VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

THÁI DOÃN CHƯƠNG

HÀM GIÁ TRỊ TỐI ƯU VÀ ÁNH XẠ NGHIỆM HỮU HIỆU TRONG CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU VÉCTƠ CÓ THAM SỐ

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2011

VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

THÁI DOÃN CHƯƠNG

HÀM GIÁ TRỊ TỐI ƯU VÀ ÁNH XẠ NGHIỆM HỮU HIỆU TRONG CÁC BÀI TOÁN TỐI ƯU VÉCTƠ CÓ THAM SỐ

Chuyên ngành: Lý thuyết tối ưu
Mã số: 62 46 20 01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
1. GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên
2. TS. Nguyễn Quang Huy

HÀ NỘI - 2011

Lời cam đoan

Luận án này được hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên và TS. Nguyễn Quang Huy.

Kỹ thuật lập luận nhằm xử lý trường hợp tập ràng buộc không bị chặn trong chứng minh kết quả chính của bài báo [13] thuộc về TS. Nguyễn Quang Huy. Tôi đã sử dụng kỹ thuật này để chứng minh Định lý 2.2.1. Các lập luận chứng minh khác trong luận án đều là của tôi.

Các kết quả trong luận án này là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học nào của ai khác.

Tác giả luận án

Thái Doãn Chương

TÓM TẮT

Luận án này trình bày một số kết quả mới về tính ổn định nghiệm và độ nhạy nghiệm của các bài toán tối ưu véctơ có tham số. Luận án có 4 chương. Hai chương đầu nghiên cứu tính ổn định nghiệm của các bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn. Hai chương sau khảo sát độ nhạy nghiệm của một số bài toán tối ưu véctơ dạng tổng quát.

Chương 1 nghiên cứu các điều kiện cần và đủ cho tính chất nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn.

Chương 2 thiết lập điều kiện đủ cho tính chất giả-Lipschitz của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi.

Chương 3 đưa ra các công thức tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu cho bài toán tối ưu véctơ trong các trường hợp sau: a) bài toán không có ràng buộc, b) bài toán có ràng buộc tổng quát, c) bài toán tối ưu nửa vô hạn.

Chương 4 thiết lập các công thức tính đối đạo hàm Fréchet của hàm giá trị tối ưu trong các bài toán tối ưu véctơ thuộc các dạng sau: a) bài toán có tập ràng buộc được xác định bởi một ánh xạ đa trị, b) bài toán có ràng buộc toán tử, c) bài toán có tập ràng buộc được mô tả bởi hữu hạn hoặc vô hạn các hàm số thực.

ABSTRACT

This thesis presents some new results on stability analysis and sensitivity analysis in parametric vector optimization problems. The thesis consists of four chapters. The first two chapters of the thesis deal with the stability analysis of semi-infinite vector optimization problems. The last two chapters of the thesis investigate the sensitivity analysis of some general vector optimization problems.

Chapter 1 studies necessary and sufficient conditions for the lower and upper semicontinuity properties of efficient solution maps in semi-infinite vector optimization problems.

Chapter 2 establishes sufficient conditions for the pseudo-Lipschitz property of efficient solution maps in convex semi-infinite vector optimization problems.

Chapter 3 gives formulae for computing the generalized Clarke epiderivative of marginal functions in vector optimization problems in the following cases: a) unconstrained problems, b) general constrained problems, c) semi-infinite optimization problems.

Chapter 4 establishes formulae for computing the Fréchet coderivative of marginal functions in vector optimization problems in the following cases: a) the constraint set is defined by a multifunction, b) operator constraints are included, c) the constraint set is defined by an arbitrary (possibly infinite) number of real functions.

Mục lục

MỘT SỐ KÝ HIỆU

$F : X \rightrightarrows Y$	ánh xạ đa trị từ X vào Y
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều
$\mathbb{R}^n_+$	tập các véctơ không âm của $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^n_-$	tập các véctơ không dương của $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$	tập các số thực suy rộng
X^*	không gian đối ngẫu tôpô của không gian X
$\langle x^*, x\rangle$	cặp đối ngẫu giữa X^* và X
$\|x\|$	chuẩn của véctơ x
$\|x\|_n$	chuẩn của véctơ x trong không gian $\mathbb{R}^n$
$\lvert x\rvert$	giá trị tuyệt đối của $x \in \mathbb{R}$
B_X	hình cầu đơn vị đóng trong X
$B_\rho(x)$	hình cầu mở tâm $x \in X$ bán kính ρ trong X
$\{x_i\}$, $\{x_i\}_{i=1}^\infty$	dãy số thực, hoặc dãy véctơ
$\emptyset$	tập rỗng
0	số 0, hoặc véctơ 0 trong không gian véctơ cho trước
0_X	véctơ 0 trong không gian X
0_n	véctơ 0 trong không gian $\mathbb{R}^n$
$A \subset B$	A là tập con của B
$A \not\subseteq B$	A không là tập con của B
$A \cap B$	giao của hai tập hợp A và B
$A \cup B$	hợp của hai tập hợp A và B
$A \times B$	tích Descartes của hai tập hợp A và B
$\exists x$	tồn tại x
$\forall x$	với mọi x
$A \setminus B$	hiệu của hai tập hợp A và B
$A + B$	tổng véctơ của hai tập hợp A và B
$\mathrm{cl}A$	bao đóng tôpô của tập A
$\mathrm{int}A$	phần trong tôpô của tập A
$\mathrm{co}(M)$	bao lồi của tập M
$\mathrm{cone}(M)$	bao nón lồi của tập M
$\mathrm{argmin}\{f(x) \mid x \in \Omega\}$	tập nghiệm của bài toán tối ưu vô hướng

$CO_K[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m]$	tập hợp tất cả các hàm véctơ K-lồi từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$
$C[\Omega, \mathbb{R}^n]$	tập hợp tất cả các hàm véctơ liên tục từ Ω vào $\mathbb{R}^n$
$E(A\|K)$	tập các điểm hữu hiệu của tập A đối với nón K
$T^C(A; x)$	nón tiếp tuyến Clarke của A tại x
$T^B(A; x)$	nón tiếp tuyến Bouligand của A tại x
$\widehat{N}(x; A)$	nón pháp tuyến Fréchet của A tại x
$\nabla f(x)$	đạo hàm Fréchet của f tại x
$\partial f(x)$	dưới vi phân Mordukhovich (= dưới vi phân của hàm lồi) của hàm f tại x
$\widehat{\partial} f(x)$	dưới vi phân Fréchet của hàm f tại x
$D^C F(x, y)$	đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của F tại (x, y)
$\widehat{D}^* F(x, y)$	đối đạo hàm Fréchet của F tại (x, y)
$A := B$	A được định nghĩa bằng B
$\square$	kết thúc chứng minh

Mở đầu

Bài toán tối ưu véctơ dạng chuẩn là bài toán tìm cực trị một hàm $f : X \to Y$, ở đó X và Y là các không gian véctơ tôpô, dưới một số ràng buộc. Khái niệm cực trị ở đây được xác định theo một thứ tự bộ phận trong không gian Y. Thứ tự này thường được định nghĩa qua một nón lồi $K \subset Y$: $y_1 \preceq_K y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in K$. Như vậy, bài toán tối ưu véctơ là sự mở rộng của bài toán quy hoạch toán học, ở đó $Y = \mathbb{R}$ và $K = \mathbb{R}_+$.

Tối ưu véctơ (Vector optimization) ra đời vào cuối thế kỷ 19, với khái niệm nghiệm được đề xuất bởi F. Y. Edgeworth (1881) và V. Pareto (1896). Mô hình bài toán tối ưu véctơ cho phép nghiên cứu một số vấn đề về phúc lợi xã hội (social welfare) và cân bằng kinh tế (economic equilibrium). Ngoài ra, mô hình này cũng hữu ích trong việc giải quyết những bài toán ra quyết định chứa đựng nhiều lợi ích không tương thích hoặc đối kháng thường gặp trong các vấn đề liên quan đến thiết kế kĩ thuật, môi trường, tài chính,... Tối ưu véctơ là một bộ phận quan trọng của Lý thuyết tối ưu (Optimization theory). Tối ưu véctơ xuất hiện như một chuyên ngành toán học độc lập sau bài báo của H. W. Kuhn và A. W. Tucker (1951) về các điều kiện cần và đủ cho một véctơ thỏa các ràng buộc là nghiệm hữu hiệu. Đến nay, đã có rất nhiều cuốn sách chuyên khảo về Tối ưu véctơ và ứng dụng: Ehrgott [21], Jahn [28], Luc [34], Sawaragi, Nakayama và Tanino [46], Steuer [48], Zeleny [54],...

Ở Việt Nam, tính đến nay, Tối ưu véctơ được quan tâm nghiên cứu đã hơn 30 năm. Các tác giả sau đây đã có nhiều đóng góp cho lý thuyết này: TS. Lâm Quốc Anh, TS. Trương Quang Bảo, PGS. TS. Nguyễn Định, PGS. TS. Trương Xuân Đức Hà, TS. Nguyễn Xuân Hải, TS. Trần Ninh Hoa, TS. Nguyễn Quang Huy, GS. TSKH. Phan Quốc Khánh, PGS. TS. Nguyễn Thị Bạch Kim, GS. TSKH. Đinh Thế Lục, TS. Lê Minh Lưu, PGS. TS. Nguyễn Bá Minh, GS. TSKH. Lê Dũng Mưu, PGS. TS. Trần Huệ Nương, PGS. TS. Tạ Duy Phượng, GS. TSKH. Phạm Hữu Sách, PGS. TS. Phạm Tiến Sơn, GS. TSKH. Nguyễn Xuân Tấn, TS. Phan Thiên Thạch, PGS. TS. Phan Nhật Tĩnh, TS. Nguyễn Đình Tuấn, TS. Hoàng Quang Tuyến, PGS. TSKH. Hà Huy Vui, GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên,...

Bên cạnh sự tồn tại nghiệm, điều cần và đủ cực trị, tính chất của tập nghiệm và các thuật toán tìm nghiệm, *tính ổn định nghiệm* (solution stability/stability analysis) và *độ nhạy nghiệm* (solution sensitivity/sensitivity analysis) là những vấn đề cơ bản của lý thuyết Tối ưu véctơ và ứng dụng.

Nghiên cứu tính ổn định nghiệm tức là khảo sát các tính chất liên tục của ánh xạ nghiệm hữu hiệu hoặc hàm giá trị tối ưu theo tham số của bài toán đã cho, như tính nửa liên tục trên, tính nửa liên tục dưới, tính giả-Lipschitz, tính Lipschitz, và tính liên tục Hölder,... Những kết quả đầu tiên theo hướng này thuộc về Naccache [41], Tanino và Sawaragi [51]. Một số kết quả tổng quát hơn về tính ổn định nghiệm của các bài toán tối ưu véctơ có trong các cuốn sách chuyên khảo của Luc và của Sawaragi, Nakayama và Tanino vừa được trích dẫn ở trên. Tính liên tục Lipschitz-Hölder của ánh xạ nghiệm trong các bài toán tối ưu véctơ lồi mạnh phụ thuộc tham số đã được khảo sát lần đầu tiên trong bài báo của Lee, Kim, Lee và Yen [32].

Phân tích độ nhạy nghiệm trong Tối ưu véctơ có nghĩa là tính toán đạo hàm (theo nghĩa cổ điển hoặc theo nghĩa suy rộng), đối đạo hàm (đối đạo hàm Fréchet, đối đạo hàm Mordukhovich,...) của ánh xạ nghiệm hữu hiệu hoặc hàm giá trị tối ưu của các bài toán phụ thuộc tham số. Đôi khi, người ta cũng coi các kết quả về tính liên tục của ánh xạ nghiệm như các kết quả thuộc vào chủ đề phân tích độ nhạy nghiệm. Ngoài ra, cũng cần nói thêm rằng một số kết quả về tính khả vi hay các đánh giá vi phân của hàm giá trị tối ưu được trình bày dưới tiêu đề "tính ổn định vi phân" (differential stability) của bài toán được xét. Tanino [49,50] đã phân tích dáng điệu của hàm giá trị tối ưu bằng cách sử dụng "đạo hàm tiếp liên" (contingent derivative). Người ta cũng đã nghiên cứu độ nhạy nghiệm bằng các loại đạo hàm suy rộng khác: Bednarczuk và Song [3], và mới đây là Song và Wan [47], đã sử dụng "đạo hàm tiếp liên trên-đồ-thị suy rộng" (generalized contingent epiderivative); Lee và Huy [31] sử dụng "tiền đạo hàm" (proto-derivative). Mỗi loại đạo hàm suy rộng đều được xây dựng qua những nón tiếp tuyến nào đó của đồ thị của ánh xạ đa trị tại điểm đang khảo sát: đạo hàm tiếp liên được xây dựng qua nón tiếp tuyến Bouligand, tiền đạo hàm được xây dựng qua nón tiếp tuyến Bouligand và nón tiếp tuyến trung gian... Phương pháp nghiên cứu sử dụng các đạo hàm suy rộng thường được gọi là *phương pháp tiếp cận bằng không gian nền* (the primal space approach). Sử dụng nón pháp tuyến tại một điểm cho trước trên đồ thị của ánh xạ đa trị, Mordukhovich [35] đã xây dựng khái niệm *đối đạo hàm* (coderivative) - đó là một ánh xạ đa trị giữa các không gian đối ngẫu. Phương pháp nghiên cứu sử dụng đối đạo hàm được gọi là *phương pháp tiếp cận bằng không gian đối ngẫu* (the dual space approach). Trong nhiều tình huống mà ở đó nón pháp tuyến (không nhất thiết phải là nón lồi) không là đối ngẫu của bất cứ loại nón tiếp tuyến nào, phương pháp tiếp cận bằng không gian đối ngẫu thường chiếm ưu thế hơn phương pháp tiếp cận bằng không gian nền.

Luận án này trình bày một số kết quả mới về tính ổn định nghiệm và độ nhạy nghiệm của các bài toán tối ưu véctơ có tham số. Luận án bao gồm phần mở đầu, 4 chương, phần kết luận, và danh mục tài liệu tham khảo. Hai chương đầu nghiên cứu tính ổn định nghiệm của các bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn. Hai chương sau khảo sát độ nhạy nghiệm của một số bài toán dạng tổng quát.

Chương 1 "Tính nửa liên tục của nghiệm bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn tổng quát" nghiên cứu các tính chất nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn dưới phép nhiễu hàm của hàm mục tiêu và tập ràng buộc. Một bài toán tối ưu có tập ràng buộc được cho bởi một họ (có thể vô hạn) các đẳng thức/bất đẳng thức được gọi là *bài toán tối ưu nửa vô hạn* (a semi-infinite optimization problem), hay còn được gọi là một *quy hoạch nửa vô hạn* (a semi-infinite program). Các bài toán quy hoạch nửa vô hạn xuất hiện trong các mô hình thực tế như điều khiển sự ô nhiễm không khí, phân phối nước từ hệ thống các bể chứa, sản xuất và phân phối điện năng; xem [23, 43]. Tính ổn định nghiệm của bài toán tối ưu nửa vô hạn một mục tiêu đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu (xem [4--7, 18--20, 22--24, 33, 43]..., và các tài liệu được trích dẫn trong đó). Đối với bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn, các kết quả về tính ổn định nghiệm còn khá ít ỏi. Cho đến năm 2008, bài báo của Chen và Craven [9], ở đó các tác giả thu được một vài điều kiện đủ cho tính nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ *nghiệm hữu hiệu địa phương yếu*, là tài liệu duy nhất chúng tôi được biết khi bắt đầu nghiên cứu về vấn đề này. Các kết quả thu được trong Chương 1 phát triển một số kết quả của Xiang và Zhou [52], của Xiang và Yin [53] về tính ổn định nghiệm trong bài toán tối ưu véctơ không có ràng buộc.

Chương 2 "Tính giả-Lipschitz của nghiệm bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi" trình bày các điều kiện đủ để có tính giả-Lipschitz (một tính chất chặt hơn tính nửa liên tục dưới) của ánh xạ nghiệm hữu hiệu dưới phép nhiễu hàm của hàm mục tiêu và phép nhiễu liên tục bên phải của các hàm ràng buộc đối với bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi. Ở đây chúng ta xét lớp bài toán hẹp hơn lớp được xét trong Chương 1 dưới tác động của loại nhiễu đặc biệt hơn: các bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn *lồi* dưới nhiễu hàm của hàm mục tiêu và nhiễu liên tục *bên phải* của các hàm ràng buộc. Nhờ khai thác cấu trúc đặc biệt của lớp bài toán và của phép nhiễu, chúng ta có thể thiết lập các điều kiện đủ cho tính giả-Lipschitz của ánh xạ nghiệm hữu hiệu. Theo hiểu biết của chúng tôi, các kết quả ở Chương 2 là những kết quả đầu tiên về tính giả-Lipschitz của ánh xạ nghiệm hữu hiệu.

Chương 3 "Đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu trong tối ưu véctơ" sử dụng đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng để phân tích độ nhạy nghiệm. Năm 2002, Chen [8] đã sử dụng khái niệm *đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng* (generalized Clarke epiderivative) để thu được các điều kiện tồn tại nghiệm cho tối ưu đa trị. Vì hàm giá trị tối ưu của bài toán tối ưu véctơ phụ thuộc tham số là ánh xạ đa trị, nên ta có thể tìm cách áp dụng khái niệm đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của Chen để phân tích độ nhạy nghiệm trong tối ưu véctơ. Trong Chương 3 chúng ta đưa ra một số công thức để tính chính xác hoặc đánh giá đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu cho bài toán tối ưu véctơ trong các trường hợp sau: a) bài toán không có ràng buộc, b) bài toán có ràng buộc tổng quát, c) bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn.

Chương 4 "Đối đạo hàm Fréchet của hàm giá trị tối ưu trong tối ưu véctơ" khảo sát độ nhạy nghiệm bằng cách sử dụng đối đạo hàm Fréchet. Ý tưởng sử dụng đối đạo hàm để phân tích độ nhạy nghiệm trong tối ưu véctơ đã được thực hiện trong bài báo của Huy, Mordukhovich và Yao [26], ở đó các tác giả đã đánh giá đối đạo hàm Mordukhovich (còn được gọi là đối đạo hàm chuẩn tắc) cho hàm giá trị tối ưu trong các bài toán phụ thuộc tham số. Bên cạnh đối đạo hàm Mordukhovich, đối đạo hàm Fréchet là một khái niệm cơ bản trong Giải tích biến phân và Phép tính vi phân suy rộng. Đối đạo hàm Fréchet là một ánh xạ đa trị có đồ thị lồi đóng. Các quy tắc tính toán đối đạo hàm Fréchet đã được trình bày một cách có hệ thống trong cuốn chuyên khảo [36]. Ở Chương 4, chúng ta nghiên cứu độ nhạy nghiệm của bài toán tối ưu véctơ bằng cách sử dụng đối đạo hàm Fréchet. Các kết quả chính của chương này bao gồm một số công thức tính toán đối đạo hàm Fréchet của hàm giá trị tối ưu trong các bài toán tối ưu véctơ thuộc các dạng sau: a) bài toán có tập ràng buộc được xác định bởi một ánh xạ đa trị, b) bài toán có ràng buộc toán tử, c) bài toán có tập ràng buộc được mô tả bởi hữu hạn hoặc vô hạn các hàm số thực.

Bản thảo đầu tiên của luận án có trình bày các kết quả thu được bởi GS. Jen-Chih Yao, GS. Nguyễn Đông Yên và tác giả luận án [17] về tính nửa liên tục dưới của hàm giá trị tối ưu trong bài toán tối ưu véctơ tổng quát phụ thuộc tham số. Do khuôn khổ của luận án, bản hoàn thiện này không bao gồm các kết quả đó.

Các kết quả của luận án đã được báo cáo tại *Xêmina phòng Giải tích số và Tính toán khoa học* (Viện Toán học), *The 9th International Symposium on Generalized Convexity and Generalized Monotonicity* (Kaohsiung, Taiwan, July 21-25, 2008), *International Symposium on Variational Analysis and Optimization* (Kaohsiung, Taiwan, November 28-30, 2008), *International Symposium on Optimization and Optimal Control* (Kaohsiung, Taiwan, February 2-6, 2009), *The 8th International Spring School and Workshop on Optimization and its Applications* (Nha Trang, Vietnam, March 1-3, 2010), và *CIMPA-UNESCO-VIETNAM SCHOOL, Variational Inequalities and Related Problems* (Hanoi, Vietnam, May 10-21, 2010).

Các kết quả của luận án đã được công bố trong 5 bài báo được đăng ở *Journal of Global Optimization* [11], *European Journal of Operational Research* [13], *Nonlinear Analysis* [14], *Taiwanese Journal of Mathematics* [15], và *Journal of Optimization Theory and Applications* [16].

Luận án này được hoàn thành tại Viện Toán học (Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam). Trong thời gian làm nghiên cứu sinh, nhờ sự giúp đỡ nhiệt tình của GS. J.-C. Yao, tác giả luận án đã có cơ hội đến học tập và nghiên cứu tại Đại học Quốc gia Tôn Trung Sơn (National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Đài Loan) từ tháng 10/2007 đến tháng 10/2009. Tác giả xin chân thành cám ơn GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên, TS. Nguyễn Quang Huy, và GS. Jen-Chih Yao đã tận tình hướng dẫn để có được những kết quả trong luận án này.

Xin chân thành cám ơn GS. Franco Giannessi, GS. Boris Mordukhovich, GS. Xi Yin Zheng, GS. TSKH. Hoàng Xuân Phú, GS. TSKH. Phạm Hữu Sách, PGS. TS. Trần Văn Ân, PGS. TS. Tạ Duy Phượng, PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm, TS. Bùi Trọng Kiên, và các thành viên của phòng Giải tích số và Tính toán khoa học đã giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu.

Tác giả xin được cám ơn PGS. TS. Trương Xuân Đức Hà, PGS. TS. Nguyễn Thị Bạch Kim, và Hội đồng chấm luận án cấp phòng về những nhận xét và những ý kiến bổ ích, giúp hoàn thiện luận án.

Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo Sau đại học, và tập thể cán bộ công nhân viên của Viện Toán học về sự quan tâm giúp đỡ.

Xin chân thành cám ơn Ban lãnh đạo trường Đại học Đồng Tháp và trường Đại học Sài Gòn, các thầy cô giáo và các bạn đồng nghiệp ở Khoa Toán trường Đại học Đồng Tháp và Khoa Toán-Ứng dụng trường Đại học Sài Gòn đã luôn động viên giúp đỡ tác giả.

Xin cám ơn các bạn nghiên cứu sinh, gia đình và bạn bè đã luôn khuyến khích giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Chương 1

Tính nửa liên tục của nghiệm bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn tổng quát

Chương này thiết lập các điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn dưới phép nhiễu hàm của cả hàm mục tiêu và tập ràng buộc.

Mục 1.1 đưa ra một số khái niệm cơ bản, đặc biệt là bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn, và một số ký hiệu cần thiết. Mục 1.2 khảo sát tính nửa liên tục trên/dưới của ánh xạ tập ràng buộc trong bài toán tối ưu véc tơ nửa vô hạn. Mục 1.3 thiết lập các điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véc tơ nửa vô hạn. Mục 1.4 trình bày các điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véc tơ nửa vô hạn.

Chương này được viết trên cơ sở bài báo [11]. Các kết quả chính được trình bày ở đây mở rộng một số kết quả tương ứng của Xiang và Zhou [52], Xiang và Yin [53] về tính ổn định nghiệm của bài toán tối ưu véctơ không có ràng buộc.

1.1 Các ký hiệu và khái niệm cơ bản

Cho Θ là một tập con compắc của một không gian tôpô Hausdorff và cho $C[\Theta, \mathbb{R}^n]$ là không gian các hàm véctơ liên tục từ Θ vào $\mathbb{R}^n$ được trang bị bởi chuẩn

$$||f|| := \max_{x \in \Theta} \|f(x)\|_n \quad \forall f \in C[\Theta, \mathbb{R}^n],$$

ở đó ký hiệu $|| \cdot ||_n$ được dùng để chỉ chuẩn trong không gian Euclide n-chiều $\mathbb{R}^n$. Chuẩn trong không gian tích $X \times Y$ của các không gian định chuẩn X và Y nào đó được định nghĩa bởi

$$||(x, y)|| := ||x|| + ||y|| \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Cho Ω là tập con compắc khác rỗng của một không gian mêtric (X, d) và cho T là tập con compắc khác rỗng của một không gian tôpô Hausdorff nào đó. Bài toán *tối ưu véctơ nửa vô hạn phụ thuộc tham số* (parametric semi-infinite vector optimization), viết tắt là PSVO, được định nghĩa như sau:

Cho không gian tham số $P := C[\Omega, \mathbb{R}^s] \times C[\Omega \times T, \mathbb{R}^m] \times C[T, \mathbb{R}^m]$. Với mỗi tham số $p := (f, g, b) \in P$, ta xét bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn

$$(\mathrm{SVO})_p : \quad \min\nolimits_{\mathbb{R}^s_+} f(x) \quad \text{với ràng buộc} \quad x \in C(p), \tag{1.1.1}$$

ở đây

$$C(p) := \{x \in \Omega \,|\, g(x, t) - b(t) \in -\mathbb{R}^m_+ \quad \forall t \in T\} \tag{1.1.2}$$

là tập ràng buộc và

$$\mathbb{R}^k_+ := \{x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbb{R}^k \,|\, x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, ..., k\}, \quad k = 1, 2, ...$$

ký hiệu cho tập các véctơ không âm của $\mathbb{R}^k$.

Ánh xạ đa trị $C : P \rightrightarrows \Omega$, gán mỗi điểm $p \in P$ với tập $C(p)$ ở trong (1.1.2), được gọi là *ánh xạ tập ràng buộc* của bài toán (PSVO).

Xuyên suốt luận án này, ta ký hiệu phần trong tôpô và bao đóng tôpô của tập con A của một không gian tôpô Y tương ứng là $\mathrm{int}A$ và $\mathrm{cl}A$. Ký hiệu $\mathcal{N}(y)$ được dùng để chỉ tập tất cả các lân cận của $y \in Y$.

Định nghĩa 1.1.1. (i) Ta viết $\bar{x} \in \mathcal{S}(p)$ để chỉ rằng $\bar{x}$ là *nghiệm hữu hiệu* (hay *nghiệm Pareto*) của bài toán $(\mathrm{SVO})_p$ nếu $\bar{x} \in C(p)$ và không tồn tại $x \in C(p)$ thỏa mãn $f(x) - f(\bar{x}) \in -\mathbb{R}^s_+ \backslash \{0_s\}$. Ở đây 0_s là véctơ 0 của $\mathbb{R}^s$. Ánh xạ $\mathcal{S} : P \rightrightarrows \Omega$, gán mỗi điểm $p \in P$ với tập $\mathcal{S}(p)$, được gọi là *ánh xạ nghiệm hữu hiệu* (hay *ánh xạ nghiệm Pareto*) của bài toán (PSVO).

(ii) Ta viết $\bar{x} \in \mathcal{S}^w(p)$ để chỉ rằng $\bar{x}$ là *nghiệm hữu hiệu yếu* (hay *nghiệm Pareto yếu*) của bài toán $(\mathrm{SVO})_p$ nếu $\bar{x} \in C(p)$ và không tồn tại $x \in C(p)$ thỏa mãn $f(x) - f(\bar{x}) \in -\mathrm{int}\mathbb{R}^s_+$. Ánh xạ $\mathcal{S}^w : P \rightrightarrows \Omega$, gán mỗi điểm $p \in P$ với tập $\mathcal{S}^w(p)$, được gọi là *ánh xạ nghiệm hữu hiệu yếu* (hay *ánh xạ nghiệm Pareto yếu*) của bài toán (PSVO).

Cho $F : Y \rightrightarrows Z$ là ánh xạ đa trị giữa các không gian tôpô. Tập hợp $\mathrm{dom}F := \{y \in Y \mid F(y) \neq \emptyset\}$ là miền hữu hiệu của F.

Định nghĩa 1.1.2. Ánh xạ đa trị $F : Y \rightrightarrows Z$ được gọi là

(i) *nửa liên tục trên* tại $y_0 \in Y$ nếu với mọi tập mở $V \subset Z$ thỏa mãn $F(y_0) \subset V$ tồn tại $U \in \mathcal{N}(y_0)$ sao cho $F(y) \subset V$ với mọi $y \in U$.

(ii) *nửa liên tục dưới* tại $y_0 \in \mathrm{dom}\, F$ nếu với mọi tập mở $V \subset Z$ thỏa mãn $V \cap F(y_0) \neq \emptyset$ tồn tại $U \in \mathcal{N}(y_0)$ sao cho $V \cap F(y) \neq \emptyset$ với mọi $y \in U$.

(iii) *liên tục* tại $y_0 \in \mathrm{dom}\, F$ nếu F đồng thời là nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới tại y_0.

Nhận xét 1.1.1. Nếu Y và Z là các không gian mêtric, thì ta có các định nghĩa tương đương về tính nửa liên tục trên/dưới của một ánh xạ đa trị như sau: F là nửa liên tục dưới tại $y_0 \in \operatorname{dom} F$ khi và chỉ khi với bất kỳ $z_0 \in F(y_0)$ và bất kỳ dãy $\{y_i\} \subset \operatorname{dom} F$, $y_i \to y_0$, tồn tại dãy $\{z_i\} \subset Z, z_i \in F(y_i)$ sao cho $z_i \to z_0$ (xem [2, Definition 1.4.2]). F là nửa liên tục trên tại $y_0 \in \operatorname{dom} F$ khi và chỉ khi với bất kỳ dãy $\{y_i\} \subset Y$, $y_i \to y_0$, và bất kỳ dãy $\{z_i\} \subset Z, z_i \in F(y_i) \backslash F(y_0)$ với mọi i, tồn tại dãy $\{z_{i_j}\} \subset \{z_i\}$ thỏa mãn $z_{i_j} \to z_0 \in F(y_0)$ (xem [25, Proposition 2.5.5]).

Để khảo sát tính nửa liên tục trên/dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu $\mathcal{S}$ trong các mục sau, chúng ta cần nhắc lại các tính chất *lồi theo nón* và *tựa lồi chặt theo nón* của một hàm véctơ.

Định nghĩa 1.1.3. (Xem [34, Definition 6.1]) Cho Θ là tập lồi khác rỗng của một không gian véctơ tôpô và cho $f : \Theta \to \mathbb{R}^s$ là một hàm véctơ. Giả sử $K \subset \mathbb{R}^s$ là nón lồi. Ta nói rằng

(i) f là *lồi theo nón* K (hay K*-lồi*) trên Θ nếu với mọi $x_1, x_2 \in \Theta$, với mọi $t \in [0, 1]$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \in tf(x_1) + (1-t)f(x_2) - K,$$

(ii) f là *tựa lồi chặt theo nón* K (hay K*-tựa lồi chặt*) trên Θ, khi $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, nếu với mọi $y \in \mathbb{R}^s$, với mọi $x_1, x_2 \in \Theta, x_1 \neq x_2$, với mọi $t \in (0, 1)$,

$$f(x_1), f(x_2) \in y - K \quad \text{kéo theo} \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \in y - \operatorname{int} K.$$

1.2 Tính liên tục của ánh xạ tập ràng buộc

Mục này khảo sát các tính chất nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ tập ràng buộc $C : P \rightrightarrows \Omega$.

Phát biểu đầu tiên khẳng định rằng ánh xạ tập ràng buộc C luôn luôn nửa liên tục trên tại mọi điểm $p \in \operatorname{dom} C$.

Mệnh đề 1.2.1. *Cho $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in \operatorname{dom} C$. Khi đó ánh xạ tập ràng buộc C là nửa liên tục trên tại p_0.*

Chứng minh. Giả sử $\{p_k := (f_k, g_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset P$ là dãy tùy ý thỏa mãn $p_k \to p_0$ khi $k \to \infty$ và giả sử $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \Omega$ là dãy tùy ý thỏa mãn $x_k \in C(p_k) \setminus C(p_0)$ với mọi $k \in \{1, 2, ...\}$. Do Ω là compắc, bằng cách lấy một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng $x_k \to x_0$ khi $k \to \infty$. Chứng minh sẽ kết thúc nếu chúng ta chỉ ra được rằng $x_0 \in C(p_0)$.

