *sao cho* $f = \frac{g}{h}$ *và :*

$$\mu(r, f) = \frac{\mu(r, g)}{\mu(r, h)} \qquad ,0 \le r < \rho \quad .$$

Đặc biệt :

$$\mu(r, \frac{1}{f}) = \frac{1}{\mu(r, f)} \quad .$$

Mệnh đề 1.3.19. Với $0 < r < \rho$, *hàm* $\mu(r, \, . \,)$: $M_{(\rho}(K) \to R_{+}$ *thoả mãn* :

i) $\mu(r, f) = 0$ *khi và chỉ khi* $f = 0$.

ii) $\mu(r, f_1 + f_2) \le max\{\mu(r, f_1), \mu(r, f_2)\}$.

iii) $\mu(r, f_1.f_2) = \mu(r, f_1).\mu(r, f_2)$.

Chương 2
LÝ THUYẾT NEVANLINNA TRÊN TRƯỜNG P - ADIC

Trong chương này , ta xét K là trường đóng đại số , đầy đủ với chuẩn không Acsimet có đặc số 0.

2.1 Các hàm đặc trưng Nevanlinna .

Định nghĩa 2.1.1. Giả sử $f \in A_{(\rho}(K)$, $0 < \rho \le \infty$ và $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$,

($m \ge 0$, $am \ne 0$) , $a \in K$**.** Ta định nghĩa :

+ $n(r, \frac{1}{f-a}) := \{z \in K[0\ ;\ r]\ : f(z) - a = 0\}$ là hàm đếm số không điểm (kể cả bội) của f - a trong đĩa $K[0;r]$.

+ $\overline{n}(r, \frac{1}{f-a})$ là hàm đếm số không điểm phân biệt của f - a trong đĩa $K[0;r]$.

+ Với $0 < \rho_0 < \rho$, hàm :

$$N\ (r, \frac{1}{f-a})\ :=\ \int_{\rho_0}^{r} \frac{n(t, \frac{1}{f-a})}{t} dt,\quad (\rho_0 < r < \rho)$$

được gọi là hàm giá trị của f - a trên đĩa $K\,[0;r]$.

Mệnh đề 2.1.2. Với $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n \in A_r(K)$, $\upsilon(r, f)$ là chỉ số ứng với số hạng lớn nhất $\mu(r, f)$, ta có :

$$n(r, \frac{1}{f}) = \upsilon(r, f).$$

Chứng minh

Theo định lí 1.3.6 (định lí Weierstrass) tồn tại một đa thức

$$g(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_\upsilon z^\upsilon \in K[z] \quad với \ \ \upsilon = \upsilon(r, f)$$

và một chuỗi luỹ thừa

$$h[z] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad , cn \in K .$$

thoả mãn :

$i)$ $f(z) = h(z)\, g(z)$,

$ii)$ $\mu(r, g) = |b_\upsilon|\ r^\upsilon$,

$iii)$ $h \in A_r(K)$,

$iv)$ $\mu(r, h-1) < 1$.

Để chứng minh $n(r, \frac{1}{f}) = \upsilon(r, f)$, ta chứng minh với $\alpha \in K : g(\alpha) = 0$ thì $|\alpha| \le r$ và nếu tồn tại $\beta \in K : h(\beta) = 0$ thì $|\beta| > r$.

Giả sử $\alpha \in K : g(\alpha) = 0$, khi đó tồn tại $i \le v$ sao cho

$$|b_i||\alpha|^i = \mu(\alpha, g) \ge |b_\upsilon||\alpha|^\upsilon$$

Suy ra nếu $|\alpha| > r$ thì :

$$|b_i| \ge |b_\upsilon||\alpha|^{\upsilon - i} > |b_\upsilon|\ r^{\upsilon - i},$$

Tức là :

$$|b_i| r^i > |b_\upsilon|\ r^{\upsilon - i} r^i = |b_\upsilon| r^\upsilon \quad \text{(mâu thuẫn với ii)} .$$

Vậy $|\alpha| \le r$ (1)

Mặt khác , giả sử tồn tại $\beta \in K : h(\beta) = 0$. Khi đó , tồn tại $n > 0$ sao cho $|c_n||\beta|^n = 1$. Do đó nếu $|\beta| \le r$ thì $|c_n| = \frac{1}{|\beta|^n} \ge \frac{1}{r^n}$.

Từ đó suy ra:

$$\left|c_n\right| r^n \geq \frac{1}{r^n} r^n = 1,$$

điều này mâu thuẫn với $\mu(r, h-1) < 1$. Vậy 0 - điểm của hàm *h* không thuộc đĩa K[0;r]. (2)

Từ (1), (2) ta suy ra $n(r, \frac{1}{f}) = \upsilon(r, f)$. □

Mệnh đề 2.1.3. *Giả sử f* $\in A_r(K)$ *có k* 0 - *điểm (kể cả bội) trong K*[0;*r*], $k \geq 1$. *Khi đó với b* $\in f(K\,[0;r])$ *thì* f - b *cũng có k* 0 - *điểm (kể cả bội) trong K*[0;*r*].

Chứng minh

Giả sử $f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n z^n$. Theo định lí 1.3.6 ta có :

$$k = \upsilon(r, f) \text{ và } \left|a_n\right| r^n \leq \left|a_k\right| r^k \ ,\forall n \leq k \ ; \ \left|a_n\right| r^n < \left|a_k\right| r^k \ ,\forall n > k \ .$$

Với $b \in f(K\,[0;r])$, ta có :

$$\left|a_0 - b\right| = \left|f(0) - b\right| \leq \mu(r, f(z) - b) = \left|a_k\right| r^k .$$

Do đó: $\upsilon(r, f - b) = k = \upsilon(r, f)$ .Theo định lí 1.3.6, thì f - b có k 0 - điểm trong đĩa $K\,[0;r]$. □

Từ mệnh đề 2.1.3 , ta suy ra một số tính chất về hàm giá trị của hàm phân hình như sau:

Hệ quả 2.1.4. *Giả sử f* $\in A_{(\rho}(K)$, $(0 < \rho \leq \infty)$ *không bị chặn và b* $\in K$, *ta có:*

$$N(r, \frac{1}{f-b}) = N(r, \frac{1}{f}) + O(1), \qquad (r \to \rho) .$$

Hệ quả 2.1.5. *Giả sử f là hàm nguyên khác hằng và b* $\in K$, *ta có*:

$$N(r, \frac{1}{f-b}) = N(r, \frac{1}{f}) + O(1), \qquad (r \to \rho) .$$

Ta xây dựng các hàm đặc trưng cho hàm phân hình

Cố định r , $0 < r < \rho \le \infty$ và $f \in M_{(\rho}(K)$. Khi đó , tồn tại $f_0, f_1 \in A_r(K)$, với f_0 , f_1 không có nhân tử chung trong vành $A_r(K)$ sao cho $f = \frac{f_0}{f_1}$.

Định nghĩa 2.1.6. Với $a \in K \cup \{\infty\}$, ta định nghĩa :

+ Hàm đếm số 0 - điểm (kể cả bội) của *f* - *a* trong đĩa *K* [0;*r*] được xác định bởi :

$$n(r,\frac{1}{f-a}) = \begin{cases} n(r,f) = n(r,\frac{1}{f_0}), & \text{nếu } a = \infty \\ n(r,\frac{1}{f_1 - af_0}), & \text{nếu } a \neq \infty \end{cases}$$

+ Hàm giá trị của *f* - *a* trên đĩa *K* [0;*r*] được xác định bởi :

$$N(r,\frac{1}{f-a}) = \begin{cases} N(r,f) = N(r,\frac{1}{f_0}), & \text{nếu } a = \infty \\ N(r,\frac{1}{f_1 - af_0}), & \text{nếu } a \neq \infty \end{cases}$$

Mệnh đề 2.1.7. Với $f \in M_{(\rho}(K)$, ta có :

$$N(r,\frac{1}{f}) - N(r,f) = \log\mu(r,f) - \log\mu(\rho_0,f) \text{ , với } 0 < \rho_0 < r \le \rho .$$

(Công thức Jensen)

Chứng minh

Với $f \in A_{(\rho}(K)$, ta kí hiệu:

$$N(r, f = a) = \int_0^r \frac{n(t,\frac{1}{f-a}) - n(0,\frac{1}{f-a})}{t} dt + n(0,\frac{1}{f-a})\log r \text{ , với } 0 < r < \rho .$$

Khi đó ta có:

$$N(r, f = a) - N(\rho_0, f = a) = N(r,\frac{1}{f-a}) \ge 0 .$$

Theo mệnh đề 2.1.2 , ta có:

$$N(r, f=0) = \int_0^r \frac{n(t,\frac{1}{f}) - n(0,\frac{1}{f})}{t} dt + n(0,\frac{1}{f})\log r$$

$$= \int_0^r \frac{\upsilon(t, f) - \upsilon(0, f)}{t} dt + \upsilon(0, f)\log r$$

$$= \log\mu(r, f) - \log\left|f^*(0)\right| \ .$$

Suy ra :

$$N(r,\frac{1}{f}) = N(r, f=0) - N(\rho_0, f=0)$$

$$= \log\mu(r, f) - \log\mu(\rho_0, f) \ .$$

Giả sử $f = \frac{f_1}{f_0} \in M_{(\rho}(K)$, với $f_1, f_0 \in A_{(\rho}(K)$ ta kí hiệu :

$$N(r, f=a) = \begin{cases} N(r, f_0 = 0) \ , & \text{nếu } a = \infty \\ N(r, f_1 - af_0), & \text{nếu } a \neq \infty \end{cases}$$

Khi đó ta có :

$$N(r, f=0) - N(r, f=\infty) = N(r, f_1 = 0) - N(r, f_0 = 0)$$

$$= \log\mu(r, f_1) - \log\left|f_1^*(0)\right| - \log\mu(r, f_0) + \log\left|f_0^*(0)\right|$$

$$= \log\frac{\mu(r, f_1)}{\mu(r, f_0)} - \log\frac{\left|f^*{}_1(0)\right|}{\left|f_0^*(0)\right|}$$

$$= \log\mu(r, f) - \log\left|f^*(0)\right|$$

Từ đó suy ra :

$$N(r,\frac{1}{f}) - N(r, f) = \log\mu(r, f) - \log\mu(\rho_0, f) \text{ , với } 0 < \rho_0 < r \leq \rho \ . \qquad \square$$

Định nghĩa 2.1 8. Giả sử $f \in M_{(\rho}(K)$, với $r \le \rho$ ta định nghĩa :

+ Hàm xấp xỉ của hàm *f* trên đĩa *K* [0;*r*] được xác định bởi :

$$m(r,f) = log^{+}\mu(r,f) = max\,\{0,\log\mu(r,f)\}.$$

+ Hàm đặc trưng :

$$T(r,f) = m(r,f) + N(r,f)\ .$$

***Chú ý* :**

Ta có : $log\ \mu(r,f) = log^{+}\mu(r,f) - log^{+}\dfrac{1}{\mu(r,f)}$

$$= m(r,f) - m(r,\frac{1}{f})\ .$$

Do đó công thức Jensen có thể viết lại như sau:

$$T(r,\frac{1}{f}) = T(r,f) - \log\mu(\rho_0,f).$$

Hay

$$T(r,\frac{1}{f}) = T(r,f) + O(1)\ .$$

Từ định nghĩa của các hàm đặc trưng , ta có một số tính chất sau .

