ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN KIM HOA

HÀM GREEN ĐA PHỨC VÀ XẤP XỈ CÁC HÀM CHỈNH HÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN KIM HOA

HÀM GREEN ĐA PHỨC
VÀ XẤP XỈ CÁC HÀM CHỈNH HÌNH

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH

Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS PHẠM HIẾN BẰNG

THÁI NGUYÊN - 2009

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Khoa Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn Trường Đại học Sư phạm - ĐHTN, Trường THPT Chuyên Tuyên Quang cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 09 năm 2009

Tác giả

Nguyễn Kim Hoa

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết đa thế vị phức được phát triển từ những năm 80 của thế kỷ trước dựa trên các công trình cơ bản của Bedford-Taylor, Siciak, Zahaziuta và nhiều tác giả khác. Đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết này là hàm Green đa phức hay hàm cực trị toàn cục. Hàm Green đa phức với những điểm kỳ dị hữu hạn đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả như M.Klimek, J.P. Demailly , E.A. Poletsky, A. Zeriahi,...). Theo hướng này chúng tôi quan tâm đến hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên không gian parabolic, hàm Green đa phức với cực logarit tại vô cùng trên đa tạp con đại số và trên một đa tạp siêu lồi, đồng thời sử dụng các kết quả đạt được cho việc xấp xỉ các hàm chỉnh hình. Vì thế chúng tôi đã chọn đề tài nghiên cứu: "*Hàm Green đa phức và xấp xỉ các hàm chỉnh hình* "

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu

Trình bày các kết quả của Zeriahi về hàm Green đa phức và xấp xỉ các hàm chỉnh hình.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Luận văn tập trung nghiên cứu về:

- Hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên không gian parabolic.
- Hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên đa tạp con đại số.
- Hàm Green đa phức với cực logarit trên đa tạp siêu lồi.
- Áp dụng các kết quả đạt được để xấp xỉ các hàm chỉnh hình.

3. Phương pháp nghiên cứu

Để giải quyết các nhiệm vụ đặt ra, chúng tôi đã đọc tham khảo các tài liệu trong và ngoài nước, tham khảo và học tập các chuyên gia cùng lĩnh vực nghiên cứu. Đồng thời kế thừa các kết quả và phương pháp của M.Klimek, J.P. Demailly , E.A. Poletsky, A. Zeriahi,... để giải quyết các vấn đề đã nêu ra ở trên.

4. Bố cục của luận văn

Nội dung luận văn gồm 52 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày một số kết quả, những tính chất quan trọng nhất về Hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên không gian parabolic. Đó là sự khái quát hoá tự nhiên định nghĩa của hàm cực trị Siciak - Zahariuta trong $\mathbb{C}^N$. Tiếp theo, chúng tôi trình bày nghiên cứu về hàm Green đa phức với cực logarit tại vô cùng trên đa tạp con đại số và trên một đa tạp siêu lồi.

Trong chương 2, chúng tôi trình bày việc mở rộng một vài dạng cổ điển của lý thuyết đa thế vị trong $\mathbb{C}^N$ cho trường hợp của đa tạp con đại số X của $\mathbb{C}^N$. Chứng minh một vài bất đẳng thức đa thức đã biết giống như bất đẳng thức Bernstein –Markov và sử dụng chúng để trình bày một phép chứng minh mới tiêu chuẩn địa phương Sadullaev về tính đại số của đa tạp con giải tích. Tiếp theo chúng tôi trình bày định lý Berstein- Walsh về xấp xỉ đa thức tốt nhất của các hàm chỉnh hình trên một tập con compact không đa cực K của đa tạp X và sử dụng nó, cùng với bất đẳng thức Bernstein-Markov để nghiên cứu các đa thức trực chuẩn. Đặc biệt, chúng tôi chứng minh rằng nếu K là tập compact L - chính qui, thì các đa thức trực chuẩn làm thành một cơ sở Schauder trong không gian các hàm chỉnh hình trên những miền mức con của hàm Green tương ứng.

Phần cuối cùng của chương này, chúng tôi trình bày việc sử dụng hàm đa phức Green với cực logarit đa trọng trên một đa tạp siêu lồi D để xây dựng hệ trực chuẩn Bergman trong không gian trọng Bergman nào đó. Sau đó chúng tôi chỉ ra rằng hệ Bergman này là một cơ sở Schauder thường trong không gian $\mathrm{O}(D)$ và tất cả các không gian các hàm chỉnh hình trên những miền mức con của hàm Green tương ứng. Hơn nữa, chúng tôi chỉ ra rằng hệ trực chuẩn này cho một kết quả chính xác của phép xấp xỉ nội suy đối với các hàm chỉnh hình trên D. Đặc biệt, chúng tôi nhận được một sự mở rộng cho trường hợp đa phức về một kết quả cổ điển của Kadampata và Zahariuta.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Chương 1

HÀM GREEN ĐA PHỨC

Trong chương này chúng ta sẽ định nghĩa hai dạng hàm Green đa phức và trình bày các tính chất quan trọng của chúng. Cụ thể là trình bày một vài kết quả về hàm Green đa phức trên không gian Stein và hàm Green đa phức trên đa tạp siêu lồi.

1.1. Hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên không gian parabolic

1.1.1. Định nghĩa. *Giả sử K là một tập con compact của $\mathbb{C}^N$. Hàm L - cực trị liên kết với K được định nghĩa bởi công thức sau:*

(1.1) $\quad l_K(z) = \log L_K(z) = \sup\{v(z); v \in \mathcal{L}, v/K \le 0\}, z \in \mathbb{C}^n,$

trong đó $\mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$ là lớp các hàm đa điều hoà dưới u trên $\mathbb{C}^N$, sao cho

$\sup\{v(x) - \log|x| : x \in \mathbb{C}^\infty\} < +\infty$.

Hàm này được gọi là hàm L - cực trị Siciak-Zahariuta.

Bây giờ giả sử rằng X trong một đa tạp con giải tích bất khả qui của $\mathbb{C}^N$ có số chiều n và K là tập con compact không đa cực của X. Theo một Định lí của Sadulaev, sẽ được nghiên cứu chi tiết hơn trong phần 2.3, chúng ta có $L_K \in L^\infty_{loc}(X)$ nếu và chỉ nếu X là tập đại số.

Tất cả các không gian Stein được xét ở đây sẽ được giả thiết là bất khả qui. Những hàm đa điều hoà dưới trên một không gian phức đã được nghiên cứu và định nghĩa bởi J.P.Demailly ([Dm1]). Về định nghĩa của toán tử

Monge-Ampère phức trên những không gian phức chúng tôi đã đề cập tới trong ([Dm1]). Nguyên lí cực đại ở đây đã được đưa ra bởi E. Bedford trong ([Bd]). Chúng ta chỉ đề cập hai dạng của hàm đa điều hoà dưới được xác định trên một không gian giải tích phức.

1.1.2. Định nghĩa. *Hàm* $u : X \to [-\infty, +\infty]$ *gọi là đa điều hoà dưới trên không gian phức* X *nếu* u *là giới hạn địa phương của một hàm đa điều hoà dưới trong một phép nhúng địa phương của* X.

1.1.3. Định nghĩa. *Hàm u gọi là đa điều hoà dưới yếu trên* X *nếu nó là đa điều hoà dưới trên đa tạp phức của những điểm chính qui của* X *và bị chặn dưới trong một lân cận của mỗi điểm đơn.*

1.1.4. Định nghĩa. *Không gian Stein* X *được gọi là parabolic nếu nó có một dãy vét cạn các hàm đa điều hoà dưới liên tục* $g : X \to [-\infty, +\infty]$ *thoả mãn phương trình Monge-Ampère phức thuần nhất, trừ một vài tập con compact của* X *theo nghĩa dòng, nghĩa là tồn tại* $R_0 \ge -\infty$ *sao cho:*

(1.2) $$(dd^c g)^n = 0 \quad \text{trên} \quad \{x \in X; g(x) > R_0\}.$$

Một hàm như vậy sẽ được gọi là thế vị *parabolic* trên X .

Giả sử $E \subset X$, chúng ta kết hợp với E hàm cực trị sau:

(1.3) $$g_E(X) := \sup\{v(x); v \in \mathcal{L}(X, g), v/E \le 0\}, \quad x \in X$$

Trong đó $\mathcal{L}(X, g)$ là ký hiệu lớp hàm đa điều hoà dưới v trên X , sao cho

$$\sup\{v(x) - g^+(x); x \in X\} < +\infty .$$

Với tập con mở khác rỗng cố định $U \subset X$, ta kết hợp mỗi tập con $E \subset X$, dung lượng của nó đối với U , được xác định bởi công thức :

(1.4) $$cap(E;U) = cap_g(E;U) = \exp\left(-\sup\{g_E(x); x \in U\}\right).$$

Ví dụ 1. Giả sử $X = \mathbb{C}^N$, và định nghĩa $g(z) = l(z) = \log\|z\|, \quad z \in \mathbb{C}^n$, trong đó $\|z\|$ là chuẩn trên $\mathbb{C}^N$. Một cách địa phương trên $\mathbb{C}^N \setminus \{0\}$, hàm $l(z)$ chỉ phụ thuộc vào $(N - l)$ biến gần với một hàm đa điều hoà. Khi đó nó thoả mãn phương trình Monge-Ampère phức:

$$(1.5) \qquad (dd^c l)^N = 0 \text{ trên } \mathbb{C}^N \setminus \{0\}.$$

Điều này có nghĩa l là một thế vị parabolic trên $\mathbb{C}^N$.

Khi đó hàm cực trị g_E kết hợp với thế vị parabolic $g = l$ bởi công thức (1.3) còn hàm cực trị Siciak-Zahariuta l_E định nghĩa theo (1.1) (xem định lý 1.2.1 phần sau). Chẳng hạn nếu $B_r' := \{z \in \mathbb{C}^N; \|z\| \le r\}$ với $r > 0$, thì dễ dàng thấy rằng:

$$l_{B_r'}(z) = \log^+(\|z\|/r), \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

Tổng quát hơn, nếu g là một thế vị parabolic trên một không gian Stein X, sử dụng nguyên lí cực đại đối với toán tử Monge-Ampère phức, ta có tổng quát hoá của công thức sau cùng: với $K_r = \{x \in X : g(x) \le \log r\}$ thì

$$g_{Kr}(x) = (g(x) - \log r)^+(x) := \max\{g(x) - \log r, 0\}, x \in X, r > R_0.$$

Ví dụ 2. Nếu X là một không gian Stein và $p : X \to \mathbb{C}^N$ là một ánh xạ chỉnh hình thực sự thì hàm định nghĩa bởi $g(x) = \log|p(x)|, x \in X$, là một thế vị parabolic trên X, theo phương trình (1.5) và tính bất biến của phương trình Monge-Ampère phức thuần nhất, như vậy X là một không gian Stein parabolic. Bây giờ chúng ta nhắc lại các kết quả quan trọng sau:

1.1.5. Định lí. ([Zr]) Cho tập con $E \subset X$, các điều kiện sau là tương đương*:*

(i) E *là đa cực trong* X.

(ii) $g_E^* \equiv +\infty$, *trên* X.

(iii) E *là* $\mathcal{L}(X,\gamma)$*-cực, nghĩa là tồn tại* $v \in \mathcal{L}(X,\gamma); v \not\equiv -\infty$ *sao cho* $v/E \equiv -\infty$.

(iV) $cap_\gamma(E;U) = 0$, *với tập con mở nào đó* $U \subset X$.

Hơn nữa, nếu E *là không đa cực trong* X, *thì* $g_E^* \in \mathcal{L}(X,\gamma)$.

1.1.6. Định nghĩa. *Hàm* g_E^* *gọi là hàm Green đa phức của E với cực tại vô cùng trên không gian parabolic* (X,γ).

1.1.7. Định lí. ([Zr]) *Giả sử* K *là một tập con compact không đa cực của* X. *Khi đó các tính chất sau xảy ra :*

(i) *Tồn tại một hàm số* $\gamma > 0$ *sao cho*:

$$-\gamma + \gamma^+(x) \le g_K^*(x) \le \gamma + \gamma^+(x), \quad \forall x \in X.$$

(ii) *Phương trình Monge – Ampère phức xảy ra theo nghĩa dòng:*

$$(dd^c g_K^*)^n = 0 \text{ trên } X \setminus K.$$

(iii) *Độ đo cân bằng* $\lambda_K := (dd^c g_K^*)^n$ *thoả mãn tính chất:*

Nếu $B \subset K$ *là tập borelian sao cho* $\lambda_K(B) = \lambda_K(K)$ *thì* $g_B^* \equiv g_K^*$ *trên* X

Tính chất (iii) lần đầu tiên được chứng minh đối với độ đo cân bằng tương đối trong ([Ng-Zr]), ở đó nó đã được sử dụng để khái quát hoá một vài bất đẳng thức đa thức quan trọng giống như (L^*)-điều kiện, đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết xấp xỉ.

1.2. Hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên đa tạp con đại số

Giả sử X là một đa tạp con đại số bất khả qui của $\mathbb{C}^N$ có số chiều n. Theo tiêu chuẩn của Rudin và Sadullaev ([Rd],[Sd]), tồn tại một phép biến đổi đơn vị các toạ độ $\sigma : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$, sao cho tồn tại một hằng số $c > 0$, với tính chất sau:

(1.6) $$\sigma(X) \subset \left\{ z = (z', z'') \in \mathbb{C}^N : |z''| \le c\left(1 + |z'|\right) \right\},$$

trong đó $z' = (z_1, \dots, z_n)$, $z'' = (z_{n+1}, \dots, z_N)$.

