BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

ĐỖ THỊ THẢO

HỆ ĐẾM VÀ ỨNG DỤNG TRONG TOÁN PHỔ THÔNG

Chuyên ngành : Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số : 60.46.40

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:

PGS. TS. Tạ Duy Phượng

THÁI NGUYÊN - 2009

MỤC LỤC

Trang

LỜI NÓI ĐẦU

Có thể nói hệ đếm là lí thuyết toán học đầu tiên xuất hiện do nhu cầu thực tiễn của cuộc sống, được hình thành và phát triển song hành với sự phát triển của văn minh nhân loại. Trong cuộc sống ta luôn phải sử dụng hệ đếm (cơ số 10) để tính toán. Hệ đếm cơ số 2, cùng với các hệ đếm cơ số 10, cơ số 8,... là cơ sở làm việc của máy tính điện tử. Lí thuyết hệ đếm (cơ số bất kì) còn liên quan đến nhiều lĩnh vực khác của toán học: lí thuyết chia hết, toán rời rạc, phương trình nghiệm nguyên và phương trình hàm, qui nạp toán học, các bài toán trò chơi,...

Mặc dù hệ đếm đóng vai trò rất quan trọng trong cuộc sống hàng ngày cũng như trong học tập, những kiến thức về hệ đếm còn ít được quan tâm giảng dạy trong trường phổ thông. Vì vậy phần lớn học sinh có thể sử dụng thành thạo những ứng dụng của hệ đếm (máy tính điện tử, máy ảnh số, máy nghe nhạc,...) nhưng không có các kiến thức sơ đẳng về hệ đếm. Thí dụ, phần lớn học sinh biết sử dụng máy tính điện tử khoa học để làm các phép toán, không chỉ các phép toán số học, mà còn các phép toán cao cấp (lấy modulo, tính theo công thức truy hồi...), nhưng không hiểu cơ chế thực hiện các tính toán trên máy.

Luận văn *Hệ đếm và ứng dụng trong toán phổ thông* có mục đích trình bày các kiến thức cơ bản của hệ đếm và một số ứng dụng của hệ đếm trong giải toán phổ thông (các tiêu chuẩn chia hết trong hệ đếm bất kì, phương pháp hệ đếm giải một lớp các bài toán thi vô địch quốc gia và quốc tế).

Luận văn gồm hai chương.

Chương 1 trình bày các kiến thức cơ bản của hệ đếm và tính toán trên máy: Khái niệm hệ đếm, đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác, tính toán số học trong hệ đếm cơ số bất kì; Sử dụng máy tính khoa học (*Caculator, Vianacal Vn-570MS, Casio fx570MS, Casio fx-570ES,...)*

và phần mềm tính toán *Maple* để đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác và tính toán số học trên hệ đếm cơ số bất kì. Cuối chương trình bày sơ lược nguyên lí trao đổi thông tin trên máy tính điện tử.

Chương 2 trình bày hai ứng dụng của hệ đếm trong toán phổ thông. Một số tính chất chia hết trong hệ đếm cơ số 10 được mở rộng sang cho hệ đếm cơ số bất kì trong **§**1 của Chương. Điều này cho phép nhìn lại các qui tắc và tiêu chuẩn chia hết trong hệ đếm cơ số 10 và ứng dụng để giải một số bài toán chia hết. Ứng dụng của hệ đếm trong giải toán được minh họa bởi nhiều bài toán thi học sinh giỏi Quốc gia và Quốc tế trong **§**2 của Chương, qua đây ta cũng thấy rõ mối quan hệ giữa hệ đếm với các vấn đề khác của toán phổ thông (phương trình hàm, phương trình nghiệm nguyên, dãy truy hồi,...). Những bài thi vô địch đã có trong [7] và [8] không được trình bày ở đây. Vì vậy, kết hợp **§** này với [7] và [8], số lượng bài toán là đủ nhiều để có thể coi Hệ đếm như một *phương pháp* giải các bài toán gặp trong phương trình hàm, phương trình nghiệm nguyên,...

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS TS Tạ Duy Phượng. Xin được tỏ lòng cám ơn chân thành nhất tới Thầy.

Tác giả xin cám ơn chân thành tới Trường Đại học Khoa học Thái Nguyên, nơi tác giả đã nhận được một học vấn sau đại học căn bản.

Và cuối cùng, xin cám ơn gia đình, bạn bè, đồng nghiệp đã cảm thông, ủng hộ và giúp đỡ trong suốt thời gian tác giả học Cao học và viết luận văn.

Hà Nội, ngày 18 tháng 9 năm 2009

Tác giả

Đỗ Thị Thảo

Chương 1

HỆ ĐẾM

§1. Khái niệm hệ đếm với cơ số bất kỳ

1.1. Mở đầu

Trong cuộc sống hàng ngày chúng ta thường sử dụng các số trong hệ đếm thập phân. Tất cả các số của hệ thập phân được tạo nên từ các chữ số từ 0 đến 9. Hệ đếm thập phân, hay còn gọi là hệ đếm cơ số 10 (decimal system, được viết tắt là **Dec** trên các máy tính điện tử khoa học–*Scientific Calculator*, thường được dịch là máy tính cầm tay hoặc máy tính bỏ túi và máy tính *Calculator* được cài đặt trên *Window*).

Hệ đếm thập phân xuất hiện đầu tiên ở Ấn độ vào thế kỷ 5 sau công nguyên. Đến năm 1202 nhờ tác phẩm *Liber Abaci* của L. Fibonacci, một nhà toán học và thương gia người Ý, thì khoa học Ả rập và hệ đếm cơ số 10 mới được truyền bá vào châu Âu. Với sự phát minh ra nghề in vào thế kỉ 15 thì 10 chữ số mới có hình dạng cố định như hiện nay.

Các số viết trong hệ thập phân gồm 2 phần: Phần nguyên và phần thập phân được ngăn cách bởi dấu phẩy hoặc dấu chấm. Máy tính điện tử và các nước trên thế giới sử dụng dấu chấm, nhưng ở Việt nam thì sử dụng dấu phẩy.

Hệ đếm thập phân chỉ sử dụng 10 ký tự lần lượt là 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Hệ đếm thập phân là hệ đếm theo quy tắc *vị trí*. Giá trị các ký tự giống nhau hoàn toàn khác nhau nếu nó đứng ở những vị trí khác nhau: gặp 10 thì thêm một nấc (đủ 10 thì thêm 1 đơn vị vào hàng bên trái nó), hay còn gọi là *hệ thập tiến*. Do tính thập tiến người ta biết rằng mỗi chữ số đứng bên trái bằng 10 lần chữ số đứng bên phải nó nếu hai chữ số đó là như nhau. Điều này khác với hệ La Mã.

Người ta cũng cố lý giải tại sao hệ đếm thập phân lại được đa số các nước trên thế giới sử dụng đến như vậy. Có nhiều lý giải đưa ra như do hai bàn tay có 10 ngón, do đó ta dễ dàng đếm trên 10 ngón tay. Và khi đứa trẻ đầu tiên tập đếm thì chúng thường đếm trên đầu các ngón tay.

Ngoài hệ đếm thập phân liệu còn có các hệ đếm khác hay không? Chúng ta cùng nhìn lại một chút về các hệ đếm với cơ số khác nhau mà các nước, các dân tộc trên thế giới đã sử dụng.

Hệ đếm cơ số 60 của người Babilon xuất hiện sớm và cho đến ngày nay chúng ta vẫn dùng để đo góc và thời gian: Một độ có 60 phút, một phút có 60 giây,… Tại sao người Babilon lại thích sử dụng hệ đếm cơ số 60 đến như vậy? Cho đến nay có nhiều giả thuyết khác nhau về vấn đề này. Một giải thích là do sự hiểu biết của người Babilon về hệ mặt trời: Người Babilon đã quan sát thấy chu kì của trái đất quay quanh mặt trời là 360 ngày. Có giả thuyết cho rằng vì 60 có nhiều ước số: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60 nên khi thực hiện phép chia thì sẽ thu được nhiều số chẵn (nguyên). Còn số 10 chỉ có 2 ước là 2 và 5 nên khi thực hiện phép chia thì sẽ thu được nhiều số lẻ (phân số). Để biểu diễn số trong hệ đếm cơ số 60 thì ta phải sử dụng 60 ký tự. Và trong hệ đếm này thì mỗi chữ số đứng bên trái bằng 60 lần chữ số đứng ngay bên phải nó nếu hai chữ số đó giống nhau.

Hệ đếm cơ số 5 Thời cổ đại các bộ tộc nguyên thủy thường dùng hệ đếm cơ số 5, nó tương ứng với việc đếm trên năm ngón tay. Ở hệ đếm này thì cứ được 5 thì thêm một nấc (đủ 5 thì thêm một đơn vị vào hàng bên trái nó). Như vậy trong hệ đếm cơ số 5 người ta phải sử dụng 5 ký tự 0, 1, 2, 3, 4. Và cũng giống ở các hệ đếm khác, mỗi chữ số đứng bên trái bằng 5 lần chữ số đứng bên phải nó nếu hai chữ số đó giống nhau. Hiện nay người Trung Quốc và người Nhật Bản vẫn còn dùng các bàn tính gẩy dựa trên hệ đếm cơ số 5.

Hệ đếm cơ số 20 Có những dân tộc dùng cả 10 ngón chân và 10 ngón tay để đếm và được 20 thì họ thêm một nấc (đủ 20 thì thêm một đơn vị vào hàng bên trái nó). Chính vì vậy mà có hệ đếm cơ số 20. Hệ đếm này được người Maia cổ sử dụng. Cho đến ngày nay ở Đan Mạch và ở Pháp người ta vẫn sử dụng hệ đếm cơ số 20. Với họ 60 được hiểu là 3 lần 20; 80 được hiểu là 4 lần 20 (quatre vingts-quatre=bốn, vingt=20 tiếng Pháp); 90 được hiểu là 4 lần 20 rưỡi; 93 được hiểu là thêm 3 vào 4 lần 20 rưỡi.

Cách nói đơn vị trước khi nói hàng chục trước thế kỷ 18 rất phổ biến ở châu Âu, cho đến nay ở Đức vẫn còn sử dụng.

Ở hệ đếm cơ số 20 ta phải sử dụng 20 chữ số, ngoài các chữ số từ 0 đến 9 người ta còn đưa vào các chữ cái thay cho các giá trị số từ 10 đến 19. Và cũng giống ở các hệ đếm trên thì mỗi chữ số đứng bên trái bằng 20 lần chữ số đứng bên phải nó nếu 2 chữ số đó giống nhau.

Trong đo lường người ta còn sử dụng nhiều hệ đếm khác nữa.

Hệ đếm cơ số 12 được sử dụng ở nhiều nước trên thế giới và cho đến ngày nay vẫn được sử dụng nhiều ở Anh, và nhiều nơi trên thế giới cũng vẫn còn sử dụng hệ đếm cơ số 12. Một thước Anh không phải là 10 tấc Anh mà là 12 tấc Anh. Chúng ta vẫn hay dùng đơn vị inch, 18 inch không phải là một thước và 8 tấc mà là một thước Anh và 6 tấc Anh. Ở Anh người ta còn dùng đơn vị "tá" gồm 12 chiếc, 12 "tá" gọi là một "rá". Có lẽ người Trung Quốc cũng đã sử dụng hệ đếm cơ số 12 và hệ đếm cơ số 60 (chu kì của 12 con giáp,…).

Tùy theo yêu cầu thực tế mà người ta lại dùng các hệ đếm với cơ số mới.

Hệ đếm cơ số 2 hay hệ đếm nhị phân (binary system, được viết tắt là **Bin** trên các máy tính khoa học và máy tính *Caculator* được cài đặt trên *Window*). Khi máy tính điện tử xuất hiện, người ta sử dụng hệ đếm nhị phân. Đó là hệ đếm chỉ sử dụng hai ký tự 1 và 0. Mỗi ký tự đứng bên trái bằng hai lần ký tự đứng bên phải nó nếu các ký tự đó là như nhau. Việc sử dụng hệ đếm nhị phân với hai ký tự 0 và 1 rất gần với logic vì mệnh đề chỉ có thể nhận một trong hai giá trị đúng hoặc sai tương ứng với giá trị 1 hoặc 0. Nó cũng tương ứng với việc một mạch điện chỉ có thể ở một trong hai trạng thái đóng hoặc mở. Phép đếm nhị phân cùng với phép toán logic là cơ sở hoạt động của máy tính.

Do chỉ có hai ký tự nên việc biểu diễn của một số trong hệ đếm cơ số 2 rất dài, vì vậy trong máy tính còn sử dụng hệ đếm cơ số 8 và hệ đếm cơ số 16, rất thuận tiện trong biểu diễn các số vì 2 là ước của 8 và 16.

Hệ đếm cơ số 8 hay hệ bát phân (octal system, được viết tắt là **Oct** trên các máy tính khoa học và máy tính *Caculator*). Đây là hệ đếm sử dụng 8 ký tự 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7. Mỗi ký tự đứng bên trái bằng 8 lần ký tự đứng bên phải nó nếu hai ký tự đó giống nhau.

Hệ đếm cơ số 16 (hexadecimal system, được viết tắt là **Hex** trên các máy tính khoa học và *Caculator*). Nếu chỉ sử dụng 10 ký tự từ 0 đến 9 như ở hệ đếm thập phân thì chưa đủ để biểu diễn các số trong hệ đếm cơ số 16. Vì vậy người ta đưa thêm vào các ký tự: A, B, C, D, E, F tương ứng với 10, 11, 12, 13, 14, 15. Như vậy ở hệ đếm này ta sử dụng 16 ký tự: 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Mỗi ký tự đứng bên trái bằng 16 lần ký tự đứng bên phải nó nếu hai ký tự đó giống nhau.

Thực ra thì hệ đếm cơ số 16 cũng đã có ở Trung Quốc từ xưa, vì thời trước 1 cân của Trung Quốc có tới 16 lạng (bên tám lạng bên nửa cân, bằng nhau).

Hệ đếm cơ số 24 dùng đếm số giờ trong 1 ngày.

Hệ đếm cơ số 30 đếm số ngày trong tháng.

Hệ đếm cơ số 3 (hệ tam phân) gồm ba chữ số 0, 1, 2 hay 0, 1, $\overline{1}$. Hệ đếm cơ số 3 dùng để đếm số tháng trong quí. Có dân tộc đã sử dụng hệ đếm cơ số 3 trong thời gian dài. Với những số lớn hơn 3 thì họ dùng từ vài hoặc nhiều. Do tính chất đối xứng nên hệ đếm cơ số 3 có nhiều tính chất thú vị và tiện dụng trong nghiên cứu, vì vậy ở một số phòng thí nghiệm đặc biệt người ta sử dụng máy tính mà thiết kế dựa trên cơ số 3. Tuy nhiên loại máy tính này ít được sử dụng rộng rãi.

Hệ đếm cơ số 7 đếm số ngày trong tuần,…

Như vậy có thể khái quát rằng: chúng ta có thể đếm hoặc viết các số theo một cơ số hay một quy tắc nào đó.

Từ đây ta có thể hiểu một số được viết theo cơ số k có nghĩa là gì? Giá trị thập phân của nó là bao nhiêu?

1.2. Hệ đếm với cơ số bất kỳ

Định nghĩa

Cho b là số hữu tỷ dương, k là số tự nhiên, nếu b có dạng

$$b = b_n \times k^n + b_{n-1} \times k^{n-1} + \ldots + b_1 \times k^1 + b_0 \times k^0 + b_{-1} \times k^{-1} + b_{-2} \times k^{-2} + \ldots + b_{-m} \times k^{-m}$$

$\left(0 \le b_i \le k-1; b_n \ge 0; i = \overline{-m,n}\right)$ *thì b là số được viết trong hệ đếm cơ số k là:*

$$b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \ldots b_{-m})_k ,$$

trong đó k là cơ số của hệ đếm, b_i $(i = \overline{-m;n})$ là các chữ số của b, $b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0$ là phần nguyên, $b_{-1} b_{-2} \ldots b_{-m}$ là phần lẻ (được gọi là phần phân).