Mệnh đề 2.1.9. Với $fi \in M_{(\rho}(K)$, $i = 1, \ldots, k$ và $r > 0$,ta có :

$$N(r,\sum_{i=1}^{k} f_i) \le \sum_{i=1}^{k} N(r,f_i)\ , \qquad N(r,\prod_{i=1}^{k} f_i) \le \sum_{i=1}^{k} N(r,f_i)\ ;$$

$$m(r,\sum_{i=1}^{k} f_i) \le \max_{1\le i\le k} m(r,f_i)\ , \qquad m(r,\prod_{i=1}^{k} f_i) \le \sum_{i=1}^{k} m(r,f_i);$$

$$T(r,\sum_{i=1}^{k} f_i) \le \sum_{i=1}^{k} T(r,f_i)\ , \qquad T(r,\prod_{i=1}^{k} f_i) \le \sum_{i=1}^{k} T(r,f_i)\ .$$

Mệnh đề 2.1.10. *Giả sử f là hàm phân hình trên đĩa* $d(0,r)$ *sao cho* $f(0) \neq 0, \infty$. *Khi đó , f bị chặn trên đĩa* $d(0,r)$ *khi và chỉ khi* $T(\rho, f)$ *bị chặn trên* $[0;r)$.

Mệnh đề 2.1.11. *Giả sử f là hàm phân hình trên đĩa* $d(0, r)$, *P là đa thức bậc n trên K . Khi đó:*

$$T(\rho, P(f)) = nT(\rho, f) + O(1)$$

Hệ quả 2.1.12. *Giả sử f là hàm phân hình trên đĩa* $d(0, r)$, *P là đa thức trên K . Khi đó , f bị chặn trên* $d(0, r)$ *khi và chỉ khi* $P(f)$ *bị chặn trên* $d(0, r)$.

Hệ quả 2.1.13. *Giả sử P , Q là đa thức trên K , f và g là các hàm phân hình trên* $d(0, r)$ *thoả mãn* $P(f) = Q(g)$. *Khi đó , f bị chặn trên* $d(0, r)$ *khi và chỉ khi g bị chặn trên* $d(0, r)$.

2.2 Các định lí cơ bản về phân phối giá trị hàm phân hình .

Định lí 2.2.1 *(Định lí cơ bản thứ nhất).*

Giả sử f là hàm phân hình khác hằng trên $K(0, \rho)$. *Khi đó , với mọi* $a \in K$ *ta có* :

$$m(r, \frac{1}{f-a}) + N(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(1), \qquad (r \to \rho)$$

Chứng minh

Theo định nghĩa hàm đặc trưng và áp dụng công thức Jensen ta có:

$$m(r, \frac{1}{f-a}) + N(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, \frac{1}{f-a})$$

$$= T(r, f-a) + O(1) \ .$$

Mặt khác , vì :

$$T(r, f-a) \leq T(r, f) + T(r, -a)$$

$$= T(r,f) + m(r,-a) + N(r,-a)$$

$$= T(r,f) + \log^+|a| \quad , \qquad (\text{vì } N(r, -a) = 0 \text{ }).$$

Hay:

$$T(r, f-a) \le T(r,f) + O(1) \text{ khi } r \to \rho$$

Tương tự ta cũng có :

$$T(r, f) \le T(r, f-a) + O(1) \text{ khi } r \to \rho$$

Do đó :

$$T(r, f-a) = T(r,f) + O(1) \text{ khi } r \to \rho$$

Vậy:

$$m(r, \frac{1}{f-a}) + N(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f-a) + O(1)$$

$$= T(r,f) + O(1) \text{ khi } r \to \rho \ . \qquad \square$$

Định lí 2.2.2 *(Định lí cơ bản thứ hai).*

Giả sử f là hàm phân hình khác hằng trên K$(0, \rho)$ *; và* $a_1, \dots, a_q$ *là các điểm phân biệt thuộc K . Định nghĩa*:

$$\delta = \min_{i \ne j}\left\{1, |a_i - a_j|\right\}, \qquad A = \max_i\{1, |a_i|\}.$$

Khi đó với $0 < r < \rho$ *ta có* :

$$(q\text{-}1)\, T(r,f) \le \sum_{j=1}^{q} N(r, \frac{1}{f-a_j}) - N(r,f) + N(r,f') - N(r, \frac{1}{f'}) - \log r + S_f$$

$$\le \overline{N}(r,f) + \sum_{j=1}^{q} \overline{N}(r, \frac{1}{f-a_j}) - \log r + S_f \ ,$$

với $\quad S_f = \sum_{j=1}^{q} \log \mu(\rho_0, f-a_j) - \log \mu(\rho_0, f') + (q-1)\log \frac{A}{\delta}$.

Chứng minh

Giả sử $r^{'}$: $\rho_0 < r^{'} < \rho$, $f = \dfrac{f_1}{f_0}$ với $f_1, f_0 \in A_{r^{'}}(K)$ và f_1, f_0 không có nhân tử chung . Đặt $F_0 = f_0$, $Fi = f_1 - ai\, f_0$, với $i = 1, 2, \ldots, q$.

Khi đó: $f_1 = Fi + ai\, f_0$ với mọi $i = \overline{1,q}$.

Do đó: $$|f_1| \le \max_{1 \prec i \le q}\{|F_i| \;,\; |a_i|\; |f_0|\}$$
$$\le A.\max_{1 \prec i \le q}\{|F_i| \;,\; |F_0|\}$$

Suy ra:

$$|f_k| \le A.\max_{1 \le i \le q}\{|F_i| \;,\; |F_0|\} \text{ , với } k = 0, 1 .$$

Kí hiệu $W = W(f_0 , f_1)$ là định thức Wronskia của f_0 và f_1 . Khi đó ta có:

$$Wi = W(F_0 , F_1) = W.$$

Vì f là hàm phân hình khác hằng nên tồn tại $z \in K\,[0 ; r^{'}] \setminus K\,[0 ; \rho_0]$ sao cho:

$$W(z) , f_1(z) , Fi\,(z) \neq 0 \quad , \quad i = 0 , 1, \ldots , q .$$

Chọn $j = \{1 , 2 , \ldots , q\}$ sao cho:

$$|F_j(z)| = \min_{1 \le i \le q} |F_i(z)| .$$

Ta có:

$$|f_0(z)| = \frac{|F_i(z) - F_j(z)|}{|a_i - a_j|} \le \frac{1}{\delta} |F_i(z)| \text{ , với } i \neq j .$$

Không mất tính chất tổng quát, ta giả sử:

$$0 < \max\{\delta\; |f_0(z)| \;,\; |F_j(z)|\} \le |F_1(z)| \le \;\ldots$$
$$\ldots \le |F_{j-1}(z)| \le |F_{j+1}(z)| \le \;\ldots\; \le |F_q(z)| < \infty$$

Do đó , với $k = 0 ; 1$ ta có :

$$|f_k(z)| \le \frac{A}{\delta}\max\{\delta|f_0(z)|\ ,\ |F_j(z)|\} \le \frac{A}{\delta}|F_t(z)|\ ,\text{ với } \forall t=\overline{1,q}\ ,\ i\ne j\ ,$$

Suy ra : $\left|\overline{f}(z)\right| = \max\limits_{k=0,1}|f_k(z)| \le \frac{A}{\delta}|F_t(z)|$, với $\forall t=\overline{1,q}$, $i\ne j$,

với $\overline{f} = (f_0, f_1) : K \to K^2$ là một biểu diễn của hàm f .

Vì $Wj = W$ nên ta có :

$$\log\frac{|F_0(z)\ ...\ F_q(z)|}{|W(z)|} = \log\left|\prod_{t=\overline{1,q},t\ne j}F_t(z)\right| - \log D_j(z)$$

với $D_j(z) = \frac{|W_j|}{|F_0F_j|} = \left|\frac{F_j'}{F_j} - \frac{F_0'}{F_0}\right|$. Do đó:

$$\log\left|\prod_{t=\overline{1,q},i\ne j}F_t(z)\right| = \log\frac{|F_0(z)\ ...\ F_q(z)|}{|W(z)|} + \log D_j(z).$$

Suy ra :

$$(q-1)\log\left|\overline{f}(z)\right| \le (q-1)\log\frac{A}{\delta} + \log\left|\prod_{t=\overline{1,q},i\ne j}F_t(z)\right|$$

$$\le (q-1)\frac{A}{\delta} + \log\frac{|F_0(z)\ ...\ F_q(z)|}{|W(z)|} + \log D_j(z)\ .$$

Đặt $r = |z|$, theo mệnh đề 1.3.8 ta có :

$$D_j(z) \le \max\left\{\frac{|F_j'(z)|}{|F_j(z)|}, \frac{|F_0'(z)|}{|F_0(z)|}\right\} \le \frac{1}{r}\ .$$

Hay:

$$\log D_j(z) \le -\log r\ .$$

áp dụng công thức Jensen , ta có :

$$\log|F_0(z)| = \log\mu(r, F_0) = \log\mu(r, f_0)$$

$$= N(r,\frac{1}{f_0}) + \log\mu(\rho_0, f_0)$$

$$= N(r, f) + \log\mu(\rho_0, f_0) \ ,$$

$$\log|W(z)| = \log\mu(r,W) = \log\mu(r, f_0 f'_1 - f_1 f_0')$$

$$= N(r,\frac{1}{W}) + \log\mu(\rho_0, W)$$

$$= N(r,\frac{1}{W}) + \log\mu(\rho_0, f' \ ) + 2\log\mu(\rho_0, f_0) \ .$$

$$\log|F_i(z)| = \log\mu(r, F_i) = \log\mu(r, f_1 - a_i f_0)$$

$$= N(r,\frac{1}{f - a_i}) + \log\mu(\rho_0, f - a_i) + \log\mu(\rho_0, f_0)$$

(vì $N(r,\frac{1}{f - a_i}) = N(r,\frac{1}{f_1 - a_i f_0})$, $\forall i = \overline{1,q}$) .

Mặt khác , do:

$$\log|\overline{f}(z)| = \log\mu(r, \overline{f}) = T(r, f) + \log\mu(\rho_0, f_0) \ ,$$

nên suy ra :

$$(q-1)T(r, f) \le N(r, f) + \sum_{j=1}^{q} N(r,\frac{1}{f - a_j}) - N(1,\frac{1}{W}) - \log r + S_f \ ,$$

với $S_f = \sum_{j=1}^{q}\log\mu(\rho_0, f - a_j) - \log\mu(\rho_0, f') + (q-1)\log\frac{A}{\delta}$.