Vì $p_k \to p_0$ khi $k \to \infty$ nên ta có với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại k_0 sao cho $||p_k - p_0|| < \frac{\epsilon}{3}$ với mọi $k \geq k_0$. Do đó, $||g_k - g_0|| < \frac{\epsilon}{3}$, $||b_k - b_0|| < \frac{\epsilon}{3}$ với mọi $k \geq k_0$. Điều này dẫn đến

$$g_0(x, t) - g_k(x, t) - \frac{1}{3}\epsilon^m \in -\mathbb{R}^m_+ \quad \forall x \in \Omega, t \in T, k \geq k_0, \tag{1.2.1}$$

$$b_k(t) - b_0(t) - \frac{1}{3}\epsilon^m \in -\mathbb{R}^m_+ \quad \forall x \in \Omega, t \in T, k \geq k_0, \tag{1.2.2}$$

ở đó $\epsilon^m := (\epsilon, \epsilon, ..., \epsilon) \in \mathbb{R}^m$. Do tính liên tục của g_0 và tính compắc của T, tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in \Omega$ mà $d(x, x_0) < \delta$,

$$||g_0(x, t) - g_0(x_0, t)||_m < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall t \in T.$$

Suy ra

$$g_0(x_0, t) - g_0(x, t) - \frac{1}{3}\epsilon^m \in -\mathbb{R}^m_+ \quad \forall t \in T. \tag{1.2.3}$$

Vì $x_k \to x_0$ khi $k \to \infty$, nên tồn tại $k_1 \geq k_0$ sao cho $d(x_k, x_0) < \delta$ với mọi $k \geq k_1$. Do đó, từ (1.2.3), (1.2.1) và (1.2.2) suy ra

$$g_0(x_0, t) - b_0(t) - \epsilon^m \in -\mathbb{R}^m_+ \quad \forall t \in T.$$

Do tính liên tục của g_0 và b_0, và do tính đóng của $\mathbb{R}^m_+$, ta có

$$g_0(x_0, t) - b_0(t) \in -\mathbb{R}^m_+ \quad \forall t \in T.$$

Vì vậy, $x_0 \in C(p_0)$. □

Nhận xét 1.2.1. Như ta đã thấy ở trên, ánh xạ C luôn luôn nửa liên tục trên tại mọi điểm $p \in \operatorname{dom} C$, nhưng khẳng định này nhìn chung là không đúng đối với tính nửa liên tục dưới của C (xem Ví dụ 1.3.1 ở Mục 1.3 dưới đây). Kết quả tiếp theo đưa ra một điều kiện đủ để C có tính nửa liên tục dưới tại một điểm cho trước.

Mệnh đề 1.2.2. *Cho Ω là tập lồi compắc khác rỗng của một không gian lồi địa phương và $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

(i) *Với mọi $t \in T$, $g(\cdot, t)$ là $\mathbb{R}^m_+$-lồi trên Ω;*

(ii) *Điều kiện Slater đúng cho $C(p_0)$, có nghĩa là tồn tại $\hat{x} \in \Omega$ sao cho*

$$g_0(\hat{x}, t) - b_0(t) \in -\operatorname{int}\mathbb{R}^m_+ \quad \forall t \in T.$$

Khi đó C là nửa liên tục dưới tại p_0.

Chứng minh. Giả sử W là tập lồi mở thỏa mãn $W \cap C(p_0) \neq \emptyset$. Do (ii), tồn tại $\hat{x} \in C(p_0)$ sao cho

$$g_0(\hat{x}, t) - b_0(t) \in -\text{int}\mathbb{R}^m_+ \quad \forall t \in T. \tag{1.2.4}$$

Lấy tùy ý $x_0 \in W \cap C(p_0)$ và $r \in (0, 1]$. Đặt

$$x_r := x_0 + r(\hat{x} - x_0) \in W.$$

Từ (i) suy ra $C(p_0)$ là lồi. Do đó, $x_r \in W \cap C(p_0)$. Bởi tính lồi theo nón của hàm $g_0(\cdot, t)$ và (1.2.4) ta có

$$\begin{aligned} g_0(x_r, t) = g_0((1 - r)x_0 + r\hat{x}, t) &\in (1 - r)g_0(x_0, t) + rg_0(\hat{x}, t) - \mathbb{R}^m_+ \\ &\subset b_0(t) - \text{int}\mathbb{R}^m_+ \quad \forall t \in T. \end{aligned}$$

Vì vậy, ta có thể chọn $\epsilon > 0$ sao cho

$$g_0(x_r, t) - b_0(t) + \epsilon^m \in -\mathbb{R}^m_+ \quad \forall t \in T, \tag{1.2.5}$$

ở đó $\epsilon^m := (\epsilon, \epsilon, ..., \epsilon) \in \mathbb{R}^m$. Ta khẳng định rằng, với mỗi $p := (f, g, b) \in P$ thỏa mãn $||p - p_0|| < \frac{\epsilon}{2}$, $W \cap C(p) \neq \emptyset$. Thật vậy, ta có

$$g(x, t) - g_0(x, t) - \frac{1}{2}\epsilon^m \in -\mathbb{R}^m_+ \quad \forall x \in \Omega, t \in T, \tag{1.2.6}$$

$$b_0(t) - b(t) - \frac{1}{2}\epsilon^m \in -\mathbb{R}^m_+ \quad \forall x \in \Omega, t \in T. \tag{1.2.7}$$

Từ (1.2.5), (1.2.6) và (1.2.7) ta nhận được

$$g(x_r, t) - b(t) \in -\mathbb{R}^m_+ \quad \forall t \in T.$$

Do đó, $x_r \in C(p)$ và $W \cap C(p) \neq \emptyset$. Vậy C là nửa liên tục dưới tại p_0. $\square$

Nhận xét 1.2.2. Mệnh đề 1.2.1 và Mệnh đề 1.2.2 ở trên mở rộng các kết quả tương ứng của Chen và Craven [9, Lemma 3.1] trong trường hợp Ω là tập lồi compắc khác rỗng của một không gian hữu hạn chiều. Đặc biệt hơn, khi $g(\cdot, t)$

là hàm (vô hướng) lồi với mọi $t \in T$, ta có khẳng định: tính nửa liên tục dưới của ánh xạ tập ràng buộc C tại một điểm cho trước là tương đương với sự thỏa mãn của điều kiện Slater tại điểm đó (xem [33, Theorem 4.1(i)(v)]).

1.3 Tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu

Trong mục này chúng ta trình bày các điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu $\mathcal{S}$ tại một điểm cho trước.

Định lý 1.3.1. *Cho $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. Nếu $\mathcal{S}$ là nửa liên tục dưới tại p_0, thì với mỗi $x_0 \in \mathcal{S}(p_0)$ và với mỗi $V(x_0) \in \mathcal{N}(x_0)$ ở trong Ω, tồn tại $\bar{x} \in V(x_0) \cap \mathcal{S}(p_0)$ sao cho*

$$f_0^{-1}(f_0(\bar{x})) \cap C(p_0) \subset V(x_0). \tag{1.3.1}$$

Hơn nữa, nếu thêm vào đó ánh xạ tập ràng buộc C là nửa liên tục dưới tại p_0, thì khẳng định ngược lại cũng đúng.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh khẳng định thứ nhất của định lý. Giả sử ngược lại rằng tồn tại $x_0 \in \mathcal{S}(p_0)$ và $V(x_0) \in \mathcal{N}(x_0)$ ở trong Ω sao cho

$$f_0^{-1}(f_0(x)) \cap C(p_0) \not\subset V(x_0) \quad \forall x \in V(x_0) \cap \mathcal{S}(p_0). \tag{1.3.2}$$

Giả sử $V_1(x_0), V_2(x_0)$ là các lân cận mở của x_0 thỏa mãn

$$\mathrm{cl}V_1(x_0) \subset V_2(x_0) \subset \mathrm{cl}V_2(x_0) \subset V(x_0).$$

Theo Bổ đề Urysohn (xem [30, Lemma 4, p. 115]) tồn tại một hàm liên tục α ở trên Ω sao cho $\alpha(x) = 0$ nếu $x \in \mathrm{cl}V_1(x_0)$ và $\alpha(x) = 1$ nếu $x \in \Omega \backslash V_2(x_0)$. Với mỗi số nguyên dương $k > 1$, ta định nghĩa $u^k := (\frac{1}{k}, ..., \frac{1}{k}) \in \mathbb{R}^s$ và

$$f_k(x) := f_0(x) - \alpha(x)u^k \quad \forall x \in \Omega.$$

Khi đó $f_k \in C[\Omega, \mathbb{R}^s]$ với mọi $k > 1$. Đặt $p_k := (f_k, g_0, b_0) \in P$. Nhận xét rằng

$$V_1(x_0) \cap \mathcal{S}(p_k) = \emptyset \quad \forall k > 1. \tag{1.3.3}$$

Thật vậy, với $x \in V_1(x_0)$ được lấy tùy ý, có ba khả năng sau.

(a) Nếu $x \in V_1(x_0) \cap \mathcal{S}(p_0)$, thì do (1.3.2) tồn tại $z_x \in C(p_0) \backslash V(x_0)$ sao cho $f_0(z_x) = f_0(x)$. Do đó,

$$\begin{aligned} f_k(z_x) - f_k(x) =& f_0(z_x) - f_0(x) - (\alpha(z_x) - \alpha(x))u^k \\ =& f_0(z_x) - f_0(x) - u^k \\ =& - u^k \in -\text{int}\mathbb{R}^s_+ \subset -\mathbb{R}^s_+ \backslash \{0_s\}. \end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là $x \notin \mathcal{S}(p_k)$ với mọi $k > 1$.

(b) Nếu $x \in (V_1(x_0) \cap C(p_0)) \backslash \mathcal{S}(p_0)$, thì tồn tại $z_x \in C(p_0)$ sao cho

$$f_0(z_x) - f_0(x) \in -\mathbb{R}^s_+ \backslash \{0_s\}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} f_k(z_x) - f_k(x) =& f_0(z_x) - f_0(x) - (\alpha(z_x) - \alpha(x))u^k \\ =& f_0(z_x) - f_0(x) - \alpha(z_x)u^k \in -\mathbb{R}^s_+ \backslash \{0_s\}. \end{aligned}$$

Vì vậy, $x \notin \mathcal{S}(p_k)$ với mọi $k > 1$.

(c) Nếu $x \in V_1(x_0) \backslash C(p_0)$ thì ta có $x \notin \mathcal{S}(p_k)$, bởi vì $C(p_k) = C(p_0)$ với mọi $k > 1$.

Tóm lại (1.3.3) nghiệm đúng. Trong khi đó, dễ thấy rằng $p_k \to p_0$ khi $k \to \infty$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\mathcal{S}$ là nửa liên tục dưới tại p_0. Khẳng định thứ nhất của định lý đã được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh khẳng định thứ hai. Giả sử C là nửa liên tục dưới tại p_0. Nếu $\mathcal{S}$ không là nửa liên tục dưới tại p_0, thì tồn tại một điểm $x_0 \in \mathcal{S}(p_0)$, một tập mở $V(x_0) \in \mathcal{N}(x_0)$ và một dãy $\{p_k := (f_k, g_k, b_k)\} \subset P$ thỏa mãn $p_k \to p_0$ và

$$\mathcal{S}(p_k) \cap V(x_0) = \emptyset, \quad \forall k \geq 1. \tag{1.3.4}$$

Chọn một tập mở $V'(x_0) \in \mathcal{N}(x_0)$ sao cho $\mathrm{cl}V'(x_0) \subset V(x_0)$. Do giả thiết của định lý, tồn tại $\bar{x} \in V'(x_0) \cap \mathcal{S}(p_0)$ sao cho

$$f_0^{-1}(f_0(\bar{x})) \cap C(p_0) \subset V'(x_0). \tag{1.3.5}$$

Vì C là nửa liên tục dưới tại p_0 nên tồn tại dãy $\{v_k\}$ sao cho $v_k \to \bar{x}$ và $v_k \in C(p_k)$ với mọi $k \geq 1$. Do $V'(x_0)$ là tập mở chứa $\bar{x}$, nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $v_k \in V'(x_0)$ với mọi $k \geq 1$. Với mỗi $k \geq 1$, ta đặt

$$W_k(\bar{x}) := \left\{ x \in C(p_k) \cap V'(x_0) \mid d(x, \bar{x}) < d(v_k, \bar{x}) + \frac{1}{k} \right\}.$$

Dễ thấy $v_k \in W_k(\bar{x})$ với mọi $k \geq 1$. Suy ra $W_k(\bar{x}) \neq \emptyset$ với mọi $k \geq 1$.

Ta khẳng định rằng tồn tại $k_0 \geq 1,\ x_k \in W_k(\bar{x})$ và $z_k \in C(p_k) \backslash V'(x_0)$ sao cho

$$f_k(z_k) - f_k(x_k) \in -\mathbb{R}^s_+ \backslash \{0_s\} \quad \forall k \geq k_0. \tag{1.3.6}$$

Thật vậy, nếu khẳng định vừa nêu là sai, thì tồn tại dãy con $\{k_l\} \subset \{k\}$, để cho gọn ta vẫn ký hiệu dãy con này là $\{k\}$, sao cho với mỗi $k \geq 1$, với mọi $x \in W_k(\bar{x})$ và mọi $z \in C(p_k) \backslash V'(x_0)$, ta có

$$f_k(z) - f_k(x) \notin -\mathbb{R}^s_+ \backslash \{0_s\}. \tag{1.3.7}$$

Ký hiệu $\mathcal{S}(A, f_k)$ là tập các nghiệm hữu hiệu của bài toán

$$\min\nolimits_{\mathbb{R}^s_+} \{f_k(x) \mid x \in A\},$$

trong đó A là một tập con của $C(p_k)$. Do tính compắc của $C(p_k)\cap \mathrm{cl}V'(x_0)$ và tính liên tục của f_k ta có $\mathcal{S}(C(p_k)\cap \mathrm{cl}V'(x_0), f_k)\neq\emptyset$. Xét hai khả năng sau.

(a) Nếu $\mathcal{S}(C(p_k)\cap \mathrm{cl}V'(x_0), f_k)\cap W_k(\bar{x})\neq\emptyset$, thì tồn tại

$$\bar{z}\in\mathcal{S}(C(p_k)\cap \mathrm{cl}V'(x_0), f_k)\cap W_k(\bar{x}).$$

Khi đó $\bar{z}\in\mathcal{S}(p_k)$. Thật vậy, nếu $\bar{z}\notin\mathcal{S}(p_k)$, thì do $\bar{z}\in\mathcal{S}(C(p_k)\cap \mathrm{cl}V'(x_0), f_k)$, tồn tại $z\in C(p_k)\backslash V'(x_0)$ sao cho $f_k(z)-f_k(\bar{z})\in -\mathbb{R}^s_+\backslash\{0_s\}$. Quan hệ này mâu thuẫn với (1.3.7). Vậy $\bar{z}\in\mathcal{S}(p_k)$ và do đó,

$$\bar{z}\in\mathcal{S}(p_k)\cap W_k(\bar{x})\subset\mathcal{S}(p_k)\cap V'(x_0)\subset\mathcal{S}(p_k)\cap V(x_0).$$

Điều này mâu thuẫn với (1.3.4).

(b) Nếu $\mathcal{S}(C(p_k)\cap \mathrm{cl}V'(x_0), f_k)\cap W_k(\bar{x})=\emptyset$, thì ta chọn

$$\bar{y}\in W_k(\bar{x})\backslash\mathcal{S}(C(p_k)\cap \mathrm{cl}V'(x_0), f_k).$$

Khi đó tồn tại $z_{\bar{y}}\in C(p_k)\cap \mathrm{cl}V'(x_0)$ sao cho

$$f_k(z_{\bar{y}})-f_k(\bar{y})\in -\mathbb{R}^s_+\backslash\{0_s\}. \tag{1.3.8}$$

Đặt $D:=\{x\in C(p_k)\cap \mathrm{cl}V'(x_0)\mid f_k(x)-f_k(z_{\bar{y}})\in -\mathbb{R}^s_+\}$. Dễ thấy rằng $\mathcal{S}(D, f_k)\neq\emptyset$ và

$$\mathcal{S}(D, f_k)\subset\mathcal{S}(C(p_k)\cap \mathrm{cl}V'(x_0), f_k).$$

Lấy tùy ý $\bar{z}\in\mathcal{S}(D, f_k)$. Khi đó, $\bar{z}\in\mathcal{S}(p_k)$. Thật vậy, nếu $\bar{z}\notin\mathcal{S}(p_k)$, thì do $\bar{z}\in\mathcal{S}(C(p_k)\cap \mathrm{cl}V'(x_0), f_k)$, tồn tại $y\in C(p_k)\backslash V'(x_0)$ sao cho

$$f_k(y)-f_k(\bar{z})\in -\mathbb{R}^s_+\backslash\{0_s\}. \tag{1.3.9}$$

Do $\bar{z}\in D$, ta có $f_k(\bar{z})-f_k(z_{\bar{y}})\in -\mathbb{R}^s_+$. Kết hợp điều này với (1.3.8) và (1.3.9), ta nhận được

$$f_k(y) - f_k(\bar{y}) \in -\mathbb{R}^s_+ \backslash \{0_s\},$$

mâu thuẫn với (1.3.7). Vì vậy, $\bar{z} \in \mathcal{S}(p_k)$. Bao hàm thức $\bar{z} \in D$ kéo theo

$$\bar{z} \in \mathcal{S}(p_k) \cap \mathrm{cl}V'(x_0) \subset \mathcal{S}(p_k) \cap V(x_0).$$

Điều này mâu thuẫn với (1.3.4). Tóm lại khẳng định ở (1.3.6) là đúng.

Do Ω là compắc, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $z_k \to z_0 \in \Omega\backslash V'(x_0)$. Lập luận như ở trong chứng minh của Mệnh đề 1.2.1 (với chú ý rằng ở trong chứng minh đó ta vẫn kết luận được $x_0 \in C(p_0)$ nếu $x_k \in C(p_k)$ với mọi k), ta thu được $z_0 \in C(p_0)$. Bây giờ, cho $k \to \infty$ ở trong (1.3.6), ta có

$$f_0(z_0) - f_0(\bar{x}) \in -\mathbb{R}^s_+.$$

Do đó, $f_0(z_0) = f_0(\bar{x})$, bởi vì $\bar{x} \in \mathcal{S}(p_0)$. Từ (1.3.5) suy ra

$$z_0 \in f_0^{-1}(f_0(\bar{x})) \cap C(p_0) \subset V'(x_0),$$

điều này mâu thuẫn với $z_0 \in \Omega\backslash V'(x_0)$. Khẳng định thứ hai của định lý đã được chứng minh. □

Nhận xét 1.3.1. Nếu ánh xạ tập ràng buộc C không là nửa liên tục dưới tại điểm được khảo sát thì điều kiện ở trong Định lý 1.3.1 nói chung không phải là điều kiện đủ để có được tính nửa liên tục dưới của ánh xạ điểm hữu hiệu $\mathcal{S}$ tại điểm đó.

Ví dụ 1.3.1. Lấy $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0, 0 \leq x_2 \leq x_1 + 1\}, T = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Cho $f_0 : \Omega \to \mathbb{R}, g_0 : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ và $b_0, b_k : T \to \mathbb{R}$ là các hàm số được định nghĩa như sau.

$$f_0(x) = x_1 \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad g_0(x, t) = -tx_1 + tx_2 \quad \forall (x, t) \in \Omega \times T,$$

$$b_0(t) = t \quad \forall t \in T, \quad b_k(t) = \begin{cases} \frac{k+1}{k}t - \frac{1}{k} & \text{nếu } t \in [\frac{1}{k+1}, 1] \\ 0 & \text{nếu } t \in [0, \frac{1}{k+1}], \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng $g_0(\cdot, t)$ là lồi với mọi $t \in T$ và $b_k \to b_0$. Đặt $p_0 := (f_0, g_0, b_0), p_k := (f_k, g_k, b_k)$, ở đây $f_k := f_0, g_k := g_0$ với mọi $k \geq 1$. Ta có $p_k \to p_0$ và

$$C(p_0) = \Omega, \mathcal{S}(p_0) = \mathcal{S}^w(p_0) = \{(-1, 0)\},$$

$$C(p_k) = \{(0, 0)\}, \mathcal{S}(p_k) = \{(0, 0)\} \quad \forall k \geq 1.$$

Dễ thấy rằng bao hàm thức (1.3.1) nghiệm đúng và C không là nửa liên tục dưới tại p_0. Trên thực tế, $\mathcal{S}$ không là nửa liên tục dưới tại p_0.

Ví dụ tiếp theo chỉ ra tầm quan trọng của bao hàm thức (1.3.1) trong điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới của $\mathcal{S}$. Cụ thể hơn, nếu (1.3.1) bị vi phạm thì ta không có tính nửa liên tục dưới của $\mathcal{S}$ tại điểm được xét, mặc dầu C là nửa liên tục dưới tại điểm đó.

Ví dụ 1.3.2. Lấy $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1\}, T = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Cho $f_0 : \Omega \to \mathbb{R}, g_0 : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ và $b_0, b_k : T \to \mathbb{R}, k \geq 1$ là các hàm số được định nghĩa như sau.

$$f_0(x) = x_1 \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad g_0(x, t) = (t - 1)x_1 + tx_2 \quad \forall (x, t) \in \Omega \times T,$$

$$b_0(t) = t \quad \forall t \in T, \quad b_k(t) = \begin{cases} \frac{k+1}{k}t - \frac{1}{k} & \text{nếu } t \in [\frac{1}{k+1}, 1] \\ 0 & \text{nếu } t \in [0, \frac{1}{k+1}]. \end{cases}$$

Dễ thấy rằng $g_0(\cdot, t)$ là lồi với mọi $t \in T$ và $b_k \to b_0$. Đặt $p_0 := (f_0, g_0, b_0), p_k := (f_k, g_k, b_k)$, ở đây $f_k := f_0, g_k := g_0$ với mọi $k \geq 1$. Rõ ràng rằng $p_k \to p_0$. Với $\hat{x} := (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \in \Omega$, ta có

$$g_0(\hat{x}, t) = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} < t = b_0(t) \quad \forall t \in T.$$

Điều này có nghĩa là điều kiện Slater đúng cho $C(p_0)$. Từ Mệnh đề 1.2.2 suy ra rằng C là nửa liên tục dưới tại p_0. Ta có

$$\begin{aligned} C(p_0) = \Omega,\ C(p_k) =& \{(x_1, x_2) \,|\, 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{k+1}, 0 \leq x_2 \leq kx_1\} \cup \\ & \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \geq \frac{1}{k+1}, 0 \leq x_2 \leq 1 - x_1\} \quad \forall k \geq 1, \end{aligned}$$

$$\mathcal{S}(p_0) = \{(0, x_2) \,|\, 0 \leq x_2 \leq 1\},\ \mathcal{S}(p_k) = \{(0, 0)\} \quad \forall k \geq 1.$$

Nếu ta lấy $x_0 := (0, \frac{1}{2}) \in \mathcal{S}(p_0)$ và $V(x_0) := B_{\frac{1}{4}}(x_0) \cap \Omega$, ở đây $B_{\frac{1}{4}}(x_0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, ||x - x_0||_2 < \frac{1}{4}\}$, thì bao hàm thức (1.3.1) không nghiệm đúng. Trên thực tế, $\mathcal{S}$ không là nửa liên tục dưới tại p_0.

Bằng cách đặt $g(x,t) := (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$ và $b(t) := (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^m$ với mọi $x \in \Omega$, với mọi $t \in T$, từ Định lý 1.3.1 ta nhận được kết quả sau.

Hệ quả 1.3.1. (Xem [52, Theorem 4.2], [53, Theorem 3.3]) *Cho $p_0 \in P$. Nếu $C(p) = \Omega$ với mọi $p \in P$, thì $\mathcal{S}$ là nửa liên tục dưới tại p_0 khi và chỉ khi với mỗi $x_0 \in \mathcal{S}(p_0)$ và với mỗi $V(x_0) \in \mathcal{N}(x_0)$ ở trong Ω, tồn tại $\bar{x} \in V(x_0) \cap \mathcal{S}(p_0)$ sao cho*

$$f_0^{-1}(f_0(\bar{x})) \cap [\Omega \setminus V(x_0)] = \emptyset.$$

Hai kết quả tiếp theo đưa ra một số điều kiện đủ để có tính nửa liên tục dưới của $\mathcal{S}$ tại một điểm cho trước trong những bài toán cụ thể hơn (có dữ liệu bao gồm các hàm lồi/tựa lồi theo nón).

Hệ quả 1.3.2. *Cho $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. Giả sử rằng ánh xạ tập ràng buộc C là nửa liên tục dưới tại p_0. Nếu một trong hai điều kiện sau đây được thỏa mãn, thì $\mathcal{S}$ là nửa liên tục dưới tại p_0.*

(i) Ω *là tập lồi compắc khác rỗng của một không gian véctơ tôpô và* f_0 *là* $\mathbb{R}^s_+$*-tựa lồi chặt trên* Ω.

(ii) f_0 *là đơn ánh, có nghĩa là* $f_0(x_1) \neq f_0(x_2)$ *mỗi khi* $x_1 \neq x_2$.

Chứng minh. Lấy tùy ý $x_0 \in \mathcal{S}(p_0)$ và $V(x_0) \in \mathcal{N}(x_0)$. Theo Định lý 1.3.1, để chứng minh tính nửa liên tục dưới của $\mathcal{S}$ tại p_0, ta chỉ cần kiểm tra rằng

$$f_0^{-1}(f_0(x_0)) \cap C(p_0) = \{x_0\}. \tag{1.3.10}$$

Rõ ràng (ii) kéo theo (1.3.10). Bây giờ ta giả sử rằng (i) đúng và (1.3.10) sai. Khi đó tồn tại $x_1 \in C(p_0) \backslash \{x_0\}$ sao cho $f_0(x_1) = f_0(x_0)$. Hiển nhiên,

$$\begin{aligned} f_0(x_0) \in & f_0(x_0) - \mathbb{R}^s_+, \\ f_0(x_1) \in & f_0(x_1) - \mathbb{R}^s_+ = f_0(x_0) - \mathbb{R}^s_+. \end{aligned}$$

Vì $C(p_0)$ là lồi, nên ta có $z_0 = \frac{x_0+x_1}{2} \in C(p_0)$. Từ tính tựa lồi chặt theo nón của f_0 suy ra

$$\begin{aligned} f_0(z_0) = f_0\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) &\in f_0(x_0) - \mathrm{int}\mathbb{R}^s_+ \\ &\subset f_0(x_0) - \mathbb{R}^s_+ \backslash \{0_s\}. \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với $x_0 \in \mathcal{S}(p_0)$ và do đó (1.3.10) nghiệm đúng. Chứng minh kết thúc. □

Hệ quả 1.3.3. *Cho* Ω *là một tập con lồi compắc khác rỗng của một không gian lồi địa phương và cho* $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. *Giả sử rằng các điều kiện sau đây đúng:*

(i) *Với mỗi* $t \in T$, $g(\cdot, t)$ *là* $\mathbb{R}^m_+$*-lồi trên* Ω*;*

(ii) *Điều kiện Slater đúng cho* $C(p_0)$*;*

(iii) *Với mỗi* $x_0 \in \mathcal{S}(p_0)$, *tồn tại* $\sigma \in \mathrm{int}\mathbb{R}^s_+$ *sao cho*

$$\mathrm{argmin}\{\langle \sigma, f_0(x)\rangle \mid x \in C(p_0)\} = \{x_0\},$$

ở đó $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *ký hiệu cho tích vô hướng ở trong* $\mathbb{R}^s$.

Khi đó $\mathcal{S}$ *là nửa liên tục dưới tại* p_0.

Chứng minh. Vì $g(\cdot, t)$ là $\mathbb{R}^m_+$-lồi trên Ω với mọi $t \in T$ và điều kiện Slater đúng cho p_0, nên từ Mệnh đề 1.2.2 suy ra C là nửa liên tục dưới tại p_0. Ta khẳng định rằng (1.3.1) nghiệm đúng. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng, tồn tại $V(x_0) \in \mathcal{N}(x_0)$ sao cho với mỗi $\bar{x} \in V(x_0) \cap \mathcal{S}(p_0)$ ta có

$$f_0^{-1}(f_0(\bar{x})) \cap C(p_0) \not\subset V(x_0).$$

Khi đó nếu ta lấy $\bar{x} = x_0$, thì tồn tại $x_1 \in C(p_0)$ sao cho $f_0(x_1) = f_0(x_0)$ và $x_1 \notin V(x_0)$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết (iii). Vì vậy, (1.3.1) nghiệm đúng. Áp dụng Định lý 1.3.1 ta thu được kết quả mong muốn. $\square$

Nhận xét 1.3.2. Quan sát chứng minh của Hệ quả 1.3.3 ta thấy rằng (1.3.1) là một dạng "nới lỏng" giả thiết duy nhất nghiệm kiểu như ở trong điều kiện (iii). Trong trường hợp đặc biệt, khi $m = s = 1$, Hệ quả 1.3.3 mở rộng [7, Proposition 4(iv)]- ở đó hàm mục tiêu là lồi và được nhiễu tuyến tính, hàm lồi ở tập ràng buộc được nhiễu bên phải, đồng thời $\mathcal{S}(p_0) = \{x_0\}$.

Nhận xét thêm rằng, các điều kiện đủ trong Hệ quả 1.3.3 là tương tự với các điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu yếu $\mathcal{S}^w$ đã được đưa ra trong [9, Theorem 3.2], ở đó điều kiện (iii) được thay bởi *điều kiện bức* như sau: Với mỗi $x_0 \in \mathcal{S}^w(p_0)$, tồn tại $\sigma \in \mathrm{int}\mathbb{R}^s_+$ và hàm đơn điệu tăng $\tau : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ (phụ thuộc vào σ và x_0) với $\tau(0) = 0$ sao cho

$$\sigma(f_0(x) - f_0(x_0)) \geq \tau(||x - x_0||_n) \quad \forall x \in \Omega.$$

Dễ thấy rằng điều kiện bức kéo theo (iii).

1.4 Tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm hữu hiệu

Mục này được dành để trình bày các điều kiện cần và đủ cho tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm hữu hiệu $\mathcal{S}$ tại một điểm cho trước.

Định lý 1.4.1. *Cho $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. Nếu $\mathcal{S}$ là nửa liên tục trên tại p_0, thì $\mathcal{S}(p_0) = \mathcal{S}^w(p_0)$. Hơn nữa, nếu thêm vào đó ánh xạ tập ràng buộc C là nửa liên tục dưới tại p_0, thì khẳng định ngược lại cũng đúng.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh khẳng định thứ nhất của định lý. Giả sử ngược lại rằng $\mathcal{S}(p_0) \neq \mathcal{S}^w(p_0)$. Khi đó tồn tại $\bar{x} \in \mathcal{S}^w(p_0) \backslash \mathcal{S}(p_0)$, bởi vì $\mathcal{S}(p_0) \subset \mathcal{S}^w(p_0)$. Lấy tùy ý tập mở W sao cho $\mathcal{S}(p_0) \subset W$ và $\bar{x} \notin W$. Đặt

$$\alpha(x) = \frac{1}{1 + d(x, \bar{x})} \quad \forall x \in \Omega.$$

Hiển nhiên, α là liên tục trên Ω. Với mỗi $k > 1$, đặt $u^k := (\frac{1}{k}, ..., \frac{1}{k}) \in \mathbb{R}^s$ và

$$f_k(x) := f_0(x) - \alpha(x)u^k \quad \forall x \in \Omega.$$

Khi đó, $f_k \in C[\Omega, \mathbb{R}^s]$ với mọi $k > 1$. Vì vậy, $p_k := (f_k, g_0, b_0) \in P$ với mọi $k > 1$. Rõ ràng rằng $p_k \to p_0$ khi $k \to \infty$. Ta có

$$\bar{x} \in \mathcal{S}(p_k) \ \ \forall k > 1. \tag{1.4.1}$$

Thật vậy, giả sử ngược lại tồn tại $k_0 > 1$ sao cho $\bar{x} \notin \mathcal{S}(p_{k_0})$. Khi đó ta tìm được $z \in C(p_0)$ sao cho

$$f_{k_0}(z) - f_{k_0}(\bar{x}) \in -\mathbb{R}^s_+ \backslash \{0_s\}.$$

Suy ra,

$$f_0(z) - f_0(\bar{x}) + (1 - \alpha(z))u^{k_0} \in -\mathbb{R}^s_+ \backslash \{0_s\}.$$

Do đó,

$$f_0(z) - f_0(\bar{x}) \in -\mathrm{int}\mathbb{R}^s_+,$$

mâu thuẫn với $\bar{x} \in \mathcal{S}^w(p_0)$. Vậy bao hàm thức (1.4.1) nghiệm đúng. Khẳng định này cùng với tính nửa liên tục trên của $\mathcal{S}$ tại p_0 suy ra $\bar{x} \in W$, mâu thuẫn với cách chọn tập W ở trên. Khẳng định thứ nhất của định lý đã được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh khẳng định thứ hai. Giả sử rằng ánh xạ tập ràng buộc C là nửa liên tục dưới tại p_0. Nếu $\mathcal{S}$ không là nửa liên tục trên tại p_0, thì tồn tại tập mở W chứa $\mathcal{S}(p_0)$, tồn tại dãy $\{p_k := (f_k, g_k, b_k)\} \subset P$ hội tụ đến p_0 và $x_k \in \mathcal{S}(p_k)$ sao cho $x_k \notin W$ với mọi $k \geq 1$. Do Ω là compắc, bằng cách lấy một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng $x_k \to x_0$. Lập luận như ở trong chứng minh của Mệnh đề 1.2.1 (với chú ý rằng trong chứng minh đó ta vẫn kết luận được $x_0 \in C(p_0)$ nếu $x_k \in C(p_k)$ với mọi k), ta thu được $x_0 \in C(p_0)$. Rõ ràng $x_0 \notin W$. Do đó, từ $\mathcal{S}(p_0) = \mathcal{S}^w(p_0)$ kéo theo $x_0 \notin \mathcal{S}^w(p_0)$. Điều này có nghĩa là tồn tại $z_0 \in C(p_0)$ sao cho

$$f_0(z_0) - f_0(x_0) \in -\mathrm{int}\mathbb{R}^s_+.$$

Vì C là nửa liên tục dưới tại p_0, nên tồn tại $z_k \in C(p_k)$ sao cho $z_k \to z_0$ khi $k \to \infty$. Vì vậy,

$$f_k(z_k) - f_k(x_k) \in -\mathrm{int}\mathbb{R}^s_+ \subset -\mathbb{R}^s_+ \backslash \{0_s\},$$

với k đủ lớn, mâu thuẫn với $x_k \in \mathcal{S}(p_k)$ với mọi $k \geq 1$. Khẳng định thứ hai của định lý đã được chứng minh. $\square$

Nhận xét 1.4.1. Điều kiện cần cho tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm hữu hiệu $\mathcal{S}$ ở trong Định lý 1.4.1 không trở thành đủ nếu tính nửa liên tục dưới của C bị loại bỏ. Thật vậy, ở trong Ví dụ 1.3.1, C không là nửa liên tục dưới tại p_0. Ta thấy rằng $\mathcal{S}$ không là nửa liên tục trên tại p_0.