Thí dụ

1. $(2354.12)_{10} = 2\times10^3 + 3\times10^2 + 5\times10^1 + 4\times10^0 + 1\times10^{-1} + 2\times10^{-2}$;

2. $(2354.12)_6 = 2\times6^3 + 3\times6^2 + 5\times6^1 + 4\times6^0 + 1\times6^{-1} + 2\times6^{-2} = \left(\dfrac{20671}{36}\right)_{10}$;

3. $(3576587612356123)_9 = 3\times9^{15} + 5\times9^{14} + 7\times9^{13} + 6\times9^{12} + 5\times9^{11} + 8\times9^{10}$
$+ 7\times9^9 + 6\times9^8 + 1\times9^7 + 2\times9^6 + 3\times9^5 + 5\times9^4 + 6\times9^3 + 1\times9^2 + 2\times9^1 + 3\times9^0$
$= (751732772433382)_{10}$;

4. $(3576587612356123)_{12} = 3\times12^{15} + 5\times12^{14} + 7\times12^{13} + 6\times12^{12} + 5\times12^{11} + 8\times12^{10} +$
$7\times12^9 + 6\times12^8 + 1\times12^7 + 2\times12^6 + 3\times12^5 + 5\times12^4 + 6\times12^3 + 1\times12^2 + 2\times12^1 + 3\times12^0$
$= (53447355208631113)_{10}$;

Từ thí dụ trên ta thấy hai số viết bởi những chữ số như nhau trong hệ đếm cơ số khác nhau thì giá trị thập phân của nó hoàn toàn khác nhau, ta cũng dễ dàng chứng minh được số viết như nhau trong hệ đếm với cơ số lớn hơn thì giá trị thập phân của nó lớn hơn. Và trong một số thì những chữ số giống nhau đứng ở những vị trí khác nhau thì có giá trị hoàn toàn khác nhau.

Như vậy khi viết các số dù ở hệ đếm cơ số nào thì nó cũng bao gồm hai phần: *phần nguyên* và *phần phân* (hay còn gọi là *phần lẻ*), giữa hai phần ấy được ngăn cách với nhau bởi dấu "," hoặc dấu ".". Phần đứng bên trái của dấu "," hoặc "." được gọi là *phần nguyên*, phần đứng bên phải của dấu "," hoặc "." được gọi là *phần lẻ* hay *phần phân*. Nếu số có phần lẻ bằng 0 thì không cần dùng dấu "," hoặc "." nữa và số đó gọi là *số nguyên*.

Nếu số b viết trong hệ đếm cơ số 10 thì không cần viết cơ số kèm theo.

Vấn đề đặt ra là nếu ta có số b viết trong hệ đếm cơ số k thì ta có thể chuyển nó sang các hệ đếm với cơ số khác được hay không? Làm thế nào để đổi biểu diễn của nó từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác?

§2. Qui tắc đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác

Việc chuyển biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác dựa trên các định lý sau.

Định lý 2.1

Cho b và k là những số tự nhiên. Khi đó tồn tại duy nhất các số tự nhiên a, r với $0 \leq a < b;\ 0 \leq r < k$, sao cho $b = ka + r$.

Nếu b chia hết cho a thì $r = 0$.

Chứng minh

Nếu $b < k$ thì $a = 0;\ 0 \leq r = b < k$.

Nếu $b \geq k$. Theo tiên đề Archimedus tồn tại số a sao cho $ka \leq b \leq (a+1)k$.

Đặt $r = b - ka$. Khi ấy $0 \le r = b - ka < k$ và $b = ka + r$.

Giả sử tồn tại cặp (a_1, r_1) cũng thoả $b = ka_1 + r_1$ với $0 \le a_1 < b; 0 \le r_1 < k$.

Ta sẽ chứng minh rằng $a_1 = a$; $r_1 = r$.

Thật vậy, nếu $0 \le r < r_1$ thì $r - r_1 = k(a_1 - a)$ suy ra $r - r_1$ chia hết cho k mà $0 \le r, r_1 < k$ nên $r - r_1 = 0$. Suy ra $a_1 = a$; $r_1 = r$.

Vậy cặp a, r là duy nhất thoả mãn biểu diễn $b = ka + r$.

Định lý 2.2

Cho hai số tự nhiên $b; k$. Khi đó tồn tại duy nhất biểu diễn của b dưới dạng đa thức của k có dạng:

$$b = b_n k^n + b_{n-1} k^{n-1} + ... + b_1 k^1 + b_0 k^0,$$

trong đó các b_i thoả mãn điều kiện $0 \le b_i \le k - 1$, $i = \overline{0;n}$, $b_n > 0$.

Chứng minh

Từ Định lý 2.1 ta có: Đem chia b cho k ta được duy nhất cặp $(a_0; b_0)$ thoả mãn $b = ka_0 + b_0$, trong đó $0 \le b_0 \le k - 1; 0 \le a_0 < b$.

Nếu $b < k$ thì $a_0 = 0$ suy ra b là đa thức bậc 0.

Nếu $b > k$ thì $a_0 > 0$, khi đó ta lại chia a_0 cho k ta được duy nhất cặp $(a_1; b_1)$ sao cho: $0 \le b_1 \le k - 1; 0 \le a_1 < a_0 < b$ thỏa mãn $a_0 = ka_1 + b_1$ thì $b = k(ka_1 + b_1) + b_0$ hay $b = a_1 k^2 + b_1 k + b_0$.

Nếu $a_0 < k$ thì $a_1 = 0$ và b là đa thức bậc nhất với k.

Nếu $a_0 > k$ thì $a_1 > 0$ khi đó ta lại chia a_1 cho k ta được duy nhất cặp $(a_2; b_2)$ sao cho: $0 \le b_2 \le k - 1; 0 \le a_2 < a_1 < a_0 < b$ thỏa mãn $a_1 = ka_2 + b_2$.

Do đó: $b = (ka_2 + b_2)k^2 + b_1 k + b_0 = a_2 k^3 + b_2 k^2 + b_1 k + b_0$.

Quá trình trên cứ tiếp tục như vậy và ta sẽ thu được dãy a_i thoả mãn:

$$0 \le a_n < a_{n-1} < ... < a_1 < a_0 \le b.$$

Sau $n+1$bước ta có

$$b = b_n k^n + b_{n-1} k^{n-1} + ... + b_1 k^1 + b_0 k^0$$

thoả mãn điều kiện $0 \le b_i \le k-1$ với $i = \overline{0;n}$, $b_n > 0$.

Ta có thể tính được bậc của đa thức theo b và k:

Vì $b = b_n k^n + b_{n-1} k^{n-1} + ... + b_1 k^1 + b_0 k^0$ thoả mãn điều kiện $0 \le b_i \le k-1$ với $i = \overline{0;n}$, $b_n > 0$ nên

$$k^n < b \le (k-1)(k^n + k^{n-1} + ... + k + 1) = k^{n+1} - 1 < k^{n+1}$$

tức là $k^n < b < k^{n+1}$. Suy ra $n < \log_k b < n+1$ hay $n = [\log_k b]$, trong đó $[q]$ kí hiệu là *phần nguyên* của q (số nguyên lớn nhất không vượt quá q).

§3. Đổi biểu diễn của một số từ hệ cơ số này sang hệ cơ số khác

3.1 Đổi biểu diễn của một số từ cơ số 10 sang cơ số k

3.1.1 Trường hợp b là số nguyên

Cách 1 (dùng phép chia liên tiếp)

Theo Định lý 2.2 ta thấy việc đổi biểu diễn của một số b từ hệ đếm cơ số 10 sang hệ đếm cơ số k thực chất chính là việc chia số b cho k lấy dư, được kết quả lại chia cho k lấy dư,… Quá trình cứ tiếp tục cho đến khi kết quả là số không chia được cho k thì dừng lại. Khi đó số b trong hệ đếm cơ số 10 có biểu diễn trong hệ đếm cơ số k chính là thương sau cùng và các số dư viết theo thứ tự từ dưới lên trên.

Chúng ta sẽ xét một vài thí dụ sau.

Thí dụ 3.1.1

Chuyển biểu diễn của số 1850 từ hệ đếm cơ số 10 sang hệ đếm cơ số 2.

Thực hiện phép chia 1850 | 2

0 925 | 2

1 462 | 2

0 231 | 2

1 115 | 2

1 57 | 2

1 28 | 2

0 14 | 2

0 7 | 2

1 3 | 2

1 **1**

Vậy: $1850 = 1.2^9 + 1.2^8 + 0.2^7 + 0.2^6 + 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$

nên $1850 = (1100111010)_2$.

Thí dụ 3.1.2

Chuyển biểu diễn của số 1850 sang hệ đếm cơ số 3.

Thực hiện phép chia 1850 | 3

2 616 | 3

1 205 | 3

1 68 | 3

2 22 | 3

1 7 | 3

1 **2**

Vậy $1850 = 2.3^6 + 1.3^5 + 1.3^4 + 2.3^3 + 1.3^2 + 1.3^1 + 2.3^0$, hay $1850 = (2112112)_3$.

Thí dụ 3.1.3

Chuyển biểu diễn của số 1850 sang hệ đếm cơ số 7.

Thực hiện phép chia

$$\begin{array}{r|l} 1850 & 7 \\ \hline \mathbf{2} & 264 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 264 & 7 \\ \hline \mathbf{5} & 37 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 37 & 7 \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{array}$$

Vậy: $1850 = 5\times7^3 + 2\times7^2 + 5\times7^1 + 2\times7^0$ nên $1850 = (5252)_7$.

Cách 2 (Biểu diễn qua tổng các lũy thừa của k)

Nếu không thực hiện phép chia thì ta cũng có thể phân tích được số b thông qua tổng các lũy thừa của k. Từ đó có cách viết số b trong hệ đếm cơ số mới k.

Thí dụ 3.1.4

Chuyển biểu diễn của số 2345 sang hệ đếm cơ số 2.

Ta có:

2345 = 2048 + 256 + 32 +8 +1

$= 2^{11} + 2^8 + 2^5 + 2^3 + 2^0$

$= 1.2^{11} + 0.2^{10} + 0.2^9 + 1.2^8 + 0.2^7 + 0.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$.

Vậy: 2345 =$(100100101001)_2$.

Thí dụ 3.1.5

Chuyển số 123456 sang hệ đếm cơ số 3 .

Ta có:

$123456 = 2\times59049+2\times2187+729+243+9+3$

$= 2\times3^{10} + 2\times3^7 + 3^6 + 3^5 + 3^2 + 3$

$= 2.3^{10} + 0.3^9 + 0.3^8 + 2.3^7 + 1.3^6 + 1.3^5 + 0.3^4 + 0.3^3 + 1.3^2 + 1.3^1 + 0.3^0$.

Vậy 123456 = $(20021100110)_3$.

Tuy nhiên cả hai cách trên đều có nhược điểm:

Cách 1 rất đơn giản, dễ vận dụng nhưng lại rất dài. Nó chỉ phù hợp với những số trong phạm vi nhỏ. Còn ở Cách 2 thì việc phân tích hoặc là phải sử dụng phép chia như Cách 1 rồi mới rút ra được kết luận hoặc cũng phải mò mẫm thì mới tìm được đa thức theo biến k, do đó nó cũng chỉ phù hợp với các số và cơ số đếm trong phạm vi nhỏ.

Cách 3 (Phương pháp logarit hóa)

Chúng ta có định nghĩa $\log_a m = n \Leftrightarrow m = a^n$. Từ Định lý 2.2 chúng ta cũng biết cách tìm bậc của đa thức theo cơ số k là $n = [\log_k b]$. Và từ cách biểu diễn của b suy ra:

$$b = b_n k^n + b_{n-1}k^{n-1} + \ldots + b_1 k^1 + b_0 k^0 \Leftrightarrow \frac{b}{k^n} = b_n + \frac{b_{n-1}}{k} + \ldots + \frac{b_1}{k^{n-1}} + \frac{b_0}{k^n}.$$

Chứng tỏ

$$\left[\frac{b}{k^n}\right] = \left[b_n + \frac{b_{n-1}}{k} + \ldots + \frac{b_1}{k^{n-1}} + \frac{b_0}{k^n}\right] = b_n + \left[\frac{b_{n-1}}{k} + \ldots + \frac{b_1}{k^{n-1}} + \frac{b_0}{k^n}\right].$$

Mà $0 \le b_i \le k-1$ với mọi $i = \overline{0;n}$ nên

$$0 \le \frac{b_{n-1}}{k} + \ldots + \frac{b_1}{k^{n-1}} + \frac{b_0}{k^n} \le \frac{(k-1)}{k^n}\left(k^{n-1} + \ldots + 1\right) \le \frac{(k-1)}{k^n}\frac{\left(k^n - 1\right)}{k-1} < 1.$$

Vậy $\left[\frac{b_{n-1}}{k} + \ldots + \frac{b_1}{k^{n-1}} + \frac{b_0}{k^n}\right] = 0$ hay $b_n = \left[\frac{b}{k^n}\right]$.

Vậy để tìm được biểu diễn của b qua tổng các lũy thừa của k ta lần lượt làm như sau:

- Tìm $n = [\log_k b]$. Điều này có thể thực hiện dễ dàng trên máy tính khoa học *Casio fx-570ES*. Còn với *Casio fx-570MS, Calculator* hoặc các máy tính khác có chức năng tương đương thì ta phải sử dụng công thức đổi cơ số $\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}$ hoặc $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$, trong đó $\lg b$ và $\ln b$ là logarithm cơ số 10 và cơ số tự nhiên e của b.

- Tìm hệ số b_n (hay là chữ số đầu tiên trong biểu diễn của b theo hệ đếm cơ số k) từ công thức $b_n = \left[\dfrac{b}{k^n}\right]$.

Lấy $b - b_n \times k^n = b'$. Khi đó ta lại tiếp tục tìm số mũ $n-1$ của k và hệ số b_{n-1} của k^{n-1} như hai phần trên.

Mọi thao tác này có thể làm được dễ dàng trên các máy tính.

Thí dụ 3.1.6

Chuyển số 34563215400 thành số viết trong hệ đếm cơ số 6.

Tính trên máy:

- $[\log_6 34563215400] = 13;\ \left[\dfrac{34563215400}{6^{13}}\right] = 2 \Rightarrow b_{13} = 2;$
- $34563215400 - 2\times 6^{13} = 8441827368;\ \left[\dfrac{8441827368}{6^{12}}\right] = 3 \Rightarrow b_{12} = 3;$
- $8441827368 - 3\times 6^{12} = 1911480360;\ \left[\dfrac{1911480360}{6^{11}}\right] = 5 \Rightarrow b_{11} = 5;$
- $1911480360 - 5\times 6^{11} = 97495080;\ \left[\dfrac{97495080}{6^{10}}\right] = 1 \Rightarrow b_{10} = 1;$
- $97495080 - 1\times 6^{10} = 37028904;\ \left[\dfrac{37028904}{6^{9}}\right] = 3 \Rightarrow b_{9} = 3;$
- $37028904 - 3\times 6^{9} = 6795816;\ \left[\dfrac{6795816}{6^{8}}\right] = 4 \Rightarrow b_{8} = 4;$
- $6795816 - 4\times 6^{8} = 77352;\ \left[\dfrac{77352}{6^{7}}\right] = 0 \Rightarrow b_{7} = 0;$
- $77352 - 0\times 6^{7} = 77352;\ \left[\dfrac{77352}{6^{6}}\right] = 1 \Rightarrow b_{6} = 1;$
- $77352 - 1\times 6^{6} = 30696;\ \left[\dfrac{30696}{6^{5}}\right] = 3 \Rightarrow b_{5} = 3;$
- $30696 - 3\times 6^{5} = 7368;\ \left[\dfrac{7368}{6^{4}}\right] = 5 \Rightarrow b_{4} = 5;$

- $7368 - 5\times 6^4 = 888$; $\left[\dfrac{888}{6^3}\right] = 4 \quad \Rightarrow b_3 = 4$;
- $888 - 4\times 6^3 = 24$; $\left[\dfrac{24}{6^2}\right] = 0 \quad \Rightarrow b_2 = 0$;
- $24 - 0\times 6^2 = 24$; $\left[\dfrac{24}{6}\right] = 4$; $\Rightarrow b_1 = 4$;
- $24 - 4\times 6 = 0$; $\Rightarrow b_0 = 0$.