Vì $W = f + f_0 f_1' - f_0' f_1 = f_0^{\,2} f_1'$ nên :

$$n(r,\frac{1}{W}) = 2\ n(r,\frac{1}{f_0}) + n(r,\frac{1}{f'}) - n(r, f')$$

$= 2\ n(r, f) + n(r,\frac{1}{f'}) - n(r, f')$, suy ra :

$$N(r,\frac{1}{W}) = 2\ N(r,f) + N(r,\frac{1}{f^{'}}) - N(r,f^{'}) .$$

Suy ra :

$$n(r,f)+\sum_{j=1}^{q} n(r,\frac{1}{f-a_j})-n(r,\frac{1}{W}) \le \overline{n}(r,f)+\sum_{j=1}^{q}\overline{n}(r,\frac{1}{f-a_j}) .$$

Do đó ta có :

$$(q-1)T(r,f) \le \sum_{j=1}^{q} N(r,\frac{1}{f-a_j})-N(r,f)-N(1,\frac{1}{f^{'}})+N(r,f^{'})-\log r+S_f .$$

$$\le \overline{N}(r,f)+\sum_{j=1}^{q}\overline{N}(r,\frac{1}{f-a_j})-\log r+S_f ,$$

với $\quad S_f = \sum_{j=1}^{q}\log\mu(\rho_0, f-a_j)-\log\mu(\rho_0, f^{'})+(q-1)\log\frac{A}{\delta}.$ □

2.3 Tập xác định duy nhất các hàm phân hình .

Giả sử *K* là trường đóng đại số, đặc số 0, đầy đủ với chuẩn không Acsimet. Với *f* là hàm phân hình khác hằng trên *K*, $a \in K\cup\{\infty\}$, $S \subset K\cup\{\infty\}$. Ta định nghĩa:

Định nghĩa 2.3.1. Đại lượng $\mu_f^{\,a}(z)$ là giá trị bội của *f* - *a* tại, tức là :

$$\mu_f^{\,a}(z_0)=m \Leftrightarrow f(z_0)=\begin{cases} a+(z-z_0)^m h(z) , & \text{nếu } a\neq\infty \\ \dfrac{h(z-z_0)}{(z-z_0)^m} , & \text{nếu } a=\infty \end{cases}$$

với $h(z_0)\neq 0$.

$$E_f(S)=\bigcup_{a\in S}\{(\mu_f^{\,a}(z),z) \quad | \quad z\in K\} .$$

$$\overline{E}_f(S)=\bigcup_{a\in S}\{z\in K \quad | \quad \mu_f^{\,a}(z)>0\} .$$

Hàm f và *g* được gọi là chung giá trị kể cả bội (không kể bội) nếu:

$$E_f(a)=E_g(a) \qquad (\overline{E}_f(a)=\overline{E}_g(a) \ , \ \ t.\ -.) .$$

Nếu f và g có chung giá trị kể cả bội (không kể bội) , ta viết f và g a - CM (f và g a - IM , tương ứng).

Tập $S \subset K \cup \{\infty\}$ được gọi là tập xác định duy nhất các hàm phân hình (URSM) nếu với bất kì f , g là hai hàm phân hình khác hằng trên K thoả mãn $E_f(S) = E_g(S)$ kéo theo $f \equiv g$.

Tập $S \subset K \cup \{\infty\}$ được gọi là tập xác định duy nhất các hàm nguyên (URSE) nếu với bất kì f , g là hai hàm nguyên khác hằng trên K thoả mãn $E_f(S) = E_g(S)$ kéo theo $f \equiv g$.

Vào những năm 1920 , như là một ứng dụng của Lý thuyết Nevanlinna , chính Nevanlinna đã chứng minh rằng một hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức xác định duy nhất bởi nghịch ảnh của 5 giá trị phân biệt kể cả bội, nghĩa là với f , g là hai hàm phân hình khác hằng trên C thoả mãn :

$$\overline{E}_f(a_j) = \overline{E}_g(a_j) \ , \ \forall j = 1 , 2 , . . . , 5.$$

thì $f \equiv g$.

Khi xét trên trường p - adic , bài toán xác định tập duy nhất của hàm phân hình , hàm nguyên đã được nhiều tác giả quan tâm . Adams - Straus đã chứng minh được kết quả sau :

Định lí 2.3.2. *Giả sử* f , g *là hai hàm phân hình khác hằng trên* K *và* a_1 , a_2 , a_3 , a_4 *phân biêt thuộc* $K \cup \{\infty\}$ *sao cho:*

$$\overline{E}_f(a_j) = \overline{E}_g(a_j) \ , \ \forall j = 1 , 2 , . . . 4.$$

Khi đó $f \equiv g$.

Chứng minh

Giả sử f không trùng với g theo định lí cơ bản thứ hai ta có :

$$3T(r,f)+\log r \le \overline{N}(r,f)+\sum_{j=1}^{4}\overline{N}(r,\frac{1}{f-a_j})+O(1)\,.$$

Vì $T(r,f)\ge N(r,f)\ge \overline{N}(r,f)$ nên suy ra :

$$2T(r,f)+\log r \le \sum_{j=1}^{4}\overline{N}(r,\frac{1}{f-a_j})+O(1)\ .$$

Mặt khác , do $\overline{E}_f(a_j)=\overline{E}_g(a_j)$, $\forall j = 1 , 2 , . . . 4$ nên suy ra :

$$\sum_{j=1}^{4}\overline{n}(t,\frac{1}{f-a_j})\le n(t,\frac{1}{t-g})\ ,\ \forall t\le r$$

Hay:

$$\sum_{j=1}^{4}\overline{N}(r,\frac{1}{f-a_j})\le N(,\frac{1}{t-g})\quad .$$

Do đó ta có :

$$\begin{aligned}2T(r,f)+\log r &\le N(r,\frac{1}{f-g})+O(1)\\ &\le T(r,\frac{1}{f-g})+O(1)\\ &=T(r,f)+O(1)\\ &\le T(r,f)+T(r,g)+O(1)\ .\end{aligned}$$

Tương tự , ta cũng có :

$$2T(r,g)+\log r \le T(r,f)+T(r,g)+O(1)\ .$$

Suy ra : $2\log r \le O(1)$, điều này mâu thuẫn khi $r\to\infty$.

Vậy $f \equiv g$. □

Từ phép chứng minh trên , ta suy ra rằng nếu hai hàm nguyên trên K chung nhau 3 giá trị phân biệt không kể bội thì chúng trùng nhau . Tuy nhiên, Adams - Straus đã chứng minh được một kết quả mạnh hơn như sau.

Định lí 2.3.3. *Giả sử f , g là hai hàm nguyên khác hằng trên K và a_1 , a_2 là hai điểm phân biệt trên K sao cho* :

$$\overline{E}_f(a_j) = \overline{E}_g(a_j) \ , \ \forall j = 1 , 2 .$$

Khi đó $f \equiv g$.

Chứng minh

Không mất tính chất tổng quát , chọn $\{z_n\} \subset K : r_n = |z_n| \to \infty$ sao cho $|f(z_n)| \geq |g(z_n)|$ và $|f(z_n)| > \max\{|a_1|, |a_2|\}$, $\forall n \geq 1$.

Đặt :

$$\psi = \frac{f'(f-g)}{(f-a_1)(f-a_2)} .$$

Vì $\overline{E}_f(a_j) = \overline{E}_g(a_j)$, $\forall j = 1 , 2$ nên mọi 0 - điểm kể cả bội của $(f - a_1)(f - a_2)$ đều là 0 - điểm của $f'(f-g)$, do đó ψ không có cực điểm . Vậy ψ là hàm nguyên . Nhưng do :

$$|\psi(z_n)| = \frac{|f'(z_n)||f(z_n) - g(z_n)|}{|f(z_n) - a_1||f(z_n) - a_2|} \leq \frac{|f'(z_n)|}{|f(z_n)|} \leq \frac{1}{r_n} \to 0 \ ,$$

nên suy ra $\psi \equiv 0$ hay $f \equiv g$. □

Mệnh đề 2.3.4. *Giả sử f , g là hai hàm phân hình khác hằng trên K và tồn tại ba điểm phân biệt a_1 , a_2 , a_3 thuộc $K \cup \{\infty\}$ sao cho* :

$$E_f(a_j) = E_g(a_j) \ , \ \forall j = 1 , 2 \text{ và } \overline{E}_f(a_3) \cap \overline{E}_g(a_3) \neq \emptyset$$

Khi đó $f \equiv g$.

Chứng minh

Giả sử $a_1 , a_2 \in K$, đặt $F = \dfrac{f - a_1}{f - a_2}$, $G = \dfrac{g - a_1}{g - a_2}$. Xét :

$$\frac{F}{G} = \frac{f - a_1}{g - a_1} \cdot \frac{g - a_2}{f - a_2} \quad .$$

Vì $E_f(a_j) = E_g(a_j)$, $j = 1$, 2 nên $\frac{F}{G}$ không có cực điểm và cũng không có 0 - điểm . Vậy $\frac{F}{G}$ là hàm hằng. Do đó , tồn tại $c \in K_*$: $\frac{F}{G} = c$

hay : $$\frac{f(z) - a_1}{f(z) - a_2} = c.\frac{g(z) - a_1}{g(z) - a_2} \qquad (*)$$

Vì $\overline{E}_f(a_3) \cap \overline{E}_g(a_3) \neq \varnothing$ nên chọn được $z_0 \in \overline{E}_f(a_3) \cap \overline{E}_g(a_3)$.

Khi đó: $f(z_0) = a_3$ và $g(z_0) = a_3$. Từ (*) và $z = z_0$ ta suy ra $c = 1$.

Vậy $f \equiv g$.

Nếu a_1 hoặc a_2 bằng ∞, giả sử $a_2 = \infty$. Khi đó $\frac{f - a_1}{g - a_1}$ là hàm nguyên trên K và không có 0 - điểm.Tương tự như trên ta suy ra $f \equiv g$. □

Hệ quả 2.3.5. *Giả sử f , g là hai hàm nguyên khác hằng trên K và* a_1 , a_2 *là hai điểm phân biệt thuộc K thoả mãn* :

$$E_f(a_1) = E_g(a_1) \ , \ \overline{E}_f(a_2) \cap \overline{E}_g(a_2) \neq \varnothing$$

Khi đó $f \equiv g$.

Chương 3
PHƯƠNG TRÌNH HÀM $P(f) = Q(g)$ TRONG TRƯỜNG P - ADIC

Ta xét K là trường đóng đại số đầy đủ có đặc số 0 . Cho $a \in K$ và $r > 0$, kí hiệu $M(K)$ (tương ứng $M(Kr)$) là trường các hàm phân hình trong K (tương ứng trong $K(a\ ;\ r)$) và $A(K)$ (tương ứng $A(K_r)$) là vành các hàm giải tích trong K (tương ứng trong $K(a\ ;\ r)$) . Trong $A(K_r)$, ta kí hiệu $A_b(K_r)$ là vành con các hàm $f \in A(K_r)$ bị chặn trong $K(a\ ;\ r)$; $A_u(K_r) = A(K_r) \setminus A_b(K_r)$ Tương tự, trong $M(K_r)$ ta kí hiệu $M_b(K_r)$ là trường con các hàm $f \in M(K_r)$ có dạng $\frac{\phi}{\psi}$ với ϕ , $\psi \in A_b(K_r)$; $M_u(K_r) = M(K_r) \setminus M_b(K_r)$.

Định lí 3.1. *Cho P , $Q \in K[x]$ với $\deg P = \deg Q = 2$. Giả sử a là một không điểm của P' và b là một không điểm của Q'.*

Khi đó , ba mệnh đề sau là tương đương :

i) Tồn tại f , $g \in A(K) \setminus K$ thoả mãn $P(f) = Q(g)$.

ii) Tồn tại f , $g \in Au(Kr) \setminus K$ thoả mãn $P(f) = Q(g)$.

iii) $P(a) = Q(b)$.

