VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN HUY CHIÊU

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀ TÍCH PHÂN TRONG GIẢI TÍCH KHÔNG TRƠN VÀ LÝ THUYẾT TỐI ƯU

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2011

VIỆN KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ VIỆT NAM

VIỆN TOÁN HỌC

NGUYỄN HUY CHIÊU

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ PHÉP TÍNH VI PHÂN VÀ TÍCH PHÂN TRONG GIẢI TÍCH KHÔNG TRƠN VÀ LÝ THUYẾT TỐI ƯU

Chuyên ngành: Lý thuyết tối ưu
Mã số: 62 46 20 01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
1. GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên
2. PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm

HÀ NỘI - 2011

TÓM TẮT

Mục đích chính của luận án này là khảo sát mối quan hệ giữa phép tính tích phân và phép tính vi phân trong giải tích không trơn và lý thuyết tối ưu dựa trên việc nghiên cứu hai bài toán sau đây và các ứng dụng của chúng:
1) Mở rộng công thức Newton-Leibniz khi đạo hàm Fréchet được thay bằng dưới vi phân Clarke (hoặc dưới vi phân Mordukhovich) và tích phân được xét theo nghĩa Aumann; 2) Tính toán và ước lượng dưới vi phân Mordukhovich của các phiếm hàm tích phân. Chỉ ra ứng dụng của các kết quả thu được trong lý thuyết tối ưu.

Luận án có 4 chương: Chương 1 nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản trong lý thuyết vi phân suy rộng và lý thuyết tích phân của các ánh xạ đa trị. Chương 2 nghiên cứu bài toán tính toán hoặc ước lượng tích phân của các ánh xạ dưới vi phân. Chương 3 nghiên cứu bài toán tính dưới vi phân Mordukhovich của phiếm hàm tích phân. Chương 4 nghiên cứu miền giá trị của ánh xạ dưới vi phân Fréchet.

Các kết quả chính của luận án bao gồm: 1) Công thức biểu diễn tích phân Aumann của ánh xạ dưới vi phân Clarke và của ánh xạ dưới vi phân Mordukhovich, các điều kiện cần và đủ để tích phân này là tập gồm một điểm. 2) Một dạng tương tự của công thức Newton-Leibniz cổ điển cho trường hợp tích phân đa trị. Chứng minh mới cho định lý đã biết về khả năng đặc trưng hàm số của ánh xạ dưới vi phân Clarke. 3) Công thức tính chính xác dưới vi phân Mordukhovich của tích phân bất định. 4) Công thức tính chính xác dưới vi phân Mordukhovich của phiếm hàm tích phân trên không gian $L_1(\Omega; E)$. Công thức này kéo theo một tiêu chuẩn tồn tại nghiệm địa phương của bài toán tối ưu không ràng buộc, với hàm mục tiêu là phiếm hàm tích phân. 5) Một số đặc trưng của không gian Banach phản xạ và một điều kiện đủ để miền giá trị của ánh xạ dưới vi phân Fréchet trù mật trong X^*. 6) Hai định lý về sự tồn tại điểm dừng của bài toán nhiễu của một bài toán tối ưu phi tuyến trong không gian vô hạn chiều dưới tác động của nhiễu tuyến tính. 7) Hai mệnh đề về sự tồn tại nghiệm của bài toán nhiễu của một bài toán qui hoạch lồi trong không gian vô hạn chiều dưới tác động của nhiễu tuyến tính.

ABSTRACT

The main purpose of this thesis is to investigate the relationships between the generalized differentiation and the set-valued integration in nonsmooth analysis and optimization theory. We focus on the study of the following two problems and their applications: 1) Extend the classical Newton-Leibniz formula to the case where the Fréchet derivative and the Lebesgue integral are replaced, respectively, by the Clarke (or Mordukhovich) subdifferential mapping and the Aumann integral; 2) Compute or estimate the Mordukhovich subdifferential of integral functionals and apply the obtained results to optimization theory.

The thesis has 4 chapters: Chapter 1 recalls some basic concepts and properties from generalized differentiation and set-valued integration. Chapter 2 deals with the problem of computing or estimating the integral of the subdifferential mappings. Chapter 3 studies the problem of computing the Mordukhovich subdifferential of integral functionals. Chapter 4 investigates the range of the Fréchet subdifferential mapping.

The main results of the thesis includes: 1) Representation formulae for the Aumann integral of the Clarke (and Mordukhovich) subdifferential mapping, and necessary and sufficient conditions for this integral to be a singleton. 2) An analogue of the classical Newton-Leibniz formula for the case of set-valued integral. New proof for a known theorem on the possibility of the Clarke subdifferential mapping in characterizing functions. 3) A formula for computing exactly the Mordukhovich subdifferential of indefinite integrals. 4) A formula for computing exactly the Mordukhovich subdifferential of integral functionals on $L_1(\Omega; E)$. This formula implies a new criterion for the existence of local minimizers of an unconstrained optimization problem with the objective function being an integral functional. 5) Some characterizations of reflexive Banach spaces and a sufficient condition for the density of the range of the Fréchet subdifferential mapping in X^*. 6) Two theorems on the existence of stationary points of the perturbed problem of an infinite-dimensional optimization problem under linear perturbations. 7) Two propositions on the solution existence of the perturbed problem of an infinite-dimensional convex programming problem under linear perturbations.

Lời cam đoan

Luận án này được hoàn thành tại Viện Toán học, Viện Khoa học và Công nghệ Việt Nam, dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên và PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm.

Tất cả các chứng minh trong luận án đều là của tôi.

Các kết quả trong luận án này là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học nào của ai khác.

Tác giả

Nguyễn Huy Chiêu

Mục lục

MỘT SỐ KÝ HIỆU

$F : X \rightrightarrows Y$	ánh xạ đa trị từ X vào Y
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$	tập các số thực suy rộng
$\mathbb{Q}$	tập các số hữu tỷ
$\mathbb{N}$	tập các số nguyên dương
X^*	đối ngẫu tôpô của không gian X
$\langle x^*, x\rangle$	cặp đối ngẫu giữa X^* và X
$\\|x\\|$	chuẩn của véctơ x
$\\|x\\|_X$	chuẩn của véctơ x trong không gian X
$\|x\|$	giá trị tuyệt đối của $x \in \mathbb{R}$
$\{x_i\}$	dãy véctơ
$\sigma(K, v)$	giá trị của hàm tựa của tập K tại v
$\emptyset$	tập rỗng
$\exists x$	tồn tại x
$\forall x$	với mọi x
$\bar{A}$	bao đóng của tập A
$\overline{\mathrm{co}}M$	bao lồi đóng (= bao đóng của bao lồi) của tập M
$f'(x)$	đạo hàm Fréchet của f tại x
$f'(x; v)$	đạo hàm theo theo hướng v của f tại x
$f^0(x; v)$	đạo hàm Clarke theo hướng v của f tại x
$\partial^{Cl} f(x)$	dưới vi phân Clarke của f tại x
$\partial f(x)$	dưới vi phân Mordukhovich của f tại x
$\widehat{\partial} f(x)$	dưới vi phân Fréchet của f tại x
$\partial^{Fen} f(x)$	dưới vi phân Fenchel của f tại x
$x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$	dãy véctơ $\{x_k^*\}$ hội tụ đến véctơ x^* theo tôpô yếu* (được ký hiệu bởi w^*)
$x := y$	x được định nghĩa bằng y
h.k.n.	hầu khắp nơi
tr. 3	trang 3
$\square$	kết thúc chứng minh

Mở đầu

Hàm số không trơn và tập có biên không trơn xuất hiện thường xuyên và được biết đến từ lâu ở trong toán học và các khoa học ứng dụng. Vì lý thuyết vi phân cổ điển không còn phù hợp cho việc khảo sát các đối tượng đó nên các lý thuyết vi phân suy rộng đã được xây dựng.

Từ đầu thập niên 60, đã có nhiều nỗ lực nghiên cứu nhằm xây dựng một lý thuyết vi phân suy rộng cho các hàm xác định trên các không gian véctơ thực và nhận giá trị trong tập các số thực suy rộng để có thể phân tích thấu đáo các bài toán tối ưu với dữ liệu không trơn. Kết quả bước đầu của quá trình này là lý thuyết vi phân suy rộng cho các hàm lồi. Với những cống hiến quan trọng của R. T. Rockafellar và các nhà toán học khác, quy hoạch lồi - dựa trên giải tích lồi - đã trở thành một phần quan trọng và đẹp đẽ của lý thuyết tối ưu (xem [4], [9], [30], [39], [53]).

Năm 1973, F. H. Clarke đưa ra những khái niệm cơ bản đầu tiên dẫn đến lý thuyết vi phân suy rộng cho hàm số Lipschitz địa phương. Đây là một bước tiến quan trọng của giải tích không trơn. Lý thuyết này bao hàm được lý thuyết vi phân cổ điển và lý thuyết vi phân suy rộng cho hàm lồi Lipschitz địa phương. Cuối thập niên 70 đầu thập niên 80, lý thuyết vi phân suy rộng Clarke đã được R. T. Rockafellar, J.-B. Hiriart-Urruty, J.-P. Aubin và một số nhà toán học khác phát triển cho các hàm nhận giá trị thực suy rộng. Chỉ sau 10 năm (1973 - 1983), lý thuyết vi phân suy rộng Clarke đã đạt được nhiều thành tựu quan trọng cả về mặt lý thuyết cũng như về ứng dụng (xem [23], [24], [25], [55]).

Trong nỗ lực để thu được các điều kiện cần cực trị của bài toán điều khiển tối ưu có tập ràng buộc điểm cuối được cho dưới dạng hình học, năm 1976 B. S. Mordukhovich đã đưa ra định nghĩa nón pháp tuyến và dưới vi phân qua giới hạn [41]. Đây là mốc đánh dấu sự ra đời của một lý thuyết vi phân suy rộng mới: lý thuyết vi phân suy rộng Mordukhovich. Giai đoạn 1993 - 1996, có nhiều kết quả quan trọng của lý thuyết này được công bố (xem [42], [43], [44], [45], [47], [48], [49]). Tiêu chuẩn Mordukhovich cho tính liên tục Aubin của các ánh xạ đa trị trở thành một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của các phương trình suy rộng. Ngày nay lý thuyết vi phân suy rộng Mordukhovich vẫn tiếp tục phát triển và đóng một vai trò trung tâm trong giải tích đa trị và biến phân (xem [14], [46], [56], [61]).

Năm 1965, R. J. Aumann định nghĩa tích phân của ánh xạ đa trị như là tập hợp các giá trị tích phân của các lát cắt khả tích của ánh xạ đa trị đó [6]. Dưới vi phân của một hàm số là một ánh xạ đa trị đặc biệt, có vai trò tương tự như đạo hàm ở trong lý thuyết vi phân cổ điển. Trong lý thuyết tích phân Lebesgue [57, tr. 167], người ta đã chứng minh rằng nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ là một hàm số Lipschitz (hoặc, tổng quát hơn, là hàm liên tục tuyệt đối) thì công thức Newton-Leibniz

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

nghiệm đúng. Vấn đề được đặt ra ở đây là: *Vế phải của công thức này sẽ như* *thế nào nếu đạo hàm Fréchet $f'(\cdot)$ và tích phân Lebesgue tương ứng được thay bởi dưới vi phân Clarke $\partial^{Cl} f(\cdot)$ (hoặc dưới vi phân Mordukhovich $\partial f(\cdot)$) và tích phân Aumann?*

Phiếm hàm tích phân là một khái niệm cơ bản xuất hiện trong nhiều hướng nghiên cứu lý thuyết và ứng dụng toán học (như phương trình vi phân, bao hàm thức vi phân, giải tích hàm cơ sở, lý thuyết toán tử, quy hoạch toán học, bài toán biến phân, điều khiển tối ưu). Đó là hàm số có dạng

$$G(x) = \int_{\Omega} g(\omega, x) d\mu(\omega),$$

với g là một hàm số xác định trên $\Omega \times U$, U là một tập con mở của một không gian Banach và (Ω, μ) là một không gian có độ đo. Đối với lý thuyết tối ưu, việc khảo sát tính khả vi là một khâu quan trọng trong nhiều vấn đề như: tìm nghiệm tối ưu, nghiên cứu độ nhạy và các tính chất ổn định của nghiệm, phân tích sự hội tụ của các thuật toán,... Chính vì vậy, việc nghiên cứu các tính chất vi phân của phiếm hàm tích phân là một đề tài thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học (xem [9], [23], [25], [33], [35], [36], [38], [39], [50]).

Để làm rõ hơn ý nghĩa của việc nghiên cứu các tính chất vi phân của phiếm hàm tích phân, chúng ta cần nhắc lại một kết quả cơ bản trong lý thuyết tối ưu, đó là *qui tắc nhân tử Lagrange*. Xét bài toán qui hoạch toán học

$$\text{(P)} \quad \min\{f(x) \mid x \in X,\ \ g_i(x) \le 0\ \ \forall i \in I,\ \ h_j(x) = 0\ \ \forall j \in J\},$$

ở đó X là không gian Banach, I và J là các tập hữu hạn các chỉ số, f, g_i, h_j là các hàm xác định trên X, nhận giá trị trong tập số thực suy rộng.

Qui tắc nhân tử Lagrange 1 (xem Clarke [23, Theorem 6.1.1]). *Nếu $\bar{x}$ là nghiệm địa phương của* (P) *và nếu f, g_i $(i \in I), h_j$ $(j \in J)$ là Lipschitz địa* *phương tại $\bar{x}$, thì tồn tại các nhân tử Lagrange $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ $(i \in I)$, $\mu_j \in \mathbb{R}$ $(j \in J)$ không đồng thời bằng 0 sao cho*

$$0 \in \partial_x^{Cl} L(\bar{x}, \lambda, \mu) \tag{0.1}$$

và

$$\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0 \ \ \forall i \in I, \tag{0.2}$$

ở đó

$$L(x, \lambda, \mu) := \lambda_0 f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j \in J} \mu_j h_j(x)$$

là hàm Lagrange của bài toán(P) *và $\partial_x^{Cl} L(\bar{x}, \lambda, \mu)$ ký hiệu dưới vi phân Clarke của hàm số $L(\cdot, \lambda, \mu)$ tại $\bar{x}$.*

Qui tắc nhân tử Lagrange 2 (xem Mordukhovich [46, Theorem 5.24]). *Nếu X là không gian Asplund, $\bar{x}$ là nghiệm địa phương của* (P)*, và nếu f, g_i $(i \in I), h_j$ $(j \in J)$ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, thì tồn tại các nhân tử Lagrange $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ $(i \in I)$, $\mu_j \in \mathbb{R}$ $(j \in J)$ không đồng thời bằng 0 sao cho bao hàm thức*

$$0 \in \partial_x L(\bar{x}, \lambda, \mu), \tag{0.3}$$

với $\partial_x L(\bar{x}, \lambda, \mu)$ ký hiệu dưới vi phân Mordukhovich của hàm Lagrange $L(\cdot, \lambda, \mu)$ tại $\bar{x}$, và điều kiện độ lệch bù (0.2) *được thoả mãn.*

Nếu f, g_i $(i \in I), h_j$ $(j \in J)$ là Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$ thì, theo [23, Corollary 2, tr. 39],

$$\partial_x^{Cl} L(\bar{x}, \lambda, \mu) \subset \lambda_0 \partial^{Cl} f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial^{Cl} g_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J} \mu_j \partial^{Cl} h_j(\bar{x}).$$

Do đó, ta có thể viết phương trình Fermat suy rộng (0.1) dưới dạng yếu hơn như sau:

$$0 \in \lambda_0 \partial^{Cl} f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial^{Cl} g_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J} \mu_j \partial^{Cl} h_j(\bar{x}). \tag{0.4}$$

Tương tự, nếu $f, g_i\ (i \in I), h_j\ (j \in J)$ là các hàm Lipschitz địa phương tại $\bar{x}$, thì theo [46, Theorem 3.36] ta có

$$\partial_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) \subset \lambda_0 \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J} \partial(\mu_j h_j)(\bar{x}).$$

Vậy ta có thể viết điều kiện (0.3) dưới dạng giảm nhẹ như sau:

$$0 \in \lambda_0 \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j \in J} \partial(\mu_j h_j)(\bar{x}). \tag{0.5}$$

Rõ ràng rằng *khi một hoặc một số hàm xác định bài toán* (P) *là phiếm hàm tích phân thì chúng ta chỉ có thể sử dụng được hệ điều kiện cần cực trị* (0.2) *và* (0.4) *(tương ứng, hệ điều kiện cần cực trị* (0.2) *và* (0.5)*) nếu ta biết cách tính toán chính xác hoặc ước lượng trên dưới vi phân Clarke (tương ứng, dưới vi phân Mordukhovich) của phiếm hàm tích phân.*

Bài toán ước lượng dưới vi phân Clarke của phiếm hàm tích phân đã được nghiên cứu trong [23, Section 2.7]. Vấn đề được đặt ra tiếp theo là: *Tính toán hoặc ước lượng dưới vi phân Mordukhovich của* $G(\cdot)$. Trong trường hợp tổng quát, bài toán này cho đến nay vẫn chưa có lời giải.

Mục đích chính của luận án này là *khảo sát mối quan hệ giữa phép tính tích phân và phép tính vi phân trong giải tích không trơn và lý thuyết tối ưu* trên cơ sở nghiên cứu hai bài toán đặt ra ở trên. Việc nghiên cứu theo đề tài luận án được thực hiện bằng cách sử dụng một số kiến thức và kỹ thuật của lý thuyết tối ưu, giải tích hàm, giải tích không trơn, giải tích đa trị và biến phân.

Ngoài phần mở đầu, luận án gồm 4 chương, phần kết luận, danh mục các công trình của tác giả có liên quan đến luận án, và danh sách 63 tài liệu tham khảo.

Chương 1 nhắc lại một số khái niệm và tính chất cơ bản trong lý thuyết vi phân suy rộng và lý thuyết tích phân của các ánh xạ đa trị. Các kiến thức này là cơ sở cho việc khảo sát được trình bày ở những chương tiếp theo.

Chương 2 nghiên cứu bài toán tính toán hoặc ước lượng tích phân của các ánh xạ dưới vi phân. Mục 2.1 được dành cho tích phân của ánh xạ dưới vi phân Clarke. Mục 2.2 xét tích phân Aumann của ánh xạ dưới vi phân Mordukhovich.

Chương 3 nghiên cứu bài toán tính dưới vi phân Mordukhovich của phiếm hàm tích phân. Mục 3.1 khảo sát dưới vi phân Mordukhovich $\partial F(\bar{x})$ của tích phân bất định

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

ở đây f là một hàm bị chặn cốt yếu. Mục 3.2 giới thiệu các công thức tính dưới vi phân Fréchet và dưới vi phân Mordukhovich của các phiếm hàm tích phân có dạng

$$F(u) = \int_\Omega f(\omega, u(\omega))d\mu(\omega) \quad (u \in L_1(\Omega; E)),$$

ở đây $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo không nguyên tử $\sigma-$hữu hạn đầy đủ, E là một không gian Banach khả ly và $f : \Omega \times E \to \bar{\mathbb{R}}$ là một hàm số $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$đo được. Các kết quả đó dẫn đến một tiêu chuẩn tồn tại nghiệm địa phương của bài toán tối ưu không ràng buộc, với hàm mục tiêu là phiếm hàm tích phân.

Chương 4 nghiên cứu miền giá trị của ánh xạ dưới vi phân Fréchet. Mục 4.1 được dành cho trường hợp không gian Banach phản xạ, ở đây các đặc trưng của không gian phản xạ sẽ được đưa ra. Mục 4.2 khảo sát miền giá trị của ánh xạ dưới vi phân Fréchet cho trường hợp không gian Asplund. Mục 4.3 trình bày một số kết quả về sự tồn tại điểm dừng và sự tồn tại nghiệm của bài toán nhiễu của một bài toán tối ưu phi tuyến trong không gian vô hạn chiều dưới tác động của nhiễu tuyến tính.

Các kết quả của luận án này đã được báo cáo tại:

- Xêmina phòng Giải tích số và Tính toán khoa học, Viện Toán học.

- The 4th Vietnam-Korea Workshop on Mathematical Optimization Theory and Applications, Ho Chi Minh City, February 18-20, 2004.

- Các hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học lần thứ 3 (Hà Nội, 20-24/4/2005), lần thứ 5 (Ba Vì, 16-19/5/2007), lần thứ 6 (Ba Vì, 23-26/4/2008).

- Đại hội Toán học Việt Nam lần thứ 7 (Qui Nhơn, 4-8/8/2008).

- Miniworkshop for Optimization (Department of Mathematics, National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan, 14/1/2009).

- International Symposium on Optimization and Optimal Control (National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, 2-6/2/2009).

Các kết quả chính của luận án này đã được đăng ở tạp chí *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (xem [17], [19]), tạp chí *Nonlinear Analysis* (xem [20]) và tạp chí *Nonlinear Analysis Forum* (xem [18]).

Tác giả chân thành cám ơn GS. TSKH. Nguyễn Đông Yên và PGS. TS. Nguyễn Năng Tâm đã tận tình hướng dẫn để có được những kết quả trong luận án.

Xin chân thành cám ơn GS. TSKH. Hoàng Xuân Phú, Trưởng ban tổ chức các hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học, đã tài trợ một phần kinh phí nghiên cứu cho tác giả.

Tác giả bày tỏ lòng biết ơn đối với GS. J.-C. Yao về sự giúp đỡ và tạo điều kiện cho tác giả làm thực tập sinh một năm tại Đại học Quốc gia Tôn Trung Sơn (National Sun Yat-sen University, Kaoshiung, Taiwan, 9/2008-9/2009).

Xin chân thành cám ơn GS. B. S. Mordukhovich, GS. I. Fonseca, PGS. TS. Trần Văn Ân, PGS. TS. Tạ Duy Phượng, TS. Nguyễn Quang Huy, TS. Nguyễn Mậu Nam đã động viên, giúp đỡ tác giả trong quá trình nghiên cứu.

Nhờ những ý kiến nhận xét và góp ý quí báu của GS. TSKH. Vũ Ngọc Phát, GS. TS. Nguyễn Bường, PGS. TS. Trương Xuân Đức Hà, PGS. TS. Huỳnh Thế Phùng, Hội đồng chấm luận án cấp cơ sở và Hội đồng chấm luận án cấp Viện, bản luận án chính thức được cải thiện đáng kể so với bản luận án đầu tiên. Tác giả luận án chân thành cám ơn các Giáo sư phản biện, Hội đồng cấp cơ sở và Hội đồng cấp Viện về những chỉ dẫn quan trọng.

Tác giả bày tỏ lòng biết ơn đối với Ban lãnh đạo Viện Toán học, Trung tâm Đào tạo Sau đại học và tập thể cán bộ công nhân viên của Viện Toán học về sự quan tâm giúp đỡ. Xin chân thành cám ơn Ban lãnh đạo trường Đại học Vinh, các thầy cô giáo và các bạn đồng nghiệp ở Khoa Toán trường Đại học Vinh đã luôn động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Xin cám ơn các bạn nghiên cứu sinh đã chia sẻ với tác giả những khó khăn trong quá trình học tập, nghiên cứu.

Chương 1

Các kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản sẽ được sử dụng ở các chương tiếp theo. Mục 1.1 được dành cho các lý thuyết vi phân suy rộng của F. H. Clarke và B. S. Mordukhovich. Mục 1.2 điểm qua một vài sự kiện liên quan đến tích phân Aumann.

1.1 Vi phân suy rộng

Cho X là một không gian Banach thực và $f : X \to \bar{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$ là một hàm số. Ta ký hiệu không gian đối ngẫu tôpô của X bởi X^* và cặp đối ngẫu giữa X^* và X bởi $\langle x^*, x\rangle$. Hình cầu đơn vị đóng trong không gian X và trong không gian đối ngẫu X^* được ký hiệu tương ứng bởi $\mathbb{B}_X$ và $\mathbb{B}_{X^*}$. Đối với ánh xạ đa trị $G\colon X \rightrightarrows X^*$, ký hiệu

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{u\to x} G(x) := \Big\{ x^* \in X^* \ \Big| \ \exists u_k \to x,\ x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*, \\ x_k^* \in G(u_k) \quad \forall k = 1, 2, \ldots \Big\}$$

được dùng để chỉ *giới hạn trên theo dãy theo nghĩa Painlevé-Kuratowski* trong tôpô sinh bởi chuẩn của X và tôpô yếu* (được ký hiệu bằng chữ w^*) của X^*. Các ký hiệu $u \xrightarrow{f} x$ đối với một hàm $f\colon X \to \bar{\mathbb{R}}$ và $u \xrightarrow{\Omega} x$ đối với một tập $\Omega \subset X$ tương ứng có nghĩa là $u \to x$ với $f(u) \to f(x)$ và

$u \to x$ với $u \in \Omega$. Các ký hiệu $t \to t_0^+$ và $t \downarrow t_0$ tương ứng có nghĩa là $t \to t_0$ với $t > t_0$ và $t \to t_0$ với $t \geq t_0$.