Vì thế ánh xạ xác định bởi

$\pi(x) := (\sigma_1(x), \dots, \sigma_n(x))$, $x \in X$, là một ánh xạ chỉnh hình thực sự, suy ra hàm:

(1.7) $$g(x) = \log|\pi(x)|, \quad x \in X,$$

là một vét cạn đa điều hoà dưới trên X. Theo phương trình (1.5) và tính bất biến của phương trình thuần nhất Monge-Ampère dưới ánh xạ chỉnh hình suy ra :

$$(dd^c g)^n = 0 \text{ trên } X \setminus \pi^{-1}(\{0\})$$

Theo nghĩa dòng. Vì thế g là một thế vị parabolic trên X, theo (1.6) thoả mãn ước lượng sau:

(1.8) $$-c + \log^+|x| \le g^+(x) \le c + \log^+|x|, \forall x \in X,$$

trong đó c là hằng số dương nào đó.

Từ ước lượng (1.8), suy ra với bất kỳ $E \Subset X$, ta có bất đẳng thức sau :

$$\lambda_E(x) \le g_E(x) \, \forall x \in X.$$

Ký hiệu $A(X)$ là đại số phân bậc các hàm đa thức trên X, có thể đồng nhất với thương

$$\mathbb{C}[z_1, \dots, z_N] / I(X),$$

trong đó $I(X)$ là ideal đa thức của X. Với mỗi số nguyên dương $d \geq 1$, ta ký hiệu $A_d(X)$ là không gian tuyến tính các hàm $f \in A(X)$ là hạn chế lên X của đa thức trong N biến số phức có bậc không vượt quá d. Đặc biệt, hàm như thế thỏa mãn $\sup\{(1+|x|)^{-d}|f(x)|; x \in X\} < +\infty$.

Khi đó ta có định lý sau:

1.2.1. Định lý. ([Zr]) *Với bất kỳ tập con compact $K \subset X$ ta có* :

$$g_K(x) = \sup\left\{\frac{1}{d}\log|f(x)|; f \in A_d(X), \|f\|_K \leq 1, d \geq 1\right\}, \forall x \in X.$$

Phác thảo chứng minh: Trước tiên ta sẽ chỉ ra rằng công thức sau về hàm cực trị g_K xảy ra:

$$g_K(x) = \sup\{v(x); v \in \mathcal{L}_c(X), v/K \leq 0\}, \forall x \in X,$$

trong đó $\mathcal{L}_c(X)$ ký hiệu là lớp con các hàm liên tục của lớp $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, g)$. Điều đó có thể thực hiện được bằng cách chứng minh rằng mỗi $v \in \mathcal{L}(X)$ có thể được xấp xỉ bởi một dãy giảm các hàm liên tục trong $\mathcal{L}_c(X)$ (xem [Zr] bổ đề 4.1).

Khi đó Định lý được suy ra từ Bổ đề xấp xỉ sau (xem [Zr], Bổ đề 5.2):

1.2.2.Bổ đề. *Cho $v \in \mathcal{L}_c(X)$. Khi đó với bất kỳ tập con compact $E \subset X$ và $\varepsilon > 0$, tồn tại một dãy các số nguyên dương $d_1, \ldots, d_m$ và một dãy các hàm đa thức $f_1, \ldots, f_m$ với $f_j \in A_{d_j}(X)$, $j = 1, \ldots, m$, sao cho*:

$$v(x) \leq \sup_{1 \leq j \leq m}\left(\frac{1}{d_j}\log|f_j(x)|\right) \leq v(x) + \varepsilon, \quad \forall x \in E.$$

Chứng minh chi tiết hơn (xem [Zr]).

Kết quả này có một hệ quả thú vị, bây giờ chúng ta sẽ mô tả nó.

Cho $U \Subset X$ là một tập con mở, cố định, khác rỗng. Với một tập compact $K \Subset X$ và $d \in \mathbb{N}^*$, định nghĩa hằng số Chebyshev d^{th} của K đối với U giống như hằng số sau:

$$\tau_d(K,U) := \inf \left\{ \|f\|_K^{1/d} ; f \in \mathcal{A}_d(X), \|f\|_U = 1 \right\}.$$

Dễ ràng thấy rằng:

$$\tau_{d+d'}(K,U)^{d+d'} \le \tau_d(K)^d \tau_{d'}(K)^{d'}, \quad \forall d \ge 1, \forall d' \ge 1.$$

Suy ra đẳng thức sau xảy ra:

$$\tau(K,U) := \inf_{d \ge 1} \tau_d(K,U) = \lim_{d \to +\infty} \tau_d(K,D).$$

Hằng số này được gọi là hằng số Chebyshev của K đối với U.

Kết quả sau là hệ quả của Định lý 1.2.1:

1.2.3. Hệ quả. *Cho một tập con mở khác rỗng $U \Subset X$, với bất kỳ tập compact $K \subset X$, chúng ta có:*

$$cap_\gamma(K,U) = \tau(K,U).$$

ở đây dung lượng có thể tính toán được đối với thế vị parabolic γ xác định trên X bởi công thức (1.7).

Trong phần tiếp theo, chúng ta sẽ định nghĩa hàm Green đa phức với trọng kỳ dị logarit trên đa tạp siêu lồi.

1.3. Các số Lelong đối với hàm đa điều hòa dưới

Cho D là một tập con mở trong $\mathbb{C}^N$ và ký hiệu $\mathrm{PSH}(D)$ là nón các hàm đa điều hòa dưới $u : D \to [-\infty, +\infty]$ trên D không đồng nhất với $-\infty$ trên bất kỳ thành phần nào của D.

Cho $u \in \mathrm{PSH}(D)$, với $a \in D$ và $0 < r < \delta_a = dist(z, \mathbb{C}^N \setminus D)$, đặt

$$M_u(a,r) = \int_{|x|=1} u(a + rx)d\sigma(x),$$

$d\sigma(x)$ là độ đo được chuẩn hóa trên hình cầu đơn vị trong $\mathbb{C}^N$. Như đã biết hàm $r \to M_u(a,r)$ tăng và lồi theo $\log r$. Khi đó tồn tại giới hạn :

$$n(u;a) = \lim_{r\to 0^+} \frac{M_u(a,r)}{\log r}.$$

Theo C.Kiselman ([Ks]), định nghĩa này trùng với định nghĩa của P.Lelong (xem [Ll]):

$$(1.9) \qquad n(u;a) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\sigma_u(B(a,r))}{\omega_{2n-2} r^{2n-2}},$$

trong đó ω_{2n-2} là thể tích của hình cầu đơn vị trong $\mathbb{C}^{N-1}$ và

$$\sigma_u = \frac{1}{2\pi}\Delta u^n = \frac{1}{2\pi} dd^c u \wedge \beta^{n-1},$$

β là dạng tiêu chuẩn Kalherian của $\mathbb{C}^N$. Số được định nghĩa trong công thức (1.9) được gọi là số *Lelong* của dòng $dd^c u$ tại điểm a, hoặc là mật độ của u tại điểm a. Số Lelong không phụ thuộc vào việc thay đổi chỉnh hình của các tọa độ (xem [Dm3]). Do đó có thể định nghĩa số Lelong đối với các hàm đa điều hoà dưới trên các đa tạp phức.

Theo một định lý của Siu ([Su]), với $u \in \mathrm{PSH}(D)$, các tập hợp

$$A(u,c) := \{z \in D; n(u,z) \geq c\}, c > 0,$$

là tập con giải tích của D. Đặc biệt, nếu $u^{-1}(-\infty) \Subset D$, thì các tập hợp $A(u,c)(c > 0)$ là các tập con hữu hạn của D.

1.4. Hàm Green đa phức với cực logarit trên đa tạp siêu lồi

Từ bây giờ trở đi, ta luôn giả sử rằng D là một đa tạp siêu lồi có số chiều thuần túy n theo nghĩa Stehlé ([Ste]) nghĩa là tồn tại một hàm chỉnh hình thực sự

$$\rho : D \to [-1, 0).$$

Giả sử $\varphi : D \to [-\infty, +\infty]$ là hàm đa điều hòa dưới liên tục sao cho tập cực của φ được xác định bởi

$$S_\varphi = \{z \in D; \varphi(z) = -\infty\}$$

là tập compact và tập mật độ của φ được xác định bởi

$$A_\varphi = \left\{a \in D; \quad \nu(\varphi; a) > 0\right\}$$

là trù mật trong S_φ và giao với mỗi thành phần của D.

Một hàm như vậy được gọi là hàm đa điều hòa dưới chấp nhận được trên D.

Với mỗi hàm đa điều hòa dưới chấp nhận được φ trên D, ta kết hợp với một hàm Green đa phức tổng quát được cho bởi công thức sau:

$$G_D(z;\varphi) = \sup\{u(z); u \in P_0(D,\varphi)\},$$

trong đó $P_0(D,\varphi)$ ký hiệu là lớp các hàm đa điều hòa dưới u trên D sao cho $u \leq 0$ trên D và $\nu(u;.) \geq \nu(\varphi;.)$ trên D.

Ví dụ 3. Giả sử D là một miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^N$ và

$$\varphi_a(z) := \log|z - a|, \; a \in D$$

Khi đó hàm $G_D(.;\varphi_a)$ trùng với hàm Green đa phức $G_D(.;a)$ với cực logarit tại điểm a, nó đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả như: Klimek ([Kl1]). Demailly (Dm 2]).

Tổng quát hơn, cho $A := \left\{(a_1, \nu_1), \ldots\ldots, (a_p, \nu_p)\right\} \subset D \times R_+^*$ và tập

$$\varphi_A(z) = \sum_{j=1}^{p} n_j \log|z - a_j|, \quad z \in D.$$

Khi đó hàm Green $G_D(.;\varphi_A) = G_D(.;A)$ kết hợp với hàm chấp nhận được là hàm Green đa phức với một số hữu hạn các cực trọng số được xét bởi Lelong ([Ll]) và Zahariuta ([Zh2]).

Theo Demailly và Lelong, hàm $G_D(.;A)$ là liên tục và thỏa mãn phương trình Monge - Ampère phức:

$$(dd^c G_D(.;A))^n = (2\pi)^n \sum_{j=1}^{p} n_j^n \delta_{a_j}$$

theo nghĩa dòng trên D.

Ví dụ 4. Giả sử D là một miền bị chặn của $\mathbb{C}$, chính quy đối với bài toán Dirichlet cổ điển và K là tập con compact cực của D. Khi đó tồn tại một dãy $\{a_j\}_{j \geq 1}$ các điểm cực trị trong K và dãy $\{\varepsilon_j\}_{j \geq 1}$ các số thực dương sao cho hàm được định nghĩa bởi :

$$\psi(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon_j \log|z - a_j|$$

là điều hòa dưới trên $\mathbb{C}$, điều hòa trên $\mathbb{C} \setminus K$ và $S_\psi = \psi^{-1}(-\infty) = K$.

Khi đó hàm Green của D kết hợp với hàm điều hòa dưới chấp nhận được ψ, hàm mà chúng ta đã ký hiệu là G, trùng với hàm

$$G'(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j G_D(z, a_j) \text{ với } z \in D \text{ và}$$

$$S_G = \{z \in D; G(z) = -\infty\}$$

$$= S_\psi = \{z \in D; \psi(z) = -\infty\}.$$

Thật vậy, rõ ràng $\Delta G' = \sum_{j=1}^{+\infty} e_j \delta_{a_j} = \Delta\psi$ và $\nu(\psi, a_j) = e_j$ với mọi $j \geq 1$. Theo Định lý 1.4.1 (sẽ được chứng minh ở dưới), ta có $\Delta G = \sum_{a \in A\psi} \nu(\psi, a)\delta_a$

Từ đó suy ra $\Delta G = \Delta G' = \Delta_\psi$ theo nghĩa độ đo trên D. Điều này có nghĩa là $G - G'$ và $G' - \psi$ là điều hoà trên D. Vì thế $S_G = S_{G'} = S_\psi = K$ và vì G và G' tiến tới 0 tại biên của D, nên theo nguyên lý cực đại suy ra $G = G'$. Do đó $S_G = K$. Tức là tập cực của hàm Green trùng với tập compact cực K đã cho.

Bây giờ, chúng ta xét một định lý quan trọng sau:

1.4.1. Định lý. *Hàm Green* $G = G_D(.;\varphi)$ *là hàm duy nhất thoả mãn các tính chất sau:*

$i)\quad G \in PSH(D) \cap L^\infty_{loc}(D \setminus K),$

trong đó $K = S_\varphi$.

$ii)\quad G(z) \to 0 \quad khi \quad z \to \partial D$

$iii)\quad \nu(G,a) = \nu(\varphi,a),\ \forall a \in D,$

đặc biệt $G(a) = -\infty$ *nếu* $\nu(\varphi,a) > 0$.

$iv)\quad (dd^cG)^n = (2\pi)^n \sum_{a \in A_\varphi} \nu(\varphi;a)^n \delta_a$ *theo nghĩa dòng trên* D.

Chứng minh: Ký hiệu G là hàm Green $G_D(.;\varphi)$. Sử dụng hàm vét cạn bị chặn ρ, chúng ta có thể cắt hàm φ ngoài một lân cận của tập compact S_φ và xây dựng một hàm đa điều hoà dưới $\tilde{\varphi}$ thoả mãn $\tilde{\varphi} + \beta = \varphi$ trên một lân cận của S_φ và $\tilde{\varphi} = \alpha\rho$ trên một lân cận của biên của D, trong đó $\alpha > 0$, β là hằng số thực. Điều đó đã chứng minh rằng $P_0(D,\varphi) \neq \emptyset$ và cho lời giải đầy đủ, đó là:

$$\tilde{\varphi} \le G \quad \text{trên } D.$$

Theo một kết quả cổ điển của Lelong, mở rộng nửa liên tục dưới G^* là đa điều hoà dưới trên D. Vì $\tilde{\varphi} \le G$ trên D và $\tilde{\varphi} = \alpha\rho$ trên một lân cận của biên của D, nên suy ra $ii)$ được thoả mãn. Vì $\tilde{\varphi} + \beta = \varphi$ trên một lân cận của S_j, nên ta kết luận:

$$\nu(G;.) \le \nu(\varphi;.) \text{ trên } D.$$

Bây giờ xét một dãy tăng $\left(A_j\right)$ các tập hữu hạn sao cho $A_\varphi = \bigcup_j A_j$.