Chứng minh

Vì $\deg P = \deg Q = 2$ và a là một không điểm của P', b là một không điểm của Q' , nên ta có thể viết :

$$P(x) = \alpha^2 (x-a)^2 + P(a) \ ,$$

$$Q(x) = \beta^2 (x-b)^2 + Q(b) \ , \quad \alpha \ , \ \beta \in K \setminus \{0\} \ .$$

$(i) \Leftrightarrow (iii)$: Ta giả sử $P(a) = Q(b)$ và cho $f \in A(K) \setminus K$. Đặt :

$$g = \frac{\alpha}{\beta}(f-a) + b$$

suy ra $g \in A(K) \setminus K$ và :

$$Q(g) = \beta^2 (g-b)^2 + Q(b)$$

$$= \beta \frac{\alpha^2}{\beta^2} (f-a)^2 + Q(b)$$

$$= \alpha^2 (f-a)^2 + P(f) = P(f) \ .$$

Ngược lại , giả sử $P(a) \neq Q(b)$ và giả sử tồn tại $f, g \in A(K) \setminus K$ thoả mãn: $P(f) = Q(g)$. Cho $\lambda \in K$ thoả mãn $\lambda^2 = Q(b) - P(a)$ và đặt :

$$\phi = \frac{\alpha}{\lambda}(f-a) \ , \ \psi = \frac{\beta}{\lambda}(g-b).$$

suy ra $\phi, \psi \in A(K) \setminus K$ và ta có :

$$\phi^2 - \psi^2 = \frac{\alpha^2}{\lambda^2}(f-a)^2 - \frac{\beta^2}{\lambda^2}(g-b)^2$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}[\alpha^2 (f-a)^2 - \beta^2 (g-b)^2]$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}[P(f) - P(a) - (Q(g) - Q(b))]$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}[Q(b) - P(a)] = 1 \ .$$

suy ra $(\phi-\psi)(\phi+\psi) = 1$ nên $(\phi-\psi)$ *và* $(\phi+\psi)$ là hằng số . Vậy ϕ, ψ là hằng số tức là f , g là hằng số , mâu thuẫn với giả thiết $f, g \in A(K) \setminus K$.

Vậy $P(a) = Q(b)$.

(*ii*) $\Leftrightarrow$ (*iii*) Tương tự như trên , ta giả sử $P(a) = Q(b)$ và lấy $f \in Au(Kr)$ Đặt :

$$g = \frac{\alpha}{\beta}(f-a) + b$$

suy ra $g \in Au(Kr)$ và $P(f) = Q(g)$.

Ngược lại , giả sử $P(a) \neq Q(b)$ và giả sử tồn tại $f, g \in Au(Kr)$ thoả mãn

$P(f) = Q(g)$. Cho $\lambda \in K$ thoả mãn $\lambda^2 = Q(b) - P(a)$ và đặt :

$$\phi = \frac{\alpha}{\lambda}(f-a) \ , \ \psi = \frac{\beta}{\lambda}(g-b).$$

suy ra $\phi, \psi \in Au(Kr)$ và ta có : $\phi^2 - \psi^2 = 1 \Leftrightarrow (\phi - \psi)(\phi + \psi) = 1$. Vậy $(\phi - \psi)$ *và* $(\phi + \psi)$ bị chặn trong *Kr* , do đó cả ϕ *và* ψ đều bị chặn trong *Kr* mâu thuẫn với giả thiết $\phi, \psi \in Au(Kr)$.

Vậy $P(a) = Q(b)$. □

Định nghĩa 3.2. Một đa thức $P \in K[x]$ được gọi là thoả mãn Điều kiện (*F*) nếu với bất kì hai không điểm phân biệt *a* , *b* của P', ta có $P(a) \neq P(b)$ (tức là hạn chế của *P* trên tập các không điểm của P' là đơn ánh) .

Bổ đề 3.3. *Cho* $P \in K[x]$ *với deg P = 4 và giả sử nó không thoả mãn Điều kiện* (*F*) .

Khi đó, P' *có ba không điểm phân biệt .*

Chứng minh

Vì *P* không thoả mãn Điều kiện (*F*) nên P' không thể có không điểm bội ba duy nhất . Giả sử , P' chỉ có hai không điểm phân biệt.

Bằng phép đổi biến, P' có dạng:

$$\lambda x^2(x-b) \ , \ \lambda, b \in K \ .$$

Suy ra 0 và *b* là hai không điểm phân biệt của P'. (*)

Khi đó *P* có dạng :

$$\lambda(\frac{x^4}{4} - b\frac{x^3}{3}) + d \ , \ d \in K$$

Vì *P* không thoả mãn Điều kiện (*F*) nên :

$$P(0) = P(b) \Leftrightarrow \quad d = \lambda(\frac{b^4}{4} - \frac{b^4}{3}) + d$$

suy ra $b = 0$, mâu thuẫn với (*) .

Vậy P' có ba không điểm phân biệt . □

Bổ đề 3.4. *Cho* $P \in K[x]$ *với* $\deg P = 4$ *và hệ số cao nhất là* 1 .

Khi đó , hai mệnh đề sau là tương đương :

(i) *P không thoả mãn Điều kiện* (F) .

(ii) *P có dạng* $[(x - a + l)(x - a - l)]^2 + A$ *với* $A \in K$, $l \in K^*$.

Chứng minh

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Giả sử (i) được thoả mãn , tức là P không thoả mãn Điều kiện (F) . Theo bổ đề 3.3 thì P' có ba không điểm phân biệt c_1 , c_2 , c_3 .

Trước hết , ta giả sử $P(c_1) = P(c_2) = P(c_3)$. Vậy $P - P(c_1)$ có ba không điểm là c_1 , c_2 , c_3 cấp ≥ 2 , mâu thuẫn với giả thiết $\deg P = 4$. Do đó , ta có thể giả sử : $P(c_1) \neq P(c_2) \neq P(c_3)$.

Suy ra :

$$P - P(c_1) = (x - c_1)^{s_1} R_1(x) \quad , \ (R_1(c_1) \neq 0 \ , \ s_1 \geq 2)$$

$$= (x - c_1)^{s_1}(x - c_2)^{s_2} R_2(x) \quad , \ (R_2(c_2) \neq 0 \ , \ s_2 \geq 2) .$$

Vì $\deg P = 4$, hệ số cao nhất của P là 1 nên $s_1 = s_2 = 2$, $R_2(x) = 1$.

Đặt :

$$A = P(c_1) \ , \ a = \frac{c_1 + c_2}{2} \ , \ c_1 = a + l \ , \ c_2 = a - l .$$

Suy ra :

$$P = (x - c_1)^2 (x - c_2)^2 + P(c_1) = [(x - a + l)(x - a - l)]^2 + A .$$

Hơn nữa , vì P' có ba không điểm phân biệt nên $l \neq 0$, tức là (ii) được chứng minh.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Dùng phép đổi biến ta có thể đưa P về dạng :

$$P = x^4 + bx^2 + c .$$

Vì $l \in K^*$ nên $b \neq 0$. Ta có :

$$P' = 4x^3 + 2bx = 2x(2x^2 + b) .$$

Nếu $b < 0$, P' có hai không điểm phân biệt là $\pm\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{2}}$, nhưng $P(\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{2}})=P(-\frac{\sqrt{-b}}{\sqrt{2}})$, tức là P không thoả mãn Điều kiện (F) .

Nếu $b > 0$, tương tự như trên , P' có hai không điểm phân biệt là $\pm\frac{i\sqrt{b}}{\sqrt{2}}$, nhưng $P(\frac{i\sqrt{b}}{\sqrt{2}})=P(-\frac{i\sqrt{b}}{\sqrt{2}})$, tức là P không thoả mãn Điều kiện (F) .

Vậy (i) được chứng minh. □

Mệnh đề 3.5. *Cho f , $g \in M(K_r)$ và P , $Q \in K[x]$ và giả sử f và g thoả mãn :*

$$P(f) =Q(g)$$

Khi đó , f bị chặn trong K khi và chỉ khi g bị chặn trong K .

Chứng minh

Vì f bị chặn , nên theo mệnh đề 2.1.10 $T(\rho, f)$ bị chặn . Đặt $p = \deg P$.

Nếu $p = 0$ thì P là hằng số nên $P(f)$ bị chặn .

Nếu $p > 0$ theo mệnh đề 2.1.11 ta có :

$$T(\rho, P(f)) = pT(\rho, f) + O(1) .$$

Vì $T(\rho, f)$ bị chặn , suy ra $T(\rho, P(f))$ bị chặn . Do đó $P(f)$ bị chặn hay $Q(g)$ bị chặn , tức là g bị chặn. □

Mệnh đề 3.6. *Cho P , Q* $\in$ *K*[*x*] *với* $P^{'}Q^{'} \neq 0$ *và cho p = deg P , q = deg Q, thoả mãn* $2 \leq \min(p,q)$ *. Giả sử tồn tại các không điểm phân biệt* c_1 , c_2 , . . c_k *của* $P^{'}$ *sao cho* $P(c_i) \neq P(c_j)$, $\forall i \neq j$ *và* $P(c_i) \neq Q(d)$, $\forall i = 1,...,k$ *với mọi không điểm d của* $Q^{'}$.

Giả sử tồn tại hai hàm phân hình f, g $\in$ $M_u(K_r)$ *thoả mãn P(f) = Q(g).*

Khi đó , ta có :

$$\overline{N}(\rho, f) \geq \frac{kq-p}{q} T(\rho, f) + O(1) \quad .$$

Hơn nữa , giả sử $\frac{2p}{3} < q$ *thì* $k \leq 2$ *. Thêm nữa , nếu p* $\neq$ *q thì k* = 1 , c_1 *là một không điểm đơn của* $P^{'}$ *và hoặc q < p , hoặc* (*q, p*) = *q - p .*

Chứng minh

Đặt *w* = (*p* , *q*) và $p = w\overline{p}$, $q = w\overline{q}$. Không mất tính tổng quát , ta có thể giả sử $f^{'}g^{'} \neq 0$ .Mặt khác , có thể giả sử *a* = 0 và không hàm phân hình được xét nào đạt 0 hoặc ∞ tại 0. Kí hiệu *I* (tương ứng *J*) là khoảng có dạng [*l* ; $+\infty$) (tương ứng [*l* ; *log r*)) và biểu diễn hai hàm θ , τ xác định trong *I* (tương ứng trong *J*) : $\theta = \tau + O(1)$ nếu $\theta - \tau$ là bị chặn trong *I* (tương ứng trong *J*) .

Theo mệnh đề 2.1.10 ta có :

$$T(\rho, P(f)) = pT(\rho, f) + O(1) \ ,$$

$$T(\rho, Q(g)) = qT(\rho, g) + O(1) \ .$$

Vì *P*(*f*) = *Q*(*g*) nên : $T(\rho, P(f)) = T(\rho, Q(g))$. Do đó:

$$pT(\rho, f) = qT(\rho, g) + O(1)$$

$$\Rightarrow \overline{p}T(\rho, f) = \overline{q}T(\rho, g) + O(1) \qquad (1)$$

Cho b là cực điểm cấp k của f . Vậy b là cực điểm cấp l của g thoả mãn : $k\overline{p} = l\overline{q}$.