Định nghĩa 1.1.1 (xem [23, tr. 25-27]). Giả sử f là một hàm số Lipschitz địa phương tại $x \in X$; nghĩa là tồn tại $\ell > 0$ (được gọi là hằng số Lipschitz của f tại x) và lân cận U của x sao cho

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \ell \|x_1 - x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in U.$$

Đạo hàm Clarke theo hướng $v \in X$ của f tại x được xác định bởi công thức

$$f^0(x; v) := \limsup_{x' \to x,\, t \to 0^+} \frac{f(x' + tv) - f(x')}{t}.$$

Dưới vi phân Clarke của f tại x là tập hợp

$$\partial^{Cl} f(x) := \Big\{ \xi^* \in X^* \mid \langle \xi^*, v \rangle \leqslant f^0(x; v) \quad \forall v \in X \Big\}.$$

Đạo hàm Clarke và dưới vi phân Clarke là những khái niệm cơ bản của lý thuyết vi phân suy rộng được F. H. Clarke đề xuất năm 1973. Sự xuất hiện của chúng đánh dấu một bước đột phá trong giải tích không trơn. Nửa cuối thập niên 70 và nửa đầu thập niên 80 của thế kỷ XX là giai đoạn phát triển mạnh mẽ nhất của lý thuyết vi phân suy rộng Clarke. Nhiều kết quả quan trọng bao gồm các qui tắc tính toán, định lý giá trị trung bình, các ứng dụng trong lý thuyết tối ưu, lý thuyết bao hàm thức vi phân, lý thuyết điều khiển tối ưu,... đã được thiết lập trong giai đoạn này. Có thể tìm hiểu thêm chi tiết về lịch sử phát triển và những kết quả quan trọng của lý thuyết vi phân suy rộng Clarke ở trong cuốn sách chuyên khảo [23] và các tài liệu [10], [21], [22], [24] [25], [35], [46], [49], [55], [56], [59], [60].

Chúng ta cần nhắc lại một số tính chất cơ bản của đạo hàm Clarke và dưới vi phân Clarke.

Định lý 1.1.1 (xem [23, Propositions 2.1.1-2.1.2, Theorem 2.5.1]). *Nếu f là hàm số Lipschitz địa phương tại x với hằng số Lipschitz ℓ, thì*

(i) $v \mapsto f^0(x;v)$ là một hàm lồi thoả mãn $|f^0(x;v)| \leqslant \ell\|v\|$ với mọi $v \in X$;

(ii) $(u,v) \mapsto f^0(u;v)$ là hàm nửa liên tục trên tại (x,v), $v \mapsto f^0(x;v)$ là hàm số Lipschitz trên X với hằng số Lipschitz ℓ;

(iii) $\partial^{Cl} f(x)$ là tập con lồi khác rỗng và compact yếu* của X^* thoả mãn $\|\xi^*\| \leqslant \ell$ với mọi $\xi^* \in \partial^{Cl} f(x)$;

(iv) với mọi $v \in X$, $f^0(x;v) = \max\{\langle \xi^*, v\rangle \mid \xi^* \in \partial^{Cl} f(x)\}$;

(v) nếu $X = \mathbb{R}^n$ thì ánh xạ đa trị $\partial^{Cl} f(\cdot)$ là nửa liên tục trên tại x và

$$\partial^{Cl} f(x) = \mathrm{co}\Big\{ \lim f'(x_k) \mid x_k \to x, x_k \notin S, x_k \in \Omega_f \Big\},$$

ở đây $\Omega_f := \{u \in \mathbb{R}^n \mid f$ khả vi Fréchet tại $u\}$, S là tập con bất kỳ của $\mathbb{R}^n$ có độ đo Lebesgue bằng 0, "co" *ký hiệu "bao lồi", và tính nửa liên tục trên của ánh xạ đa trị $F(\cdot) := \partial^{Cl} f(\cdot)$ được hiểu theo nghĩa Berge: với bất kỳ tập mở $W \subset \mathbb{R}^n$ thoả mãn $F(x) \subset W$, tồn tại lân cận U của x sao cho $F(u) \subset W$ với mọi $u \in U$.*

Đạo hàm theo hướng $v \in X$ của f tại x là

$$f'(x;v) := \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t},$$

nếu giới hạn ở vế phải tồn tại.

Định nghĩa 1.1.2 (xem [23, tr. 39]). Cho f là một hàm số Lipschitz địa phương tại $x \in X$. Ta nói rằng f là *chính qui Clarke* tại x nếu với mọi $v \in X$ đạo hàm $f'(x;v)$ tồn tại và $f'(x;v) = f^0(x;v)$.

Các hàm số khả vi liên tục và các hàm lồi liên tục đều là chính qui Clarke. Tồn tại những hàm số Lipschitz và khả vi Fréchet nhưng không chính qui Clarke, chẳng hạn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cho bởi công thức $f(0) = 0$ và $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ nếu $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ là một hàm Lipschitz và khả vi Fréchet tại 0 nhưng không chính qui Clarke tại 0.

Định lý 1.1.2 (xem [23, tr. 75-76]). *Cho* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *là một không gian có độ đo,* U *là một tập con mở của không gian Banach khả ly* X*. Giả sử* $g_\omega : U \to \mathbb{R}$*,* $\omega \in \Omega$*, là một họ các hàm số thoả mãn các điều kiện sau:*

(i) *với mỗi* $v \in U$*, ánh xạ* $\omega \mapsto g_\omega(v)$ *là đo được;*

(ii) *tồn tại* $k(\cdot) \in L_1(\Omega, \mathbb{R})$ *sao cho*

$$|g_\omega(v_1) - g_\omega(v_2)| \leqslant k(\omega)\|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in U,\ \forall \omega \in \Omega.$$

Giả sử $F(v) := \int_\Omega g_\omega(v) d\mu(\omega)$ *được xác định và hữu hạn tại một điểm* $v_0 \in U$*. Khi đó* F *được xác định hữu hạn và Lipschitz trên* U *và*

$$\partial^{Cl} F(v) \subset \int_\Omega \partial^{Cl} g_\omega(v) d\mu(\omega) \quad \forall v \in X. \tag{1.1}$$

Nếu với mỗi $\omega \in \Omega$ *ta có hàm* $g_\omega(\cdot)$ *là chính qui Clarke tại* v*, thì* F *là chính qui Clarke tại* v *và bao hàm thức* (1.1) *có dấu bằng.*

Tích phân $\int_\Omega \partial^{Cl} g_\omega(v) d\mu(\omega)$ ở vế phải của công thức (1.1) được hiểu là tích phân Aumann-Gelfand; nghĩa là

$$\xi^* \in \int_\Omega \partial^{Cl} g_\omega(v) d\mu(\omega)$$

nếu và chỉ nếu $\xi^* \in X^*$ và tồn tại ánh xạ $\omega \mapsto \xi^*_\omega$ từ Ω vào X^* sao cho $\xi^*_\omega \in \partial^{Cl} g_\omega(v)$ hầu khắp nơi, và với mỗi $x \in X$, $\omega \mapsto \langle \xi^*_\omega, x \rangle$ là hàm số khả tích trên Ω thoả mãn $\langle \xi^*, x \rangle = \int_\Omega \langle \xi^*_\omega, x \rangle d\mu(\omega)$.

Giữa thập niên 70 của thế kỷ XX, B. S. Mordukhovich đưa ra những khái niệm đầu tiên của lý thuyết vi phân suy rộng Mordukhovich, bao gồm *nón pháp tuyến qua giới hạn* của các tập đóng và *dưới vi phân qua giới hạn* của các hàm nửa liên tục dưới nhận giá trị trong tập số thực suy rộng. Những khái niệm này cho phép thiết lập các điều kiện cần cực trị trong các bài toán điều khiển tối ưu có tập ràng buộc điểm cuối được cho dưới dạng hình học (xem [41], [46]). Nhiều kết quả quan trọng của lý thuyết vi phân Mordukhovich bao gồm hệ thống qui tắc tính toán, các ứng dụng trong việc khảo sát tính chất liên tục Aubin, tính chất chính qui mêtric, tính chất phủ và tính chất mở địa phương của các ánh xạ đa trị, các ứng dụng trong lý thuyết điều khiển tối ưu,... được công bố trong khoảng thời gian từ năm 1993 đến năm 1996 (xem [42], [43], [44], [45], [47], [48], [49]). Ngày nay, hướng nghiên cứu này vẫn đang phát triển và tiếp tục đưa đến những thành quả mới. Lịch sử phát triển và các kết quả quan trọng của lý thuyết vi phân suy rộng Mordukhovich, cùng với nhiều ứng dụng, đã được trình bày trong bộ sách chuyên khảo hai tập "*Variational Analysis and Generalized Differentiation*" của GS. B. S. Mordukhovich [46]. Trong cuốn "*Giáo trình Giải tích đa trị*" của GS. Nguyễn Đông Yên [3] cũng có một chương về vấn đề này.

Định nghĩa 1.1.3 (xem [46]). Với mỗi $\varepsilon \geq 0$, *ε-dưới vi phân Fréchet* của f tại $x \in X$ mà $f(x) \in \mathbb{R}$ là tập hợp

$$\widehat{\partial}_\varepsilon f(x) := \left\{ x^* \in X^* \,\middle|\, \liminf_{u \to x} \frac{f(u) - f(x) - \langle x^*, u - x \rangle}{\|u - x\|} \geq -\varepsilon \right\}.$$

Nếu $|f(x)| = \infty$ thì đặt $\widehat{\partial}_\varepsilon f(x) = \emptyset$. Khi $\varepsilon = 0$, tập $\widehat{\partial}_0 f(x)$ được ký hiệu bởi

$\widehat{\partial} f(x)$ và được gọi là *dưới vi phân Fréchet* của f tại x. Tập hợp

$$\partial f(x) := \operatorname*{Lim\,sup}_{\substack{u \xrightarrow{f} x \\ \varepsilon \downarrow 0}} \widehat{\partial}_{\varepsilon} f(u)$$

được gọi là *dưới vi phân Mordukhovich* (hay *dưới vi phân qua giới hạn*) của hàm f tại x. Như vậy, $x^* \in \partial f(x)$ khi và chỉ khi tồn tại các dãy $u_k \xrightarrow{f} x$, $\varepsilon_k \downarrow 0$, và $x_k^* \in \widehat{\partial}_{\varepsilon_k} f(u_k)$ sao cho $x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

Dưới vi phân Fréchet $\widehat{\partial} f(x)$ là một tập lồi đóng yếu*. Trong khi đó dưới vi phân Mordukhovich $\partial f(x)$ là có thể không lồi và không đóng, và hiển nhiên ta có $\widehat{\partial} f(x) \subset \partial f(x)$. Một trong những khó khăn lớn của việc tính toán hoặc ước lượng dưới vi phân Mordukhovich nói riêng, và ứng dụng lý thuyết vi phân suy rộng Mordukhovich nói chung, là do tính chất không lồi của dưới vi phân Mordukhovich mang lại, bởi vì khi đó nhiều kỹ thuật quan trọng của giải tích lồi - đã được áp dụng thành công cho các loại dưới vi phân lồi - trở nên không còn phù hợp.

Đối với các dưới vi phân, qui tắc tính dưới vi phân của một tổng các hàm số bao giờ cũng được xem là một trong những kết quả quan trọng nhất trong hệ thống các qui tắc tính toán. Chẳng hạn, Định lý Moreau-Rockafellar về dưới vi phân của tổng hai hàm lồi được xem là một trong những định lý trung tâm của giải tích lồi (xem [46, tr. 133]). Sau đây là một *qui tắc tổng* (a sum rule) cho dưới vi phân Fréchet.

Định lý 1.1.3 (xem [46, tr. 112]). *Giả sử f và g là hai hàm số từ một không gian Banach X vào $\bar{\mathbb{R}}$, hữu hạn tại x. Nếu f là khả vi Fréchet tại x, thì*

$$\widehat{\partial}(f+g)(x) = f'(x) + \widehat{\partial} g(x).$$

Nhận xét 1.1.1. Dễ thấy rằng nếu $g = 0$ thì $\widehat{\partial} g(x) = \{0\}$. Từ Định lý 1.1.3 ta suy ra $\widehat{\partial} f(x) = \{f'(x)\}$ nếu f khả vi Fréchet tại x. Nếu dưới vi phân Fréchet $\widehat{\partial} f(x)$ là tập một điểm thì f không nhất thiết là khả vi Fréchet tại x. Chẳng hạn, xét hàm số

$$f(x) = |x|(\sin(\ln|x|) + 1) \quad \text{nếu } x \neq 0 \quad \text{và} \quad f(0) = 0;$$

xem [14, tr. 44]. Ta có $\widehat{\partial} f(0) = \{0\}$, nhưng f không khả vi Fréchet tại $x = 0$.

Hàm chỉ của một tập $\Omega \subset X$ được cho bởi công thức $\delta(x; \Omega) = 0$ nếu $x \in \Omega$ và $\delta(x; \Omega) = +\infty$ nếu $x \in X \backslash \Omega$. *Nón pháp tuyến Fréchet* và *nón pháp tuyến qua giới hạn* (*nón pháp tuyến Mordukhovich*) của Ω tại $x \in X$ tương ứng được định nghĩa bởi $\widehat{N}(x; \Omega) := \widehat{\partial} \delta(x; \Omega)$ và $N(x; \Omega) := \partial \delta(x; \Omega)$.

Dưới vi phân Fenchel của f tại $x \in X$ với $f(x) \in \mathbb{R}$ là tập hợp

$$\partial^{Fen} f(x) := \{x^* \in X^* \mid f(u) - f(x) \geq \langle x^*, u - x \rangle \;\; \forall u \in X\}.$$

Chú ý rằng nếu f là hàm lồi chính thường thì $\partial f(x) = \widehat{\partial} f(x) = \partial^{Fen} f(x)$.

Hàm $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ được gọi là nửa *liên tục dưới tại điểm* $x \in X$ nếu $f(x) \leqslant \liminf\limits_{u \to x} f(u)$, ở đây $\liminf\limits_{u \to x} f(u) := \sup\limits_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf\limits_{u \in U} f(u)$ với $\mathcal{N}(x)$ là họ tất cả các tập mở của X có chứa x. Ta nói f *nửa liên tục dưới địa phương tại* x nếu tồn tại $U \in \mathcal{N}(x)$ sao cho f nửa liên tục dưới tại mọi $u \in U$. Nếu tôpô sinh bởi chuẩn của X được thay bằng tôpô yếu của X thì tương ứng ta có các khái niệm *nửa liên tục dưới yếu tại một điểm* và *nửa liên tục dưới yếu địa phương*.

Không gian Banach X được gọi là *không gian Asplund* (hoặc *không gian có tính chất Asplund*) nếu mọi hàm lồi liên tục $f : U \to \mathbb{R}$ xác định trên một tập lồi mở $U \subset X$ là khả vi Fréchet trên một tập con trù mật của U. Không gian Banach có hàm chuẩn khả vi Fréchet tại mọi điểm khác 0 là không gian Asplund. Không gian Banach phản xạ là không gian Asplund. Nói riêng ra, các không gian Euclide hữu hạn chiều và các không gian Hilbert đều có tính chất Asplund. Các không gian ℓ_1, $C[0,1]$, $L_1[0,1]$ không có tính chất Asplund. Một tính chất tôpô quan trọng của không gian đối ngẫu của một không gian Asplund là hình cầu đơn vị đóng $\mathbb{B}_{X^*}$ trong không gian đối ngẫu tôpô X^* của một không gian Asplund X là compact theo dãy đối với tôpô yếu*. Tính chất này được sử dụng rộng rãi trong lý thuyết vi phân suy rộng Mordukhovich. Nhiều tính chất khác của không gian Asplund được trình bày trong các tài liệu [27], [28], [46], [49].

Ký hiệu $\mathcal{LS}(x)$ là tập tất cả các cặp hàm (f_1, f_2), ở đây $f_i : X \to \bar{\mathbb{R}}$ $(i = 1, 2)$ là các hàm chính thường, sao cho f_1 là Lipschitz địa phương tại $x \in \mathrm{dom} f_1 \cap \mathrm{dom} f_2$ và f_2 là nửa liên tục dưới địa phương tại x.

Định lý 1.1.4 (xem [46]). *Nếu X là một không gian Asplund, thì*

(i) với bất kỳ tập đóng $\Omega \subset X$ và bất kỳ $x \in \Omega$,

$$N(x; \Omega) = \underset{u \to x}{\mathrm{Lim\,sup}}\, \widehat{N}(u; \Omega);$$

(ii) với bất kỳ hàm $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ nửa liên tục dưới địa phương tại $x \in \mathrm{dom} f$,

$$\partial f(x) = \underset{u \xrightarrow{f} x}{\mathrm{Lim\,sup}}\, \widehat{\partial} f(u);$$

(iii) với bất kỳ $(f_1, f_2) \in \mathcal{LS}(x)$, $\varepsilon \geqslant 0$ và $\gamma > 0$,

$$\begin{aligned} \widehat{\partial}_\varepsilon (f_1 + f_2)(x) \ &\subset \bigcup \Big\{ \widehat{\partial} f_1(x_1) + \widehat{\partial} f_2(x_2) \mid x_i \in x + \gamma \mathbb{B}, \\ &\qquad |f_i(x_i) - f_i(x)| \leqslant \gamma, i = 1, 2 \Big\} + (\varepsilon + \gamma) \mathbb{B}^*. \end{aligned}$$

Mệnh đề (iii) trong Định lý 1.1.4 là một *qui tắc tổng mờ* (a fuzzy sum rule). Ngoài các ứng dụng trực tiếp, qui tắc tổng mờ còn đóng vai trò trung gian trong việc thiết lập *qui tắc tổng cho dưới vi phân Mordukhovich*.

Kết quả sau đây về mối quan hệ giữa dưới vi phân Clarke và dưới vi phân Mordukhovich đã được B. S. Mordukhovich và Y. Shao chứng minh trong [49].

Định lý 1.1.5 (xem [46], [49]). *Giả sử X là một không gian Asplund và $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ là một hàm Lipschitz địa phương tại x. Khi đó $\partial^{Cl} f(x) = \overline{\mathrm{co}}^* \, \partial f(x)$, ở đây "$\overline{\mathrm{co}}^*$" ký hiệu "bao lồi đóng theo tôpô yếu*".*

Nếu X là không gian hữu hạn chiều thì dấu bao đóng ở trong công thức trên có thể bỏ đi được. Như vậy, trong trường hợp này dưới vi phân Clarke $\partial^{Cl} f(x)$ là bao lồi của dưới vi phân Mordukhovich $\partial f(x)$. Thực ra, kết quả về mối liên hệ giữa dưới vi phân Clarke và dưới vi phân Mordukhovich đạt được trong [49] ở dạng tổng quát hơn, ở đó các tác giả thu được không những cho các hàm Lipschitz địa phương mà còn cho các hàm nửa liên tục dưới. Xét về phương diện lý thuyết, chúng tôi cho rằng [49] là một trong những bài báo quan trọng nhất của lý thuyết vi phân suy rộng Mordukhovich trong các không gian vô hạn chiều. Chúng ta có thể tìm thấy ở đây một hệ thống các qui tắc tính toán phong phú, công thức vô hướng hoá, công thức ước lượng dưới vi phân của hàm giá trị tối ưu, dưới vi phân hàm hợp, định lý giá trị trung bình xấp xỉ, và các ứng dụng.

1.2 Tích phân Aumann

Cho $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo $\sigma-$hữu hạn đầy đủ và $G : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ đa trị từ Ω vào $\mathbb{R}^n$ có giá trị đóng khác rỗng. Ta nói rằng G

là *đo được* nếu $G^{-1}(W) := \{\omega \in \Omega \mid G(\omega) \cap W \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$ với mọi tập mở $W \subset \mathbb{R}^n$; G là *giới nội khả tích* nếu tồn tại một hàm không âm $k(\cdot) \in L_1(\Omega)$ sao cho $G(\omega) \subset k(\omega)\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ hầu khắp nơi trên Ω, ở đây $L_1(\Omega)$ là không gian các hàm khả tích từ Ω vào $\mathbb{R}$.

Ngoài khái niệm ánh xạ đa trị đo được như trên (đo được yếu), người ta còn sử dụng các khái niệm đo được khác như: đo được mạnh (một ánh xạ đa trị được gọi là đo được mạnh nếu nghịch ảnh của một tập đóng là tập đo được), đo được theo đồ thị (đồ thị là một tập đo được). Nhiều tính chất quan trọng của ánh xạ đa trị đo được cũng như mối quan hệ giữa các khái niệm đo được của ánh xạ đa trị được trình bày ở Chương 3 của [16], Chương 8 của [5], Chương 14 của [56]. Về tài liệu tiếng Việt, có thể tham khảo thêm Chương 3 trong cuốn sách "*Giáo trình Giải tích đa trị*" của GS. Nguyễn Đông Yên [3] và Luận văn Thạc sĩ toán học của Nguyễn Huy Chiêu [1].

Định lý 1.2.1 (xem [5, Theorem 8.1.4]). *Giả sử $G : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, ở đây Ω là một tập con đo được Lebesgue của $\mathbb{R}^n$, là một ánh xạ đa trị đóng có giá trị khác rỗng. Khi đó G là một ánh xạ đa trị đo được Lebesgue.*

Ký hiệu tập tất cả các lát cắt khả tích của G là $\mathcal{G}$, nghĩa là

$$\mathcal{G} = \Big\{ g \in L_1(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid g(\omega) \in G(\omega) \quad \text{h.k.n. trên } \Omega \Big\}.$$

Định nghĩa 1.2.1 (xem [5, tr. 327]). Tích phân của G trên Ω là tập hợp gồm tất cả các tích phân của các lát cắt khả tích của G :

$$\int_\Omega G d\mu := \Big\{ \int_\Omega g d\mu \mid g \in \mathcal{G} \Big\},$$

ở đây $\int_\Omega g d\mu = \Big(\int_\Omega g_1 d\mu, ..., \int_\Omega g_n d\mu \Big)$ với mọi $g = (g_1, ..., g_n)$.

Khái niệm này được R. J. Aumann đề xuất năm 1965 (xem [6]). Nó là sự mở rộng tự nhiên của khái niệm tích phân của các hàm đơn trị cho các ánh xạ đa trị. Lý thuyết tích phân Aumann không những được phát triển cho trường hợp không gian ảnh của ánh xạ đa trị hữu hạn chiều mà còn cho các ánh xạ đa trị nhận giá trị trong các không gian Banach vô hạn chiều (xem [5], [16]).

Nhận xét 1.2.1. Nếu $X = \mathbb{R}^n$ thì tích phân ở vế phải của công thức (1.1) chính là tích phân Aumann.

Sau đây là một số tính chất của tích phân Aumann sẽ được sử dụng ở các phần tiếp theo của luận án.

Định lý 1.2.2 (xem [5, tr. 327 - 330]). *Giả sử Ω là một tập con đo được Lebesgue của $\mathbb{R}^n$, $G : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ đa trị đo được, giới nội khả tích và có giá trị đóng khác rỗng. Khi đó:*

(i) $\int_\Omega G(\omega)d\mu$ là một tập con lồi đóng của $\mathbb{R}^n$ và $\int_\Omega G(\omega)d\mu = \int_\Omega \overline{\mathrm{co}}\, G(\omega)d\mu$;

(ii) với mỗi $v \in \mathbb{R}^n$, $\sigma\Big(\int_\Omega G(\omega)d\mu(\omega), v\Big) = \int_\Omega \sigma\big(G(\omega), v\big)d\mu(\omega)$, ở đây $\sigma(K, v) := \sup\{\langle x^*, v\rangle \mid x^* \in K\}$ là hàm tựa của tập K.

Có thể tìm hiểu thêm thông tin về ánh xạ đa trị đo được, lát cắt và tích phân của các ánh xạ đa trị ở trong các tài liệu [3], [5], [6], [16], [39], [54], [56].

Chương 2

Tích phân của ánh xạ dưới vi phân

Công thức Newton-Leibniz là một kết quả quan trọng chỉ ra mối quan hệ giữa tích phân và vi phân. Chúng ta có định lý sau: *Nếu* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ *là một hàm Lipschitz, thì* $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$*, ở đây tích phân ở vế trái là tích phân Lebesgue* [57, tr. 167]. Trong chương này, một dạng mở rộng của công thức trên cho trường hợp đạo hàm Fréchet $f'(t)$ và tích phân Lebesgue được thay thế tương ứng bởi dưới vi phân Clarke và tích phân Aumann sẽ được thiết lập. Kết quả tương tự cũng đúng cho ánh xạ dưới vi phân Mordukhovich. Các kết quả của chương này đã được công bố trên *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (bài [17]) và trên *Nonlinear Analysis* (bài [20]).