Bằng cách đặt $g(x,t) := (0, ..., 0) \in \mathbb{R}^m$ và $b(t) := (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^m$ với mọi $x \in \Omega$, với mọi $t \in T$, từ Định lý 1.4.1 ta nhận được kết quả sau.

Hệ quả 1.4.1. (Xem [52, Theorem 3.1]) *Cho $p_0 \in P$. Nếu $C(p) = \Omega$ với mọi $p \in P$, thì $\mathcal{S}$ là nửa liên tục trên tại p_0 khi và chỉ khi $\mathcal{S}(p_0) = \mathcal{S}^w(p_0)$.*

Hai kết quả sau đưa ra một số điều kiện đủ để có tính nửa liên tục trên của $\mathcal{S}$ tại một điểm cho trước trong những bài toán cụ thể hơn (có dữ liệu bao gồm các hàm lồi/tựa lồi theo nón).

Hệ quả 1.4.2. *Cho Ω là tập lồi compắc khác rỗng của một không gian véctơ tôpô và cho $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. Giả sử rằng ánh xạ tập ràng buộc C là nửa liên tục dưới tại p_0. Nếu f_0 là $\mathbb{R}^s_+$-tựa lồi chặt trên Ω, thì $\mathcal{S}$ là nửa liên tục trên tại p_0.*

Chứng minh. Từ [34, Proposition 5.13] suy ra $\mathcal{S}(p_0) = \mathcal{S}^w(p_0)$. Để kết thúc chứng minh ta chỉ cần áp dụng Định lý 1.4.1. □

Hệ quả 1.4.3. *Cho Ω là tập con lồi compắc khác rỗng của một không gian lồi địa phương và cho $p_0 := (f_0, g_0, b_0) \in P$. Giả sử rằng $g(\cdot, t)$ là $\mathbb{R}^m_+$-lồi trên Ω với mọi $t \in T$ và điều kiện Slater đúng cho $C(p_0)$. Nếu $\mathcal{S}(p_0) = \mathcal{S}^w(p_0)$, thì $\mathcal{S}$ là nửa liên tục trên tại p_0.*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 1.2.2, C là nửa liên tục dưới tại p_0. Áp dụng

Định lý 1.4.1 ta có $\mathcal{S}$ là nửa liên tục trên tại p_0. $\square$

Kết luận của Chương 1

Các kết quả chính của chương này bao gồm:

- Các điều kiện cần và điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu $\mathcal{S}$ trong Định lý 1.3.1, Hệ quả 1.3.2, và Hệ quả 1.3.3.

- Các điều kiện cần và điều kiện đủ cho tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm hữu hiệu $\mathcal{S}$ trong Định lý 1.4.1, Hệ quả 1.4.2, và Hệ quả 1.4.3.

Chương 2

Tính giả-Lipschitz của nghiệm bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi

Chương này thiết lập một số điều kiện đủ cho tính giả-Lipschitz của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi dưới phép nhiễu hàm của hàm mục tiêu và phép nhiễu liên tục bên phải của các hàm ràng buộc.

Mục 2.1 được dành để giới thiệu một số khái niệm cơ bản và trình bày một vài kết quả bổ trợ. Mục 2.2 phát biểu và chứng minh kết quả chính. Mục 2.3 đưa ra một số ví dụ để phân tích kết quả đạt được trong Mục 2.2.

Kết quả chính của chương này đã được công bố ở [14]; lược đồ chứng minh của nó được phát triển từ lược đồ chứng minh cho bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn tuyến tính [13].

2.1 Các khái niệm cơ bản và kết quả bổ trợ

Trong chương này, ta vẫn sử dụng các khái niệm và ký hiệu đã đưa ra trong chương trước. Ở đây, $K \subset \mathbb{R}^m$ được giả sử là nón lồi đóng nhọn với $\mathrm{int}K \neq \emptyset$ và T là tập con compắc khác rỗng của một không gian mêtric. Tập hợp tất cả các hàm véctơ K-lồi từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ được ký hiệu bởi $CO_K[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m]$, đây là một không gian mêtric được định nghĩa như sau: Đặt $K_r = rB_{\mathbb{R}^n}, r = 1, 2, ...,$ ở đó $B_{\mathbb{R}^n}$ là hình cầu đơn vị đóng ở trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó $\{K_r\}_{r=1}^{\infty}$ là dãy các tập compắc ở trong $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn $K_r \subset \text{int}K_{r+1}$ và $\mathbb{R}^n = \cup_{r=1}^{\infty} K_r$. Với bất kỳ $f, h \in CO_K[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m]$, khoảng cách giữa f và h là được định nghĩa bởi

$$\rho(f, h) := \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r} \frac{\rho_r(f, h)}{1 + \rho_r(f, h)},$$

ở đó $\rho_r(f, h) := \max_{x \in K_r} \{||f(x) - h(x)||_m\}$ với mọi $r = 1, 2, ...$ Mêtric d ở trên không gian tích $CO_K[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m] \times C[T, \mathbb{R}]$ được định nghĩa bởi

$$d(p_1, p_2) := \max \{\rho(f_1, f_2), \max_{t \in T} |b_1(t) - b_2(t)|\}$$

với mọi $p_1 := (f_1, b_1), p_2 := (f_2, b_2) \in CO_K[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m] \times C[T, \mathbb{R}]$.

Bài toán *tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi phụ thuộc tham số* (parametric convex semi-infinite vector optimization), viết tắt là CSVO, được định nghĩa như sau:

Cho không gian tham số $P := CO_K[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m] \times C[T, \mathbb{R}]$. Với mỗi tham số $p := (f, b) \in P$, ta xét bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi,

$$(\text{CSVO})_p : \quad \min{}_K f(x) \quad \text{với ràng buộc} \quad x \in C(p), \tag{2.1.1}$$

ở đó

$$C(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_t(x) \leq b(t) \quad \forall t \in T\}$$

là tập ràng buộc, $g_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm lồi với mọi $t \in T$ và thỏa mãn $(t, x) \mapsto g_t(x)$ là liên tục trên $T \times \mathbb{R}^n$.

Trong trường hợp đặc biệt, khi $p := (A, b) \in P_L := L[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m] \times C[T, \mathbb{R}]$, và $g_t(x) = \langle B(t), x \rangle$ với mọi $t \in T$, bài toán (2.1.1) trở thành bài toán *tối ưu* *véctơ nửa vô hạn tuyến tính,*

$$(\mathrm{LSVO})_p : \quad \min_K Ax \quad \text{với ràng buộc} \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \langle B(t), x\rangle \le b(t) \quad \forall t \in T, \tag{2.1.2}$$

ở đó $L[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m]$ ký hiệu không gian các toán tử tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$, và $B : T \to \mathbb{R}^n$ là hàm véctơ liên tục.

Ánh xạ tập ràng buộc $C : P \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ và ánh xạ nghiệm hữu hiệu $\mathcal{S} : P \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ của bài toán (CSVO) được định nghĩa tương tự như ở trong Mục 1.1 của Chương 1.

Cho (X, d) là một không gian mêtric. Khoảng cách từ $x \in X$ đến tập $\Omega \subset X$ được định nghĩa bởi

$$d(x, \Omega) := \inf\{d(x, y) \mid y \in \Omega\},$$

và $d(x, \emptyset) := +\infty$. Mêtric δ trên không gian tích $X \times Y$ của các không gian mêtric (X, d) và (Y, l) được định nghĩa bởi

$$\delta((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d(x_1, x_2), l(y_1, y_2)\} \quad \forall x_1, x_2 \in X,\ \forall y_1, y_2 \in Y.$$

Trong trường hợp $X = \mathbb{R}^k$ với $k = 1, 2, ...$, mêtric trên $\mathbb{R}^k$ được cảm sinh bởi chuẩn Euclide $||\cdot||_k$. Ký hiệu $\mathrm{co}(\Omega)$ dùng để chỉ bao lồi (convex hull) của $\Omega \subset \mathbb{R}^k$. Trong khi đó, $\mathrm{cone}(\Omega)$ ký hiệu cho bao nón lồi (convex conical hull) của $\Omega \subset \mathbb{R}^k$, đó là giao của tất cả các nón lồi chứa Ω và $\{0_k\}$. Theo quy ước, $\mathrm{co}(\emptyset) = \emptyset$ và $\mathrm{cone}(\emptyset) = \{0_k\}$. Cho $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm lồi và $x \in \mathbb{R}^k$ sao cho $h(x) \neq +\infty$. Dưới vi phân của h tại x, ký hiệu $\partial h(x)$, được xác định bởi công thức

$$\partial h(x) := \{v \in \mathbb{R}^k \mid \langle v, y - x\rangle \le h(y) - h(x) \quad \forall y \in \mathbb{R}^k\}.$$

Nón đối ngẫu không âm của nón $K \subset \mathbb{R}^m$ được định nghĩa bởi

$$K^* := \{\hbar \in \mathbb{R}^m \mid \langle \hbar, y\rangle \geq 0 \quad \forall y \in K\}.$$

Cho $F : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị giữa các không gian mêtric. Khi không nói gì thêm, ta ngầm hiểu các mêtric trên X và Y là phân biệt nhưng cùng được ký hiệu bởi d. Đồ thị của F được cho bởi công thức

$$\mathrm{gph}F := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}.$$

Định nghĩa 2.1.1. (i) Ta nói rằng F là *đóng* tại $x_0 \in X$ nếu với các dãy bất kỳ $\{x_i\} \subset X$ và $\{y_i\} \subset Y$ thỏa mãn $x_i \to x_0, y_i \to y_0, y_i \in F(x_i)$, ta có $y_0 \in F(x_0)$.

(ii) Ta nói rằng F là *giả-Lipschitz* (hay *có tính chất Aubin*) tại $(x_0, y_0) \in \mathrm{gph}F$ nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(x_0)$, $V \in \mathcal{N}(y_0)$ và $\kappa > 0$ sao cho

$$d(y_2, F(x_1)) \leq \kappa d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in U,\ \forall y_2 \in V \cap F(x_2).$$

Trong trường hợp X và Y là các không gian định chuẩn $||\cdot||$, tính giả-Lipschitz của F tại một điểm ở trên đồ thị của nó có thể phát biểu dưới dạng: F là *giả-Lipschitz* tại $(x_0, y_0) \in \mathrm{gph}F$ nếu và chỉ nếu tồn tại $U' \in \mathcal{N}(x_0)$, $V' \in \mathcal{N}(y_0)$ và $\kappa' > 0$ sao cho

$$F(x_2) \cap V' \subset F(x_1) + \kappa'||x_1 - x_2||B_Y \quad \forall x_1, x_2 \in U'.$$

Định nghĩa 2.1.2. (Xem [23, p. 162-163]) Cho $p := (f, b) \in P$.

(i) Ta nói rằng *điều kiện Slater* đúng cho $C(p)$ nếu tồn tại $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ sao cho

$$g_t(\hat{x}) < b(t) \quad \forall t \in T.$$

(ii) Giả sử $x \in C(p)$. Các tập hợp

$$T_p(x) := \{t \in T \mid g_t(x) = b(t)\} \text{ và } A_p(x) := \text{cone}\left(\bigcup_{t \in T_p(x)} \partial g_t(x)\right)$$

tương ứng được gọi là *tập các ràng buộc hoạt* (set of active constraints) và *nón các ràng buộc hoạt* (cone of active constraints) tại x.

Định nghĩa 2.1.3. Cho $p := (f, b) \in P$ và $x \in \mathcal{S}(p)$. Nếu tồn tại $\hbar \in K^*$ với $||\hbar||_m = 1$ sao cho

$$x \in \text{argmin}\{\hbar \circ f(z) \mid z \in C(p)\},$$

thì x được gọi là *nghiệm vô hướng hóa* (scalarized solution) bởi $\hbar$. Ở đây $\hbar \circ f(z) := \langle \hbar, f(z) \rangle$ với mọi $z \in \mathbb{R}^n$.

Nhận xét 2.1.1. Bởi vì với mỗi $p := (f, b) \in P$, bài toán (CSVO)$_p$ có hàm mục tiêu f là K-lồi và tập ràng buộc $C(p)$ là lồi, nên từ [34, Theorem 2.10] suy ra rằng: mỗi $x \in \mathcal{S}(p)$ là nghiệm vô hướng hóa bởi $\hbar \in K^*$ nào đó.

Tiếp theo chúng ta trình bày một số kết quả bổ trợ để chuẩn bị cho chứng minh kết quả chính đưa ra trong mục sau.

Mệnh đề 2.1.1. *Cho* $(p_0, x^0) := (f_0, b_0, x^0) \in P \times \mathbb{R}^n$. *Khi đó ánh xạ đa trị* $\mathcal{T} : P \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows T, (p, x) \mapsto T_p(x)$ *là đóng tại điểm* (p_0, x^0).

Chứng minh. Lấy hai dãy tùy ý $\left\{(p_k, x^k) := (f_k, b_k, x^k)\right\}_{k=1}^{\infty} \subset P \times \mathbb{R}^n$ và $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} \subset T$ thỏa mãn $(p_k, x^k) \to (p_0, x^0)$ và $t_k \in \mathcal{T}(p_k, x^k)$, $t_k \to t_0$ khi $k \to \infty$. Ta cần chỉ ra rằng $t_0 \in \mathcal{T}(p_0, x^0)$. Vì $p_k \to p_0$ khi $k \to \infty$ nên với mỗi $\epsilon > 0$, tồn tại k_0 sao cho $d(p_k, p_0) < \epsilon$ với mọi $k \geq k_0$. Do đó, $\max_{t \in T} |b_k(t) - b_0(t)| < \epsilon$ với mọi $k \geq k_0$. Ta có

$$|b_k(t_k) - b_0(t_0)| \leq |b_k(t_k) - b_0(t_k)| + |b_0(t_k) - b_0(t_0)| < \epsilon + |b_0(t_k) - b_0(t_0)|$$

với mọi $k \geq k_0$. Vì vậy, từ tính liên tục của b_0 suy ra $\lim_{k\to\infty} b_k(t_k) = b_0(t_0)$. Bên cạnh đó, do $(t, x) \mapsto g_t(x)$ liên tục trên $T \times \mathbb{R}^n$, ta có

$$g_{t_0}(x^0) - b_0(t_0) = \lim_{k\to\infty} (g_{t_k}(x^k) - b_k(t_k)) = 0.$$

Điều này có nghĩa $t_0 \in T_{p_0}(x^0) = \mathcal{T}(p_0, x^0)$ và chứng minh kết thúc. $\square$

Bổ đề 2.1.1. (Xem [44, Theorem 24.5]) *Cho* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *và* $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, ...$, *là các hàm lồi thỏa mãn* $\lim_{k\to\infty} h_k(x) = h(x)$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}^n$. *Giả sử* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *và* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ *thỏa mãn* $\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$. *Khi đó, với bất kỳ* $\epsilon > 0$, *tồn tại* k_0 *sao cho*

$$\partial h_k(x_k) \subset \partial h(\bar{x}) + \epsilon B_{\mathbb{R}^n} \quad \forall k \geq k_0.$$

Kết quả sau đây đã được đưa ra ở trong [7, Lemma 3].

Bổ đề 2.1.2. *Cho* $p := (f, b) \in P$. *Khi đó, điều kiện Slater đúng cho* $C(p)$ *nếu và chỉ nếu* $0_n \notin \operatorname{co}\left(\bigcup_{t\in T_p(x)} \partial g_t(x)\right)$ *với mọi* $x \in C(p)$ *với* $T_p(x) \neq \emptyset$.

Bổ đề 2.1.3. (Xem [23, Theorems 7.8 and 7.9] hoặc [7, Lemma 1]) *Cho* $p := (f, b) \in P, \hbar \in K^*$ *với* $||\hbar||_m = 1$ *và cho* $x \in C(p)$. *Giả sử rằng điều kiện Slater đúng cho* $C(p)$. *Khi đó,* $x \in \operatorname{argmin}\{\hbar \circ f(z) \mid z \in C(p)\}$ *khi và chỉ khi* $\partial(\hbar \circ f)(x) \cap (-A_p(x)) \neq \emptyset$.

Kết quả cuối cùng trong mục này khẳng định tính luôn luôn đóng và tính nửa liên tục dưới (với sự thỏa mãn điều kiện Slater) của ánh xạ tập ràng buộc $C : P \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ tại một điểm cho trước.

Bổ đề 2.1.4. *Cho* $p := (f, b) \in P$. *Khi đó các phát biểu sau đúng.*

(a) (Xem [33, Proposition 4.1]) *C là đóng tại* p.

(b) (Xem [33, Theorem 4.1] hoặc [7, Lemma 3]) *Nếu điều kiện Slater đúng cho $C(p)$, thì C là nửa liên tục dưới tại p.*

2.2 Tính giả-Lipschitz của ánh xạ nghiệm hữu hiệu

Kết quả chính của chương này được phát biểu như sau.

Định lý 2.2.1. *Cho $p_0 := (f_0, b_0) \in P$ và $(p_0, x^0) \in \mathrm{gph}\mathcal{S}$. Giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) *Điều kiện Slater đúng cho $C(p_0)$.*

(ii) *Không tồn tại $T_0 \subset T_{p_0}(x^0)$ với $|T_0| < n$ thỏa mãn*

$$\partial(\hbar_0 \circ f_0)(x^0) \cap \mathrm{cone}\left(\bigcup_{t\in T_0}(-\partial g_t(x^0))\right) \neq \emptyset \tag{2.2.1}$$

với mọi $\hbar_0 \in K^*$ sao cho x^0 là nghiệm vô hướng hóa bởi $\hbar_0$. Hơn nữa, nếu x^0 là nghiệm vô hướng hóa bởi cả $\hbar$ và $\bar{\hbar}$, thì với mỗi $z \in \mathbb{R}^n$ với $||z||_n = 1$,

$$\langle u, z\rangle \cdot \langle \bar{u}, z\rangle \geq 0 \text{ với mọi } u \in \partial(\hbar \circ f_0)(x^0), \bar{u} \in \partial(\bar{\hbar} \circ f_0)(x^0). \tag{2.2.2}$$

Khi đó $\mathcal{S}$ là giả-Lipschitz tại (p_0, x^0).

Nhận xét sau đây giúp ta hiểu rõ hơn các giả thiết (i) và (ii).

Nhận xét 2.2.1. Trong trường hợp vô hướng ($m = 1$), (2.2.2) tự động đúng khi $\partial f_0(x^0)$ chỉ là một điểm, chẳng hạn f_0 là khả vi Fréchet tại x^0. Đặc biệt hơn, đối với bài toán (2.1.2), các giả thiết (i) và (ii) không chỉ là điều kiện đủ mà còn là điều kiện cần cho tính giả-Lipschitz của $\mathcal{S}$ tại (p_0, x^0) (xem [7, Theorem 16]). Trong trường hợp véctơ ($m \geq 2$), các giả thiết (i) và (ii) trở thành các điều kiện tương ứng trong [13, Theorem 3.1] cho bài toán (2.1.2) với $K = \mathbb{R}^m_+$.

Để chứng minh Định lý 2.2.1, ngoài một số bổ đề đã được đưa ra trong mục trước, chúng ta cần thiết lập thêm hai kết quả bổ trợ sau.

Mệnh đề 2.2.1. *Nếu tất cả các giả thiết của Định lý 2.2.1 được thỏa mãn, thì các phát biểu sau đây đúng:*

(a) *Tồn tại* $W \in \mathcal{N}(p_0)$ *sao cho điều kiện Slater đúng cho* $C(p)$ *với mọi* $p \in W$.

(b) *Lấy dãy tùy ý* $\{(p_k, x^k) := (f_k, b_k, x^k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \text{gph}\mathcal{S}$. *Nếu* $(p_k, x^k) \to (p_0, x^0) := (f_0, b_0, x^0) \in \text{gph}\mathcal{S}$, *thì với* k *đủ lớn, tồn tại* $\hbar_k \in K^*$ *với* $||\hbar_k||_m = 1$, $u^k \in \partial(\hbar_k \circ f_k)(x^k), u^k_{t_i^k} \in -\partial g_{t_i^k}(x^k), t_i^k \in T_{p_k}(x^k)$, *và* $\lambda_i^k > 0$ *với mọi* $i = 1, 2, ..., n$, *sao cho*

$$u^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k u^k_{t_i^k},$$

ở đó $\{u^k_{t_1^k}, ..., u^k_{t_n^k}\}$ *là một cơ sở của* $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh. (a) Do giả thiết (i) của Định lý 2.2.1 và tính compắc của T, tồn tại $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ và $\alpha > 0$ sao cho $g_t(\hat{x}) \leq b_0(t) - \alpha$ với mọi $t \in T$. Chọn $\epsilon \in (0, \frac{\alpha}{2})$ và $W := \{p \in P \mid d(p, p_0) < \epsilon\} \in \mathcal{N}(p_0)$. Khi đó, với bất kỳ $p := (f, b) \in W$, ta có

$$\max_{t \in T} |b(t) - b_0(t)| \leq d(p, p_0) < \epsilon.$$

Suy ra $b_0(t) < b(t) + \epsilon$ với mọi $t \in T$. Do đó,

$$g_t(\hat{x}) \leq b_0(t) - \alpha < b(t) - \frac{\alpha}{2} \quad \forall t \in T.$$

Điều này có nghĩa là điều kiện Slater đúng cho $C(p)$.

(b) Giả sử $\left\{(p_k, x^k) := (f_k, b_k, x^k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ là dãy bất kỳ trong gph$\mathcal{S}$ sao cho $(p_k, x^k) \to (p_0, x^0) := (f_0, b_0, x^0) \in \text{gph}\mathcal{S}$. Vì $(p_k, x^k) \to (p_0, x^0)$, nên từ (a) kéo theo rằng điều kiện Slater đúng cho $C(p)$ với mọi k đủ lớn. Bởi vì, với mỗi k, $x^k \in \mathcal{S}(p_k)$, nên theo Nhận xét 2.1.1, tồn tại $\hbar_k \in K^*$ với $||\hbar_k||_m = 1$ sao cho x^k là nghiệm vô hướng hóa bởi $\hbar_k$, có nghĩa là,

$$x^k \in \operatorname{argmin}\{\hbar_k \circ f_k(z) \mid z \in C(p_k)\}.$$

Từ Bổ đề 2.1.3 suy ra

$$\partial(\hbar_k \circ f_k)(x^k) \cap (-A_{p_k}(x^k)) \neq \emptyset \tag{2.2.3}$$

với k đủ lớn. Nếu tồn tại một số nguyên dương k_0 sao cho $T_{p_k}(x^k) = \emptyset$ với mọi $k \geq k_0$, thì $0_n \in \partial(\hbar_k \circ f_k)(x^k)$ với mọi $k \geq k_0$. Bằng cách lấy một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng $\lim_{k\to\infty} \hbar_k = \hbar_0 \in K^*$ và $\|\hbar_0\|_m = 1$. Áp dụng Bổ đề 2.1.1 cho các dãy $\{\hbar_k \circ f_k\}$ và $\{x^k\}$, ta thu được $0_n \in \partial(\hbar_0 \circ f_0)(x^0)$. Đặt $T_0 := \emptyset \subset T_{p_0}(x^0)$. Khi đó $\partial(\hbar_0 \circ f_0)(x^0) \cap \operatorname{cone}\big(\bigcup_{t\in T_0}(-\partial g_t(x^0))\big) \neq \emptyset$. Điều này mâu thuẩn với giả thiết (ii) của Định lý 2.2.1. Vì vậy, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $T_{p_k}(x^k) \neq \emptyset$ với mọi k đủ lớn. Từ (2.2.3) suy ra rằng, với mọi k đủ lớn, tồn tại $q \in \mathbb{N} := \{1, 2, ...\}$, $u^k \in \partial(\hbar_k \circ f_k)(x^k)$, $u^k_{t_i^k} \in -\partial g_{t_i^k}(x^k)$, $\lambda_i^k \geq 0$ và $t_i^k \in T_{p_k}(x^k)$, $i \in \{1, ..., q\}$ sao cho

$$u^k = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k u^k_{t_i^k}. \tag{2.2.4}$$

Theo định lý Carathéodory (xem [27, Theorem 1, p. 184]), ta có thể giả sử rằng $q \leq n$, $\lambda_i^k > 0$ với mọi $i \in \{1, ..., q\}$ và $\{u^k_{t_i^k} \mid i = 1, ..., q\}$ là một hệ độc lập tuyến tính. Chứng minh sẽ kết thúc nếu ta chỉ ra được rằng $q = n$. Giả sử ngược lại, $q < n$. Với mỗi $i \in \{1, ..., q\}$, do tính compắc của T, ta có thể giả sử rằng (bằng cách lấy một dãy con nếu cần) $\{t_i^k\}_k$ hội tụ đến $t_i \in T$. Vì $t_i^k \in T_{p_k}(x^k)$, nên từ Mệnh đề 2.1.1 suy ra $t_i \in T_{p_0}(x^0)$ với mọi $i \in \{1, ..., q\}$.

Với mọi k đủ lớn, đặt $\mu^k := \sum_{i=1}^{q} \lambda_i^k$. Ta khẳng định rằng tồn tại $\alpha > 0$ sao cho $\mu^k \leq \alpha$ với mọi k đủ lớn. Thật vậy, nếu khẳng định là sai, thì bằng cách lấy một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng $\lim\limits_{k\to+\infty} \mu^k = +\infty$ và $\{\frac{\lambda_i^k}{\mu^k}\}_k$ hội tụ đến $\mu_i \geq 0$ với mọi $i \in \{1, ..., q\}$. Chú ý rằng $t \mapsto g_t(x)$ là liên tục với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Áp dụng Bổ đề 2.1.1 cho các dãy $\{g_{t_i^k}\}, i \in \{1, ..., q\}$ và $\{x^k\}$, ta nhận được $u_{t_i} := \lim\limits_{k\to\infty} u^k_{t_i^k} \in -\partial g_{t_i}(x^0), i \in \{1, ..., q\}$. Chia hai vế cho μ^k ở trong (2.2.4) và để $k \to +\infty$, ta thu được

$$0_n = \sum_{i=1}^{q} \mu_i u_{t_i} \text{ với } \sum_{i=1}^{q} \mu_i = 1.$$

Một cách tương đương,

$$0_n = \sum_{i=1}^{q} \mu_i(-u_{t_i}) \text{ với } \sum_{i=1}^{q} \mu_i = 1.$$

Do đó, $0_n \in \text{co}\left(\bigcup_{t\in T_{p_0}(x^0)} \partial g_t(x^0)\right)$. Điều này mâu thuẫn với Bổ đề 2.1.2. Vì vậy khẳng định vừa nêu là đúng. Do đó, dãy $\{\lambda_i^k\}$ cũng bị chặn trên bởi α. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng

$$\lim_{k\to+\infty} \hbar_k = \hbar_0 \in K^*, \ \ ||\hbar_0||_m = 1, \ \ \lim_{k\to+\infty} \lambda_i^k = \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, ..., q\}.$$

Bằng cách sử dụng lại một lần nữa Bổ đề 2.1.1, ta có thể giả sử rằng, với mỗi $i \in \{1, ..., q\}$, $\{u^k_{t_i^k}\}$ hội tụ đến (thêm một lần nữa) $u_{t_i} \in -\partial g_{t_i}(x^0)$, và $\{u^k\}$ hội tụ đến $u \in \partial(\hbar_0 \circ f_0)(x^0)$. Cho $k \to +\infty$ ở trong (2.2.4), ta thu được

$$u = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i u_{t_i} \text{ với } \{t_1, ..., t_q\} \subset T_{p_0}(x^0) \quad \text{và} \quad q < n.$$

Điều này cùng với Bổ đề 2.1.3 dẫn đến x^0 là nghiệm vô hướng hóa bởi $\hbar_0$, mâu thuẫn với giả thiết (ii) của Định lý 2.2.1. Vì thế, $q = n$. □

Mệnh đề 2.2.2. *Nếu tất cả các giả thiết của Định lý 2.2.1 được thỏa mãn, thì các phát biểu sau đây đúng:*

(a) *Với mỗi $\hbar_0 \in K^*$ thỏa mãn x^0 là nghiệm vô hướng hóa tương ứng, ta có*

$$\text{argmin}\{\hbar_0 \circ f_0(z) \mid z \in C(p_0)\} = \{x^0\}.$$

(b) *Với mỗi dãy* $\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset P$ *hội tụ đến* p_0, *ta có thể tìm được các phần tử* $x^k \in \mathcal{S}(p_k)$ *sao cho* $x^k \to x^0$ *khi* $k \to +\infty$.

Chứng minh. (a) Giả sử rằng x^0 là nghiệm vô hướng hóa bởi $\hbar_0$. Khi đó, tồn tại $\hbar_0 \in K^*$ với $||\hbar_0||_m = 1$ sao cho

$$x^0 \in \operatorname{argmin}\{\hbar_0 \circ f_0(z) \mid z \in C(p_0)\}.$$

Theo Bổ đề 2.1.3, ta có

$$\partial(\hbar_0 \circ f_0)(x^0) \cap (-A_{p_0}(x^0)) \neq \emptyset.$$

Do giả thiết (ii) của Định lý 2.2.1 và định lý Carathéodory (xem [27, Theorem 1, p. 184]), tồn tại $u \in \partial(\hbar_0 \circ f_0)(x^0), u_{t_i} \in -\partial g_{t_i}(x^0), \lambda_i > 0$ và $t_i \in T_{p_0}(x^0)$, $i \in \{1, ..., n\}$ sao cho $\{u_{t_1}, ..., u_{t_n}\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{t_i}.$$

Bây giờ, giả sử ngược lại rằng tồn tại

$$y \in \operatorname{argmin}\{\hbar_0 \circ f_0(z) \mid z \in C(p_0)\} \backslash \{x^0\}. \tag{2.2.5}$$

Với mỗi $i \in \{1, ..., n\}$, do $t_i \in T_{p_0}(x^0)$, ta có

$$0 \geq g_{t_i}(y) - b_0(t_i) = g_{t_i}(y) - g_{t_i}(x^0) \geq -u_{t_i}(y - x^0).$$

Vì vậy, từ tính lồi của $\hbar_0 \circ f_0$ suy ra

$$0 = \hbar_0 \circ f_0(y) - \hbar_0 \circ f_0(x^0) \geq u(y - x^0) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{t_i}(y - x^0) \geq 0.$$

Điều này có nghĩa là $u_{t_i}(y - x^0) = 0$ với mọi $i = 1, ..., n$.

Vì $\{u_{t_1}, ..., u_{t_n}\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$, nên tồn tại các số thực β_i, $i \in \{1, ..., n\}$ sao cho $y - x^0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_{t_i}$. Do đó,

$$(||y - x^0||_n)^2 = \langle y - x^0, y - x^0 \rangle = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_{t_i}(y - x^0) = 0.$$

Vì vậy, ta thu được $y = x^0$, mâu thuẫn với (2.2.5).

(b) Giả sử ngược lại rằng tồn tại $\{p_k := (f_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset P$ và một tập mở $U \in \mathcal{N}(x^0)$ sao cho $\{p_k\}$ hội tụ đến $p_0 := (f_0, b_0)$ và

$$\mathcal{S}(p_k) \cap U = \emptyset \quad \forall k. \tag{2.2.6}$$

Lấy một hình cầu mở tâm x^0 bán kính $r > 0$, được ký hiệu bởi $B_r(x^0)$, sao cho $\mathrm{cl}B_r(x^0) \subset U$. Do giả thiết (i) của Định lý 2.2.1, điều kiện Slater đúng cho $C(p_0)$. Từ Bổ đề 2.1.4(b) suy ra C là nửa liên tục dưới tại p_0. Vì thế, tồn tại dãy $\{v^k\}$ sao cho $v^k \to x^0$ và $v^k \in C(p_k)$ với mọi $k \geq 1$. Do $B_r(x^0)$ là tập mở chứa x^0, nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $v^k \in B_r(x^0)$ với mọi $k \geq 1$. Với mỗi $k \geq 1$, ta đặt

$$W_k(x^0) := \left\{ x \in C(p_k) \cap B_r(x^0) \mid ||x - x^0||_n < ||v^k - x^0||_n + \frac{1}{k} \right\}.$$

Dễ thấy $v^k \in W_k(x^0)$ với mọi $k \geq 1$. Suy ra $W_k(x^0) \neq \emptyset$ với mọi $k \geq 1$.