Vậy: 34563215400 = $(23513401354040)_6$.

Thí dụ 3.1.7

Chuyển số 98765001234 thành số viết trong hệ đếm cơ số 18.

- $[\log_{18} 98765001234] = 8$; $\left[\dfrac{98765001234}{18^8}\right] = 8 \quad \Rightarrow b_8 = 8$;
- $98765001234 - 8\times 18^8 = 10605316626$; $\left[\dfrac{10605316626}{18^7}\right] = 17 \quad \Rightarrow b_7 = 17$;
- $10605316626 - 17\times 18^7 = 197576082$; $\left[\dfrac{197576082}{18^6}\right] = 5 \quad \Rightarrow b_6 = 5$;
- $197576082 - 5\times 18^6 = 27514962$; $\left[\dfrac{27514962}{18^5}\right] = 14 \quad \Rightarrow b_5 = 14$;
- $27514962 - 14\times 18^5 = 1061010$; $\left[\dfrac{1061010}{18^4}\right] = 10 \quad \Rightarrow b_4 = 10$;
- $1061010 - 10\times 18^4 = 11250$; $\left[\dfrac{11250}{18^3}\right] = 1 \quad \Rightarrow b_3 = 1$;
- $11250 - 1\times 18^3 = 5418$; $\left[\dfrac{5418}{18^2}\right] = 16 \quad \Rightarrow b_2 = 16$;
- $5418 - 16\times 18^2 = 234 \Rightarrow \left[\dfrac{234}{18}\right] = 13 \quad \Rightarrow b_1 = 13$;
- $234 - 13\times 18 = 0 \Rightarrow b_0 = 0$.

Các chữ số từ 0 đến 9 chưa biểu diễn đủ 18 ký tự trong hệ đếm cơ số 18, nên ta đặt thêm các ký tự: A =10, B =11, C =12, D =13, E =14, F =15, G =16, H =17.

Vậy 98765001234 =$(8H5EA1GD0)_{18}$.

Cách này cho phép chúng ta chuyển đổi số từ hệ đếm cơ số 10 sang các hệ đếm cơ số khác đối với các số ở phạm vi lớn hơn nhưng phải có sự hỗ trợ của máy tính và việc chuyển đổi cũng mất nhiều thời gian.

Cách 4 (Khai triển nhị thức Newton)

Ta có nhị thức Newton cho 2 số a và b: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^{\ k} \times a^{n-k} \times b^k$. Do vậy b sẽ được biểu diễn qua tổng các lũy thừa của 10, còn các lũy thừa của 10 sẽ được biểu diễn qua các lũy thừa của k. Ghép các kết quả trên lại với nhau ta sẽ thu được kết quả cần tìm.

Thí dụ 3.1.8

Chuyển 105 sang hệ nhị phân.

Ta có:

$$105 = 1\times10^2 + 5\times10^0;\ 10 = 2^3 + 2^1;\ 5 = 2^2 + 2^0$$

nên

$$105 = 1\times10^2 + 5\times10^0 = 1\times\left(2^3+2^1\right)^2 + \left(2^2+2^0\right)\times1$$
$$= 2^6 + 2\times2^3\times2 + 2^2 + 2^2 + 2^0$$
$$= 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2^0$$
$$= 1\times2^6 + 1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^1 + 1\times2^0$$
$$= (1101001)_2.$$

Tuy nhiên cách này chỉ sử dụng được khi số b nhỏ, k = 2 còn với số và cơ số lớn hơn thì rất khó vận dụng, nên cách này ít có ứng dụng thực tế.

3.1.2 Trường hợp b là số thập phân

Số thập phân bao gồm hai phần: phần nguyên và phần thập phân. Đối với phần nguyên chúng ta đã biết cách chuyển đổi cơ số ở mục 3.1.1. Vậy phần thập phân có thể chuyển đổi cơ số giống như phần như phần nguyên được hay không?

Trước hết ta lấy một ví dụ: (0.5) = 1/2 = 1×2^{-1} = $(0.1)_2$. Mà 0.5 hay 1/2:2 không được thương và số dư là một số nguyên nên ta không thể theo phần 3.1 được.

Xét phân số $\frac{m}{n}$ $(m<n)$ và tìm cách chuyển nó sang hệ đếm cơ số k.

Nếu ta viết được

$$\frac{m}{n}=a_{-1}\times k^{-1}+a_{-2}\times k^{-2}+\ldots+a_{-m}\times k^{-m} \qquad (1)$$

với $0\le a_{-1},a_{-2}\ldots a_{-m}\le k-1$ thì $\frac{m}{n}=\left(0.a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-m}\right)_k$.

Các hệ số $a_{-1},a_{-2},\ldots,a_{-m}$ được xác định như sau. Từ (1) ta có

$$a_{-1}=\left(\frac{m}{n}\right)k-\left(a_{-2}k^{-1}+\ldots+a_{-m}k^{-m+1}\right) \qquad (2)$$

mà

$$0\le a_{-2}k^{-1}+\ldots+a_{-m}k^{-m+1}\le\frac{(k-1)}{k^{m-1}}\left(k^{m-2}+\ldots+1\right)\le\frac{(k-1)}{k^{m-1}}\frac{\left(k^{m-1}-1\right)}{k-1}<1$$

nên

$$a_{-1}=\left[\left(\frac{m}{n}\right)k\right]. \qquad (3)$$

Đặt $\left\{\frac{m}{n}k\right\}=\frac{p}{q}$ thì hoàn toàn tương tự ta tính được

$$a_{-2}=\left[\frac{p}{q}k\right]. \qquad (4)$$

Quá trình trên cứ tiếp tục như vậy cho đến khi chúng ta xác định được tất cả các hệ số $a_{-1},a_{-2},\ldots,a_{-m}$.

Chúng ta hãy xét một vài thí dụ sau.

Thí dụ 3.1.9

Chuyển 0.835 sang hệ đếm cơ số 2.

$0.835\times2=1.670 \Rightarrow a_{-1}=1;$ $\qquad$ $0.670\times2=1.340 \Rightarrow a_{-2}=1;$

$0.340 \times 2 = 0.680 \;\Rightarrow\; a_{-3} = 0;\qquad 0.680 \times 2 = 1.360 \;\Rightarrow\; a_{-4} = 1;$
$0.360 \times 2 = 0.720 \;\Rightarrow\; a_{-5} = 0;\qquad 0.720 \times 2 = 1.440 \;\Rightarrow\; a_{-6} = 1;$
$0.440 \times 2 = 0.880 \;\Rightarrow\; a_{-7} = 0;\qquad 0.880 \times 2 = 1.760 \;\Rightarrow\; a_{-8} = 1;$
$0.760 \times 2 = 1.520 \;\Rightarrow\; a_{-8} = 1;\ldots$

Vậy $0.835 = (0.110101011\ldots)_2$.

Thí dụ 3.1.10

Chuyển 0.3478 sang hệ đếm cơ số 7.

$0.3478 \times 7 = 2.4346 \;\Rightarrow\; a_{-1} = 2;\qquad 0.4346 \times 7 = 3.0422 \;\Rightarrow\; a_{-2} = 3;$
$0.0422 \times 7 = 0.2954 \;\Rightarrow\; a_{-3} = 0;\qquad 0.2954 \times 7 = 2.0678 \;\Rightarrow\; a_{-4} = 2;$
$0.0678 \times 7 = 0.4746 \;\Rightarrow\; a_{-5} = 0;\qquad 0.4746 \times 7 = 3.3222 \;\Rightarrow\; a_{-6} = 3;\ldots$

Vậy: $0.3478 = (0.230203\ldots)_7$

Thí dụ 3.1.11

Chuyển 485.35 sang hệ đếm cơ số 6.

Trước hết chuyển 485 sang hệ đếm cơ số 6 bằng cách chia lấy dư:

$$\begin{array}{r|l}
485 & 6 \\ \hline
\mathbf{5} & 80 \;\big|\; 6 \\
 & \quad \mathbf{2} \;\big|\; 13 \;\big|\; 6 \\
 & \qquad\quad \mathbf{1} \;\big|\; \mathbf{2}
\end{array}$$

Ta có $485 = (2125)_6$.

Sau đó đổi 0.35 sang hệ đếm cơ số 6.

Ta có

$$0.35\times 6 = 2.10;\quad 0.10\times 6 = 0.60;\quad 0.60\times 6 = 3.60;\quad 0.60\times 6 = 3.60;\ldots$$

nên $0.35 = (0.2033\ldots)_6$. Vậy $485.35 = (2125.2033\ldots)_6$.

Như vậy để chuyển một số từ hệ đếm cơ số 10 sang hệ đếm cơ số k thì ta phải chú ý đến việc chuyển riêng phần nguyên và phần thập phân sang hệ đếm cơ số k theo mục **3.1.1** và **3.1.2** đã nêu ở phần trên.

3.2. Chuyển biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số k sang hệ đếm cơ số 10

Thực chất là ta viết số đó dưới dạng tường minh qua tổng các lũy thừa của k và tính tổng ấy.

Thí dụ 3.2

$(4356)_7 = 4\times7^3 + 3\times7^2 + 5\times7^1 + 6\times7^0 = 1560$;
$(3845A)_{16} = 3\times16^4 + 8\times16^3 + 4\times16^2 + 5\times16^1 + 10\times16^0 = 230490$;
$(32.13)_4 = 3\times4^1 + 2\times4^0 + 1\times4^{-1} + 3\times4^{-2} = 14.4375$;
$(1210.0121)_3 = 1\times3^3 + 2\times3^2 + 1\times3^1 + 0\times3^0 + 0\times3^{-1} + 1\times3^{-2} + 2\times3^{-3} + 1\times3^{-4} = 48.1975$.

Chúng ta sẽ đề cập tới các cách khác để chuyển biểu diễn của b từ hệ đếm cơ số k sang hệ cơ số 10 sau khi đề cập tới các phép toán trong các hệ cơ số k.

3.3. Chuyển biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số k_1 sang hệ đếm cơ số k_2

Để chuyển biểu diễn của một số trong hệ đếm cơ số k_1 sang hệ đếm cơ số k_2 **(**k_1**,** $k_2 \neq 10$**),** chúng ta sẽ sử dụng hệ đếm cơ số 10 làm trung gian.

Bước 1. Chuyển số từ hệ đếm cơ số k_1 sang hệ đếm cơ số 10 (như ở mục 3.2).

Bước 2. Chuyển số từ hệ đếm cơ số 10 sang hệ đếm cơ số k_2 (như ở mục 3.1).

Thí dụ 3.3.1

Chuyển số $(456)_7$ sang hệ đếm cơ số 3.

Bước 1 $(456)_7 = 4\times7^2 + 5\times7^1 + 6\times7^0 = 237$.

Bước 2 $237 = 2\times81 + 2\times27 + 2\times9 + 1\times3 + 0\times1$

$= 2\times3^4 + 2\times3^3 + 2\times3^2 + 1\times3^1 + 0\times3^0 = (22210)_3$.

Vậy $(456)_7 = (22210)_3$.

Thí dụ 3.3.2

Chuyển số $(3450.234)_6$ sang hệ đếm cơ số 9.

Bước 1

$(3450.234)_6 = 3\times6^3 + 4\times6^2 + 5\times6^1 + 0\times6^0 + 2\times6^{-1} + 3\times6^{-2} + 4\times6^{-3} = 822.4351852$.

Bước 2 822 | 9

3 | 91 | 9

1 | 10 | 9

1 | **1**

0.4351852 × 9 = **3**. 9166668; 0. 9166668 ×9 = **8**.2500012;
0.2500012×9 =**2**.2500108; 0.2500108 × 9 =**2**.2500972;
0.2500972 ×9 = **2**.2508748; 0.2508748 ×9 = **2**.2578732;
0.2578732 × 9 = **2**.3208588;…

Vậy 822.4351852 = $(1113.3822222\ldots)_9$.

Suy ra: $(3450.234)_6$ =822.4351852 = $(1113.3822222\ldots)_9$.

Chúng ta sẽ đề cập tới cách khác chuyển đổi biểu diễn của b từ hệ đếm cơ số k_1 sang hệ đếm cơ số k_2 sau khi đề cập tới các phép toán trong hệ đếm cơ số k.

Đặc biệt

Nếu ta chuyển đổi số từ hệ đếm cơ số 2 sang hệ đếm cơ số 4, 8, 16,…, 2^n thì ta có thể làm nhanh như sau.

Tách số đó thành từng nhóm có tương ứng 2, 3, 4,…, n chữ số từ phải qua trái (nhóm cuối cùng có thể không đủ 2, 3, 4,…, n chữ số) rồi chuyển mỗi nhóm đó thành chữ số trong hệ đếm cơ số 4, 8, 16,…, 2^n.

Thí dụ 3.3.3

1. Số $(111011100)_2$ được phân tích theo nhóm 1 | 11 | 01 | 11 | 00 **v**à được đổi thành 1 3 1 3 0 trong hệ đếm cơ số 4 nên ta có $(111011100)_2 = (13130)_4$.

2. Số $(111011100)_2$ được phân tích thành 111 | 011 | 100 và được đổi thành 7 3 4 trong hệ đếm cơ số 8 nên ta có kết quả $(111011100)_2 = (734)_8$.

3. Số $(111011100)_2$ được phân tích thành 1 | 1101 | 1100 và được đổi thành 1 D C trong hệ đếm cơ số 16 nên ta có kết quả $(111011100)_2 = (1DC)_{16}$.

Ngược lại ta cũng có thể đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số 4, 8, 16,…, 2^n sang hệ đếm cơ số 2 bằng cách chuyển mỗi chữ số của số đó thành số có tương ứng 2, 3, 4,…, n chữ số trong hệ đếm cơ số 2 kể từ phải qua trái thì ta sẽ được kết quả (nếu không đủ thì viết thêm số 0 vào phía bên trái).

Thí dụ 3.3.4

1. Số $(43756)_8$ được phân tích 4 | 3 | 7 | 5 | 6

và được đổi thành 100| 011| 111| 101| 110 trong hệ đếm cơ số 2

nên ta có kết quả $(43756)_8 = (100011111101110)_2$.

2. Số $(2386D)_{16}$ được phân tích thành 2 | 3 | 8 | 6 | D

và được đổi thành 0010 0011 1000 0110 1101

trong hệ đếm cơ số 2 nên ta có $(2386D)_{16} = (100011100001101101)_2$.

Hoàn toàn tương tự như trên ta có thể chuyển đổi một số từ hệ đếm cơ số k^n sang hệ đếm cơ số k và ngược lại.

Thí dụ 3.3.5

1. Số $(12002102111211200)_3$ được phân tích thành các nhóm:

1 | 20 | 02 | 10 | 21 | 11 | 21 | 12 | 00

và được đổi thành 1 6 2 3 7 4 7 5 0

trong hệ đếm cơ số 9 nên ta có $(12002102111211200)_3 = (162374750)_9$.