Ký hiệu G_j là hàm Green đa phức trên D liên kết với hàm chấp nhận được $\varphi_j(z) := \sum_{a \in A_j} \nu(\varphi;a)\log|z-a|$. Rõ ràng (G_j) là một dãy giảm các hàm đa điều hoà dưới trên D sao cho $G(.;\varphi) \le G_j$, $\forall j$. Vì thế giới hạn $\tilde{G} = \lim_{j\to+\infty} G_j$ là đa điều hoà dưới trên D và thoả mãn bất đẳng thức $G \le \tilde{G}$ trên D. Dễ dàng thấy rằng từ định nghĩa $\tilde{G} \le 0$ và $\nu\left(\tilde{G};.\right) \ge \nu(\varphi;.)$ trên D, suy ra $\tilde{G} \le G$ trên D. Vậy, chúng ta có $G = \tilde{G} = \lim_{j\to+\infty} G_j$ trên D, suy ra G là đa điều hoà dưới trên D and $\nu(G;.) = \nu\left(\tilde{G};.\right) \ge \nu(\varphi;.)$ trên D. Bất đẳng thức này và $\nu(G;.) \le \nu(\varphi;.)$ trên D suy ra $i)$ và $iii)$. Hơn nữa, vì $G = \lim_{j\to+\infty} G_j$ trên D, nên theo Định lý hội tụ của Demailly ([Dm3]) và công thức

$$(dd^c G_D(.;A))^n = (2\pi)^n \sum_{j=1}^{p} \nu_j^n \delta_{a_j} \quad \text{ta có } iv).$$

Chương 2

XẤP XỈ CÁC HÀM CHỈNH HÌNH

Trong chương này chúng ta sẽ trình bày xấp xỉ đa thức tốt nhất và tính đại số đồng thời trình bày xấp xỉ tốt nhất của hàm chỉnh hình trên miền siêu lồi.

2.1 Bất đẳng thức đa thức trên đa tạp con đại số

Giả sử X là một đa tạp con đại số của $\mathbb{C}^N$ có số chiều n. Giả sử K là một tập con compact của X và μ là một độ đo dương trên K.

2.1.1. Định nghĩa. *Cặp (K,μ)) được gọi là thoả mãn điều kiện (L^*) tại một điểm x_0 nếu với mọi họ $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(X)$, thoả mãn $\sup\{|f(x)|;\ f \in \mathcal{F}\} < +\infty$ μ- hầu khắp nơi trên K, thì với mọi $\beta > 1$ họ*

$$\mathcal{F}_\beta := \{\beta^{-\deg(f)} f;\ f \in \mathcal{F}\}$$

bị chặn địa phương trong một lân cận của điểm x_0. Nếu (K,μ) thoả mãn điều kiện (L^*) tại mọi điểm $x \in K$, chúng ta nói rằng (K,μ) thoả mãn điều kiện (L^*).

2.1.2. Định nghĩa. *Ta nói rằng μ là một độ đo determining trên K, nếu với mọi tập con borelian $E \subset K$, sao cho $\mu(E) = \mu(K)$. Thì $g_E^* = g_K^*$ trên X.*

Theo Định 1.1.7, với bất kỳ một tập con compact không đa cực $K \subset X$, độ đo cân bằng là một độ đo determining trên K.

2.1.3. Định lý. *Cho K là một tập con compact không đa cực của X và μ là một độ đo dương trên K. Khi đó các mệnh đề sau xảy ra:*

(1) *Giả sử μ là độ đo determining trên K. Khi đó với mọi họ $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}(X)$, sao cho $\sup\{|f(x)|;\ f \in \mathcal{F}\} < +\infty$ μ- hầu khắp nơi trên K, ta có:*

$$(2.1)\quad \limsup_{d\to+\infty}\left(\sup\left\{\frac{1}{d}\log|f(x)|; f \in \mathcal{F}, \deg(f) \le d\right\}\right) \le g_K^*(x),\ \forall x \in X$$

Nói riêng, (K,μ) thoả mãn điều kiện (L^*) tại x_0 khi và chỉ khi K là L- chính quy tại x_0 nghĩa là g_K liên tục tại x_0.

(2) *(K,μ) thoả mãn điều kiện (L^*) nếu K là L- chính quy và μ là một độ đo determining trên K.*

Chứng minh: Đặt $E = \left\{x \in K; \sup_{f\in\mathcal{F}}|f(x)| < +\infty\right\}$

Theo giả thiết $\mu(E) = \mu(K)$ và μ là độ đo determining trên K, ta có $g_E^* = g_K^*$. Từ định lý 1.1.5 suy ra E không đa cực trong X. Vì

$$\mathcal{M} = \{(1/\deg(f))\log|f|; f \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{L}(X,g)$$

bị chặn dưới tại mỗi điểm của E, nên theo Bổ đề 3.10 ([Zr]) $\mathcal{M}$ là họ bị chặn dưới địa phương các hàm đa điều hoà dưới trên X. Giả sử

$$v = \limsup_{d\to+\infty}(\sup\{\frac{1}{d}\log|f|; f \in \mathcal{F}, \deg(f) = d\}$$

và v^* là mở rộng nửa liên tục trên. Do đó theo định nghĩa của E, ta có $v \le 0$ trên E, điều này kéo theo $u \le u^* \le g_E^* = g_K^*$, trên X. (2.1) được chứng minh.

Từ (2.1) suy ra K là L-chính quy tại x_0, khi đó (K,μ) thoả mãn điều kiện (L^*) tại x_0.ý

Phần đảo lại suy ra từ Định lýýýýý 1.2.1, vì họ $\mathcal{F} := \{f; f \in A_d, \|f\|_K = 1, d \geq 1\}$ bị chặn đều trên K. Mệnh đề (1) được chứng minh.

Để chứng minh mệnh đề (2) của Định lýýý, ta chỉ cần chứng minh rằng nếu (K,μ) thoả mãn điều kiện (L^*) thì μ là một độ đo determining trên K. Giả sử $E \subset K$ là một tập con borelian sao cho $\mu(E) = \mu(K)$ và cố định $v \in \mathcal{L}(X)$ sao cho $u/E \leq 0$. Ta sẽ chứng minh $u/K \leq 0$. Giả sử tồn tại $x_0 \in K$ và $\varepsilon > 0$ sao cho $u(x_0) > 2\varepsilon$.

Trước tiên chú ý rằng theo chứng minh của Định lýí xấp xỉ trong ([Zr], Định lí 4.4), không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử u liên tục trên X. Khi đó theo Bổ đề xấp xỉ 1.2.2, tồn tại một dãy số nguyên dương $d_1,\ldots,d_m$ và dãy hàm đa thức $f_1,\ldots,f_m$ với $f_j \in \mathcal{A}_{d_j}(X), j = 1,\ldots,m$ sao cho:

$$(2.2)\qquad \sup_{1\leq j\leq m}\frac{1}{d_j}\log|f_j| \leq v \text{ trên } K \quad \text{và} \quad \sup_{1\leq j\leq m}\frac{1}{d_j}\log|f_j(x_0)| > \varepsilon > 0.$$

Vì $v \leq 0$ trên E và $\mu(E) = \mu(K)$, nên họ $\mathcal{F} := \{f_j^k; 1 \leq j \leq m, k \geq 1\}$ là $\mu-$ bị chặn hầu khắp nơi trên K. Vì thế họ

$$\mathcal{F}_\varepsilon := \left\{\exp\left(-kd_j\varepsilon\right)f_j^k; 1 \leq j \leq m, k \geq 1\right\}$$

bị chặn đều trong một lân cận của x_0, điều này kéo theo $v(x_0) \leq \varepsilon$ và dẫn tới mâu thuẫn với (2.2). $\square$

Trong $\mathbb{C}^N$ điều kiện (L^*) đã được nghiên cứu bởi Nguyen T.V ([Ng]) và khái niệm độ đo determining đã được giới thiệu bởi Levenberg ([Lv]), người đã chứng minh phần hai của định lí trong trường hợp này.

Bây giờ chúng ta quan tâm đến hệ quả sau là sự hoàn thiện của bất đẳng thức *Bernstein-Markov*.

2.1.4. Định lí. *Giả sử K là một tập con compact không đa cực của X và m là một độ đo determining trên K. Khi đó với bất kỳ số mũ $p > 0$, và bất kỳ $r > r_0(K) := \sup_{x \in K}(\exp g_K^*(x))$, đều tồn tại một lân cận U của K và một hằng số $C = C(r, p) > 0$ sao cho:*

$$(BM)_p \qquad \|f\|_U \le C r^d \|f\|_{p,m}, \forall f \in \mathcal{A}_d(X), \forall d \ge 1,$$

trong đó $\|f\|_{p,m} := (\int_K |f|^p dm)^{1/p}$.

Chú ý rằng nếu K là L- chính quy thì $r_0(K) = 1$ và ta được bất đẳng thức Bernstein-Markov.

Chứng minh.

Vì K không đa cực trong X, và m là một độ đo determining trên K nên theo Định lí 1.1.5 suy ra với mọi $f \in A(X), f \neq 0$, thì $\|f\|_{p,m} > 0$. Để chứng minh $(BM)_p$, thì ta chỉ cần chứng minh ước lượng sau:

$$\lim_{d \to +\infty} \sup(\sup\{\|f\|_K / \|f\|_{p,m}; f \in \mathcal{A}_d(X), f \neq 0\}) \le r_0(K).$$

Giả sử rằng đảo lại là đúng, khi đó tồn tại một số thực $r_j > r_0(K)$, một dãy tăng các số nguyên dương $(d_j)_{j \ge 1}$, và một dãy hàm đa thức khác không $(f_j)_{j \ge 1}$ với $f_j \in A_{d_j}, j \in \mathbb{N}^*$, sao cho:

(2.3) $$\|f_j\|_K \geq r_1^{d_j} \|f_j\|_{p,\mu}.\ \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

Tiếp theo xét dãy:

$$F_j := \frac{f_j}{\|f_j\|_{p,\mu}}, \quad j \in \mathbb{N}^*.$$

Ta sẽ buộc cho họ $\{d_j^{-2/p} F_j;\ j \geq 1\}$ là bị chặn $\mu-$ hầu khắp nơi trên K. Thật vậy, đặt:

$$S_{m,j} := \{x \in K : d_j^{-2} |F_j(x)|^r \geq m\},$$

$$S_m = \bigcup_{j \geq 1} S_{m,j}$$

và chú ý rằng $\mu(S_m) \leq \dfrac{1}{m} \sum\limits_{j \geq 1} d_j^{-2} \leq \dfrac{\pi^2}{6m}$. Khi đó $S = \bigcap\limits_{m \geq 1} S_m$ là tập con borelian của K thoả mãn $\mu(S) = 0$, và họ $\{d_j^{-2/p} F_j;\ j \geq 1\}$ bị chặn tại mỗi điểm của $K \setminus S$. Vậy $\{d_j^{-2/p} F_j;\ j \geq 1\}$ là bị chặn $\mu-$ hầu khắp nơi trên K.

Bởi vậy theo Định lí 2.1.3, ta có ước lượng sau:

(2.4) $$\lim_{j \to +\infty} \sup\left(\frac{1}{d_j} \log|Fj(x)|\right) \leq g_K^*(x), \forall x \in X.$$

Lấy số thực r_2 sao cho $r_0(K) < r_2 < r_1$. Vì $K \subset \{x \in X; g_K^*(x) < \log r_2\}$, nên áp dụng Bổ đề Hartogs trên X ([Zr]), từ (2.4) ta thu được bất đẳng thức sau:

$$\lim_{j \to +\infty} \sup\left(\frac{1}{d_j} \log\|F_j\|_K\right) \leq \log r_2,$$

điều này mâu thuẫn với ước lượng (2.3). Vậy định lí được chứng minh. ■

2.2. Định lí Bernstein-Walsh trên đa tạp con đại số

Trong mục này chúng ta giả sử X là một đa tạp con đại số n - chiều của $\mathbb{C}^N$, và giữ nguyên các kí hiệu như trong 1.2.

Với một tập con mở $\Omega \subset X$, ký hiệu $\mathcal{O}(\Omega)$ là không gian Frechet các hàm chỉnh hình trên Ω, với tôpô hội tụ đều địa phương trên Ω. Với một tập con compact $K \subset X$, kí hiệu $\mathcal{O}(K)$ là không gian mầm các hàm chỉnh hình trong một lân cận của K, được trang bị tôpô giới hạn qui nạp.

Cho f là một hàm phức liên tục trên một tập compact $K \subset X$, ta định nghĩa:

$$(2.5) \qquad e_d(f,K) := \inf\{\|f - P\|_K ; P \in \mathcal{A}_d(X)\}, \ d \in \mathbb{N}^*.$$

Đó là sai số bậc d trong xấp xỉ tốt nhất của f bởi đa thức theo chuẩn đều trên K.

Ta có ước lượng đối với tốc độ hội tụ tới 0 của sai số này.

2.2.1. Định lý. *Cho K là tập con compact không đa cực của X, sao cho g_K^* là đa điều hoà dưới trên X. Khi đó với mọi $r > r_0(K) := \sup_K(\exp g_K^*)$ và với mọi $q > 0$, tồn tại một hằng số $c(r,q) > 0$ sao cho:*

$$(2.6) \qquad e_d(f,K) \le c(r,q) r^{-d} \|f\|_{\overline{\Omega}_{r+q}}, \ \forall f \in \mathcal{O}(\overline{\Omega}_{r+q}), \forall d \ge 1.$$

Định lí này được biết giống như định lí *Berstein-Walsh* và đã được chứng minh trong ([Zr]).