Ta khẳng định rằng tồn tại $k_0 \geq 1,\ x^k \in W_k(x^0)$ và $z^k \in C(p_k) \backslash B_r(x^0)$ sao cho

$$f_k(z^k) - f_k(x^k) \in -K \backslash \{0_m\} \quad \forall k \geq k_0. \tag{2.2.7}$$

Thật vậy, nếu khẳng định trên là sai, thì tồn tại dãy con $\{k_l\} \subset \{k\}$, để cho gọn ta vẫn ký hiệu dãy con này là $\{k\}$, sao cho với mỗi $k \geq 1$, với mọi $x \in W_k(x^0)$ và mọi $z \in C(p_k) \backslash B_r(x^0)$, ta có

$$f_k(z) - f_k(x) \notin -K \backslash \{0_m\}. \tag{2.2.8}$$

Ký hiệu $\mathcal{S}(\Omega, f_k)$ là tập các nghiệm hữu hiệu của bài toán

$$\min\nolimits_K \{f_k(x) \mid x \in \Omega\},$$

trong đó $\Omega \subset C(p_k)$. Từ Bổ đề 2.1.4(a) kéo theo rằng $C(p_k)$ là đóng với mọi k. Do tính compắc của $C(p_k) \cap \mathrm{cl}B_r(x^0)$ và tính liên tục của f_k (xem [50, Lemma 2.1]), ta có $\mathcal{S}(C(p_k) \cap \mathrm{cl}B_r(x^0), f_k) \neq \emptyset$. Xét hai khả năng sau:

Nếu $\mathcal{S}(C(p_k) \cap \mathrm{cl}B_r(x^0), f_k) \cap W_k(x^0) \neq \emptyset$, thì tồn tại

$$\bar{z} \in \mathcal{S}(C(p_k) \cap \mathrm{cl}B_r(x^0), f_k) \cap W_k(x^0).$$

Khi đó, $\bar{z} \in \mathcal{S}(p_k)$. Thật vậy, nếu $\bar{z} \notin \mathcal{S}(p_k)$, thì do

$$\bar{z} \in \mathcal{S}(C(p_k) \cap \mathrm{cl}B_r(x^0), f_k),$$

tồn tại $z \in C(p_k) \backslash B_r(x^0)$ sao cho $f_k(z) - f_k(\bar{z}) \in -K \backslash \{0_m\}$. Quan hệ này mâu thuẫn với (2.2.8). Vậy $\bar{z} \in \mathcal{S}(p_k)$ và do đó,

$$\bar{z} \in \mathcal{S}(p_k) \cap W_k(x^0) \subset \mathcal{S}(p_k) \cap B_r(x^0) \subset \mathcal{S}(p_k) \cap U.$$

Điều này trái ngược với (2.2.6).

Nếu $\mathcal{S}(C(p_k) \cap \mathrm{cl}B_r(x^0), f_k) \cap W_k(x^0) = \emptyset$, thì ta chọn

$$\bar{y} \in W_k(x^0) \backslash \mathcal{S}(C(p_k) \cap \mathrm{cl}B_r(x^0), f_k).$$

Khi đó tồn tại $z_{\bar{y}} \in C(p_k) \cap \mathrm{cl}B_r(x^0)$ sao cho

$$f_k(z_{\bar{y}}) - f_k(\bar{y}) \in -K \backslash \{0_m\}. \tag{2.2.9}$$

Đặt $D := \{x \in C(p_k) \cap \mathrm{cl}B_r(x^0) \mid f_k(x) - f_k(z_{\bar{y}}) \in -K\}$. Dễ thấy rằng $\mathcal{S}(D, f_k) \neq \emptyset$ và

$$\mathcal{S}(D, f_k) \subset \mathcal{S}(C(p_k) \cap \mathrm{cl}B_r(x^0), f_k).$$

Lấy tùy ý $\bar{z} \in \mathcal{S}(D, f_k)$. Khi đó, $\bar{z} \in \mathcal{S}(p_k)$. Thật vậy, nếu $\bar{z} \notin \mathcal{S}(p_k)$, thì do $\bar{z} \in \mathcal{S}(C(p_k) \cap \mathrm{cl}B_r(x^0), f_k)$, tồn tại $y \in C(p_k) \backslash B_r(x^0)$ sao cho

$$f_k(y) - f_k(\bar{z}) \in -K \backslash \{0_m\}. \tag{2.2.10}$$

Vì $\bar{z} \in D$, nên $f_k(\bar{z}) - f_k(z_{\bar{y}}) \in -K$. Kết hợp điều này với (2.2.9) và (2.2.10), ta thu được

$$f_k(y) - f_k(\bar{y}) \in -K \backslash \{0_m\},$$

mâu thuẫn với (2.2.8). Vì vậy, $\bar{z} \in \mathcal{S}(p_k)$. Từ $\bar{z} \in D$ suy ra

$$\bar{z} \in \mathcal{S}(p_k) \cap \mathrm{cl} B_r(x^0) \subset \mathcal{S}(p_k) \cap U.$$

Điều này trái ngược với (2.2.6). Vậy khẳng định ở (2.2.7) là đúng.

Để tiếp tục, ta xét hai trường hợp. Nếu $\{z^k\}_{k \geq k_0}$ bị chặn, thì bằng cách lấy một dãy con nếu cần ta có thể giả sử rằng $z^k \to z^0 \in \mathbb{R}^n \backslash B_r(x^0)$. Theo Bổ đề 2.1.4(a), C là đóng tại p_0, nên suy ra $z^0 \in C(p_0)$. Một mặt, bằng cách cho $k \to \infty$ ở trong (2.2.7), ta thu được

$$f_0(z^0) - f_0(x^0) \in -K. \tag{2.2.11}$$

Do đó, $f_0(z^0) = f_0(x^0)$, bởi vì $x^0 \in \mathcal{S}(p_0)$. Mặt khác, vì $x^0 \in \mathcal{S}(p_0)$, nên từ Nhận xét 2.1.1 suy ra rằng x^0 là nghiệm vô hướng hóa bởi $\hbar_0 \in K^*$ nào đó. Vì thế, $\hbar_0 \circ f_0(z^0) = \hbar_0 \circ f_0(x^0)$. Điều này kéo theo

$$z^0 \in \mathrm{argmin}\{\hbar_0 \circ f_0(z) \mid z \in C(p_0)\}. \tag{2.2.12}$$

Theo khẳng định (a),

$$\mathrm{argmin}\{\hbar_0 \circ f_0(z) \mid z \in C(p_0)\} = \{x^0\}. \tag{2.2.13}$$

Kết hợp (2.2.12) với (2.2.13), ta thu được $z^0 = x^0$. Điều này là vô lý, bởi vì $z^0 \in \mathbb{R}^n \backslash B_r(x^0)$.

Nếu $\{z^k\}_{k \geq k_0}$ không bị chặn, thì ta có thể giả sử rằng

$$||z^k||_n \to \infty \text{ và } \frac{z^k}{||z^k||_n} \to \hat{z} \in \mathbb{R}^n \text{ với } ||\hat{z}||_n = 1.$$

Do $b_k \to b_0$, tồn tại α sao cho

$$|b_k(t)| \le \alpha \ \forall t \in T \ \forall k.$$

Một mặt, vì g_t là lồi với mọi $t \in T$, nên ta có, với k đủ lớn,

$$\begin{aligned} g_t\left(\frac{1}{||z^k||_n}z^k + \big(1 - \frac{1}{||z^k||_n}\big)x^k\right) &\le \frac{1}{||z^k||_n}g_t(z^k) + \big(1 - \frac{1}{||z^k||_n}\big)g_t(x^k) \\ &\le \frac{1}{||z^k||_n}b_k(t) + \big(1 - \frac{1}{||z^k||_n}\big)b_k(t) = b_k(t). \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Cho $k \to \infty$ ở trong (2.2.14), ta thu được $g_t(\hat{z} + x^0) \le b_0(t)$ với mọi $t \in T$. Điều này có nghĩa là $\hat{z} + x^0 \in C(p_0)$. Mặt khác, do f_k là K-lồi, ta có, với k đủ lớn,

$$f_k\left(\frac{1}{||z^k||_n}z^k + \big(1 - \frac{1}{||z^k||_n}\big)x^k\right) - \frac{1}{||z^k||_n}f_k(z^k) - (1 - \frac{1}{||z^k||_n})f_k(x^k) \in -K.$$

Một cách tương đương,

$$f_k\left(\frac{1}{||z^k||_n}z^k + \big(1 - \frac{1}{||z^k||_n}\big)x^k\right) - f_k(x^k) \in \frac{1}{||z^k||_n}[f_k(z^k) - f_k(x^k)] - K.$$

Kết hợp điều này với (2.2.7) dẫn đến

$$f_k\left(\frac{1}{||z^k||_n}z^k + \big(1 - \frac{1}{||z^k||_n}\big)x^k\right) - f_k(x^k) \in -K. \tag{2.2.15}$$

Cho $k \to \infty$ ở trong (2.2.15), ta thu được $f_0(\hat{z} + x^0) - f_0(x^0) \in -K$. Vì vậy $f_0(\hat{z}+x^0) = f_0(x^0)$, bởi vì $x^0 \in \mathcal{S}(p_0)$. Bằng cách lập luận tương tự như ở trên ta đi đến $\hat{z} + x^0 = x^0$, điều này không thể. Mệnh đề đã được chứng minh. □

Chứng minh Định lý 2.2.1. Giả sử khẳng định của định lý là sai. Khi đó phải tồn tại dãy $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ hội tụ đến x^0, hai dãy $\{p_k := (f_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset P$ và $\{\bar{p}_k := (\bar{f}_k, \bar{b}_k)\}_{k=1}^{\infty} \subset P$ cùng hội tụ đến p_0, sao cho với mọi $k \ge 1$, $x^k \in \mathcal{S}(p_k)$ và

$$d(x^k, \mathcal{S}(\bar{p}_k)) > kd(p_k, \bar{p}_k). \tag{2.2.16}$$

Theo Mệnh đề 2.2.2, tồn tại $\bar{x}^k \in \mathcal{S}(\bar{p}_k)$ thỏa mãn $\bar{x}^k \to x^0$ khi $k \to +\infty$. Từ (2.2.16) suy ra

$$\max_{t \in T} |b_k(t) - \bar{b}_k(t)| \le d(p_k, \bar{p}_k) < \frac{1}{k} ||x^k - \bar{x}^k||_n \ \forall k \ge 1.$$

Do đó, với mỗi k mà $x^k \neq \bar{x}^k$, ta có

$$\frac{\max_{t \in T} |b_k(t) - \bar{b}_k(t)|}{||x^k - \bar{x}^k||_n} < \frac{1}{k}. \tag{2.2.17}$$

Theo Mệnh đề 2.2.1, với mọi k đủ lớn, tồn tại $\hbar_k, \bar{\hbar}_k \in K^*$ với $||\hbar_k||_m = ||\bar{\hbar}_k||_m = 1$, $u^k \in \partial(\hbar_k \circ f_k)(x^k), \bar{u}^k \in \partial(\bar{\hbar}_k \circ \bar{f}_k)(\bar{x}^k), u^k_{t_i^k} \in -\partial g_{t_i^k}(x^k), t_i^k \in T_{p_k}(x^k), \bar{u}^k_{\bar{t}_i^k} \in -\partial g_{\bar{t}_i^k}(\bar{x}^k), \bar{t}_i^k \in T_{\bar{p}_k}(\bar{x}^k)$ và tồn tại $\lambda_i^k, \bar{\lambda}_i^k > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, sao cho

$$u^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k u^k_{t_i^k}, \quad \text{và} \quad \bar{u}^k = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i^k \bar{u}^k_{\bar{t}_i^k}, \tag{2.2.18}$$

ở đó $\{u^k_{t_1^k}, ..., u^k_{t_n^k}\}$ và $\{\bar{u}^k_{\bar{t}_1^k}, ..., \bar{u}^k_{\bar{t}_n^k}\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Bằng cách lấy một dãy con nếu cần, với mỗi $i \in \{1, ..., n\}$, ta có thể giả sử rằng các dãy $\{t_i^k\}_k$ và $\{\bar{t}_i^k\}_k$ hội tụ tương ứng đến t_i và $\bar{t}_i$ nào đó. Từ Mệnh đề 2.1.1 suy ra rằng $t_i,\ \bar{t}_i \in T_{p_0}(x^0)$. Giống như trong chứng minh của Mệnh đề 2.2.1, ta có thể giả sử rằng $\{\lambda_i^k\}_k$ và $\{\bar{\lambda}_i^k\}_k$ hội tụ tương ứng đến λ_i và $\bar{\lambda}_i$ nào đó. Đồng thời ta có thể giả sử rằng $\lim\limits_{k\to\infty} \hbar_k = \hbar \in K^*$, $\lim\limits_{k\to\infty} \bar{\hbar}_k = \bar{\hbar} \in K^*$ với $||\hbar||_m = ||\bar{\hbar}||_m = 1$ và, với mỗi $i \in \{1, 2, ..., n\}$, các dãy $\{u^k\}_k, \{\bar{u}^k\}_k, \{u^k_{t_i^k}\}_k, \{\bar{u}^k_{\bar{t}_i^k}\}_k$ hội tụ tương ứng đến $u \in \partial(\hbar \circ f_0)(x^0), \bar{u} \in \partial(\bar{\hbar} \circ f_0)(x^0), u_{t_i} \in -\partial g_{t_i}(x^0), \bar{u}_{\bar{t}_i} \in -\partial g_{\bar{t}_i}(x^0)$ nào đó.

Bằng phép qua giới hạn ở trong (2.2.18), ta thu được

$$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{t_i}, \quad \text{và} \quad \bar{u} = \sum_{i=1}^n \bar{\lambda}_i \bar{u}_{\bar{t}_i}. \tag{2.2.19}$$

Từ (2.2.19) và Bổ đề 2.1.3 suy ra rằng x^0 là nghiệm vô hướng hóa bởi cả $\hbar$ và $\bar{\hbar}$. Giả thiết (ii) cùng với định lý Carathéodory (xem [27, Theorem 1, p. 184]) đảm bảo rằng $\lambda_i > 0, \bar{\lambda}_i > 0$ với mọi $i = 1, ..., n$ và đồng thời cả $\{u_{t_1}, ..., u_{t_n}\}$ và $\{\bar{u}_{\bar{t}_1}, ..., \bar{u}_{\bar{t}_n}\}$ là các cơ sở $\mathbb{R}^n$.

Một mặt, từ $t_i^k \in T_{p_k}(x^k)$ và $\bar{x}^k \in \mathcal{S}(\bar{p}_k) \subset C(\bar{p}_k)$ với mọi $i \in \{1, ..., n\}$ và mọi k suy ra

$$g_{t_i^k}(x^k) = b_k(t_i^k), \;\; g_{t_i^k}(\bar{x}^k) \leq \bar{b}_k(t_i^k).$$

Do đó, với sự để ý đến (2.2.17),

$$u_{t_i^k}\frac{x^k - \bar{x}^k}{||x^k - \bar{x}^k||_n} = -u_{t_i^k}\frac{\bar{x}^k - x^k}{||x^k - \bar{x}^k||_n} \leq \frac{g_{t_i^k}(\bar{x}^k) - g_{t_i^k}(x^k)}{||x^k - \bar{x}^k||_n} \leq \frac{\bar{b}_k(t_i^k) - b_k(t_i^k)}{||x^k - \bar{x}^k||_n} < \frac{1}{k}. \tag{2.2.20}$$

Bằng cách lấy một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng $\left\{\frac{\bar{x}^k - x^k}{||x^k - \bar{x}^k||_n}\right\}_k$ hội tụ đến $z \in \mathbb{R}^n$ với $||z||_n = 1$. Để cho $k \to \infty$ ở trong (2.2.20), ta thu được $u_{t_i}z \leq 0$. Kết hợp điều này với (2.2.19) dẫn đến

$$\langle u, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_{t_i} z \leq 0.$$

Nếu $\langle u, z\rangle = 0$, thì $u_{t_i}z = 0$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$, mâu thuẫn với $z \neq 0$ và $\{u_{t_1}, ..., u_{t_n}\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$. Do đó,

$$\langle u, z\rangle < 0. \tag{2.2.21}$$

Mặt khác, bằng cách lập luận tương tự như trên ta thấy rằng với mọi $i \in \{1, ..., n\}$ và mọi k,

$$g_{\bar{t}_i^k}(\bar{x}^k) = \bar{b}_k(\bar{t}_i^k), \;\; g_{\bar{t}_i^k}(x^k) \leq b_k(\bar{t}_i^k),$$

do đó, $\bar{u}_{\bar{t}_i}z \geq 0$. Điều này cùng với (2.2.19) kéo theo

$$\langle \bar{u}, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i \bar{u}_{\bar{t}_i} z \geq 0.$$

Do $\{\bar{u}_{\bar{t}_1}, ..., \bar{u}_{\bar{t}_n}\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^n$ và $z \neq 0$, ta có

$$\langle \bar{u}, z \rangle > 0. \tag{2.2.22}$$

Vì vậy, từ (2.2.21) và (2.2.22) suy ra

$$\langle u, z \rangle \cdot \langle \bar{u}, z \rangle < 0,$$

mâu thuẫn với giả thiết (ii). Vậy định lý đã được chứng minh. □

Định lý 2.2.1 mở rộng [13, Theorem 3.1]. Cụ thể hơn, ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.1. *Xét bài toán* (2.1.2)*, cho* $p_0 := (A_0, b_0) \in P_L$ *và* $(p_0, x^0) \in \mathrm{gph}\mathcal{S}$. *Giả sử rằng các điều kiện sau được thỏa mãn:*

(i) *Điều kiện Slater đúng cho* $C(p_0)$.

(ii) *Không tồn tại* $T_0 \subset T_{p_0}(x^0)$ *với* $|T_0| < n$ *thỏa mãn*

$$-\hbar_0 A_0 \in \mathrm{cone}(\{B(t) \mid t \in T_0\})$$

với mọi $\hbar_0 \in K^*$ *sao cho* x^0 *là nghiệm vô hướng hóa bởi* $\hbar_0$. *Hơn nữa, nếu* x^0 *là nghiệm vô hướng hóa bởi cả* $\hbar$ *và* $\bar{\hbar}$, *thì với mỗi* $z \in \mathbb{R}^n$ *với* $||z||_n = 1$,

$$\langle \hbar A_0, z \rangle \cdot \langle \bar{\hbar} A_0, z \rangle \geq 0.$$

Khi đó $\mathcal{S}$ *là giả-Lipschitz tại* (p_0, x^0).

2.3 Một số ví dụ

Trước hết, ta xét một ví dụ minh họa để thấy Định lý 2.2.1 có thể áp dụng cho những bài toán cụ thể.

Ví dụ 2.3.1. Lấy $T = \{1, 2\}$. Cho $f_0 \in CO_{\mathbb{R}^2_+}[\mathbb{R}, \mathbb{R}^2]$ là hàm véctơ $\mathbb{R}^2_+$-lồi, $b_0 \in C[T, \mathbb{R}]$ và $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \in T$ là các hàm lồi được định nghĩa như sau.

$$f_0(x) = (x + 1, x + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad b_0(t) = 2 \quad \forall t \in T,$$

$$g_t(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{nếu } t = 1 \\ x+1 & \text{nếu } t = 2. \end{cases}$$

Đặt $p_0 := (f_0, b_0) \in P := CO_{\mathbb{R}^2_+}[\mathbb{R}, \mathbb{R}^2] \times C[T, \mathbb{R}]$. Ta thấy rằng $C(p_0) = [-1, 1]$. Khảo sát điểm $x^0 := -1 \in \mathcal{S}(p_0)$. Rõ ràng rằng $\hat{x} := 0$ thỏa mãn $g_t(\hat{x}) < b_0(t)$ với mọi $t \in T$. Do đó, giả thiết (i) của Định lý 2.2.1 được thỏa mãn. Chúng ta hãy kiểm tra giả thiết (ii). Với mỗi $\hbar = (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2_+$ với $||\hbar||_2 = 1$, ta có $\partial(\hbar \circ f_0)(x^0) = \lambda + \gamma \neq \{0\}$ và hơn nữa,

$$\begin{cases} \langle \partial(\hbar \circ f_0)(x^0), z \rangle < 0 & \text{nếu } z = -1 \\ \langle \partial(\hbar \circ f_0)(x^0), z \rangle > 0 & \text{nếu } z = 1. \end{cases}$$

Vì vậy, nếu $x^0 = -1$ là nghiệm vô hướng hóa bởi cả $\hbar$ và $\bar{\hbar}$, thì

$$\langle \partial(\hbar \circ f_0)(x^0), z \rangle \cdot \langle \partial(\bar{\hbar} \circ f_0)(x^0), z \rangle > 0$$

với mọi $z \in \{-1, 1\}$ và do đó, giả thiết (ii) cũng được thỏa mãn. Bây giờ, áp dụng Định lý 2.2.1, ta kết luận rằng $\mathcal{S}$ là giả-Lipschitz tại (p_0, x^0).

Hai ví dụ tiếp theo chỉ ra rằng các giả thiết (i) và (ii) trong Định lý 2.2.1 là thiết yếu, có nghĩa là nếu ta bỏ đi một trong hai giả thiết thì kết luận của Định lý 2.2.1 sẽ không còn giá trị.

Ví dụ 2.3.2. Lấy $T = [0, 1]$. Cho $f_0 \in CO_{\mathbb{R}^2_+}[\mathbb{R}, \mathbb{R}^2]$ là hàm véctơ $\mathbb{R}^2_+$-lồi, $b_0, b_k \in C[T, \mathbb{R}], k \geq 1$ và $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \in T$ là các hàm lồi được định nghĩa như sau.

$$f_0(x) = (x+1, x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad b_0(t) = t \quad \forall t \in [0, 1],$$

$$g_t(x) = -tx \quad \forall t \in [0, 1], \quad b_k(t) = \begin{cases} \frac{k+1}{k}t - \frac{1}{k} & \text{nếu } t \in [\frac{1}{k+1}, 1] \\ 0 & \text{nếu } t \in [0, \frac{1}{k+1}]. \end{cases}$$

Đặt $p_0 := (f_0, b_0), p_k := (f_0, b_k) \in P := CO_{\mathbb{R}^2_+}[\mathbb{R}, \mathbb{R}^2] \times C[T, \mathbb{R}]$ với mọi $k \geq 1$. Ta thấy rằng $p_k \to p_0$, $C(p_0) = [-1, +\infty)$, $\mathcal{S}(p_0) = \{-1\}$,

$C(p_k) = [0, +\infty)$ và $\mathcal{S}(p_k) = \{0\}$ với mọi $k \geq 1$. Xét điểm $x^0 := -1 \in \mathcal{S}(p_0)$. Với mỗi $\hbar = (\lambda, \gamma) \in \mathbb{R}^2_+$ với $||\hbar||_2 = 1$, ta có $\partial(\hbar \circ f_0)(x^0) = \lambda + \gamma \neq \{0\}$ và hơn nữa,

$$\begin{cases} \langle \partial(\hbar \circ f_0)(x^0), z\rangle < 0 & \text{nếu } z = -1 \\ \langle \partial(\hbar \circ f_0)(x^0), z\rangle > 0 & \text{nếu } z = 1. \end{cases}$$

Vì thế, nếu $x^0 = -1$ là nghiệm vô hướng hóa bởi cả $\hbar$ và $\bar{\hbar}$, thì

$$\langle \partial(\hbar \circ f_0)(x^0), z\rangle \cdot \langle \partial(\bar{\hbar} \circ f_0)(x^0), z\rangle > 0$$

với mọi $z \in \{-1, 1\}$ và do đó, giả thiết (ii) được thỏa mãn. Nhận thấy rằng điều kiện Slater không đúng cho p_0 (giả thiết (i) bị vi phạm). Trên thực tế, $\mathcal{S}$ không là giả-Lipschitz tại (p_0, x^0).

Ví dụ 2.3.3. Lấy $T = \{1, 2, 3\}$ và cho $b_0, b_k \in C[T, \mathbb{R}], f_0, f_k \in CO_{\mathbb{R}_+}[\mathbb{R}^2, \mathbb{R}], k \geq 1, g_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, t \in T$ là các hàm lồi được định nghĩa như sau.

$$f_0(x) = x_1 + 1 \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad b_0(t) = 0 \quad \forall t \in T,$$

$$f_k(x) = x_1 + 1 - \frac{1}{k^3}x_2 \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad b_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t \in \{1, 3\} \\ -\frac{1}{k} & \text{nếu } t = 2, \end{cases}$$

$$g_t(x) = \begin{cases} -x_1 + x_2 + 1 & \text{nếu } t = 1 \\ -x_1 + 1 & \text{nếu } t = 2 \\ -x_1 - x_2 + 1 & \text{nếu } t = 3 \end{cases} \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Đặt $p_0 := (f_0, b_0), p_k := (f_k, b_k) \in P := CO_{\mathbb{R}_+}[\mathbb{R}^2, \mathbb{R}] \times C[T, \mathbb{R}]$ với mọi $k \geq 1$. Khi đó $p_k \to p_0$. Bằng cách tính toán trực tiếp ta thu được

$$C(p_0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x_1 < +\infty, -x_1 + 1 \leq x_2 \leq x_1 - 1\},$$

$\mathcal{S}(p_0) = \{(1, 0)\}$. Đặt $x^0 := (1, 0) \in \mathcal{S}(p_0)$. Rõ ràng rằng $\hat{x} := (2, 0) \in \mathbb{R}^2$ thỏa mãn $g_t(\hat{x}) < b_0(t)$ với mọi $t \in T$. Do đó, giả thiết (i) của Định lý 2.2.1

được thỏa mãn. Tuy nhiên, giả thiết (ii) bị vi phạm. Thật vậy, với bất kỳ $\hbar \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ và $\hbar = 1$, ta có

$$\partial(\hbar \circ f_0)(x^0) = (1, 0) \in \operatorname{cone}(\{-\partial g_t(x^0) = (1, 0) \mid t = 2 \in T_{p_0}(x^0)\}).$$

Ta thấy rằng $\mathcal{S}$ không là giả-Lipschitz tại (p_0, x^0). Thật vậy, chọn $\bar{p}_k := (f_0, b_k)$, ta có $\bar{p}_k \to p_0$ khi $k \to \infty$. Bằng cách tính toán trực tiếp ta thu được

$$C(\bar{p}_k) = C(p_k) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1+\frac{1}{k} \leq x_1 < +\infty, -x_1+1 \leq x_2 \leq x_1-1\},$$

$$\mathcal{S}\left(\bar{p}_k\right) = \left\{\left(1 + \frac{1}{k}, x_2\right) | -\frac{1}{k} \leq x_2 \leq \frac{1}{k}\right\}, \mathcal{S}(p_k) = \left\{\left(1 + \frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\} \quad \forall k \geq 1.$$

Ngoài ra,

$$d(p_k, \bar{p}_k) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^r} \frac{\frac{r}{k^3}}{1 + \frac{r}{k^3}} \leq \frac{1}{k^3} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{2^r} =: \frac{l_0}{k^3}, \text{ ở đây } l_0 := \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{2^r} < \infty.$$

Lấy $\bar{x}^k := (1 + \frac{1}{k}, 0) \in \mathcal{S}(\bar{p}_k)$, ta có

$$d(\bar{x}^k, \mathcal{S}(p_k)) = \frac{1}{k} > \frac{l_0}{k^2} \geq k d(p_k, \bar{p}_k) \quad \forall k > l_0.$$

Vì vậy, $\mathcal{S}$ không là giả-Lipschitz tại (p_0, x^0).

Kết luận của Chương 2

Các kết quả chính của chương này bao gồm:

- Các điều kiện đủ để cho ánh xạ nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi là giả-Lipschitz trong Định lý 2.2.1.

- Các ví dụ 2.3.1, 2.3.2 và 2.3.3 (minh họa và phân tích kết quả chính).

Chương 3

Đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu trong tối ưu véctơ

Trong chương này chúng tôi sử dụng *đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng* được giới thiệu bởi Chen [8] để phân tích độ nhạy nghiệm.

Mục 3.1 được dành để giới thiệu một số khái niệm cơ bản và trình bày một vài kết quả bổ trợ. Mục 3.2 đưa ra một số công thức để tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu trong bài toán tối ưu véctơ không có ràng buộc. Mục 3.3 thiết lập các công thức như ở trong Mục 3.2, nhưng cho bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc.

Các kết quả chính trình bày ở đây được lấy từ bài báo [16].

3.1 Các khái niệm cơ bản và kết quả bổ trợ

Trong chương này, trừ khi quy ước khác đi, ta vẫn sử dụng các khái niệm và ký hiệu đã đưa ra trong các chương trước. Cho $f : P \times X \to Y$ là hàm véctơ và $C : P \rightrightarrows X$ là ánh xạ đa trị. Ở đây P, X và Y được giả sử là các không gian Euclide hữu hạn chiều được trang bị với chuẩn $||\cdot||$. Cho $K \subset Y$ là nón lồi đóng nhọn. Nón K cảm sinh một quan hệ thứ tự bộ phận $\preceq_K$ ở trên Y như sau:

$$y \preceq_K y' \Leftrightarrow y' - y \in K \quad \forall y, y' \in Y.$$

Xét bài toán tối ưu véctơ

$$\min\nolimits_K \left\{ f(p,x) \,|\, x \in C(p) \right\} \tag{3.1.1}$$

phụ thuộc vào tham số $p \in P$.

Định nghĩa 3.1.1. Ta nói $y \in A$ là *điểm hữu hiệu* của tập $A \subset Y$ đối với nón K nếu $(y - K) \cap A = \{y\}$. Tập tất cả các điểm hữu hiệu của A đối với nón K được ký hiệu bởi $E(A|K)$. Quy ước, $E(\emptyset|K) := \emptyset$.

Cho $F : P \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị được xác định bởi

$$F(p) := (f \circ C)(p) := f(p, C(p)) = \{f(p,x) \,|\, x \in C(p)\}. \tag{3.1.2}$$

Ta đặt

$$\mathcal{F}(p) := E(F(p)|K), \quad p \in P \tag{3.1.3}$$

và gọi $\mathcal{F} : P \rightrightarrows Y$ là *hàm giá trị tối ưu* của bài toán (3.1.1). Khi đó, với mỗi $p \in P$, tập nghiệm hữu hiệu $\mathcal{S}(p)$ của bài toán (3.1.1) được xác định bởi

$$\mathcal{S}(p) = \{x \in C(p) \mid f(p,x) \in \mathcal{F}(p)\}.$$

Định nghĩa 3.1.2. Cho $G : P \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị.

(i) Ta nói rằng G là *Lipschitz trên địa phương* (locally upper Lipschitzian) tại $\bar{p} \in P$ nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{p})$ và số thực $M > 0$ sao cho

$$G(p) \subset G(\bar{p}) + M||p - \bar{p}||B_Y \quad \forall p \in U.$$

(ii) G được gọi là *lồi* nếu

$$\alpha G(p) + (1-\alpha)G(p') \subset G(\alpha p + (1-\alpha)p') \quad \forall p, p' \in P, \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

(iii) G được gọi là *lồi theo nón K* (hay *K-lồi*) nếu

$$\alpha G(p) + (1-\alpha)G(p') \subset G(\alpha p + (1-\alpha)p') + K \quad \forall p, p' \in P, \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

Nhận xét 3.1.1. Ta biết rằng (chẳng hạn xem [50]) G là lồi khi và chỉ khi $\mathrm{gph}G$ là một tập lồi trong $P \times Y$. Theo [28, Lemma 14.8], G là K-lồi khi và chỉ khi $\mathrm{epi}G$ là một tập lồi trong $P \times Y$. Ở đây

$$\mathrm{epi}G := \{(p, y) \in P \times Y \mid p \in \mathrm{dom}G,\ y \in G(p) + K\}$$

ký hiệu cho *trên-đồ-thị* của ánh xạ đa trị G.

Để cho gọn trong các phát biểu về sau, ta ký hiệu các giả thiết như sau:

(A) *Ánh xạ tập ràng buộc C ở trong* (3.1.1) *là lồi và hàm mục tiêu f ở trong* (3.1.1) *là K-lồi;*

(B) *Ánh xạ đa trị F ở trong* (3.1.2) *là K-lồi.*

Ta có (xem [50, Proposition 2.1]), (A) kéo theo (B).

Định nghĩa 3.1.3. (Xem [2]) Cho $\Omega \subset Y$ và $\bar{y} \in \mathrm{cl}\Omega$.