Vì $(\overline{p},\overline{q}) = 1$ nên $\overline{q}$ chia hết cho k , nghĩa là mỗi cực điểm bội của f đều là cực điểm bội ít nhất là $\overline{q}$. Do đó:

$$N(\rho, f) \geq \overline{q}\overline{N}(\rho, f) \qquad (2)$$

Vì ci là một không điểm của P' (với i = 1, . . . , k) nên ta có :

$$P - P(c_i) = (x - c_i)^{s_i} R_i(x)$$

với $si \geq 2$, $R_i \in K[x]$, $\deg R_i = p - s_i$, $R_i(c_i) \neq 0$.

Do đó:

$$(f - c_i)^{s_i} R_i(f) = P(f) - P(c_i) = Q(g) - P(c_i) \text{ , (} i = 1, \ldots, k \text{)} \qquad (3)$$

Đặt :

$$S = \sum_{i=1}^{k} (s_i - 1) \text{ ,}$$

vì $s_i \geq 2$, $\forall i = 1,\ldots,k$, nên $S \geq k$.

Theo giả thiết , vì $Q - P(c_i)$ không triệt tiêu tại mọi không điểm của Q' nên nó không có không điểm bội và do đó có thể phân tích nó dưới dạng :

$$\prod_{j=1}^{q} (x - b_{i,j}) \text{ , (} i = 1, \ldots, k \text{)}$$

với $b_{i,j}$ là các điểm khác biệt với mỗi i cố định . Suy ra :

$$\overline{N}(\rho, \frac{1}{Q - P(c_i)}) = \sum_{j=1}^{q} \overline{N}(\rho, \frac{1}{x - b_{i,j}}) \text{ , (} i = 1, \ldots, k \text{)} \qquad (4)$$

Mặt khác , chú ý rằng $b_{i,j} \neq b_{m,n}$ với (i, j) $\neq$ (m,n) . Thật vậy , giả sử $b_{i,j}$ = $b_{m,n}$ với (i,j) $\neq$ (m,n) nào đó . Vậy $i \neq m$, do đó $P(c_i) \neq P(c_m)$, nên $(Q - P(c_i)) - (Q - P(c_m))$ là một hằng số khác 0 . Nhưng vì $b_{i,j}$ = $b_{m,n}$ nên:

$(Q(b_{i,j})-P(c_i))-(Q(b_{i,j})-P(c_m)) \;=\; (Q(b_{i,j})-P(c_i))-(Q(b_{m,n})-P(c_m)) \;=0$,

suy ra $b_{i,j}$ là một không điểm của $(Q-P(c_i))-(Q-P(c_m))$, mâu thuẫn . Do đó, tất cả các điểm $b_{i,j}$ là phân biệt (i = 1 , . . . , k ; j = 1, . . . , q) .

áp dụng định lí cơ bản thứ hai của Nevanlinna cho g tại các điểm $b_{i,j}$ với mọi i = 1 , . . . , k và j = 1, . . . , q ta được :

$$(kq-1)T(\rho,g) \le \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{q}\overline{N}(\rho,\frac{1}{g-b_{i,j}})+\overline{N}(\rho,g)-\log r+O(1) \tag{5}$$

Do đó , theo (4) ta có :

$$(kq-1)T(\rho,g) \le \sum_{i=1}^{k}\overline{N}(\rho,\frac{1}{Q(g)-P(c_i)})+\overline{N}(\rho,g)-\log r+O(1) \tag{6}$$

Nhưng từ (3) và (6) ta có :

$$\overline{N}(\rho,\frac{1}{Q(g)-P(c_i)})=\overline{N}(\rho,\frac{1}{(f-c_i)^{s_i}R_i(f)})$$

$$\le \overline{N}(\rho,\frac{1}{f-c_i})+\overline{N}(\rho,\frac{1}{R_i(f)})+O(1) \;.$$

Vì $\deg R_i = p-s_i$ ta có :

$$\overline{N}(\rho,\frac{1}{R_i(f)}) \le T(\rho,R_i(f))=(p-s_i)T(\rho,f)+O(1) \;.$$

áp dụng định lí cơ bản thứ hai của Nevanlinna cho hàm phân hình f ta được :

$$\overline{N}(\rho,\frac{1}{f-c_i}) \le T(\rho,\frac{1}{f-c_i})=T(\rho,f)+O(1) \;.$$

Từ đó suy ra:

$$\overline{N}(\rho,\frac{1}{Q(g)-P(c_i)}) \le (p-s_i+1)T(\rho,f)+O(1) \;,\; (i = 1 , . . . , k)$$

$$\le (p-1)T(\rho,f)+O(1) \tag{7}$$

Mặt khác $\overline{N}(\rho,f)=\overline{N}(\rho,g)$. Do đó , từ (2) ta có:

$$\overline{N}(\rho, f) = \overline{N}(\rho, g) \le \frac{1}{q} N(\rho, f) \le \frac{1}{q} T(\rho, f) .$$

Từ (5) và (7) ta có :

$$\overline{N}(\rho, f) \ge (kq-1)T(\rho, g) - \sum_{i=1}^{k}[\overline{N}(\rho, \frac{1}{f-c_i}) + \overline{N}(\rho, \frac{1}{R_i(f)})] + \log\rho + O(1)$$

$$\ge (kq-1)T(\rho, g) - T(\rho, f)\sum_{i=1}^{k}(p - s_i + 1) + \log\rho + O(1)$$

$$\ge (kq-1)T(\rho, g) - T(\rho, f)(kp - S) + \log\rho + O(1)$$

$$\ge (kq-1)\frac{p}{q}T(\rho, f) - T(\rho, f)(kp - S) + \log\rho + O(1) \ ,$$

do đó :

$$\overline{N}(\rho, f) \ge \frac{Sq-p}{q}T(\rho, f) + \log\rho + O(1) \ . \qquad (8)$$

Vì $k \le S$, nên bất đẳng thức $\overline{N}(\rho, f) \ge \frac{kq-p}{q}T(\rho, f) + O(1)$ được chứng minh .

Từ (1) ta có thể viết :

$$(kq-1)T(\rho, g) = \frac{kq-1}{q}\, pT(\rho, f) + O(1) \ ,$$

do đó , từ (2) , (5) , (6) và (7) ta thu được :

$$\frac{kq-1}{q}\, pT(\rho, f) = (kq-1)T(\rho, g) + O(1)$$

$$\le \sum_{i=1}^{k}\overline{N}(\rho, \frac{1}{Q(g) - P(c_i)}) + \overline{N}(\rho, g) - \log\rho + O(1)$$

$$\le \sum_{i=1}^{k}(p - s_i + 1)T(\rho, f) + \overline{N}(\rho, f) - \log\rho + O(1)$$

$$\le \sum_{i=1}^{k}(p - s_i + 1)T(\rho, f) + \frac{1}{q}N(\rho, f) - \log\rho + O(1)$$

suy ra :

$$\frac{kq-1}{q}pT(\rho,f) \le \left(\sum_{i=1}^{k}(p-s_i+1)+\frac{1}{\overline{q}}\right)T(\rho,f)-\log\rho+O(1)$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{k}(p-s_i+1)+\frac{1}{\overline{q}}\right)T(\rho,f)+O(1) \qquad (9)$$

Khi đó , vì $f\in M_u(K_r)$ nên theo mệnh đề 2.1.9 , $T(\rho,f)$ là không bị chặn trong *Kr* .

Chia cả hai vế của (9) cho $T(\rho,f)$ ta được :

$$(kq-1)p \le qkp - q\sum_{i=1}^{k}s_i + qk + w \ . \qquad (10)$$

Suy ra :

$$(kq-1)\overline{p} \le \overline{q}kp - \overline{q}\sum_{i=1}^{k}s_i + \overline{q}k + 1 \ .$$

Nhưng vì $q\overline{p}=\overline{q}p$, nên $\sum_{i=1}^{k}(s_i-1)\overline{q} \le \overline{p}+1$.

Suy ra:

$$S\overline{q} \le \overline{p}+1 \ . \qquad (11)$$

Do đó , ta thấy hoặc $q\le p$, hoặc $\overline{q}=\overline{p}+1$, suy ra $(p,q)=q-p$ và $S=1=k$.

Thật vậy, nếu $q > p$, thì $\overline{q}>\overline{p} \Rightarrow S\overline{p}<S\overline{q}\le S\overline{p}+1 \Rightarrow (S-1)\overline{p}<1$, vậy $S = 1$ và $\overline{p}<\overline{q}\le\overline{p}+1$, nghĩa là $\overline{q}=\overline{p}+1$.

Bây giờ giả sử $p<\frac{3q}{2}$ thì $\overline{p}<\frac{3\overline{q}}{2}$. Do đó từ (11) ta có :

$$\frac{2}{3}S\overline{p}<\overline{p}+1 \qquad (12)$$

nên $S\le 2$.

Giả sử $S = 2$, theo (12) ta có $\overline{p} = 1$ hoặc $\overline{p} = 2$. Nếu $\overline{p} = 2$, vì $S\overline{q} < \overline{p} + 1$ và $(\overline{q}, \overline{p}) = 1 \Rightarrow \overline{q} = 1$, mâu thuẫn với giả thiết $p < \frac{3q}{2}$. Suy ra $\overline{p} = 1$, do đó $p = q$. Vì vậy , nếu $p \neq q$ thì $S = 1$ nên $k = 1$, $s_1 = 2$, c_1 là một không điểm đơn của P'. □

Hệ quả 3.7. *Cho P , Q* $\in K[x]$ *với* $P'Q' \neq 0$ *và thoả mãn deg P = deg Q . Giả sử tồn tại hai không điểm phân biệt* c_1 , c_2 *của* P' *thoả mãn* $P(c_1) \neq P(c_2)$ *và* $P(c_i) \neq Q(d)$ $(i = 1 , 2)$ *với mọi không điểm d của* Q' .

Khi đó , nếu hai hàm $f, g \in A(K_r)$ *thoả mãn* $P(f) = Q(g)$ *thì* $f, g \in A_b(K_r)$.

Chứng minh

Đặt $q = \deg P = \deg Q$, giả sử kết luận trên là sai . Theo mệnh đề 3.5 cả f và g đều không bị chặn . Theo mệnh đề 3.6 ta có :

$$\overline{N}(\rho, f) \geq \frac{2q - p}{q} T(\rho, f) + O(1) = T(\rho, f) + O(1) .$$

Vì f không bị chặn nên $T(\rho, f)$ không bị chặn . Do đó :

$$\lim_{\rho \to +\infty} \overline{N}(\rho, f) \geq \lim_{\rho \to +\infty} T(\rho, f) + O(1) = +\infty .$$

Nhưng vì $f \in A(K_r)$ nên $\overline{N}(\rho, f) = 0$, suy ra điều trên là vô lý. □

Hệ quả 3.8. *Cho P , Q* $\in K[x]$ *với* $P'Q' \neq 0$ *và deg P = deg Q = 3 . Giả sử tồn tại hai không điểm phân biệt* c_1 , c_2 *của* P' *thoả mãn* $P(c_1) \neq P(c_2)$ *và* $P(c_i) \neq Q(d)$ $(i = 1 , 2)$ *với mọi không điểm d của* Q'. *Khi đó , nếu hai hàm* $f, g \in A(K_r)$ *thoả mãn* $P(f) = Q(g)$ *thì* $f, g \in A_b(K_r)$.