2.2.2. Chú ý. Nếu X là bất khả qui địa phương như một tập giải tích của $\mathbb{C}^N$, thì g_K^* là đa điều hoà dưới trên X. Trong trường hợp tổng quát g_K^* không phải luôn là đa điều hoà dưới ngay cả khi $g_K^* = g_K$, giống như các ví dụ đã chỉ ra (xem [Zr]). Hơn nữa, nếu K không đa cực, thì g_K^* là đa điều hoà dưới yếu trên

X và nó có thể cho một dạng yếu của Định lí Berstein-Walsh theo cách sau đây: Cho hàm đa điều hoà dưới và vét cạn $v \in \mathcal{L}(X)$, tập $\Omega_r(v) := \{x \in X : v(x) < \log r\}, r \geq 1$, và $\rho_0(v) := \sup\limits_K \exp v$. Khi đó ước lượng (2.6) xảy ra với $\Omega_r(v)$ thay cho $\Omega_r(K)$, và $\rho_0(v)$ thay cho $\rho_0(K)$, chú ý rằng trong trường hợp nếu $v/K \leq 0$, ta có $\Omega_r(K) \subset \Omega_r(v)$ (xem [Zr]).

2.3. Tiêu chuẩn đại số đối với đa tạp con giải tích.

Trong phần này, chúng ta sẽ trình bày tiêu chuẩn địa phương về tính đại số của đa tạp con giải tích của $\mathbb{C}^N$.

Giả sử Y là một đa tạp con giải tích bất khả qui của $\mathbb{C}^N$ có số chiều n. Kí hiệu $A(Y) = \bigcup\limits_{d \geq 1} A_d(Y)$, đại số phân bậc các hàm đa thức trên Y nghĩa là với mỗi số nguyên dương d, $A_d(Y)$ là không gian tuyến tính hạn chế tới Y các đa thức chỉnh hình trên $\mathbb{C}^N$, có bậc lớn nhất là d.

Với một tập con mở không rỗng cố định $U \Subset Y$, ta có thể dễ dàng định nghĩa như trong trường hợp đại số, hằng số Chebyshev của tập compact K đối với U trong Y bởi công thức:

$$\tau(K,U) = \lim_{d \to +\infty} \tau_d(K,U) = \inf_{d \geq 1} \tau_d(K,U),$$

trong đó $\tau_d(K,U) := \inf\left\{\|f\|_K^{1/d} : f \in A_d(Y), \|f\|_U = 1\right\}$.

2.3.1. Định lí. *Cho $Y \subset \mathbb{C}^N$ là đa tạp con giải tích bất khả quy có số chiều là n. Khi đó các điều kiện sau là tương đương* :

(1) *Y là đa tạp con đại số của $\mathbb{C}^N$*

(2) *Tồn tại một thế vị parabolic $g : Y \to [-\infty, +\infty]$ trên Y sao cho* $\log(1 + |z|) = O(g(z))$ *trên Y* .

(3) *Tồn tại một tập con compact $E \subset Y$ sao cho $L_E \in L^{\infty}_{loc}(Y)$* .

(4) *Tồn tại một tập con mở khác rỗng $U \subset Y$ và một tập con compact $E \subset Y$ sao cho $t(E,U) > 0$.*

Chứng minh: Điều kiện (1) $\Rightarrow$ (2) theo tiêu chuẩn Rundin - Sadullaev xem trong ([Rd], [Sd]), giống như trong mục 1.2, ở đó nó đã được sử dụng để xây dựng một thế vị parabolic thoả mãn (1.8).

(2) $\Rightarrow$ **(3)** là rõ ràng bởi vì (2) suy ra với bất kỳ tập compact $E \subset Y$ ta có $lp \le g_E$ trên X, và theo Định lí 1.1.5 nếu E không đa cực trong Y, thì g_E là bị chặn địa phương trên Y. Vậy (3) được chứng minh.

Nếu (3) thoả mãn thì theo định nghĩa của L_E ta có:

$$|f(z)| \le \|f\|_E (L_E(z))^d, \forall z \in U; \forall f \in A_d(Y), \forall d \in N^*$$

Bây giờ cố định một tập con mở không rỗng $U \subset Y$. Khi đó do (3), $M := \sup\{L_E(z); z \in U\} < +\infty$ và bất đẳng thức trên, ta có ;

$$r(E,U) \ge 1/M > 0 .$$

Vậy (4) được chứng minh .

(4) $\Rightarrow$ (1): Trước tiên chú ý rằng do (4), $R := 1/\tau(E,U) < +\infty$ và ta có:

$$(2.7) \qquad |f(z)| \leq \|f\|_E R^d, \forall z \in U, \forall f \in A_d(Y), \forall d \in \mathbb{N}^*$$

Trước tiên chúng ta chứng minh nhận xét sau:

Nhận xét: *Với mọi tập mở, liên thông khác rỗng* $U_0 \subset U$ *và mọi tập con compact không đa cực* $K \subset U_0$, *ta có* $\tau(K,U_0) > 0$.

Thật vậy, đặt:

$$(*) \quad \psi(z) = \sup\left\{\frac{1}{d}\log|f(z)|; f \in A_d(Y), \|f\|_E \leq 1, d \geq 1\right\}, z \in U.$$

Theo bất đẳng thức (2.7), ta có $\psi(z) \leq \log R, \forall z \in U$. Giả sử rằng $\tau(K,U_0) = 0$, với tập compact $K \subset U_0$. Khi đó tồn tại một dãy tăng $(d_j)_{j \geq 1}$ các số nguyên dương và một dãy $(f_j)_{j \geq 1}$ các hàm đa thức sao cho $f_j \in A d_j(Y), \forall j \geq 1$ và ước lượng sau xảy ra:

$$(**) \qquad \|f_j\|_{U_o} = 1, \lim_{j \to +\infty} \left(\|f_j\|_K\right)^{1/dj} = 0$$

Đặt

$$w_j(z) = \frac{1}{d_j}\log\frac{|f_j(z)|}{\|f_j\|_K}, \ z \in U, j \in \mathbb{N}^*.$$

Khi đó w_j là đa điều hoà dưới trên U_0 và theo (*), (**), nó thoả mãn các ước lượng sau đây:

$i)$ $\quad \sup\{w_j(z); z \in K\} = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*,$

$ii)$ $\quad m_j = \sup\{w_j(z); z \in U_0\} \to +\infty$, khi $j \to +\infty$

$iii)$ $\quad w_j(z) \leq \sup\{w_j(z); z \in E\} + \psi(z), \forall z \in U_o, \forall j \in \mathbb{N}^*$

Theo $ii)$, $iii)$ và Bổ đề Hartogs, tồn tại $z_0 \in U_0$ sao cho:

$$\lim_{j \to +\infty} \sup\left(\frac{w_j(z_0)}{m_j} - 1\right) = 0$$

Khi đó bằng cách xét một dãy con, nếu cần, ta có thể giả sử rằng:

$$\frac{w_j(z_0)}{m_j} - 1 > -\frac{1}{2^j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

Bởi vậy hàm được định nghĩa bởi công thức:

$$w(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{w_j(z)}{m_j} - 1\right), \quad z \in U_0.$$

là đa điều hoà dưới trên U_0. Theo $iii)$ ta có $w(z_0) > -\infty$ và theo $i)$ $w(z) = -\infty$ với $z \in K$, do đó K là đa cực. Nhận xét được chứng minh.

Bây giờ mục đích của chúng ta là ước lượng số chiều của không gian tuyến tính $\mathcal{A}_d(Y)$. Ta sẽ chứng minh

$$\lim_{d\to+\infty}\sup\frac{\dim \mathcal{A}_d(Y)}{d^n} < +\infty ,$$

và cho cận trên của giới hạn này theo ngôn ngữ biểu diễn các hằng số Chebychev các phần nhỏ của đa tạp gần điểm chính qui.

Cho $y_0 \in U$ là một điểm chính quy của Y và U_0 là một lân cận toạ độ của y_0 là ảnh của một ánh xạ song chỉnh hình h lên đĩa mở U'_0 nào đó có tâm tại gốc trong $\mathbb{C}^N$. Với mỗi $f \in \mathcal{A}_d(Y)$, định nghĩa $\tilde{f} := f\circ h^{-1}$ là hàm chỉnh hình trên U'_0, và ký hiệu $\mathcal{Q}_d := \{\tilde{f};\ f \in A_d(Y)\}$, với $d \in \mathbb{N}^*$. Bây giờ khai triển mỗi hàm chỉnh hình $F \in \mathcal{Q}_d$ thành chuỗi Taylor trên đa đĩa U'_0:

$$F(z) = \sum_{\alpha\in N^n} b_\alpha z^\alpha, \qquad z \in U'_0$$

hội tụ đều trên các tập con compact của U'_0.

Cố định một đa đĩa mở V' có tâm tại gốc trong $\mathbb{C}^N$ mà ta có thể giả sử là đa đĩa đơn vị. Cho K'_s là đa đĩa đóng có bán kính $0 < s < 1$, có tâm tại gốc trong $\mathbb{C}^N$. Cố định $0 < s < t < 1$; khi đó $K' = K'_s \subset K'_t \subset V' \Subset U'_0$. Nếu đặt $T_m(z) := \sum_{|\alpha|\le m} b_\alpha z^\alpha$ với $m \in N$, thì từ chuỗi Taylor trên và bất đẳng thức Cauchy ta có ước lượng sau:

$$\sup_{z\in K'}|F(z) - T_m(z)| \le t^m \|F\|_{V'},\ \forall F \in Q_d,\ \forall m \ge m_0,$$

trong đó m_0 là một số nguyên đủ lớn phụ thuộc vào s và τ.

Từ ước lượng này suy ra ngay:

(a) $\quad dist_{K'}(F, \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^N)) \le \tau^m \|F\|_{V'}, \ \forall F \in \mathcal{Q}_d, \ \forall m \ge m_0,$

trong đó $\mathcal{P}_m(\mathbb{C}^N)$ là không gian tuyến tính các đa thức n biến số phức có bậc không lớn hơn m và khoảng cách được tính toán theo chuẩn đều trên $K' = K_s'$, tức là trong không gian Banach $C(K')$ các hàm liên tục trên K'.

Theo nhận xét ở trên $R(s) = \frac{1}{r}(K_s, V) < +\infty$, và khi đó ta có ước lượng sau:

(b) $\quad \|f\|_V \le \|f\|_K R(s)^d, \quad \forall f \in \mathcal{A}_d(Y), \ \forall d \in \mathbb{N}^*.$

Vì K là L- chính quy trong Y, nên độ đo cân bằng λ_K là một độ đo determining và theo Định lí 2.1.4, nó thoả mãn bất đẳng thức Bernstein-Markov $(BM)_2$. Cố định $r > r_0(K) = 1$, tồn tại một số thực dương $d_0 > 1$ sao cho:

(c) $\quad \|f\|_K \le r^d \|f\|_{K,2}, \quad \forall f \in \mathcal{A}_d(Y), \forall d \ge d_0,$

Giả sử không gian Hilbert $\mathcal{H}$ là không gian con đóng của $L^2(K, d\lambda_K)$ được sinh bởi thu hẹp lên K của hàm chỉnh hình trong một lân cận của K, và $\tilde{\mathcal{H}}$ là ảnh của $\mathcal{H}$ qua phép đẳng cấu.

$$f \to \tilde{f} := f \circ h^{-1}.$$

Khi đó tổng hợp các bất đẳng thức (a), (b), (c), ta có

$$(2.8)\qquad dist_{\mathcal{H}}(F, \mathcal{P}_m(\mathbb{C}^n)) \le r^d t^m R(s)^d \|F\|_{\mathcal{H}}$$

$$\text{với}\quad \forall F \in \mathcal{Q}_d, \forall m \ge m_0, \forall d \ge d_0.$$

Chọn $k > 1$ sao cho tồn tại $s \in (0,1)$ với $s^k R(s) < 1$, ta có thể tìm $t \in (s,1)$ và $r > 1$ sao cho $\rho = r t^k R(s) < 1$. Khi đó theo (2.8), chúng ta kết luận :

$$(2.9)\quad dist_{\mathcal{H}}(F, \mathcal{P}_{kd}(\mathbb{C}^n)) \le \rho^d \|F\|_{\mathcal{H}} < \|F\|_{\mathcal{H}}, \forall F \in \mathcal{Q}_d, \forall d \ge d_0.$$

Bây giờ giả sử rằng $\dim \mathcal{Q}_d > \dim \mathcal{P}_{kd}(\mathbb{C}^n)$, với $d \ge \max\{d_0; m_0\}$ nào đó. Khi đó $\mathcal{Q}_d \cap (\mathcal{P}_{kd}(\mathbb{C}^n))^{\perp} \ne \{0\}$. Lấy một hàm $F_0 \ne 0, F_0 \in \mathcal{Q}_d \cap (P_{kd}(\mathbb{C}^n))^{\perp}$. Với hàm này, ta có $\|F_0\|_{\mathcal{H}} \le dist_{\mathcal{H}}(F_0, P_{kd}(\mathbb{C}^n))$. Điều này mâu thuẫn với (2.9), do đó suy ra bất đẳng thức

$$\dim Q_d \le \dim P_{kd}(\mathbb{C}^n) \sim k^n d^n / n!.$$

Bởi vậy với d đủ lớn ta có

$$(2.10)\qquad \dim \mathcal{A}_d(Y) \le k^n d^n / n!,$$

trong đó $n = \dim Y$.