(i) *Nón tiếp tuyến Bouligand* (hay *nón contingent*) của Ω tại $\bar{y}$ là được xác định bởi công thức

$$T^B(\Omega; \bar{y}) := \{v \in Y \mid \exists\{t_n\} \subset (0, +\infty), t_n \to 0, \exists\{v_n\} \subset Y, v_n \to v$$
$$\text{với} \quad \bar{y} + t_n v_n \in \Omega \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) *Nón tiếp tuyến Clarke* (hay *nón tiếp tuyến làm tròn*) của Ω tại $\bar{y}$ được xác định bởi công thức

$$T^C(\Omega; \bar{y}) := \{v \in Y \mid \forall\{\bar{y}_n\} \subset \Omega, \bar{y}_n \to \bar{y}, \forall\{t_n\} \subset (0, +\infty), t_n \to 0,$$
$$\exists\{v_n\} \subset Y, v_n \to v \text{ với } \quad \bar{y}_n + t_n v_n \in \Omega \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Nhận xét 3.1.2. Ta đã biết rằng các nón tiếp tuyến ở trên là đóng và $T^C(\Omega;\bar{y})$ là lồi. Hơn nữa, $T^C(\Omega;\bar{y}) \subset T^B(\Omega;\bar{y})$ và $T^C(\Omega;\bar{y}) = T^B(\Omega;\bar{y})$ khi Ω là tập lồi (xem [2]).

Nón đối cực âm của nón tiếp tuyến Clarke $T^C(\Omega;\bar{y})$, được ký hiệu bởi $N^C(\bar{y};\Omega)$, được gọi là *nón pháp tuyến Clarke* của $\Omega \subset Y$ tại $\bar{y}$,

$$N^C(\bar{y};\Omega) := T^C(\Omega;\bar{y})^\circ = \{v \in Y \mid \langle v, y\rangle \le 0 \quad \forall y \in T^C(\Omega;\bar{y})\}.$$

Khi Ω là tập lồi, $N^C(\bar{y};\Omega)$ trùng với *nón pháp tuyến* (theo nghĩa của giải tích lồi) của Ω tại điểm đó và được xác định bởi công thức

$$N(\bar{y};\Omega) := \{v \in Y \mid \langle v, y - \bar{y}\rangle \le 0 \quad \forall y \in \Omega\}.$$

Nón lùi xa của tập lồi khác rỗng $\Omega \subset Y$ được định nghĩa là tập

$$0^+\Omega := \{y \in Y \mid \Omega + y \subset \Omega\}.$$

Cho trước một tập $\widetilde{\Omega} \subset P \times Y$, ta định nghĩa phép chiếu tại $u \in P$ bởi

$$\Pi_u\widetilde{\Omega} := \{y \in Y \mid (u, y) \in \widetilde{\Omega}\}.$$

Định nghĩa 3.1.4. (Xem [8]) Cho $G : P \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị và $(\bar{p},\bar{y}) \in \mathrm{gph}G$. Ánh xạ đa trị $D^C G(\bar{p},\bar{y}) : P \rightrightarrows Y$ được gọi là *đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng* (generalized Clarke epiderivative) của G tại $(\bar{p},\bar{y})$ nếu

$$D^C G(\bar{p},\bar{y})(u) = E\big(\Pi_u T^C(\mathrm{epi}G;(\bar{p},\bar{y}))|K\big) \quad \forall u \in P. \tag{3.1.4}$$

Nhận xét 3.1.3. (Xem [8]) Từ định nghĩa ta thấy rằng $\Pi_u T^C(\mathrm{epi}G;(\bar{p},\bar{y}))$ là tập lồi đóng và

$$\Pi_u T^C(\mathrm{epi}G;(\bar{p},\bar{y})) = \Pi_u T^C(\mathrm{epi}G;(\bar{p},\bar{y})) + K. \tag{3.1.5}$$

Nếu nón tiếp tuyến Clarke của epi$G$ tại $(\bar{p}, \bar{y})$ ở trong (3.1.4) được thay bởi nón tiếp tuyến Bouligand của epi$G$ tại điểm tương ứng, thì ta thu được khái niệm *đạo hàm trên-đồ-thị tiếp liên suy rộng* (generalized contingent epiderivative) của G tại $(\bar{p}, \bar{y})$. Khái niệm này được giới thiệu một cách độc lập bởi Bednarczuk và Song [3] và bởi Chen và Jahn [10].

Từ [29, Corollary 1], [29, Theorem 6] và [10, Remark 1] suy ra rằng nếu $G := g : P \to \mathbb{R}$ là hàm lồi (liên tục) tại $\bar{p} \in P$, thì đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng, đạo hàm trên-đồ-thị tiếp liên suy rộng và đạo hàm theo hướng (theo nghĩa cổ điển) trùng nhau. Như vậy có thể xem đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng và đạo hàm trên-đồ-thị tiếp liên suy rộng là sự mở rộng một cách tự nhiên đạo hàm theo hướng (theo nghĩa cổ điển) của ánh xạ đơn trị sang trường hợp đa trị. Người đọc quan tâm có thể tìm hiểu sâu thêm, ở trong $[3, 8, 10]$, những tính chất và một số áp dụng của hai đạo hàm này vào việc thiết lập các điều kiện cần/đủ tối ưu cho bài toán tối ưu đa trị.

Định nghĩa 3.1.5. (Xem [3]) Ánh xạ đa trị $G : P \rightrightarrows Y$ được gọi là *compắc theo hướng* (directionally compact) tại $(\bar{p}, \bar{y}) \in \text{gph}G$ nếu với mỗi dãy tùy ý $\{t_n\} \subset (0, +\infty), t_n \to 0$, $\{h_n\} \subset P, h_n \to h \in P$, $\{y_n\} \subset Y$ thỏa mãn $\bar{y} + t_n y_n \in G(\bar{p} + t_n h_n)$ với mọi n kéo theo $\{y_n\}$ chứa một dãy con hội tụ.

Một số điều kiện đủ đảm bảo tính compắc theo hướng của G tại một điểm trên đồ thị của nó đã được đưa ra ở trong [3]. Sau đây, chúng ta đặc trưng tính chất compắc theo hướng của một ánh xạ đa trị.

Mệnh đề 3.1.1. *Cho ánh xạ đa trị $G : P \rightrightarrows Y$ và $(\bar{p}, \bar{y}) \in \text{gph}G$. Khi đó, G là compắc theo hướng tại $(\bar{p}, \bar{y})$ khi và chỉ khi G là Lipschitz trên địa phương* *tại* $\bar{p}$ *với* $G(\bar{p}) = \{\bar{y}\}$.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh điều kiện cần. Giả sử rằng G là compắc theo hướng tại $(\bar{p}, \bar{y})$. Nếu G không là Lipschitz trên địa phương tại $\bar{p}$ với $G(\bar{p}) = \{\bar{y}\}$, thì tồn tại các dãy $\{p_n\} \subset P$ và $\{y_n\} \subset Y$ sao cho

$$p_n \to \bar{p},\ y_n \in G(p_n),\ y_n \notin \bar{y} + n||p_n - \bar{p}||B_Y \quad \forall n.$$

Lấy tùy ý $t_n \in \big(0, \min\{\frac{1}{n}, \frac{||y_n - \bar{y}||}{n}\}\big)$ nếu $p_n = \bar{p}$ và lấy $t_n = ||p_n - \bar{p}||$ nếu $p_n \neq \bar{p}$. Đặt $h_n = 0$ nếu $p_n = \bar{p}$ và $h_n = \frac{p_n - \bar{p}}{||p_n - \bar{p}||}$ nếu $p_n \neq \bar{p}$. Khi đó, $||\frac{y_n - \bar{y}}{t_n}|| > n \to \infty,\ t_n \to 0$. Để ý rằng do $\{h_n\} \subset P$ và P là hữu hạn chiều nên $\{h_n\}$ có một dãy con hội tụ $\{h_{n_k}\}$. Ta có $\bar{y} + t_{n_k}\frac{y_{n_k} - \bar{y}}{t_{n_k}} = y_{n_k} \in G(p_{n_k}) = G(\bar{p} + t_{n_k}h_{n_k})$. Suy ra G không là compắc theo hướng tại $(\bar{p}, \bar{y})$. Mâu thuẫn.

Bây giờ ta chứng minh điều kiện đủ. Xét các dãy tùy ý $\{t_n\} \subset (0, +\infty), t_n \to 0$, $\{h_n\} \subset P, h_n \to h \in P$, $\{y_n\} \subset Y$ thỏa mãn $\bar{y} + t_n y_n \in G(\bar{p} + t_n h_n)$ với mọi n. Vì Y là hữu hạn chiều, nên để kết thúc chứng minh ta chỉ cần chỉ ra rằng $\{y_n\}$ bị chặn. Do G là Lipschitz trên địa phương tại $\bar{p}$ với $G(\bar{p}) = \{\bar{y}\}$, tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{p})$ và $M > 0$ sao cho

$$G(p) \subset \{\bar{y}\} + M||p - \bar{p}||B_Y \quad \forall p \in U.$$

Vì $t_n \to 0$ và $h_n \to h$, nên tồn tại n_0 và $M_0 > 0$ sao cho $||h_n|| \leq M_0$ và $G(\bar{p} + t_n h_n) \subset \{\bar{y}\} + M t_n ||h_n|| B_Y$ với mọi $n \geq n_0$. Điều này dẫn đến $||y_n|| \leq M M_0$ với mọi $n \geq n_0$. □

Định nghĩa 3.1.6. (Xem [46]) (i) Ta nói rằng *tính chất trội* đúng cho $\Omega \subset Y$ nếu

$$\Omega \subset E(\Omega | K) + K.$$

(ii) Ta nói rằng *tính chất trội* đúng cho $G : P \rightrightarrows Y$ ở xung quanh $\bar{p} \in P$ nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{p})$ sao cho

$$G(p) \subset E(G(p)|K) + K \quad \forall p \in U.$$

Bổ đề 3.1.1. (Xem [46, Theorem 3.2.12]) Giả sử $\Omega \subset Y$ là tập lồi đóng khác rỗng. Khi đó, tính chất trội đúng cho Ω khi và chỉ khi $0^+\Omega \cap (-K) = \{0\}$.

3.2 Trường hợp bài toán tối ưu véctơ không có ràng buộc

Mục này đưa ra một số công thức để tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$, được định nghĩa trong (3.1.3), cho bài toán tối ưu véctơ không có ràng buộc. Ở đây, bài toán tối ưu véctơ không có ràng buộc được hiểu theo nghĩa: ánh xạ đa trị F ở trong công thức (3.1.3) là tùy ý (không cần thiết phải có dạng (3.1.2)). Vì các công thức này được biểu diễn qua nón tiếp tuyến Clarke của đồ thị của ánh xạ đa trị F, nên trước hết ta cần tính hoặc ước lượng đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của F.

Mệnh đề 3.2.1. *Cho giả thiết (B) được thỏa mãn và cho $(\bar{p}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}F$. Ta có*

$$D^C F(\bar{p}, \bar{y})(u) \subset E\big(\Pi_u T^C(\mathrm{gph}F; (\bar{p}, \bar{y}))|K\big) \quad \forall u \in P, \tag{3.2.1}$$

và bao hàm thức ngược lại cũng đúng nếu

$$\mathrm{epi}D^C F(\bar{p}, \bar{y}) = T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})). \tag{3.2.2}$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh

$$D^C F(\bar{p}, \bar{y})(u) \subset \Pi_u T^C(\mathrm{gph}F; (\bar{p}, \bar{y})) \quad \forall u \in P. \tag{3.2.3}$$

Với mỗi $u \in P$ và $y \in D^C F(\bar{p}, \bar{y})(u)$, ta cần chỉ ra rằng $y \in \Pi_u T^C(\mathrm{gph}F; (\bar{p}, \bar{y}))$, hay là, $(u, y) \in T^C(\mathrm{gph}F; (\bar{p}, \bar{y}))$. Lấy tùy ý các dãy $\{(\bar{u}_n, \bar{y}_n)\} \subset \mathrm{gph}F$, $(\bar{u}_n, \bar{y}_n) \to (\bar{p}, \bar{y})$ và $\{t_n\} \subset (0, +\infty), t_n \to 0$. Do $(u, y) \in T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))$ và $\mathrm{gph}F \subset \mathrm{epi}F$, tồn tại dãy $\{(u_n, y_n)\} \subset P \times Y$ thỏa mãn $(u_n, y_n) \to (u, y)$ và $\bar{y}_n + t_n y_n \in F(\bar{u}_n + t_n u_n) + K$ với mọi n. Do đó, tồn tại $\{k_n\} \subset K$ sao cho

$$\bar{y}_n + t_n y_n - k_n \in F(\bar{u}_n + t_n u_n) \quad \forall n.$$

Một cách tương đương,

$$\bar{y}_n + t_n \left(y_n - \frac{k_n}{t_n} \right) \in F(\bar{u}_n + t_n u_n) \quad \forall n. \tag{3.2.4}$$

Do $k_n \in K$ và Y là không gian hữu hạn chiều, tồn tại $\alpha_n \geq 0$ và $b_n \in K$ với $||b_n|| = 1$ sao cho $k_n = \alpha_n b_n$ với mọi n. Khi đó, $\frac{k_n}{t_n} = b_n \frac{\alpha_n}{t_n}$ và $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{t_n} = 0$ nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{t_n} = 0$. Ta khẳng định rằng $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{t_n} = 0$ và do đó, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{t_n} = 0$. Thật vậy, nếu khẳng định là sai, thì bằng cách lấy một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ với $||b|| = 1$ và tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $\frac{\alpha_n}{t_n} \geq \epsilon$ với mọi n. Đặt $\bar{k}_n := \frac{\epsilon t_n}{\alpha_n} k_n \in K$. Khi đó, $\bar{k}_n \preceq_K k_n$ và

$$\bar{y}_n + t_n y_n - \bar{k}_n \in F(\bar{u}_n + t_n u_n) + K \quad \forall n. \tag{3.2.5}$$

Từ $\frac{\bar{k}_n}{t_n} = \epsilon b_n$ với mọi n suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\bar{k}_n}{t_n} = \epsilon b$. Do đó,

$$\lim_{n\to\infty} \left(y_n - \frac{\bar{k}_n}{t_n} \right) = y - \epsilon b.$$

Viết lại (3.2.5) như sau:

$$\bar{y} + t_n \left(\frac{\bar{y}_n - \bar{y}}{t_n} + y_n - \frac{\bar{k}_n}{t_n} \right) \in F\left(\bar{p} + t_n \Big(\frac{\bar{u}_n - \bar{p}}{t_n} + u_n \Big) \right) + K \quad \forall n.$$

Do $(\bar{u}_n, \bar{y}_n) \to (\bar{p}, \bar{y})$, ta có thể chọn một dãy con $\{\bar{y}_n'\}$ của $\{\bar{y}_n\}$ và một dãy con $\{\bar{u}'_n\}$ của $\{\bar{u}_n\}$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\bar{y}'_n - \bar{y}}{t_n} = 0 \quad \text{và} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\bar{u}'_n - \bar{p}}{t_n} = 0.$$

Ta nhận được

$$\bar{y} + t_n\left(\frac{\bar{y}'_n - \bar{y}}{t_n} + y_n - \frac{\bar{k}_n}{t_n}\right) \in F\left(\bar{p} + t_n\Big(\frac{\bar{u}'_n - \bar{p}}{t_n} + u_n\Big)\right) + K \quad \forall n.$$

Do đó, $(u, y - \epsilon b) \in T^B(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))$. Vì $\text{epi}F$ là lồi, nên ta có $(u, y - \epsilon b) \in T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))$. Vì vậy,

$$y - \epsilon b \in \Pi_u T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})). \tag{3.2.6}$$

Do $y - \epsilon b \preceq_K y$ và $y - \epsilon b \neq y$, (3.2.6) mâu thuẫn với

$$y \in E\big(\Pi_u T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))|K\big).$$

Do đó, khẳng định ở trên là đúng, có nghĩa là $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{t_n} = 0$. Để ý đến (3.2.4), ta có $(u, y) \in T^C(\text{gph}F; (\bar{p}, \bar{y}))$. Vì vậy, (3.2.3) nghiệm đúng.

Bây giờ ta chỉ ra rằng, với mỗi $u \in P$,

$$\Pi_u T^C(\text{gph}F; (\bar{p}, \bar{y})) + K \subset \Pi_u T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})). \tag{3.2.7}$$

Lấy tùy ý $y \in \Pi_u T^C(\text{gph}F; (\bar{p}, \bar{y}))$ và $k \in K$. Từ bao hàm thức

$$T^C(\text{gph}F; (\bar{p}, \bar{y})) \subset T^B(\text{gph}F; (\bar{p}, \bar{y}))$$

suy ra $y \in \Pi_u T^B(\text{gph}F; (\bar{p}, \bar{y}))$. Do đó, tồn tại các dãy $\{(u_n, y_n)\} \subset P \times Y$, $(u_n, y_n) \to (u, y)$ và $\{t_n\} \subset (0, +\infty), t_n \to 0$ sao cho

$$\bar{y} + t_n y_n \in F(\bar{p} + t_n u_n) \quad \forall n.$$

Đặt $\bar{y}_n := y_n + k$ với mọi n. Khi đó, $(u_n, \bar{y}_n) \to (u, y + k)$ và

$$\bar{y} + t_n \bar{y}_n = \bar{y} + t_n y_n + t_n k \in F(\bar{p} + t_n u_n) + K \quad \forall n.$$

Điều này cùng với tính lồi của tập $\mathrm{epi}F$ kéo theo

$$(u, y+k) \in T^B(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) = T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})).$$

Suy ra $y + k \in \Pi_u T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))$ và do đó, (3.2.7) được thiết lập. Kết hợp (3.2.3) với (3.2.7) đưa đến

$$D^C F(\bar{p}, \bar{y})(u) \subset \Pi_u T^C(\mathrm{gph}F; (\bar{p}, \bar{y})) \subset \Pi_u T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})).$$

Vậy (3.2.1) nghiệm đúng.

Nếu $\mathrm{epi}D^C F(\bar{p}, \bar{y}) = T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))$, thì từ (3.2.7) suy ra

$$\Pi_u T^C(\mathrm{gph}F; (\bar{p}, \bar{y})) + K \subset \Pi_u T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) = D^C F(\bar{p}, \bar{y})(u) + K \quad \forall u \in P.$$

Kết hợp điều này với (3.2.1) dẫn đến

$$\begin{aligned} E\big(\Pi_u T^C(\mathrm{gph}F; (\bar{p}, \bar{y}))|K\big) + K &\subset D^C F(\bar{p}, \bar{y})(u) + K \\ &\subset E\big(\Pi_u T^C(\mathrm{gph}F; (\bar{p}, \bar{y}))|K\big) + K \quad \forall u \in P. \end{aligned}$$

Do đó,

$$E\big(\Pi_u T^C(\mathrm{gph}F; (\bar{p}, \bar{y}))|K\big) \subset D^C F(\bar{p}, \bar{y})(u) \quad \forall u \in P.$$

Chứng minh kết thúc. □

Để hiểu rõ thêm điều kiện (3.2.2), sau đây ta đưa ra một điều kiện đủ cho đẳng thức này nghiệm đúng.

Mệnh đề 3.2.2. *Cho* $(\bar{p}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}F$*. Nếu* $D^C F(\bar{p}, \bar{y})(0) \neq \emptyset$*, thì* (3.2.2) *nghiệm đúng.*

Chứng minh. Lấy tùy ý $u \in P$ sao cho $\Pi_u T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) \neq \emptyset$. Vì

$$\Pi_u T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) = \{y \in Y \mid (u, y) \in T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))\}$$

là một tập lồi đóng, nên theo định nghĩa nón lùi xa ta có

$$\begin{aligned} 0^+\Pi_u T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) &= \{y \in Y \mid (0, y) \in T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))\} \\ &= \Pi_0 T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})). \end{aligned}$$

Nhận thấy rằng

$$0 \in D^C F(\bar{p}, \bar{y})(0). \tag{3.2.8}$$

Thật vậy, giả sử ngược lại, $0 \notin D^C F(\bar{p}, \bar{y})(0)$. Khi đó, tồn tại $k \in K \setminus \{0\}$ sao cho $-k \in \Pi_0 T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))$. Do $\Pi_0 T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))$ là một nón lồi đóng, ta có

$$y - k \in \Pi_0 T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) \quad \forall y \in \Pi_0 T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})).$$

Suy ra

$$y \notin E\big(\Pi_0 T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))|K\big) \quad \forall y \in \Pi_0 T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})).$$

Do đó, $D^C F(\bar{p}, \bar{y})(0) = \emptyset$, mâu thuẫn với giả thiết. Vì vậy, (3.2.8) nghiệm đúng. Từ đó suy ra

$$(-K) \cap \Pi_0 T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) = \{0\}.$$

Một cách tương đương,

$$(-K) \cap 0^+\Pi_u T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) = \{0\}.$$

Theo Bổ đề 3.1.1, tính chất trội đúng cho $\Pi_u T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))$, có nghĩa là

$$\Pi_u T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) \subset D^C F(\bar{p}, \bar{y})(u) + K. \tag{3.2.9}$$

Từ (3.1.5) suy ra

$$D^C F(\bar{p}, \bar{y})(u) + K \subset \Pi_u T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) + K = \Pi_u T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})). \tag{3.2.10}$$

Kết hợp (3.2.9) với (3.2.10) đưa đến $\Pi_u T^C(\text{epi}F;(\bar{p},\bar{y})) = D^C F(\bar{p},\bar{y})(u) + K$. Vì vậy, (3.2.2) nghiệm đúng. □

Bây giờ, ta phát biểu và chứng minh kết quả chính của mục này.

Định lý 3.2.1. *Cho giả thiết (B) được thỏa mãn và cho $(\bar{p},\bar{y}) \in \text{gph}\mathcal{F}$. Giả sử rằng tính chất trội đúng cho F ở xung quanh $\bar{p}$. Ta có*

$$D^C \mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(u) \subset E\big(\Pi_u T^C(\text{gph}F;(\bar{p},\bar{y}))|K\big) \quad \forall u \in P.$$

Bao hàm thức ngược lại cũng đúng nếu (3.2.2) *được thỏa mãn.*

Chứng minh. Do $\mathcal{F}(p) \subset F(p)$ với mọi $p \in P$ và do tính chất trội đúng cho F ở xung quanh $\bar{p} \in P$, tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{p})$ sao cho

$$\mathcal{F}(p) + K = F(p) + K \quad \forall p \in U.$$

Vì vậy,

$$T^C(\text{epi}\mathcal{F};(\bar{p},\bar{y})) = T^C(\text{epi}F;(\bar{p},\bar{y})).$$

Điều này kéo theo, với mỗi $u \in P$,

$$\Pi_u T^C(\text{epi}\mathcal{F};(\bar{p},\bar{y})) = \Pi_u T^C(\text{epi}F;(\bar{p},\bar{y})).$$

Do đó, $D^C \mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(u) = D^C F(\bar{p},\bar{y})(u)$. Để kết thúc chứng minh, chỉ cần áp dụng Mệnh đề 3.2.1. □

Như một hệ quả trực tiếp của Định lý 3.2.1 và Mệnh đề 3.2.2, ta có kết quả sau đây.

Hệ quả 3.2.1. *Cho giả thiết (B) được thỏa mãn và cho $(\bar{p},\bar{y}) \in \text{gph}\mathcal{F}$. Giả sử rằng tính chất trội đúng cho F ở xung quanh $\bar{p}$. Nếu $D^C F(\bar{p},\bar{y})(0) \neq \emptyset$, thì*

$$D^C \mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(u) = E\big(\Pi_u T^C(\text{gph}F;(\bar{p},\bar{y}))|K\big) \quad \forall u \in P.$$

3.3 Trường hợp bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc

Mục này được dành để trình bày một số công thức tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$, được định nghĩa ở trong (3.1.3), cho bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc. Cụ thể hơn, ta xét bài toán (3.1.1) với ánh xạ tập ràng buộc $C : P \rightrightarrows X$. Vì các công thức này được biểu diễn qua hàm mục tiêu f, ánh xạ tập ràng buộc C và ánh xạ đa trị F, được định nghĩa ở trong (3.1.2), nên trước hết ta cần thiết lập một số kết quả bổ trợ mô tả mối liên hệ giữa f, C và F. Ta định nghĩa ánh xạ $\widetilde{C} : P \times Y \rightrightarrows X$ như sau:

$$\widetilde{C}(p, y) = \{x \in C(p) \mid y - f(p, x) \in K\}. \tag{3.3.1}$$

Mệnh đề 3.3.1. *Cho $\bar{p} \in P$ và $\bar{x} \in C(\bar{p})$. Giả sử rằng f là khả vi Fréchet tại $(\bar{p}, \bar{x})$ với đạo hàm $\nabla f(\bar{p}, \bar{x})$. Nếu giả thiết (B) được thỏa mãn, thì*

$$\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \mid (p, x) \in T^C(\mathrm{gph}C; (\bar{p}, \bar{x}))\} + K \subset \Pi_p T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) \tag{3.3.2}$$

với mọi $p \in P$, ở đó $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x})$. Hơn nữa, nếu giả thiết (B) được thay bởi giả thiết (A) và ánh xạ $\widetilde{C}$ ở trong (3.3.1) *là compắc theo hướng tại $((\bar{p}, \bar{y}), \bar{x})$, thì bao hàm thức ngược lại của* (3.3.2) *nghiệm đúng, có nghĩa là*

$$\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \mid (p, x) \in T^C(\mathrm{gph}C; (\bar{p}, \bar{x}))\} + K = \Pi_p T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) \tag{3.3.3}$$

với mọi $p \in P$.

Chứng minh. Trước hết ta chỉ ra rằng

$$\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \mid (p, x) \in T^C(\mathrm{gph}C; (\bar{p}, \bar{x}))\} \subset \Pi_p T^B(\mathrm{gph}F; (\bar{p}, \bar{y})) \tag{3.3.4}$$

với mọi $p \in P$. Lấy $(p,x) \in T^C(\text{gph}C; (\bar{p},\bar{x}))$. Suy ra $(p,x) \in T^B(\text{gph}C; (\bar{p},\bar{x}))$. Khi đó, tồn tại các dãy $\{t_n\} \subset (0,+\infty)$ và $\{(p_n,x_n)\} \subset P \times X$ sao cho $t_n \to 0, (p_n,x_n) \to (p,x)$ và $\bar{x} + t_n x_n \in C(\bar{p} + t_n p_n)$ với mọi n. Ta có

$$f(\bar{p} + t_n p_n, \bar{x} + t_n x_n) \in F(\bar{p} + t_n p_n) \quad \forall n.$$

Một cách tương đương,

$$\bar{y} + t_n \frac{f(\bar{p} + t_n p_n, \bar{x} + t_n x_n) - f(\bar{p},\bar{x})}{t_n} \in F(\bar{p} + t_n p_n) \quad \forall n.$$

Vì f là khả vi Fréchet tại $(\bar{p},\bar{x})$, nên ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\bar{p} + t_n p_n, \bar{x} + t_n x_n) - f(\bar{p},\bar{x})}{t_n} = \nabla f(\bar{p},\bar{x})(p,x).$$

Do đó, $(p, \nabla f(\bar{p},\bar{x})(p,x)) \in T^B(\text{gph}F; (\bar{p},\bar{y}))$. Vì vậy, (3.3.4) được thiết lập. Tiếp theo ta chứng minh (3.3.2). Lấy tùy ý $(p,x) \in T^C(\text{gph}C; (\bar{p},\bar{x}))$ và $k \in K$. Do (3.3.4), $(p, \nabla f(\bar{p},\bar{x})(p,x)) \in T^B(\text{gph}F; (\bar{p},\bar{y}))$. Vì thế, tồn tại các dãy $\{t_n\} \subset (0,+\infty)$ và $\{(p_n,y_n)\} \subset P \times Y$ thỏa mãn $t_n \to 0, (p_n,y_n) \to (p, \nabla f(\bar{p},\bar{x})(p,x))$ và

$$\bar{y} + t_n y_n \in F(\bar{p} + t_n p_n) \quad \forall n.$$

Với mỗi $n = 1, 2, ...,$ đặt $\bar{y}_n := y_n + k$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{y}_n = \nabla f(\bar{p},\bar{x})(p,x) + k$ và

$$\bar{y} + t_n \bar{y}_n = \bar{y} + t_n y_n + t_n k \in F(\bar{p} + t_n p_n) + K \quad \forall n.$$

Do đó, $(p, \nabla f(\bar{p},\bar{x})(p,x) + k) \in T^B(\text{epi}F; (\bar{p},\bar{y}))$. Vì $\text{epi}F$ là lồi, nên ta có $(p, \nabla f(\bar{p},\bar{x})(p,x) + k) \in T^C(\text{epi}F; (\bar{p},\bar{y}))$. Vì vậy, (3.3.2) nghiệm đúng.

Bây giờ, ta chứng minh (3.3.3). Với mỗi $p \in P$, lấy tùy ý $y \in \Pi_p T^C(\text{epi}F; (\bar{p},\bar{y}))$, có nghĩa là $(p,y) \in T^C(\text{epi}F; (\bar{p},\bar{y}))$. Suy ra $(p,y) \in$

$T^B(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))$. Khi đó, tồn tại các dãy $\{t_n\} \subset (0, +\infty)$ và $\{(p_n, y_n)\} \subset P \times Y$ thỏa mãn $t_n \to 0, (p_n, y_n) \to (p, y)$ và

$$\bar{y} + t_n y_n \in F(\bar{p} + t_n p_n) + K \quad \forall n.$$

Do đó, tồn tại $\{x_n\} \subset C(\bar{p} + t_n p_n)$ và $\{k_n\} \subset K$ sao cho

$$\bar{y} + t_n y_n = f(\bar{p} + t_n p_n, x_n) + k_n \quad \forall n. \tag{3.3.5}$$

Đặt $\hat{x}_n := \frac{x_n - \bar{x}}{t_n}$. Ta có $x_n = \bar{x} + t_n \hat{x}_n \in \widetilde{C}(\bar{p} + t_n p_n, \bar{y} + t_n y_n)$ với mọi n. Do $\widetilde{C}$ là compắc theo hướng tại $((\bar{p}, \bar{y}), \bar{x})$, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $\{\hat{x}_n\}$ hội tụ đến $\hat{x} \in X$. Vì vậy, $(p, \hat{x}) \in T^B(\text{gph}C; (\bar{p}, \bar{x}))$. Do C là lồi, ta có $(p, \hat{x}) \in T^C(\text{gph}C; (\bar{p}, \bar{x}))$. Từ (3.3.5) suy ra

$$y_n - \frac{f(\bar{p} + t_n p_n, \bar{x} + t_n \hat{x}_n) - f(\bar{p}, \bar{x})}{t_n} = \frac{k_n}{t_n} \in K \quad \forall n.$$

Vì K đóng, nên ta có $y - \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, \hat{x}) \in K$. Do đó, $y \in \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, \hat{x}) + K$ và (3.3.3) được thiết lập. □

Nhận xét 3.3.1. Quan sát chứng minh của Mệnh đề 3.3.1, ta thấy rằng tính compắc theo hướng của C tại $(\bar{p}, \bar{x})$ kéo theo tính chất tương ứng của $\widetilde{C}$ tại $((\bar{p}, \bar{y}), \bar{x})$. Do đó, kết luận của Mệnh đề 3.3.1 vẫn còn hiệu lực nếu giả thiết $\widetilde{C}$ là compắc theo hướng tại $((\bar{p}, \bar{y}), \bar{x})$ được thay bởi điều kiện C có tính chất tương ứng tại $(\bar{p}, \bar{x})$.

Từ Mệnh đề 3.1.1, Mệnh đề 3.3.1 và Nhận xét 3.3.1 ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 3.3.1. *Cho giả thiết (A) được thỏa mãn và cho $\bar{p} \in P$, $\bar{x} \in C(\bar{p})$. Giả sử rằng f là khả vi Fréchet tại $(\bar{p}, \bar{x})$. Nếu một trong các đòi hỏi sau đây được thực hiện, thì* (3.3.3) *nghiệm đúng.*

(i) *C là Lipschitz trên địa phương tại $\bar{p}$ với $C(\bar{p}) = \{\bar{x}\}$.*

(ii) $\widetilde{C}$ *ở trong* (3.3.1) *là Lipschitz trên địa phương tại* $(\bar{p}, \bar{y})$ *với* $\widetilde{C}(\bar{p}, \bar{y}) = \{\bar{x}\}$, *ở đó* $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x})$.

Kết quả tiếp theo cho ta thêm một điều kiện đủ để có đẳng thức (3.3.3). Điều kiện này dựa trên tính giả-Lipschitz tại một điểm trên đồ thị của ánh xạ $\widetilde{C}$. Một số tiêu chuẩn cho tính giả-Lipschitz của $\widetilde{C}$ đã được Song và Wan [47] đưa ra. Tính giả-Lipschitz của một số ánh xạ tổng quát hơn $\widetilde{C}$ đã được Rockafellar [45] khảo sát.