2. Số $(12002102111211200)_3$ được phân tích thành các nhóm:

12 | 002 | 102 | 111 | 211 | 200

và được đổi thành 5 2 11 13 22 18

trong hệ đếm cơ số 27 nên ta có $(12002102111211200)_3 = (\,5\,2\,\overline{11}\,\overline{13}\,\overline{22}\,\overline{18})_{27}$

§4. Sử dụng máy tính để đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số k_1 sang hệ đếm cơ số k_2

4.1 Sử dụng máy tính khoa học *Casio fx-570ES* (hoặc các loại máy tính khác có chức năng tương đương)

Các máy tính khoa học (Scientific Calculator) được trang bị bốn hệ đếm là hệ đếm cơ số 10 (decimal, viết tắt là **Dec**), hệ đếm cơ số 2 (binary, viết tắt là **Bin**), hệ đếm cơ số 8 (octal, viết tắt là **Oct**) và hệ đếm cơ số 16 (hexadecimal, viết tắt là **Hex**). Do vậy ta có thể chuyển biểu diễn của một số nguyên dương (trong phạm vi 10 chữ số) giữa các hệ đếm có cơ số là 2, 8, 10, 16. Mặc dù còn một số hạn chế, các máy tính khoa học tương đối thuận tiện cho việc đổi cơ số.

Để chuyển đổi biểu diễn của một số trên máy tính khoa học *Casio fx-570ES* ta bấm phím $\boxed{\text{MODE}}\boxed{4}$, khi đó trên màn hình xuất hiện chữ **Dec**, tức là ta đang ở hệ đếm cơ số 10. Ta nhập số trong hệ đếm cơ số 10 và ấn phím $\boxed{=}$. Muốn chuyển số đó sang hệ đếm cơ số nào thì ta bấm phím tương ứng ta sẽ được kết quả hiện trên màn hình.

Thí dụ 4.1.1

Chuyển số 1234567898 thành số trong hệ đếm cơ số 8.

Vào chương trình đổi cơ số: $\boxed{\text{MODE}}\boxed{4}$

Chuyển số 1234567898 từ cơ số 10 sang cơ số 8:

$\boxed{1234567898}\boxed{=}\boxed{\text{OCT}}$ (11145401332)

Vậy (số trong ngoặc là đáp số trên màn hình): $1234567898 = (11145401332)_8$.

Thí dụ 4.1.2

Chuyển số $(11101010011110)_2$ thành số trong hệ đếm cơ số 8.

Vào chương trình làm việc với cơ số 2: $\boxed{\text{MODE}}\boxed{4}\boxed{\text{BIN}}$

Khai báo và chuyển $(11101010011110)_2$ sang cơ số 8:

$\boxed{11101010011110}\boxed{=}\boxed{\text{OCT}}$ (35236)

Vậy: $(11101010011110)_2 = (35236)_8$.

Thí dụ 4.1.3

Chuyển số $(12365470123)_8$ sang hệ đếm có số 16.

Vào chương trình làm việc với cơ số 8: $\boxed{\text{MODE}}\boxed{4}\boxed{\text{OCT}}$

Khai báo và chuyển $(12365470123)_8$ sang cơ số 16:

$\boxed{12365470123}\boxed{=}\boxed{\text{Hex}}$ (53D67053)

Vậy: $(12365470123)_8 = (53D67053)_{16}$.

4.2 Sử dụng máy tính *Calculator* được cài đặt trên Window

Calculator được cài đặt sẵn trên *Window* nên rất tiện sử dụng. *Caculator* được trang bị bốn hệ đếm là hệ đếm cơ số 10, hệ đếm cơ số 2, hệ đếm cơ số 8 và hệ đếm cơ số 16. *Calculator* cho phép đổi biểu diễn của một số nguyên dương giữa các hệ đếm có cơ số là 2, 8, 10, 16 với những số lớn (trong phạm vi 33 chữ số) mà máy tính khoa học không làm được. Cách thực hiện các thao tác chuyển đổi giống như với máy tính khoa học.

Thí dụ 4.2.1

Chuyển số 123456789098 thành số trong hệ đếm cơ số 2.

Vào *Calculator* và khai báo 123456789098 trong hệ đếm cơ số 10:

$\boxed{\text{Start}}\boxed{\text{Programs}}\boxed{\text{Accessories}}\boxed{\text{Caculator}}\boxed{\text{Dec}}\boxed{123456789098}$

Chuyển sang hệ đếm cơ số 2:

$\boxed{\text{Bin}}$ (1110010111110100110010001101001101010)

Vậy: $123456789098= (1110010111110100110010001101001101010)_2$.

Thí dụ 4.2.2

Chuyển số $(12345670765432112345 67)_8$ thành số trong hệ đếm 16.

Vào *Calculator* và khai báo $(1234567076543211234567)_8$ trong hệ đếm cơ số 8:

$\boxed{\text{Start}}\boxed{\text{Programs}}\boxed{\text{Accessories}}\boxed{\text{Caculator}}\boxed{\text{Oct}}$

Khai báo $(1234567076543211234567)_8$ và chuyển sang hệ đếm cơ số 16:

$\boxed{1234567076543211234567}\boxed{\text{Hex}}$ (A72EE3EB1A253977)

Vậy: $(1234567076543211234567)_8 =(A72EE3EB1A253977)_{16}$.

Các máy tính khoa học và máy tính *Calculator* đều chỉ chuyển đổi một số nguyên dương giữa các hệ đếm với cơ số là 2, 8, 10, 16. Muốn chuyển đổi số giữa các hệ đếm với cơ số bất kỳ và chuyển đổi số thập phân thì ta phải sử dụng các chương trình cao cấp hơn, thí dụ, phần mềm *Maple*.

4.3. Sử dụng *Maple* để chuyển đổi biểu diễn của một số

Maple là phần mềm toán học với nhiều tiện ích. Nó có khả năng tính toán trên các số rất lớn. *Maple* cho ta một công cụ tốt để triển khai các thuật toán có độ phức tạp cao mà không một mẹo mực thủ công nào có thể thay thế được.

Sơ lược về *Maple*

Cụm xử lý (Execution group)

Đây là thành phần tính toán cơ bản trong môi trường làm việc của *Maple*. Mọi tính toán đều được làm việc ở đây. Nó chứa các lệnh của *Maple* cùng với các kết quả tính toán kể cả đồ thị,…. Có thể dễ dàng nhận biết một cụm xử lý bằng dải ngoặc vuông bên trái của dấu nhắc lệnh.

Lệnh của *Maple*

Lệnh của *Maple* được đưa vào trang công tác sau dấu nhắc lệnh trong các cụm xử lý. Lệnh thực hiện các phép toán và các biểu thức số học được viết trực tiếp như trong các văn bản thông thường.

Trong *Maple* thì

phép nhân biểu thị bằng dấu : “ * ” ,

phép chia biểu thị bằng dấu: “ / ”,

phép lũy thừa biểu thị bằng dấu: “ ^ ” ,

phép khai căn bậc hai biểu thị bằng chuỗi ký tự: “ sqrt ”.

Đặc biệt kết thúc dòng lệnh bằng dấu “ ; ” và lệnh được thực hiện bằng cách nhấn phím “Enter” khi con trỏ đang ở trên dòng lệnh.

4.3.1 Sử dụng *Maple* để chuyển đổi số từ hệ đếm cơ số 10 sang hệ đếm cơ số 2, 8, 16

Khai báo câu lệnh:

```
> convert(a,binary);
```

Hoặc

```
> convert(a,octal);
```

Hoặc

```
> convert(a,hex);
```

và kết thúc bằng cách bấm phím " Enter", trong đó **a** là số trong cơ số 10.

Thí dụ 4.3.1

```
> convert(1234567890989865431209876543,binary);
```

```
111111110100110101111010110111100101111111100101001010001110010\
010101111000001110000111111
```

Vậy:

1234567890989865431209876543=

(1111111101001101011110101101111001011111111001010010100011100100

10101111000001110000111111)$_2$.

Thí dụ 4.3.2

```
> convert(123456789098986543120987654334567,octal);
```

```
302617463156210460560574311046424147
```

Vậy:

123456789098986543120987654334567=302617463156210460560574311046424147$_8$.

Thí dụ 4.3.3

```
> convert(0.1234567898765432,octal);
```

```
0.07715335165
```

Vậy: 0.1234567898765432 = (0.07715335165)$_8$

4.3.2. Sử dụng *Maple* chuyển đổi số từ hệ đếm cơ số 10 sang hệ đếm cơ số k

Khai báo câu lệnh:

```
> convert(a,base,k);
```

và kết thúc bằng cách bấm phím "Enter" để được kết quả.

Trong trường hợp này kết quả được hiện ra là các chữ số từ hàng thấp đến hàng cao, cho nên khi viết kết quả ra giấy ta phải viết theo thứ tự ngược lại với thứ tự hiện ra trên màn hình.

Thí dụ 4.3.4

```
> convert(12345678987654321,base,16);
```

$$[1, 11, 4, 15, 1, 9, 2, 6, 4, 5, 12, 13, 11, 2]$$

Vậy: 12345678987654321 = $(2BDC546291F4B1)_{16}$.

Thí dụ 4.3.5

```
> convert(123456789876543214567 58,base,9);
```

$$[8, 8, 5, 7, 3, 2, 6, 6, 5, 6, 2, 1, 8, 5, 5, 2, 6, 5, 1, 4, 7, 4, 3, 1]$$

Vậy: 12345678987654321456758=$(134741562558126566237588)_9$.

4.3.3. Sử dụng *Maple* để chuyển đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số k sang hệ đếm cơ số 10

Khai báo câu lệnh:

```
> convert(a,decimal,k);
```

và kết thúc bằng phím " Enter".

Cần chú ý rằng nếu trong biểu diễn của **a** có chữ số lớn hơn 10 thì ta phải viết **a** trong dấu \`**a**\` hoặc "**a**".

Thí dụ 4.3.6

```
>convert(123450545432123450005401234500055544433321234,decimal,6);
```

$$2493254087250186485807983080583 5190$$

Vậy:

(123450545432123450005401234500055544433321234)$_6$ =

2493254087250186485807983080583519O.

Thí dụ 4.3.7

```
>convert(`1234567890ABCD1234567890ADCBBBCCDDA`,decimal,14);
```

1078257728376052730523598267913634066676

Vậy:

(1234567890ABCD1234567890ADCBBBCCDDA)$_{14}$ =

1078257728376052730523598267913634066676.

Thí dụ 4.3.8

```
> convert(111000.10101,decimal,binary);
```

56.65625000

Vậy: (111000.10101)$_2$ = 56.65625000.

4.3.4. Sử dụng *Maple* chuyển đổi số từ hệ đếm cơ số k_1 sang hệ đếm cơ số k_2

Cách 1

Khai báo câu lệnh:

```
>convert([a],base,k1,k2);
```

kết thúc bằng phím "Enter".

Ở đây **a** được viết trong ngoặc vuông với các chữ số bắt đầu từ hàng thấp đến hàng cao; giữa mỗi chữ số được ngăn cách bởi dấu phẩy. Kết quả là số viết từ hàng thấp tới hàng cao; giữa mỗi chữ số cũng được phân cách bởi dấu phẩy, do vậy khi viết kết quả thì phải viết theo thứ tự ngược lại với thứ tự trên màn hình.

Thí dụ 4.3.9

```
>convert([1,2,3,4,5,6,6,5,4,3,2,1,0,0,4,3,2],base,7,9);
```

[3, 8, 0, 6, 8, 1, 0, 3, 2, 7, 3, 3, 7, 5, 3]

Vậy: (23400123456654321)$_7$ =(357337230186083)$_9$

Thí dụ 4.3.10

```
> convert([1,2,3,4,5,6,7,8,9,0,0,11,15,5],base,20,6);
```

[1, 0, 0, 1, 4, 0, 1, 3, 1, 3, 4, 2, 1, 4, 1, 2, 2, 1, 4, 2, 3, 3, 3]

Vậy: $(5FB00987654321)_{20} = (33324122141243131041001)_6$.

Ở đây ta đặt A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15, G=16, H=17, I=18, K=19.

Cách 2

Bước 1 Chuyển **a** từ hệ đếm cơ số k_1 thành số **b** trong hệ đếm cơ số 10.

Bước 2 Chuyển **b** từ hệ đếm cơ số 10 thành số **c** trong hệ đếm cơ số k_2.

Thí dụ 4.3.11

```
> convert(12345678765432100076,decimal,9);
```

1899635139718416699

```
> convert(1899635139718416699,base,12);
```

[9, 5, 0, 3, 2, 3, 4, 11, 7, 9, 0, 8, 5, 11, 3, 0, 1]

Vậy: $(12345678765432100076)_9 = (103B58097B4323059)_{12}$.

Trong đó A=10, B = 11.

Nhận xét

Maple có ưu điểm là có thể chuyển những số rất lớn từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác tùy ý, không nhất thiết là 2, 8, 10, 16 và có khả năng chuyển đổi số thập phân. Điều này máy tính khoa học và *Calculator* không thực hiện được. Nhưng *Maple* cũng có nhược điểm là không chuyển được số thập phân từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác một cách tùy ý mà chỉ chuyển đổi được số thập phân (trong hệ đếm cơ số 10) sang hệ đếm cơ số 2, 8 và ngược lại.

4.4. Sử dụng các phần mềm có sẵn trên mạng Internet

Trên mạng *Internet* có rất nhiều phần mềm giúp chúng ta có thể dễ dàng đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số này sang hệ đếm cơ số khác. Các phần mềm này được viết bằng tiếng Việt hoặc tiếng Anh. Tuy nhiên các phần mềm được viết sẵn cũng có những nhược điểm là không chuyển được số từ hệ đếm cơ số tùy ý này sang hệ đếm cơ số tùy ý khác, giới hạn số được chuyển đổi không quá lớn tùy ý. Dưới đây là địa chỉ một số phần mềm đổi cơ số khá thuận tiện:

1) http://trunghieusoftware.t35.com/BaseSystem_Converter.html

2) http://wims.unice.fr/wims/en_tool~number~baseconv.en.html

3) http://www.convertit.com/go/convertit/calculators/math/base_converter.asp

Phần mềm 3) có thể chuyển đổi một số từ cơ số 10 sang cơ số bất kì từ 2 đến 36.

§5. Tính toán số học trong hệ đếm cơ số bất kỳ

Chúng ta đã thành thạo với bốn phép toán cộng, trừ, nhân, chia trong hệ đếm cơ số 10 (hệ thập phân). Trong phần này chúng ta sẽ đề cập tới các phép toán cộng, trừ, nhân, chia trong hệ đếm với cơ số tùy ý.

5.1. Phép cộng

Để thực hiện phép cộng trong hệ đếm cơ số k ta phải thực hiện:

- Cộng theo cột.
- Cộng các số theo từng cột như trong hệ đếm cơ số 10 rồi chuyển sang hệ đếm cơ số k.
- Nếu kết quả lớn hơn một "chục" thì viết đơn vị và số nhớ chữ số hàng "chục" để cộng sang hàng bên trái nó.
- Nhớ bảng cộng nếu cần.

Bảng cộng cơ số 2

+	0	1
0	0	1
1	1	10

Bảng cộng cơ số 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Bảng cộng cơ số 8

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Bảng cộng cơ số 16

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	A	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
B	B	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	C	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	D	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	E	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	F	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Với các hệ đếm với cơ số khác chúng ta hoàn toàn có thể lập bảng cộng nếu thấy cần thiết.

Thí dụ 5.1.1

Thực hiện phép cộng $(1234043)_5 + (23400432)_5$ ta viết theo cột như sau:

$$\begin{array}{r} 1\,2\,3\,4\,0\,4\,3 \\ +\ \underline{2\,3\,4\,0\,0\,4\,3\,2} \\ 3\,0\,1\,4\,0\,0\,3\,0 \end{array}$$

Vậy: $(1234043)_5 + (23400432)_5 = (30140030)_5$.