2.1 Tích phân của ánh xạ dưới vi phân Clarke

Chúng ta sẽ chứng minh công thức biểu diễn tích phân Aumann-Gelfand của ánh xạ dưới vi phân Clarke, các điều kiện cần và đủ để tích phân này là đơn trị, và một dạng tương tự của công thức Newton-Leibniz cổ điển cho trường hợp tích phân đa trị. Công thức dạng Newton-Leibniz ở đây cho phép đưa ra một chứng minh mới cho kết quả đã biết về khả năng đặc trưng hàm số của ánh xạ dưới vi phân Clarke (thường được gọi là định lý về tích phân của ánh xạ dưới vi phân Clarke [the integration of the Clarke subdifferential mapping]).

Kết quả đầu tiên của mục này được phát biểu như sau.

Định lý 2.1.1. *Cho X là một không gian Banach khả ly, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo, ở đây $\mathcal{A}$ là một σ-đại số chứa tất cả các tập mở của X. Giả sử $f : U \to \mathbb{R}$ là một hàm Lipschitz trên tập mở $U \subset X$ và $\Omega \subset U$ là một tập con đo được có $\mu(\Omega) < \infty$. Khi đó,*

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Omega \partial^{Cl} f(x) d\mu(x) = \partial^{Cl} F(0) \\ &= \Big\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, v\rangle \leqslant \textstyle\int_\Omega f^0(x; v) d\mu(x) \quad \forall\, v \in X\Big\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

ở đó $F(v) := \int_\Omega f^0(x; v) d\mu(x)$.

Chứng minh. Giả sử ℓ là một hằng số Lipschitz của f trên U. Với mỗi $v \in X$, theo Định lý 1.1.1, hàm $f^0(\cdot; v)$ là nửa liên tục trên ở trong U. Vì $\mathcal{A}$ là σ-đại số chứa tất cả các tập mở của X, nên với mỗi $v \in X$, $f^0(\cdot; v)$ là hàm đo được. Theo Định lý 1.1.1, với mỗi $x \in \Omega$, $f^0(x; \cdot)$ là một hàm lồi hữu hạn thoả mãn bất đẳng thức

$$|f^0(x; v_1) - f^0(x; v_1)| \leqslant \ell \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in X.$$

Đặt $k(x) = \ell$ với mọi $x \in \Omega$. Vì $\mu(\Omega) < \infty$ nên $k(\cdot) \in L_1(\Omega)$. Ta có

$$|f^0(x; v_1) - f^0(x; v_1)| \leqslant k(x) \|v_1 - v_2\| \quad \forall v_1, v_2 \in X, \forall x \in \Omega.$$

Đặt $g_x(v) = f^0(x; v)$. Chú ý rằng $F(0) = 0$. Do đó g_x thoả mãn các giả thiết của Định lý 1.1.2. Hơn thế, g_x là chính qui Clarke tại mọi điểm $v \in X$ bởi vì $f^0(x; \cdot)$ là hàm lồi. Theo Định lý 1.1.2,

$$\partial^{Cl} F(v) = \int_\Omega \partial^{Cl} f^0(x; \cdot)(v) d\mu(x) \quad \forall v \in X.$$

Với $v = 0$ ta có

$$\partial^{Cl} F(0) = \int_\Omega \partial^{Cl} f^0(x;\cdot)(0) d\mu(x).$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned}
\partial^{Cl} f(x) \quad &= \Big\{ x^* \in X^* \mid \langle x^*, v\rangle \le f^0(x;v) \quad \forall v \in X \Big\} \\
&= \Big\{ x^* \in X^* \mid \langle x^*, v\rangle \le f^0(x;v) - f^0(x;0) \quad \forall v \in X \Big\} \\
&= \partial^{Cl} f^0(x;\cdot)(0).
\end{aligned}$$

Do đó ta có đẳng thức thứ nhất trong (2.1). Vì $F(\cdot)$ là hàm lồi và $F(0) = 0$ nên

$$\begin{aligned}
\partial^{Cl} F(0) \; &= \Big\{ x^* \in X^* \mid \langle x^*, v\rangle \leqslant F(v) - F(0) \quad \forall v \in X \Big\} \\
&= \Big\{ x^* \in X^* \mid \langle x^*, v\rangle \leqslant \int_\Omega f^0(x;v) d\mu(x) \quad \forall v \in X \Big\}.
\end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Định nghĩa 2.1.1. Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ từ không gian Banach X vào không gian Banach Y.

(i) Ta nói rằng f *khả vi chặt Hadamard* tại $x_0 \in X$ nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính liên tục $D_s f(x_0) : X \to Y$ sao cho

$$\lim_{x \to x_0,\, t \to 0^+} t^{-1}(f(x+tv) - f(x)) = D_s f(x_0)(v)$$

và sự hội tụ là đều theo v trên mỗi tập con compact của X. Khi đó $D_s f(x_0)$ được gọi là *đạo hàm chặt Hadamard* của f tại x_0; xem [23, tr. 30].

(ii) Nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính liên tục $f'(x_0) : X \to Y$ sao cho

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0,$$

thì ta nói f là *khả vi Fréchet* tại x_0. Khi đó $f'(x_0)$ được gọi là *đạo hàm Fréchet* của f tại x_0; xem [46, Vol. I].

(iii) f được gọi là *khả vi chặt Fréchet* tại x_0 nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính liên tục $f'(x_0) : X \to Y$ sao cho

$$\lim_{x,x' \xrightarrow{x \neq x'} x_0} \frac{\|f(x) - f(x') - f'(x_0)(x - x')\|}{\|x - x'\|} = 0.$$

Khi đó $f'(x_0)$ được gọi là *đạo hàm chặt Fréchet* của f tại x_0; xem [46, Vol. I].

Nhận xét 2.1.1. Từ Định nghĩa 2.1.1 suy ra rằng nếu f là khả vi chặt Fréchet tại x_0 thì f khả vi chặt Hadamard tại x_0 và $f'(x_0) = D_s f(x_0)$. Chiều ngược lại cũng đúng nếu X là không gian hữu hạn chiều. Thật vậy, giả sử f khả vi chặt Hadamard tại x_0 và X là một không gian hữu hạn chiều. Ta có $\mathbb{B}_X$ là compact. Lấy $\varepsilon > 0$ bất kỳ. Khi đó tồn tại $\gamma > 0$ sao cho

$$\|t^{-1}(f(x+tv) - f(x)) - D_s f(x_0)v\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in x_0 + \gamma\mathbb{B}_X, t \in (0, 2\gamma), v \in \mathbb{B}_X.$$

Do đó, với mọi $x, x' \in x_0 + \gamma\mathbb{B}_X$ $(x \neq x')$ ta có

$$\begin{aligned} \frac{\|f(x') - f(x) - D_s f(x_0)(x' - x)\|}{\|x' - x\|} &= \|t^{-1}(f(x + tv) - f(x)) - D_s f(x_0)v\| \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ở đây $t = \|x - x'\|$ và $v = t^{-1}(x' - x)$. Điều này chứng tỏ rằng f là khả vi chặt Fréchet tại x_0 và $f'(x_0) = D_s f(x_0)$.

Nếu X là một không gian hữu hạn chiều, thì chúng ta sẽ sử dụng thuật ngữ "*khả vi chặt*" thay cho các thuật ngữ "*khả vi chặt Fréchet*" và "*khả vi chặt Hadamard*".

Bổ đề 2.1.1. *Giả sử $f : U \to \mathbb{R}$ là một hàm Lipschitz xác định trên một tập mở U của $\mathbb{R}^n$, $\Omega \subset U$ là đo được và có độ đo Lebesgue $\mu(\Omega) < \infty$. Khi đó,*

$$\int_\Omega f'(x) d\mu(x) \in \int_\Omega \partial^{Cl} f(x) d\mu(x).$$

Chứng minh. Giả sử ℓ là một hằng số Lipschitz của hàm f trên U. Gọi Ω_f là tập tất cả các điểm $x \in \Omega$ sao cho f khả vi Fréchet tại x. Theo Định lý

Rademacher (xem [25, tr. 148] hoặc [56, tr. 403 - 408]), ta có $\mu(\Omega\backslash\Omega_f) = 0$. Với mỗi $i \in \mathbb{N}$ và mỗi $k \in \mathbb{N}$, xét hàm $g_k^i : \Omega \to \mathbb{R}$ cho bởi công thức

$$g_k^i(x) = \frac{f\Big(x + k^{-1}e_i\Big) - f(x)}{k^{-1}} \quad (x \in \Omega),$$

ở đây e_i là véctơ đơn vị thứ i trong $\mathbb{R}^n$. Ta có $g_k^i(\cdot)$ là các hàm đo được và $\lim\limits_{k\to\infty} g_k^i(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ với mọi $x \in \Omega_f$. Từ đó suy ra $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\cdot)$ là đo được với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Điều này chứng tỏ rằng $f'(\cdot)$ là một hàm đo được. Vì $\mu(\Omega) < \infty$ và $\|f'(x)\| \leqslant \ell$ hầu khắp nơi trên Ω, nên $f'(\cdot) \in L_1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Mặt khác, theo Định lý 1.1.1, $f'(x) \in \partial^{Cl} f(x)$ với mọi $x \in \Omega_f$. Do đó,

$$\int_\Omega f'(x)d\mu(x) \in \int_\Omega \partial^{Cl} f(x)d\mu(x).$$

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét 2.1.2. Cho $f : X \to \mathbb{R}$ là một hàm Lipschitz địa phương tại x. Theo [23, tr. 33], tập $\partial^{Cl} f(x)$ là tập hợp gồm một điểm khi và chỉ khi f là khả vi chặt Hadamard tại x. Khi đó $\partial^{Cl} f(x) = \{D_s f(x)\}$. Mặt khác, nếu f vừa khả vi Fréchet vừa chính qui Clarke tại x thì $\partial^{Cl} f(x) = \{f'(x)\}$. Do đó nếu f vừa chính qui Clarke và vừa khả vi Fréchet tại x thì f là khả vi chặt Hadamard tại x và $D_s f(x) = f'(x)$. Chúng ta chú ý rằng, ngay cả trường hợp $X = \mathbb{R}$, chỉ riêng điều kiện f chính qui Clarke tại x hoặc chỉ riêng điều kiện f khả vi Fréchet tại x là không đủ để đảm bảo f khả vi chặt tại x. Chẳng hạn, xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được cho bởi công thức $f(x) = |x|$. Ta có f là Lipschitz trên $\mathbb{R}$ và chính qui Clarke tại $x = 0$, nhưng không khả vi chặt $x = 0$. Đặt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{nếu } x \neq 0, \\ 0 & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Ta có $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số Lipschitz trên $\mathbb{R}$ và khả vi Fréchet tại $x = 0$, nhưng không khả vi chặt tại $x = 0$.

Định lý 2.1.2. *Dưới giả thiết của Bổ đề 2.1.1, các tính chất sau đây là tương đương:*

(i) $\int_\Omega \partial^{Cl} f(x) d\mu(x)$ *là tập hợp gồm một điểm;*

(ii) *với mỗi* $v \in \mathbb{R}^n$, $\langle f'(x), v\rangle = f^0(x; v)$ *hầu khắp nơi trên* Ω;

(iii) f *là chính qui Clarke hầu khắp nơi trên* Ω;

(iv) f *là khả vi chặt hầu khắp nơi trên* Ω.

Nếu một trong các tính chất (i)-(iv) *nghiệm đúng, thì*

$$\int_\Omega \partial^{Cl} f(x) d\mu(x) = \Big\{ \int_\Omega f'(x) d\mu(x) \Big\}.$$

Chứng minh. Cố định một hằng số Lipschitz $\ell > 0$ của f trên U.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Giả sử $\int_\Omega \partial^{Cl} f(x) d\mu$ là tập hợp gồm một điểm. Theo Bổ đề 2.1.1,

$$\int_\Omega \partial^{Cl} f(x) d\mu(x) = \Big\{ \int_\Omega f'(x) d\mu(x) \Big\}. \tag{2.2}$$

Vì f là Lipschitz với hằng số Lipschitz ℓ trên tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ và $\Omega \subset U$ nên, theo Định lý 1.1.1, $\partial^{Cl} f(\cdot)$ là một ánh xạ đa trị nửa liên tục trên ở trên Ω và $\|\xi^*\| \leqslant \ell$ với mọi $\xi^* \in \partial^{Cl} f(x)$ và $x \in \Omega$. Vì $\mu(\Omega) < \infty$ và $\sigma-$đại số các tập đo được Lebesgue chứa tất cả các tập mở của $\mathbb{R}^n$, nên từ đó ta suy ra rằng $\partial^{Cl} f(\cdot)$ là ánh xạ đa trị đo được giới nội khả tích và có giá trị lồi đóng; xem [4, tr. 311]. Theo khẳng định (iv) trong Định lý 1.1.1 và theo Định lý 1.2.2,

$$\sigma\Big(\int_\Omega \partial^{Cl} f(x) d\mu(x), v \Big) = \int_\Omega f^0(x; v) d\mu(x) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Từ (2.2) ta suy ra

$$\sigma\Big(\int_\Omega \partial^{Cl} f(x) d\mu(x), v \Big) = \int_\Omega \langle f'(x), v\rangle d\mu(x) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Kết hợp điều đó với (2.3) ta có

$$\int_\Omega f^0(x;v)d\mu(x) = \int_\Omega \langle f'(x), v\rangle d\mu(x). \tag{2.4}$$

Vì $f'(x) \in \partial^{Cl} f(x)$ với mọi $x \in \Omega_f$ nên

$$f^0(x;v) \geqslant \langle f'(x), v\rangle \quad \forall x \in \Omega_f,\ \forall v \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

Do (2.4) và (2.5), với $v \in \mathbb{R}^n$, $\langle f'(x), v\rangle = f^0(x;v)$ hầu khắp nơi trên Ω.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Giả sử (ii) xảy ra. Lấy một dãy véctơ $\{v_i\}$ trù mật trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó, với mỗi $i \in \mathbb{N}$ tồn tại một tập đo được $\Omega_i \subset \Omega$ sao cho f khả vi Fréchet trên Ω_i, $\mu(\Omega\backslash\Omega_i) = 0$, và $f^0(x;v_i) = \langle f'(x), v_i\rangle$ với mọi $x \in \Omega_i$. Đặt $\Omega_0 = \cap_{i=1}^{\infty}\Omega_i$. Ta có $f^0(x;v_i) = \langle f'(x), v_i\rangle$ với mọi $x \in \Omega_0$ và mọi $i \in \mathbb{N}$. Lấy bất kỳ $x \in \Omega_0$ và $v \in \mathbb{R}^n$. Do $\{v_i\}$ là dãy trù mật trong $\mathbb{R}^n$, tồn tại dãy con $\{v_{i_k}\}$ của $\{v_i\}$ sao cho $v_{i_k} \to v$ khi $i_k \to \infty$. Vì các hàm $f^0(x;\cdot)$ và $\langle f'(x), \cdot\rangle$ là liên tục và $f^0(x;v_{i_k}) = \langle f'(x), v_{i_k}\rangle$ với mọi i_k, nên $f^0(x;v) = \langle f'(x), v\rangle$. Do đó f là chính qui Clarke tại mọi điểm thuộc Ω_0. Vì $\mu(\Omega\backslash\Omega_0) = 0$ nên f là chính qui Clarke hầu khắp nơi trên Ω.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Giả sử (iii) nghiệm đúng. Khi đó, tồn tại một tập đo được $\Omega_0 \subset \Omega$ sao cho $\mu(\Omega\backslash\Omega_0) = 0$ và f chính qui Clarke tại mọi điểm thuộc Ω_0. Vì f là khả vi Fréchet và chính qui Clarke tại mỗi $x \in \tilde{\Omega} := \Omega_0 \cap \Omega_f$, nên f là khả vi chặt trên $\tilde{\Omega}$ với $\mu(\Omega\backslash\tilde{\Omega}) = 0$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Giả sử f là khả vi chặt hầu khắp nơi trên Ω. Khi đó, $\partial^{Cl} f(x) = \{D_s f(x)\}$ hầu khắp nơi trên Ω. Do đó, $\int_\Omega \partial^{Cl} f(x)d\mu(x)$ là tập hợp gồm một điểm. □

Kết quả tiếp theo là một dạng tương tự công thức Newton-Leibniz cổ điển

$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$ (xem [57, tr. 167]). Chúng ta thu được ở đây cho trường hợp đạo hàm Fréchet $f'(x)$ và tích phân Lebesgue tương ứng được thay bằng dưới vi phân Clarke $\partial^{Cl} f(x)$ và tích phân Aumann.

Định lý 2.1.3. *Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ là một hàm Lipschitz, thì*

$$f(b) - f(a) \in \int_a^b \partial^{Cl} f(x)dx \tag{2.6}$$

và đẳng thức

$$\int_a^b \partial^{Cl} f(x)dx = \Big\{f(b) - f(a)\Big\}$$

nghiệm đúng khi và chỉ khi f là khả vi chặt hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Chứng minh. Lấy $\Omega = [a, b]$ và $U = (a - 1, b + 1)$. Mở rộng hàm số f lên U bằng cách đặt $f(x) = f(b)$ nếu $x \in (b, b + 1)$ và $f(x) = f(a)$ nếu $x \in (a - 1, a)$. Khi đó f là một hàm Lipschitz trên U. Theo Bổ đề 2.1.1,

$$\int_a^b f'(x)dx \in \int_a^b \partial^{Cl} f(x)dx.$$

Mặt khác,

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Do đó, (2.6) nghiệm đúng. Theo Định lý 2.1.2, $\int_a^b \partial^{Cl} f(x)dx$ là tập hợp gồm một điểm khi và chỉ khi f khả vi chặt hầu khắp nơi trên $[a, b]$. Kết hợp sự kiện này với công thức (2.6) ta có điều phải chứng minh. □

Tập hợp ở vế phải của công thức (2.6) có thể chứa vô hạn phần tử.

Ví dụ 2.1.1. Giả sử $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ là tập tất cả các số hữu tỷ trong khoảng $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, lấy $\delta_k > 0$ sao cho

$$(r_k - \delta_k, r_k + \delta_k) \subset (a, b) \quad \text{và} \quad \delta_k < 2^{-(k+3)}(b - a).$$

Đặt

$$A = \cup_{k=1}^{\infty}(r_k - \delta_k, r_k + \delta_k) \text{ và } P = [a, b] \backslash A.$$

Vì A là một tập mở trong $\mathbb{R}$ nên P là một tập đóng và $A = \cup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)$, với $\{(a_j, b_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ là một dãy các khoảng mở đôi một rời nhau. Xét hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ được cho bởi công thức

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{nếu } \ x \in P, \\ (x - a_j)^2(x - b_j)^2 \sin \dfrac{1}{(b_j - a_j)(x - a_j)(x - b_j)} \quad \text{nếu } x \in (a_j, b_j). \end{cases}$$

Ta có f là Lipschitz trên $[a, b]$ và $\mathcal{I} := \int_a^b \partial^{Cl} f(t)dt$ là một tập hợp có quá đếm được phần tử. Thật vậy, vì tập các số hữu tỷ là trù mật trong $\mathbb{R}$ nên P là một tập hợp không đâu trù mật. Ngoài ra,

$$\begin{aligned} \mu(P) &= \mu([a, b]) - \mu(A) \\ &= (b - a) - \mu\left(\cup_{k=1}^{\infty}(r_k - \delta_k, r_k + \delta_k)\right) \\ &\geqslant (b - a) - \sum_{k=1}^{\infty} \mu((r_k - \delta_k, r_k + \delta_k)) \\ &= (b - a) - 2\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k > 0. \end{aligned}$$

Tiếp theo chúng ta sẽ tính $f'(x)$. Lấy $x \in P$ và $t \in (x, b]$. Ta có $f(x) = 0$. Nếu $t \in P$ thì $f(t) = f(x) = 0$. Nếu $t \notin P$ thì tồn tại $j \in \mathbb{N}$ sao cho $t \in (a_j, b_j)$ và $x \leqslant a_j < t$. Vì vậy,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \right| &\leqslant (t - a_j)(t - b_j)^2 \\ &\leqslant (t - x)(b - a)^2 \quad \forall t \in (x, b]. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $f'_+(x) = 0$, ở đây $f'_+(x) := \lim\limits_{t\to x^+} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$. Lý luận tương tự, ta có $f'_-(x) = 0$ với $f'_-(x) := \lim\limits_{t\to x^-} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x}$. Do đó, $f'(x) = 0$ với mọi

$x \in P$. Nếu $x \in A$ thì tồn tại $j \in \mathbb{N}$ sao cho $x \in (a_j, b_j)$. Vì thế,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-a_j)(x-b_j)(2x-a_j-b_j)\sin\frac{1}{(b_j-a_j)(x-a_j)(x-b_j)} \\ &-\frac{2x-a_j-b_j}{b_j-a_j}\cos\frac{1}{(b_j-a_j)(x-a_j)(x-b_j)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Do $f'(x)$ là bị chặn trên $[a, b]$, f là một hàm Lipschitz trên $[a, b]$. Lấy $\bar{x} \in P \cap (a, b)$ và $\varepsilon > 0$. Vì $f'(x) = 0$ trên P nên, theo (2.7), tồn tại $\gamma > 0$ sao cho $|f'(x)| \leqslant 1 + \varepsilon$ với mọi $x \in (\bar{x} - \gamma, \bar{x} + \gamma) \cap [a, b]$. Do đó,

$$\partial^{Cl} f(\bar{x}) = \mathrm{co}\left\{\lim_{k\to\infty} f'(x_k) \mid \{x_k\} \subset [a, b], x_k \to \bar{x}\right\} \subset [-1-\varepsilon, 1+\varepsilon].$$

Vì $\varepsilon > 0$ được lấy tuỳ ý, ta suy ra $\partial^{Cl} f(\bar{x}) \subset [-1, 1]$.

Trường hợp 1. $\bar{x} = a_j$. Lấy

$$x_k = \frac{a_j + b_j - \sqrt{(b_j-a_j)^2 + \dfrac{4}{(a_j-b_j)2k\pi}}}{2}$$

với k đủ lớn. Khi đó $x_k \to a_j^+$ khi $k \to \infty$. Thay $x = x_k$ vào (2.7) ta có $f'(x_k) \to 1$ khi $k \to \infty$. Do đó $1 \in \partial^{Cl} f(a_j)$. Lấy

$$x'_k = \frac{a_j + b_j - \sqrt{(b_j-a_j)^2 + \dfrac{4}{(a_j-b_j)(2k+1)\pi}}}{2}$$

với k đủ lớn. Khi đó $x'_k \to a_j$ và $f'(x_k) \to -1$. Do đó $-1 \in \partial^{Cl} f(a_j)$. Vì $\partial^{Cl} f(a_j) \subset [-1, 1]$ là một tập lồi chứa $\{1, -1\}$ nên $\partial^{Cl} f(a_j) = [-1, 1]$.

Trường hợp 2. $\bar{x} = b_j$. Lập luận tương tự như trong Trường hợp 1, ta có $\partial^{Cl} f(b_j) = [-1, 1]$.

Trường hợp 3. $\bar{x} \in P$. Vì tập P là không đâu trù mật nên tồn tại một dãy $\{c_k\}$, trong đó

$$c_k \in \{a_j \mid j = 1, 2, ...\} \cup \{b_j \mid j = 1, 2, ...\} \quad \forall k,$$

sao cho $c_k \to \bar{x}$. Lấy $\alpha_k = \alpha \in [-1,1] = \partial^{Cl} f(c_k)$. Vì $\alpha_k \to \alpha$ và $c_k \to \bar{x}$ nên $\alpha \in \partial^{Cl} f(\bar{x})$. Do đó $\partial^{Cl} f(\bar{x}) = [-1,1]$. Ngoài ra, $\partial^{Cl} f(x) = \{f'(x)\}$ với mọi $x \in A$. Như vậy ta có

$$\partial^{Cl} f(x) = \begin{cases} [-1,1] & \text{nếu } x \in P \cap (a,b), \\ \{f'(x)\} & \text{nếu } x \in A. \end{cases} \tag{2.8}$$

Xét lát cắt khả tích $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ của $\partial^{Cl} f(\cdot)$ được cho bởi

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \in P, \\ f'(t) & \text{nếu } t \in [a,b] \backslash P. \end{cases}$$

Chú ý rằng $\int_{[a,b]\backslash P} f'(t)dt = 0$, ta có

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t)dt &= \int_P dt + \int_{[a,b]\backslash P} f'(t)dt \\ &= \mu(P) + \int_{[a,b]\backslash P} f'(t)dt \\ &= \mu(P). \end{aligned}$$

Tương tự, với lát cắt $g_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ của $\partial^{Cl} f(\cdot)$ được cho bởi công thức $g_1(t) = -1$ nếu $t \in P$ và $g_1(x) = f'(t)$ nếu $t \in [a,b]\backslash P$, ta có

$$\begin{aligned} \int_a^b g_1(t)dt &= \int_P (-1)dt + \int_{[a,b]\backslash P} f'(t)dt \\ &= -\mu(P) + \int_{[a,b]\backslash P} f'(t)dt \\ &= -\mu(P). \end{aligned}$$

Vì $-\mu(P), \mu(P) \in \mathcal{I}$ và $\mathcal{I}$ là tập lồi nên $[-m_1(P), m_1(P)] \subset \mathcal{I}$. Do (2.8) và do sự kiện $\int_{[a,b]\backslash P} f'(t)dt = 0$, $\mathcal{I} = [-\mu(P), \mu(P)]$. Vì $\mu(P) > 0$ nên $\mathcal{I}$ là một tập hợp quá đếm được.