Mệnh đề 3.3.2. *Cho giả thiết* (A) *được thỏa mãn và cho* $\bar{p} \in P$, $\bar{x} \in C(\bar{p})$. *Đặt* $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x})$. *Giả sử rằng* f *là khả vi Fréchet tại* $(\bar{p}, \bar{x})$. *Nếu* $\widetilde{C}$ *ở trong* (3.3.1) *là giả-Lipschitz tại* $((\bar{p}, \bar{y}), \bar{x})$, *thì* (3.3.3) *nghiệm đúng.*

Chứng minh. Theo Mệnh đề 3.3.1, để kết thúc chứng minh ta chỉ cần chỉ ra rằng

$$\Pi_p T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) \subset \{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \mid (p, x) \in T^C(\text{gph}C; (\bar{p}, \bar{x}))\} + K \tag{3.3.6}$$

với mọi $p \in P$. Với mỗi $p \in P$, lấy tùy ý $y \in \Pi_p T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))$, có nghĩa là $(p, y) \in T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))$. Suy ra $(p, y) \in T^B(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))$. Khi đó, tồn tại các dãy $\{t_n\} \subset (0, +\infty)$ và $\{(p_n, y_n)\} \subset P \times Y$ thỏa mãn $t_n \to 0, (p_n, y_n) \to (p, y)$ và

$$\bar{y} + t_n y_n \in F(\bar{p} + t_n p_n) + K \quad \forall n.$$

Do $\widetilde{C}$ là giả-Lipschitz tại $((\bar{p}, \bar{y}), \bar{x})$, tồn tại $U_1 \in \mathcal{N}(\bar{p}), U_2 \in \mathcal{N}(\bar{y}), V \in \mathcal{N}(\bar{x})$ và $M > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} \widetilde{C}(p_1, y_1) \cap V \subset & \widetilde{C}(p_2, y_2) + M(||p_1 - p_2||^2 + ||y_1 - y_2||^2)^{\frac{1}{2}} B_X, \\ & \forall p_1, p_2 \in U_1, \quad \forall y_1, y_2 \in U_2. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Chọn $\delta > 0$ thỏa mãn $\bar{p} + \delta B_P \subset U_1, \bar{y} + \delta B_Y \subset U_2$. Từ (3.3.7) suy ra

$$\bar{x} \in \widetilde{C}(\bar{p}, \bar{y}) \cap V \subset \widetilde{C}(\bar{p} + tp', \bar{y} + ty') + Mt(||p'||^2 + ||y'||^2)^{\frac{1}{2}} B_X,$$
$$\forall t \in (0, \delta), \quad \forall p' \in P, ||tp'|| \leq \delta, \quad \forall y' \in Y, ||ty'|| \leq \delta. \qquad (3.3.8)$$

Do $t_n \to 0$ và $(p_n, y_n) \to (p, y)$, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng tồn tại $M_1 > 0$ sao cho $(||p_n||^2 + ||y_n||^2)^{\frac{1}{2}} \leq M_1$ và $t_n \in (0, \delta), ||t_n p_n|| \leq \delta, ||t_n y_n|| \leq \delta$ với mọi n. Vì thế, do (3.3.8), tồn tại $\{x_n\} \subset \widetilde{C}(\bar{p}+t_n p_n, \bar{y}+t_n y_n)$ sao cho $||\bar{x} - x_n|| \leq MM_1 t_n$ với mọi n. Đặt $\hat{x}_n := \frac{x_n - \bar{x}}{t_n}$. Khi đó $||\hat{x}_n|| \leq MM_1$ với mọi n, và

$$x_n = \bar{x} + t_n \hat{x}_n \in \widetilde{C}(\bar{p} + t_n p_n, \bar{y} + t_n y_n) \quad \forall n. \qquad (3.3.9)$$

Do X là hữu hạn chiều, bằng cách lấy một dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng $\{\hat{x}_n\}$ hội tụ đến $\hat{x} \in X$. Điều này cùng với các bao hàm thức

$$\bar{x} + t_n \hat{x}_n \in \widetilde{C}(\bar{p} + t_n p_n, \bar{y} + t_n y_n) \subset C(\bar{p} + t_n p_n) \quad \forall n$$

kéo theo $(p, \hat{x}) \in T^B(\mathrm{gph}C; (\bar{p}, \bar{x}))$. Suy ra $(p, \hat{x}) \in T^C(\mathrm{gph}C; (\bar{p}, \bar{x}))$, bởi vì C là lồi. Do (3.3.9), ta có

$$\bar{y} + t_n y_n - f(\bar{p} + t_n p_n, x_n) \in K \quad \forall n.$$

Một cách tương đương,

$$y_n - \frac{f(\bar{p} + t_n p_n, \bar{x} + t_n \hat{x}_n) - f(\bar{p}, \bar{x})}{t_n} \in K \quad \forall n.$$

Vì K đóng, nên suy ra $y - \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, \hat{x}) \in K$. Do đó, $y \in \nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, \hat{x}) + K$ và (3.3.6) được thiết lập. □

Kết quả chính đầu tiên trong mục này được phát biểu như sau.

Định lý 3.3.1. *Cho* $\bar{p} \in P$ *và cho* $\bar{x} \in C(\bar{p})$ *sao cho* $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x}) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. *Giả sử rằng tính chất trội đúng cho* F *ở xung quanh* $\bar{p}$ *và* f *là khả vi Fréchet tại* $(\bar{p}, \bar{x})$ *với đạo hàm* $\nabla f(\bar{p}, \bar{x})$. *Nếu* (3.3.3) *nghiệm đúng, thì*

$$D^C\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(p) = E\big(\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \mid (p, x) \in T^C(\mathrm{gph}C; (\bar{p}, \bar{x}))\}|K\big) \quad \forall p \in P.$$

Chứng minh. Do $\mathcal{F}(u) \subset F(u)$ với mọi $u \in P$, và do tính chất trội đúng cho F ở xung quanh $\bar{p}$, tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{p})$ sao cho

$$\mathcal{F}(u) + K = F(u) + K \quad \forall u \in U.$$

Do đó, $T^C(\mathrm{epi}\mathcal{F}; (\bar{p}, \bar{y})) = T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y}))$. Suy ra

$$\Pi_p T^C(\mathrm{epi}\mathcal{F}; (\bar{p}, \bar{y})) = \Pi_p T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) \quad \forall p \in P.$$

Kết hợp điều này với (3.3.3), ta nhận được kết quả mong muốn. $\square$

Tiếp theo ta sẽ thiết lập sự áp dụng của Định lý 3.3.1 vào bài toán *tối ưu véctơ nửa vô hạn*. Xét bài toán (3.1.1) với ánh xạ tập ràng buộc $C\colon P \rightrightarrows X$ được định nghĩa bởi

$$C(p) := \{x \in X \mid g_t(p, x) \le 0 \quad \forall t \in T\}, \tag{3.3.10}$$

ở đó T là tập chỉ số bất kỳ và với mỗi $t \in T$, $g_t : P \times X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ là hàm lồi chính thường nửa liên tục dưới.

Ký hiệu bởi $\mathbb{R}_+^{(T)}$ là họ tất cả các hàm $\lambda : T \to \mathbb{R}$ lấy giá trị λ_t dương chỉ tại hữu hạn điểm của T, và bằng 0 tại các điểm khác. Trong mối liên hệ với (3.3.10), ta sử dụng tập các *nhân tử ràng buộc hoạt* (active constraint multipliers) được định nghĩa bởi

$$A(\bar{p}, \bar{x}) := \{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \mid \lambda_t g_t(\bar{p}, \bar{x}) = 0 \quad \forall t \in T\}.$$

Cho hàm số $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Trên-đồ-thị của hàm φ được định nghĩa là tập

$$\text{epi}\varphi := \{(x, \mu) \in X \times \mathbb{R} \mid \mu \geq \varphi(x)\}.$$

Hàm liên hợp $\varphi^* : X \to \overline{\mathbb{R}}$ của hàm φ được định nghĩa bởi

$$\varphi^*(v) := \sup \{\langle v, x\rangle - \varphi(x) \mid x \in X\} \quad \forall v \in X.$$

Định nghĩa 3.3.1. (Xem [19]) Ta nói rằng *điều kiện Farkas-Minkowski* (FM) đúng cho hệ ràng buộc (3.3.10) nếu tập

$$\text{cone}\left(\bigcup_{t\in T} \text{epi} g_t^*\right) \ \text{đóng ở trong} \quad P \times X \times \mathbb{R}. \tag{3.3.11}$$

Nhận xét 3.3.2. (Xem [19, Corollary 3.6]) Cho $(\bar{p}, \bar{x}) \in \text{gph}C$. Nếu điều kiện (FM) đúng cho hệ (3.3.10), thì ta có

$$N\big((\bar{p}, \bar{x}); \text{gph}\, C\big) = \bigcup_{\lambda \in A(\bar{p},\bar{x})} \Big[\sum_{t\in T} \lambda_t \partial g_t(\bar{p}, \bar{x})\Big],$$

ở đây ký hiệu ∂ được dùng để chỉ dưới vi phân theo nghĩa giải tích lồi (xem lại định nghĩa ở trong Mục 2.1 của Chương 2).

Để hiểu rõ hơn điều kiện chính quy ở trên, ta nhắc lại (xem [19]) điều kiện Slater. Ta nói rằng *điều kiện Slater* (S) đúng cho hệ (3.3.10) nếu như:

(a) Tập chỉ số T là một tập con compắc của một không gian hữu hạn chiều;

(b) Họ các ràng buộc $g_t(p, x)$ là liên tục theo các biến (t, p, x) ở trên $T \times P \times X$;

(c) Tồn tại $(p_0, x_0) \in P \times X$ sao cho $g_t(p_0, x_0) < 0$ với mọi $t \in T$.

Theo [19, Theorem 4.5], nếu $\text{gph}C$ bị chặn, thì điều kiện (S) đúng cho hệ (3.3.10) kéo theo điều kiện (FM) đúng cho hệ tương ứng. Hơn nữa, [19, Example 4.6] chỉ ra rằng tồn tại một hệ ràng buộc mà điều kiện (FM) đúng cho nó, trong khi đó điều kiện (S) bị vi phạm.

Dưới đây, chúng ta sẽ thiết lập các công thức để tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn. Nhưng trước hết ta cần đưa ra một tiêu chuẩn để tính nón tiếp tuyến Clarke của đồ thị ánh xạ tập ràng buộc C tại một điểm cho trước.

Mệnh đề 3.3.3. *Cho* $(\bar{p}, \bar{x}) \in \mathrm{gph}C$. *Giả sử điều kiện* (FM) *đúng cho hệ* (3.3.10). *Khi đó,*

$$T^C\big(\mathrm{gph}C; (\bar{p}, \bar{x})\big) = \Big\{(p, x) \in P \times X \mid \sum_{t\in T} \lambda_t \partial g_t(\bar{p}, \bar{x})(p, x) \leq 0 \ \ \forall \lambda \in A(\bar{p}, \bar{x})\Big\}. \tag{3.3.12}$$

Chứng minh. Theo giả thiết, tập hợp

$$\mathrm{gph}\, C = \big\{(p, x) \in P \times X \mid g_t(p, x) \leq 0 \quad \forall t \in T\big\}$$

là lồi. Do đó, từ Nhận xét 3.3.2 suy ra rằng

$$N^C\big((\bar{p}, \bar{x}); \mathrm{gph}\, C\big) = N\big((\bar{p}, \bar{x}); \mathrm{gph}\, C\big) = \bigcup_{\lambda \in A(\bar{p}, \bar{x})} \Big[\sum_{t\in T} \lambda_t \partial g_t(\bar{p}, \bar{x})\Big]. \tag{3.3.13}$$

Vì $T^C\big(\mathrm{gph}\, C; (\bar{p}, \bar{x})\big)$ là tập đóng, nên ta có

$$T^C\big(\mathrm{gph}\, C; (\bar{p}, \bar{x})\big) = \big(T^C\big(\mathrm{gph}\, C; (\bar{p}, \bar{x})\big)^{\circ}\big)^{\circ} = N^C\big((\bar{p}, \bar{x}); \mathrm{gph}\, C\big)^{\circ}.$$

Kết hợp điều này với (3.3.13) đưa đến (3.3.12). Chứng minh kết thúc. □

Định lý 3.3.2. *Cho* $\bar{p} \in P$ *và cho* $\bar{x} \in C(\bar{p})$ *sao cho* $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x}) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. *Giả sử rằng tính chất trội đúng cho* F *ở xung quanh* $\bar{p}$, *hàm mục tiêu* f *là khả vi*

Fréchet tại $(\bar{p}, \bar{x})$, *và điều kiện* (FM) *đúng cho hệ* (3.3.10). *Nếu*

$$\big\{\nabla f(\bar{p},\bar{x})(p,x)\,\big|\,(p,x) \in P \times X, \sum_{t\in T} \lambda_t \partial g_t(\bar{p},\bar{x})(p,x) \le 0, \forall \lambda \in A(\bar{p},\bar{x})\big\}$$
$$+ K = \Pi_p T^C(\mathrm{epi}F; (\bar{p},\bar{y})) \quad \forall p \in P, \qquad (3.3.14)$$

thì, với mỗi $p \in P$,

$$D^C\mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(p) = E\Big(\big\{\nabla f(\bar{p},\bar{x})(p,x) \mid (p,x) \in P \times X,$$
$$\sum_{t\in T} \lambda_t \partial g_t(\bar{p},\bar{x})(p,x) \le 0 \quad \forall \lambda \in A(\bar{p},\bar{x})\big\}\big| K\Big).$$

Chứng minh. Suy trực tiếp từ Định lý 3.3.1 và Mệnh đề 3.3.3. □

Cuối cùng ở trong mục này ta hãy xét một ví dụ minh họa sự áp dụng các kết quả chính của chương này vào một bài toán cụ thể.

Ví dụ 3.3.1. Lấy $T = [0,1], P = \mathbb{R}, X = Y = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}^2_+$. Cho $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là hàm véctơ và $g_t : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, t \in T$ là các hàm số được xác định như sau.

$$f(p,x) = (p,0) + (x_1,x_2) \quad \forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall p \in \mathbb{R},$$

$$g_t(p,x) = tp - tx_1 - (1-t)x_2 \quad \forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

Xét bài toán (3.1.1) với ánh xạ tập ràng buộc C ở trong (3.3.10). Bằng cách tính toán trực tiếp ta thu được

$$C(p) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \ge p, x_2 \ge 0\},$$
$$F(p) = \{y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \ge 2p, y_2 \ge 0\} \quad \forall p \in P.$$

Vì vậy, ta thấy rằng tính chất trội đúng cho F tại mọi điểm $p \in P$. Đặc biệt hơn, với $\bar{p} := 0$,

$$C(\bar{p}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$$

$$F(\bar{p}) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}.$$

Do đó, $\bar{x} := (0,0) \in C(\bar{p})$ và $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x}) = (0,0) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. Với mỗi $t \in T$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, p \in \mathbb{R}$, ta có

$$g_t^*(p,x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } (p,x) = (t, -t, t-1) \\ +\infty, & \text{nếu } (p,x) \neq (t, -t, t-1), \end{cases}$$

$$\text{epi} g_t^* = \{t\} \times \{-t\} \times \{t-1\} \times \mathbb{R}_+.$$

Suy ra $\text{cone}\Big(\bigcup_{t \in T} \text{epi} g_t^*\Big) = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2_- \times \mathbb{R}_+$ đóng ở trong $\mathbb{R}^4$. Theo Mệnh đề 3.3.3,

$$T^C\big(\text{gph}C; (\bar{p}, \bar{x})\big) = \big\{(p,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mid tp - tx_1 - (1-t)x_2 \leq 0 \quad \forall t \in T\big\}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} &\{\nabla f(\bar{p}, \bar{x})(p,x) \,|\, (p,x) \in T^C(\text{gph}C; (\bar{p}, \bar{x}))\} + \mathbb{R}^2_+ \\ &\qquad = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \geq 2p, y_2 \geq 0\} \quad \forall p \in P. \end{aligned}$$

Ta có

$$T^C(\text{epi}F; (\bar{p}, \bar{y})) = \{(p,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \mid y_1 \geq 2p, y_2 \geq 0\} \quad \forall p \in P.$$

Vì vậy, (3.3.14) nghiệm đúng. Áp dụng Định lý 3.3.2, ta thu được

$$D^C\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(p) = \{(2p, 0)\} \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

Kết luận của Chương 3

Các kết quả chính của chương này bao gồm:

- Một số công thức để tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ trong bài toán tối ưu véctơ không có ràng buộc (Định lý 3.2.1 và Hệ quả 3.2.1).

- Công thức tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ trong bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc tổng quát (Định lý 3.3.1).

- Công thức tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn (Định lý 3.3.2).

Chương 4

Đối đạo hàm Fréchet của hàm giá trị tối ưu trong tối ưu véctơ

Chương này nghiên cứu độ nhạy nghiệm bằng cách sử dụng *đối đạo hàm Fréchet*.

Mục 4.1 được dành để giới thiệu một số khái niệm cơ bản và trình bày một vài kết quả bổ trợ. Mục 4.2 thiết lập một số công thức để tính đối đạo hàm Fréchet của hàm giá trị tối ưu trong bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc được xác định bởi một ánh xạ đa trị. Mục 4.3 triển khai các công thức như ở trong Mục 4.2 vào một số lớp các bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc toán tử, ràng buộc được mô tả bởi một số hữu hạn hoặc vô hạn các hàm số thực.

Các kết quả chính trình bày ở đây đã được công bố trong [15].

4.1 Các khái niệm cơ bản và kết quả bổ trợ

Trong chương này, trừ khi quy ước khác đi, ta vẫn sử dụng các khái niệm và ký hiệu đã đưa ra trong các chương trước. Chẳng hạn, ta tiếp tục xét bài toán tối ưu véctơ phụ thuộc tham số (3.1.1), ánh xạ đa trị F ở trong (3.1.2) và hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ ở trong (3.1.3), nhưng xuyên suốt chương này P, X và Y được giả sử là các không gian Banach thực với chuẩn $||\cdot||$.

Cặp đối ngẫu giữa X và đối ngẫu tôpô của nó X^* được ký hiệu bởi $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$. Ký hiệu A^* được dùng để chỉ toán tử liên hợp của toán tử tuyến tính liên tục A. Hình cầu mở tâm $x \in X$ bán kính ρ trong X được ký hiệu bởi $B_\rho(x)$. Nón đối ngẫu không âm của nón K được định nghĩa là tập

$$K^* := \{y^* \in Y^* \mid \langle y^*, k\rangle \geq 0 \quad \forall k \in K\}. \tag{4.1.1}$$

Không gian Banach X được gọi là *không gian Asplund* nếu mọi hàm lồi liên tục xác định trên một tập con lồi mở khác rỗng $U \subset X$ là khả vi Fréchet trên một tập con trù mật của U. Ta đã biết rằng lớp các không gian Asplund là đủ rộng bao gồm tất cả các không gian Banach phản xạ, các không gian có đối ngẫu tôpô khả li (xem [36, 37, 42]).

Hàm véctơ $f\colon P \to Y$ được gọi là *khả vi chặt* tại $\bar{p} \in P$ nếu tồn tại một toán tử tuyến tính liên tục $\nabla f(\bar{p})\colon P \to Y$ sao cho

$$\lim_{p,u \to \bar{p}} \frac{f(p) - f(u) - \langle \nabla f(\bar{p}), p - u\rangle}{\|p - u\|} = 0.$$

Hàm véctơ $l\colon \Omega \subset X \to Y$ được gọi là *Lipschitz địa phương* (tương ứng, *Lipschitz trên địa phương*) tại $\bar{x} \in \Omega$ nếu tồn tại $\eta > 0$ và $\ell \geq 0$ sao cho

$$\|l(x) - l(u)\| \leq \ell\|x - u\| \quad \forall\, x, u \in B_\eta(\bar{x}) \cap \Omega$$
$$(\text{tương ứng, } \|l(x) - l(\bar{x})\| \leq \ell\|x - \bar{x}\| \quad \forall\, x \in B_\eta(\bar{x}) \cap \Omega).$$

Ta nói rằng ánh xạ đa trị $L\colon X \rightrightarrows Y$ có *lát cắt Lipschitz trên địa phương* tại $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} L$ nếu tồn tại hàm véctơ $l\colon \operatorname{dom} L \to Y$ là Lipschitz trên địa phương tại $\bar{x}$ sao cho $l(\bar{x}) = \bar{y}$ và $l(x) \in L(x)$ với mọi $x \in \operatorname{dom} L$ trong một lân cận nào đó của $\bar{x}$ (xem [38]). Đối với ánh xạ đa trị $G\colon X \rightrightarrows X^*$, ký hiệu

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{x\to\bar{x}} G(x) := \Big\{x^* \in X^* \Big| \exists\, x_n \to \bar{x},\ \exists x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*,\ x_n^* \in F(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}\Big\}$$

được dùng để chỉ *giới hạn trên theo dãy theo nghĩa Painlevé-Kuratowski* trong tôpô sinh bởi chuẩn của X và tôpô yếu* (được ký hiệu bởi chữ w^*) của X^*. Ký hiệu $x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$ đối với tập $\Omega \subset X$ có nghĩa là $x \to \bar{x}$ với $x \in \Omega$. Ký hiệu $\varepsilon \downarrow \varepsilon_0$ được dùng để chỉ $\varepsilon \to \varepsilon_0$ với $\varepsilon \geq \varepsilon_0$.

Định nghĩa 4.1.1. (Xem [36]) Cho $\Omega \subset X$.

(i) Với mỗi $\varepsilon \geq 0$, đặt

$$\widehat{N}_\varepsilon(\bar{x};\Omega) := \Big\{x^* \in X^* \Big| \limsup_{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}} \frac{\langle x^*, x-\bar{x}\rangle}{\|x-\bar{x}\|} \leq \varepsilon\Big\}. \tag{4.1.2}$$

Các phần tử của tập hợp ở vế trái công thức này được gọi là các *ε-pháp tuyến* của Ω tại $\bar{x} \in \Omega$. Khi $\varepsilon = 0$, tập hợp $\widehat{N}(\bar{x};\Omega) := \widehat{N}_0(\bar{x};\Omega)$ ở trong (4.1.2) là một nón và được gọi là *nón pháp tuyến Fréchet* của Ω tại $\bar{x}$. Nếu $\bar{x} \notin \Omega$, thì ta đặt $\widehat{N}_\varepsilon(\bar{x};\Omega) := \emptyset$ với mọi $\varepsilon \geq 0$.

(ii) *Nón pháp tuyến Mordukhovich* của Ω tại $\bar{x} \in \Omega$ được định nghĩa là tập

$$N(\bar{x};\Omega) := \operatorname*{Lim\,sup}_{\substack{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}\\ \varepsilon\downarrow 0}} \widehat{N}_\varepsilon(x;\Omega). \tag{4.1.3}$$

Ta đặt $N(\bar{x};\Omega) := \emptyset$ nếu $\bar{x} \notin \Omega$.

Nhận xét 4.1.1. Hiển nhiên ta có $\widehat{N}(\bar{x};\Omega) \subset N(\bar{x};\Omega)$.

Nếu X là không gian Asplund và nếu Ω là tập đóng địa phương ở xung quanh $\bar{x}$ (tức là tồn tại hình cầu đóng tâm $\bar{x}$ với bán kính dương có giao với Ω là một tập đóng trong X), thì

$$N(\bar{x};\Omega) := \operatorname*{Lim\,sup}_{x\xrightarrow{\Omega}\bar{x}} \widehat{N}(x;\Omega).$$

Định nghĩa 4.1.2. (Xem [36]) Cho hàm số $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ và cho $\bar{x} \in X$.

(i) *Dưới vi phân Mordukhovich* (hay *dưới vi phân qua giới hạn*) và *dưới vi phân Fréchet* của φ tại $\bar{x}$ với $|\varphi(\bar{x})| < \infty$ tương ứng được cho bởi các công thức

$$\partial\varphi(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in N((\bar{x}, \varphi(\bar{x})); \text{epi}\varphi)\},$$

$$\widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in \widehat{N}((\bar{x}, \varphi(\bar{x})); \text{epi}\varphi)\}.$$

Nếu $|\varphi(\bar{x})| = \infty$, thì ta đặt $\partial\varphi(\bar{x}) = \widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) = \emptyset$.

(ii) *Dưới vi phân Fréchet trên* của φ tại $\bar{x}$ được định nghĩa là tập

$$\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}) := -\widehat{\partial}(-\varphi)(\bar{x}). \tag{4.1.4}$$

Nhận xét 4.1.2. (Xem [36, Theorem 1.93]) Nếu φ là hàm lồi, thì dưới vi phân Mordukhovich của φ tại $\bar{x}$ với $|\varphi(\bar{x})| < \infty$ trùng với dưới vi phân theo nghĩa giải tích lồi, có nghĩa là

$$\partial\varphi(\bar{x}) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \le \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \quad \forall x \in X\}.$$

Theo định nghĩa trên và Nhận xét 4.1.1, ta luôn có $\widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) \subset \partial\varphi(\bar{x})$. Nếu bao hàm thức ngược lại được nghiệm đúng, thì ta nói rằng φ là *chính quy dưới* (lower regular) tại $\bar{x}$, có nghĩa là

$$\widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) = \partial\varphi(\bar{x}). \tag{4.1.5}$$

Tập hợp các hàm chính quy dưới là đủ rộng, bao gồm tất cả các hàm lồi, các hàm khả vi chặt (xem [36, Theorem 1.93] và [36, Proposition 1.94]).

Theo [36, Proposition 1.87], $\widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) \neq \emptyset$ và $\widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}) \neq \emptyset$ khi và chỉ khi φ là khả vi Fréchet tại $\bar{x}$, trong trường hợp này $\widehat{\partial}\varphi(\bar{x}) = \widehat{\partial}^+\varphi(\bar{x}) = \{\nabla\varphi(\bar{x})\}$.

Định nghĩa 4.1.3. (Xem [36]) Cho $G\colon P \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị và cho

$(\bar{p}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} G$. *Đối đạo hàm Fréchet* (Fréchet coderivative) của G tại $(\bar{p}, \bar{y})$ được cho bởi công thức

$$\widehat{D}^*G(\bar{p}, \bar{y})(y^*) := \{p^* \in P^* \mid (p^*, -y^*) \in \widehat{N}((\bar{p}, \bar{y}); \operatorname{gph} G))\} \quad \forall y^* \in Y^*. \tag{4.1.6}$$

Nếu $G(x) = \{g(x)\}$ là ánh xạ đơn trị, thì ta viết $\widehat{D}g(\bar{p})$ thay cho $\widehat{D}g(\bar{p}, g(\bar{p}))$.

Nhận xét 4.1.3. (Xem [36, Theorem 1.38]) Nếu $g : P \to Y$ là khả vi Fréchet tại $\bar{p}$, thì ta có

$$\widehat{D}^*g(\bar{p})(y^*) = \{\nabla g(\bar{p})^* y^*\} \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Với mỗi hàm véctơ tùy ý $g : P \to Y$ ta có thể liên kết g với một phần tử $y^* \in Y^*$ để được một hàm vô hướng hóa:

$$\langle y^*, g\rangle(p) = \langle y^*, g(p)\rangle \quad \forall p \in P.$$

Quan hệ giữa đối đạo hàm Fréchet của một hàm véctơ Lipschitz địa phương và dưới vi phân Fréchet của hàm vô hướng hóa đã được thiết lập như sau (xem [38, Proposition 3.5]): Nếu g là Lipschitz địa phương tại $\bar{p} \in P$, thì ta có

$$\widehat{D}^*g(\bar{p})(y^*) = \widehat{\partial}\langle y^*, g\rangle(\bar{p}) \quad \forall y^* \in Y^*. \tag{4.1.7}$$

Trên thực tế, đẳng thức ở trong (4.1.7) vẫn còn giá trị khi (thay thế g là Lipschitz địa phương tại $\bar{p}$) ta chỉ cần giả sử rằng g là Lipschitz trên địa phương tại điểm đó.

Tiếp theo ta sẽ trình bày hai kết quả bổ trợ. Kết quả đầu tiên đưa ra một sự đặc trưng các dưới gradient Fréchet của một hàm số qua các hàm số xấp xỉ dưới, khả vi Fréchet tại điểm được xét.

Bổ đề 4.1.1. (Xem [36, Theorem 1.88 (i)]) *Cho $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ và $\bar{x} \in X$ thỏa mãn $|\varphi(\bar{x})| < \infty$. Khi đó $x^* \in \widehat{\partial}\varphi(\bar{x})$ nếu và chỉ nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{x})$ và một* *hàm* $s : U \to \mathbb{R}$ *là khả vi Fréchet tại* $\bar{x}$ *với đạo hàm* $\nabla s(\bar{x})$ *sao cho*

$$s(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}),\ \nabla s(\bar{x}) = x^*,\ s(x) \le \varphi(x) \quad \forall x \in U.$$

Kết quả tiếp theo được biết như là một công thức tính nón pháp tuyến Fréchet của ảnh ngược của các tập hợp dưới ánh xạ khả vi với đạo hàm tràn.

Bổ đề 4.1.2. (Xem [36, Corollary 1.15]) *Cho* $g : P \to Y, \Theta \subset Y, \bar{p} \in P$ *và* $\bar{y} := g(\bar{p}) \in \Theta$. *Giả sử rằng* g *là khả vi Fréchet tại* $\bar{p}$. *Khi đó ta có*

$$\widehat{N}(\bar{p}; g^{-1}(\Theta)) \supset \nabla g(\bar{p})^* \widehat{N}(\bar{y}; \Theta).$$

Bao hàm thức ngược lại ở trên nghiệm đúng khi $\nabla g(\bar{p})$ *là toàn ánh và hoặc* Y *là không gian hữu hạn chiều, hoặc* g *là khả vi chặt tại* $\bar{p}$.

4.2 Trường hợp bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc tổng quát

Mục này thiết lập một số công thức để tính đối đạo hàm Fréchet của hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ được xác định bởi (3.1.3) trong bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc tổng quát (3.1.1) với P, X và Y là các không gian Banach.

Trước hết, ta cần tính hoặc ước lượng đối đạo hàm Fréchet của tổng một ánh xạ đa trị với một nón.

Mệnh đề 4.2.1. *Cho* $G : P \rightrightarrows Y$ *là ánh xạ đa trị, cho* $(\bar{p}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}G$ *và xét* K^* *được cho bởi* (4.1.1). *Khi đó,*

$$\widehat{D}^*(G + K)(\bar{p}, \bar{y})(y^*) \subset \widehat{D}^*G(\bar{p}, \bar{y})(y^*) \quad \forall y^* \in Y^*, \tag{4.2.1}$$

và bao hàm thức ngược lại nghiệm đúng nếu $y^* \in K^*$ *và có* H *có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại* $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{y})$, *ở đây* $H : P \times Y \rightrightarrows Y$ *là ánh xạ đa trị* *được xác định bởi* $H(p,y) := G(p) \cap (y - K)$.

Chứng minh. Từ $0 \in K$ suy ra $\mathrm{gph}G \subset \mathrm{gph}(G+K)$. Do đó, theo định nghĩa của nón pháp tuyến Fréchet ta có

$$\widehat{N}\big((\bar{p},\bar{y});\mathrm{gph}(G+K)\big) \subset \widehat{N}\big((\bar{p},\bar{y});\mathrm{gph}G\big).$$

Vì vậy, từ định nghĩa của đối đạo hàm Fréchet ở trong (4.1.6) kéo theo (4.2.1). Để chứng minh bao hàm thức ngược lại, ta chọn $y^* \in K^*$ và lấy tùy ý $p^* \in \widehat{D}^*G(\bar{p},\bar{y})(y^*)$. Giả sử rằng $p^* \notin \widehat{D}^*(G+K)(\bar{p},\bar{y})(y^*)$. Theo các công thức tính đối đạo hàm Fréchet ở trong (4.1.6) và nón pháp tuyến Fréchet ở trong (4.1.2) với $\varepsilon = 0$, tồn tại dãy $(p_n,y_n) \to (\bar{p},\bar{y})$ với $y_n \in G(p_n) + K$ sao cho

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\langle (p^*,-y^*),(p_n,y_n)-(\bar{p},\bar{y})\rangle}{||(p_n,y_n)-(\bar{p},\bar{y})||} > 0. \tag{4.2.2}$$

Do H có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p},\bar{y},\bar{y})$ và $\mathrm{dom}H = \mathrm{gph}(G+K)$, tồn tại $\ell > 0$ và $U \times V \in \mathcal{N}(\bar{p},\bar{y})$ sao cho với mỗi $(p,y) \in (U\times V)\cap \mathrm{gph}(G+K)$ ta tìm được $y' \in H(p,y)$ thỏa mãn

$$||y'-\bar{y}|| \le \ell||(p,y)-(\bar{p},\bar{y})||.$$

Vì $(p_n,y_n) \to (\bar{p},\bar{y})$, nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $(p_n,y_n) \in U \times V$ với mọi $n \ge n_0$. Do đó, với mỗi $n \ge n_0$, tồn tại $y_n' \in H(p_n,y_n) = G(p_n)\cap(y_n - K)$ sao cho $||y_n'-\bar{y}|| \le \ell||(p_n,y_n)-(\bar{p},\bar{y})||$. Suy ra, với mỗi $n \ge n_0$, tồn tại $y_n' \in G(p_n)$ và $k_n \in K$ thỏa mãn $y_n' = y_n - k_n$. Điều này có nghĩa là ta tìm được dãy $(p_n,y_n') \xrightarrow{\mathrm{gph}G} (\bar{p},\bar{y})$ sao cho $||(p_n,y_n')-(\bar{p},\bar{y})|| \le (\ell+1)||(p_n,y_n)-(\bar{p},\bar{y})||$ với mọi $n \ge n_0$. Hơn nữa, từ sự chọn lựa của $y^* \in K^*$ và định nghĩa của nón đối ngẫu không âm ở trong (4.1.1), suy ra

$$\langle y^*, k\rangle \geq 0 \quad \forall k \in K.$$

Do đó, với mỗi $n \geq n_0$, ta có

$$\begin{aligned}\langle (p^*, -y^*), (p_n, y_n') - (\bar{p}, \bar{y})\rangle =& \langle (p^*, -y^*), (p_n - \bar{p}, y_n - k_n - \bar{y})\rangle \\ =& \langle (p^*, -y^*), (p_n - \bar{p}, y_n - \bar{y})\rangle + \langle y^*, k_n\rangle \\ \geq& \langle (p^*, -y^*), (p_n - \bar{p}, y_n - \bar{y})\rangle.\end{aligned}$$

Vì thế, từ (4.2.2) suy ra

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty} \frac{\langle (p^*, -y^*), (p_n, y_n') - (\bar{p}, \bar{y})\rangle}{\|(p_n, y_n') - (\bar{p}, \bar{y})\|} \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\langle (p^*, -y^*), (p_n - \bar{p}, y_n - \bar{y})\rangle}{\|(p_n, y_n') - (\bar{p}, \bar{y})\|} \\ &\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\langle (p^*, -y^*), (p_n - \bar{p}, y_n - \bar{y})\rangle}{(\ell + 1)\|(p_n, y_n) - (\bar{p}, \bar{y})\|} > 0.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\limsup_{(p,y)\xrightarrow{\text{gph}\, G}(\bar{p},\bar{y})} \frac{\langle (p^*, -y^*), (p, y) - (\bar{p}, \bar{y})\rangle}{\|(p, y) - (\bar{p}, \bar{y})\|} > 0.$$

Điều này có nghĩa là $p^* \notin \widehat{D}^*G(\bar{p}, \bar{y})(y^*)$, mâu thuẫn. Chứng minh kết thúc. □

Nhận xét 4.2.1. Bao hàm thức (4.2.1) có thể là *chặt* (nghĩa là không phải đẳng thức) nếu giả thiết về sự tồn tại lát cắt Lipschitz trên địa phương của H tại điểm được khảo sát bị loại bỏ.