Thí dụ 5.1.2

Thực hiện phép cộng $(123458909)_{11} + (238765)_{11}$ ta viết theo cột như sau:

$$\begin{array}{r} 1\,2\,3\,4\,5\,8\,9\,0\,9 \\ +\ \underline{\qquad 2\,3\,8\,7\,6\,5} \\ 1\,2\,3\,6\,9\,6\,5\,7\,3 \end{array}$$

Vậy: $(123458909)_{11} + (238765)_{11} = (123696573)_{11}$.

Thí dụ 5.1.3

Thực hiện phép cộng $(1EA.67B)_{16} + (347F.B5C)_{16}$ ta viết theo cột như sau:

$$\begin{array}{r} 1\,E\,A\,.\,6\,7\,B \\ \underline{3\,4\,7\,F\,.\,B\,5\,C} \\ 3\,6\,6\,A\,.\,1\,D\,7 \end{array}$$

Vậy: $(1EA.67B)_{16} + (347F.B5C)_{16} = (366A.1D7)_{16}$

5.2. Phép trừ

Để thực hiện phép trừ cần trong hệ đếm cơ số k chúng ta cần chú ý các điểm sau

- Trừ theo cột.
- Đơn vị lớn thì trừ được đơn vị nhỏ hơn.
- Đơn vị nhỏ hơn muốn trừ đơn vị lớn hơn thì phải lấy (mượn) 1 "chục" của hàng bên trái để trừ, nhưng phải đổi số đó sang hệ cơ số k để thực hiện phép trừ.
- Nhớ bảng trừ nếu cần.

Bảng trừ trong hệ đếm cơ số 2

-	0	1
0	0	1
1	$_{(1)}1$	0

Số ở trong ngoặc là số phải mượn của hàng bên trái nó.

Bảng trừ trong hệ đếm cơ số 5

-	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	$_{(1)}4$	0	1	2	3
2	$_{(1)}3$	$_{(1)}4$	0	1	2
3	$_{(1)}2$	$_{(1)}3$	$_{(1)}4$	0	1
4	$_{(1)}1$	$_{(1)}2$	$_{(1)}3$	$_{(1)}4$	0

Số ở trong ngoặc là số phải mượn của hàng bên trái nó.

Bảng trừ trong hệ đếm cơ số 8

-	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	$_{(1)}7$	0	1	2	3	4	5	6
2	$_{(1)}6$	$_{(1)}7$	0	1	2	3	4	5
3	$_{(1)}5$	$_{(1)}6$	$_{(1)}7$	0	1	2	3	4
4	$_{(1)}4$	$_{(1)}5$	$_{(1)}6$	$_{(1)}7$	0	1	2	3
5	$_{(1)}3$	$_{(1)}4$	$_{(1)}5$	$_{(1)}6$	$_{(1)}7$	0	1	2
6	$_{(1)}2$	$_{(1)}3$	$_{(1)}4$	$_{(1)}5$	$_{(1)}6$	$_{(1)}7$	0	1
7	$_{(1)}1$	$_{(1)}2$	$_{(1)}3$	$_{(1)}4$	$_{(1)}5$	$_{(1)}6$	$_{(1)}7$	0

Số ở trong ngoặc là số phải mượn của hàng bên trái nó.

Bảng trừ trong hệ đếm cơ số 12

-	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**A**	**B**
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B
1	$_{(1)}B$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
2	$_{(1)}A$	$_{(1)}B$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	$_{(1)}9$	$_{(1)}A$	$_{(1)}B$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
4	$_{(1)}8$	$_{(1)}9$	$_{(1)}A$	$_{(1)}B$	0	1	2	3	4	5	6	7
5	$_{(1)}7$	$_{(1)}8$	$_{(1)}9$	$_{(1)}A$	$_{(1)}B$	0	1	2	3	4	5	6
6	$_{(1)}6$	$_{(1)}7$	$_{(1)}8$	$_{(1)}9$	$_{(1)}A$	$_{(1)}B$	0	1	2	3	4	5
7	$_{(1)}5$	$_{(1)}6$	$_{(1)}7$	$_{(1)}8$	$_{(1)}9$	$_{(1)}A$	$_{(1)}B$	0	1	2	3	4
8	$_{(1)}4$	$_{(1)}5$	$_{(1)}6$	$_{(1)}7$	$_{(1)}8$	$_{(1)}9$	$_{(1)}A$	$_{(1)}8$	0	1	2	3
9	$_{(1)}3$	$_{(1)}4$	$_{(1)}5$	$_{(1)}6$	$_{(1)}7$	$_{(1)}8$	$_{(1)}9$	$_{(1)}A$	$_{(1)}B$	0	1	2
A	$_{(1)}2$	$_{(1)}3$	$_{(1)}4$	$_{(1)}5$	$_{(1)}6$	$_{(1)}7$	$_{(1)}8$	$_{(1)}9$	$_{(1)}A$	$_{(1)}B$	0	1
B	$_{(1)}1$	$_{(1)}2$	$_{(1)}3$	$_{(1)}4$	$_{(1)}5$	$_{(1)}6$	$_{(1)}7$	$_{(1)}8$	$_{(1)}9$	$_{(1)}A$	$_{(1)}B$	0

Số ở trong ngoặc là số phải mượn của hàng bên trái nó.

Ở đây ta đặt A = 10, B = 11.

Thí dụ 5.2.1

Thực hiện phép trừ $(765432043)_8$- $(34571076)_8$ta viết theo cột như sau:

```
   7 6 5 4 3 2 0 4 3
-    3 4 5 7 1 0 7 6
  7 3 0 6 4 0 7 4 5
```

Vậy: $(765432043)_8$- $(34571076)_8$ = $(730640745)_8$.

Thí dụ 5.2.2

Thực hiện phép trừ $(AB56789009)_{12}$- $(5699A98997)_{12}$ ta viết theo cột như sau:

```
   10  11  5  6  7  8  9  0  0  9
-   5   6   9  9 10  9  8  9  9  7
    5   4   7  8  8 11  0  2  3  2
```

Vậy: $(AB56789009)_{12}$- $(5699A98997)_{12}$ = $(54788B0232)_{12}$.

Thí dụ 5.2.3

Thực hiện phép trừ : $(357A . 49A)_{12}$ – $(A39 . A12)_{12}$ ta viết theo cột như sau;

```
 3 5 7 A . 4 9 A
   A 3 9 . A 1 2
  2 7 4 0 . 6 8 8
```

Vậy: $(357A . 49A)_{12}$ – $(A39 . A12)_{12}$ = $(2740 . 688)_{12}$.

5.3. Phép nhân

Để thực hiện phép nhân trong hệ đếm cơ số k thì phải thực hiện theo yêu cầu:

- Nhân theo hàng.
- Cộng theo cột.
- Nhân với số đứng bên trái số đã nhân thì kết quả phải viết lùi sang bên trái một hàng so với kết quả đã đã viết của phép nhân ở số ngay trước đó.
- Khi nhân 2 số với nhau thì ta nhân theo bảng cửu chương trong cơ số 10 sau đó chuyển kết quả sang hệ đếm cơ số k. Nếu kết quả lớn hơn “10” trong hệ đếm cơ số k thì viết đơn vị và nhớ chữ số hàng chục sang hàng bên trái nó.
- Nhớ bảng nhân nếu cần thiết.

Bảng nhân trong hệ đếm cơ số 2

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Bảng nhân trong hệ đếm cơ số 5

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Bảng nhân trong hệ đếm cơ số 8

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Bảng nhân trong hệ đếm cơ số 11

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A
2	0	2	4	6	8	A	11	13	15	17	19
3	0	3	6	9	11	14	17	1A	22	25	28
4	0	4	8	11	15	19	22	26	2A	33	37
5	0	5	A	14	19	23	28	32	37	41	46
6	0	6	11	17	22	28	33	39	44	4A	55
7	0	7	13	1A	26	32	39	45	51	58	64
8	0	8	15	22	2A	37	44	51	59	66	73
9	0	9	17	25	33	41	4A	58	66	74	82
A	0	A	19	28	37	46	55	64	73	82	91

Thí dụ 5.3.1

Thực hiện phép nhân $(12765406)_8 \times (654)_8$ ta viết lần lượt như sau:

$$
\begin{array}{rr}
 & 12765406 \\
\times & \underline{654} \\
 & 53726030 \\
+ & 66713436 \\
 & \underline{101701044} \\
 & 11133167010
\end{array}
$$

Vậy: $(12765406)_8 \times (654)_8 = (11133167010)_8$.

Thí dụ 5.3.2

Thực hiện phép nhân $(12340580)_{11} \times (972)_{11}$ ta viết lần lượt như sau:

$$
\begin{array}{rccccccccccc}
 & & & & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 5 & 0 & 8 \\
\times & & & & & & & & & 9 & 7 & 2 \\
\hline
 & & & & 2 & 4 & 6 & 8 & 0 & 10 & 1 & 5 \\
+ & & & 8 & 5 & 1 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 & \\
 & & 10 & 9 & 8 & 3 & 4 & 1 & 6 & 6 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 7 & 4 & 9 & 6 & 1 & 9 & 10 & 2 & 5
\end{array}
$$

Vậy: $(12340508)_{11} \times (972)_{11} = (10749619A25)_{11}$ (Ở đây ta đặt A = 10).

Thí dụ 5.3.3

Thực hiện phép nhân $(1234.63)_8 \times (34.2)_8$ ta viết lần lượt như sau:

$$
\begin{array}{rr}
 & 1234.63 \\
\times & \underline{34.2} \\
 & 247146 \\
+ & 516314 \\
 & \underline{372631} \\
 & 44715.406
\end{array}
$$

Vậy: $(1234.63)_8 \times (34.2)_8 = (44715.406)_8$.

Như vậy, nhân các số phân trong hệ đếm cơ số k được thực hiện theo quy tắc hoàn toàn giống như đối với phép nhân các số thập phân trong hệ đếm cơ số 10.

5.4. Phép chia

Để thực hiện phép nhân trong hệ đếm cơ số k thì phải thực hiện theo yêu cầu:

- Chia theo cột.
- Nhớ bảng nhân.

- Nhớ bảng trừ.

Cách thực hiện phép chia giống như cách chia trong hệ đếm cơ số 10.

Thí dụ 5.4.1

Thực hiện phép chia $(4423340627)_8$: $(455)_8$ ta viết lần lượt như sau:

```
 4 4 2 3 3 4 0 6 2 7 | 4 5 5
-4 0 7 3             | 7560123
 0 3 3 0 3
 - 2 7 4 1
   3 4 2 4
 - 3 4 1 6
   0 0 0 6 0 6
     -   4 5 5
          1 3 1 2
     -    1 1 3 2
          1 6 0 7
     -    1 6 0 7
          0 0 0 0
```

Vậy: $(4423340627)_8$: $(455)_8 = (7560123)_8$.

Thí dụ 5.4.2

Thực hiện phép chia $(3343425225)_6$: $(232)_6$ ta viết lần lượt như sau:

```
 3 3 4 3 4 2 5 2 2 5 | 2 3 2
- 2 3 2              | 12304034
 1 0 2 3
 -  5 0 4
 0 1 1 5 4
  - 1 1 4 0
    0 0 1 4 2 5
       - 1 4 1 2
       0 0 1 3 2 2
        -  1 1 4 0
            01 4 2 5
           -  1 4 1 2
              0 0 1 3
```

Vậy $(3343425225)_6$: $(232)_6 = (12304034)_6$ dư$(13)_6$ hay ta còn viết:

$$(3343425225)_6 = (232)_6 \times (12304034)_6 + (13)_6.$$

§6. Thực hiện các phép tính số học trên máy tính

6.1 Thực hiện trên máy tính khoa học *Casio fx-570ES* và các máy khác có chức năng tương đương

Các máy tính khoa học chỉ thực hiện được các phép toán cộng, trừ, nhân và phép chia hết đối với các số nguyên ở các hệ đếm với các cơ số 2, 8, 10, 16.

Thí dụ 6.1.1

Tính $(10011101000)_2 + (111000111001111)_2 - (11100011110010)_2$.

Vào hệ đếm cơ số 2 trên *Casio fx-570ES*: $\boxed{\text{MODE}}\boxed{4}\boxed{\text{BIN}}$

Thực hiện phép cộng trừ trên *Casio fx-570ES* trong cơ số 2:

$\boxed{10011101000}\boxed{+}\boxed{111000111001111}\boxed{-}\ \boxed{11100011110010}\boxed{=}(11110111000101)_2$.

Thí dụ 6.1.2

Tính $(345C56)_{16} \times (AB)_{16}$.

Vào hệ đếm cơ số 16 trên *Casio fx-570ES*: $\boxed{\text{MODE}}\boxed{4}\boxed{\text{HEX}}$

Thực hiện phép nhân trên *Casio fx-570ES* trong cơ số 16:

$\boxed{345C56}\boxed{\times}\boxed{AB}\boxed{=}(22F9AD72)$

Vậy: $(345C56)_{16} \times (AB)_{16} = (22F9AD72)_{16}$.

6.2. Thực hiện tính toán số học trên máy tính *Vinacal Vn-570MS*

Thao tác trên máy tính giả định *Vinacal Vn-570MS* được cài đặt trên máy vi tính hoàn toàn giống như *Casio fx-570ES* và các máy tính khác có chức năng tương đương. Tuy nhiên các bước thao tác được hiển thị trực tiếp trên màn hình vì vậy rất tiện dụng trong trình bày và hướng dẫn các qui trình tính toán.

Lưu ý

Phạm vi tính toán của máy tính giả định này hẹp hơn *Casio fx-570ES* nên cùng dãy phép toán như nhau thì máy tính loại này có thể sẽ báo lỗi.

Thí dụ 6.2.1

Để tính $(10011101000)_2 + (111000111001111)_2 - (11100011110010)_2$ (như trong thí dụ 6.1.1) ta lần lượt thực hiện các thao tác *Vinacal Vn-570MS*:

$\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{3}\boxed{\text{BIN}}\boxed{10011101000}\boxed{+}\boxed{111000111001111}\boxed{-}\boxed{11100011110010}$

Màn hình báo: Math ERROR (ký hiệu báo lỗi toán học) nên phép toán

$$(10011101000)_2+(111000111001111)_2-(11100011110010)_2$$

không thực hiện được trên *Vinacal Vn-570MS*.

Thí dụ 6.2.2

Tính $(345C56)_{16}\times(AB)_{16}$ trên *Vinacal Vn-570MS*:

$\boxed{\text{MODE}}\boxed{3}\boxed{\text{HEX}}\boxed{345C56}\boxed{\times}\boxed{AB}\boxed{=}(22F9AD72)$

Vậy: $(345C56)_{16}\times (AB)_{16} = (22F9AD72)_{16}$.

Thí dụ 6.2.3

Tính $(234567)_8\times(234)_8:(11)_8$ trên *Vinacal Vn-570MS*:

$$\boxed{\text{MODE}}\boxed{\text{MODE}}\boxed{3}\boxed{\text{Oct}}\boxed{234567}\boxed{\times}\boxed{234}\boxed{\div}\boxed{11}\boxed{=}(5234544)$$

Vậy: $(234567)_8\times(234)_8:(11)_8 = (5234544)_8$.

6.3. Thực hiện các phép tính số học trên *Calculator* cài đặt trên *Window*

Calculator cho phép thực hiện được các phép toán cộng, trừ, nhân và phép chia hết với các số nguyên dương với các số có đến 33 chữ số, trong khi đó máy tính khoa học chỉ có thể làm việc với các số có 10 chữ số.

Thí dụ 6.3.1

Tính $(12345670007654)_8\times (765430012)_8$ trên *Calculator*.

Vào hệ đếm cơ số 8 trên *Calculator*: $\boxed{\text{Start}}\boxed{\text{Programs}}\boxed{\text{Accssories}}\boxed{\text{Calculator}}\boxed{\text{Oct}}$

Thực hiện phép nhân:

$$\boxed{12345670007654}\boxed{\times}\boxed{765430012}\boxed{=}(17050536062453615 6270)$$

Vậy: $(12345670007654)_8\times (765430012)_8 = (170505360624536156270)_8$.