Nghiên cứu khả năng đặc trưng hàm số của các loại ánh xạ dưới vi phân là một vấn đề quan trọng của giải tích không trơn. Vấn đề này đã và đang thu hút được sự quan tâm của nhiều chuyên gia trong ngành (xem [7], [26], [40], [51], [52], [53], [59], [60], [62]). Người ta đã dành nhiều thời gian để nghiên cứu bài toán sau: *Có phải hai hàm số có dưới vi phân trùng nhau thì chúng chỉ sai khác nhau một hằng số cộng? Dưới những điều kiện nào thì câu trả lời là khẳng định?*

Định lý 2.1.3 cho phép đưa ra một chứng minh mới cho một kết quả đã biết về đặc trưng hàm số Lipschitz địa phương của dưới vi phân Clarke.

Định lý 2.1.4 (xem [60]). *Giả sử X là một không gian Banach và $f, g : X \to \mathbb{R}$ là các hàm Lipschitz địa phương. Khi đó, nếu f là chính qui Clarke tại mọi điểm và $\partial^{Cl} g(x) \subset \partial^{Cl} f(x)$ với mọi $x \in X$, thì tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = g(x) + \alpha$ với mọi $x \in X$.*

Để chứng minh Định lý 2.1.4, chúng ta cần kết quả bổ trợ sau đây.

Bổ đề 2.1.2. *Giả sử X là một không gian Banach và $f : X \to \mathbb{R}$ là một hàm Lipschitz địa phương. Khi đó, nếu f là chính qui Clarke tại mọi điểm, thì với mọi $a, b \in X$, hàm số $f \circ \lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, với $\lambda(t) = a + t(b - a)$, là khả vi chặt hầu khắp nơi trên $[0, 1]$.*

Chứng minh. Lấy bất kỳ $a, b \in X$. Vì f là một hàm Lipschitz địa phương nên hàm hợp $f \circ \lambda$ là Lipschitz trên $(-1, 2)$. Lấy $t_0 \in [0, 1]$ và $\mu \in \mathbb{R}$. Ta có

$$\begin{aligned}
(f \circ \lambda)^0(t_0; \mu) &= \limsup_{t \to t_0,\, \theta \to 0^+} \frac{(f \circ \lambda)(t + \theta\mu) - (f \circ \lambda)(t)}{\theta} \\
&= \limsup_{t \to t_0,\, \theta \to 0^+} \frac{f((a + t(b - a)) + \theta\mu(b - a)) - f(a + t(b - a))}{\theta} \\
&\leqslant f^0(a + t_0(b - a); \mu(b - a))
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
& f'(a + t_0(b - a); \mu(b - a)) \\
&= \lim_{\theta \to 0^+} \frac{f\left((a + t_0(b - a)) + \theta\mu(b - a)\right) - f(a + t_0(b - a))}{\theta} \\
&= \lim_{\theta \to 0^+} \frac{(f \circ \lambda)(t_0 + \theta\mu) - (f \circ \lambda)(t_0)}{\theta} \\
&= (f \circ \lambda)'(t_0; \mu).
\end{aligned}$$

Vì f là chính qui Clarke nên

$$f^0(a + t_0(b - a); \mu(b - a)) = f'(a + t_0(b - a); \mu(b - a)).$$

Từ đó suy ra

$$(f \circ \lambda)^0(t_0; \mu) \leq (f \circ \lambda)'(t_0; \mu).$$

Mặt khác,

$$(f \circ \lambda)'(t_0; \mu) \leqslant (f \circ \lambda)^0(t_0; \mu).$$

Do đó,

$$(f \circ \lambda)^0(t_0; \mu) = (f \circ \lambda)'(t_0; \mu).$$

Điều này chứng tỏ rằng $f \circ \lambda$ là hàm chính qui Clarke trên $[0, 1]$. Theo Định lý 2.1.2, hàm $f \circ \lambda$ là khả vi chặt hầu khắp nơi trên $[0, 1]$. $\square$

Chứng minh Định lý 2.1.4. Lấy bất kỳ $x_0 \in X$. Xét hàm số $\lambda : \mathbb{R} \to X$ cho bởi công thức $\lambda(t) = tx_0$ với mọi $t \in \mathbb{R}$. Do f là chính qui Clarke, theo Bổ đề 2.1.2, hàm $f \circ \lambda$ là khả vi chặt hầu khắp nơi trên $[0, 1]$. Vì f và g là các hàm Lipschitz địa phương trên X nên $f \circ \lambda$ và $g \circ \lambda$ là các hàm Lipschitz trên $[0, 1]$. Theo Định lý 2.1.3,

$$\int_0^1 \partial^{Cl}(f \circ \lambda)(t)dt = \Big\{(f \circ \lambda)(1) - (f \circ \lambda)(0)\Big\} = \Big\{f(x_0) - f(0)\Big\}.$$

Chúng ta chú ý rằng hàm λ là khả vi chặt và $D_s\lambda(t) = \lambda$ với mọi $t \in [0, 1]$. Theo [23, Theorem 2.3.10],

$$\partial^{Cl}(f \circ \lambda)(t) = \partial^{Cl} f(\lambda(t)) D_s\lambda(t)$$

và

$$\partial^{Cl}(g \circ \lambda)(t) \subset \partial^{Cl} g(\lambda(t)) D_s\lambda(t).$$

Kết hợp điều này với giả thiết $\partial^{Cl} g(x) \subset \partial^{Cl} f(x)$ với mọi $x \in X$, ta có

$$\partial^{Cl}(g \circ \lambda)(t) \subset \partial^{Cl}(f \circ \lambda)(t) \quad \forall\, t \in [0, 1].$$

Do đó,

$$\int_0^1 \partial^{Cl}(g\circ\lambda)(t)dt \subset \int_0^1 \partial^{Cl}(f\circ\lambda)(t)dt = \Big\{f(x_0)-f(0)\Big\}. \qquad (2.9)$$

Theo (2.6),

$$g(x_0)-g(0) = (g\circ\lambda)(1)-(g\circ\lambda)(0) \in \int_0^1 \partial^{Cl}(g\circ\lambda)(t)dt. \qquad (2.10)$$

Từ (2.9) và (2.10) ta suy ra

$$\textstyle\int_0^1 \partial^{Cl}(g\circ\lambda)(t)dt = \Big\{g(x_0)-g(0)\Big\} = \Big\{f(x_0)-f(0)\Big\}.$$

Vì $x_0 \in X$ được lấy tuỳ ý nên $g(x) = f(x)+\alpha$ với mọi $x \in X$, ở đây $\alpha := g(0)-f(0)$. Định lý đã được chứng minh. $\square$

Nếu X là không gian hữu hạn chiều thì các giả thiết f là "chính qui Clarke tại mọi điểm" và "$\partial^{Cl}g(x) \subset \partial^{Cl}f(x)$ với mọi $x \in X$" ở Định lý 2.1.4 có thể giảm nhẹ được.

Định lý 2.1.5. *Giả sử $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là các hàm số Lipschitz địa phương. Nếu f là chính qui Clarke và $\partial^{Cl}g(x) \subset \partial^{Cl}f(x)$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{R}^n$, thì tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) = g(x)+\alpha$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.*

Chứng minh. Lấy ρ là một số dương tùy ý. Chú ý rằng f và g là các hàm Lipschitz trên $\mathbb{B}(0,\rho) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \rho\}$. Vì f là chính qui Clarke hầu khắp nơi nên, theo Định lý 2.1.2, ta có f là khả vi chặt hầu khắp nơi trên $\mathbb{B}(0,\rho)$. Do đó $\partial^{Cl}f(x) = \big\{f'(x)\big\}$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{B}(0,\rho)$. Mặt khác, $g'(x) \in \partial^{Cl}g(x)$ và $\partial^{Cl}g(x) \subset \partial^{Cl}f(x)$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{B}(0,\rho)$. Do đó $(f-g)'(x) = 0$ hầu khắp nơi trên $\mathbb{B}(0,\rho)$. Theo Định lý 2.1.4, $\partial^{Cl}(f-g)(x) = \{0\}$ với mọi $x \in \mathbb{B}(0,\rho)$. Vì $\rho > 0$ được lấy tùy ý nên ta suy ra $\partial^{Cl}(f-g)(x) = \{0\}$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Theo Định lý 2.1.4 (với $f-g$

và 0 tương ứng đóng vai trò của g và f trong Định lý 2.1.4), tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho $f(x) - g(x) = \alpha$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

2.2 Tích phân của ánh xạ dưới vi phân Mordukhovich

Trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu tích phân Aumann của ánh xạ dưới vi phân Mordukhovich. Kết quả chính được phát biểu như sau.

Định lý 2.2.1. *Giả sử $f : U \to \mathbb{R}$ là một hàm Lipschitz xác định trên một tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ và $\Omega \subset U$ là một tập con đo được có độ đo Lebesgue $\mu(\Omega) < \infty$. Khi đó,*

$$\int_\Omega \partial f(x) d\mu(x) = \Big\{ x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, v\rangle \leqslant \int_\Omega f^0(x; v) d\mu(x) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \Big\}. \tag{2.11}$$

Chứng minh. Giả sử ℓ là một hằng số Lipschitz của hàm f trên U. Ta có ánh xạ đa trị $\partial f(\cdot) : U \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ là đóng (xem [14, tr. 199]). Do đó $\partial f(x)$ là đóng với mọi $x \in U$. Theo khẳng định (iii) của Định lý 1.1.1 và theo Định lý 1.1.5,

$$\overline{\text{co}}\, \partial f(x) = \partial^{Cl} f(x) \neq \emptyset \quad \forall x \in U.$$

Từ đó suy ra $\partial f(x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in U$. Theo Định lý 1.2.1, $\partial f(\cdot)$ là một ánh xạ đo được. Do $\mu(\Omega) < \infty$ và $\|x^*\| \leqslant \ell$ với mọi $x^* \in \partial f(x)$ và $x \in U$, $\partial f(\cdot)$ là ánh xạ đa trị giới nội khả tích trên Ω. Theo Định lý 1.2.2,

$$\int_\Omega \partial f(x) d\mu(x) = \int_\Omega \overline{\text{co}}\, \partial f(x) d\mu(x).$$

Chú ý rằng $\overline{\text{co}} \partial f(x) = \partial^{Cl} f(x)$ với mọi $x \in \Omega$. Do đó,

$$\int_\Omega \partial f(x) d\mu(x) = \int_\Omega \partial^{Cl} f(x) d\mu(x). \tag{2.12}$$

Theo Định lý 2.1.1,

$$\int_\Omega \partial^{Cl} f(x)d\mu(x) = \Big\{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, v\rangle \leqslant \int_\Omega f^0(x;v)d\mu(x) \quad \forall v \in \mathbb{R}^n\Big\}. \tag{2.13}$$

Từ (2.12) và (2.13) ta suy ra (2.11). Đó là điều phải chứng minh. □

Sau đây là một ví dụ minh họa cho kết quả thu được ở Định lý 2.2.1.

Ví dụ 2.2.1. Xét hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ở trong Ví dụ 2.1.1. Theo (2.8),

$$\partial^{Cl} f(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{nếu } x \in P \cap (a, b), \\ \{f'(x)\} & \text{nếu } x \in A. \end{cases}$$

Vì vậy, với mọi $v \in \mathbb{R}$,

$$f^0(x; v) = \max_{\xi \in \partial^{Cl} f(x)} \langle \xi, v\rangle = \begin{cases} |v| & \text{nếu } x \in P \cap (a, b), \\ \{f'(x)v\} & \text{nếu } x \in A. \end{cases}$$

Chú ý rằng $\int_A f'(x)dx = 0$. Ta có $\int_a^b f^0(x; v)dx = \int_P |v|dx = \mu(P)|v|$. Do đó, theo Định lý 2.2.1,

$$\int_a^b \partial f(x)dx = \Big\{x^* \in \mathbb{R} \mid \langle x^*, v\rangle \leqslant \mu(P)|v| \quad \forall v \in \mathbb{R}\Big\} = [-\mu(P), \mu(P)].$$

Hệ quả 2.2.1. *Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ là một hàm Lipschitz, thì*

$$f(b) - f(a) \in \int_a^b \partial f(x)dx \tag{2.14}$$

và đẳng thức

$$\int_a^b \partial f(x)dx = \Big\{f(b) - f(a)\Big\} \tag{2.15}$$

xảy ra khi và chỉ khi f là hàm khả vi chặt hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Chứng minh. Vì f là một hàm Lipschitz trên $[a, b] \subset \mathbb{R}$, nên f là khả vi Fréchet hầu khắp nơi trên $[a, b]$ và $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$. Đặt

$$D = \Big\{x \in [a, b] \ \mid \ f \text{ khả vi Fréchet tại } x\Big\}.$$

Ta có

$$\mu\big([a,b]\backslash D\big) = 0 \ \text{ và } \ \big\langle f'(x), v\big\rangle \leqslant f^0(x;v) \quad \forall x \in D \ \text{ và } \ v \in \mathbb{R}, \qquad (2.16)$$

ở đây μ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$. Do đó,

$$\Big\langle \int_a^b f'(x)dx, v\Big\rangle = \int_a^b \langle f'(x), v\rangle dx \leqslant \int_a^b f^0(x;v)dx \quad \forall v \in \mathbb{R}.$$

Theo Định lý 2.2.1, $f(b) - f(a) \in \int_a^b \partial f(x)dx$. Nếu f là khả vi chặt hầu khắp nơi trên $[a,b]$, thì $\partial f(x)$ là đơn trị hầu khắp nơi trên $[a,b]$. Do đó (2.15) nghiệm đúng. Tiếp theo, giả sử (2.15) nghiệm đúng. Với mỗi $v \in \mathbb{R}$, từ (2.11), (2.15) và (2.16) ta suy ra $\big\langle f'(x), v\big\rangle = f^0(x;v)$ hầu khắp nơi trên $[a,b]$. Đặt

$$\Omega_1 = \big\{x \in D \mid f'(x) = f^0(x;1)\big\}, \ \Omega_{-1} = \big\{x \in D \mid -f'(x) = f^0(x;-1)\big\}.$$

Ta có

$$\big\langle f'(x), v\big\rangle = f^0(x;v) \quad \forall x \in \Omega := \Omega_1 \cap \Omega_{-1}, \forall v \in \mathbb{R}.$$

Ngoài ra, $\mu\big([a,b]\backslash\Omega\big) = 0$. Từ đó suy ra f vừa khả vi Fréchet vừa chính qui Clarke tại mọi điểm $x \in \Omega$. Vì vậy f là khả vi chặt tại mọi điểm $x \in \Omega$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chương 3

Dưới vi phân của phiếm hàm tích phân

Trong chương này, chúng ta sẽ thiết lập một số công thức tính dưới vi phân Fréchet và dưới vi phân Mordukhovich của các phiếm hàm tích phân. Mục 3.1 được dành để nghiên cứu dưới vi phân Mordukhovich $\partial F(\bar{x})$ của tích phân bất định

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

ở đây f là một hàm bị chặn cốt yếu. Mục 3.2 đưa ra công thức tính dưới vi phân Fréchet và dưới vi phân Mordukhovich của phiếm hàm tích phân có dạng

$$F(u) = \int_\Omega f(\omega, u(\omega))d\mu(\omega) \quad (u \in L_1(\Omega; E)),$$

với $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo không nguyên tử $\sigma-$hữu hạn đầy đủ, E là một không gian Banach khả ly và $f : \Omega \times E \to \bar{\mathbb{R}}$ là $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$đo được. Các kết quả đó dẫn đến một tiêu chuẩn tồn tại nghiệm địa phương của bài toán tối ưu không ràng buộc, với hàm mục tiêu là phiếm hàm tích phân. Ngoài các hệ quả 3.1.2, 3.1.3, và 3.2.2 là những kết quả được trình bày lần đầu tiên ở đây, các kết quả còn lại của chương này đã được công bố trên *Journal of Mathematical Analysis and Applications* trong các bài báo [17] và [19].

3.1 Dưới vi phân của tích phân bất định

Chúng ta sẽ đưa ra công thức tính dưới vi phân Mordukhovich của tích phân bất định

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \tag{3.1}$$

ở đó f là một hàm bị chặn cốt yếu trên đoạn $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Một số ví dụ minh hoạ sẽ được đưa ra. Các ví dụ này cũng cho thấy sự tiện lợi khi sử dụng công thức của chúng ta để tính $\partial F(x)$. Kết quả tính toán chứng tỏ rằng nói chung tập $\partial F(x)$ có thể lồi hoặc không lồi. Một điều kiện kiện đủ đảm bảo dưới vi phân Mordukhovich $\partial F(x)$ là tập lồi sẽ được chỉ ra.

Kết quả quan trọng sau đây thuộc về J. M. Borwein và S. P. Fitzpatrick.

Định lý 3.1.1 (xem [10]). *Giả sử g là một hàm Lipschitz địa phương trên $(a, b) \subset \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$, và $\partial^{Cl} g(y) = \big[\alpha(y), \beta(y)\big]$ với mọi $y \in (a, b)$. Khi đó,*

$$\partial g(x) = \Big[\liminf_{y \to x} \alpha(y), \limsup_{y \to x^+} \beta(y)\Big] \bigcup \Big[\liminf_{y \to x^-} \alpha(y), \limsup_{y \to x} \beta(y)\Big],$$

ở đây $y \to x^+$ và $y \to x^-$ tương ứng có nghĩa là $y \to x$ với $y > x$ và $y \to x$ với $y < x$.

Hàm đo được f từ $[a, b] \subset \mathbb{R}$ vào $\bar{\mathbb{R}}$ được gọi là *bị chặn cốt yếu* trên $[a, b]$ nếu tồn tại $M > 0$ sao cho $|f(x)| \leqslant M$ hầu khắp nơi trên $[a, b]$ (xem [57]). Ký hiệu $L_\infty[a, b]$ là tập gồm tất cả các hàm bị chặn cốt yếu trên $[a, b]$. Đặt

$$\begin{aligned}
f^+(x) &= \inf\Big\{M \mid \exists\, \varepsilon > 0 \text{ sao cho } f(x') \leqslant M \text{ h.k.n. trên } [x - \varepsilon, x + \varepsilon]\Big\},\\
f^+_+(x) &= \inf\Big\{M \mid \exists\, \varepsilon > 0 \text{ sao cho } f(x') \leqslant M \text{ h.k.n. trên } [x, x + \varepsilon]\Big\},\\
f^-(x) &= \sup\Big\{M \mid \exists\, \varepsilon > 0 \text{ sao cho } f(x') \geqslant M \text{ h.k.n. trên } [x - \varepsilon, x + \varepsilon]\Big\},\\
f^-_-(x) &= \sup\Big\{M \mid \exists\, \varepsilon > 0 \text{ sao cho } f(x') \geqslant M \text{ h.k.n. trên } [x - \varepsilon, x]\Big\}.
\end{aligned}$$

Dễ thấy rằng

$$f^-(x) \leqslant f_-^-(x) \leqslant f^+(x) \quad \text{và} \quad f^-(x) \leqslant f_+^+(x) \leqslant f^+(x).$$

Do đó $\Big[f^-(x), f_+^+(x)\Big] \bigcup \Big[f_-^-(x), f^+(x)\Big] \subset \Big[f^-(x), f^+(x)\Big]$.

Kết quả chính của mục này được phát biểu như sau.

Định lý 3.1.2. *Giả sử* $f \in L_\infty[a, b]$, F *là hàm cho bởi công thức* (3.1), *và* $x \in (a, b)$. *Khi đó,*

$$\partial F(x) = \Big[f^-(x), f_+^+(x)\Big] \bigcup \Big[f_-^-(x), f^+(x)\Big]. \tag{3.2}$$

Chứng minh. Do $f \in L_\infty[a, b]$, F là một hàm Lipschitz trên $[a, b]$ và

$$\partial^{Cl} F(y) = \Big[f^-(y), f^+(y)\Big] \tag{3.3}$$

với mọi $y \in (a, b)$ (xem [23, tr. 34] hoặc [25, tr. 96]). Theo Định lý 3.1.1,

$$\begin{aligned} \partial F(x) \ &= \Big[\liminf_{y \to x} f^-(y), \limsup_{y \to x^+} f^+(y)\Big] \\ &\bigcup \Big[\liminf_{y \to x^-} f^-(y), \limsup_{y \to x} f^+(y)\Big]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Từ (3.3), (3.4) và Định lý 1.1.5 ta suy ra

$$f^-(x) = \liminf_{y \to x} f^-(y) \quad \text{và} \quad f^+(x) = \limsup_{y \to x} f^+(y). \tag{3.5}$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh rằng

$$f_+^+(x) = \limsup_{y \to x^+} f^+(y). \tag{3.6}$$

Với mỗi $\delta > 0$ tồn tại $M \in \mathbb{R}$ và $\varepsilon > 0$ sao cho

$$f(x') \leqslant M \ \text{ h.k.n. trên } [x, x + \varepsilon]$$

và

$$f_+^+(x) + \delta \geqslant M.$$

Do đó,

$$f(x') \leqslant f_+^+(x) + \delta \text{ h.k.n. trên } [x, x+\varepsilon]. \tag{3.7}$$

Với mỗi $y \in (x, x+\varepsilon)$ tồn tại $\varepsilon' > 0$ sao cho

$$[y - \varepsilon', y + \varepsilon'] \subset [x, x+\varepsilon].$$

Theo (3.7),

$$f^+(y) \leqslant f_+^+(x) + \delta \text{ với mọi } y \in (x, x+\varepsilon).$$

Do đó,

$$\limsup_{y \to x^+} f^+(y) \leqslant f_+^+(x) + \delta.$$

Vì $\delta > 0$ được lấy tuỳ ý nên

$$\limsup_{y \to x^+} f^+(y) \leqslant f_+^+(x). \tag{3.8}$$

Giả sử (3.6) không đúng. Theo (3.8), tồn tại $\delta_0 > 0$ sao cho

$$\limsup_{y \to x^+} f^+(y) < f_+^+(x) - \delta_0.$$

Do đó tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$f^+(y) < f_+^+(x) - \delta_0 \text{ với mọi } y \in (x, x+\varepsilon). \tag{3.9}$$

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh rằng

$$f(x') \leqslant f_+^+(x) - \delta_0 \text{ h.k.n. trên } (x, x+\varepsilon). \tag{3.10}$$

Từ (3.9) suy ra rằng với mỗi $y \in (x, x+\varepsilon)$ tồn tại $\varepsilon_y > 0$ và $M_y < f_+^+(x) - \delta_0$ sao cho

$$V_y := (y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y) \subset (x, x+\varepsilon)$$

và

$$f(x') \leqslant M_y \text{ h.k.n. trên } V_y.$$

Do đó,

$$f(x') \leqslant f_+^+(x) - \delta_0 \text{ h.k.n. trên } V_y. \tag{3.11}$$

Vì $\{V_y |\ y \in (x, x+\varepsilon)\}$ là một phủ mở của $(x, x+\varepsilon)$ nên tồn tại một phủ con đếm được $\{V_{y_j} |\ j = 1, 2, ...\}$ của $\{V_y |\ y \in (x, x+\varepsilon)\}$ phủ khoảng $(x, x+\varepsilon)$. Vì vậy, (3.10) được suy ra từ (3.11), và do đó

$$f_+^+(x) \leqslant f_+^+(x) - \delta_0.$$

Đây là một điều mâu thuẫn. Ta đã chứng tỏ rằng đẳng thức (3.6) là đúng. Tương tự, ta có

$$f_-^-(x) = \liminf_{y \to x^-} f^-(y). \tag{3.12}$$

Từ (3.4)-(3.6) và (3.12) ta suy ra

$$\partial F(x) = \Big[f^-(x), f_+^+(x)\Big] \bigcup \Big[f_-^-(x), f^+(x)\Big].$$

Đó là điều phải chứng minh. $\square$

Để chứng minh (3.6), ngoài cách lập luận của chúng tôi như trên (đã trình bày trong [17]), PGS. TS. Huỳnh Thế Phùng (Đại học Huế) có cách lập luận khác như sau: Đặt

$$g(y) = \begin{cases} f(y) & \text{nếu } y \geq x, \\ f_+^+(x) - 1 & \text{nếu } y < x. \end{cases}$$

Ta có

$$g^+(y) = \begin{cases} f^+(y) & \text{nếu } y > x, \\ f_+^+(x) & \text{nếu } y = x, \\ f_+^+(x) - 1 & \text{nếu } y < x. \end{cases}$$

Vì vậy, theo (3.5), $f_+^+(x) = g^+(x) = \limsup\limits_{y \to x} g^+(y) = \limsup\limits_{y \to x^+} f^+(y)$.