Ví dụ 4.2.1. Cho $P = Y = \mathbb{R}$ và $K = \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$. Lấy

$$G(p) := \begin{cases}\{0, 2\} & \text{nếu } p \geq 0 \\ \emptyset & \text{nếu } p < 0.\end{cases}$$

Xét $(\bar{p}, \bar{y}) = (0, 2) \in \text{gph}G$ và $y^* = 2 \in K^*$. Ta thấy rằng H không có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(0, 2, 2)$. Thật vậy, với dãy $(p_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}) \to$

$(0,2), H(p_n, y_n) = \{0\}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Do đó, không tồn tại $\ell > 0$ sao cho $||0 - \bar{y}|| \le \ell||(p_n, y_n) - (\bar{p}, \bar{y})||$ với mọi n đủ lớn. Bằng cách tính toán trực tiếp, ta thu được

$$\widehat{D}^*(G+K)(0,2)(2) = \emptyset, \quad \widehat{D}^*G(0,2)(2) = (-\infty, 0].$$

Điều này có nghĩa là bao hàm thức (4.2.1) là chặt.

Tiếp theo ta thiết lập quy tắc tính cho đối đạo hàm Fréchet của hàm hợp của một hàm véctơ với một ánh xạ đa trị.

Mệnh đề 4.2.2. *Cho $g : P \times X \to Y$ là hàm véctơ, $G : P \rightrightarrows X$ là ánh xạ đa trị và cho $\bar{p} \in P$, $\bar{y} \in (g \circ G)(\bar{p})$. Với $y^* \in Y^*$, giả sử rằng với mỗi $\bar{x} \in G(\bar{p})$ thỏa mãn $(\bar{p}, \bar{x}) \in g^{-1}(\bar{y})$, hàm g là Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{x})$ và $\widehat{\partial}^+\langle y^*, g\rangle(\bar{p}, \bar{x}) \neq \emptyset$. Ta có*

$$\widehat{D}^*(g \circ G)(\bar{p}, \bar{y})(y^*) \subset \bigcap_{(p^*, x^*) \in \widehat{\partial}^+\langle y^*, g\rangle(\bar{p}, \bar{x})} \Big[p^* + \widehat{D}^*G(\bar{p}, \bar{x})(x^*)\Big]. \qquad (4.2.3)$$

Nếu g là khả vi Fréchet tại $(\bar{p}, \bar{x})$ với đạo hàm $\nabla g(\bar{p}, \bar{x}) := (\nabla_p g(\bar{p}, \bar{x}), \nabla_x g(\bar{p}, \bar{x}))$ và $\widetilde{G}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{x})$, thì bao hàm thức ngược lại của (4.2.3) *nghiệm đúng và do đó,*

$$\widehat{D}^*(g \circ G)(\bar{p}, \bar{y})(y^*) = \nabla_p g(\bar{p}, \bar{x})^* y^* + \widehat{D}^*G(\bar{p}, \bar{x})\big(\nabla_x g(\bar{p}, \bar{x})^* y^*\big), \qquad (4.2.4)$$

ở đây $\widetilde{G} : P \times Y \rightrightarrows X$ là ánh xạ đa trị được xác định bởi $\widetilde{G}(p, y) := \{x \in G(p) \mid y = g(p, x)\}$.

Chứng minh. Lấy tùy ý $u^* \in \widehat{D}^*(g \circ G)(\bar{p}, \bar{y})(y^*)$. Theo các công thức tính đối đạo hàm Fréchet và nón pháp tuyến Fréchet tương ứng ở trong (4.1.6) và

(4.1.2) với $\varepsilon = 0$, ta có

$$\limsup_{(p,y)\xrightarrow{\mathrm{gph}(g\circ G)}(\bar{p},\bar{y})} \frac{\langle (u^*, -y^*), (p, y) - (\bar{p}, \bar{y})\rangle}{\|(p, y) - (\bar{p}, \bar{y})\|} \leq 0.$$

Điều này có nghĩa là với mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại $\eta_1 > 0$ và $\eta_2 > 0$ sao cho

$$\langle u^*, p - \bar{p}\rangle \leq \langle y^*, y - \bar{y}\rangle + \epsilon(||p - \bar{p}|| + ||y - \bar{y}||) \tag{4.2.5}$$

với mọi $p \in B_{\eta_1}(\bar{p}), y \in B_{\eta_2}(\bar{y})$ thỏa mãn $y \in (g \circ G)(p) = \{g(p, x) \mid x \in G(p)\}$. Lấy $(p^*, x^*) \in \widehat{\partial}^+\langle y^*, g\rangle(\bar{p}, \bar{x})$. Để ý đến (4.1.4) và áp dụng Bổ đề 4.1.1 cho $(-p^*, -x^*) \in \widehat{\partial}(-\langle y^*, g\rangle)(\bar{p}, \bar{x})$ ta tìm được hàm $s : U \subset P \times X \to \mathbb{R}$ là khả vi Fréchet tại $(\bar{p}, \bar{x})$ và thỏa mãn

$$\begin{aligned} &s(\bar{p}, \bar{x}) = \langle y^*, g\rangle(\bar{p}, \bar{x}), (p^*, x^*) = \nabla s(\bar{p}, \bar{x}) := (\nabla_p s(\bar{p}, \bar{x}), \nabla_x s(\bar{p}, \bar{x})), \\ &s(p, x) \geq \langle y^*, g\rangle(p, x) \quad \forall (p, x) \in U, \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

ở đây U là lân cận nào đó của $(\bar{p}, \bar{x})$. Do g là Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{x})$, tồn tại lân cận U_1 của $(\bar{p}, \bar{x})$ và $l_1 \geq 0$ sao cho

$$||g(p, x) - g(\bar{p}, \bar{x})|| \leq l_1(||p - \bar{p}|| + ||x - \bar{x}||) \quad \forall (p, x) \in U_1.$$

Kết hợp điều này với (4.2.5) và (4.2.6) đưa đến

$$\begin{aligned}
\langle u^*, p-\bar{p}\rangle \leq & \langle y^*, g(p,x)\rangle - \langle y^*, g(\bar{p},\bar{x})\rangle + \epsilon(||p-\bar{p}|| + ||g(p,x) - g(\bar{p},\bar{x})||) \\
\leq & s(p,x) - s(\bar{p},\bar{x}) + \epsilon(||p-\bar{p}|| + ||g(p,x) - g(\bar{p},\bar{x})||) \\
= & \langle \nabla_p s(\bar{p},\bar{x}), p-\bar{p}\rangle + \langle \nabla_x s(\bar{p},\bar{x}), x-\bar{x}\rangle + o(||p-\bar{p}|| + ||x-\bar{x}||) \\
& + \epsilon(||p-\bar{p}|| + ||g(p,x) - g(\bar{p},\bar{x})||) \\
\leq & \langle \nabla_p s(\bar{p},\bar{x}), p-\bar{p}\rangle + \langle \nabla_x s(\bar{p},\bar{x}), x-\bar{x}\rangle + o(||p-\bar{p}|| + ||x-\bar{x}||) \\
& + \epsilon(1+l_1)(||p-\bar{p}|| + ||x-\bar{x}||) \\
= & \langle p^*, p-\bar{p}\rangle + \langle x^*, x-\bar{x}\rangle + o(||p-\bar{p}|| + ||x-\bar{x}||) \\
& + \epsilon(1+l_1)(||p-\bar{p}|| + ||x-\bar{x}||) \qquad (4.2.7)
\end{aligned}$$

với mọi $p \in B_{\alpha_1}(\bar{p}), x \in B_{\alpha_2}(\bar{x}) \cap G(p)$ đối với $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ nào đó, ở đó

$$\lim_{(p,x)\to(\bar{p},\bar{x})} \frac{o(||p-\bar{p}|| + ||x-\bar{x}||)}{||p-\bar{p}|| + ||x-\bar{x}||} = 0.$$

Vì $\epsilon > 0$ đã được chọn một cách tùy ý, nên từ (4.2.7) suy ra

$$\limsup_{(p,x)\xrightarrow{\text{gph}G}(\bar{p},\bar{x})} \frac{\langle (u^* - p^*, -x^*), (p,x) - (\bar{p},\bar{x})\rangle}{\|(p,x) - (\bar{p},\bar{x})\|} \leq 0.$$

Do đó, từ (4.1.2) với $\varepsilon = 0$ và từ (4.1.6) kéo theo $u^* - p^* \in \widehat{D}^*G(\bar{p},\bar{x})(x^*)$, có nghĩa là $u^* \in p^* + \widehat{D}^*G(\bar{p},\bar{x})(x^*)$. Vì vậy, (4.2.3) nghiệm đúng.

Bây giờ, để chứng minh (4.2.4), ta chỉ cần chứng minh bao hàm thức ngược lại của (4.2.3) dưới các giả thiết đã thêm vào. Chọn tùy ý $u^* \notin \widehat{D}^*(g \circ G)(\bar{p},\bar{y})(y^*)$. Chứng minh sẽ kết thúc nếu ta chỉ ra được rằng

$$u^* \notin \nabla_p g(\bar{p},\bar{x})^* y^* + \widehat{D}^*G(\bar{p},\bar{x})(\nabla_x g(\bar{p},\bar{x})^* y^*). \qquad (4.2.8)$$

Từ (4.1.6) suy ra $(u^*, -y^*) \notin \widehat{N}\big((\bar{p},\bar{y}); \text{gph}(g \circ G)\big)$ mỗi khi $u^* \notin \widehat{D}^*(g \circ$

$G)(\bar{p},\bar{y})(y^*)$. Do đó, theo (4.1.2) với $\varepsilon = 0$ ta có

$$\limsup_{(p,y)\xrightarrow{\mathrm{gph}(g\circ G)}(\bar{p},\bar{y})} \frac{\langle (u^*, -y^*), (p,y) - (\bar{p},\bar{y})\rangle}{\|(p,y) - (\bar{p},\bar{y})\|} > 0. \tag{4.2.9}$$

Từ (4.2.9) suy ra tồn tại $\{(p_n, y_n)\} \subset \mathrm{gph}(g \circ G)$ và $\alpha > 0$ thỏa mãn $(p_n, y_n) \to (\bar{p}, \bar{y})$ khi $n \to \infty$ và

$$\langle u^*, p_n - \bar{p}\rangle \geq \langle y^*, y_n - \bar{y}\rangle + \alpha(||p_n - \bar{p}|| + ||y_n - \bar{y}||) \tag{4.2.10}$$

với mọi n đủ lớn. Vì $\widetilde{G}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{x})$, nên tồn tại $l : \mathrm{dom}\widetilde{G} \to X$ là Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y})$ sao cho $l(\bar{p}, \bar{y}) = \bar{x}$ và $l(p, y) \in \widetilde{G}(p, y)$ với mọi $(p, y) \in$ dom $\widetilde{G}$ đủ gần $(\bar{p}, \bar{y})$. Do đó, tồn tại $\ell > 0$ sao cho

$$||x_n - \bar{x}|| \leq \ell(||p_n - \bar{p}|| + ||y_n - \bar{y}||) \tag{4.2.11}$$

với mọi n đủ lớn, ở đó $x_n := l(p_n, y_n) \in \widetilde{G}(p_n, y_n)$. Với mỗi n như ở trên, vì $x_n \in \widetilde{G}(p_n, y_n)$ cho nên $x_n \in G(p_n), y_n = g(p_n, x_n)$ và do đó, từ (4.2.10) suy ra

$$\begin{aligned}
\langle u^*, p_n - \bar{p}\rangle \geq &\langle y^*, g(p_n, x_n) - g(\bar{p}, \bar{x})\rangle + \alpha(||p_n - \bar{p}|| + ||g(p_n, x_n) - g(\bar{p}, \bar{x})||) \\
= &\langle y^*, \nabla g(\bar{p}, \bar{x})(p_n - \bar{p}, x_n - \bar{x})\rangle + o(||p_n - \bar{p}|| + ||x_n - \bar{x}||) \\
&+ \alpha(||p_n - \bar{p}|| + ||g(p_n, x_n) - g(\bar{p}, \bar{x})||) \\
= &\langle \nabla g(\bar{p}, \bar{x})^* y^*, (p_n - \bar{p}, x_n - \bar{x})\rangle + o(||p_n - \bar{p}|| + ||x_n - \bar{x}||) \\
&+ \alpha(||p_n - \bar{p}|| + ||g(p_n, x_n) - g(\bar{p}, \bar{x})||).
\end{aligned}$$

Điều này và (4.2.11) suy ra

$$\begin{aligned}\langle u^*, p_n - \bar{p}\rangle \geq &\langle \nabla g(\bar{p}, \bar{x})^* y^*, (p_n - \bar{p}, x_n - \bar{x})\rangle + o(||p_n - \bar{p}|| + ||x_n - \bar{x}||) \\ &+ \frac{\alpha}{2}||p_n - \bar{p}|| + \frac{\alpha}{2\ell}||x_n - \bar{x}|| \\ \geq &\langle \nabla g(\bar{p}, \bar{x})^* y^*, (p_n - \bar{p}, x_n - \bar{x})\rangle + o(||p_n - \bar{p}|| + ||x_n - \bar{x}||) \\ &+ \widehat{\alpha}(||p_n - \bar{p}|| + ||x_n - \bar{x}||)\end{aligned}$$

với $\widehat{\alpha} := \min\{\alpha/2, \alpha/(2\ell)\} > 0$. Do đó,

$$\limsup_{(p,x) \xrightarrow{\text{gph}G} (\bar{p},\bar{x})} \frac{\langle u^* - \nabla_p g(\bar{p}, \bar{x})^* y^*, p - \bar{p}\rangle - \langle \nabla_x g(\bar{p}, \bar{x})^* y^*, x - \bar{x}\rangle}{||p - \bar{p}|| + ||x - \bar{x}||} \geq \widehat{\alpha},$$

điều này có nghĩa là $(u^* - \nabla_p g(\bar{p}, \bar{x})^* y^*, -\nabla_x g(\bar{p}, \bar{x})^* y^*) \notin \widehat{N}\big((\bar{p}, \bar{x}); \text{gph}G\big)$. Theo (4.1.6), $u^* - \nabla_p g(\bar{p}, \bar{x})^* y^* \notin \widehat{D}^* G(\bar{p}, \bar{x})(\nabla_x g(\bar{p}, \bar{x})^* y^*)$. Vì vậy, (4.2.8) nghiệm đúng. □

Nhận xét 4.2.2. Dấu "=" ở trong (4.2.4) có thể không xảy ra nếu giả thiết về sự tồn tại lát cắt Lipschitz trên địa phương của $\widetilde{G}$ bị loại bỏ.

Ví dụ 4.2.2. Cho $P = X = Y = \mathbb{R}$. Lấy $g(p, x) := x^2$ và

$$G(p) := \begin{cases} \{-\sqrt{p}, \sqrt{p}\} & \text{nếu } p \geq 0 \\ \emptyset & \text{nếu } p < 0. \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned}&\text{gph}G = \{(p, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = p\}, \\ &\text{gph}(g \circ G) = \{(p, y) \in \mathbb{R}^2 \mid p \geq 0, y = p\}.\end{aligned}$$

Xét $\bar{p} = \bar{x} = \bar{y} = 0$ và $y^* = 0$. Để ý rằng $\widetilde{G}$ không có lát cắt Lipschitz địa phương nào tại $(0, 0, 0)$. Bằng cách tính toán trực tiếp, ta thu được

$$\widehat{D}^* G(0, 0)(0) = \mathbb{R}, \quad \widehat{D}^*(g \circ G)(0, 0)(0) = (-\infty, 0].$$

Điều này có nghĩa là không có dấu "=" ở trong (4.2.4).

Mệnh đề 4.2.2 phát triển một kết quả đã biết trong [40]. Cụ thể hơn, ta có hệ quả sau.

Hệ quả 4.2.1. (Xem [40, Proposition 4.6]) *Cho $g : P \times X \to Y$ là hàm véctơ, $G : P \rightrightarrows X$ là ánh xạ đa trị với* gph$G$ *là tập đóng, và cho $\bar{p} \in P$, $\bar{y} \in (g \circ G)(\bar{p})$. Giả sử rằng với mỗi $\bar{x} \in G(\bar{p})$ thỏa mãn $(\bar{p}, \bar{x}) \in g^{-1}(\bar{y})$, hàm g là Lipschitz địa phương tại $(\bar{p}, \bar{x})$ và khả vi Fréchet tại điểm này. Khi đó,*

$$\widehat{D}^*(g \circ G)(\bar{p}, \bar{y})(y^*) \subset \nabla_p g(\bar{p}, \bar{x})^* y^* + \widehat{D}^* G(\bar{p}, \bar{x})\big(\nabla_x g(\bar{p}, \bar{x})^* y^*\big) \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Hơn nữa, nếu $G = h$ là ánh xạ đơn trị và Lipschitz địa phương tại $\bar{p}$, thì ta có

$$\widehat{D}^*(g \circ h)(\bar{p}, \bar{y})(y^*) = \nabla_p g(\bar{p}, \bar{x})^* y^* + \widehat{\partial}\langle \nabla_x g(\bar{p}, \bar{x})^* y^*, h\rangle(\bar{p}) \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Bây giờ, ta sẽ phát biểu và chứng minh kết quả chính của mục này. Như ở các mục trước của chương này, hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ của bài toán tối ưu véctơ (3.1.1) được định nghĩa ở trong (3.1.3) và ánh xạ đa trị F được xác định bởi (3.1.2) với P, X và Y là các không gian Banach. Ta định nghĩa các ánh xạ $\mathcal{H} : P \times Y \rightrightarrows Y$ và $\widetilde{C} : P \times Y \rightrightarrows X$ lần lượt như sau: $\mathcal{H}(p, y) := \mathcal{F}(p) \cap (y - K)$, $\widetilde{C}(p, y) := \{x \in C(p) \mid y = f(p, x)\}$.

Định lý 4.2.1. *Cho $\bar{p} \in P$, $\bar{x} \in C(\bar{p})$ sao cho $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x}) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. Với $y^* \in K^*$ được cho bởi* (4.1.1)*, giả sử rằng $\widehat{\partial}^+\langle y^*, f\rangle(\bar{p}, \bar{x}) \neq \emptyset$ và hàm f là Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{x})$. Giả thiết thêm rằng tính chất trội đúng cho F ở xung quanh $\bar{p}$ và $\mathcal{H}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{y})$.*

Khi đó,

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(y^*) \subset \bigcap_{(p^*,x^*)\in\widehat{\partial}^+\langle y^*,f\rangle(\bar{p},\bar{x})} \Big[p^* + \widehat{D}^*C(\bar{p},\bar{x})(x^*)\Big]. \qquad (4.2.12)$$

Nếu ta giả sử thêm rằng f là khả vi Fréchet tại $(\bar{p},\bar{x})$ với đạo hàm $\nabla f(\bar{p},\bar{x}) := (\nabla_p f(\bar{p},\bar{x}), \nabla_x f(\bar{p},\bar{x}))$ và $\widetilde{C}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p},\bar{y},\bar{x})$, thì bao hàm thức ngược lại của (4.2.12) *nghiệm đúng, có nghĩa là ta có*

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(y^*) = \nabla_p f(\bar{p},\bar{x})^* y^* + \widehat{D}^*C(\bar{p},\bar{x})\big(\nabla_x f(\bar{p},\bar{x})^* y^*\big). \qquad (4.2.13)$$

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh (4.2.12). Do $\mathcal{F}(p) \subset F(p)$ với mọi $p \in P$ và do tính chất trội đúng cho F ở xung quanh $\bar{p} \in P$, tồn tại $U \in \mathcal{N}(\bar{p})$ sao cho

$$\mathcal{F}(p) + K = F(p) + K \quad \forall p \in U.$$

Khi đó,

$$\widehat{D}^*(\mathcal{F}+K)(\bar{p},\bar{y})(y^*) = \widehat{D}^*(F+K)(\bar{p},\bar{y})(y^*) \quad \forall y^* \in Y^*.$$

Điều này cùng với Mệnh đề 4.2.1 kéo theo

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p},\bar{y})(y^*) = \widehat{D}^*(\mathcal{F}+K)(\bar{p},\bar{y})(y^*) = \widehat{D}^*(F+K)(\bar{p},\bar{y})(y^*),\ y^* \in K^*. \qquad (4.2.14)$$

Xét ánh xạ $H : P \times Y \rightrightarrows Y$ được cho bởi $H(p,y) := F(p) \cap (y - K)$. Dễ thấy rằng $\mathcal{H}(p,y) \subset H(p,y)$ với mọi $(p,y) \in P \times Y$ và $\mathrm{dom}\mathcal{H} = \mathrm{gph}(\mathcal{F}+K), \mathrm{dom}H = \mathrm{gph}(F+K)$. Vì vậy, H có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p},\bar{y},\bar{y})$ mỗi khi $\mathcal{H}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại điểm đó. Bằng cách áp dụng Mệnh đề 4.2.1 một lần nữa, ta thu được

$$\widehat{D}^*(F+K)(\bar{p},\bar{y})(y^*) = \widehat{D}^*F(\bar{p},\bar{y})(y^*),\ y^* \in K^*. \qquad (4.2.15)$$

Để ý đến công thức hợp của ánh xạ F ở trong (3.1.2) và áp dụng Mệnh đề 4.2.2 cho nó, ta nhận được

$$\widehat{D}^*F(\bar{p},\bar{y})(y^*) \subset \bigcap_{(p^*,x^*)\in\widehat{\partial}^+\langle y^*,f\rangle(\bar{p},\bar{x})} \Big[p^* + \widehat{D}^*C(\bar{p},\bar{x})(x^*)\Big]. \qquad (4.2.16)$$

Từ các mối quan hệ ở trong (4.2.14)-(4.2.16) suy ra (4.2.12) nghiệm đúng.

Nhận xét rằng, theo Mệnh đề 4.2.2, bao hàm thức ngược lại ở trong (4.2.16) nghiệm đúng dưới các giả thiết thêm vào của định lý. Vì vậy, để thu được (4.2.13) ta chỉ cần sử dụng lại một lần nữa các tính chất ở trong (4.2.14)-(4.2.16). □

Nhận xét 4.2.3. Bằng những ví dụ thích hợp, ta có thể chỉ ra rằng giả thiết $y^* \in K^*$ và giả thiết $\widetilde{C}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại điểm được xét ở trong Định lý 4.2.1 là thiết yếu. Ví dụ sau đây sẽ minh họa tầm quan trọng của tính chất trội của ánh xạ F, đó là bao hàm thức (4.2.12) có thể không còn đúng nữa nếu giả thiết về sự tồn tại của tính chất trội của F ở xung quanh điểm đang khảo sát đã bị loại bỏ.

Ví dụ 4.2.3. Cho $P = X = Y = \mathbb{R}$ và $K = \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$. Lấy $f(p,x) := x$ và

$$C(p) := \begin{cases} [0,+\infty) & \text{nếu } p = 0 \\ (|p|,+\infty) & \text{nếu } p \neq 0. \end{cases}$$

Ta thấy rằng

$$\text{gph}C = \{(p,x) \in \mathbb{R}^2 \mid x > |p|\} \cup \{(0,0)\},$$

$$F(p) = C(p) \quad \forall p \in P.$$

Xét $\bar{p} := \bar{x} := 0$ và $y^* := 1 \in K^*$ được cho bởi (4.1.1). Ta có

$$\mathcal{F}(p) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu } p = 0 \\ \emptyset & \text{nếu } p \neq 0. \end{cases}$$

Vì vậy, $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x}) = 0 \in \mathcal{F}(\bar{p})$ và tính chất trội không đúng cho F ở xung quanh $\bar{p} = 0$. Trong khi đó, vì

$$\mathcal{H}(p, y) = \begin{cases} \{0\} & \text{nếu } (p, y) \in \{0\} \times \mathbb{R}_+ \\ \emptyset & \text{nếu } (p, y) \notin \{0\} \times \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

nên $\mathcal{H}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{y})$. Bằng cách tính toán trực tiếp, ta thu được

$$\widehat{D}^* \mathcal{F}(0,0)(1) = (-\infty, +\infty),\ \nabla_p f(0,0)^*(1) + \widehat{D}^* C(0,0)(1) = [-1, 1].$$

Điều này có nghĩa là bao hàm thức (4.2.12) không nghiệm đúng.

4.3 Trường hợp bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc thông thường

Mục này được dành để triển khai các công thức tính đối đạo hàm Fréchet của hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ như ở trong Định lý 4.2.1 vào một số lớp các bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc toán tử, và ràng buộc được mô tả bởi hữu hạn và vô hạn các hàm số thực.

Trước hết ta xét bài toán (3.1.1) với ánh xạ tập ràng buộc $C : P \rightrightarrows X$ được cho ở dạng

$$C(p) := \{x \in X \mid h(p, x) \in \Theta\}, \tag{4.3.1}$$

ở đó $h : P \times X \to W$ là hàm véctơ giữa các không gian Banach (lưu ý rằng P, X và Y vẫn được giả sử là các không gian Banach) và $\emptyset \neq \Theta \subset W$. Các ràng buộc kiểu (4.3.1) được biết như là *ràng buộc toán tử*. Chúng bao gồm ràng buộc hình học, ràng buộc hàm và một số loại ràng buộc khác khi đã chỉ ra một cách cụ thể h và Θ (xem [36, 37]).

Kết quả đầu tiên trong mục này đưa ra các công thức để tính đối đạo hàm

Fréchet của $\mathcal{F}$ được xác định bởi (3.1.3) với ánh xạ tập ràng buộc C ở trong (4.3.1).

Định lý 4.3.1. *Cho $\bar{p} \in P$, $\bar{x} \in C(\bar{p})$ sao cho $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x}) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. Với $y^* \in K^*$ được cho bởi* (4.1.1)*, giả sử rằng $\widehat{\partial}^+\langle y^*, f\rangle(\bar{p}, \bar{x}) \neq \emptyset$ và hàm f là Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{x})$. Giả thiết thêm rằng tính chất trội đúng cho F được xác định bởi* (3.1.2) *ở xung quanh $\bar{p}$ và $\mathcal{H}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{y})$. Ta có các khẳng định sau:*

(i) *Giả sử rằng h ở trong* (4.3.1) *là khả vi chặt tại $(\bar{p}, \bar{x})$ với đạo hàm $\nabla h(\bar{p}, \bar{x})$ là toàn ánh. Khi đó,*

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(y^*) \subset \bigcap_{(p^*, x^*) \in \widehat{\partial}^+\langle y^*, f\rangle(\bar{p}, \bar{x})} \Big\{p^* + u^* \Big|\ (u^*, -x^*) \in \nabla h(\bar{p}, \bar{x})^* \widehat{N}(\bar{w}; \Theta)\Big\}, \tag{4.3.2}$$

ở đây $\bar{w} := h(\bar{p}, \bar{x})$.

(ii) *Giả sử thêm vào* (i) *rằng f là khả vi Fréchet tại $(\bar{p}, \bar{x})$ với đạo hàm $\nabla f(\bar{p}, \bar{x}) := (\nabla_p f(\bar{p}, \bar{x}), \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x}))$ và $\widetilde{C}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{x})$. Khi đó bao hàm thức ngược lại của* (4.3.2) *nghiệm đúng, có nghĩa là ta có*

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(y^*) = \Big\{\nabla_p f(\bar{p}, \bar{x})^* y^* + u^* \Big|\ (u^*, -\nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})^* y^*) \in \nabla h(\bar{p}, \bar{x})^* \widehat{N}(\bar{w}; \Theta)\Big\}. \tag{4.3.3}$$

Chứng minh. Nhận xét rằng đồ thị của ánh xạ tập ràng buộc C ở trong (4.3.1) có biểu diễn ảnh ngược

$$\operatorname{gph} C = h^{-1}(\Theta) := \Big\{(p, x) \in P \times X \Big|\ h(p, x) \in \Theta\Big\}. \tag{4.3.4}$$

Vì h là khả vi chặt tại $(\bar{p}, \bar{x})$ và đạo hàm $\nabla h(\bar{p}, \bar{x})$ là toàn ánh, nên từ Bổ đề 4.1.2 và (4.3.4) ta có

$$\widehat{N}\big((\bar{p}, \bar{x}); \operatorname{gph} C\big) = \widehat{N}\big((\bar{p}, \bar{x}); h^{-1}(\Theta)\big) = \nabla h(\bar{p}, \bar{x})^* \widehat{N}(\bar{w}; \Theta).$$

Điều này cùng với (4.1.6) đưa đến

$$\widehat{D}^* C(\bar{p}, \bar{x})(x^*) = \big\{u^* \in P^* \mid (u^*, -x^*) \in \nabla h(\bar{p}, \bar{x})^* \widehat{N}(\bar{w}; \Theta)\big\}. \tag{4.3.5}$$

Thay (4.3.5) vào (4.2.12) và (4.2.13) ở trong Định lý 4.2.1, ta thu được (4.3.2) và (4.3.3) một cách tương ứng. Chứng minh kết thúc. □

Bây giờ, ta xét bài toán (3.1.1) với các ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức

$$\begin{aligned} C(p) := \big\{x \in X \mid\ & g_i(p, x) \le 0,\ i = 1, ..., m, \\ & g_i(p, x) = 0, \quad i = m+1, ..., m+r\big\}, \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

ở đó $g_i,\ i = 1, ..., m+r$ là các hàm số thực ở trên $P \times X$. Các ràng buộc kiểu này có thể được xem như một trường hợp đặc biệt của ràng buộc toán tử (4.3.1) với $h : P \times X \to \mathbb{R}^{m+r}$ được xác định bởi

$$h(p, x) := (g_1(p, x), ..., g_{m+r}(p, x)) \tag{4.3.7}$$

và $\Theta \subset \mathbb{R}^{m+r}$ được cho bởi

$$\begin{aligned} \Theta := \big\{(\alpha_1, ..., \alpha_{m+r}) \in \mathbb{R}^{m+r} \mid\ & \alpha_i \le 0,\ i = 1, ..., m, \\ & \alpha_i = 0, \quad i = m+1, ..., m+r\big\}. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Tuy nhiên, các ràng buộc kiểu (4.3.6) là một lớp thông thường và quen thuộc trong quy hoạch phi tuyến và tối ưu véctơ. Định lý tiếp theo đưa ra các công thức để tính đối đạo Fréchet của $\mathcal{F}$ của bài toán (3.1.1) với C được cho bởi (4.3.6).