Thí dụ 6.3.2

Tính $(1234567890ABCDEF)_{16} \times (AB87654321)_{16} + (123456789000987)_{16}$.

Vào hệ đếm cơ số 16 trên *Calculator*:

$\boxed{\text{Start}}\boxed{\text{Programs}}\boxed{\text{Accssories}}\boxed{\text{Caculator}}\boxed{\text{Hex}}$

Thực hiện phép toán:

$\boxed{1234567890ABCDEF}\boxed{\times}\boxed{AB87654321}\boxed{+}\boxed{123456789000987}\boxed{=}$ (612234D56E562256)

Nhưng khi kiểm tra lại trên *Maple* thì ta có kết quả sau:

```
> convert(`1234567890ABCDEF`,decimal,16);
                    1311768467294899695
> convert(`AB87654321`,decimal,16);
                    736710968097
> convert(123456789000987,decimal,16);
                    8198552920522995 9
> 1311768467294899695*736710968097+81985529205229959;
                    966394217460025422623165260374
> convert(966394217460025422623165260374,base,16);
        [6, 5, 2, 2, 6, 5, 14, 6, 5, 13, 4, 3, 2, 2, 1, 6, 14, 8, 15, 8, 6, 9, 2, 3, 12]
```

Như vậy ta có kết quả:

$$(1234567890ABCDEF)_{16} \times (AB87654321)_{16} + (123456789000987)_{16} =$$

$$(C32968F8E612234D56E562256)_{16}.$$

Nguyên nhân là khi thực hiện các phép toán quá lớn thì *Caculator* không hiển thị được hết kết quả trên màn hình dẫn tới ta thu được kết quả không chính xác.

6.4. Thực hiện các phép tính số học trên phần mềm *Maple*

Để sử dụng phần mềm *Maple* trong tính toán số học, chúng ta phải đổi các số ở hệ đếm với cơ số k thành số trong hệ đếm cơ số 10 rồi mới thực hiện phép toán, khi được kết quả ta lại đổi lại thành số trong hệ đếm cơ số k. Đặc biệt phần mềm *Maple* cho phép chúng ta thực hiện được các phép toán đối với các số rất lớn mà các máy tính khoa học và *Caculator* không thực hiện được.

Thí dụ 6.4.1

Tính $(1234560009AAB6789)_{12}$+$(986765432BA)_{12}$-$(567812B1)_{12}$ trên *Maple*.

Đổi các số từ cơ số 12 sang cơ số 10:

```
> convert(`1234560009AAB6789`,decimal,12);
```

220027069166911449

```
> convert(`986765432BA`,decimal,12);
```

601384482286

```
> convert(`567812B1`,decimal,12);
```

198984805

Thực hiện tính toán trong cơ số 10:

```
> 220027069166911449+601384482286-198984805;
```

220027670352408930

Đổi kết quả từ cơ số 10 sang cơ số 12:

```
> convert(220027670352408930,base,12);
```

[6, 9, 7, 8, 7, 8, 10, 11, 6, 8, 9, 6, 5, 4, 3, 2, 1]

Vậy nếu đặt A =10, B =11 thì:

$(1234560009AAB6789)_{12}$ + $(986765432BA)_{12}$ - $(567812B1)_{12}$ =

$(123456986BA878796)_{12}$.

Thí dụ 6.4.2

Thực hiện phép toán sau trên *Maple*:

$(1234560000065432100065432 1)_7 \times (12345600065432123)_7$.

Đổi các số từ cơ số 7 sang cơ số 10:

```
> convert(12345600000654321000654321,decimal,7);
```

182524809617356055952 3

```
> convert(12345600065432123,decimal,7);
```

45231354850811

Thực hiện phép nhân trong cơ số 10:

```
> 182524809617356055952 3*45231354850811;
```

$$825584443287935210617461173503231 53$$

Đổi kết quả từ cơ số 10 sang cơ số 7:

```
> convert(825584443287935210617461173503231 53,base,7);
```

$$[3,1,1,3,1,4,5,0,2,6,2,2,4,0,4,6,4,2,2,0,0,5,4,3,1,5,4,3,6,0,1,4,4,6,3,5,4,2,5,6,5,1]$$

Vậy:

$(1234560000065432100065 4321)_7 \times (123456000654321 23)_7 =$

$(15652453644106345134500224640422620541 3113)_7$.

Thí dụ 6.4.3

Thực hiện phép toán $(1234567.34567654)_8 \times (7654321765067.23456)_8$.

Đổi các số từ cơ số 8 sang cơ số 10:

```
> convert(123456754.345676,decimal,8);
```

$$2.191306845\ 10^{7}$$

```
> convert(7654321765067.23456,decimal,8);
```

$$5.385365694\ 10^{11}$$

Thực hiện phép nhân trong cơ số 10:

```
> 21913068.45*0.5385365694e12;
```

$$1.180098871\ 10^{19}$$

Đổi kết quả từ cơ số 10 sang cơ số 8:

```
> convert(0.1180098871e20,octal);
```

$$1.217054213\ 10^{21}$$

Vậy: $(1234567.34567654)_8 \times (7654321765067.23456)_8 = 1.217054213 \times 10^{21}$.

Nhận xét

- Nếu chỉ thực hiện các phép tính số học ở những số nguyên dương nhỏ trong phạm vi 10 chữ số ở các hệ đếm với các cơ số 2, 8, 10, 16 thì chúng ta nên sử dụng các máy tính khoa học.

- Nếu thực hiện các phép tính số học ở những số nguyên dương lớn trong phạm vi 30 chữ số ở các hệ đếm với các cơ số 2, 8, 10, 16 thì chúng ta nên thực hiện trên *Caculator* được cài đặt trên *Window*.
- Nếu thực hiện các phép toán số học đối với các số nguyên dương lớn trong các hệ đếm với cơ số bất kỳ hoặc số thập phân trong hệ đếm với cơ số 2, 8, 10 thì ta phải sử dụng phần mềm *Maple* hoặc các phần mềm có khả năng lập trình khác.
- Đối với số nhỏ trong các hệ đếm với cơ số bất kỳ thì chúng ta có thể thực hiện tính toán bằng tay mà không cần sự hỗ trợ của máy tính.

§7. Sử dụng phép chia để đổi biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số k_1 sang hệ đếm cơ số k_2

7.1 Sử dụng phép chia liên tiếp để đưa một số từ hệ đếm cơ số k sang hệ đếm cơ số 10

Ở các phần trên chúng ta đã biết chuyển biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số k sang hệ đếm cơ số 10 bằng cách biểu diễn qua các lũy thừa của k hoặc dùng phần mềm *Maple*. Đặc biệt nếu k là 2, 8, 16 thì ta có thể sử dụng máy tính khoa học hoặc *Caculator*. Trong phần này chúng ta sẽ đề cập tới việc sử dụng phép chia để đưa một số từ hệ đếm cơ số k sang hệ đếm cơ số 10.

Chúng ta đã biết sử dụng phép chia để đưa một số từ hệ đếm cơ số 10 sang hệ đếm cơ số k. Hoàn toàn tương tự để chuyển số a từ hệ đếm cơ số k sang hệ đếm cơ số 10 bằng cách chia a cho 10 (nhưng số 10 đã được chuyển thành số trong hệ đếm cơ số k) liên tiếp và lấy dư. Kết quả số nhận được chính là thương cuối cùng và các số dư viết theo thứ tự dưới lên trên (chú ý rằng các số dư phải được chuyển sang hệ đếm cơ số 10).

Thí dụ 7.1.1

Chuyển $(234765003)_8$ thành số trong hệ đếm cơ số 10 bằng phép chia.

Vì 10 = $(12)_8$ nên ta làm phép chia trong hệ đếm cơ số 8:

234765003 | 12
11 | 17545231 | 12
7 | 1443565 | 12
11 120276 | 12
0 | 10023 | 12
5 | 633 | 12
1 | 51 | 12
1 | **4**

Mà $(11)_8$ = 9 nên ta có kết quả: $(234765003)_8$ = 41150979.

Chúng ta hoàn toàn có thể kiểm tra tính đúng đắn của các kết quả trên nhờ phần mềm *Maple*:

```
> convert(234765003,decimal,octal);
```

41150979

Thí dụ 7.1.2

Chuyển số $(123400432100)_5$ sang hệ đếm cơ số 10 bằng phép chia.

Ta có 10 = $(20)_5$ nên ta làm phép chia trong hệ đếm cơ số 5

123400432100 | 20
0 | 3420021330 | 20
0 | 143223314 | 20
14 | 4411140 | 20
10 | 220304 | 20
14 | 11012 | 20
12 | 300 | 20
10 | **12**

Mà $(14)_5$ = 9; $(12)_5$=7; $(10)_5$ =5 nên $(123400432100)_5$=75795900.

Hoàn toàn có thể kiểm tra các kết quả trên nhờ phần mềm *Maple*:

```
> convert(123400432100,decimal,5);
```

75795900

7.2. Sử dụng phép chia liên tiếp để chuyển biểu diễn của một số từ hệ đếm cơ số k_1 sang hệ đếm cơ số k_2

Hoàn toàn tương tự như mục 3.1 ta có thể đưa số từ hệ đếm cơ số k_1 thành số trong hệ đếm cơ số k_2 bằng cách sử dụng phép chia liên tiếp.

Sử dụng định lý 2.2 ta thấy chỉ cần chia a cho k_2 (k_2 đã được đổi sang hệ cơ số k_1) liên tiếp và lấy dư. Kết quả chính là thương cuối cùng và các số dư viết theo thứ tự từ dưới lên trên (số dư đã được chuyển thành số trong hệ cơ số k_2).

Thí dụ 7.2.1

Chuyển $(2347603)_8$ thành số trong hệ đếm cơ số 12 bằng phép chia.

Ta có 12 = $(14)_8$ nên ta thực hiện phép chia trong hệ đếm cơ số 8:

```
2347603 | 14
     13 | 150512 | 14
              12 | 10560 | 14
                       0 | 564 | 14
                             0 | 37 | 14
                                  7 | 2
```

Mà $(12)_8=(10)_{12}$=A, $(13)_8=(11)_{12}$=B nên $(2347603)_8=(2700AB)_{12}$.

Có thể kiểm tra tính đúng đắn của các kết quả trên nhờ phần mềm *Maple*.

```
> convert([3,0,6,7,4,3,2],base,8,12);
                              [11, 10, 0, 0, 7, 2]
```

Thí dụ 7.2.2

Chuyển số $(12340004321)_5$ thành số trong hệ đếm cơ số 11.

Ta có 11=$(21)_5$ nên ta thực hiện phép chia trong hệ đếm cơ số 5:

```
12340004321 | 21
          2 | 323043034 | 21
                      1 | 13002023 | 21
                                11 | 331022 | 21
                                          2 | 13120 | 21
                                                  1 | 334 | 21
                                                       11 | 13
```

Mà $(11)_5=(6)_{11}$, $(13)_5=(8)_{11}$ nên $(12340004321)_5=(8612612)_{11}$.

Hoàn toàn có thể kiểm tra tính đúng đắn của các kết quả trên nhờ *Maple*:

```
> convert([1,2,3,4,0,0,0,4,3,2,1],base,5,11);
```

$$[2, 1, 6, 2, 1, 6, 8]$$

Thực chất của việc làm trên chính là vận dụng định lý 2.1và 2.2 ở §2.

§8. Sơ lược về ứng dụng của hệ đếm trong máy tính điện tử

Ngay từ mục mở đầu chúng ta đã biết việc sử dụng hệ đếm với các cơ số khác nhau là do nhu cầu thực tế. Hệ đếm có nhiều ứng dụng trong thực tế và trong toán học, thí dụ trong các bài toán trò chơi, các bài toán lôgic,.... Trong phần này chúng ta chỉ đề cập đến những nét sơ lược về ứng dụng của hệ đếm cơ số 2, 8, 16 vào máy tính điện tử - một công cụ không thể thiếu trong cuộc sống hiện đại.

Do có ưu điểm tính toán đơn giản, dễ dàng thực hiện về mặt vật lý, chẳng hạn như trên các mạch điện tử, hệ nhị phân trở thành một phần kiến tạo căn bản trong các máy tính hiện đại. Các máy tính có thể thực hiện được hàng triệu phép tính trong một giây được thiết kế dựa trên các linh kiện điện tử. Các linh kiện điện tử được đặc trưng bởi hai trạng thái: “đóng” nếu có dòng điện đi qua và “mở” nếu dòng điện không đi qua. Người ta qui ước “đóng” tương ứng với số 1 và “mở” tương ứng với số 0. Do vậy các linh kiện điện tử này hoạt động có nguyên tắc như ở trong hệ đếm cơ số 2. Chính vì lý do đó mà hệ đếm cơ số 2 được sử dụng gần như tuyệt đối trong các máy tính điện tử thông dụng hiện nay. Hơn nữa giá thành của các loại máy tính này rẻ hơn rất nhiều so với các loại máy tính sử dụng các hệ đếm với cơ số khác.

8.1. Hệ đếm hỗn hợp

Trong cuộc sống thường ngày ta dùng hệ đếm cơ số 10, vậy ta chuyển nó vào trong máy tính thì đương nhiên máy tính phải có bộ phận chuyển nó sang hệ đếm cơ số 2 (ngôn ngữ máy), và máy sẽ làm việc trong hệ đếm cơ số 2. Sau đó máy tính lại phải chuyển từ kết quả có được ở hệ đếm cơ số 2 sang hệ đếm cơ số 10 hiện ra trên màn hình mà chúng ta nhìn thấy.

Nhưng một số viết trong hệ đếm cơ số 10 khi chuyển sang hệ đếm cơ số 2 thường rất dài nên mất nhiều thời gian và bộ nhớ, do đó nó làm giảm khả năng tính toán của máy. Chính vì vậy mà người ta viết mỗi chữ số của số viết trong hệ đếm cơ số 10 thành một nhóm 4 chữ số trong hệ đếm cơ số 2. Khi đó xuất hiện những khó khăn nhất định trong việc thực hiện các phép toán. Vì khi ta thực hiện các phép toán sẽ xuất hiện những bộ 4 ký tự mà không biểu diễn chữ số nào trong hệ đếm cơ số 10 tương ứng.

Do đó người ta đưa vào hệ đếm hỗn hợp cơ số 2-8. Một số viết trong hệ đếm cơ số 10 được chuyển thành số viết trong hệ đếm cơ số 8, sau đó mỗi chữ số đó lại được chuyển sang hệ đếm cơ số 2. Do chỉ có 8 ký tự nên mỗi chữ số trong hệ đếm cơ số 8 sẽ tương ứng với 1 nhóm 3 ký tự 0 và 1, và sự tương ứng này là 1-1, nên không có bộ 3 ký tự 0 và 1 nào mà không biểu diễn 1 chữ số trong hệ đếm cơ số 8. Mặt khác người ta cũng chứng minh được rằng biểu diễn của 1 số trong hệ đếm cơ số 2-8 trùng với biểu diễn của số đó trong biểu diễn theo cơ số 2.

Thí dụ 8.1.1

Chuyển số 2157 sang hệ đếm cơ số 2 bằng cách chia lấy dư:

```
2157 | 2
   1 | 1078 | 2
          0 | 539 | 2
                1 | 269 | 2
                      1 | 134 | 2
                              0 | 67 | 2
                                     1 | 33 | 2
                                           1 | 16 | 2
                                                 0 | 8 | 2
                                                     0 | 4 | 2
                                                         0 | 2 | 2
                                                             0 | 1
```

Như vậy ta phải thực hiện 12 phép chia để tìm dư thì mới chuyển 2157sang cơ số 2 và có kết quả 2157= $(100001101101)_2$. Dùng *Maple* kiểm tra kết quả:

```
> convert(2157,binary);
                                  100001101101
```

Dùng hệ đếm hỗn hợp cơ số 2-8:

- Chuyển 2157 sang hệ đếm cơ số 8 bằng cách chia lấy dư.