Từ đó suy ra Y là đại số. Thật vậy, giả sử J là ideal các đa thức thuộc $\mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_N]$ đồng nhất triệt tiêu trên Y, và $Z = \operatorname{loc}(J)$. Khi đó Z là đa tạp con đại số của $\mathbb{C}^N$. Theo Nullstellensatz, ideal bị triệt tiêu của Z được cho bởi $I(Z) = \mathrm{Rad}\ J = J$. Vì thế với d đủ lớn

$$\dim A_d(Y) = \dim \mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_N]/J$$

$$= \dim \mathbb{C}[z_1, z_2, \ldots, z_N]/I(Z) = h_Z(d)$$

là đa thức Hilbert của đa tạp con đại số Z, mà bậc của nó đúng bằng $m = \dim Z$. Khi đó theo (2.10), với d đủ lớn $h_Z(d) \leq k^n d^n / n!$,

suy ra $m \leq n$. Vì $Y \subset Z$ là bất khả quy có số chiều n, nên ta có $m = n$ và Y là thành phần bất khả quy của Z, do đó Y là đa tạp con đại số có số chiều n. Định lýí được chứng minh. $\blacksquare$

2.3.2. Chú ý: Phép chứng minh mà chúng ta trình bày ở trên có thể thực hiện được nhiều hơn điều đã được phát biểu trong định lý. Trong thực tế có thể thu được một ước lượng về bậc của đa tạp con đại số Y bởi vì hệ số chính của đa thức Hilbert $h_Y(d)$ bằng $\left(\frac{d(Y)}{n!}\right) d^n$, trong đó $d(Y)$ là bậc của đa tạp con đại số Y, đó là số giao điểm của Y và $(N-n)$- phẳng trong $\mathbb{C}^N$. Theo ước lượng (2.10), ta kết luận $d(Y) < k^n$, trong đó k thoả mãn ước lượng sau:

$$s^k R(s) < 1, \text{ với } s \in (0,1), \text{ trong đó } R(s) = 1/\tau(K_s, V).$$

$k > \liminf_{s \to 0} (\log \tau(K_s, V)/\log s)$. Như vậy ta có ước lượng sau về bậc của Y:

$$d(Y) \leq (\liminf_{s \to 0} \log \tau(K_s, V)/\log s)^n.$$

2.4. Đa thức trực chuẩn trên đa tạp con đại số.

Cho X là một đa tạp con đại số có số chiều n trong $\mathbb{C}^N$. Chúng ta giữ nguyên các kí hiệu trong phần 1.2. Đặt:

$$S = S(I) := \left\{\alpha \in \mathbb{N}^N; z^\alpha \notin \left[z^\beta; \beta \le \alpha\right] + I\right\},$$

trong đó $I = I(X)$, là ideal đa thức của X và $\left[z^\beta; \beta \le \alpha\right]$, là không gian con các đa thức trong $\mathbb{C}[z_1, ..., z_N]$, sinh bởi các đơn thức $\{z_\beta, \beta \le \alpha\}$, và $\le$ là quan hệ thứ tự trên $\mathbb{N}^N$.

Khi đó $\{z^\alpha; \alpha \in S\}$ là độc lập tuyến tính modulo I. Chọn một song ánh

$\alpha : \mathbb{N} \to S$, sao cho $|\alpha(j)| \le |\alpha(j+1)|, \forall j \in \mathbb{N}$, và xét các hàm đơn thức xác định trên X bởi công thức :

$$e_j(x) = x^{\alpha(j)}, j \in \mathbb{N}.$$

Cho K là một tập compact không đa cực của X, và μ là một độ đo determining trên K. Khi đó theo Định lí 1.1.5, hệ $(e_j)_{j \ge 0}$ là độc lập tuyến tính trong không gian Hilbert $L^2(K, d\mu)$.

Theo phương pháp trực chuẩn cổ điển của Hilbert-Schmidt, ta có thể xây dựng từ hệ này một hệ trực chuẩn $(B_j)_{j \ge 1}$ trong $L^2(K, d\mu)$, bao gồm các hàm đa thức trên X, gọi là các đa thức $\mu-$ trực chuẩn trên K. Khi đó kí hiệu:

$$d_j = |\alpha(j)| = \deg(B_j), j \in \mathbb{N}.$$

Giống như trong chương 1, ta kí hiệu g_K^* là hàm Green đa phức trên K và

$$\Omega_r(K) = \Omega_r = \{x \in X ; g_K^*(x) < \log r\}, \; r > 1.$$

2.4.1. Định lí. Cho K *là tập compact không đa cực của* X *và* μ *là một độ đo determining trên* K. *Khi đó hệ* $\mu-$ *trực chuẩn* $(B_j)_{j \geq 0}$ *là một cơ sở Schauder của không gian* $\mathcal{O}(X)$ *thoả mãn tính chất*:

$$\left(\lim_{j \to +\infty} \sup \frac{1}{d_j} \log|B_j|\right)^* = g_K^* \text{ trên } X \setminus \hat{K}_X,$$

trong đó $\hat{K}_X = \{x \in X ; g_K(x) = 0\}$ *là bao đa thức của* K *trong* X.

Hơn nữa, nếu K *là* L - *chính quy và* $g_K^* = g_K$ *là đa điều hoà dưới trên* X, *thì* $(B_j)_{j \geq 0}$ *cũng là một cơ sở Schauder thông thường của tất cả các không gian* $\mathcal{O}(\hat{K}_X)$, *và* $\mathcal{O}(\Omega_r)$ *với* $r > 1$, *thoả mãn ước lượng sau:*

$$\lim_{j \to +\infty} \left(\|B_j\|_{\overline{\Omega}_r}\right)^{\frac{1}{d_j}} = r, \quad \forall r > 1.$$

Chứng minh: Kí hiệu $L_P^2(K, d\mu)$ là không gian con đóng của $L^2(K, d\mu)$ sinh bởi hạn chế lên K của các hàm đa thức trên X.

Cho $f \in \mathcal{O}(X)$. Khi đó theo Định lí 2.2.1, $f/K \in L^2_P(K, d\mu)$, điều này suy ra ta có khai triển sau :

$$f = \sum_{j=0}^{+\infty} B_j^*(f) B_j \quad \text{trong } L^2_P(K, d\mu),$$

trong đó $\mathcal{B}_j^*(f) = \int_K f\,\overline{B_j}\,d\mu, \;\; j \in \mathbb{N}$.

Vì $\deg B_j = d_j$, nên theo cách xây dựng $B_j \in \left(\mathcal{A}_{d_j-1}\right)^{\wedge}$ và hệ số trong khai triển trên thoả mãn ước lượng sau:

$$(2.11) \qquad \left|\mathcal{B}_j^*(f)\right| \le \inf\left\{\left|\int_K (f - P)\overline{B_j}\,d\mu\right| ; P \in \mathcal{A}_{d_j-1}\right\}, \;\; \forall j \in \mathbb{N}.$$

Cho $u \in \mathcal{L}(X)$ là một hàm vét cạn trên X, đặt

$$D_r = \{x \in X : v(x) < \log r\}, \;\; r > 0.$$

Khi đó từ (2.11) suy ra với $r > r_0 := \sup_K(\exp v)$ và $\theta > 0$ tuỳ ý, tồn tại một hằng số $c(r,\theta) > 0$ sao cho :

$$(2.12) \qquad \left|\mathcal{B}_j^*(f)\right| \le c(r,\theta)\pi^{-dj}\,\|f\|_{\overline{D}_{r+\theta}}, \;\; \forall j \in \mathbb{N}.$$

Mặt khác, bởi lý do tương tự như việc đưa đến ước lượng (2.4), ta có thể chứng minh rằng:

$$(2.13) \qquad \lim_{j\to+\infty}\sup\left(\frac{1}{d_j}\log\left|B_j(x)\right|\right) \le \gamma^*(x), \;\; \forall x \in X.$$

Khi đó theo bổ đề Hartogs và (2.13), ta kết luận rằng với mỗi tập compact $E \subset X$ có ước lượng sau:

(2.14) $$\lim_{j\to+\infty}\sup\left(\|B_j\|_E\right)^{\frac{1}{d_j}} \le r, \quad \forall r > \sup_E(\exp g_K^*).$$

Lấy $p > r$, từ (2.12) đến (2.14) ta thấy chuỗi $\sum B_j^*(f)B_j$ hội tụ trên mỗi tập compact E của X. Chuỗi này xác định một hàm chỉnh hình F trên X, mà theo khai triển ở trên nó trùng với f $m-$ hầu khắp nơi trên K. Vì m là độ đo determining trên K, nên từ Định lí 1.1.5 suy ra hai hàm trùng nhau trên một tập con không đa cực của X, điều này kéo theo $f = F$ trên X.

Như vậy khai triển hàm f có hiệu lực trong $O(X)$. Vì thế ta phải chứng minh rằng hệ (B_j) là một cơ sở Schauder trong không gian $O(X)$. Nếu K là L-chính quy và g_K là đa điều hoà dưới trên X, thì ta có thể lấy $v = g_K$ và khi đó $D_r = \Omega_r$, với $p > p_0 = r_0(K) = 1$. Bởi vậy nếu $f \in O(\Omega_r)$ với $r > 1$, thì từ (2.12) và (2.13) suy ra chuỗi $\sum B_j^*(f)B_j$ hội tụ chuẩn trên mỗi tập compact của Ω_r, điều đó đã kéo theo (B_j) là một cơ sở Schauder trong không gian $O(\Omega_r)$. Vì $\tilde{K}_X = \bigcap_{r>1}\Omega_r$, nên suy ra hệ (B_j) cũng là một cơ sở Schauder trong không gian $O(\tilde{K}_X)$. Ước lượng $\lim_{j\to+\infty}\left(\|B_j\|_{\overline{\Omega}_r}\right)^{1/d_j} = r, \quad \forall r > 1$ suy ra từ (2.12) và (2.14) bằng cách đưa vào $B_j^*(B_j) = 1, \forall j \in \mathbb{N}$.

Bây giờ chúng ta sẽ kết hợp một hàm đa điều hoà dưới chấp nhận được trên một miền siêu lồi của $\mathbb{C}^N$ với một hệ trực chuẩn kiểu Bergman trong một không gian Bergman có trọng số xấp xỉ nào đó và chứng minh nó là một cơ sở

Shauder trong không gian các hàm chỉnh hình trên những tập mức con mở của hàm Green đa phức tương ứng.

2.5. Hệ trực chuẩn Bergman trên miền siêu lồi

Cho D là một miền siêu lồi trong $\mathbb{C}^N$, $\Omega \in PSH(D)$ sao cho $e^{-\Omega}$ là khả tích địa phương trên D. Ta kí hiệu

$$\tilde{\Omega}(z) = \Omega(z) + 2\log(1 + |z|^2), z \in D),$$

và đặt

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_\Omega = \mathcal{O}^2(D, \tilde{\Omega}),$$

không gian trọng Bergman các hàm $f \in \mathcal{O}(D)$ sao cho $|f|^2 e^{-\Omega}$ là khả tích theo nghĩa Lebesgue trên D, với chuẩn tương ứng được xác định bởi công thức:

$$\|f\|^2 = \int_D |f|^2 e^{-\tilde{\Omega}} d\lambda_{2n},$$

trong đó $d\lambda_{2n}$ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{C}^n$.

Cho $E \Subset D$ và $E_r = \bigcup_{a \in E} \overline{B}(a, r)$ với $0 < r < dist(E; \mathbb{C}^n \setminus D)$. Khi đó theo bất đẳng thức giá trị trung bình ta có:

$$\|f\|_E^2 \leq \frac{1}{\omega_{2n} r^{2n}} \int_{E_r} |f|^2 d\lambda_{2n} \leq C(r)^2 \|f\|^2,$$

trong đó $C(r)^2 = \dfrac{1}{\omega_{2n} r^{2n}} \sup_{z \in E_r} e^{\tilde{W}(z)}$. Từ đó suy ra bao hàm chính tắc $\mathcal{H}_W \to \mathcal{O}(D)$ là tuyến tính và liên tục. $\blacksquare$

Ta cần kết quả xấp xỉ sau đây:

2.5.1. Bổ đề. *Cho D là một tập con mở siêu lồi của $\mathbb{C}^n$ và W là một hàm đa điều hòa dưới trên D sao cho e^{-W} là khả tích địa phương trên D. Khi đó không gian trọng Bergman $\mathcal{H}_W = \mathcal{O}^2(D, W)$ là trù mật trong không gian* $\mathcal{O}(D)$.

Đặt

$$A_l = \{a \in D : v_l(a) = [l\nu(\varphi, a) - n] \geq 1\}$$

trong đó $[t]$ ký hiệu phần nguyên của t.

Từ giả thiết $A_l \neq \emptyset$ với l đủ lớn, như vậy bằng quy nạp ta có thể định nghĩa một dãy $\{l_j\}_{j \geq 0}$ các số nguyên dương theo cách sau:

(2.15) $$l_0 = 0,\ l_1 := \min\{l > 0 : A_l \neq \emptyset\}$$

$$l_{k+1} = \min\left\{l > l_k ; \exists a \in A_k\ \nu_l(a) > \nu_{l_k}(a)\right\}, \quad k \geq 1.$$

Ta cũng có thể định nghĩa các không gian con:

$$\mathcal{H}_{l_k} = \{f \in \mathcal{H}_W ; \nu(\log|f|, x) > \nu_{l_k}(x), \forall x \in A_{l_k}\}$$

Chú ý rằng:

$$f \in \mathcal{H}_{l_k} \Leftrightarrow f \in \mathcal{H}_W, D^\alpha f(x) = 0, \forall x \in A_{l_k}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq \nu_{l_k}(x).$$

Suy ra $\mathcal{H}_{l_k}$ là không gian con đóng của $\mathcal{H}$ có số chiều hữu hạn.