Chứng minh

Giả sử $P(c_1) = P(c_2)$ .Vậy $P - P(c_1)$ có hai không điểm c_1 , c_2 là cấp ≥ 2, mâu thuẫn với giả thiết *deg P* = 3 . Suy ra $P(c_1) \neq P(c_2)$.

Giả sử kết luận trên là sai , tức là hoặc *f* hoặc *g* không bị chặn trong *Kr* . Theo mệnh đề 3.5, cả *f* và *g* đều không bị chặn trong *Kr* . Theo mệnh đề 3.6, ta có :

$$\overline{N}(\rho, f) \geq \frac{2.3-3}{3}T(\rho, f) + O(1) = T(\rho, f) + O(1).$$

Vì f không bị chặn nên $T(\rho, f)$ không bị chặn . Do đó :

$$\lim_{\rho\to+\infty} \overline{N}(\rho, f) \geq \lim_{\rho\to+\infty} T(\rho, f) + O(1) = +\infty \ .$$

Nhưng vì $f \in A(K_r)$ nên $\overline{N}(\rho, f)$= 0, suy ra điều trên là vô lý . □

Hệ quả 3.9. *Cho P , Q* $\in K[x]$ *với* $P'Q' \neq 0$ *và deg P = deg Q = 4 . Giả sử P thoả mãn Điều kiện* (*F*) *và tồn tại hai không điểm phân biệt* c_1 , c_2 *của* P' *thoả mãn* $P(c_i) \neq Q(d)$ $(i = 1 , 2)$ *với mọi không điểm d của* Q'.

Khi đó , nếu hai hàm f , g $\in A(K_r)$ *thoả mãn P (f)= Q (g) thì f , g* $\in A_b(K_r)$.

Chứng minh

Vì P thoả mãn Điều kiện (*F*) và vì c_1 , c_2 là hai không điểm phân biệt của P' nên $P(c_1) \neq P(c_2)$.

Lập luận tương tự hệ quả 3.7 ta có điều phải chứng minh. □

Hệ quả 3.10. *Cho P , Q* $\in K[x]$ *với* $P'Q' \neq 0$ *và deg P < deg Q . Giả sử tồn tại một không điểm c của* P' *sao cho* $P(c) \neq Q(d)$ *với mọi không điểm d của* Q'. *Khi đó , nếu hai hàm f , g* $\in A(K_r)$ *thoả mãn P (f)= Q (g) thì f , g* $\in A_b(K_r)$.

Chứng minh

Đặt p = deg *P* , q = deg *Q* và giả sử *f* hoặc *g* không bị chặn . Theo mệnh đề 3.5 cả *f* và *g* đều không bị chặn . Theo mệnh đề 3.6 ta có:

$$\overline{N}(\rho, f) \geq \frac{q-p}{q} T(\rho, f) + O(1) \ .$$

Do $p < q$ suy ra $q - p > 0$ nên :

$$\lim_{\rho \to +\infty} \overline{N}(\rho, f) \geq \frac{q-p}{q} \lim_{\rho \to +\infty} T(\rho, f) + O(1) = +\infty \ .$$

Nhưng vì $f \in A(K_r)$ nên $\overline{N}(\rho, f) = 0$, suy ra điều trên là vô lý . □

Hệ quả 3.11. *Cho* P , $Q \in K[x]$ *với* $P^{'}Q^{'} \neq 0$ *và* $p = deg\ P$, $q = deg\ Q$ *thoả mãn* $p \neq q$ *và* $2p < 3q$. *Giả sử tồn tại hai không điểm* c_1 *và* c_2 *của* $P^{'}$ *sao cho* $P(c_1) \neq P(c_2)$ *và* $P(c_i) \neq Q(d)$ $(i = 1 , 2)$ *với mọi không điểm d của* $Q^{'}$.

Khi đó, nếu hai hàm $f, g \in M(K_r)$ *thoả mãn* $P(f) = Q(g)$ *thì* $f, g \in M_b(K_r)$.

Chứng minh

Đặt k là số không điểm ci của $P^{'}$ sao cho $P(c_i) \neq P(c_j)$ $\forall i \neq j$ và $P(c_i) \neq Q(d)$ $(i = 1 , 2)$ với mọi không điểm d của $Q^{'}$. Vậy $k \geq 2$. Theo mệnh đề 3.5, nếu một trong hai hàm f và $g \in M_u(K_r)$ thì cả hai hàm đều $\in M_u(K_r)$. Vì vậy , nếu f và $g \in M_u(K_r)$ thì theo mệnh đề 3.6 và giả thiết $2p < 3q$, ta có $k = 1$, mâu thuẫn .

Vậy $f , g \in M_b(K_r)$. □

Hệ quả 3.12. *Cho* P , $Q \in K[x]$ *với* $P^{'}Q^{'} \neq 0$ *và* $deg\ P = 3$, $deg\ Q > 3$. *Giả sử tồn tại hai không điểm* c_1 *và* c_2 *của* $P^{'}$ *sao cho* $P(c_i) \neq Q(d)$ $(i = 1 , 2)$ *với mọi không điểm d của* $Q^{'}$.

Khi đó, nếu hai hàm $f, g \in M(K_r)$ *thoả mãn* $P(f) = Q(g)$ *thì* $f, g \in M_b(K_r)$.

Chứng minh

Giả sử $P(c_1) = P(c_2)$.Vậy $P - P(c_1)$ có hai không điểm c_1 , c_2 là cấp ≥ 2, mâu thuẫn với giả thiết $deg\ P = 3$. Suy ra $P(c_1) \neq P(c_2)$.

Đặt q = deg Q và giả sử f hoặc g không bị chặn trong Kr .Theo hệ quả 3.5 cả f và g đều không bị chặn trong Kr . Theo mệnh đề 3.6 , ta có :

$$\overline{N}(\rho, f) \geq \frac{2q-3}{q}T(\rho, f) + O(1) = (2 - \frac{3}{q})T(\rho, f) + O(1).$$

Vì $q > 3$, nên $\overline{N}(\rho, f) > T(\rho, f) + O(1)$,suy ra điều trên là vô lý . □

Hệ quả 3.13. *Cho P , Q* $\in K[x]$ *với* $P^{'}Q^{'} \neq 0$ *và deg P* = 4 , 4 $\neq$ *deg Q* $\geq$ 3 . *Giả sử P thoả mãn Điều kiện* (*F*) *và tồn tại hai không điểm phân biệt* c_1 , c_2 *của* $P^{'}$ *thoả mãn* $P(c_i) \neq Q(d)$ (i = 1 , 2) *với mọi không điểm d của* $Q^{'}$.

Khi đó, nếu hai hàm $f, g \in M(K_r)$ *thoả mãn* $P(f) = Q(g)$ *thì* $f, g \in M_b(K_r)$.

Chứng minh

Đặt k là số không điểm *ci* của $P^{'}$ sao cho $P(c_i) \neq P(c_j)$, $\forall i \neq j$. Vì $c_1 \neq c_2$ và P thoả mãn Điều kiện (F) nên $P(c_1) \neq P(c_2)$, do đó $k \geq 2$.

Giả sử f hoặc g không bị chặn .Theo mệnh đề 3.5, cả f và g đều không bị chặn. Đặt q = deg Q , và deg P = 4 , deg Q $\geq$3 nên $2p < 3q$, theo mệnh đề 3.6 ta có $k \leq 2$. Vậy $k = 2$.

Vì $q \neq 4$ nên theo mệnh đề 3.6 suy ra $k = 1$, mâu thuẫn, tức là điều giả sử trên là vô lý. □

Hệ quả 3.14. *Cho P , Q* $\in K[x]$ *với* $P^{'}Q^{'} \neq 0$ *và p = deg P , q = deg Q thoả mãn* $q - p \neq (p,q)$ *và* $p < q$. *Giả sử tồn tại hai không điểm* c_1 *và* c_2 *của* $P^{'}$ *sao cho* $P(c_i) \neq Q(d)$ (i = 1 , 2) *với mọi không điểm d của* $Q^{'}$.

Khi đó, nếu hai hàm $f, g \in M(K_r)$ *thoả mãn* $P(f) = Q(g)$ *thì* $f, g \in M_b(K_r)$.

Chứng minh

Giả sử f hoặc g không bị chặn. Theo mệnh đề 3.5, cả f và g đều không bị chặn .Vì $p < q$ nên $2p < 3q$, theo mệnh đề 3.6 ta có hoặc $q < p$ hoặc

$(p , q) = q - p$, cả hai trường hợp này đều mâu thuẫn với giả thiết , nên điều giả sử trên là vô lý . □

Hệ quả 3.15. *Cho P , Q* $\in K[x]$ *với* $P^{'}Q^{'} \neq 0$ *và deg P = deg Q* ≥ 4 *. Giả sử tồn tại ba không điểm phân biệt* c_1 , c_2 , c_3 *của* $P^{'}$ *thoả mãn* $P(c_i) \neq P(c_j)$, $\forall i \neq j$ *và* $P(c_i) \neq Q(d)$ $(i = 1 , 2 , 3)$ *với mọi không điểm d của* $Q^{'}$.

Khi đó, nếu hai hàm $f, g \in M(K_r)$ *thoả mãn* $P(f) = Q(g)$ *thì* $f, g \in M_b(K_r)$.

Chứng minh

Đặt $q = \deg P = \deg Q$, giả sử kết luận trên là sai , tức là hoặc f hoặc g không bị chặn trong K_r. Theo mệnh đề 3.5, cả f và g đều không bị chặn trong K_r . Theo mệnh đề 3.6 , ta có :

$$\overline{N}(\rho, f) \geq \frac{3q-q}{q} T(\rho, f) + O(1) = 2T(\rho, f) + O(1),$$

Do đó :

$$\lim_{\rho\to+\infty} \overline{N}(\rho, f) - T(\rho, f) \geq \lim_{\rho\to+\infty} T(\rho, f) + O(1) = +\infty \ .$$

vô lý vì $T(\rho, f) \geq \overline{N}(\rho, f)$ nên điều giả sử trên là vô lý . □

Hệ quả 3.16. *Cho P , Q* $\in K[x]$ *với* $P^{'}Q^{'} \neq 0$ *và deg P = deg Q = 4 . Giả sử P thoả mãn Điều kiện (F) và tồn tại ba không điểm phân biệt* c_1 , c_2 , c_3 *của* $P^{'}$ *thoả mãn* $P(c_i) \neq Q(d)$ $(i = 1 , 2 , 3)$ *với mọi không điểm d của* $Q^{'}$.

Khi đó, nếu hai hàm $f, g \in M(K_r)$ *thoả mãn* $P(f) = Q(g)$ *thì* $f, g \in M_b(K_r)$.

Chứng minh

Vì P thoả mãn Điều kiện (F) và c_1 , c_2 , c_3 là ba không điểm phân biệt của $P^{'}$ nên $P(c_i) \neq P(c_j)$, $\forall i \neq j$.