Sau đây là một số ví dụ minh họa việc tính dưới vi phân Mordukhovich $\partial F(x)$ bằng cách sử dụng công thức (3.2). Các ví dụ này cũng cho thấy rằng nếu $f \in L_\infty[a,b]$ và F là hàm cho bởi công thức (3.1) thì $\partial F(x)$ là một đoạn số thực, hoặc là hợp của hai đoạn số thực rời nhau. (Như thường lệ, ta qui ước rằng đoạn số thực có thể suy biến thành một điểm.)

Ví dụ 3.1.1. Lấy E là một tập con đo được của $[0,1]$ có tính chất sau: giao của một khoảng mở khác rỗng bất kỳ của $[0,1]$ với E và với $[0,1]\backslash E$ đều có độ đo Lebesgue dương. Những tập như thế là tồn tại (xem [58, tr. 307]). Đặt $f(t) = 1$ nếu $t \in E$, $f(t) = 0$ nếu $t \in [0,1]\backslash E$. Xét hàm $F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$ $(x \in [0,1])$. Ta có $f \in L_\infty[0,1]$ và $f^+(x) = f_+^+(x) = 1$ và $f^-(x) = f_-^-(x) = 0$ với mọi $x \in (0,1)$. Do đó, theo Định lý 3.1.2, $\partial F(x) = [0,1]$ với mọi $x \in (0,1)$.

Nhận xét 3.1.1. Vì $\partial F(x) = [0,1]$ với mọi $x \in (0,1)$ nên theo Định lý 1.1.5, $\partial^{Cl} F(x) = [0,1]$ với mọi $x \in (0,1)$. Công thức này đã được thiết lập bởi R. T. Rockafellar (xem [14, tr. 191]).

Ví dụ 3.1.2. Lấy tập E như trong Ví dụ 3.1.1. Giả sử $x_0 \in E \cap (0,1)$ và

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } t \in [x_0,1] \bigcap E, \\ 0 & \text{nếu } t \in [x_0,1]\backslash E, \\ 2 & \text{nếu } t \in [0,x_0) \bigcap E, \\ 3 & \text{nếu } t \in [0,x_0)\backslash E. \end{cases}$$

Đặt $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ $(x \in [0,1])$. Ta có $f \in L_\infty[0,1]$ và $f^+(x_0) = 3$, $f_+^+(x_0) = 1$, $f^-(x_0) = 0$, $f_-^-(x_0) = 2$. Theo Định lý 3.1.2,

$$\partial F(x_0) = \big[0,1\big] \cup \big[2,3\big].$$

Hệ quả 3.1.1. *Ngoài các giả thiết của Định lý 3.1.2, giả sử rằng $\widehat{\partial} F(x) \neq \emptyset$. Khi đó ta có*

$$\partial F(x) = \Big[f^-(x), f^+(x)\Big],$$

và do đó $\partial F(x) = \partial^{Cl} F(x)$.

Chứng minh. Giả sử $\widehat{\partial} F(x) \neq \emptyset$. Lấy $x^* \in \widehat{\partial} F(x)$. Ta có

$$\begin{cases} \liminf\limits_{u \to x^+} \dfrac{\int\limits_x^u f(t)dt}{u - x} \geqslant x^* \\ \limsup\limits_{u \to x^-} \dfrac{\int\limits_x^u f(t)dt}{u - x} \leqslant x^*. \end{cases} \tag{3.13}$$

Với $\delta > 0$ được lấy tuỳ ý, tồn tại $\varepsilon > 0$ và $M \in \mathbb{R}$ sao cho

$$M < f_+^+(x) + \delta \text{ và } f(x') \leqslant M \text{ h.k.n. trên } [x, x+\varepsilon].$$

Từ đó suy ra

$$f(x') \leqslant f_+^+(x) + \delta \text{ h.k.n. trên } [x, x+\varepsilon].$$

Do đó,

$$\liminf_{u \to x^+} \frac{\int\limits_x^u f(t)dt}{u - x} \leqslant f_+^+(x) + \delta.$$

Vì $\delta > 0$ được lấy tuỳ ý nên

$$\liminf_{u \to x^+} \frac{\int\limits_x^u f(t)dt}{u - x} \leqslant f_+^+(x). \tag{3.14}$$

Tương tự,

$$f_-^-(x) \leqslant \limsup_{u \to x^-} \frac{\int\limits_x^u f(t)dt}{u - x}. \tag{3.15}$$

Từ (3.13)-(3.15) ta suy ra $f_-^-(x) \leqslant f_+^+(x)$. Do đó, theo Định lý 3.1.2, $\partial F(x) = \Big[f^-(x), f^+(x)\Big]$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét 3.1.2. Từ Hệ quả 3.1.1 ta suy ra rằng nếu dưới vi phân Mordukhovich $\partial F(x)$ là một tập không lồi thì $\widehat{\partial} F(x) = \emptyset$.

Ví dụ 3.1.3. Xét hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ở trong Ví dụ 2.1.1. Như chúng ta đã biết, f là một hàm số Lipschitz trên $[a, b]$ và khả vi Fréchet tại mọi điểm thuộc khoảng (a,b). Đặt $F(x)=\int_a^x f'(t)dt$ $(x\in[a,b])$. Ta có $f(x)=f(a)+F(x)$ với mọi $x\in[a,b]$. Do đó,

$$\partial^{Cl}F(x)=\partial^{Cl}f(x),\quad \partial F(x)=\partial f(x),$$

và

$$\widehat{\partial}F(x)=\widehat{\partial}f(x)=\{f'(x)\}$$

với mọi $x\in(a,b)$. Vì f là một hàm Lipschitz trên $[a,b]$ nên $f'(x)\in L_\infty[a,b]$. Theo Hệ quả 3.1.1, $\partial F(x)=\partial^{Cl}F(x)$ với mọi $x\in(a,b)$. Từ Ví dụ 2.1.1 ta có

$$\partial^{Cl}f(x)=\begin{cases}[-1,1] & \text{nếu } \ x\in P\cap(a,b),\\ \{f'(x)\} & \text{nếu } \ x\in A.\end{cases}$$

Do đó,

$$\partial f(x)=\begin{cases}[-1,1] & \text{nếu } \ x\in P\cap(a,b),\\ \{f'(x)\} & \text{nếu } \ x\in A.\end{cases}$$

Hệ quả 3.1.2. *Giả sử $\varphi : I\to\mathbb{R}$ là một hàm số Lipschitz địa phương trên một khoảng mở I của $\mathbb{R}$, $x\in I$, và $\widehat{\partial}\varphi(x)\neq\emptyset$. Khi đó, $\partial\varphi(x)=\partial^{Cl}\varphi(x)$.*

Chứng minh. Vì I là một khoảng mở của $\mathbb{R}$ nên tồn tại $a,b\in I$ sao cho $a<x<b$. Do φ là Lipschitz địa phương trên I, φ là Lipschitz trên $[a,b]$ và tồn tại đạo hàm φ' hầu khắp nơi trên $[a,b]$ (theo Định lý Rademacher). Từ đó ta suy ra rằng $f:=\varphi'\in L_\infty[a,b]$, $\varphi(u)=\varphi(a)+F(u)$ (với $F(u)=\int_a^u f(t)dt$), $\partial^{Cl}F(x)=\partial^{Cl}\varphi(x)$, $\partial F(x)=\partial\varphi(x)$, và $\widehat{\partial}F(x)=\widehat{\partial}\varphi(x)\neq\emptyset$. Theo Hệ quả 3.1.1, $\partial\varphi(x)=\partial^{Cl}\varphi(x)$. $\square$

Ký hiệu *dưới vi phân đối xứng* (symmetric subdifferential) của hàm số φ tại x bởi $\partial^0\varphi(x):=\partial\varphi(x)\cup[-\partial(-\varphi)(x)]$ (xem [46, tr. 84, tập I]). Vì $\partial\varphi(x)\subset\partial^0\varphi(x)\subset\partial^{Cl}\varphi(x)$ và nếu φ là khả vi Fréchet tại x thì $\widehat{\partial}\varphi(x)=\{\varphi'(x)\}\neq\emptyset$, nên từ Hệ quả 3.1.2 ta thu lại được kết quả thú vị sau đây của J. M. Borwein và X. Wang.

Hệ quả 3.1.3 ([13, Theorem 1]). *Cho I là một khoảng mở của $\mathbb{R}$ và $\varphi : I \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi và Lipschitz địa phương. Khi đó, $\partial\varphi(x) = \partial^{Cl}\varphi(x) = \partial^0\varphi(x)$.*

3.2 Dưới vi phân của phiếm hàm tích phân trên không gian $L_1(\Omega; E)$

Nếu không nói gì thêm, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo không nguyên tử $\sigma-$hữu hạn đầy đủ, E là một không gian Banach khả ly và $f : \Omega \times E \to \bar{\mathbb{R}}$ là một hàm $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$đo được.

Kết quả chính của mục này là các công thức tính chính xác dưới vi phân Fréchet và dưới vi phân Mordukhovich của phiếm hàm tích phân có dạng

$$F(u) = \int_\Omega f(\omega, u(\omega))d\mu(\omega) \quad (u \in L_1(\Omega; E)). \tag{3.16}$$

Lưu ý rằng bài toán tính toán hoặc ước lượng dưới vi phân Mordukhovich $\partial F(u)$, với $u \in L_p(\Omega; E)$ $(p > 1)$, cho đến nay vẫn là một bài toán mở.

Giả sử $\mathcal{F}$ là một tập con của $L_0(\Omega; \bar{\mathbb{R}})-$không gian các hàm đo được từ Ω vào $\bar{\mathbb{R}}$. Theo [31, tr. 65], *hàm infimum cốt yếu* (essential infimum) $\operatorname*{ess\,inf}_{v\in\mathcal{F}} v$ của $\mathcal{F}$ là một hàm đo được từ Ω vào $\bar{\mathbb{R}}$ thoả mãn các điều kiện sau:

(i) với mỗi $u \in \mathcal{F}$, $\operatorname*{ess\,inf}_{v\in\mathcal{F}} v \le u$ hầu khắp nơi;

(ii) nếu $\tilde{u} : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ là một hàm đo được sao cho với mỗi $u \in \mathcal{F}$ ta có $\tilde{u} \le u$ hầu khắp nơi, thì $\tilde{u} \le \operatorname*{ess\,inf}_{v\in\mathcal{F}} v$ hầu khắp nơi.

Sự tồn tại và tính duy nhất của hàm $\operatorname*{ess\,inf}_{v\in\mathcal{F}} v$ cho trường hợp μ là độ đo hữu hạn đã được chứng minh, ví dụ như ở trong [63, tr. 43 - 44]. Từ kết quả này ta suy ra ngay sự tồn tại và tính duy nhất của $\operatorname*{ess\,inf}_{v\in\mathcal{F}} v$ cho trường hợp độ đo μ là $\sigma-$hữu hạn. Có thể tìm hiểu thêm thông tin chi tiết về hàm $\operatorname*{ess\,inf}_{v\in\mathcal{F}} v$ và các ứng dụng của nó ở trong các tài liệu [15], [31], [63].

Nếu tồn tại một phần tử $v_0 \in \mathcal{F}$ sao cho với mỗi $v \in \mathcal{F}$ ta có $v \geq v_0$ hầu khắp nơi, thì hiển nhiên $\operatorname*{ess\,inf}_{v\in\mathcal{F}} v = v_0$ hầu khắp nơi.

Định nghĩa 3.2.1 (xem [31]). (i) Hàm $s : \Omega \to E$ được gọi là hàm đơn giản nếu nó có thể biểu diễn được dưới dạng

$$s = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{A_i},$$

ở đây $m \in \mathbb{N}$, $c_i \in E$, $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, ..., m)$ đôi một rời nhau, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $\chi_A(\omega) = 1$ nếu $\omega \in A$ và $\chi_A(\omega) = 0$ nếu $\omega \in X \backslash A$.

(ii) Hàm $u : \Omega \to E$ được gọi là đo được mạnh nếu tồn tại một dãy các hàm đơn giản $s_k : \Omega \to E$ sao cho

$$\lim_{k\to\infty} \|s_k(\omega) - u(\omega)\|_E = 0 \quad \text{h.k.n.}$$

(iii) Hàm đơn giản $s : \Omega \to E$ được gọi là khả tích Bochner nếu ta có thể biểu diễn nó dưới dạng

$$s = \sum_{i=1}^{m} c_i \chi_{A_i},$$

ở đây $m \in \mathbb{N}$, $c_i \in E$, $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, ..., m)$ đôi một rời nhau, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $c_i = 0$ nếu $\mu(A_i) = \infty$. Với mỗi $A \in \mathcal{A}$, tích phân Bochner của s trên A được định nghĩa bởi công thức

$$\int_A s d\mu := \sum_{i=1}^{m} \mu(A \cap A_i) c_i,$$

ở đây $\mu(A \cap A_i)c_i := 0$ nếu $c_i = 0$ và $\mu(A \cap A_i) = \infty$.

(iv) Hàm đo được mạnh $u : \Omega \to E$ được gọi là khả tích Bochner nếu tồn tại một dãy các hàm đơn giản $s_k : \Omega \to E$ khả tích Bochner sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} \int_\Omega \|s_k - u\| d\mu = 0$ và $\lim\limits_{k\to\infty} \|s_k(\omega) - u(\omega)\|_E = 0$ hầu khắp nơi.

Với $A \in \mathcal{A}$, tích phân Bochner của u trên A được định nghĩa bởi

$$\int_A u d\mu := \lim_{k\to\infty} \int_A s_k d\mu.$$

Ký hiệu bởi $L_1(\Omega; E)$ không gian tất cả các hàm $u : \Omega \to E$ khả tích Bochner trên Ω và được trang bị chuẩn $\|u\| := \int_\Omega \|u(\omega)\| d\mu$ với mọi $u \in L_1(\Omega; E)$.

Sử dụng Định lý 3.8 ở [15] trong trường hợp $X = L_1(\Omega; E)$ và $M : \Omega \rightrightarrows E$ là ánh xạ đa trị cho bởi $M(\omega) = E$ với mọi $\omega \in \Omega$, ta có

$$\operatorname*{ess\,inf}_{u\in L_1(\Omega;E)} f(u)(\omega) = \inf_{e\in E} f(\omega, e) \quad \text{h.k.n.}, \tag{3.17}$$

ở đây $f(u)(\omega) := f(\omega, u(\omega))$.

Với mỗi $u \in L_1(\Omega; E)$, đặt

$$\begin{aligned} &I_f(u) = \textstyle\int_\Omega^* f(\omega, u(\omega)) d\mu \\ &:= \inf \Big\{ \textstyle\int_\Omega v(\omega) d\mu \mid v \in L_1(\Omega; \mathbb{R}), v(\omega) \geq f(\omega, u(\omega)) \quad \text{h.k.n.} \Big\}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Nếu $\omega \mapsto f(\omega, u(\omega))$ là một hàm khả tích trên Ω thì hiển nhiên $I_f(u) = F(u)$, ở đó $F(u)$ được cho bởi (3.16).

Các phiếm hàm tích phân có dạng (3.18) đã và đang được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu (xem [15], [16], [23], [25], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [54], [56] và các tài liệu dẫn ra trong đó). Nói riêng ra, nhiều kết quả thú vị về phiếm hàm tích phân dạng (3.18) có ở trong các công trình của E. Giner. Sau đây là một trong số những kết quả như vậy.

Định lý 3.2.1 (xem [32]). *Giả sử x là một điểm cực tiểu địa phương của phiếm hàm $I_f(\cdot)$ trên $L_1(\Omega; E)$ và $f(x) \in L_1(\Omega; \mathbb{R})$. Khi đó, với mỗi $u \in L_1(\Omega; E)$, ta có $f(\omega, x(\omega)) \leq f(\omega, u(\omega))$ hầu khắp nơi.*

Hàm $v : \Omega \to E^*$ được gọi là *đo được yếu** nếu với mỗi $e \in E$, hàm số $\Omega \ni \omega \mapsto \langle v(\omega), e\rangle$ là đo được; xem [28, Definition 2.101(iii)]. Ký hiệu bởi $L_\infty^w(\Omega; E^*)$ không gian tất cả các hàm đo được yếu* $v : \Omega \to E^*$ sao cho hàm $\Omega \ni \omega \mapsto \|v(\omega)\|$ thuộc $L_\infty(\Omega; \mathbb{R})$. Không gian $L_\infty^w(\Omega; E^*)$ được trang bị chuẩn $\|v\|_{L_\infty^w(\Omega;E^*)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|v(\omega)\|$, ở đây

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \|v(\omega)\| = \inf\{\alpha > 0 \mid \|v(\omega)\| < \alpha \quad \text{h.k.n.}\};$$

xem [31, Definition 2.111].

Kết quả sau đây đã được I. Fonseca và G. Leoni phát biểu và chứng minh trong [31]. Tuy nhiên, chứng minh ở đó không chặt chẽ. Vì vậy, dưới đây sẽ trình một chứng minh mới của tác giả luận án. (Chứng minh khá dài này đã được Giáo sư I. Fonseca và Giáo sư G. Leoni công nhận và đưa lên các trang web liên quan đến cuốn sách nói trên: http://www.math.cmu.edu/~ leoni/ book1, http://www.math.cmu.edu/~ leoni/Typos.pdf, http://www.math.cmu.edu/~ leoni /notes.pdf.)

Định lý 3.2.2 (xem [31, Theorem 2.112]). *Giả sử $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo $\sigma-$hữu hạn và E là một không gian Banach khả ly. Khi đó:*

(i) Nếu $T \in (L_1(\Omega; E))^*$ thì tồn tại duy nhất một phần tử $v \in L_\infty^w(\Omega; E^*)$ sao cho

$$T(u) = \int_\Omega \langle v(\omega), u(\omega)\rangle d\mu \tag{3.19}$$

với mọi $u \in L_1(\Omega; E)$. Hơn thế, $\|T\| = \|v\|_{L^w_\infty(\Omega;E^*)}$.

(ii) Mọi phiếm hàm T có dạng (3.19), ở đó $v \in L^w_\infty(\Omega; E^*)$, là phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $L_1(\Omega; E)$.

Chứng minh. (i) Lấy $T \in (L_1(\Omega; E))^*$. Vì E là không gian khả ly nên tồn tại $\{e_n\} \subset E\backslash\{0\}$ sao cho $\overline{\{e_n\}} = E$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $\tau_n(u) = T(ue_n)$ với mọi $u \in L_1(\Omega) = L_1(\Omega; \mathbb{R})$. Ta có $\tau_n \in (L_1(\Omega))^*$ và

$$\|\tau_n\|_{(L_1(\Omega))^*} = \sup_{u \in L_1(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{|T(ue_n)|}{\|u\|_{L_1(\Omega)}} \leq \|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*}\|e_n\|_E < \infty.$$

Theo [28, Corollary 2.41], tồn tại duy nhất $v_{e_n} \in L_\infty(\Omega)$ sao cho

$$T(ue_n) = \int_\Omega v_{e_n}(\omega)u(\omega)d\mu \quad \forall u \in L_1(\Omega). \tag{3.20}$$

Ta có

$$\|v_{e_n}\|_{L_\infty(\Omega)} = \|\tau_n\|_{(L_1(\Omega))^*} \leq \|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*}\|e_n\|_E. \tag{3.21}$$

Tương tự, với mỗi $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ và mỗi $i, j, k \in \mathbb{N}$, tồn tại duy nhất phần tử $v_{\alpha e_i+\beta e_j+\gamma e_k} \in L_\infty(\Omega)$ sao cho

$$T(u(\alpha e_i + \beta e_j + \gamma e_k)) = \int_\Omega v_{\alpha e_i+\beta e_j+\gamma e_k}(\omega)u(\omega)d\mu \quad \forall u \in L_1(\Omega).$$

Ta có $\|v_{\alpha e_i+\beta e_j+\gamma e_k}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*}\|\alpha e_i + \beta e_j + \gamma e_k\|_E$. Vì phần tử $v_{\alpha e_i+\beta e_j+\gamma e_k}$ là duy nhất và T là tuyến tính nên

$$\alpha v_{e_i}(\omega) + \beta v_{e_j}(\omega) + \gamma v_{e_k}(\omega) = v_{\alpha e_i+\beta e_j+\gamma e_k}(\omega) \quad \text{h.k.n.} \tag{3.22}$$

Do đó,

$$\|\alpha v_{e_i} + \beta v_{e_j} + \gamma v_{e_k}\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*}\|\alpha e_i + \beta e_j + \gamma e_k\|_E. \tag{3.23}$$

Đặt

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} \ = \Big\{ & \omega \in \Omega \ \mid \ \alpha v_{e_i}(\omega) + \beta v_{e_j}(\omega) + \gamma v_{e_k}(\omega) = v_{\alpha e_i + \beta e_j + \gamma e_k}(\omega), \\ & |\alpha v_{e_i}(\omega) + \beta v_{e_j}(\omega) + \gamma v_{e_k}(\omega)| \le \|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*} \|\alpha e_i + \beta e_j + \gamma e_k\|_E, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall i, j \in \mathbb{N}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \Big\}.\end{aligned}$$

Từ (3.22) và (3.23) suy ra $\tilde{\Omega} \in \mathcal{A}$ và $\mu(\Omega \setminus \tilde{\Omega}) = 0$. Lấy $e \in E$ bất kỳ. Vì $\{e_n\}$ trù mật trong E nên tồn tại một dãy $\{e_{n_j}\}$ hội tụ đến e. Với mỗi $\omega \in \tilde{\Omega}$, $\{v_{e_{n_j}}(\omega)\}$ là một dãy Cauchy trong $\mathbb{R}$. Do đó $\{v_{e_{n_j}}(\omega)\}$ hội tụ đến một phần tử $\tilde{v}_e(\omega) \in \mathbb{R}$. Rõ ràng $\tilde{v}_e(\omega)$ không phụ thuộc vào việc chọn dãy $\{e_{n_j}\}$, miễn là $\{e_{n_j}\}$ hội tụ đến e. Vì $\omega \in \tilde{\Omega}$ nên $|v_{e_{n_j}}(\omega)| \le \|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*} \|e_{n_j}\|_E$ với mọi $j \in \mathbb{N}$. Cho $j \to \infty$, ta có $|\tilde{v}_e(\omega)| \le \|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*} \|e\|_E$ với mọi $\omega \in \tilde{\Omega}$. Do đó $\tilde{v}_e \in L_\infty(\Omega)$. Với $e = \alpha e_n + \beta e_m$, ở đây $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ và $m, n \in \mathbb{N}$, ta có $\tilde{v}_e(\omega) = v_{\alpha e_n + \beta e_m}(\omega)$ với mọi $\omega \in \tilde{\Omega}$. Thật vậy, lấy $\omega \in \tilde{\Omega}$ và giả sử $\{e_{n_j}\}$ là một dãy hội tụ đến $e = \alpha e_n + \beta e_m$ khi $j \to \infty$. Vì $\omega \in \tilde{\Omega}$ nên

$$|v_{e_{n_j}}(\omega) - (\alpha v_{e_n}(\omega) + \beta v_{e_m}(\omega))| \le \|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*} \|e_{n_j} - (\alpha e_n + \beta e_m)\|_E \quad \forall j.$$

Từ đó ta suy ra $\lim\limits_{j \to \infty} v_{e_{n_j}}(\omega) = \alpha v_{e_n}(\omega) + \beta v_{e_m}(\omega)$. Điều này chứng tỏ $\tilde{v}_e(\omega) = v_{\alpha e_n + \beta e_m}(\omega)$ với mọi $\omega \in \tilde{\Omega}$. Nói riêng ra, $\tilde{v}_{e_n}(\omega) = v_{e_n}(\omega)$ với mọi $\omega \in \tilde{\Omega}$. Với mỗi $e \in E$, đặt

$$v_e(\omega) = \begin{cases} \tilde{v}_e(\omega) & \text{nếu } \omega \in \tilde{\Omega}, \\ 0 & \text{nếu } \omega \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}. \end{cases}$$