Ta xét bổ đề sau:

2.5.2. Bổ đề. *Giả sử* $\{(a_0,n_0),\dots(a_q,n_q)\}$ *là một hệ hữu hạn các điểm có trọng số trong* $D\times\mathbb{N}^*$ *thỏa mãn* $a_j\neq a_k$ *với* $j\neq k$, *và* $\alpha\in\mathbb{N}^n$, *với* $|\alpha|=n_0$. *Khi đó tồn tại* $f\in\mathcal{H}_\Omega$ *sao cho*:

$$D^\alpha f(a_0)=1 \text{ và } \nu(\log|f|,a_j)=n_j,\ \ 0\le j\le q.$$

Chứng minh: Ta có thể xây dựng một đa thức $P\in C[z_1,\dots,z_n]$ thỏa mãn những điều kiện cần thiết. Để nhận được hàm $f\in\mathcal{H}_\Omega$ thỏa mãn các điều kiện tương tự, ta cần điều chỉnh P theo cách sau. Giả sử χ là một hàm thuộc lớp C^∞ với giá compact trong D sao cho $\chi=1$ trên một lân cận của tập $\{a_0,a_1,\dots,a_q\}$, khi đó có một hàm u thuộc lớp C^∞ sao cho $f=u-\chi P$ thuộc $\mathcal{H}_\Omega$ và bị triệt tiêu tại bậc đủ lớn tại mỗi điểm của chúng. Điều đó có thể thực hiện bằng cách áp dụng L^2 - ước lượng Hormander để giải phương trình $\bar\partial u=\bar\partial(\chi P)=P\bar\partial\chi$ với trọng

$$\psi=\Omega+\sum_{0\le j\le q}(n_j+n)\log|z-a_j|^2,$$

trong đó $n_0=|\alpha|$ (xem [Hor]). $\square$

Bây giờ ta cho một vài nhận xét sẽ sử dụng về sau:

Nhận xét 1: *Giả sử* $\nu=\sup\{\nu(\varphi;a);a\in D\}$. *Khi đó ta có*

(2.16) $$\lambda_k<\lambda_{k+1}\le\lambda_k+\kappa,\quad \forall k\in\mathbb{N}^*,$$

trong đó κ *là số nguyên dương nhỏ nhất hoặc bằng* $1/\nu$.

Thật vậy, vì hàm $x \to n(x;\varphi)$ là nửa liên tục trên trên D và $n(x;\varphi) = 0$ nếu $x \in D \setminus K$, trong đó K là compact trong D, nên tồn tại $b \in D$ thỏa mãn $n(b;\varphi) = n > 0$. Đặt $l' = l_k + k$ thì $nl' \geq nl_k + 1$ và $[nl' - n] > [nl_k - n]$.
Vì $n = n(\varphi, b)$ trong đó $b \in A_{l_k}$, nên bất đẳng thức (2.16) được suy ra từ định nghĩa (2.15). Vậy nhận xét 1 được chứng minh. $\square$

Nhận xét 2. *Với mỗi* $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_{l_{k+1}} \subset \mathcal{H}_{l_k}$ *và* $\mathcal{H}_{l_{k+1}} \neq \mathcal{H}_{l_k}$.

Thật vậy, theo định nghĩa (2.15) của l_{k+1}, tồn tại $b \in A_{l_k}$ sao cho $n_{l_{k+1}}(b) > n_{l_k}(b)$. Từ Bổ đề 2.5.2 suy ra tồn tại $f \in \mathcal{H}_\Omega$ thỏa mãn $n(\log|f|;b) = n_{l_{k+1}}(b)$ và $n(\log|f|;x) = n_{l_k}(x) + 1$ với $x \in A_k, x \neq b$. Vì $n_{l_{k+1}}(b) \geq n_{l_k}(x) + 1$, nên từ $\mathcal{H}_{l_k} = \{f \in \mathcal{H}_\Omega; n(\log|f|, x) > n_{l_k}(x), \forall x \in A_{l_k}\}$ suy ra $f \in \mathcal{H}_{l_k} \setminus \mathcal{H}_{l_{k+1}}$. Vậy nhận xét 2 được chứng minh. $\square$

Bây giờ với mỗi $k \in \mathbb{N}$, đặt:

$$\mathcal{M}_k = \{(a, \alpha) \in A_{l_k} \times \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq n_{l_k}(a)\}$$

$$m_k = \#(\mathcal{M}_k) = \sum_{a \in A_{l_k}} \binom{n_{l_k}(a) + n}{n}$$

và với mỗi $(a, \alpha) \in \mathcal{M}_k$, ký hiệu $\mathcal{H}_{k,a,\alpha}$ là tập hợp được xác định theo cách sau

(2.17) $f \in \mathcal{H}_{k,a,\alpha} \Leftrightarrow f \in \mathcal{H}$ và

$$\begin{cases} D^\alpha f(a) = 1, \quad D^\beta f(a) = 0 \ \forall \beta \neq \alpha, |\beta| \leq n_{l_k}(a) \\ D^\beta f(x) = 0, \ \forall |\beta| \leq n_{l_k}(x), \forall x \in A_{l_k} \setminus \{a\} \end{cases}$$

Kết quả sau là cơ sở cho việc xây dựng của chúng ta:

2.5.3. Bổ đề. *Giả sử* $k \in \mathbb{N}^*$ *và* $(a,\alpha) \in \mathcal{M}_k$. *Khi đó ta có các tính chất sau :*

1) $\mathcal{H}_{k,a,\alpha}$ *là tập con lồi, đóng khác rỗng của* $\mathcal{H}_\Omega$ *chứa trong* $\mathcal{H}_{\lambda_{k-1}}$.

2) *Tồn tại một phần tử duy nhất* $g = g_{k,a,\alpha} \in \mathcal{H}_{k,a,\alpha}$ *có chuẩn nhỏ nhất trong* $\mathcal{H}_\Omega$, *tức là*

$$\|g\| = \inf\left\{\|f\|; f \in \mathcal{H}_{k,a,\alpha}\right\}$$

3) *Nếu* $f \in \mathcal{H}_\Omega$, $\nu(\log|f|,x) \geq \nu_{\lambda_k}(x), \forall x \in A_{\lambda_k} \setminus \{a\}$ *và* $\nu(\log|f|,a) \geq |\alpha|$ *thì* $f \perp g_{k,a,\alpha}$ *trong* $\mathcal{H}_\Omega$.

Nói riêng, $g_{k,a,\alpha} \in H^\perp_{\lambda_k}$ *và* $g_{k,a,\alpha} \in \mathcal{H}^\perp_{\lambda_k} \cap \mathcal{H}_{\lambda_{k-1}}$ *nếu* $k \in \mathbb{N}^*$ *và* $\nu_{\lambda_{k-1}}(a) < |\alpha| \leq \nu_{\lambda_k}(a)$.

Hơn nữa, với $k \in \mathbb{N}$, *và* $a \in A_{\lambda_k}$ *cố định,* $\left\{g_{k,a,\alpha};\ |\alpha| \leq \nu_{\lambda_k}(a)\right\}$ *là một hệ trực chuẩn .*

4) *Với mỗi* $k \in N$ *hệ* $\left\{g_{k+1,a,\alpha}; (a,\alpha) \in M_{k+1} \setminus M_K\right\}$ *là môt cơ sở trong không gian* $\mathcal{H}_{\lambda_k} \cap \mathcal{H}^\perp_{\lambda_{k+1}}$ *(nhận xét rằng* $M_0 = \emptyset$ *và* $\mathcal{H}_{\lambda_0} = \mathcal{H}$ *) .*

Chứng minh: Rõ ràng $\mathcal{H}_{k,a,\alpha}$ là tập con lồi của $\mathcal{H}_\Omega$ được chứa trong $\mathcal{H}_{\lambda_{k-1}}$ và theo Bổ đề 2.5.2, nó khác rỗng. Từ ước lượng

$$\|f\|_E^2 \leq \frac{1}{\omega_{2a} r^{2a}} \int_{E_r} |f|^2 d\lambda_{2n} \leq C(r)^2 \|f\|^2$$

suy ra $\mathcal{H}_{k,a,\alpha}$ là đóng trong $\mathcal{H}$. Vậy khẳng định thứ nhất được chứng minh.

Khẳng định thứ hai của bổ đề là hệ quả trực tiếp của định lý phép chiếu đối với tập con lồi, đóng $\mathcal{H}_{k,\alpha,a}$ của không gian Hilbert $\mathcal{H}_{\Omega}$.

Để chứng minh khẳng định thứ ba, trước tiên chú ý rằng nếu $f \in \mathcal{H}_{\Omega}$ thỏa mãn các điều kiện của Bổ đề thì với bất kỳ $\lambda \in C$ ta có $g - \lambda f \in \mathcal{H}_{k,\alpha,a}$, trong đó $g = g_{k,\alpha,a}$. Do đó ta có :

$$\|g - \lambda f\| \le \|g\|, \quad \forall \lambda \in C.$$

Vì

$$\|g - \lambda f\|^2 = \|g\|^2 + |\lambda|^2 \|f\|^2 - 2R_e (g|\lambda f),$$

trong đó $(.|.)$ ký hiệu là tích vô hướng trong $\mathcal{H}_{\Omega}$, nên với $\lambda = (1/\|f\|^2)(g|f)$ ta có $(g|f) = 0$. Nói riêng, ta có $g \in \mathcal{H}_{\lambda_k}^{\perp}$.

Để chứng minh khẳng định thứ tư, giả sử ta đã cho một họ các số phức $\{\lambda_{\alpha,a}; (\alpha,a) \in M_k\}$ thỏa mãn

$$\sum_{(\alpha,a) \in M_k} \lambda_{\alpha,a} g_{k,\alpha,a} = 0 \qquad (2.18)$$

Cho $(\alpha,a) \in M_k$ cố định và chú ý rằng theo định nghĩa (2.17), ta có các tính chất sau:

$$D^{\alpha} g_{k,\alpha,a}(a) = 1$$

$$D^{\beta} g_{k,\alpha a}(b) = 0, \quad \forall (\beta,b) \in M_k, (\beta,b) \ne (\alpha,a).$$

Do đó theo (2.18), ta có $\lambda_{\alpha,a} = 0$, điều đó chứng tỏ hệ đang xét là độc lập tuyến tính. Vì theo định nghĩa, số chiều của không gian $\mathcal{H}_{\lambda_k}$ nhiều nhất là bằng

$$m_k = \sum_{\alpha \in A_{l_k}} \begin{pmatrix} m_{l_k}(\alpha) + n \\ n \end{pmatrix}$$

nên suy ra hệ $\{g_{k,\alpha,a};(\alpha,a) \in \mathcal{M}_k\}$ là một cơ sở của không gian $\mathcal{H}_{l_k}^{\wedge}$, mà nó là một không gian con có số chiều là m_k. Bởi vậy số chiều của không gian $\mathcal{H}_{l_k} \ominus \mathcal{H}_{l_{k+1}}^{\wedge}$ là $m_{k+1} - m_k$ và như vậy hệ $\{g_{k+1,\alpha,a};(\alpha,a) \in \mathcal{M}_{k+1} \setminus \mathcal{M}_k\}$ là một cơ sở của không gian $\mathcal{H}_{l_k} \ominus \mathcal{H}_{l_{k+1}}^{\wedge}$.

Từ Bổ đề 2.5.3, suy ra với mỗi $k \in \mathbb{N}$, hệ $\{g_{k+1,\alpha,a};(\alpha,a) \in \mathcal{M}_{k+1} \setminus \mathcal{M}_k\}$ là một cơ sở của không gian $H_{l_k} \ominus H_{l_{k+1}}^{\wedge}$. Vì hệ này sắp thứ tự thành một dãy và áp dụng vào quá trình trực chuẩn hoá Hilbert - Schmidt tiêu chuẩn ta nhận được một cơ sở trực chuẩn $\{h_j;\ m_k < j \le m_{k+1}\}$ của không gian $\mathcal{H}_{l_k} \ominus \mathcal{H}_{l_{k+1}}^{\wedge}$

Bằng cách này ta nhận được một hệ trực chuẩn $\{h_j\}_{j \ge 1}$ trong không gian Hilbert $\mathcal{H}_\Omega$ mà ta gọi là hệ trực chuẩn Bergman của không gian Hilbert $\mathcal{H}_\Omega$ kết hợp với hàm chấp nhận được φ.

Bây giờ đặt:

$$p_j = l_k, \quad q_j = l_{k+1} \text{ nếu } m_k \le j \le m_{k+1} \text{ và } k \in \mathbb{N}$$

Từ cách xây dựng ở trên, ta có các tính chất quan trọng sau:

$$h_j \in \mathcal{H}_{p_j} \ominus \mathcal{H}_{q_j}^{\wedge}, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

Hơn nữa, theo (2.16), bất đẳng thức sau được thoả mãn:

$$p_j \le q_j \le p_j + k, \forall_j \ge 1.$$

2.6. Hệ Bergman là một cơ sở Schauder trong không gian các hàm chỉnh hình.

Ta sẽ chứng minh rằng hệ trực chuẩn Bergman $\{h_j\}_{j\geq 1}$ được xây dựng trong phần trên là một cơ sở Schauder trong không gian Frechet $\mathcal{O}(D)$ và một vài không gian trung gian khác.

Xét những miền mức con của hàm Green :

$$D_r := \{z \in D;\ G_D(z;\varphi) < \log r\},\ 0 < r \leq 1$$

và chú ý rằng $D_1 = D$.

Trước tiên, ta cần biết về dáng điệu tiệm cận trên của hệ trực chuẩn Bergman.