Lập luận tương tự hệ quả 3.15 ta được điều phải chứng minh. □

Mệnh đề 3.17. *Cho P , Q* $\in K[x]$ *với* $P^{'}Q^{'} \neq 0$ *và cho p = deg P , q = deg Q với* 2 = (*p* , *q*) . *Giả sử tồn tại các không điểm phân biệt* c_1 , c_2 , . . . , *ck của* $P^{'}$ *thoả mãn* $P(c_i) \neq P(c_j)$, $\forall i \neq j$ *và* $P(c_i) \neq Q(d)$ (i = 1 , 2 , . . . , k) *với mọi không điểm d của* $Q^{'}$.

Giả sử tồn tại hai hàm khác hằng $f, g \in M(K)$ *thoả mãn* $P(f) = Q(g)$.

Khi đó , ta có $q \leq p$ *và* $\overline{N}(\rho, f) \geq \frac{(kq-p)}{q}(T(\rho, f) + \log\rho + O(1)$. *Hơn nữa nếu* $\frac{p}{2} < q$ *thì k* = 1 *và* c_1 *là một không điểm đơn của* $P^{'}$.

Chứng minh

Tương tự mệnh đề 3.6 ta có : $\overline{N}(\rho, f) \geq \frac{(kq-p)}{q}T(\rho, f) + \log\rho + O(1)$.

Hơn nữa , vì $\log\rho \to +\infty$ *khi* $\rho \to +\infty$ nên :

$$(kq-1)p < qkp - q\sum_{i=1}^{k} s_i + qk + w$$

do đó $S\overline{q} < \overline{p} + 1$, tức là : $S\overline{q} \leq \overline{p}$ (*)

Vì $S \geq 1$ nên $p \geq q$

Giả sử $\frac{p}{2} < q$, từ (*) suy ra bất đẳng thức $S \geq 2$ là không thể xảy ra , do đó: *S* = *k* = 1 và c_1 là một không điểm đơn của $P^{'}$. □

Hệ quả 3.18. *Cho P , Q* $\in K[x]$ *với* $P^{'}Q^{'} \neq 0$ *và thoả mãn deg P* ≤ *deg Q Giả sử tồn tại một không điểm c của* $P^{'}$ *thoả mãn* $P(c) \neq Q(d)$ *với mọi không điểm d của* $Q^{'}$.

Khi đó, nếu hai hàm $f, g \in A(K)$ *thoả mãn* $P(f) = Q(g)$ *thì f và g là hằng số*.

Chứng minh

Đặt p = deg P , q = deg Q vì $P^{'} \neq 0$ và vì tồn tại một không điểm c của $P^{'}$ nên $p \geq 2$. Giả sử f và g khác hằng số .

Theo mệnh đề 3.17 ta có :

$$\overline{N}(\rho, f) \geq \frac{q-p}{q} T(\rho, f) + \log \rho + O(1) \ .$$

Vì $q \geq p$, ta có :

$$\lim_{\rho \to +\infty} \overline{N}(\rho, f) \geq \lim_{\rho \to +\infty} [\log \rho + O(1)] = +\infty \ ,$$

mâu thuẫn với $f \in A(K)$ nên f và g là hằng số . □

Hệ quả 3.19. *Cho P , Q* $\in K[x]$ *với* $P^{'}Q^{'} \neq 0$ *và thoả mãn deg P < 2deg Q. Giả sử tồn tại hai không điểm phân biệt* c_1 , c_2 *của* $P^{'}$ *thoả mãn* $P(c_1) \neq P(c_2)$ *và* $P(c_i) \neq Q(d)$ $(i = 1 , 2)$ *với mọi không điểm d của* $Q^{'}$.

Khi đó , nếu hai hàm f , g $\in M(K)$ *thoả mãn P (f)= Q (g) thì f và g là hằng số .*

Chứng minh

Đặt p = deg P , q = deg Q . Vì $P^{'} \neq 0$ và vì tồn tại hai không điểm phân biêt c_1 , c_2 của $P^{'}$, nên $p \geq 3$. Theo giả thiết :

$$\deg Q > \frac{\deg P}{2} \geq \frac{3}{2} \ ,$$

suy ra $q \geq 2$. Giả sử f và g khác hằng số .Theo mệnh đề 3.17 ta có k =1 , mâu thuẫn .Vậy f và g là hằng số. □

Hệ quả 3.20. *Cho P , Q* $\in K[x]$ *với* $P^{'}Q^{'} \neq 0$ *và deg P = 3 , deg Q* ≥ 2 . *Giả sử tồn tại hai không điểm* c_1 *và* c_2 *của* $P^{'}$ *sao cho* $P(c_i) \neq Q(d)$ $(i = 1 , 2)$ *với mọi không điểm d của* $Q^{'}$.

Khi đó, nếu hai hàm f , g $\in M(K)$ *thoả mãn P(f)= Q(g) thì f và g là hằng số .*

Chứng minh

Giả sử $P(c_1) = P(c_2)$. Vậy $P - P(c_1)$ có hai không điểm c_1 , c_2 là cấp ≥ 2 mâu thuẫn với giả thiết deg $P = 3$. Suy ra $P(c_1) \neq P(c_2)$.

Giả sử f và g khác hằng số . Đặt $p = \deg P$, $q = \deg Q$, ta có $3 = p < 4 \leq 2q$ nên theo mệnh đề 3.17 ta có $k = 1$, mâu thuẫn .Vậy f và g là hằng số . □

Hệ quả 3.21. *Cho P , Q* $\in K[x]$ *với* $P'Q' \neq 0$ *và deg P = 4 , deg Q* ≥ 3 *. Giả sử P thoả mãn Điều kiện (F) và tồn tại hai không điểm phân biệt* c_1 , c_2 *của* P' *thoả mãn* $P(c_i) \neq Q(d)$ *(i = 1 , 2) với mọi không điểm d của* Q'.

Khi đó , nếu hai hàm f , g $\in M(K_r)$ *thoả mãn P(f)= Q (g) thì f và g là hằng số .*

Chứng minh

Vì P thoả mãn Điều kiện (F) nên $P(c_1) \neq P(c_2)$.

Giả sử f và g khác hằng số. Đặt $p = \deg P$, $q = \deg Q$, ta có $4 = p < 6 \leq 2q$ nên theo mệnh đề 3.17 ta có $k = 1$, mâu thuẫn .

Vậy f và g là hằng số. □

Định nghĩa 3.22. Một tập con S của K được gọi là *tập cứng afin* nếu không tồn tại một phép biến đổi afin (tức là phép biến đổi có dạng $\varphi(x) = ax + b$) nào khác ngoài phép đồng nhất thoả mãn $\varphi(S) = S$.

Bổ đề 3.23. *Cho S là một tập con gồm bốn phần tử của K .*

Khi đó , hai điều kiện sau là tương đương :

i) S không là tập cứng afin ,

ii) Hoặc S có dạng $\{a, a+u, a+wu, a+w^2u\}$ *, với* $w^2 + w + 1 = 0$*, hoặc là S có dạng* $\{a-h, a+h, a-k, a+k\}$ *, với* $h, k \in K^*$.

Chứng minh

$(i) \Rightarrow (ii)$ Giả sử S không là tập cứng afin . Khi đó , tồn tại phép biến đổi afin khác phép đồng nhất $\varphi(x) = mx + n$ thoả mãn $\varphi(S) = S$.

Vì S gồm bốn phần tử nên ta có thể đặt :

$$S = \{a, b = a + u, c = a + u_1, d = a + u_2\}.$$

Do $\varphi(S) = S$ nên ta chia làm hai trường hợp :

Trường hợp 1 : Tồn tại $x \in S$ sao cho $\varphi(x) = x$. Giả sử $\varphi(a) = a$, không thể tồn tại $y \in S$, $y \neq a$ thoả mãn $\varphi(y) = y$. Thật vậy , nếu :

$$\begin{cases} \varphi(a) = a \\ \varphi(b) = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ma + n = a \\ mb + n = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \end{cases}$$

suy ra φ là phép đồng nhất , mâu thuẫn . Do đó , không mất tính tổng quát , ta có thể giả sử $\varphi(b) = c$, $\varphi(c) = d$, $\varphi(d) = b$. Ta có :

$$\begin{cases} \varphi(a) = a \\ \varphi(b) = c \\ \varphi(c) = d \\ \varphi(d) = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ma + n = a \\ m(a+u) + n = a + u_1 \\ m(a+u_1) + n = a + u_2 \\ m(a+u_2) + n = a + u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = (1-m)a = (1 - \dfrac{u_1}{u})a \\ m = \dfrac{u_1}{u} \\ u_2 = (a + u_1)\dfrac{u_1}{u} + (1-a)\dfrac{u_1}{u} - \left(a\dfrac{u_1}{u} + (1-a)\dfrac{u_1}{u}\right) \\ m(a + u_2) + n = a + u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = (1 - \dfrac{u_1}{u})a \\ m = \dfrac{u_1}{u} \\ u_2 = \dfrac{u_1^{\,2}}{u} \\ \dfrac{u_1}{u}\left(a + \dfrac{u_1^{\,2}}{u}\right) + (1-a)\dfrac{u_1}{u} = a + u \end{cases}$$

Đặt $\frac{u_1}{u} = w$. Suy ra $u_1 = wu$, $u_2 = w^2 u$. Ta có :

$$w(a + w^2 u) + (1 - a)w = a + u$$
$$\Leftrightarrow w^3 u + w = a + u$$

Vì $a = wa + w(1 - a)$, suy ra $a = w$. Do đó :

$$(w^3 - 1)u = 0 \ .$$

Do S gồm bốn phần tử phân biệt nên $w \neq 1$, $u \neq 0$. Suy ra :

$$w^2 + w + 1 = 0$$

Trường hợp 2 : Không tồn tại $x \in S$ thoả mãn $\varphi(x) = x$. Giả sử $\varphi(a) = b$, $\varphi(b) = c$, $\varphi(c) = d$, $\varphi(d) = a$.

Tức là :

$$\begin{cases} ma + n = b & (1) \\ mb + n = c & (2) \\ mc + n = d & (3) \\ md + n = a & (4) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) , (1) trừ (3) , (1) trừ (4) ta được :

$$\begin{cases} ma + n = b \\ m(a - b) = b - c & (5) \\ m(a - c) = b - d \\ m(a - d) = b - a & (6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{b - c}{a - b} \\ \dfrac{b - c}{a - b}(a - c) = b - d \\ \dfrac{b - c}{a - b}(a - d) = b - a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (b - c)(a - c) = (b - d)(a - b) & (5) \\ (b - c)(a - d) = (b - a)(a - b) & (6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 - bc - ac + ad - bd + c^2 = 0 & (7) \\ b^2 - ad - ac + cd - bd + a^2 = 0 & (8) \end{cases}$$

Lấy (7) trừ (8) ta được :

$$ab - bc + ad - cd + c^2 - a^2 = 0$$
$$\Rightarrow (a - c)(b + d - a - c) = 0$$

Vì $a \neq c$ suy ra $b-c=a-d$. Từ (6) ta có :

$$(b-c)(a-d)=(b-a)(a-b) \Rightarrow (a-d)^2+(a-b)^2=0 \ .$$

Suy ra $a=b=d$, mâu thuẫn với giả thiết *S* gồm bốn phần tử .