Lấy $e, \tilde{e} \in E$ bất kỳ. Giả sử các dãy $\{e_{n_j}\}$ và $\{e_{\tilde{n}_j}\}$ tương ứng hội tụ đến e và $\tilde{e}$. Ta có $|v_{e_{n_j}}(\omega) - v_{e_{\tilde{n}_j}}(\omega)| \le \|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*} \|e_{n_j} - e_{\tilde{n}_j}\|_E$ với mọi $j \in \mathbb{N}$ và mọi $\omega \in \tilde{\Omega}$. Cho $j \to \infty$, ta nhận được

$$|v_e(\omega) - v_{\tilde{e}}(\omega)| \le \|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*} \|e - \tilde{e}\|_E \quad \forall \omega \in \tilde{\Omega}. \tag{3.24}$$

Từ đó suy ra rằng với mỗi $\omega \in \tilde{\Omega}$, $E \ni e \mapsto v_e(\omega)$ là hàm liên tục. Với $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tồn tại $(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sao cho $(\alpha_j, \beta_j) \to (\alpha, \beta)$ khi $j \to \infty$. Lấy tùy ý $\omega \in \tilde{\Omega}$. Ta có $\alpha_j v_{e_{n_j}}(\omega) + \beta_j v_{e_{\tilde{n}_j}}(\omega) = v_{\alpha_j e_{n_j} + \beta_j e_{\tilde{n}_j}}(\omega)$ với mọi $j \in \mathbb{N}$. Vì $E \ni e \mapsto v_e(\omega)$ là hàm liên tục nên lấy giới hạn ở hai vế của đẳng thức trên khi $j \to \infty$, ta thu được $\alpha v_e(\omega) + \beta v_{\tilde{e}}(\omega) = v_{\alpha e + \beta \tilde{e}}(\omega)$. Như vậy, với mỗi $\omega \in \tilde{\Omega}$, $E \ni e \mapsto v_e(\omega)$ là một ánh xạ tuyến tính liên tục. Trong công thức (3.20) thay n bởi n_j và cho $j \to \infty$, ta có

$$T(ue) = \int_\Omega v_e(\omega) u(\omega) d\mu \quad \forall u \in L_1(\Omega). \tag{3.25}$$

Xét hàm $v : \Omega \to E^*$ được cho bởi công thức $v(\omega) : E \to \mathbb{R},\ e \mapsto v_e(\omega)$. Do với mỗi $\omega \in \tilde{\Omega}$ ánh xạ $v(\omega)(\cdot)$ là tuyến tính liên tục và do tính trù mật của dãy $\{e_n\}$ trong E, từ (3.21) ta suy ra rằng

$$\|v(\omega)\|_{E^*} = \sup_n \frac{|\langle v(\omega), e_n\rangle|}{\|e_n\|_E} = \sup_n \frac{|v_{e_n}(\omega)|}{\|e_n\|_E} \le \|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*}$$

với mọi $\omega \in \tilde{\Omega}$. Mặt khác, với mỗi $e \in E$ ánh xạ $\Omega \ni \omega \mapsto \langle v(\omega), e\rangle = v_e(\omega)$ là đo được. Do đó, v là đo được yếu*. Ta có

$$\|v\|_{L^w_\infty(\Omega;E^*)} = \operatorname*{ess\,sup}_\omega \|v(\omega)\|_{E^*} = \operatorname*{ess\,sup}_\omega \left(\sup_n \frac{|v_{e_n}(\omega)|}{\|e_n\|_E}\right) \le \|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*}.$$

Vì $\{e_n\}$ trù mật trong E nên, theo [31, Theorem 2.110 (i)], tập hợp $\mathcal{S}$ gồm các hàm đơn giản khả tích có dạng

$$s = \sum_{i=1}^n \chi_{F_i} c_i e_i, \tag{3.26}$$

ở với $c_i \in \mathbb{R}$ và $F_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, ..., n)$, là trù mật trong $L_1(\Omega; E)$. Do đó,

$$\|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*} = \sup_{s \in \mathcal{S}\setminus\{0\}} \frac{|T(s)\|}{\|s\|_{L_1(\Omega;E)}}.$$

Lấy bất kỳ $s \in \mathcal{S}$ có dạng (3.26). Theo (3.25) và bất đẳng thức Hölder,

$$\begin{aligned} |T(s)| &= \Big| \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} c_i v_{e_i} d\mu \Big| \le \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} |c_i| \ \|e_i\|_E \tfrac{|v_{e_i}(\omega)|}{\|e_i\|_E} d\mu \\ &\le \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^{n} \chi_{F_i}(\omega) \ |c_i| \ \|e_i\|_E \Big) \sup_k \tfrac{|v_{e_k}(\omega)|}{\|e_k\|_E} d\mu \\ &\le \|s\|_{L_1(\Omega;E)} \operatorname*{ess\,sup}_\omega \Big(\sup_k \tfrac{|v_{e_k}(\omega)|}{\|e_k\|_E} \Big). \end{aligned}$$

Vì vậy,

$$\|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*} = \sup_{s \in \mathcal{S} \setminus \{0\}} \frac{|T(s)|}{\|s\|_{L_1(\Omega;E)}} \le \operatorname*{ess\,sup}_\omega \Big(\sup_k \frac{|v_{e_k}(\omega)|}{\|e_k\|_E} \Big) = \|v\|_{L^w_\infty(\Omega;E^*)}.$$

Điều đó chứng tỏ rằng $\|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*} = \|v\|_{L^w_\infty(\Omega;E^*)}$.

Giả sử $s \in \mathcal{S}$ có dạng (3.26). Do với mỗi $\omega \in \tilde{\Omega}$, ánh xạ $E \ni e \mapsto v_e(\omega)$ là tuyến tính,

$$\begin{aligned} T(s) &= \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} c_i v_{e_i}(\omega) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} v_{c_i e_i}(\omega) d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{F_i} v_{s(\omega)}(\omega) d\mu \\ &= \int_\Omega v_{s(\omega)}(\omega) d\mu = \int_\Omega v(\omega)(s(\omega)) d\mu = \int_\Omega \langle v(\omega), s(\omega) \rangle d\mu. \end{aligned}$$

Lấy bất kỳ $u \in L_1(\Omega; E)$. Khi đó tồn tại $\{s_j\} \subset \mathcal{S}$ sao cho

$$\lim_{j \to \infty} \|s_j - u\|_{L_1(\Omega;E)} = 0.$$

Ta có

$$T(u) = \lim_{j \to \infty} T(s_j) = \lim_{j \to \infty} \int_\Omega v_{s_j(\omega)}(\omega) d\mu.$$

Từ (3.24) suy ra

$$|v_{s_j(\omega)}(\omega) - v_{u(\omega)}(\omega)| \le \|T\|_{(L_1(\Omega;E))^*} \|s_j(\omega) - u(\omega)\|_E$$

với mọi $\omega \in \tilde{\Omega}$. Do đó

$$T(u) = \int_\Omega v_{u(\omega)}(\omega) d\mu = \int_\Omega \langle v(\omega), u(\omega) \rangle d\mu,$$

và (i) được chứng minh.

(ii) Giả sử $v \in L^w_\infty(\Omega; E^*)$ và T là phiếm hàm có dạng (3.19). Khi đó, phiếm hàm tuyến tính T là liên tục trên $L_1(\Omega; E)$. Thật vậy, vì $v \in L^w_\infty(\Omega; E^*)$ nên tồn tại $M > 0$ sao cho $\|v(\omega)\|_{E^*} \leq M$ hầu khắp nơi. Do đó,

$$\begin{aligned} |T(u)| &= \Big| \int_\Omega \langle v(\omega), u(\omega)\rangle d\mu \Big| \leq \int_\Omega |\langle v(\omega), u(\omega)\rangle| d\mu \\ &\leq \int_\Omega \|v(\omega)\|_{E^*} \|u(\omega)\|_E d\mu \leq M\|u\| \end{aligned}$$

với mọi $u \in L(\Omega; E)$. Điều này chứng tỏ T là một phiếm hàm tuyến tính liên tục. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét 3.2.1. Để chứng minh phần (i) của Định lý 3.2.2 chúng ta đã dùng ý tưởng của phép chứng minh trong [31, Theorem 2.112(i)]: dựa vào tính chất khả ly của không gian E và định lý biểu diễn Riesz cho trường hợp $E = \mathbb{R}$ để xây dựng $v \in L^w_\infty(\Omega, E^*)$ thoả mãn yêu cầu của định lý. Khi chứng minh $v(\omega) \in E^*$, các tác giả của [31] đã khẳng định tính tuyến tính trước và sau đó suy ra tính liên tục của $v(\omega)$ (không có chứng minh chặt chẽ), trong khi đó ở đây tác giả luận án chứng minh tính liên tục trước và sử dụng tính liên tục để chứng minh tính tuyến tính.

Mệnh đề sau đây đóng vai trò then chốt trong chứng minh Định lý 3.2.3.

Mệnh đề 3.2.1. *Giả sử $I_f(\cdot) : L_1(\Omega; E) \to \bar{\mathbb{R}}$ là hàm số được cho bởi công thức (3.18) và $x \in L_1(\Omega; E)$ thoả mãn $f(x) \in L_1(\Omega; \mathbb{R})$. Khi đó*

$$\begin{aligned} \widehat{\partial}_\varepsilon I_f(x) &= \Big\{ x^* \in L^w_\infty(\Omega; E^*) \mid \inf_{e \in E} g_\varepsilon(\omega, e, x^*(\omega)) \geq 0 \quad h.k.n. \Big\} \\ &= \Big\{ x^* \in L^w_\infty(\Omega; E^*) \mid I_f(u) - I_f(x) - \langle x^*, u - x\rangle \\ &\qquad\qquad \geq -\varepsilon\|u - x\| \quad \forall u \in L_1(\Omega; E) \Big\}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

với $g_\varepsilon(\omega, e, e^*) := f(\omega, e) - f(\omega, x(\omega)) - \langle e^*, e - x(\omega)\rangle + \varepsilon\|e - x(\omega)\|$, $\omega \in \Omega$, $e \in E$, $e^* \in E^*$, $\varepsilon \geq 0$.

Chứng minh. Giả sử $\varepsilon \geq 0$ và $x^* \in \widehat{\partial}_\varepsilon I_f(x)$. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, tồn tại $\delta_k > 0$ sao cho

$$I_f(u) - I_f(x) - \langle x^*, u - x\rangle + (\varepsilon + k^{-1})\|u - x\| \geq 0,$$

với mọi $u \in \mathbb{B}(x, \delta_k) := \{v \in L_1(\Omega; E) \mid \|v - x\| \leq \delta_k\}$. Ta có

$$\Big(L_1(\Omega; E)\Big)^* = L_\infty^w(\Omega; E^*) \quad \text{và} \quad \langle u^*, u\rangle = \int_\Omega \langle u^*(\omega), u(\omega)\rangle d\mu,$$

với mọi $u^* \in L_\infty^w(\Omega; E^*)$ và $u \in L_1(\Omega; E)$. Do $f(x) \in L_1(\Omega; E)$, x là một cực tiểu địa phương của hàm $I(\cdot)$ xác định bởi

$$\begin{aligned} I(u) &= I_f(u) - I_f(x) - \langle x^*, u - x\rangle + (\varepsilon + k^{-1})\|u - x\| \\ &= \textstyle\int_\Omega^* h(\omega, u(\omega))d\mu \quad (u \in L_1(\Omega; E)), \end{aligned}$$

ở đây

$$h(\omega, e) := f(\omega, e) - f(\omega, x(\omega)) - \langle x^*(\omega), e - x(\omega)\rangle + (\varepsilon + k^{-1})\|e - x(\omega)\|$$

với mọi $(\omega, e) \in \Omega \times E$. Vì f là một hàm $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$đo được, nên h cũng là $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$đo được. Với mỗi $u \in L_1(\Omega; E)$, theo Định lý 3.2.1 ta có

$$h(\omega, x(\omega)) \leq h(\omega, u(\omega)) \quad \text{h.k.n.}$$

Với mọi $u \in L_1(\Omega; E)$, nhờ tính chất $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$đo được của h, hàm số $\Omega \ni \omega \mapsto h(u)(\omega) := h(\omega, u(\omega))$ là $\mathcal{A}-$đo được. Do đó,

$$\operatorname*{ess\,inf}_{u \in L_1(\Omega; E)} h(u)(\omega) = h(\omega, x(\omega)) \quad \text{h.k.n.}$$

Theo (3.17),

$$\operatorname*{ess\,inf}_{u \in L_1(\Omega; E)} h(u)(\omega) = \inf_{e \in E} h(\omega, e) \quad \text{h.k.n.}$$

Từ đó suy ra

$$\inf_{e \in E} h(\omega, e) = h(\omega, x(\omega)) \quad \text{h.k.n.},$$

nghĩa là, với mỗi $k \in \mathbb{N}$ tồn tại $\Omega_k \in \mathcal{A}$, $\mu(\Omega_k) = 0$, sao cho

$$f(\omega, e) - f(\omega, x(\omega)) - \langle x^*(\omega), e - x(\omega)\rangle + (\varepsilon + k^{-1})\|e - x(\omega)\| \geq 0,$$

với mọi $\omega \in \Omega \backslash \Omega_k$, $e \in E$. Đặt $\Omega_{x^*} = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$. Ta có $\mu(\Omega_{x^*}) = 0$ và

$$f(\omega, e) - f(\omega, x(\omega)) - \langle x^*(\omega), e - x(\omega)\rangle + (\varepsilon + k^{-1})\|e - x(\omega)\| \geq 0,$$

với mọi $\omega \in \Omega \backslash \Omega_{x^*}$, $e \in E$, $k \in \mathbb{N}$. Cho $k \to \infty$, ta thu được

$$f(\omega, e) - f(\omega, x(\omega)) - \langle x^*(\omega), e - x(\omega)\rangle + \varepsilon\|e - x(\omega)\| \geq 0$$

với mọi $\omega \in \Omega \backslash \Omega_{x^*}$, $e \in E$. Do đó,

$$\inf_{e \in E} g_\varepsilon(\omega, e, x^*(\omega)) \geq 0 \quad \text{h.k.n.}$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$\widehat{\partial}_\varepsilon I_f(x) \subset \{x^* \in L^w_\infty(\Omega, E^*) \mid \inf_{e \in E} g_\varepsilon(\omega, e, x^*(\omega)) \geq 0 \quad \text{h.k.n.}\}.$$

Tiếp theo, chúng ta sẽ chứng minh rằng tập hợp ở vế phải của bao hàm thức này là tập con của tập hợp cuối cùng ở trong (3.27).

Lấy bất kỳ $x^* \in \{x^* \in L^w_\infty(\Omega, E^*) \mid \inf_{e \in E} g_\varepsilon(\omega, e, x^*(\omega)) \geq 0 \quad \text{h.k.n.}\}$. Khi đó, tồn tại $\Omega_{x^*} \in \mathcal{A}$ mà $\mu(\Omega_{x^*}) = 0$ sao cho

$$f(\omega, e) - f(\omega, x(\omega)) - \langle x^*(\omega), e - x(\omega)\rangle + \varepsilon\|e - x(\omega)\| \geq 0$$

với mọi $\omega \in \Omega \backslash \Omega_{x^*}$, $e \in E$. Do đó, với mọi $u \in L_1(\Omega; E)$ ta có

$$f(\omega, u(\omega)) - f(\omega, x(\omega)) - \langle x^*(\omega), u(\omega) - x(\omega)\rangle + \varepsilon\|u(\omega) - x(\omega)\| \geq 0 \quad \text{h.k.n.}$$

Vì $f(x) \in L_1(\Omega; \mathbb{R})$ nên

$$I_f(u) - I_f(x) - \langle x^*, u - x\rangle + \varepsilon\|u - x\| \geq 0 \tag{3.28}$$

với mọi $u \in L_1(\Omega; E)$. Điều này có nghĩa là x^* là một phần tử của tập hợp cuối cùng ở trong (3.27). Nếu $x^* \in L^w_\infty(\Omega; E^*)$ thoả mãn (3.28) thì hiển nhiên $x^* \in \widehat{\partial}_\varepsilon I_f(x)$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Kết quả chính của mục này được phát biểu như sau.

Định lý 3.2.3. *Giả sử $f : \Omega \times E \to \bar{\mathbb{R}}$ là một hàm $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$đo được thoả mãn $f(u) \in L_1(\Omega; \mathbb{R})$ với mọi $u \in L_1(\Omega; E)$, và F là hàm số cho bởi công thức (3.16). Khi đó*

$$\begin{aligned} &\partial F(x) = \widehat{\partial} F(x) = \partial^{Fen} F(x) \\ &= \Big\{ x^* \in L^w_\infty(\Omega; E^*) \mid \inf_{e \in E} g_0(\omega, e, x^*(\omega)) \geq 0 \quad h.k.n. \Big\}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

với $g_0(\omega, e, e^*) := f(\omega, e) - f(\omega, x(\omega)) - \langle e^*, e - x(\omega) \rangle$, $\omega \in \Omega$, $e \in E$, $e^* \in E^*$ và $x \in L_1(\Omega; E)$.

Chứng minh. Với mỗi $u \in L_1(\Omega; E)$, vì $f(u) \in L_1(\Omega; \mathbb{R})$ nên $F(u) = I_f(u)$. Theo Mệnh đề 3.2.1,

$$\widehat{\partial} F(x) = \partial^{Fen} F(x) = \Big\{ x^* \in L^w_\infty(\Omega; E^*) \mid \inf_{e \in E} g_0(\omega, e, x^*(\omega)) \geq 0 \quad \text{h.k.n.} \Big\}.$$

Hiển nhiên $\widehat{\partial} F(x) \subset \partial F(x)$. Bây giờ chúng ta sẽ chứng tỏ rằng

$$\partial F(x) \subset \partial^{Fen} F(x).$$

Lấy bất kỳ $x^* \in \partial F(x)$. Khi đó, tồn tại $\varepsilon_k \downarrow 0$, $x_k \xrightarrow{F} x$ và $x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$ sao cho $x_k^* \in \widehat{\partial}_{\varepsilon_k} F(x_k)$ với mọi $k \in \mathbb{N}$. Theo Mệnh đề 3.2.1,

$$F(u) - F(x_k) - \langle x_k^*, u - x_k \rangle + \varepsilon_k \|u - x_k\| \geq 0 \quad \forall u \in L_1(\Omega; E).$$

Cho $k \to \infty$, ta có

$$F(u) - F(x) - \langle x^*, u - x \rangle \geq 0 \quad \forall u \in L_1(\Omega; E).$$

Nghĩa là $x^* \in \partial^{Fen} F(x)$. Đó là điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét 3.2.2. 1) Dưới các giả thiết của Định lý 3.2.3, từ (3.29) suy ra rằng

$$\begin{aligned}\partial F(x) = \widehat{\partial} F(x) \quad &\subset \Big\{x^* \in L^w_\infty(\Omega; E^*) \mid x^*(\omega) \in \widehat{\partial} f(\omega, \cdot)(x(\omega)) \quad \text{h.k.n.}\Big\} \\ &\subset \Big\{x^* \in L^w_\infty(\Omega; E^*) \mid x^*(\omega) \in \partial f(\omega, \cdot)(x(\omega)) \quad \text{h.k.n.}\Big\},\end{aligned}$$

với mọi $x \in L_1(\Omega; E)$.

2) Nếu $E = \mathbb{R}^n$ thì $L^w_\infty(\Omega; E^*) = L_\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$, và do đó (3.29) trở thành

$$\begin{aligned}\partial F(x) \ &= \widehat{\partial} F(x) = \partial^{Fen} F(x) \\ &= \Big\{x^* \in L_\infty(\Omega; \mathbb{R}^n) \mid \inf_{e \in \mathbb{R}^n} g_0(\omega, e, x^*(\omega)) \geq 0 \quad \text{h.k.n.}\Big\}.\end{aligned}$$

3) Nếu $F : L_1(\Omega; E) \to \mathbb{R}$ được xác định bởi (3.16) là một hàm lồi thì, như chúng ta đã biết,

$$\partial F(x) = \widehat{\partial} F(x) = \partial^{Fen} F(x). \tag{3.30}$$

Công thức (3.29) cho thấy rằng (3.30) vẫn đúng khi ta không giả thiết F là lồi.

Ví dụ 3.2.1. Cho E là một không gian Banach khả ly không tầm thường (chẳng hạn, $E = \ell_p$ hoặc $E = L_p[0,1],\ 1 \leq p < \infty$). Giả sử $\Omega = [0,1],\ \mathcal{A}$ là $\sigma-$đại số các tập đo được Lebesgue của $[0,1]$, μ là độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}$, và $f : [0,1] \times E \to \mathbb{R}$ là hàm được xác định bởi $f(t,e) = |\sin(\|e\|)|$ với mọi $(t,e) \in [0,1] \times E$. Xét phiếm hàm tích phân

$$F(u) = \int_0^1 f(t, u(t))dt \quad (u \in L_1([0,1]; E)).$$

Ta có các tính chất sau đây:

(a) F là một hàm không lồi;

(b) $\partial F(0) = \widehat{\partial} F(0) = \partial^{Fen} F(0) = \{0\}$;

(c) $\Big\{x^* \in L^w_\infty([0,1]; E^*) \mid x^*(t) \in \widehat{\partial} f(t, \cdot)(0) \quad \text{h.k.n.}\Big\} = \mathbb{B}_{L^w_\infty([0,1];E^*)}$;

(d) $\Big\{x^* \in L^w_\infty([0,1]; E^*) \mid x^*(t) \in \partial f(t, \cdot)(0) \quad \text{h.k.n.}\Big\} = \mathbb{B}_{L^w_\infty([0,1];E^*)}$;

ở đây $\mathbb{B}_{L^w_\infty([0,1];E^*)} := \{x^* \in L^w_\infty([0,1];E^*) \mid \|x^*\|_{L^w_\infty([0,1];E^*)} \le 1\}$.

Thật vậy,

(a) Lấy $e_0 \in E$ sao cho $\|e_0\| = 1$. Đặt $u_1(t) = 0$ và $u_2(t) = \pi e_0$ $(t \in [0,1])$. Ta có $u_1, u_2 \in L_1([0,1];E)$, $F(u_1) = F(u_2) = 0$ và $F(\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2) = 1$. Do đó

$$F\Big(\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2\Big) > \frac{1}{2}F(u_1) + \frac{1}{2}F(u_2).$$

Điều này chứng tỏ rằng F không phải là một hàm lồi.

(b) Lấy bất kỳ $x^* \in \partial^{Fen}F(0)$. Theo Định lý 3.2.3, tồn tại tập $\Omega_{x^*} \in \mathcal{A}$ mà $\mu(\Omega_{x^*}) = 0$ sao cho

$$|\sin(\|e\|)| \ge \langle x^*(t), e\rangle \quad \forall e \in E,\ \forall t \in [0,1]\backslash\Omega_{x^*}.$$

Nói riêng ra,

$$\Big\langle x^*(t), \frac{\pi}{\|e\|}e\Big\rangle \le |\sin\pi| = 0 \quad \text{và} \quad \Big\langle x^*(t), -\frac{\pi}{\|e\|}e\Big\rangle \le |\sin\pi| = 0,$$

với mọi $t \in [0,1]\backslash\Omega_{x^*}$ và mọi $e \in E\backslash\{0\}$. Do đó $x^*(t) = 0$ hầu khắp nơi trên $[0,1]$, và $\partial^{Fen}F(0) \subset \{0\}$. Dễ thấy thấy rằng $0 \in \partial F^{Fen}(0)$. Từ đó suy ra $\partial^{Fen}F(0) = \{0\}$. Theo Định lý 3.2.3, $\partial F(0) = \widehat{\partial}F(0) = \partial^{Fen}F(0) = \{0\}$.