2.6.1. Bổ đề. *Hệ trực chuẩn Bergman* $\{h_j; j \geq 1\}$ *là một cơ sở trực chuẩn trong không gian Hilbert* $\mathcal{H}_\Omega$ *thỏa mãn ước lượng sau:*

$$\text{(2.19)} \qquad \limsup_{j\to+\infty}\left(\frac{1}{p_j}\log\left|h_j(z)\right|\right) \leq G_D(z;\varphi),\ \forall z \in D$$

Chứng minh: Theo cách xây dựng, hệ $\{h_j\}_{j\geq 1}$ là một hệ trực chuẩn trong $\mathcal{H}_\Omega$ Ta chứng minh nó là toàn phần. Thật vậy, giả sử $f \in \mathcal{H}_\Omega$ thỏa mãn $f \perp h_j$ trong $\mathcal{H}$, với mỗi $j \geq 1$. Vì $h_j \in H_{g_j}^{\perp}$ với mọi $j \geq 1$, nên ta có $f \in \mathcal{H}_{l_k}$ với mọi $k \geq 0$ do đó f triệt tiêu tại mỗi điểm của A_{l_k} với mọi $k \geq 0$, tại bậc $n_{l_k}(a) = [l_k n(\varphi;a) - n] \geq 1$. Theo giả thiết trên φ, điều đó kéo theo f triệt tiêu tại bậc vô cùng tại một điểm của mỗi thành phần của D. Khi đó $f \equiv 0$ trên D. Điều đó đã chứng minh khẳng định đầu tiên của Bổ đề.

Để chứng minh ước lượng (2.19), ta cố định $a \in D$ và $r > 0$ sao cho $\overline{B}(a,r) \subset D$. Khi đó theo bất đẳng thức giá trị trung bình và $\|h_j\| = 1,\ \forall j \geq 1$, ta có:

$$(2.20)\qquad \|h_j\|^2_{\overline{B}(a,r)} \leq \frac{1}{\omega_{2n} r^{2n}} \int_{\overline{B}(a,2r)} |h_j|^2 d\lambda_{2n} \leq \frac{1}{\omega_{2n} r^{2n}} \sup_{z \in \overline{B}(a,2r)} e^{\tilde{\Omega}(z)} = C(r)^2.$$

Với mỗi số nguyên $j \in \mathbb{N}^*$, đặt

$$u_j(z) = \frac{1}{p_j}\left(\log|h_j(z)| - \log C(r)\right) + \frac{n}{p_j}\log\frac{|z-a|}{r}, z \in D.$$

Khi đó u_j là đa điều hòa dưới trên D, $u_j \leq 0$ trên $B(a,r)$ và vì $n(\log|h_j|;a) \geq p_j n(\varphi;a) - n$ nên ta có:

$$(2.21)\qquad n(u_j;a) = \frac{1}{p_j} n(\log|h_j|;a) + \frac{n}{p_j} \geq n(\varphi;a).$$

Vì $u_j \leq 0$ trên $B(a,r)$ nên Bổ đề Schwarz cổ điển và bất đẳng thức (2.21) suy ra:

$$(2.21)'\qquad u_j(z) \leq n(\varphi;a)\log\frac{|z-a|}{r}, \forall z \in B(a,r), \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

Bây giờ đặt $u(z) := \limsup_{j \to +\infty} \frac{1}{p_j}\log|h_j(z)|$ với $z \in D$.

Theo (2.20), dãy $\left\{(1/p_j)\log|h_j| : j \geq 1\right\}$ là dãy hàm đa điều hòa dưới bị chặn trên đều địa phương trên D. Khi đó kết quả cổ điển của Lelong ([LI1]) đã chỉ ra rằng hàm chính qui hoá nửa liên tục trên u^* của u là đa điều hòa dưới trên D.

Vì $u(z) = \limsup\limits_{j\to+\infty} u_j(z)$, với mọi $z \in B(a,r)$, nên theo (2.21) ta có bất đẳng thức:

(2.21)'' $$u^*(z) \le \nu(\varphi;a)\log\frac{|z-a|}{r}, \forall z \in B(a,r).$$

Các bất đẳng thức (2.21)' và (2.21)'' kéo theo $\nu(u^*;a) \ge \nu(\varphi;a)$ và $u^* \le 0$ trên $B(a,r)$ với mỗi $\overline{B}(a,r) \subset D$. Bởi vậy $u^* \le G_D(.;\varphi)$ trên D. ■

Bước tiếp theo bao gồm các ước lượng dưới nhận được trên hệ Bergman bởi ước lượng hệ đối ngẫu của nó.

Giả sử $\{h_j'\}_{j\ge1}$ là hệ đối ngẫu trong $\mathcal{H}_\Omega'$ liên kết với hệ $\{h_j\}_{j\ge1}$ được định nghĩa bởi công thức sau:

$$h_j'(f) := \int_D f\,\overline{h_j}\,e^{-\tilde{\Omega}}d\lambda_{2n},\ f \in \mathcal{H}$$

2.6.2. Bổ đề. *Với mỗi $j \ge 1$ dạng tuyến tính liên tục $h_j': \mathcal{H}_\Omega \to \mathbb{C}$ có một thác triển duy nhất thành dạng tuyến tính liên tục h_j' trên mỗi không gian* $\mathcal{O}(D_r)(0 < r \le 1)$, *thỏa mãn các ước lượng sau:*

Với bất kỳ $0 < t < s < r \le 1$, tồn tại một hằng số $C(t,s) > 0$ sao cho:

$$\left|h_j^*(f)\right| \le C(t;s)\,t^{-p_j}\left(\int_{D_s}|f|^2 d\lambda_{2n}\right)^{1/2}, \forall j \ge 1, \forall f \in \mathcal{O}(D_r).$$

Chứng minh: Giả sử $f \in \mathcal{H}_\Omega$, ta viết $f = f_j + g_j$, trong đó $f_j, g_j \in \mathcal{H}$, với $g_j \in \mathcal{H}_{q_j}$, và $\|f_j\|$ nhỏ tùy ý.

Cố định một hàm χ lớp C^∞ với giá compact trong D sao cho $\chi \equiv 1$ trên D_r, với giá trong D_s và $0 \le \chi \le 1$. Ta sẽ xây dựng các hàm: theo cách sau: $f_j = \chi f - u_j, g_j = f - f_j$, trong đó u_j cần tìm thỏa mãn những điều kiện thích hợp.

Để làm điều đó, ta áp dụng tiêu chuẩn L^2- ước lượng của Hormander ([Hor]) với trọng số $\psi_j = \Omega + (2\theta_j + 2)G_D(.;\varphi)$. Với mỗi $j \in \mathbb{N}^*$, tồn tại một hàm u_j lớp C^∞ trên D sao cho:

$$\bar\partial u_j = \bar\partial(\chi f) = f\bar\partial\chi \qquad \text{trên } D$$

thỏa mãn ước lượng sau:

$$\int_D \frac{|u_j|^2 e^{-\psi_j}}{(1+|z|^2)^2} d\lambda_{2n} \le \int_D |f\bar\partial\chi|^2 e^{-\psi_j} d\lambda_{2n}. \tag{2.22}$$

Vì $supp(\bar\partial\chi) \subset D_s / D_t$ và $e^{\psi_j} \ge t^{2\theta_j+2}e^{\Omega}$ trên $D \setminus D_t$, từ (2.22) suy ra ta có:

$$\int_D |u_j|^2 \frac{e^{-\psi_j}}{(1+|z|^2)^2} \le (C_1(t,s))^2 t^{-2\theta_j-2} \int_{D_s} |f|^2 e^{-\Omega} d\lambda_{2n}, \tag{2.23}$$

trong đó $C_1(t,s)$ là một hằng số chỉ phụ thuộc vào t và s

Hơn nữa, từ $\bar\partial u_j = \bar\partial(\chi f) = f\bar\partial\chi$ trên D suy ra a_j là chỉnh hình trên D_t. Giả sử $a \in D_t$ và $r > 0$ sao cho $\bar B(a,2r) \subset D_t$. Khi đó theo bất đẳng thức giá trị trung bình, với $|z - a| = r$ ta có:

$$|u_j(z)|^2 \le \frac{1}{\omega_{2n} r^{2n}} \int_{B(z,r)} |u_j|^2 d\lambda_{2n} \le \frac{\sup_{\bar B(a,2r)} e^{\psi_j}}{\omega_{2n} r^{2n}} \int_{D_s} |u_j|^2 e^{-\psi_j} d\lambda_{2n}. \tag{2.24}$$

Theo (2.22) và (2.24) ta có:

(2.25) $$\sup_{|z-a|=r} \log\left|u_j(z)\right|^2 \le -2n\log r + \sup \psi_j(B(a,2r)) + O(1)$$

trong đó $O(1)$ ký hiệu là hằng số độc lập với r. Nhờ có các tính chất của hàm Green đã được thiết lập trong phần 2, từ (2.25) ta có các ước lượng sau:

(2.26) $n\left(\log\left|u_j\right|;a\right) \ge \left(q_j+1\right)n(\varphi;a) - n > q_j n(\varphi;a) - n, \forall a \in A_{q_j}, \forall j \in \mathbb{N}^*$

Bây giờ xét các hàm sau:

$$f_j = cf - u_j$$

$$g_j = f - f_j = (1-c)f + u_j.$$

Khi đó do $\bar\partial u_j = \bar\partial(cf) = f\bar\partial c$ trên D, f_j, g_j là những hàm chỉnh hình trên D và theo (2.23), $f_j, g_j \in \mathcal{H}_{\tilde\Omega}$. Hơn nữa, vì $g_j = u_j$ trên D_r nên từ (2.26) suy ra $g_j \in \mathcal{H}q_j$. Như vậy $h_j \in \hat{\mathcal{H}}_{g_j}$, ta có đồng nhất sau đây:

(2.27) $$h_j'(f) = \int_D (f-g_j)\overline{h_j}e^{-\tilde\Omega}d\lambda_{2n} = \int_D f_j\overline{h_j}e^{-\tilde\Omega}d\lambda_{2n}.$$

Ta sẽ ước lượng $f_j = cf - u_j$. Áp dụng bất đẳng thức Minkowski's và ước lượng (2.23), ta được:

(2.28)

$$\left(\int_D \left|f_j\right|^2 e^{-\tilde\Omega}d\lambda_{2n}\right)^{1/2} \le \left(\int_{D_\sigma}|f|^2 e^{-\tilde\Omega}d\lambda_{2n}\right)^{1/2} + C_1\tau^{-q_j}\left(\int_{D_\sigma}|f|^2 e^{-\tilde\Omega}d\lambda_{2n}\right)$$

$$\le (1+C_1)\tau^{-q_j}\left(\int_{D\sigma}|f|^2 e^{-\tilde\Omega}\right)^{1/2}d\lambda_{2n},$$

trong đó $C_1 = C_1(\tau,\sigma)$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào (τ,σ). Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho (2.27) và theo (2.28), cuối cùng ta được ước lượng:

$$(2.29)\qquad \left|h'_j(f)\right| \le C_2 \tau^{-\theta_j}\left(\int_{D_\sigma} |f|^2 e^{-\tilde{\Omega}}\right)^{1/2},\ \forall f \in O\left(D_\rho\right), \forall j \in \mathbb{N}^*,$$

trong đó $C_2 = C_2(\tau,\sigma)$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào (τ,σ).

Ước lượng (2.29) đã chứng minh rằng h'_j là dạng tuyến tính liên tục trên H_Ω với tô pô sinh bởi tô pô của $\mathrm{O}(D_\rho)$. Vì H_Ω là không gian con trù mật của $\mathrm{O}(D_\rho)$, nên suy ra h'_j có thể được thác triển duy nhất thành dạng tuyến tính liên tục trên $\mathrm{O}(D_\rho)$ sao cho nếu $0 < \rho_1 < \rho_2 \le 1$, thì thác triển toán tử lên $\mathrm{O}(D_{\rho_1})$ cảm sinh trên $\mathrm{O}(D_{\rho_2})$ một toán tử giống như thác triển lên $\mathrm{O}(D_{\rho_2})$. Giả sử ký hiệu h_j^* là sự mở rộng nêu trên. Khi đó từ (2.29) dễ thấy h_j^* vẫn thỏa mãn các ước lượng giống như h'_j. Bổ đề được chứng minh. $\square$

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh kết quả chính của phần này.

2.6.3. Định lý. *Hệ Bergman* $\{h_j; j \ge 1\}$ *là một cơ sở trực chuẩn của không gian Hilbert* H_Ω *sao cho hệ song trực giao* $\{h_j; h_j^*\}_{j \ge 1}$ *là một cơ sở Schauder thông thường trong mỗi không gian Frechet* $\mathrm{O}(D_\rho)$ $(0 < \rho \le 1)$ *thỏa mãn các tính chất sau:*

1. *Tính chất nội suy* :

Giả sử $\rho \in (0,1]$ *và* $f \in O(D_\rho)$, *khi đó với mỗi* $j \in \mathbb{N}^*$ *hiệu* $f - \sum_{i=1}^{j} h_i^*(f) h_i$ *bị triệt tiêu tại mỗi điểm* $x \in A_{\rho_j}$ *ở bậc* $n_{\rho_j}(x)$.

2. *Tính chất xấp xỉ*

Giả sử $\rho \in (0,1]$ *và* $f \in O(D_\rho)$, *khi đó tính chất xấp xỉ tiệm cận sau xảy ra:*

$$\lim_{j\to+\infty}\sup\left(\left\|f-\sum_{i=1}^{j}h_i^*(f)h_i\right\|_{\overline{D}_\sigma}\right)^{1/\rho_j}\le\frac{\sigma}{\rho},\ \forall\sigma\in(0,1).$$

3. *Dáng điệu tiệm cận* :

$$\lim_{j\to+\infty}\left(\left|h_j\right|_{\overline{D}_\sigma}\right)^{1/\rho_j}=\sigma,\ \forall\sigma\in(0,1).$$

4. *Tính chất đẳng cấu:*

Nếu $\rho\in\left(0,1\right]$ *và* $\left\{c_j\right\}_{j\ge 1}$ *là một dãy các số phức, thì ta có:*

$$\sum_{j=1}^{+\infty}c_jh_j\ \textit{hội tụ trong}\ \mathcal{O}(D_\rho)\Leftrightarrow\ \lim_{j\to+\infty}\sup\left|c_j\right|^{1/\rho_j}\le\frac{1}{\rho}.$$

Chứng minh : Trước tiên chú ý rằng nếu $f\in\mathcal{H}_\Omega$, ta có khai triển sau:

$$f=\sum_{j=1}^{+\infty}h_j'(f)h_j\ \text{trong}\ \mathcal{O}(D).\qquad(2.30)$$

Thật vậy, theo Bổ đề 2.6.1, đồng nhất (2.30) được thỏa mãn trong không gian $\mathcal{H}_\Omega$. Do $\|f\|_E^2\le\dfrac{1}{\omega_{2\alpha}\rho^{2\alpha}}\displaystyle\int_{E_\rho}|f|^2d\lambda_{2n}\le C(\rho)^2\|f\|^2$ nên bao hàm chính tắc $\mathcal{H}_\Omega\to\mathcal{O}(D)$ là tuyến tính liên tục, do đó (2.30) xảy ra trong $\mathcal{O}(D)$.