Vì vậy ta xét: $\varphi(a)=b$, $\varphi(b)=a$, $\varphi(c)=d$, $\varphi(d)=c$. Tức là :

$$\begin{cases} ma+n=b & (9) \\ mb+n=a & (10) \\ mc+n=d & (11) \\ md+n=c & (12) \end{cases}$$

Lấy (9) trừ (10) ta được $m=-1$

Lấy (9) cộng (10) được $n=a+b$. Đặt $a=t+h$, $b=t-h$, $c=t+k$. Từ (11) suy ra $d=-(t+k)+(t+h)+(t-h)=t-k$.

Vậy $S=\{t+h, t-h, t+=k, t-k\}$. Vì *S* gồm bốn phần tử nên $h,k \in K^*$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Nếu S có dạng $\{a, a+u, a+wu, a+w^2u\}$, với $w^2+w+1=0$, đặt :

$$\varphi(x)=wx+(1-w)a \ .$$

Khi đó , ta có :

$$\varphi(a)=a$$

$$\varphi(a+u)=w(a+u)+(1-w)a=a+wu$$

$$\varphi(a+wu)=w(a+wu)+(1-w)a=a+w^2u$$

$$\varphi(a+w^2u)=w(a+w^2u)+(1-w)a=w(a-(w+1)u)+(1-w)$$

$$=wa-(w^2+w)u+a-wa=a+u$$

Nếu *S* có dạng $\{a-h, a+h, a-k, a+k\}$, với $h,k \in K^*$, đặt :

$$\varphi(x)=-x+2a \ .$$

Khi đó , ta có :

$$\varphi(a-h)=h-a+2a=h-a$$

$$\varphi(a+h)=-a-h+2a=a-h$$

$$\varphi(a-k) = k - a + 2a = a + k$$
$$\varphi(a+k) = -a - k + 2a = a - k \quad .$$

Vậy S không là tập cứng afin . □

Ta xét trường hợp riêng $Q = \lambda P \quad (\lambda \in K)$.

Định lý 3.24. *Cho* $P \in K[x]$, $\deg P = n$ *, không có không điểm bội và thoả mãn Điều kiện (F) . Cho* $P^{'}(x) = b\prod_{j=1}^{l}(x - c_j)^{m_j}$*, với* $c_i \neq c_j \ \forall i \neq j$*, và cho S là tập các không điểm của P .*

Khi đó , không tồn tại $\lambda \in K$ *và các hàm phân biệt khác hằng* $f, g \in M(K)$ *thoả mãn* $P(f) = \lambda P(g)$ *nếu và chỉ nếu S là tập cứng afin và :*

hoặc là $l = 2$ *và* $\min(m_1, m_2) \geq 2$ *,*

hoặc là $l \geq 3$ *và P không thoả mãn :*

$$n = 4 \ , \ m_1 = m_2 = m_3 = 1 \ , \ \frac{P(c_1)}{P(c_2)} = \frac{P(c_2)}{P(c_3)} = \frac{P(c_3)}{P(c_1)} = w \ , \text{ với } w^2 + w + 1 = 0 \ .$$

Khi $\lambda = 1$ *không tồn tại các hàm phân biệt khác hằng* $f, g \in M(K)$ *thoả mãn* $P(f) = P(g)$ *nếu và chỉ nếu :*

$$(n-2)(n-3) > \sum_{j=1}^{l} m_j(m_j - 1) \ .$$

Xét trường hợp đặc biệt khi $n = 4$.

Định lý 3.25. *Cho* $P \in K[x]$, $\deg P = 4$ *với bốn không điểm phân biệt và cho S là tập các không điểm của nó .*

Khi đó , không tồn tại $\lambda \in K$ *và các hàm phân biệt khác hằng* $f, g \in M(K)$ *thoả mãn* $P(f) = \lambda P(g)$ *nếu và chỉ nếu P thoả mãn ba điều kiện :*

+ S là tập cứng afin ,

+ $P^{'}$ *có ba không điểm* c_1, c_2, c_3 *,*

+P không thoả mãn đẳng thức $\dfrac{P(c_1)}{P(c_2)} = \dfrac{P(c_2)}{P(c_3)} = \dfrac{P(c_3)}{P(c_1)} = \lambda$ *, với* $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ *.*

Chứng minh

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử P có hệ số cao nhất bằng 1 . Vì n = 4 nên điều kiện l = 2 và $\min(m_1, m_2) \geq 2$ trong định lý 3.24 không thể xảy ra. Theo định lý 3.14 ta chỉ cần chứng minh , nếu *S* là tập cứng afin và $P^{'}$ có ba không điểm phân biệt không thoả mãn $P(c_2)=\lambda P(c_1)$, $P(c_3)=\lambda P(c_2)$, $P(c_1)=\lambda P(c_3)$, với $\lambda^2+\lambda+1=0$ thì không tồn tại các hàm phân biệt khác hằng $f,g\in M(K)$ thoả mãn $P(f)=\lambda P(g)$.

Theo định lý 3.24 , Điều kiện (*F*) chính là hệ quả của giả thiết "*S* là tập cứng afin" .Thật vậy , theo bổ đề 3.23, *S* không có dạng $\{a-h,a+h,a-k,a+k\}$, với $h,k\in K^*$. Vì vậy *P* không có dạng $(x-a-h)(x-a+h)(x-a-k)(x-a+k)$, tức là *P* không có dạng $P=((x-a)^2-l^2)+A$.

Do đó theo bổ đề 3.4, *P* thoả mãn Điều kiện (*F*). □

Định lý 3.26. *Cho* $P\in K[x]$, $\deg P=4$ *với bốn không điểm phân biệt và cho S là tập các không điểm của nó .*

Khi đó , không tồn tại $\lambda\in K$ *và các hàm phân biệt khác hằng* $f,g\in M(K)$ *thoả mãn* $P(f)=\lambda P(g)$ *nếu và chỉ nếu P thoả mãn ba điều kiện :*

+ P thoả mãn Điều kiện (F) ,

+ $P^{'}$ *có ba không điểm* c_1 *,* c_2*,* c_3 *,*

+ P không thoả mãn đẳng thức $\frac{P(c_1)}{P(c_2)}=\frac{P(c_2)}{P(c_3)}=\frac{P(c_3)}{P(c_1)}=\lambda$ *, với* $\lambda^2+\lambda+1=0$.

Chứng minh

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử *P* có hệ số cao nhất bằng 1 . Theo định lý 3.25 ta cần chứng minh *P* thoả mãn Điều kiện (*F*) , $P^{'}$ có ba không điểm c_1 , c_2, c_3,*P* không thoả mãn đẳng thức $\frac{P(c_1)}{P(c_2)}=\frac{P(c_2)}{P(c_3)}=\frac{P(c_3)}{P(c_1)}=\lambda$, với $\lambda^2+\lambda+1=0$, thì *S* là tập cứng afin .

Giả sử *S* không là tập cứng afin, theo bổ đề 3.23, hoặc *S* có dạng $\{a,a+u,a+\lambda u,a+\lambda^2u\}$ với $\lambda^2+\lambda+1=0$, hoặc là *S* có dạng $\{a-h,a+h,a-k,a+k\}$ với $h,k\in K^*$.

Nếu *S* có dạng $\{a-h,a+h,a-k,a+k\}$, với $h,k\in K^*$ thì *P* có dạng $P=((x-a)^2-l^2)+A$, với $a,A\in K$, $l\in K^*$ theo bổ đề 3.4 , *P* không thoả mãn Điều kiện (*F*) , mâu thuẫn .

Do đó , *S* có dạng $\{a,a+u,a+\lambda u,a+\lambda^2u\}$, với $\lambda^2+\lambda+1=0$, thì *P* có dạng $P=(x-a)^4-\theta(x-a)$, với $\theta\in K$, suy ra $P^{'}=4(x-a)^3-\theta$.

Lấy $\mu \in K$ sao cho $\mu^3 = \frac{\theta}{4}$ và $\lambda \in K$ sao cho $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$, các không điểm của P' sẽ là : $c_1 = \mu + a$, $c_2 = \lambda\mu + a$, $c_3 = \lambda^2\mu + a$. Khi đó P thoả mãn đẳng thức: $\frac{P(c_1)}{P(c_2)} = \frac{P(c_2)}{P(c_3)} = \frac{P(c_3)}{P(c_1)} = \lambda$, mâu thuẫn .

Vì vậy S là tập cứng afin . □

Nhận xét 3.27. *Cho* $P = ((x-a)^2 - l^2) + A$, *với* $a, A \in K$, $l \in K^*$.

Khi đó, P' *nhận ba không điểm phân biệt* c_1 , c_2 , c_3 *sao cho* $P(c_1) = P(c_3)$

Hơn nữa, $P(c_1) = - P(c_2)$ *khi và chỉ khi* $A = -\frac{l^4}{2}$.

Chứng minh

Ta có : $P'(x) = 4(x-a)[(x-a)^2 - l^2]$.

Suy ra a, $a-l$, $a+l$ là các không điểm phân biệt của P'. Có $P(a \pm l) = A, P(a) = l^4 + A$.

Như vậy , $P(a) = -P(a+l) \Leftrightarrow l + A = -A \Leftrightarrow A = -\frac{l^4}{2}$. □

Nhận xét 3.28. *Cho* $P \in K[x]$ *là đa thức bậc 4 , hệ số cao nhất bằng* 1 *và có bốn không điểm phân biệt .*

Khi đó , P' *chỉ có hai không điểm phân biệt khi và chỉ khi P có dạng*

$$(x-a)^4 - \theta(x-a)^3 + B, \text{ với } B, \theta \in K.$$

Và có một và chỉ một không điểm khi và chỉ khi P có dạng $(x-a)^4 + k$.

Hơn nữa , nếu P' *nhận đúng hai không điểm phân biệt thì khi đó tồn tại* $f, g \in K[x]$, $f \neq g$ *, thoả mãn* $P(f) = P(g)$.

KẾT LUẬN

Luận văn trình bày cơ sở lý thuyết Nevanlinna và áp dụng lý thuyết này để nghiên cứu tính chất nghiệm của phương trình hàm $P(f) = Q(g)$ trong trường không Acsimet có đặc số 0.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Ha Huy Khoai. On p - adic meromorphic functions. Duke Math . J . Vol . 50, 1983, 695 - 711.

[2] Ha Huy Khoai, My Vinh Quang . On p - adic Nevanlinna Theory . Lecture Notes in Math . 1351, 1988, 137 - 151 .

[3] Ha Huy Khoai, Ta Thi Hoai An. On uniquenes polynomials and bi - URS for p - adic meromorphic functions . J .Number Theory 87 (2001) 211 -221 .

[4] Ha Huy Khoai, C . C .Yang . On the functional equation $P(f) = Q(g)$. Value Distribution Theory, Marcel Dekker, NewYork, 2003, 201- 231

[5] W. K. Hayman. meromorphic functions .Oxford at the Clarendon Press, 1964 .

[6] P. C. Hu, C. C. Yang. Value Distribution Theory on Non - Archimedear filds Kluwer 2003 .

[7] P. Li, C. C. Yang. Some further results on the functional equation $P(f) = Q(g)$. Value Distribution and Related topics 219 - 231, Kluwer 2005 .