(c) Lấy bất kỳ $x^* \in L^w_\infty([0,1];E^*)$. Ta có

$$\begin{aligned} x^*(t) \in \widehat{\partial}f(t,\cdot)(0) \quad \text{h.k.n.} \quad &\Leftrightarrow \liminf_{e\to 0}\frac{|\sin(\|e\|)| - \langle x^*(t), e\rangle}{\|e\|} \ge 0 \quad \text{h.k.n.} \\ &\Leftrightarrow \|x^*(t)\| \le 1 \quad \text{h.k.n.} \end{aligned}$$

Nghĩa là

$$\Big\{x^* \in L^w_\infty([0,1];E^*) \mid x^*(t) \in \widehat{\partial}f(t,\cdot)(0) \quad \text{h.k.n.}\Big\} = \mathbb{B}_{L^w_\infty([0,1];E^*)}.$$

(d) Từ (c) suy ra

$$\mathbb{B}_{L^w_\infty([0,1];E^*)} \subset \Big\{x^* \in L^w_\infty([0,1];E^*) \mid x^*(t) \in \partial f(t,\cdot)(0) \quad \text{h.k.n.}\Big\}.$$

Chú ý rằng với mỗi $t \in [0,1]$, $f(t,\cdot)$ là một hàm số Lipschitz với hằng số Lipschitz $\ell = 1$. Do đó,

$$\Big\{x^* \in L^w_\infty([0,1],E^*) \mid x^*(t) \in \partial f(t,\cdot)(0) \quad \text{h.k.n.}\Big\} \subset \mathbb{B}_{L^w_\infty([0,1],E^*)}.$$

Đây là điều cần chứng minh.

Hệ quả 3.2.1. *Ngoài các giả thiết của Định lý 3.2.3, nếu giả sử thêm rằng F khả vi Fréchet và Lipschitz địa phương tại x, thì ta có*

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k^* - F'(x)\| = 0 \ \textit{ khi } \ x_k^* \in \partial F(x_k) \textit{ mà } \lim_{k\to\infty} x_k = x.$$

Do đó, F là khả vi liên tục nếu F là khả vi Fréchet và Lipschitz địa phương.

Chứng minh. Để chứng minh Hệ quả 3.2.1 chúng ta sẽ dùng lược đồ chứng minh của [8, Proposition 4.7]. Lấy bất kỳ $\gamma > 0$. Vì F khả vi Fréchet tại x nên tồn tại $\rho > 0$ sao cho

$$F(x+u) - F(x) - \langle F'(x), u\rangle \le \gamma\|u\| \quad \forall u \in \rho\mathbb{B}_{L_1(\Omega;E)}, \tag{3.31}$$

ở đây $\mathbb{B}_{L_1(\Omega;E)} = \{u \in L_1(\Omega;E) \mid \|u\| \le 1\}$. Vì $x_k^* \in \partial F(x_k)$ nên, theo Định lý 3.2.3,

$$\langle x_k^*, x+u-x_k\rangle \le F(x+u) - F(x_k) \ \ \forall u \in L_1(\Omega;E). \tag{3.32}$$

Chú ý rằng nếu $\|x_k^* - F'(x)\| \neq 0$ thì

$$\sup_{\|u\|=\rho} \langle x_k^* - F'(x), \rho^{-1}u\rangle = \|x_k^* - F'(x)\| > 2^{-1}\|x_k^* - F'(x)\|.$$

Do đó, với mỗi $k \in \mathbb{N}$ tồn tại $u_k \in L_1(\Omega;E)$ sao cho

$$\|u_k\| = \rho \quad \text{và} \quad \langle x_k^* - F'(x), u_k\rangle \ge 2^{-1}\rho\|x_k^* - F'(x)\|.$$

Thay $u = u_k$ vào (3.31) và (3.32) ta thu được

$$-\gamma\|u_k\| \le F(x) - F(x+u_k) + \langle F'(x), u_k\rangle$$

và

$$0 \le F(x+u_k) - F(x_k) - \langle x_k^*, x+u_k-x_k\rangle.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} -\gamma\rho &\le F(x) - F(x_k) + \langle F'(x) - x_k^*, u_k\rangle + \langle x_k^*, x_k - x\rangle \\ &\le F(x) - F(x_k) - 2^{-1}\rho\|x_k^* - F'(x)\| + \langle x_k^*, x_k - x\rangle. \end{aligned}$$

Kết hợp điều đó với tính bị chặn của dãy $\{x_k^*\}$ (lưu ý rằng F là hàm Lipschitz địa phương tại x), ta có $\limsup_{k\to\infty} \|x_k^* - F'(x)\| \le 2\gamma$. Do $\gamma > 0$ được lấy tuỳ ý, $\limsup_{k\to\infty} \|x_k^* - F'(x)\| = 0$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Xét bài toán tối ưu

$$(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} F(x) \longrightarrow \inf \\ x \in L_1(\Omega; E), \end{cases}$$

ở đây $F(x) = \int_\Omega f(\omega, x(\omega))d\mu(\omega) \quad (x \in L_1(\Omega; E))$ là một phiếm hàm tích phân thoả mãn các giả thiết của Định lý 3.2.3.

Hệ quả 3.2.2. *Điều kiện cần và đủ để x là một nghiệm địa phương của bài toán* (P) *là*

$$\min_{e\in E} f(\omega, e) = f(\omega, x(\omega)) \ \textit{hầu khắp nơi.}$$

Chứng minh. Giả sử x là một nghiệm địa phương của bài toán (P). Sử dụng qui tắc Fermat, ta có $0 \in \partial F(x)$. Do đó, theo Định lý 3.2.3, $\min_{e\in E} f(\omega, e) = f(\omega, x(\omega))$ hầu khắp nơi. Ngược lại, nếu $\min_{e\in E} f(\omega, e) = f(\omega, x(\omega))$ hầu khắp nơi thì với mọi $u \in L_1(\Omega, E)$, $f(\omega, u(\omega)) \ge f(\omega, x(\omega))$ hầu khắp nơi. Do đó x là một nghiệm của bài toán (P). $\square$

Chương 4

Miền giá trị của ánh xạ dưới vi phân

Tập giá trị của bất kỳ lát cắt nào của một ánh xạ đa trị cũng là tập con của miền giá trị của ánh xạ đa trị đó. Giả sử $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo và $F : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ đa trị. Như chúng ta đã biết, tích phân Aumann của F trên Ω là tập các tích phân trên Ω của các lát cắt khả tích của F. Do đó, việc nghiên cứu miền giá trị của một ánh xạ đa trị có thể cho chúng ta những thông tin hữu ích về tích phân của ánh xạ đa trị đó. Chẳng hạn, nếu μ là một độ đo hữu hạn và miền giá trị của F bị chặn thì mọi lát cắt đo được của F đều là lát cắt khả tích.

Trong chương này chúng ta nghiên cứu miền giá trị của ánh xạ dưới vi phân của hàm $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ chính thường nửa liên tục dưới và thoả mãn một điều kiện bức, ở đây X là một không gian Banach. Mục 4.1 được dành cho trường hợp f là hàm nửa liên tục dưới theo tôpô yếu. Định lý 4.1.1 đặc trưng tính phản xạ của X qua tính tràn của ánh xạ dưới vi phân Fréchet của f. Kết quả này bổ sung một kết quả tương tự của Borwein, Fitzpatrick và Vanderwerff [11], ở đó các tác giả đã đặc trưng tính chất phản xạ của không gian X qua tính tràn của ánh xạ dưới vi phân của các hàm lồi liên tục ở trên X thoả mãn điều kiện bức. Mục 4.2 được dành cho trường hợp X là một không gian Asplund và f là hàm nửa liên tục dưới theo tôpô sinh bởi chuẩn. Nguyên lý biến phân Ekeland và quy tắc tổng mờ (the fuzzy sum rule) cho dưới vi phân Fréchet trong các không gian Asplund là những công cụ chính trong việc nghiên cứu của chúng ta. Định lý 4.2.1 khẳng định rằng miền giá trị của ánh xạ dưới vi phân Fréchet $\widehat{\partial} f(\cdot)$ là trù mật trong X^*. Kết quả này mở rộng một phần kết quả tương ứng của Borwein và Preiss [12], ở đó các tác giả đã xét cho trường hợp không gian Banach X có một chuẩn trơn tương đương. Mục 4.3 trình bày một số kết quả về sự tồn tại điểm dừng và sự tồn tại nghiệm của bài toán nhiễu của một bài toán tối ưu phi tuyến trong không gian vô hạn chiều dưới tác động của nhiễu tuyến tính. Ngoài những kết quả ở mục 4.3 là mới bổ sung, các kết quả còn lại của chương này đã được công bố trên *Nonlinear Analysis Forum* [18].

4.1 Trường hợp không gian Banach phản xạ

Định lý sau đây đưa ra hai tính chất đặc trưng cho các không gian Banach phản xạ.

Định lý 4.1.1. *Cho X là một không gian Banach. Khi đó, các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) X là không gian phản xạ.

(ii) Với bất kỳ hàm chính thường nửa liên tục dưới yếu $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ thoả mãn điều kiện bức

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty, \tag{4.1}$$

ta có $\bigcup\limits_{x\in X} \widehat{\partial} f(x) = X^*$.

(iii) *Với bất kỳ tập đóng yếu và bị chặn* $\Omega \subset X$, *ta có* $\bigcup\limits_{x\in\Omega} \widehat{N}(x;\Omega) = X^*$.

Chứng minh. $(i) \Rightarrow (ii)$. Giả sử X là một không gian Banach phản xạ và $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm chính thường nửa liên tục dưới yếu thoả mãn điều kiện (4.1). Lấy bất kỳ $x^* \in X^*$. Đặt $g(x) = f(x) - \langle x^*, x\rangle \quad (x \in X)$. Vì f là hàm chính thường nửa liên tục dưới yếu, nên g cũng là hàm chính thường nửa liên tục dưới yếu. Do đó tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$X_{x^*,\alpha} := \{x \in X \mid g(x) \leqslant \alpha\}$$

là một tập con đóng yếu và khác rỗng của X. Từ (4.1) và bất đẳng thức

$$\frac{f(x)}{\|x\|} - \|x^*\| \leqslant \frac{g(x)}{\|x\|} \quad \text{với mọi } x \in X\backslash\{0\}$$

ta suy ra $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \dfrac{g(x)}{\|x\|} = +\infty$. Điều này kéo theo $X_{x^*,\alpha}$ là một tập con khác rỗng, đóng yếu và bị chặn của X. Vì X là một không gian Banach phản xạ, $X_{x^*,\alpha}$ là compact yếu theo Định lý Banach-Alaoglu. Do đó, theo Định lý Weierstrass, g đạt giá trị nhỏ nhất trên $X_{x^*,\alpha}$ tại một điểm $\bar{x} \in X_{x^*,\alpha}$. Từ định nghĩa của $X_{x^*,\alpha}$ suy ra $\bar{x}$ cũng là một điểm cực tiểu toàn cục của g trên X; do đó $0 \in \widehat{\partial} g(\bar{x})$. Theo Định lý 1.1.3, $\widehat{\partial} g(\bar{x}) = \widehat{\partial} f(\bar{x}) - x^*$. Do đó $x^* \in \widehat{\partial} f(\bar{x})$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Giả sử mệnh đề (ii) đúng và Ω là một tập con đóng yếu khác rỗng của X. Đặt $f(x) = \delta(x;\Omega)$, ở đây $\delta(x;\Omega) = 0$ nếu $x \in \Omega$ và $\delta(x;\Omega) = +\infty$ nếu $x \in X\backslash\Omega$. Vì Ω là một tập con khác rỗng đóng yếu và bị chặn của X, f là một hàm chính thường nửa liên tục dưới yếu thoả mãn (4.1). Do (ii), ta có $\bigcup\limits_{x\in X} \widehat{\partial} f(x) = X^*$. Mặt khác, $\widehat{\partial} f(x) = \widehat{N}(x;\Omega)$ với mọi $x \in X$, và $\widehat{N}(x;\Omega) = \emptyset$ nếu $x \in X\backslash\Omega$. Do đó $\bigcup\limits_{x\in\Omega} \widehat{N}(x;\Omega) = X^*$.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Giả sử mệnh đề (iii) đúng. Nếu X là một không gian Banach không phản xạ, thì tồn tại $x^* \in X^*$ sao cho $\langle x^*, x\rangle \neq \|x^*\|$ với mọi $x \in \mathbb{B}_X$ (xem [27, tr. 12]). Khi đó $\Omega := \mathbb{B}_X$ là một tập con khác rỗng đóng yếu và bị chặn của X, nhưng $x^* \notin \bigcup\limits_{x\in\Omega} \widehat{N}(x;\Omega)$. Đây là điều mâu thuẫn. Vậy X là một không gian phản xạ. $\square$

Nhận xét 4.1.1. Xét tính chất sau đây:

$(ii)'$ Với mọi hàm lồi liên tục $f : X \to \mathbb{R}$ thoả mãn (4.1), ta có

$$\bigcup_{x\in X} \partial f(x) = X^*,$$

với $\partial f(x) = \big\{x^* \in X^* \mid f(u) - f(x) \geqslant \langle x^*, u - x\rangle \quad \forall u \in X\big\}$ là dưới vi phân của f tại x theo nghĩa Fenchel trong giải tích lồi (xem Chương 1).

Ta thấy rằng $(ii) \Rightarrow (ii)'$. Khẳng định $(ii)' \Rightarrow (i)$, một khẳng định mạnh hơn $(ii) \Rightarrow (i)$, là kết quả đã biết (xem [11]).

4.2 Trường hợp không gian Asplund

Chúng ta biết rằng nếu hàm f là nửa liên tục dưới yếu thì nó là nửa liên tục dưới và điều ngược lại là không đúng. Không gian Banach phản xạ là một không gian Asplund. Trong Định lý 4.1.1, nếu X là một không gian Asplund và nếu tính nửa liên tục dưới yếu của f được thay bởi tính nửa liên tục dưới, thì chúng ta chỉ có thể kết luận rằng $\bigcup\limits_{x\in X} \widehat{\partial} f(x)$ là trù mật trong X^*.

Định lý 4.2.1. *Cho X là một không gian Asplund và $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là một hàm chính thường nửa liên tục dưới. Nếu f bị chặn dưới trên các tập bị chặn và điều kiện (4.1) đúng, thì tập hợp $\bigcup\limits_{x\in X} \widehat{\partial} f(x)$ là trù mật trong X^*,* *nghĩa là với mỗi* $x^* \in X^*$ *và* $\varepsilon > 0$ *tồn tại* $\bar{x} \in X$ *và* $\bar{x}^* \in \widehat{\partial} f(\bar{x})$ *sao cho* $\|\bar{x}^* - x^*\| \leqslant \varepsilon$.

Chứng minh. Lấy bất kỳ $x^* \in X^*$ và $\varepsilon > 0$. Đặt $g(x) = f(x) - \langle x^*, x\rangle$ với mọi $x \in X$. Ta có g là một hàm chính thường nửa liên tục dưới, bị chặn dưới trên các tập con bị chặn của X, và thoả mãn điều kiện $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} g(x) = +\infty$. Do đó tồn tại $\alpha \in \mathbb{R}$ sao cho

$$X_{g,\alpha} := \{x \in X |\; g(x) \leqslant \alpha\} \neq \emptyset.$$

Vì g là hàm nửa liên tục dưới và X là không gian Banach, $X_{g,\alpha}$ là không gian mêtric đầy đủ. Hơn thế, $X_{g,\alpha}$ là tập bị chặn (vì $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} g(x) = +\infty$). Do đó g bị chặn dưới ở trên $X_{g,\alpha}$. Theo nguyên lý biến phân Ekeland (xem [3] hoặc [29]), tồn tại $y \in X_{g,\alpha}$ sao cho

$$g(x) + \frac{\varepsilon}{2}\|x - y\| \geqslant g(y) \quad \forall x \in X_{g,\alpha}.$$

Từ định nghĩa của tập $X_{g,\alpha}$ ta suy ra rằng hàm

$$x \mapsto f(x) - \langle x^*, x\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\|x - y\|$$

đạt giá trị nhỏ nhất trên X tại y. Do đó,

$$0 \in \widehat{\partial}\Big(f(\cdot) - \langle x^*, \cdot\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\|\cdot - y\|\Big)(y).$$

Vì X là không gian Asplund, theo Định lý 1.1.4, tồn tại $\bar{x}, x' \in X$ sao cho

$\|\overline{x} - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, $\|x' - y\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ và

$$\begin{aligned}
0 &\in \widehat{\partial} f(\overline{x}) + \widehat{\partial}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\|\cdot - y\| - \langle x^*, \cdot\rangle\Big)(x') + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{B}_{X^*} \\
&= \widehat{\partial} f(\bar{x}) + \widehat{\partial}\Big(\frac{\varepsilon}{2}\|\cdot - y\|\Big)(x') - x^* + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{B}_{X^*} \\
&\subset \widehat{\partial} f(\overline{x}) + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{B}_{X^*} - x^* + \frac{\varepsilon}{2}\mathbb{B}_{X^*} \\
&= \widehat{\partial} f(\bar{x}) + \varepsilon\mathbb{B}_{X^*} - x^*.
\end{aligned}$$

Nghĩa là tồn tại $\bar{x}^* \in \widehat{\partial} f(\bar{x})$ thoả mãn $\|\bar{x}^* - x^*\| \leqslant \varepsilon$. □

Nhận xét 4.2.1. Khi X là không gian Banach có một chuẩn tương đương khả vi (tại mọi điểm khác 0), kết luận của Định lý 4.2.1 đã được Borwein và Preiss [12, Corollary 2.8] chứng minh. Vì một không gian có chuẩn tương đương khả vi Fréchet là không gian Asplund và tồn tại những không gian Asplund không có chuẩn tương đương khả vi Gâteaux (xem [37]), Định lý 4.2.1 mở rộng một phần kết quả [12, Corollary 2.8].

Do $\widehat{\partial} f(x) \subset \partial f(x)$, từ Định lý 4.2.1 chúng ta có kết quả sau đây.

Hệ quả 4.2.1. *Dưới các giả thiết của Định lý 4.2.1, tập hợp* $\bigcup\limits_{x\in X} \partial f(x)$ *là trù mật trong* X^*.

Nếu X là một không gian Asplund (thậm chí X là không gian Hilbert) và $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ thoả mãn các giả thiết của Định lý 4.2.1, thì có thể xảy ra trường hợp $\bigcup\limits_{x\in X} \widehat{\partial} f(x) \neq X^*$.

Ví dụ 4.2.1. Lấy $X = \ell_2$ và $e_n := (0, ..., 0, 1, 0, ...)$, ở đây phần tử đơn vị nằm ở vị trí thứ n. Xét hàm số $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ cho bởi công thức

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{n} + \dfrac{t}{2}\Big(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}\Big) & \text{nếu } x = (1-t)e_n + te_{n+1} \\ & \quad (t \in [0,1)\ n = 1, 2, ...), \\ +\infty & \text{nếu } x \in X \setminus \Big[\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [e_n, e_{n+1})\Big], \end{cases}$$

ở đây $[e_n, e_{n+1}) := \big\{(1-t)e_n + te_{n+1} \mid t \in [0,1)\big\}$. Rõ ràng các giả thiết của Định lý 4.2.1 được thoả mãn. Bây giờ chúng ta sẽ chứng tỏ rằng $0 \notin \bigcup\limits_{x \in X} \partial f(x)$. Lấy bất kỳ $\bar{x} \in X$. Xét các trường hợp sau đây.

Trường hợp 1. Không tồn tại $n \in \big\{1, 2, ...\big\}$ sao cho $\bar{x} \in [e_n, e_{n+1})$. Khi đó $\widehat{\partial} f(\bar{x}) = \partial f(\bar{x}) = \emptyset$.

Trường hợp 2. Tồn tại $n \in \{1, 2, ...\}$ sao cho $\bar{x} \in (e_n, e_{n+1}) := \big\{(1-t)e_n + te_{n+1} \mid t \in (0,1)\big\}$. Đặt $g(x) = f(x)$ nếu $x \in (e_n, e_{n+1})$, và $g(x) := +\infty$ nếu $x \in X \setminus (e_n, e_{n+1})$. Ta có g là một hàm lồi và

$$\begin{aligned} \partial f(\bar{x}) &= \widehat{\partial} f(\bar{x}) = \widehat{\partial} g(\bar{x}) \\ &= \Big\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \leqslant g(x) - g(\bar{x}),\ \forall x \in X\Big\} \\ &= \Big\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x - \bar{x}\rangle \leqslant f(x) - f(\bar{x}),\ \forall x \in (e_n, e_{n+1})\Big\} \\ &= \Big\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, e_{n+1} - e_n\rangle = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\Big)\Big\}. \end{aligned}$$

Trường hợp 3. $\bar{x} = e_1$. Lý luận tương tự như trong Trường hợp 2, ở đây (e_n, e_{n+1}) được thay bằng $[e_1, e_2)$, ta có

$$\partial f(\bar{x}) = \widehat{\partial} f(\bar{x}) = \Big\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, e_2 - e_1\rangle \leqslant -\frac{1}{4}\Big\}.$$

Trường hợp 4. Tồn tại $n \in \{2, 3, ...\}$ sao cho $\bar{x} = e_n$. Khi đó

$$x^* \in \widehat{\partial} f(\bar{x}) \Leftrightarrow \liminf_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x}) - \langle x^*, x - \bar{x} \rangle}{\|x - \bar{x}\|} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \liminf_{t \downarrow 0} \frac{f\big((1-t)e_n + te_{n+1}\big) - f(e_n) - t\langle x^*, e_{n+1} - e_n \rangle}{t\|e_{n+1} - e_n\|} \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\Big) \geqslant \langle x^*, e_{n+1} - e_n \rangle.$$

Do đó,

$$\widehat{\partial} f(\bar{x}) = \Big\{ x^* \in X^* \mid \langle x^*, e_{n+1} - e_n \rangle \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\Big) \Big\}.$$

Vì X là một không gian Hilbert (do đó X là một không gian Asplund) và f là nửa liên tục dưới địa phương tại $\bar{x} \in \mathrm{dom} f$, theo Định lý 1.1.4 ta có

$$\partial f(\bar{x}) = \operatorname*{Lim\,sup}_{x \xrightarrow{f} \bar{x}} \widehat{\partial} f(x).$$

Chú ý rằng trong trường hợp này $x \xrightarrow{f} \bar{x}$ có nghĩa là $x \to \bar{x}$ với $x \in [e_n, e_{n+1})$. Từ đó suy ra

$$\partial f(\bar{x}) = \Big\{ x^* \in X^* \mid \langle x^*, e_{n+1} - e_n \rangle \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\Big) \Big\}.$$

Do đó $\bigcup\limits_{x \in X} \partial f(x) = \bigcup\limits_{x \in X} \widehat{\partial} f(x)$ và $0 \notin \bigcup\limits_{x \in X} \partial f(x)$.

Hệ quả 4.2.2. *Giả sử Ω là một tập con khác rỗng, đóng và bị chặn của một không gian Asplund X. Khi đó tập $\bigcup\limits_{x \in \Omega} \widehat{N}(x; \Omega)$ là trù mật trong X^*.*

Chứng minh. Đặt $f(x) = \delta(x; \Omega)$ với mọi $x \in X$. Vì Ω là một tập con khác rỗng, đóng và bị chặn của X nên f thoả mãn các giả thiết của Định lý 4.2.1. Do đó, tập $\bigcup\limits_{x \in X} \widehat{\partial} f(x)$ trù mật trong X^*. Mặt khác, $\widehat{\partial} f(x) = \widehat{N}(x; \Omega)$ với mọi $x \in X$ và $\widehat{N}(x; \Omega) = \emptyset$ nếu $x \in X \backslash \Omega$. Từ đó ta suy ra rằng tập $\bigcup\limits_{x \in \Omega} \widehat{N}(x; \Omega)$ là trù mật trong X^*. $\square$

Khác với trường hợp Ω là đóng yếu trong không gian Banach phản xạ, nếu Ω chỉ đóng theo tôpô sinh bởi chuẩn trong không gian Hilbert X, thì có thể xảy ra khả năng $\bigcup\limits_{x\in\Omega} \widehat{N}(x;\Omega) \neq X^*$.