Định lý 4.3.2. *Cho* $\bar{p} \in P$, $\bar{x} \in C(\bar{p})$ *sao cho* $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x}) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. *Với* $y^* \in K^*$ *được cho bởi* (4.1.1), *giả sử rằng* $\widehat{\partial}^+\langle y^*, f\rangle(\bar{p}, \bar{x}) \neq \emptyset$ *và hàm* f *là Lipschitz trên địa phương tại* $(\bar{p}, \bar{x})$. *Giả sử rằng tính chất trội đúng cho* F *được xác định bởi* (3.1.2) *ở xung quanh* $\bar{p}$ *và* $\mathcal{H}$ *có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại* $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{y})$. *Giả thiết thêm rằng các hàm* $g_i, i = 1, ..., m + r$, *ở trong* (4.3.6) *là khả vi Fréchet tại* $(\bar{p}, \bar{x})$ *và*

$$\nabla g_1(\bar{p}, \bar{x}), ..., \nabla g_{m+r}(\bar{p}, \bar{x}) \text{ là độc lập tuyến tính.} \tag{4.3.9}$$

Ta có

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(y^*) \subset \bigcap_{(p^*,x^*)\in\widehat{\partial}^+\langle y^*,f\rangle(\bar{p},\bar{x})} \bigcup_{\lambda\in\Lambda(\bar{p},\bar{x},x^*)} \Big[p^* + \sum_{i=1}^{m+r} \lambda_i \nabla_p g_i(\bar{p}, \bar{x})\Big], \tag{4.3.10}$$

ở đó

$$\Lambda(\bar{p}, \bar{x}, x^*) := \Big\{\lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_{m+r}) \in \mathbb{R}^{m+r} \Big| \, x^* + \sum_{i=1}^{m+r} \lambda_i \nabla_x g_i(\bar{p}, \bar{x}) = 0,$$
$$\lambda_i \geq 0, \lambda_i g_i(\bar{p}, \bar{x}) = 0 \text{ với } i = 1, ..., m\Big\} \tag{4.3.11}$$

ký hiệu cho tập các nhân tử Lagrange (xem [39]). *Hơn nữa,* (4.3.10) *trở thành đẳng thức*

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(y^*) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda(\bar{p},\bar{x},\nabla_x f(\bar{p},\bar{x})^* y^*)} \Big[\nabla_p f(\bar{p}, \bar{x})^* y^* + \sum_{i=1}^{m+r} \lambda_i \nabla_p g_i(\bar{p}, \bar{x})\Big], \tag{4.3.12}$$

nếu $\widetilde{C}$ *có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại* $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{x})$ *và* f *là khả vi Fréchet tại* $(\bar{p}, \bar{x})$ *với đạo hàm* $\nabla f(\bar{p}, \bar{x}) := (\nabla_p f(\bar{p}, \bar{x}), \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x}))$.

Chứng minh. Ta nhận thấy rằng ánh xạ tập ràng buộc C ở trong (4.3.6) có biểu diễn ảnh ngược

$$\operatorname{gph} C = h^{-1}(\Theta) := \big\{(p, x) \in P \times X \big| \, h(p, x) \in \Theta\big\}, \tag{4.3.13}$$

ở đó hàm véctơ h được xác định bởi (4.3.7) và nón lồi đóng Θ được cho bởi (4.3.8). Theo giả thiết của định lý và định nghĩa của hàm h ở trong (4.3.7), ta có h là khả vi Fréchet tại $(\bar{p},\bar{x})$ và hơn nữa từ (4.3.9) suy ra đạo hàm $\nabla h(\bar{p},\bar{x})$ là toàn ánh (chẳng hạn xem [27, Example 13]). Vì vậy, từ Bổ đề 4.1.2 và (4.3.13) ta có

$$\widehat{N}\big((\bar{p},\bar{x});\mathrm{gph}\,C\big)=\widehat{N}\big((\bar{p},\bar{x});h^{-1}(\Theta)\big)=\nabla h(\bar{p},\bar{x})^*\widehat{N}(h(\bar{p},\bar{x});\Theta).$$

Điều này cùng với (4.1.6) dẫn đến

$$\widehat{D}^*C(\bar{p},\bar{x})(x^*)=\big\{u^*\in P^*\mid (u^*,-x^*)\in\nabla h(\bar{p},\bar{x})^*\widehat{N}(h(\bar{p},\bar{x});\Theta)\big\}. \tag{4.3.14}$$

Bằng cách tính toán trực tiếp, với lưu ý Θ là lồi, ta có

$$\widehat{N}(h(\bar{p},\bar{x});\Theta)=\Big\{\lambda:=(\lambda_1,...,\lambda_{m+r})\in\mathbb{R}^{m+r}\;\Big|\;\lambda_i\geq 0,\ \lambda_i g_i(\bar{p},\bar{x})=0 \text{ với } i=1,...,m\Big\}.$$

Kết hợp điều này với (4.3.14) và để ý đến định nghĩa của h ở trong (4.3.7), ta thu được

$$\widehat{D}^*C(\bar{p},\bar{x})(x^*)=\Big\{u^*\in P^*\mid (u^*,-x^*)=\sum_{i=1}^{m+r}\lambda_i\nabla g_i(\bar{p},\bar{x}) \text{ với một } \lambda\in\mathbb{R}^{m+r} \text{ thỏa mãn } \lambda_i\geq 0,\ \lambda_i g_i(\bar{p},\bar{x})=0, i=1,...,m\Big\}. \tag{4.3.15}$$

Bây giờ, thay (4.3.15) vào (4.2.12) và (4.2.13) ở trong Định lý 4.2.1 đồng thời chú ý đến cấu trúc của tập nhân tử Lagrange $\Lambda(\bar{p},\bar{x},x^*)$ ở trong (4.3.11) ta thu được (4.3.10) và (4.3.12) một cách tương ứng. Chứng minh kết thúc. □

Nhận xét 4.3.1. Ở trong Định lý 4.3.2, điều kiện độc lập tuyến tính của các gradient ở trong (4.3.9) - đảm bảo tính toàn ánh của $\nabla h(\bar{p},\bar{x})$ - là hơi *chặt*. Ở trong định lý tiếp theo, chúng ta sẽ "nới lỏng" điều kiện này bằng cách thay thế nó bởi cái gọi là *điều kiện chính quy Mangasarian-Fromovitz*. Nhắc lại rằng điều kiện chính quy Mangasarian-Fromovitz (MF) thỏa mãn tại $(\bar{p}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} C$, ở đây C được xác định bởi (4.3.6), nếu

$$\begin{cases} \text{các gradient } \ \nabla g_{m+1}(\bar{p}, \bar{x}), \ldots, \nabla g_{m+r}(\bar{p}, \bar{x}) \ \text{ là độc lập tuyến tính} \\ \text{và tồn tại } \ u \in P \times X \ \text{ sao cho } \ \langle \nabla g_i(\bar{p}, \bar{x}), u \rangle = 0 \\ \text{với mọi } i = m+1, \ldots, m+r, \ \text{ và } \ \langle \nabla g_i(\bar{p}, \bar{x}), u \rangle < 0 \ \text{ với mọi} \\ i = 1, \ldots, m \text{ mà } \ g_i(\bar{p}, \bar{x}) = 0. \end{cases} \tag{4.3.16}$$

Ở đó P và X được giả sử là các không gian Asplund và các hàm $g_i, i = 1, ..., m + r$ trong (4.3.6) được giả sử là khả vi chặt tại điểm $(\bar{p}, \bar{x})$.

Dưới điều kiện chính quy (MF), chúng ta có thể tính chính xác đối đạo hàm Fréchet của ánh xạ tập ràng buộc C tại điểm được xét (xem [36, Corollary 4.35]). Cho P và X là các không gian Asplund và cho C được xác định bởi (4.3.6), ở đó $g_i, i = 1, ..., m + r$ là các hàm khả vi chặt tại điểm $(\bar{p}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} C$. Nếu điều kiện chính quy (MF) thỏa mãn tại $(\bar{p}, \bar{x})$, thì ta có

$$\widehat{D}^* C(\bar{p}, \bar{x})(x^*) = \Big\{ u^* \in P^* \mid (u^*, -x^*) = \sum_{i=1}^{m+r} \lambda_i \nabla g_i(\bar{p}, \bar{x}) \text{ với một } \lambda \in \mathbb{R}^{m+r} \\ \text{thỏa mãn } \lambda_i \geq 0, \ \lambda_i g_i(\bar{p}, \bar{x}) = 0, i = 1, ..., m \Big\}. \tag{4.3.17}$$

Định lý 4.3.3. *Trong ký hiệu của Định lý 4.3.2, giả sử rằng các không gian P và X là Asplund, các hàm $g_i, i = 1, ..., m + r$ là khả vi chặt tại $(\bar{p}, \bar{x})$, và giả sử điều kiện* (4.3.9) *được thay bởi điều kiện* (4.3.16). *Khi đó, ta có* (4.3.10) *và* (4.3.12) *tương ứng với các giả thiết thêm vào ở trong Định lý 4.3.2.*

Chứng minh. Do các giả thiết của định lý và Nhận xét 4.3.1, ta có công thức tính (4.3.17) cho đối đạo hàm Fréchet của ánh xạ tập ràng buộc C tại điểm $(\bar{p}, \bar{x})$.

Bây giờ, thay (4.3.17) vào (4.2.12) và (4.2.13) tương ứng ở trong Định lý 4.2.1 ta thu được kết quả mong muốn. □

Tiếp theo chúng ta sẽ triển khai các công thức để tính đối đạo hàm Fréchet của hàm giá trị tối ưu $\mathcal{F}$ trong bài toán *tối ưu véctơ nửa vô hạn*. Cụ thể, ta xét bài toán (3.1.1) với ánh xạ tập ràng buộc C được xác định bởi (3.3.10), nhưng giả sử rằng với mỗi $t \in T,\ g_t : P \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ là *chính quy dưới* (xem định nghĩa ở trong (4.1.5)) tại điểm đang khảo sát. Ta vẫn giả thiết rằng P, X và Y là các không gian Banach và sử dụng các ký hiệu ở trong Mục 3.3 của Chương 3.

Định nghĩa 4.3.1. Ta nói rằng hệ (3.3.10) thỏa mãn điều kiện chính quy ràng buộc đặt trên dưới vi phân Fréchet, viết tắt là (FRCQ), tại $(\bar{p}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} C$ nếu

$$\widehat{N}\big((\bar{p}, \bar{x}); \operatorname{gph} C\big) = \bigcup_{\lambda \in A(\bar{p}, \bar{x})} \Big[\sum_{t \in T} \lambda_t \widehat{\partial} g_t(\bar{p}, \bar{x})\Big]. \tag{4.3.18}$$

Nhận xét 4.3.2. Bài báo [12] đã đề xuất hai điều kiện chính quy ràng buộc cho hệ (3.3.10) với P, X là các không gian Banach và với mỗi $t \in T, g_t : P \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ là hàm tùy ý, đồng thời đã cung cấp một số điều kiện đủ cho sự thỏa mãn của các điều kiện chính quy đó. Do khuôn khổ và cấu trúc của luận án, các kết quả trong [12] sẽ không được trình bày vào đây. Tuy nhiên chúng tôi muốn nhấn mạnh rằng, vì các hàm $g_t, t \in T$ ở trong (3.3.10) được giả sử là chính quy dưới (xem định nghĩa ở trong (4.1.5)) tại điểm được xét, nên có một số tiêu chuẩn đảm bảo cho các điều kiện chính quy ở trong [12] sẽ kéo theo điều kiện (FRCQ) ở trên. Chẳng hạn, nếu điều kiện (FM), được định nghĩa bởi (3.3.12), đúng cho hệ (3.3.10), thì từ [12, Theorem 3.7] suy ra hệ (3.3.10) thỏa mãn điều kiện (FRCQ) tại $(\bar{p}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} C$; hoặc nếu điều kiện chính quy (MF), được định nghĩa ở trong (4.3.16), thỏa mãn tại $(\bar{p}, \bar{x}) \in \operatorname{gph} C$ (với lưu ý khi đó T là hữu hạn), thì từ [12, Theorem 3.6] cũng suy ra hệ (3.3.10) thỏa mãn điều kiện

(FRCQ) tại điểm tương ứng.

Với sự giúp đỡ của điều kiện chính quy ràng buộc ở trong (4.3.18), bây giờ ta sẽ thiết lập các công thức để tính đối đạo hàm Fréchet của $\mathcal{F}$ trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn. Định lý 4.3.4 được dành cho bài toán với các hàm ràng buộc không khả vi. Trong khi đó, Hệ quả 4.3.1 để cho trường hợp khả vi.

Định lý 4.3.4. *Cho $\bar{p} \in P$, $\bar{x} \in C(\bar{p})$ sao cho $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x}) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. Với $y^* \in K^*$ được cho bởi* (4.1.1)*, giả sử rằng $\widehat{\partial}^+\langle y^*, f\rangle(\bar{p}, \bar{x}) \neq \emptyset$ và hàm f là Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{x})$. Giả sử rằng tính chất trội đúng cho F ở xung quanh $\bar{p}$, $\mathcal{H}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{y})$, và g_t ở trong* (3.3.10) *là chính quy dưới tại $(\bar{p}, \bar{x})$ với mọi $t \in T$. Giả thiết thêm rằng hệ* (3.3.10) *thỏa mãn* (FRCQ) *tại $(\bar{p}, \bar{x})$. Khi đó ta có*

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(y^*) \subset \bigcap_{(p^*, x^*) \in \widehat{\partial}^+\langle y^*, f\rangle(\bar{p}, \bar{x})} \Big\{ p^* + u^* \Big| \, (u^*, -x^*) \in \bigcup_{\lambda \in A(\bar{p}, \bar{x})} \big[\sum_{t \in T} \lambda_t \widehat{\partial} g_t(\bar{p}, \bar{x}) \big] \Big\}. \tag{4.3.19}$$

Ngoài ra, (4.3.19) *nghiệm đúng dưới dạng đẳng thức*

$$\widehat{D}^*\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(y^*) = \Big\{ \nabla_p f(\bar{p}, \bar{x})^* y^* + u^* \Big| (u^*, -\nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})^* y^*) \in \bigcup_{\lambda \in A(\bar{p}, \bar{x})} \big[\sum_{t \in T} \lambda_t \widehat{\partial} g_t(\bar{p}, \bar{x}) \big] \Big\}, \tag{4.3.20}$$

nếu $\widetilde{C}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{x})$ và f là khả vi Fréchet tại $(\bar{p}, \bar{x})$ với đạo hàm $\nabla f(\bar{p}, \bar{x}) := (\nabla_p f(\bar{p}, \bar{x}), \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x}))$.

Chứng minh. Vì hệ (3.3.10) thỏa mãn (FRCQ) tại $(\bar{p}, \bar{x})$, nên từ (4.1.6) suy ra

$$\widehat{D}^* C(\bar{p}, \bar{x})(x^*) = \big\{u^* \in P^* \mid (u^*, -x^*) \in \bigcup_{\lambda \in A(\bar{p}, \bar{x})} \big[\sum_{t \in T} \lambda_t \widehat{\partial} g_t(\bar{p}, \bar{x})\big]\big\}. \tag{4.3.21}$$

Bây giờ, thay (4.3.21) vào (4.2.12) và (4.2.13) của Định lý 4.2.1, ta thu được (4.3.19) và (4.3.20) một cách tương ứng. □

Kết quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 4.3.4.

Hệ quả 4.3.1. *Trong ký hiệu của Định lý 4.3.4, giả thiết thêm rằng* $g_t,\ t \in T$, *ở trong* (3.3.10) *là khả vi Fréchet tại* $(\bar{p}, \bar{x})$. *Ta có*

$$\widehat{D}^* \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(y^*) \subset \bigcap_{(p^*, x^*) \in \widehat{\partial}^+ \langle y^*, f \rangle (\bar{p}, \bar{x})} \ \bigcup_{\lambda \in \Lambda(\bar{p}, \bar{x}, x^*)} \Big[p^* + \sum_{t \in T} \lambda_t \nabla_p g_t(\bar{p}, \bar{x})\Big], \tag{4.3.22}$$

ở đó

$$\Lambda(\bar{p}, \bar{x}, x^*) := \big\{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \big| \, x^* + \sum_{t \in T} \lambda_t \nabla_x g_t(\bar{p}, \bar{x}) = 0, \\ \lambda_t g_t(\bar{p}, \bar{x}) = 0 \quad \forall t \in T\big\}$$

ký hiệu cho tập các nhân tử Lagrange (xem [20]). *Ngoài ra,* (4.3.22) *nghiệm đúng dưới dạng đẳng thức*

$$\widehat{D}^* \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(y^*) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(\bar{p}, \bar{x}, \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})^* y^*)} \Big[\nabla_p f(\bar{p}, \bar{x})^* y^* + \sum_{t \in T} \lambda_t \nabla_p g_t(\bar{p}, \bar{x})\Big],$$

nếu $\widetilde{C}$ *có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại* $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{x})$ *và* f *là khả vi Fréchet tại* $(\bar{p}, \bar{x})$ *với đạo hàm* $\nabla f(\bar{p}, \bar{x}) := (\nabla_p f(\bar{p}, \bar{x}), \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x}))$.

Cuối cùng ở trong mục này ta hãy xét một ví dụ minh họa sự áp dụng các kết quả chính của chương này vào những bài toán cụ thể.

Ví dụ 4.3.1. Lấy $T = [0, 1], P = \mathbb{R}, X = Y = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}^2_+$. Cho $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ là hàm véc tơ và $g_t : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, t \in T$ là các hàm số thực được xác định như sau.

$$f(p,x) = (p + x_1 + 1, x_2 + 1) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall p \in \mathbb{R},$$

$$g_t(p,x) = tp - tx_1 - (1-t)x_2 \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall p \in \mathbb{R}.$$

Dễ thấy rằng g_t là chính quy dưới tại mọi $(p,x) \in P \times X$ với mọi $t \in T$. Xét bài toán (3.1.1) với C được cho bởi (3.3.10). Bằng cách tính toán trực tiếp ta thu được

$$\begin{aligned}
&C(p) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq p, x_2 \geq 0\},\\
&F(p) = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \geq 2p + 1, y_2 \geq 1\} \quad \forall p \in P.
\end{aligned}$$

Do đó, ta thấy rằng tính chất trội đúng cho ánh xạ F được xác định bởi (3.1.2) tại mọi điểm $p \in P$. Hơn nữa, với $\bar{p} := 0$,

$$\begin{aligned}
&C(\bar{p}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},\\
&F(\bar{p}) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \geq 1, y_2 \geq 1\}.
\end{aligned}$$

Suy ra $\bar{x} := (0,0) \in C(\bar{p})$ và $\bar{y} := f(\bar{p}, \bar{x}) = (1,1) \in \mathcal{F}(\bar{p})$. Kiểm tra được rằng $\mathcal{H}$ và $\widetilde{C}$ có lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{y})$ và $(\bar{p}, \bar{y}, \bar{x})$ một cách tương ứng. Với mỗi $t \in T$, ta có

$$g_t^*(p,x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (p,x) = (t, -t, t-1) \\ +\infty & \text{nếu } (p,x) \neq (t, -t, t-1), \end{cases} \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \ \forall p \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{epi} g_t^* = \{t\} \times \{-t\} \times \{t-1\} \times \mathbb{R}_+.$$

Vì vậy, $\operatorname{cone}\Big(\bigcup_{t \in T} \operatorname{epi} g_t^*\Big) = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2_- \times \mathbb{R}_+$ là đóng ở trong $\mathbb{R}^4$, có nghĩa là điều kiện (FM) đúng cho hệ (3.3.10). Theo Nhận xét 4.3.2, hệ (3.3.10) thỏa mãn (FRCQ) tại $(\bar{p}, \bar{x})$. Với $y^* = (y_1^*, y_2^*) \in K^*$ được cho bởi (4.1.1), ta có

$$\begin{aligned}
\Lambda\big(\bar{p}, \bar{x}, \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})^* y^*\big) &= \Big\{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \mid \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})^* y^* + \sum_{t \in T} \lambda_t \nabla_x g_t(\bar{p}, \bar{x}) = 0, \\
&\qquad\qquad \lambda_t g_t(\bar{p}, \bar{x}) = 0,\ \forall t \in T\Big\} \\
&= \Big\{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \mid (y_1^*, y_2^*) + \sum_{t \in T} \lambda_t(-t, t-1) = (0,0)\Big\} \\
&= \Big\{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)} \mid \sum_{t \in T} \lambda_t t = y_1^*, \sum_{t \in T} \lambda_t = y_1^* + y_2^*\Big\}.
\end{aligned}$$

Bây giờ, áp dụng Hệ quả 4.3.1 ta nhận được

$$\widehat{D}^* \mathcal{F}(\bar{p}, \bar{y})(y^*) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda\left(\bar{p}, \bar{x}, \nabla_x f(\bar{p}, \bar{x})^* y^*\right)} \Big[y_1^* + \sum_{t \in T} \lambda_t t\Big] = \{2y_1^*\}.$$

Kết luận của Chương 4

Các kết quả chính của chương này bao gồm:

- Công thức tính đối đạo hàm Fréchet cho bài toán tối ưu véctơ có tập ràng buộc được xác định bởi một ánh xạ đa trị (Định lý 4.2.1).

- Công thức tính đối đạo hàm Fréchet cho bài toán tối ưu véctơ có ràng buộc toán tử (Định lý 4.3.1).

- Các công thức tính đối đạo hàm Fréchet cho bài toán tối ưu véctơ có tập ràng buộc được mô tả bởi hữu hạn các hàm số thực (Định lý 4.3.2 và Định lý 4.3.3).

- Các công thức tính đối đạo hàm Fréchet cho bài toán tối ưu véctơ có tập ràng buộc được mô tả bởi một tập tùy ý các hàm số thực (Định lý 4.3.4 và Hệ quả 4.3.1).

Kết luận

Các kết quả chính của luận án này bao gồm:

1. Điều kiện cần và đủ cho tính chất nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn.
2. Điều kiện đủ cho tính chất giả-Lipschitz của ánh xạ nghiệm hữu hiệu trong bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn lồi.
3. Công thức tính đạo hàm trên-đồ-thị Clarke suy rộng của hàm giá trị tối ưu cho bài toán tối ưu véctơ trong các trường hợp sau: a) bài toán không có ràng buộc, b) bài toán có ràng buộc tổng quát, c) bài toán tối ưu véctơ nửa vô hạn.
4. Công thức tính đối đạo hàm Fréchet của hàm giá trị tối ưu trong các bài toán tối ưu véctơ thuộc các dạng sau: a) bài toán có tập ràng buộc được xác định bởi một ánh xạ đa trị, b) bài toán có ràng buộc toán tử, c) bài toán có tập ràng buộc được mô tả bởi hữu hạn hoặc vô hạn các hàm số thực.

Có thể phát triển các kết quả của hai chương đầu, đặc biệt là của Chương 2, bằng cách xác lập điều kiện cần cho tính giả-Lipschitz của ánh xạ nghiệm hữu hiệu và đưa ra các điều kiện đủ để ánh xạ nghiệm hữu hiệu là liên tục Hölder.

Cần nghiên cứu sâu thêm mối quan hệ giữa các kết quả của Chương 3 và Chương 4 với những kết quả quen biết của J. Gauvin và J. W. Tolle (1977), J. Gauvin (1979), R. T. Rockafellar (1982) về tính ổn định vi phân trong bài toán quy hoạch có tham số.

Ngoài ra, cũng nên khảo sát sự cần thiết của một số giả thiết đặc biệt (như tính lồi, điều kiện trội,...) trong các định lý ở Chương 3.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. T. D. Chuong, N. Q. Huy, J.-C. Yao (2009), "Stability of semi-infinite vector optimization problems under functional perturbations", *J. Glob. Optim.*, **45**, pp. 583 - 595.

2. T. D. Chuong, N. Q. Huy, J.-C. Yao (2010), "Pseudo-Lipschitz property of linear semi-infinite vector optimizition problems", *European J. Oper. Res.*, **200**, pp. 639 - 644.

3. T. D. Chuong, J.-C. Yao (2009), "Sufficient conditions for pseudo-Lipschitz property in convex semi-infinite vector optimization problems", *Nonlinear Anal.*, **71**, pp. 6312 - 6322.

4. T. D. Chuong, J.-C. Yao (2009), "Coderivatives of efficient point multifunctions in parametric vector optimization", *Taiwanese J. Math.*, **13**, pp. 1671 - 1693.

5. T. D. Chuong, J.-C. Yao (2010), "Generalized Clarke epiderivatives of parametric vector optimization problems", *J. Optim. Theory Appl.*, **146**, pp. 77 - 94.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Đông Yên (2007), *Giáo trình Giải tích đa trị*, NXB Khoa học tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội.

Tiếng Anh

[2] J.-P. Aubin, H. Frankowska (1990), *Set-valued analysis,* Birkhäuser.

[3] E. M. Bednarczuk, W. Song (1998), "Contingent epiderivative and its applications to set-valued maps", *Control Cybernet.*, **27**, pp. 375 - 386.

[4] B. Brosowski (1984), "Parametric semi-infinite linear programming. I. Continuity of the feasible set and of the optimal value. Sensitivity, stability and parametric analysis", *Math. Programming Stud.*, **21**, pp. 18 - 42.

[5] M. J. Cánovas, M. A. López, J. Parra, M. I. Todorov (1999), "Stability and well-posedness in linear semi-infinite programming", *SIAM J. Optim.*, **10**, pp. 82 - 98.

[6] M. J. Cánovas, M. A. López, J. Parra, F. J. Toledo (2006), "Lipschitz continuity of the optimal value via bounds on the optimal set in linear semi-infinite optimization", *Math. Oper. Res.*, **31**, pp. 478 - 489.

[7] M. J. Cánovas, D. Klatte, M. A. López, J. Parra (2007), "Metric regularity in convex semi-infinite optimization under canonical perturbations", *SIAM J. Optim.*, **18**, pp. 717 - 732.

[8] L. Chen (2002), "Generalized tangent epiderivative and applications to set-valued map optimization", *J. Nonlinear Convex Anal.*, **3**, pp. 303 - 313.

[9] G. Y. Chen, B. D. Craven (1994), "Existence and continuity of solutions for vector optimization", *J. Optim. Theory Appl.*, **81**, pp. 459 - 468.

[10] G. Y. Chen, J. Jahn (1998), "Optimality conditions for set-valued optimization problems", *Math. Meth. Oper. Res.*, **48**, pp. 187 - 200.

[11] T. D. Chuong, N. Q. Huy, J.-C. Yao (2009), "Stability of semi-infinite vector optimization problems under functional perturbations", *J. Glob. Optim.*, **45**, pp. 583 - 595.

[12] T. D. Chuong, N. Q. Huy, J.-C. Yao (2009), "Subdifferentials of marginal functions in semi-infinite programming", *SIAM J. Optim.*, **20**, pp. 1462 - 1477.

[13] T. D. Chuong, N. Q. Huy, J.-C. Yao (2010), "Pseudo-Lipschitz property of linear semi-infinite vector optimizition problems", *European J. Oper. Res.*, **200**, pp. 639 - 644.

[14] T. D. Chuong, J.-C. Yao (2009), "Sufficient conditions for pseudo-Lipschitz property in convex semi-infinite vector optimization problems", *Nonlinear Anal.*, **71**, pp. 6312 - 6322.

[15] T. D. Chuong, J.-C. Yao (2009), "Coderivatives of efficient point multifunctions in parametric vector optimization", *Taiwanese J. Math.*, **13**, pp. 1671 - 1693.

[16] T. D. Chuong, J.-C. Yao (2010), "Generalized Clarke epiderivatives of parametric vector optimization problems", *J. Optim. Theory Appl.*, **146**, pp. 77 - 94.

[17] T. D. Chuong, J.-C. Yao, N. D. Yen (2010), "Further results on the lower semicontinuity of efficient point multifunctions", *Pac. J. Optim.*, **6**, pp. 405 - 422.

[18] R. Colgen, K. Schnatz (1981), "Continuity properties in semi-infinite parametric linear optimization", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **3**, pp. 451 - 460.

[19] N. Dinh, B. S. Mordukhovich, T. T. A. Nghia (2009), "Qualification and optimality conditions for DC programs with infinite constraints", *Acta Math. Vietnam.*, **34**, pp. 123 - 153.

[20] N. Dinh, B. S. Mordukhovich, T. T. A. Nghia (2010), "Subifferentials of value functions and optimality conditions for some classes of DC and bilevel infinite and semi-infinite programs", *Math. Program.*, **123**, pp. 101 - 138.

[21] M. Ehrgott (2005), *Multicriteria optimization*, Springer, Berlin.

[22] V. E. Gayá, M. A. López, V. N. Vera de Serio (2003), "Stability in convex semi-infinite programming and rates of convergence of optimal solutions of discretized finite subproblems", *Optimization*, **52**, pp. 693 - 713.

[23] M. A. Goberna, M. A. López (1998), *Linear semi-infinite optimization*, John Wiley & Sons, Chichester, UK.

[24] M. A. Goberna, M. A. López, M. Todorov (1997), "Stability theory for linear inequality systems. II. Upper semicontinuity of the solution set mapping", *SIAM J. Optim.*, **7**, pp. 1138 - 1151.

[25] A. Gopfert, H. Riahi, C. Tammer, C. Zalinescu (2003), *Variational methods in partially ordered spaces*, Springer, New York.

[26] N. Q. Huy, B. S. Mordukhovich, J.-C. Yao (2008), "Coderivatives of frontier and solution maps in parametric multiobjective optimization", *Taiwanese J. Math.*, **12**, pp. 2083 - 2111.

[27] A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov (1979), *Theory of extremal problems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York.

[28] J. Jahn (2004), *Vector optimization: Theory, applications and extensions*, Springer-Verlag, Berlin.

[29] J. Jahn, R. Rauh (1997), "Contingent epiderivatives and set-valued optimization", *Math. Meth. Oper. Res.*, **46**, pp. 193 - 211.

[30] J. L. Kelley (1955), *General topology*, Springer-Verlag, New York.

[31] G. M. Lee, N. Q. Huy (2007), "On sensitivity analysis in vector optimization", *Taiwanese J. Math.*, **11**, pp. 945 - 958.

[32] G. M. Lee, D. S. Kim, B. S. Lee, N. D. Yen (1998), "Vector variational inequality as a tool for studying vector optimization problems", *Nonlinear Anal.*, **34**, pp. 745 - 765.

[33] M. A. López, V. N. Vera de Serio (1999), "Stability of the feasible set mapping in convex semi-infinite programming", in *Semi-infinite programming* (Alicante, 1999), pp. 101 - 120. Nonconvex Optim. Appl., (2001), vol. 57, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

[34] D. T. Luc (1989), *Theory of vector optimization*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 319, Springer-Verlag, Berlin.

[35] B. S. Mordukhovich (1980), "Metric approximations and necessary optimality conditions for general classes of nonsmooth extremal problems", *Soviet Math. Dokl.*, **22**, pp. 526 - 530.

[36] B. S. Mordukhovich (2006), *Variational analysis and generalized differentiation*, I: Basic Theory, Springer, Berlin.

[37] B. S. Mordukhovich (2006), *Variational analysis and generalized differentiation*, II: Applications, Springer, Berlin.

[38] B. S. Mordukhovich, N. M. Nam, N. D. Yen (2006), "Fréchet subdifferential calculus and optimality conditions in nondifferentiable programming", *Optimization*, **55**, pp. 685 - 708.

[39] B. S. Mordukhovich, N. M. Nam, N. D. Yen (2009), "Subgradients of marginal functions in parametric mathematical programming", *Math. Program.*, **116**, pp. 369 - 396.

[40] B. S. Mordukhovich, Y. Shao (1997), "Fuzzy calculus for coderivatives of multifunctions", *Nonlinear Anal.*, **29**, pp. 605 - 626.

[41] P. H. Naccache (1979), "Stability in multicriteria optimization", *J. Math. Anal. Appl.*, **68**, pp. 441 - 453.

[42] R. R. Phelps (1993), *Convex functions, monotone operators and differentiability*, 2nd ed., Lecture Notes in Math. 1364, Springer, Berlin.

[43] R. Reemtsen, J.-J. Rückmann (1998), (eds.) *Semi-infinite programming*, Nonconvex Optimization and its Applications, 25. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA.

[44] R. T. Rockafellar (1970), *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[45] R. T. Rockafellar (1985), "Lipschitzian properties of multifunctions", *Nonlinear Anal.*, **9**, pp. 867 - 885.

[46] Y. Sawaragi, H. Nakayama, T. Tanino (1985), *Theory of multiobjective optimization*, Mathematics in Science and Engineering, 176. Academic Press, Inc., Orlando, FL.

[47] W. Song, L.-J. Wan (2005), "Contingent epidifferentiability of the value map in vector optimization", *Heilongjiang Daxue Ziran Kexue Xuebao*, **22**, pp. 198 - 203.

[48] R. E. Steuer (1986), *Multiple criteria optimization: Theory, computation and application*, John Wiley & Sons, New York.

[49] T. Tanino (1988), "Sensitivity analysis in multiobjective optimization", *J. Optim. Theory Appl.*, **56**, pp. 479 - 499.

[50] T. Tanino (1988), "Stability and sensitivity analysis in convex vector optimization", *SIAM J. Control and Optim.*, **26**, pp. 521 - 536.

[51] T. Tanino, Y. Sawaragi (1980), "Stability of nondominated solutions in multicriteria decision-making", *J. Optim. Theory Appl.*, **30**, pp. 229 - 253.

[52] S. W. Xiang, Y. H. Zhou (2006), "Continuity properties of solutions of vector optimization", *Nonlinear Anal.*, **64**, pp. 2496 - 2506.

[53] S. W. Xiang, W. S. Yin (2007), "Stability results for efficient solutions of vector optimization problems", *J. Optim. Theory Appl.*, **134**, pp. 385 - 398.

[54] M. Zeleny (1982), *Multiple criteria decision making*, McGraw-Hill Book Company, New York.