2157 | 8
5 | 269 | 8
5 | 33 | 8
1 | **4**

Ta được kết quả: 2157 = $(4155)_8$ bằng 4 phép chia

- Chuyển $(4155)_8$ sang cơ số 2: 4 | 1 | 5 | 5 $\Leftrightarrow$ 100 | 001 | 101 | 101

Ta được kết quả: $(4155)_8=(100001101101)_2$.

Vậy ta có kết quả giống hoàn toàn phần trước là 2157 = $(100001101101)_2$.

Như vậy việc chuyển số từ hệ đếm cơ số 10 sang hệ đếm cơ số 2 thông qua hệ đếm hỗn hợp nhanh hơn nhiều so với việc ta làm trực tiếp.

Đối với số thập phân cách làm trên vẫn áp dụng được.

Thí dụ 8.1.2

Chuyển số 534.678 sang hệ đếm cơ số 2.

Tách riêng làm 2 phần nguyên và thập phân để chuyển.

534 | 2
0 | 267 | 2
1 | 133 | 2
1 | 66 | 2
0 | 33 | 2
1 | 16 | 2
0 | 8 | 2
0 | 4 | 2
0 | 2 | 2
0 | **1**

Vậy 534 = $(1000010110)_2$.

Chuyển phần thập phân:

$0.678 \times 2 = \mathbf{1}.356$;	$0.356 \times 2 = \mathbf{0}.712$;	$0.712 \times 2 = \mathbf{1}.412$;
$0.412 \times 2 = \mathbf{0}.824$;	$0.824 \times 2 = \mathbf{1}.648$;	$0.648 \times 2 = \mathbf{1}.296$;
$0.296 \times 2 = \mathbf{0}.592$;	$0.592 \times 2 = \mathbf{1}.184$;	$0.184 \times 2 = \mathbf{0}.368$;
$0.368 \times 2 = \mathbf{0}.736$; …		

Vậy $0.678 \approx (0.1010110100...)_2$.

Do đó ta có kết quả $534.678 \approx (1000010110.1010110100)_2$.

Kiểm tra qua phần mềm *Maple*:

```
> convert(534,binary);
                    1000010110
> convert(0.678,binary);
                    0.1010110110
```

Ta có kết quả: $534.678 \approx (1000010110.1010110110)_2$

Dùng hệ đếm hỗn hợp chuyển 534.678 sang hệ đếm cơ số 8:

$$\begin{array}{l|l|l|l} 534 & 8 & & \\ \mathbf{6} & 66 & 8 & \\ & \mathbf{2} & 8 & 8 \\ & & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}$$

$0.678 \times 8 = \mathbf{5}.424$; $0.424 \times 8 = \mathbf{3}.392$; $0.392 \times 8 = \mathbf{3}.136$; $0.136 \times 8 = \mathbf{1}.088$; …

Vậy ta có $534.678 \approx (1026.5331...)_8$.

Chuyển $(1026.5331...)_8$ sang hệ đếm cơ số 2

1 | 0 | 2 | 6 . 5 | 3 | 3 | 1 $\Leftrightarrow$ 001 | 000 | 010 | 110.101| 011 | 011 | 001

Vậy ta có kết quả $534.678 \approx (1000010110.101011011001...)_2$.

Tuy nhiên ta cũng thấy các kết quả trên chỉ là gần đúng nên các chữ số cuối của số thập phân có thể không trùng nhau.

Rõ ràng việc chuyển một số từ hệ đếm cơ số 10 đổi sang hệ đếm cơ số 2 nhanh hơn nhiều nếu ta sử dụng qua hệ đếm cơ số 2-8.

8.2. Sử dụng hệ đếm trong máy tính điện tử

Mỗi chữ số trong hệ đếm nhị phân được gọi là một "Bit" – nó là chữ viết tắt của "Binary digit".

Nhóm 4 "bit" gọi là một "Nibbe".

Nhóm 8 bít gọi là một "Byte". Byte thường xuyên được dùng để thể hiện các ký tự trên các văn bản. Và một "Byte" như vậy biểu diễn được 256 giá trị từ 0 = 0000 0000 tới 255 =1111 1111. Nhưng mỗi một "byte" nó không chỉ biểu diễn các số trong hệ thập phân mà còn biểu diễn các chữ (in hoa và in thường) kể cả ô trống. Chẳng hạn khi dùng trình NotePad trong Windows để tạo một file text chứa các từ "Four and seven", NotePad sẽ dùng 1 Byte bộ nhớ cho mỗi ký tự kể cả 1 Byte cho mỗi ký tự trống (space) giữa các từ. Nếu lưu file văn bản có nội dung "Four and seven" như trên nó sẽ có dung lượng 14 Byte. Như vậy khi ta nhập dữ liệu là các chữ số trong hệ thập phân và các chữ cái thì máy tính có bộ phận chuyển đổi nó thành các "byte" và máy tính làm việc với các "byte" ấy. Rõ ràng là cho đến lúc này thì máy tính chỉ làm việc ở hệ đếm cơ số 2. Khi được kết quả thì trong máy tính lại có bộ phận chuyển từ các "byte" kết quả thành các số trong hệ thập phân và các chữ cái mà ta nhìn thấy trên màn hình. Ngoài ra trong máy tính phải có bộ chuyển đổi từ ngôn ngữ thường vào ngôn ngữ máy và ngược lại – người ta gọi đó là bộ mã hóa.

Trong bộ ký tự ASCII, mỗi giá trị nhị phân từ 0 đến 127 được gán cho một ký tự cụ thể. 128 ký tự đặc biệt trên được dùng để đại diện cho những ký tự chung trong các ngôn ngữ. Hầu hết các máy tính mở rộng bộ ký tự ASCII để sử dụng toàn bộ 256 ký tự có sẵn trong một Byte. Máy tính dùng các mã ASCII để lưu trữ các tài liệu văn bản trên bộ nhớ và ổ đĩa. Trên máy tính mỗi Byte lưu một số dạng mã ASCII tương ứng với ký tự nó thể hiện. Chẳng hạn với nội dung văn bản là "Four and seven" thì trên đĩa, các mã sẽ là:

F 70 o 111 u 117 r 114 32 a 97 n 110 d 100 32 s 115 e 101 v 118 e 101 n 110.

Mỗi ký tự được biểu diễn bằng các số liên tiếp hơn kém nhau một đơn vị trong bảng ký tự ASCII. Lưu ý rằng số 32 là mã ASCII của ký tự trống (space). Nếu đổi sang mã nhị phân thì ký tự trống này có giá trị 00100000. Với bộ ký tự ASCII chuẩn, 32 giá trị đầu tiên (từ 0 đến 31) là các biến điều khiển, ký tự thứ 33 là trống, tiếp theo là các ký tự đặc biệt, chữ số, chữ cái hoa và chữ cái thường.

Các bội số của Byte là (tên gọi viết tắt độ lớn):

Kilo K 2^10 = 1024; Mega M 2^20 = 1048576; Giga G 2^30 = 1073741824;

Tera T 2^40 = 1099511627776; Peta P 2^50 = 1125899906842624

Exa E 2^60 = 1152921504606846976;

Zetta Z 2^70 = 1180591620717411303424;

Yotta Y 2^80 = 1208925819614629174706176.

KẾT LUẬN CHƯƠNG

Qua phần trình bày trong chương này ta thấy rằng nếu máy tính đã được cài đặt phần mềm *Maple* thì việc chuyển đổi biểu diễn của một số trong các hệ đếm cơ số khác nhau, và thực hiện các phép toán số học đối với các số ở các hệ đếm với cơ số khác nhau hoàn toàn đơn giản và chính xác. Các máy tính khoa học và *Calculator* cũng có thể làm được các công việc này với số nguyên nhỏ trong các hệ đếm đã được cài đặt sẵn. Tuy nhiên nếu có cách nào đó để có thể thực hiện các phép tính số học trên các hệ đếm với cơ số khác nhau mà không phải thông qua hệ đếm thập phân thì sẽ tiện lợi hơn nhiều. Hơn nữa phần chuyển đổi hệ đếm đối với số thập phân thì phần mềm *Maple* vẫn còn hạn chế chưa sử dụng được như với số nguyên.

Việc nghiên cứu các nguyên tắc, các cách chuyển đổi số giữa các hệ đếm, cách thực hiện các phép toán số học là cần thiết, mặc dù có máy tính và các phần mềm hỗ trợ tính toán.

Chương 2

ỨNG DỤNG CỦA HỆ ĐẾM TRONG TOÁN PHỔ THÔNG

Hệ đếm có nhiều ứng dụng quan trọng trong thực tế (điện báo, mật mã,...), trong công nghệ thông tin (cơ sở tính toán trên máy tính điện tử, phân giải màu trên màn hình,...). Các bài toán của hệ đếm cũng liên quan đến nhiều lĩnh vực khác của toán học: Giải phương trình nghiệm nguyên, toán lôgic, mở rộng tính chất chia hết, phương trình hàm, các bài toán trò chơi,....

Chương này trình bày hai ứng dụng của hệ đếm trong toán phổ thông. Trong §1 chúng tôi trình bày một số mở rộng các tiêu chuẩn chia hết trong hệ đếm cơ số 10 sang cho hệ đếm cơ số bất kì. Khi trở về hệ đếm cơ số 10, các tiêu chuẩn này cũng soi sáng thêm các tiêu chuẩn đã biết. Trong §2 chúng tôi trình bày *phương pháp hệ đếm* như một công cụ giải toán, đặc biệt là những bài toán khó (thi vô địch quốc gia và quốc tế). Lời giải của những bài toán này (trên ngôn ngữ hệ đếm) cũng cho thấy mối quan hệ mật thiết giữa hệ đếm với các vấn đề khác của toán học (giải phương trình nghiệm nguyên, phương trình hàm,...).

§1.Tính chất chia hết

1.1 Nhắc lại các dấu hiệu chia hết trong hệ đếm cơ số 10

Trong hệ đếm cơ số 10 chúng ta đã biết các dấu hiệu chia hết:

- **Dấu hiệu chia hết cho 2** Số có chữ số tận cùng là số chẵn: 0, 2, 4, 6, 8.
- **Dấu hiệu chia hết cho 3** Số có tổng các chữ số là số chia hết cho 3.
- **Dấu hiệu chia hết cho 4** Số có 2 chữ số cuối là số chia hết cho 4.
- **Dấu hiệu chia hết cho 5** Số có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5.

- **Dấu hiệu chia hết cho 6** Số chia hết cho 2 và 3.
- **Dấu hiệu chia hết cho 7** (chia hết cho **11, 13**) Tách số đã cho thành từng nhóm có 3 chữ số từ phải qua trái, nhóm cuối cùng có thể chỉ có 1 hoặc 2 chữ số. Lấy tổng đan dấu của các nhóm đó từ phải qua trái. Nếu tổng đó chia hết cho 7 (11, 13) thì số ấy cũng chia hết cho 7 (11, 13).
- **Dấu hiệu chia hết cho 8** Số có 3 chữ số cuối là số chia hết cho 8.
- **Dấu hiệu chia hết cho 9** Số có tổng các chữ số là số chia hết cho 9.
- **Dấu hiệu chia hết cho 10** Số có tận cùng là 0.
- **Dấu hiệu chia hết cho 11** Tổng đan dấu các chữ số của nó từ phải qua trái là số chia hết cho 11.
- **Dấu hiệu chia hết cho 25** Số có hai số tận cùng là số chia hết cho 25, tức là các số có tận cùng là 00, 25, 50, 75.
- **Dấu hiệu chia hết cho 125** Số có 3 số tận cùng là số chia hết cho 125 đó là 000, 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875.
- **Dấu hiệu chia hết cho 37** Tách số đã cho thành từng nhóm có 3 chữ số từ phải qua trái, nhóm cuối cùng có thể chỉ có 1 hoặc 2 chữ số. Lấy tổng của các nhóm đó từ phải qua trái. Nếu tổng đó chia hết cho 37 thì thì số đã cho chia hết cho 37.

1.2 Số chẵn, số lẻ

Chúng ta đã biết khái niệm số chẵn, số lẻ trong hệ đếm cơ số 10. Vậy nếu một số không viết trong hệ đếm cơ số 10 thì có cách nào để nhận biết tính chất chẵn lẻ của số đó mà không cần chuyển số đó qua hệ đếm cơ số 10?

Ta có các định lý sau.

Định lý 1.2.1

Nếu cơ số k chẵn thì một số là chẵn khi và chỉ khi biểu diễn của nó trong hệ đếm cơ số k kết thúc bởi chữ số chẵn.

Nếu cơ số k lẻ thì một số là chẵn khi và chỉ khi số các chữ số lẻ trong biểu diễn của nó ở hệ đếm cơ số k là chẵn.

Chứng minh

Thật vậy, một số tự nhiên bất kỳ b có biểu diễn trong hệ đếm cơ số k dưới dạng:

$$b=(b_n b_{n-1}...b_1 b_0)_k = b_n k^n + b_{n-1}k^{n-1} + ... + b_1 k^1 + b_0 k^0.$$

Nếu k chẵn thì $b_n k^n + b_{n-1}k^{n-1} + ... + b_1 k^1$ là một số chẵn.

Do đó $b = b_n k^n + b_{n-1}k^{n-1} + ... + b_1 k^1$ là số chẵn khi và chỉ khi b_0 là chẵn.

Nếu k lẻ thì tập chỉ số $K=\{i, j = 0,1,...,n\}$ được chia thành 3 tập:

Tập I là tập các chỉ số $i \in K$ sao cho b_i là các số lẻ.

Tập J là tập các chỉ số $i \in K$ sao cho b_i là các số chẵn.

Tập $K \setminus \{I \cup J\}$ là tập các chỉ số $i \in K$ sao cho b_i bằng 0.

Khi đó $b = \sum_{i\in I} b_i k^i + \sum_{i\in J} b_i k^i = \sum_{i\in I} b_i k^i + 2\sum_{i\in J}\frac{b_i}{2}k^i \Rightarrow b$ là số chẵn khi và chỉ khi $\sum_{i\in I} b_i k^i$ là số chẵn. Do $b_i k^i$ là số lẻ với mọi $i \in I$ nên $\sum_{i\in I} b_i k^i$ là số chẵn khi và chỉ khi tập chỉ số I phải gồm một số chẵn phần tử, hay số chữ số lẻ của b là chẵn.

Thí dụ 1.2.1

1. Số $(12300321232)_4$ là số chẵn vì $k=4$, $b_0=2$

2. Số $(12300321223)_4$ là số lẻ vì $k=4$, $b_0=3$.

3. Số $(16543323456)_7$ là chẵn vì $k=7$ và trong biểu diễn của số có 6 chữ số lẻ.

4. Số $(16543326456)_7$ là số lẻ vì $k=7$ và trong biểu diễn của số có 5 chữ số lẻ.

Ta dễ dàng kiểm tra tính chẵn lẻ của các số đó nhờ phần mềm *Maple*.

Đặc biệt

Nếu k lẻ ta có thể dựa vào định lý sau để xét tính chẵn lẻ của một số viết trong hệ đếm cơ số k.

Định lý 1.2.2

Nếu cơ số k lẻ thì một số viết trong hệ đếm cơ số k là số chẵn khi và chỉ khi tổng các chữ số trong biểu diễn của nó là số chẵn.

Chứng minh

Xét

$$S = b_n + b_{n-1} + \ldots + b_1 + b_0 = \sum_{i \in I} b_i + \sum_{i \in J} b_i ,$$

trong đó I là tập các chỉ số với các chữ số lẻ, còn J là tập các chỉ số với các chữ số chẵn. Vì $\sum_{i \in J} b_i$ luôn chẵn nên S chẵn khi và chỉ khi $\sum_{i \in I} b_i$ là số chẵn.