Ví dụ 4.2.2. Lấy $X = \ell_2$ và $e_n := (0, ..., 0, 1, 0, ...)$ là véctơ đơn vị thứ n. Đặt $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [e_n, e_{n+1}]$, ở đây $[e_n, e_{n+1}] := \big\{e_n + t(e_{n+1} - e_n) \mid t \in [0, 1]\big\}$. Dễ thấy Ω là một tập con khác rỗng bị chặn của X. Ta có Ω là một tập con đóng của X. Thật vậy, giả sử Ω không phải là một tập đóng. Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in \overline{\Omega}\backslash\Omega$. Vì các tập $[e_n, e_{n+1}]$ $(n = 1, 2, ...)$ là đóng, $\bar{x} \in \overline{\Omega}\backslash\Omega$ và $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [e_n, e_{n+1}]$, nên tồn tại $x_{n_k} = (1 - t_{n_k})e_{n_k} + t_{n_k} e_{n_k+1},\ t_{n_k} \in [0, 1]$ $(k = 1, 2, ...)$ sao cho $\lim\limits_{n_k\to\infty} x_{n_k} = \bar{x}$. Do đó

$$\lim_{n_k\to\infty} \langle x_{n_k}, \bar{x}\rangle = \langle \bar{x}, \bar{x}\rangle = \|\bar{x}\|^2. \tag{4.2}$$

Mặt khác, $\{e_n\}$ hội tụ yếu đến 0 và

$$\begin{aligned} \langle x_{n_k}, \bar{x}\rangle &= \langle (1 - t_{n_k})e_{n_k} + t_{n_k} e_{n_k+1}, \bar{x}\rangle \\ &= (1 - t_{n_k})\langle e_{n_k}, \bar{x}\rangle + t_{n_k}\langle e_{n_k+1}, \bar{x}\rangle. \end{aligned}$$

Do đó

$$\lim_{n_k\to\infty} \langle x_{n_k}, \bar{x}\rangle = 0. \tag{4.3}$$

Từ (4.2) và (4.3) ta suy ra $\bar{x} = 0$. Vì vậy,

$$\|x_{n_k}\| = \sqrt{(1 - t_{n_k})^2 + t_{n_k}^2} \to 0 \quad \text{khi } n_k \to \infty.$$

Đây là điều mâu thuẫn vì $\|x_{n_k}\| \geqslant 1/\sqrt{2}$ với mọi k. Vậy Ω là tập đóng. Đặt

$$x_0^* = -2e_1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\big(e_{m+1} - e_m\big).$$

Rõ ràng $x_0^* \in \ell_2 = X = X^*$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $x_0^* \notin \bigcup\limits_{x\in\Omega} N(x;\Omega)$, do đó $x_0^* \notin \bigcup\limits_{x\in\Omega} \widehat{N}(x;\Omega)$. Lấy bất kỳ $\bar{x} \in \Omega$.

Trường hợp 1. Tồn tại n sao cho $\bar{x} \in (e_n, e_{n+1})$. Khi đó

$$N(\bar{x};\Omega) = \widehat{N}(\bar{x};\Omega) = \big\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, e_{n+1} - e_n\rangle = 0\big\}. \tag{4.4}$$

Trường hợp 2. $\bar{x} = e_1$. Ta có

$$N(\bar{x};\Omega) = \widehat{N}(\bar{x};\Omega) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, e_2 - e_1\rangle \leqslant 0\big\}. \tag{4.5}$$

Trường hợp 3. Tồn tại $n \in \big\{2, 3, ...\big\}$ sao cho $\bar{x} = e_n$. Khi đó

$$\widehat{N}(\bar{x};\Omega) = \big\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, e_{n+1} - e_n\rangle \leqslant 0,\ \langle x^*, e_{n-1} - e_n\rangle \leqslant 0\big\}.$$

Theo Định lý 1.1.4,

$$\begin{aligned} N(\bar{x};\Omega) &= \operatorname*{Lim\,sup}_{x \to \bar{x}} \widehat{N}(x;\Omega) \\ &= \big\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, e_{n+1} - e_n\rangle \leqslant 0,\ \langle x^*, e_{n-1} - e_n\rangle \leqslant 0\big\} \\ &\bigcup \big\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, e_{n+1} - e_n\rangle = 0\big\} \\ &\bigcup \big\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, e_n - e_{n-1}\rangle = 0\big\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dễ dàng thấy rằng $\langle x_0^*, e_2 - e_1\rangle = \dfrac{1}{2}$ và $\langle x_0^*, e_{n+1} - e_n\rangle = \dfrac{2}{n(n^2-1)}$ nếu $n \in \big\{2, 3, ...\big\}$. Do đó, từ (4.4) - (4.6) ta suy ra rằng $x_0^* \notin N(\bar{x};\Omega)$.

Sử dụng Hệ quả 4.2.2 chúng ta có thể thu lại được Định lý Bishop-Phelps (xem [27, tr. 3]) cho trường hợp X là không gian Asplund.

Hệ quả 4.2.3. *Nếu Ω là một tập con lồi đóng khác rỗng và bị chặn của một không gian Asplund X, thì tập hợp gồm các phiếm hàm tuyến tính liên tục ở trên X và đạt giá trị lớn nhất trên Ω là trù mật trong X^*.*

Chứng minh. Một phiếm hàm tuyến tính liên tục $x^* \in X^*$ đạt giá trị lớn nhất trên Ω tại $x \in \Omega$ nếu và chỉ nếu $0 \in -x^* + N_\Omega(x)$, ở đây

$$N_\Omega(x) := \big\{u^* \in X^* \mid \langle u^*, u - x\rangle \leqslant 0 \quad \forall u \in \Omega\big\}.$$

Vì Ω là tập lồi nên $N_\Omega(x) = \widehat{N}(x;\Omega)$. Từ đó suy ra tập các phiếm hàm tuyến tính liên tục ở trên X và đạt giá trị lớn nhất trên Ω chính là tập hợp $\bigcup\limits_{x\in\Omega} \widehat{N}(x;\Omega)$. Do đó, theo Hệ quả 4.2.2, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Lưu ý rằng Định lý Bishop-Phelps ở trong [27] được phát biểu cho trường hợp tổng quát hơn, với X là một không gian Banach bất kỳ.

4.3 Một vài ứng dụng

Từ kết quả của hai mục trước chúng ta sẽ rút ra một vài định lý về sự tồn tại điểm dừng và sự tồn tại nghiệm trong tối ưu phi tuyến.

Xét bài toán

$$(\mathrm{P}_0) \quad \min\{f(x) \,|\, x \in X\},$$

ở đó X là không gian Banach và $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm nửa liên tục dưới.

Ta nói $\bar{x} \in X$ là điểm dừng của (P_0) nếu $0 \in \widehat{\partial} f(\bar{x})$. Theo qui tắc Fermat suy rộng (xem [46, Proposition 1.114]), nếu $\bar{x}$ là một nghiệm địa phương của (P_0) thì nó là một điểm dừng của bài toán đó.

Định lý 4.3.1. *Nếu X là không gian phản xạ, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm chính thường nửa liên tục dưới yếu, và điều kiện bức* (4.1) *được thoả mãn thì, với mọi $c \in X^*$, bài toán*

$$(\mathrm{P}_c) \quad \min\{f(x) + \langle c, x\rangle \,|\, x \in X\}$$

có tập các điểm dừng khác rỗng.

Chứng minh. Theo định nghĩa, $\hat{x}$ là điểm dừng của (P_c) khi và chỉ khi

$$0 \in \widehat{\partial}(f + \langle c, \cdot\rangle)(\hat{x}).$$

Theo Định lý 1.1.3, $\widehat{\partial}(f + \langle c, \cdot \rangle)(\hat{x}) = \widehat{\partial} f(\hat{x}) + c$. Vì vậy, bao hàm thức

$$-c \in \widehat{\partial} f(\hat{x}) \tag{4.7}$$

là điều kiện cần và đủ để $\hat{x}$ là điểm dừng của (P_c). Do các giả thiết của chúng ta, Định lý 4.1.1 suy ra bao hàm thức (4.7) có nghiệm với mọi $c \in X^*$. Điều đó chứng tỏ với mọi $c \in X^*$ bài toán (P_c) có tập điểm dừng khác rỗng. □

Trong trường hợp f là hàm lồi, với mỗi $x \in X$, $\widehat{\partial} f(x)$ trùng với dưới vi phân của f tại x theo nghĩa giải tích lồi. Do đó, tập điểm dừng của bài toán (P_0) trùng với tập nghiệm của nó. Hiển nhiên, nếu f là hàm lồi thì với mọi $c \in X^*$ hàm số $f(x) + \langle c, x \rangle$ cũng là hàm lồi. Ta đã biết rằng hàm lồi f là nửa liên tục dưới yếu ở trên X khi và chỉ khi nó là nửa liên tục dưới ở trên X theo tôpô sinh bởi chuẩn của X.

Các nhận xét vừa nêu cho thấy rằng khẳng định sau là hệ quả trực tiếp của Định lý 4.3.1.

Mệnh đề 4.3.1. *Nếu X là không gian phản xạ, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi chính thường nửa liên tục dưới, và điều kiện bức* (4.1) *được thoả mãn thì với mọi $c \in X^*$ bài toán* $(\mathrm{P_c})$ *có nghiệm.*

Nhận xét 4.3.1. Ta có thể xem $(\mathrm{P_c})$ là kết quả của việc làm "nhiễu tuyến tính" bài toán $(\mathrm{P_0})$ (tức là việc cộng thêm hàm tuyến tính $\langle c, x \rangle$ vào hàm mục tiêu $f(x)$ của $(\mathrm{P_0})$). Theo cách hiểu này, Định lý 4.3.1 là một khẳng định về sự tồn tại điểm dừng của bài toán nhiễu của $(\mathrm{P_0})$ dưới tác động của *mọi* nhiễu tuyến tính, còn Mệnh đề 4.3.1 là một điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm bài toán nhiễu của một bài toán qui hoạch lồi dưới tác động của nhiễu tuyến tính.

Nhận xét 4.3.2. Về mặt hình thức, bài toán (P_0) được xét trong Định lý 4.3.1 là bài toán tối ưu không có ràng buộc. Tuy nhiên, vì f có thể nhận giá trị $+\infty$, nên ta dễ dàng chuyển bài toán tối ưu có ràng buộc

$$\min\{\varphi(x)\,|\,x \in \Omega\},$$

ở đó X là không gian Banach, $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm nửa liên tục dưới, Ω là một tập con đóng của X, về dạng (P_0) bằng cách đặt $f(x) = \varphi(x) + \delta(x; \Omega)$, với $\delta(\cdot; \Omega)$ là ký hiệu hàm chỉ của Ω.

Nếu X chỉ là một không gian Asplund mà không phải là không gian Banach phản xạ, thì chúng ta chỉ có thể thu được khẳng định sau đây về sự tồn tại điểm dừng của bài toán nhiễu của (P_0) dưới tác động của nhiễu tuyến tính $\langle c, x\rangle$, với c được lấy trong một tập hợp trù mật trong X^*. Chúng ta lưu ý rằng giả thiết đặt lên hàm f ở đây nhẹ hơn giả thiết tương ứng trong Định lý 4.3.1.

Định lý 4.3.2. *Cho X là không gian Asplund, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm chính thường nửa liên tục dưới và bị chặn dưới ở trên mỗi tập con bị chặn của X. Nếu điều kiện bức (4.1) được thoả mãn, thì tồn tại một tập C trù mật trong X^* sao cho với mọi $c \in C$ bài toán (P_c) có tập điểm dừng khác rỗng.*

Chứng minh. Vì X là không gian Asplund, f là hàm chính thường nửa liên tục dưới, bị chặn dưới trên các tập con bị chặn của X, và thoả mãn (4.1), nên theo Định lý 4.2.1, tập $\bigcup\limits_{x\in X} \widehat{\partial} f(x)$ trù mật trong X^*. Do đó, tập $C := -\Big[\bigcup\limits_{x\in X} \widehat{\partial} f(x)\Big]$. cũng trù mật trong X^*. Vì với mỗi $c \in C$ tồn tại $\hat{x} \in X$ sao cho $-c \in \widehat{\partial} f(\hat{x})$ (hay $0 \in \widehat{\partial}(f + \langle c, \cdot\rangle)(\hat{x})$), nên tập điểm dừng của (P_c) là khác rỗng mọi $c \in C$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Sau đây là một khẳng định về sự sự tồn tại nghiệm của bài toán qui hoạch lồi dưới tác động của một tập trù mật (theo tôpô sinh bởi chuẩn của X^*) các nhiễu tuyến tính lên hàm mục tiêu.

Mệnh đề 4.3.2. *Cho X là không gian Asplund, $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ là hàm lồi chính thường nửa liên tục dưới và bị chặn dưới ở trên mỗi tập con bị chặn của X. Nếu điều kiện bức (4.1) được thoả mãn, thì tồn tại một tập C trù mật trong X^* sao cho với mọi $c \in C$ bài toán $(\mathrm{P_c})$ có nghiệm.*

Kết luận

Các kết quả chính của luận án này bao gồm:

1. Công thức biểu diễn tích phân Aumann của ánh xạ dưới vi phân Clarke và của ánh xạ dưới vi phân Mordukhovich, các điều kiện cần và đủ để tích phân này là tập gồm một điểm.

2. Một dạng tương tự của công thức Newton-Leibniz cổ điển cho trường hợp tích phân đa trị. Chứng minh mới cho định lý đã biết về khả năng đặc trưng hàm số của ánh xạ dưới vi phân Clarke.

3. Công thức tính chính xác dưới vi phân Mordukhovich của tích phân bất định
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$
với f là một hàm bị chặn cốt yếu.

4. Công thức tính chính xác dưới vi phân Mordukhovich của phiếm hàm tích phân
$$F(u) = \int_\Omega f(\omega, u(\omega))d\mu(\omega) \quad (u \in L_1(\Omega; E)),$$
với $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ là một không gian có độ đo không nguyên tử σ-hữu hạn đầy đủ, E là không gian Banach khả ly, và $f : \Omega \times E \to \bar{\mathbb{R}}$ là hàm $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(E)-$đo được. Công thức này kéo theo một tiêu chuẩn tồn tại nghiệm địa phương của bài toán tối ưu không ràng buộc, với hàm mục tiêu là phiếm hàm tích phân.

5. Một số đặc trưng của không gian Banach phản xạ thông qua tính chất tràn của ánh xạ dưới vi phân Fréchet. Điều kiện đủ để miền giá trị của ánh xạ dưới vi phân Fréchet trù mật trong X^* khi không gian nền X có tính chất Asplund.

6. Hai định lý về sự tồn tại điểm dừng của bài toán nhiễu của một bài toán tối ưu phi tuyến trong không gian vô hạn chiều dưới tác động của nhiễu tuyến tính.

7. Hai mệnh đề về sự tồn tại nghiệm của bài toán nhiễu của một bài toán qui hoạch lồi trong không gian vô hạn chiều dưới tác động của nhiễu tuyến tính.

Cùng với công thức Newton-Leibniz (đã được khảo sát ở Chương 2), hướng nghiên cứu chính của luận án có thể tiếp tục đối với công thức Green, công thức Gauss và các ứng dụng. Đối với bài toán tính toán hoặc đánh giá dưới vi phân của phiếm hàm tích phân (Chương 3 của luận án), ngoài các lớp hàm đã được xét, cần tiếp tục nghiên cứu tìm ra các công thức tính toán hoặc đánh giá dưới vi phân cho các lớp hàm khác và ứng dụng các công thức thu được vào việc khảo sát các bài toán tối ưu có liên quan đến phiếm hàm tích phân, đặc biệt là các bài toán điều khiển tối ưu.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CỦA TÁC GIẢ CÓ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

1. Nguyen Huy Chieu (2008), "Limiting subdifferentials of indefinite integrals", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **341**, pp. 247 - 258.

2. Nguyen Huy Chieu (2008), "Density of the range of the Fréchet subdifferential of a lower semicontinuous function in Asplund spaces", *Nonlinear Analysis Forum*, **13**, pp. 67 - 76.

3. Nguyen Huy Chieu (2009), "The Fréchet and limiting subdifferentials of integral functionals on the spaces $L_1(\Omega, E)$", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **360**, pp. 704 - 710.

4. Nguyen Huy Chieu (2010), "Integral of the Clarke subdifferential mapping and a generalized Newton-Leibniz formula", *Nonlinear Analysis*, **73**, pp. 614 - 621.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Việt

[1] Nguyễn Huy Chiêu (2004), *Sự tồn tại lát cắt đặc biệt của ánh xạ đa trị và khái niệm tích phân Aumann*, Luận văn Thạc sĩ toán học, Đại học Vinh.

[2] Hoàng Tụy (2003), *Hàm thực và Giải tích hàm*, NXB đại học Quốc gia Hà Nội.

[3] Nguyễn Đông Yên (2007), *Giáo trình Giải tích đa trị*, NXB Khoa học tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội.

Tiếng Anh

[4] Alekseev V. M., Tikhomirov V. M, Fomin S. V. (1987), *Optimal Control*, Consultants Bureau, New York.

[5] Aubin J.-P., Frankowska H. (1990), *Set-Valued Analysis,* Birkhäuser, Boston, Massachusetts.

[6] Aumann R. J. (1965), "Integrals of set-valued functions", *J. Math. Anal. Appl.,* **12**, pp. 1 - 12.

[7] Benoist J., Daniilidis A. (2002), "Integration of Fenchel subdifferentials of epi-pointed functions", *SIAM J. Optim.*, **12**, pp. 575 - 582.

[8] Benyamini Y., Lindenstrauss J. (2000), *Geometric Nonlinear Functional Analysis, Vol. 1*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. **48**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.

[9] Bonnans J. F., Shapiro A. (2000), *Perturbation Analysis of Optimization Problems*, Springer, New York.

[10] Borwein J. M., Fitzpatrick S. P. (1995), "Characterization of Clarke subgradients among one-dimensional multifunctions", in *Proc. Optimization Miniconference II*, edited by B. M. Glover and V. Jeyakumar, pp. 61 - 64, University of New South Wales, Sydney, Australia.

[11] Borwein J. M., Fitzpatrick S., Vanderwerff J. (1994), "Examples of convex functions and classifications of normed spaces", *J. Convex Anal.*, **2**, pp. 61 - 73.

[12] Borwein J. M., Preiss D. (1987), "A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **303**, pp. 517 - 527.

[13] Borwein J. M., Wang X. (1997), "Distinct differentiable functions may share the same Clarke subdifferential at all points", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **125**, pp. 807 - 813.

[14] Borwein J. M., Zhu Q. J. (2005), *Techniques of Variational Analysis,* Springer, New York.

[15] Bourass A., Giner E. (2001), "Kuhn-Tucker conditions and integral functionals", *J. Convex Anal.*, **8**, pp. 533 - 553.

[16] Castaing C., Valadier M. (1977), *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, Lecture Notes in Mathematics Vol. **580**, Springer-Verlag, New York.

[17] N. H. Chieu (2008), "Limiting subdifferentials of indefinite integrals", *J. Math. Anal. Appl.*, **341**, pp. 247 - 258.

[18] N. H. Chieu (2008), "Density of the range of the Fréchet subdifferential of a lower semicontinuous function in Asplund spaces", *Nonlinear Anal. Forum*, **13**, pp. 67 - 76.

[19] N. H. Chieu (2009), "The Fréchet and limiting subdifferentials of integral functionals on the spaces $L_1(\Omega, E)$", *J. Math. Anal. Appl.*, **360**, pp. 704 - 710.

[20] N. H. Chieu (2010), "Integral of the Clarke subdifferential mapping and a generalized Newton-Leibniz formula", *Nonlinear Anal.*, **73**, pp. 614 - 621.

[21] Clarke F. H. (1975), "Generalized gradients and applications", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **205**, pp. 247 - 262.

[22] Clarke F. H. (1976), "A new approach to Lagrange multipliers", *Math. Oper. Res.*, **1**, pp. 165 - 174.

[23] Clarke F. H. (1983), *Optimization and Nonsmooth Analysis,* Wiley-Interscience, New York.

[24] Clarke F. H. (1989), *Methods of Dynamic and Nonsmooth Optimization,* SIAM, Philadelphia.

[25] Clarke F. H., Ledyaev Yu. S., Stern R. J., Wolenski P. R. (1998), *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer-Verlag, New York.

[26] Daniilidis A., Georgiev P., Penot J.-P. (2003), "Integration of multivalued operators and cyclic submonotonicity", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**, pp. 177 - 195.

[27] Diestel J. (1975), *Geometry of Banach Spaces - selected topics,* Springer, Berlin.

[28] Diestel J., Ulh J. J. (1977), *Vector Measures,* Math. Survey, no. **15**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I.

[29] Ekeland I. (1974), "On the variational principle", *J. Math. Anal. Appl.*, **47**, pp. 324 - 353.

[30] Ekeland I., Teman R. (1976), *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam.

[31] Fonseca I., Leoni G. (2007), *Modern Methods in the Calculus of Variations: L^p Spaces, Vol. I,* Springer, New York.

[32] Giner E. (1995), "Local minimizers of integral functionals are global minimizers", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123**, pp. 755 - 757.

[33] Giner E. (1998), "On the Clarke subdifferential of an integral functional on $L_p, 1 \leq p < \infty$", *Canad. Math. Bull.*, **41**, pp. 41 - 48.

[34] Giner E. (2007), "Lipschitzian properties of integral functionals on Lebesgue spaces L_p, $1 \leq p < \infty$", *Set-Valued Anal.*, **15**, pp. 125 - 138.

[35] Giner E. (2008), "Subdifferential regularity and characterizations of the Clarke subgradients of integral functionals", *J. Nonlinear Convex Anal.*, **9**, pp. 25 - 36.

[36] Giner E. (2009), "Calmness properties and contingent subgradients of integral functionals on Lebesgue spaces L_p, $1 \leq p < \infty$", *Set-Valued Var. Anal.*, **17**, pp. 223 - 243.

[37] Haydon R. (1990), "A counterexample in several questions about scattered compact spaces", Bull. London Math. Soc., **22**, pp. 261 - 268.

[38] Ioffe A. D., Levin V. L. (1972), "Subdifferentials of convex functions", *Trans. Moscow Math. Soc.*, **26**, pp. 1 - 72.

[39] Ioffe A. D., Tihomirov V. M. (1979), "*Theory of Extremal Problems*", North-Holland, Amsterdam.

[40] Ivanov M., Zlateva N. (2008), "A new proof of the integrability of the subdifferential of a convex function on a Banach space", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136**, pp. 1787 - 1793.

[41] Mordukhovich B. S. (1976), "Maximum principle in problems of time optimal control with nonsmooth constraints", *J. Appl. Math. Mech.*, **40**, pp. 960 - 969.

[42] Mordukhovich B. S. (1993), "Complete characterization of openness, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **340**, pp. 1 - 35.

[43] Mordukhovich B. S. (1994), "Generalized differential calculus for nonsmooth and set-valued mappings", *J. Math. Anal. Appl.*, **183**, pp. 250 - 288.

[44] Mordukhovich B. S. (1994), "Stability theory for parametric generalized equations and variational inequalities via nonsmooth analysis", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **343**, pp. 609 - 657.

[45] Mordukhovich B. S. (1995), "Discrete approximations and refined Euler-Lagrange conditions for nonconvex differential inclusions", *SIAM J. Control Optim.*, **33**, pp. 882 - 915.

[46] Mordukhovich B. S. (2006), *Variational Analysis and Generalized Differentiation, Vol. I: Basic theory, Vol. II: Applications*, Springer, Berlin, Heidelberg.

[47] Mordukhovich B. S., Shao Y. (1995), "Differential characterizations of covering, metric regularity, and Lipschitzian properties of multifunctions between Banach spaces", *Nonlinear Anal.*, **25**, pp. 1401 - 1424.

[48] Mordukhovich B. S., Shao Y. (1996), "Nonconvex differential calculus for infinite-dimensional multifunctions", *Set-Valued Anal.*, **4**, pp. 205 - 236.

[49] Mordukhovich B. S., Shao Y. (1996), "Nonsmooth sequential analysis in Asplund spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348**, pp. 1235 - 1280.

[50] Papageorgiou N. S. (1997), "Convex integral functionals", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **349**, pp. 1421 - 1436.

[51] Poliquin A. R. (1991), "Integration of subdifferentials of nonconvex functions", *Nonlinear Anal.*, **17**, pp. 385 - 398.

[52] Rockafellar R. T. (1970), "On the maximal monotonicity of subdifferential mappings", *Pacific J. Math.*, **33**, pp. 209 - 216.

[53] Rockafellar R. T. (1970), *Convex Analysis,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[54] Rockafellar R. T. (1976), "Integral functionals, normal integrands and measurable selections", *Lecture Notes in Mathematics*, **543**, pp. 157 - 207, Springer, Berlin.

[55] Rockafellar R. T. (1981), *The Theory of Subgradients and its Applications to Problems of Optimization. Convex and Nonconvex Functions*, Heldermann Verlag, Berlin.

[56] Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. (1998), *Variational Analysis,* Springer-Verlag, Berlin.

[57] Rudin W. (1966), *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill Book Company, New York.

[58] Stromberg K. R. (1981), *Introduction to Classical Real Analysis,* Wadsworth International, Belmont, California.

[59] Thibault L., Zagrodny D. (1995), "Integration of subdifferentials of lower semicontinuous functions on Banach spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, **189**, pp. 33 - 58.

[60] Thibault L., Zagrodny D. (2005), "Enlarged inclusion of subdifferentials", *Canad. Math. Bull.*, **48**, pp. 283 - 301.

[61] Vinter R. B. (2000), *Optimal Control*, Birkhäuser, Boston, Massachusetts.

Tiếng Pháp

[62] Moreau J. J. (1965), "Proximité et dualité dans un espace hilbertien", *Bull. Soc. Math. France*, **93**, pp. 273 - 299.

[63] Neveu J. (1970), *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités,* Masson, Paris.