Bây giờ, cố định $\rho\in\left(0,1\right)$. Giả sử $E\Subset D_\rho$ và chọn

$$0<\delta<\tau<\sigma<\rho\ \text{sao cho}\ E\Subset D_\delta.$$

Khi đó theo (2.19) và Bổ đề Hartogs cổ điển, tồn tại một hằng số $M=M(E,\delta)>0$ sao cho:

$$\left\|h_j\right\|_E=\sup_{z\in E}\left|h_j(z)\right|\le M\delta^{\rho_j},\ \forall j\ge 1.$$

Ước lượng này kết hợp với các ước lượng $p_j\le q_j\le p_j+k,\forall j\ge 1$ và (2.23) kéo theo:

(2.31). $\quad \left|h_j^*(f)\right| . \left\|h_j\right\|_E \leq MC(t,s)\dfrac{d^{r_j}}{t^{r_j}}\left(\int_{D_s} |f|^2 d\lambda_{2n}\right)^{\frac{1}{2}}, \forall f \in \mathcal{O}(D_r), \forall j \geq 1.$

Ước lượng (2.31) chỉ ra rằng với mỗi $f \in \mathcal{O}(D_r)$, chuỗi $\sum h_j^*(f)h_j$ hội tụ trên mỗi tập con compact của D_r tới một hàm chỉnh hình trên D_r, mà ta sẽ ký hiệu là $T(f)$. Theo Bổ đề 2.6.2 và Định lý Banach - Steinhauss, toán tử tuyến tính $T : \mathcal{O}(D_r) \to \mathcal{O}(D_r)$ là liên tục trên không gian $\mathcal{O}(D_r)$.

Theo (2.30) ta có $T(f) = f$ nếu $f \in \mathcal{H}_W$. Vì theo Bổ đề 2.5.1, $\mathcal{H}_W$ là trù mật trong $\mathcal{O}(D_r)$, nên ta có:

(2.32). $$f = \sum_{j=1}^{+\infty} h_j^*(f)h_j \quad \text{trong } \mathcal{O}(D_r).$$

Điều này đã chứng minh rằng hệ song trực giao $\left\{(h_j, h_j^*)\right\}_{j \geq 1}$ là một cơ sở Schauder của không gian $\mathcal{O}(D_r)(0 < r \leq 1)$.

Khi đó tính chất nội suy được suy ra từ (2.32) và $h_j \in \mathcal{H}_{p_j} \cap \widehat{\mathcal{H}}_{q_j}, \ \forall j \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh tính chất 2. Giả sử $r \in (0,1)$ cố định, $q \in (0,r)$ và $f \in O(D_r)$. Theo chứng minh phần trước ta có (2.32) xảy ra.

Chọn d, t, s sao cho $0 < q < d < t < s < r$. Khi đó áp dụng (2.31) với $E = \overline{D_q}$, ta được:

(2.33) $$\left\|f - \sum_{j=1}^{k} h_j^*(f)h_j\right\|_{\overline{D}_q} \leq \sum_{j=k+1}^{+\infty} \left|h_j^*(f)\right| \left\|h_j\right\|_{\overline{D}_q}$$

$$\leq C'\|f\|_{\overline{D_s}} \sum_{j=k+1}^{+\infty} (d/t)^{r_j}, \forall k \in \mathbb{N}$$

trong đó C' là một hằng số không phụ thuộc k. Khi đó từ (2.33) với $0 < q < d < t < r$, suy ra ta có ước lượng sau:

$$\lim_{k\to+\infty}\sup\left(\left\|f-\sum_{j=1}^{k}h_j^*(f)h_j\right\|_{\overline{D}_q}\right)^{1/r_k} \le \frac{d}{t}.$$

Cho d tiến tới q và t tiến tới r trong bất đẳng thức trên, ta được ước lượng trong tính chất 2 của định lý.

Chứng minh tính chất 3: Ước lượng (2.19) của Bổ đề 2.6.1 và Bổ đề Hartogs kéo theo bất đẳng thức sau:

$$\text{(2.34)}\qquad \lim_{j\to+\infty}\sup\left(\left\|h_j\right\|_{\overline{D}_r}\right)^{1/r_j} \le r,\ \forall r \in [0,1].$$

Mặt khác vì $h_j^*(h_j) = 1$ với $j \ge 1$ bất kỳ, nên từ ước lượng (2.23) của Bổ đề 2.6.1 suy ra rằng nếu $0 < t < r < 1$, thì ta có :

$$1 \le C'(t,r)t^{-p_j}\left\|h_j\right\|_{\overline{D}_r},\ \forall j \ge 1,$$

điều này kéo theo bất đẳng thức sau xảy ra:

$$\text{(2.35)}\qquad \lim_{j\to+\infty}\inf\left(\left\|h_j\right\|_{\overline{D}_r}\right)^{1/r_j} \ge t,\ \forall t \in [0,r].$$

Ước lượng (2.34) và (2.35) kéo theo ước lượng tính chất 3 của Định lý.

Chứng minh tính chất 4: Cho $\{c_j\}_{j\ge 1}$ là một dãy trong $\mathbb{C}$ và $r \in \left(0,1\right]$. Giả sử chuỗi $\sum c_jh_j$ hội tụ trong $\mathcal{O}(D_r)$ tới $f \in \mathcal{O}(D_r)$, khi đó ta có $c_j = h_j^*(f)$ với $j \ge 1$. Như vậy ước lượng cần tìm được suy ra từ (2.11). Phần đảo được suy trực tiếp từ ước lượng của tính chất 3. Định lý được chứng minh. $\blacksquare$

2.6.4. Hệ quả. *Hệ trực chuẩn Bergman $\{h_j\}_{j\ge 1}$ thỏa mãn ước lượng tiệm cận sau :*

$$G_D(z;\varphi) = (\lim_{j\to+\infty}\sup\frac{1}{p_j}\log|h_j|)^*(z),\ \forall z\in D.$$

Chứng minh: Bất đẳng thức $G_D(z;\varphi) \geq (\lim_{j\to+\infty}\sup\frac{1}{p_j}\log|h_j|)^*(z),\ \forall z\in D.$ suy ra từ Bổ đề 2.6.1. Ta chứng minh bất đẳng thức ngược lại:

$$G_D(z;\varphi) \leq (\lim_{j\to+\infty}\sup\frac{1}{p_j}\log|h_j|)^*(z),\ \forall z\in D.$$

Giả sử rằng với điểm $a\in D$ nào đó bất đẳng thức sau cùng không thoả mãn . Khi đó theo tính nửa liên tục trên, tồn tại một hình cầu $B(a,2r)\subset D$ sao cho:

$$\lim_{j\to+\infty}\sup(\frac{1}{p_j}\log|h_j(z)|) < \log r = G_D(a;\varphi),\ \forall z\in B(a,2r).$$

Theo Bổ đề Hartogs, ta có ước lượng sau :

$$(2.36)\qquad \lim_{j\to+\infty}\sup\left(\|h_j\|_{B(a,r)}\right)^{\frac{1}{p_j}} < r\ .$$

Giả sử $f\in\mathcal{O}(D_r)$. Theo Định lý 2.6.3, chúng ta có thể khai triển hàm này thành chuỗi như sau :

$$(2.37)\qquad f = \sum_{j=1}^{+\infty} h_j^*(f).h_j \quad \text{trong } \mathcal{O}(D_r).$$

Theo ước lượng (2.23) và (2.36), chuỗi $\sum h_j^*(f)h_j$ này hội tụ đều trên mỗi tập compact của $D_r\cup B(a,r)$ và xác định một hàm chỉnh hình thác triển f theo (2.37). Vì $B(a,r)\not\subset D_r$, nên điều này mâu thuẫn với D_r là một miền chỉnh hình ([Hor]). $\square$

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày:

- Những tính chất quan trọng về hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên không gian parabolic.
- Các kết quả nghiên cứu về hàm Green đa phức với cực tại vô cùng trên đa tạp con đại số và hàm Green đa phức với cực logarit trên đa tạp siêu lồi.
- Mở rộng một vài dạng cổ điển của lý thuyết đa thế vị trong £^{N} cho trường hợp của đa tạp con đại số X của £^{N}. Chứng minh một vài bất đẳng thức đa thức đã biết giống như bất đẳng thức Bernstein – Markov và sử dụng chúng để trình bày một phép chứng minh tiêu chuẩn địa phương Sadullaev về tính đại số của đa tạp con giải tích.
- Áp dụng các kết quả đạt được để xấp xỉ các hàm chỉnh hình:

  + Chứng minh định lý Berstein- Walsh về xấp xỉ đa thức tốt nhất của các hàm chỉnh hình trên một tập con compact không đa cực K của đa tạp X và sử dụng nó để nghiên cứu các đa thức trực chuẩn.

  + Sử dụng hàm đa phức Green với cực logarit đa trọng trên một đa tạp siêu lồi D để xây dựng hệ trực chuẩn Bergman trong không gian trọng Bergman nào đó. Chỉ ra rằng hệ trực chuẩn này cho một kết quả chính xác của phép xấp xỉ nội suy đối với các hàm chỉnh hình trên D. Đặc biệt, chúng tôi nhận được một sự mở rộng cho trường hợp đa phức về một kết quả cổ điển của Kadampata và Zahariuta.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[Bd] **E. Bedford**. ,*The $(dd^c)^n$on complex spaces with singularities*, Lecture Notes in Math, Seminaire P.Lelong-H.Skoda 919(1980-81),293-324.

[Dm1] **J.P. Demailly**, *Mesures de Monge-Ampère et Caractérisation des Varíetés Algébriques Affines*, Mémoires de la Sociéte Mathématique de France 19 (1985).1-125.

[Dm2] **J.P. Demailly**, *Mesures de Monge-Ampère et Mesures Pluriharmomques*, Math. Zeit. 194 (1987), 519-664.

[Dm3] **J.P. Demaily**, *Potential Theory in Several Complex Variables*, "JCPAM Summer School on Complex Analysis," Nice France, 1989.

[Hor] **L. Hormander**, *Introduction to Complex Analysis in Several Variables* North Holland. Amsterdam, 1973.

[Kl1] **M. Klimek**, *Extremal Plurisubharmonic Functions and Invariant Pseudodistances*, Bull. Soc. Math. de Fance 113 (1985), 231-240.

[Kl2] **M. Klimek**, *Pluripotential Theory*, Oxford University Press, Londre, 1991.

[Ks] **C.O. Kiselman**, *Densité des Fonctions Plurisousharmoniques*, Bull. Soc. Math. de Fance 107 (1979), 295-304.

[Ll] **P. Lelong**, *fonction de Green Pluricomplexe et Lemmes de Schwarz daus les Espaces de Banach*, J. Math. Pures et Appl. 68 (1989).319-347.

[Lv] **N.Levenberg**, *Monge-Ampère Measures Associated to Extrernal Plurisubharnonic Func-tions in C^n*, Trans. Amer. Math. Soc. 289 (1985),333-343.

[Ng] **T.V. Nguyen**, *Bases Polynomiales Scmi- simples àe Espace H(K*), Lecture Notes in Math. 789 (1980), 370-383.

[Ng-Zr] **T.V. Nguyen and A. Zeriahi**, *Familles de Polynomes Presque Partout Bornées*, Bull. Sci. Math . 2^{eme} série vol 179 (1983). 81-91.

[Rd] **W. Rudin**, *A Gcometric Criteram for Algbraic Varieties*, Jour. Math. Meca. 17, 7 (1968).671-683.

[Sc1] **J. Siciak**, *Extremal Plurisubharmonic Functions and Capacities in* $£^N$. Sophia Kokyurokn in Math 14 (1982), 1-97.

[Sc2] **J. Siciak**, *Families of Polynomials and Determining Measures,* Ann. Fac. Sc. de Toulouse IX, 2 (1988), 193-211.

[Sd] **A. Sadullaev**, *A criterium for the Algebraicity of Analytic Sets,* On Holomorphic Functions of Several Complex Variables, Inst. Fiz. Sibirsk. Odtel. Akad. Nauk. SSSR(1976). 107-122 (Russian).

[Ste] **J.L. Stehle**, *Fonctions Plurisousharmoniques et Convexité Holomorphe de ceriavns Fibrés tques*, Lecture Notes in Math. Séminaire P. Lelong 474(1973/74), 155-179.

[Su] **Y.T. Siu**, *Analyticily of Sets Associated to Lelong Numbers and the Extension of Closed Positve Currenis, Invent*. Math. 27(1974), 53-156.

[Zh] **V.P. Zahariuta**, *Spaces of Anakylic Functions and Complex Potential Theory,* Linear Topological Spaces and Complex Analysis, Metu-Tubitak (Ankara,Turkey)1 (1994), 1-13.

[Zr] **A. Zeriahi**, *Functions de Green Pluricomplexc à Póle I' Infini sur un Espace de Stein Parabolique,* Math. Scand. 69 (1991), 89-126.