Từ định lý 2.1 ta đã có kết quả khi k lẻ thì $b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_k$ là số chẵn khi và chỉ khi $\sum_{i \in I} b_i$ là số chẵn.

Vậy $b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_k$ chẵn khi và chỉ khi $S = b_n + b_{n-1} + \ldots + b_1 + b_0$ chẵn.

Thí dụ 1.2.2

1. Số $(123456780087654)_9$ có

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 0 + 0 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 66$$

nên số đó là số chẵn.

2. Số $(123456120012653)_7$ có

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 1 + 2 + 0 + 0 + 1 + 2 + 6 + 5 + 3 = 41$$

nên số đó là số lẻ.

1.3. Tiêu chuẩn chia hết trong hệ đếm cơ số bất kỳ

Định lý 1.3.1

Một số $b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_k$ chia hết cho k^q khi và chỉ khi q chữ số cuối cùng của biểu diễn của b trong hệ đếm cơ số k bằng 0, tức là $b_0 = b_1 = \ldots = b_{q-1} = 0$.

Chứng minh

Ta chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp theo q.

Với $q = 1$:

Ta có $b = b_n k^n + b_{n-1} k^{n-1} + \ldots + b_1 k^1 + b_0$ chia hết cho k khi và chỉ khi $b_0 \vdots k$, mà $0 \le b_0 < k$ nên $b_0 \vdots k$ khi và chỉ khi $b_0 = 0$.

Vậy với $q = 1$ thì định lý đúng.

Giả sử định lý đúng với $\forall\ q \le p$. Ta chứng minh định lý đúng với mọi $q = p + 1$.

Nếu $b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_k$ chia hết cho k^{p+1} thì nó cũng chia hết cho k^p nên theo giả thiết quy nạp thì $b_0 = b_1 = \ldots = b_{p-1} = 0$. Hay $b = b_n k^n + b_{n-1} k^{n-1} + \ldots + b_p k^p$.

Vì $b \vdots k^{p+1}$ nên $\left(b_p . k^p\right) \vdots k^{p+1}$ mà $0 \le b_p k^p < k k^p = k^{p+1} \Rightarrow b_p = 0$.

Vậy $b_0 = b_1 = \ldots = b_p = 0$. Chứng tỏ định lý đúng với $q = p + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp định lý đúng với mọi q.

Thí dụ 1.3.1

1. Chúng ta dễ dàng kiểm tra tính chất chia hết của các số viết trong hệ đếm cơ số 2 cho 2, 4, 8,…, 2^n.

Chẳng hạn số $(111001001111010)_2$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4, 8, …, 2^n vì chỉ có $b_0 = 0$

Còn số $(1110011001110101000)_2$ chia hết cho 2, 4, 8 nhưng không chia hết 16,…, 2^n $(n \ge 4)$ vì chỉ có $b_0 = b_1 = b_2 = 0$.

2. Hoàn toàn tương tự như vậy ta có thể kiểm tra tính chia hết của các số viết trong hệ đếm cơ số 3 cho 3, 9, 27,…, 3^n.

3. Tính chia hết của các số viết trong hệ đếm cơ số 5 cho 5, 25, 125,…, 5^n.

4. Tính chia hết của các số viết trong hệ đếm cơ số 6 cho 6, 36, 216,…, 6^n.

Định lý 1.3.2

Nếu d *là ước của* k *thì* $b=(b_nb_{n-1}...b_1b_0)_k$ *chia hết cho* d^q *khi và chỉ khi* $\left(b_{q-1}...b_1b_0\right)_k$ *chia hết cho* d^q.

Chứng minh

Vì k chia hết cho d nên tồn tại số m nguyên dương sao cho $k=m.d$. Suy ra:

$$b=(b_nb_{n-1}...b_1b_0)_k=b_nk^n+b_{n-1}k^{n-1}+...+b_1k^1+b_0k^0$$

$$=b_nm^nd^n+b_{n-1}m^{n-1}d^{n-1}+...+b_1md+b_0$$

$$=d^q\left(b_nm^nd^{n-q}+b_{n-1}m^{n-1}d^{n-1-q}+...b_qm^q\right)+b_{q-1}m^{q-1}d^{q-1}+...+b_1md+b_0$$

Vì $d^q\left(b_nm^nd^{n-q}+b_{n-1}m^{n-1}d^{n-1-q}+...b_qm^q\right)$ chia hết cho d^q nên b chia hết cho d^q khi và chỉ khi

$$b_{q-1}m^{q-1}d^{q-1}+...+b_1md+b_0=b_{q-1}k^{q-1}+...+b_1k+b_0$$

chia hết cho d^q, tức là $\left(b_{q-1}...b_1b_0\right)_k$ chia hết cho d^q.

Thí dụ 1.3.2

1. Từ định lý 1.3.2 chúng ta dễ dàng kiểm tra được các dấu hiệu chia hết cho 2, 4, 8, 16, 2^n, các dấu hiệu chia hết cho 5, 25,…,5^n trong hệ đếm cơ số 10, vì 2 và 5 là ước của 10.

2. Các dấu hiệu chia hết cho 2, 4,…, 2^n trong hệ đếm cơ số 6, cơ số 8, cơ số 12, cơ số 14, cơ số 16 … vì 2 là ước của 6, 8, 12, 14, 16...

Ta xét thí dụ cụ thể sau.

- Số $(23456789AB0)_{12}$ chia hết cho 2, 3 vì $b_0=0$ chia hết cho 2, 3.
- Số $(23456789AB0)_{12}$ chia hết cho 4 vì $\left(b_1b_0\right)_{12}=\left(B0\right)_{12}=11.12+0=132$ chia hết cho 4, nhưng không chia hết cho 9 vì $\left(b_1b_0\right)_{12}=\left(B0\right)_{12}=11.12+0=132$ không chia hết cho 9.
- Số $(23456789AB0)_{12}$ không chia hết cho 8, 27 vì

$$\left(b_2b_1b_0\right)_{12} = \left(AB0\right)_{12} = 10.12^2 + 11.12 + 0 = 1572$$

không chia hết cho 8 và 27.

Có thể kiểm tra tính đúng đắn của các kết luận trên dựa vào phần mềm *Maple*:

```
> convert(`23456789AB0`,decimal,12);
                       141232996068
> ifactor(141232996068);
                 (2)^2 (3) (5570003) (2113)
```

Định lý 1.3.3

Số $b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_k$ *chia hết cho* $k-1$ *khi và chỉ khi tổng các chữ số của nó chia hết cho* $k-1$.

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh với mọi số nguyên dương q ta luôn có:

$$k^q = 1 + (k-1)t_q \qquad (1)$$

với t_q là một số nguyên dương nào đó.

Thật vậy:

$$k^q - 1 = k^q - 1^q = (k-1)\left(k^{q-1} + k^{q-2} + \ldots + k + 1\right) \qquad (2)$$

Đặt $k^{q-1} + k^{q-2} + \ldots + k + 1 = t_q$ thì (2) có dạng $k^q - 1 = k^q - 1^q = (k-1)t_q$ hay $k^q = 1 + (k-1)t_q$. Vậy (1) được chứng minh.

Từ đó ta có

$$b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_k = b_n k^n + b_{n-1} k^{n-1} + \ldots + b_1 k^1 + b_0 k^0$$

$$= b_n\left[1 + (k-1)t_n\right] + b_{n-1}\left[1 + (k-1)t_{n-1}\right] + \ldots + b_1\left[1 + (k-1)\right] + b_0$$

$$= (b_n + b_{n-1} + \ldots + b_1 + b_0) + (k-1)\left(b_n t_n + b_{n-1} t_{n-1} + \ldots + b_1\right)$$

Điều này chứng tỏ $b \vdots (k-1)$ khi và chỉ khi $(b_n + b_{n-1} + \ldots + b_1 + b_0) \vdots (k-1)$.

Định lý được chứng minh.

Hệ quả 1.3.4

Nếu d *là ước của* $(k-1)$ *thì* $b=(b_n b_{n-1}...b_1 b_0)_k$ *chia hết cho* d *khi và chỉ khi* $S=(b_n+b_{n-1}+...+b_1+b_0)$ *chia hết cho* d.

Chứng minh

Vì d là ước của $k-1$ nên tồn tại số c nguyên dương sao cho $k-1=c.d$.

Từ chứng minh của định lý 1.3.2 ta có:

$$k^q=1+(k-1)t_q=1+cdt_q=1+dt'_q \quad (t'_q=ct_q)$$

$$\Rightarrow b=b_n k^n+b_{n-1}k^{n-1}+...+b_1k^1+b_0k^0$$

$$=b_n(1+dt'_n)+b_{n-1}(1+dt'_{n-1})+...+b_1(1+dt'_1)+b_0$$

$$=(b_n+b_{n-1}+...+b_1+b_0)+d(t'_n+t'_{n-1}+...+t'_1)$$

$$\Rightarrow b \vdots d \Leftrightarrow S=(b_n+b_{n-1}+...+b_1+b_0)\vdots d.$$

Nhận xét

Từ Định lý 1.3.3 và hệ quả 1.3.4 ta dễ dàng soi lại các dấu hiệu chia hết cho 3, 9 trong hệ đếm cơ số 10 mà chúng ta đã biết, dấu hiệu chia hết cho 37 trong hệ đếm cơ số 10 (vì 37 là ước của 999 = 1000 – 1). Và cũng có thể kiểm tra tính chia hết ở các hệ đếm cơ số khác nữa. Chẳng hạn

Dấu hiệu chia hết cho 2, 4, 8 trong hệ đếm cơ số 9

Tổng các chữ số của số đó trong hệ đếm cơ số 9 là số chia hết cho 2, 4, 8 vì 2, 4, 8 là ước của (9-1).

Dấu hiệu chia hết cho 3, 5, 15 trong hệ đếm cơ số 16

Tổng các chữ số của số đó trong hệ đếm cơ số 16 là số chia hết cho 3, 5, 15 vì 3, 5, 15 là ước của (16-1).

Dấu hiệu chia hết cho 2, 5, 10 trong hệ đếm cơ số 11

Tổng các chữ số của số đó trong hệ đếm cơ số 11 là số chia hết cho 2, 5, 10 vì 2, 5, 10 là ước của (11-1).

Thí dụ 1.3.3

1. Số $(835701345)_9$ có tổng các chữ số S = 8+3+5+7+0+1+3+4+5 =36 là số chia hết cho 2 và cho 4 nhưng không chia hết cho 8 nên số $(835701345)_9$ chia hết cho 2 và cho 4 nhưng không chia hết cho 8. Vì 2, 4, 8 là ước của 8 =(9 -1).

Kiểm tra qua phần mềm Maple ta thấy kết quả hoàn toàn đúng:

```
> convert(835701345,decimal,9);
```

$$361794236$$

Phân tích ra thừa số nguyên tố nhờ lệnh `ifactor`:

```
> ifactor(361794236);
```

$$(2)^2\,(90448559)$$

2. Số $(2ABD3579F)_{16}$ có tổng các chữ số

S =2+A+B+D+3+5+7+9+F=2+10+11+13+3 +5+7+9+15 =75

là số chia hết cho 3, 5, 15 nên số $(1ABD3579F)_{16}$ chia hết cho 3, 5, 15 vì 3, 5, 15 là ước của 15 =(16-1).

Kiểm tra qua phần mềm Maple ta có kết quả hoàn toàn đúng:

```
> convert(`2ABD3579F`,decimal,16);
```

$$11472689055$$

```
> ifactor(11472689055);
```

$$(3)\,(5)\,(67)\,(11415611)$$

3. Kiểm tra tính chia hết của 100634235137111001231489221107100631 cho 7, 11, 13, 37.

Ta có $7\times 11\times 13\times 37\times 3^3 = 999999 = 10^6 - 1$ nên ta chuyển số đã cho thành số viết trong hệ đếm cơ số 10^6. Bằng cách tách số đã cho thành từng nhóm có 6 chữ số từ phải qua trái (nhóm cuối cùng có thể không đủ 6 chữ số) thì mỗi nhóm đó là 1 chữ số của số đó viết trong hệ đếm cơ số 10^6. Do đó theo Hệ quả 1.3.4 thì số đã cho sẽ chia hết cho 7, 11, 13, 37 nếu tổng các chữ số của nó (trong hệ đếm cơ số 10^6) từ phải qua trái là số chia hết cho 7, 11, 13, 37.

Mà ta có

S =100631+221107+231489+111001+235137+100634 =999999 =10^6 - 1.

Vậy số đã cho là số chia hết cho 7, 11, 13, 37.

Kiểm tra qua phần mềm *Maple* có kết quả hoàn toàn đúng.

```
> ifactor(100634235137111001231489221107100631);
```

$$(3)^6\,(7)\,(11)\,(13)\,(37)\,(15151888932949)\,(69744534889)\,(3527)$$

Từ đây ta cũng nêu dấu hiệu chia hết cho 7, 11, 13, 37 trong hệ đếm cơ số 10.

Định lý 1.3.5

Số $b=(b_n b_{n-1}...b_1 b_0)_k$ chia hết cho $k+1$ khi và chỉ khi tổng các chữ số ở hàng lẻ trừ đi tổng các chữ số ở hàng chẵn của số ấy chia hết cho $k+1$. Hay tổng đan dấu của các chữ số ở hàng lẻ và hàng chẵn của số ấy là số chia hết cho $k+1$.

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh: với mọi số nguyên dương q thì

$$k^q=(-1)^q+(k+1)t_q \qquad (2)$$

với t_q là một số nguyên dương nào đó.

Ta sẽ chứng minh (2) bằng phương pháp quy nạp.

Thật vậy, với $q=1$ta có

$$k^1=-1+k+1=(-1)^1+(k+1)1=(-1)^1+(k+1)t_1.$$

Vậy công thức đúng với $q=1$.

Giả sử (2) đúng với $\forall\ q\le p$. Ta chứng minh nó đúng với mọi $q=p+1$.

Nếu p là số chẵn thì

$$k^{p+1}=k\times k^p=k\left[(-1)^p+(k+1)t_p\right]$$

$$=k+k(k+1)t_p=-1+k+1+k(k+1)t_p=(-1)^{p+1}+(k+1)(kt_p+1) \qquad (**)$$

Đặt $(kt_p+1)=t_{p+1}$ thì (**) có dạng $k^{p+1}=(-1)^{p+1}+(k+1)t_{p+1}$.

Vậy (2) đúng khi p là số chẵn.

Nếu p là số lẻ thì

$$k^{p+1} = k \times k^p = k\left[(-1)^p + (k+1)t_p\right] = -k + k(k+1)t_p$$

$$= 1 - 1 - k + k(k+1)t_p = (-1)^{p+1} + (k+1)(kt_p - 1) \qquad (***)$$

Đặt $(kt_p - 1) = t_{p+1}$ thì (***) có dạng $k^{p+1} = (-1)^{p+1} + (k+1)t_{p+1}$.

Vậy (2) đúng khi p là số lẻ.

Từ đó ta thấy theo giả thiết quy nạp (2) được chứng minh.

$$\Rightarrow b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_k = b_n k^n + b_{n-1} k^{n-1} + \ldots + b_1 k + b_0$$

$$= b_n\left[(-1)^n + (k+1)t_n\right] + b_{n-1}\left[(-1)^n + (k+1)t_{n-1}\right] + \ldots + b_1[-1 + k + 1] + b_0$$

$$= \left[(-1)^n b_n + (-1)^{n-1} b_{n-1} + \ldots + (-1)^1 b_1 + (-1)^0 b_0\right] + (k+1)(b_n t_n + b_{n-1} t_{n-1} + \ldots + b_1)$$

Vậy $b \vdots (k+1) \Leftrightarrow \left[(-1)^n b_n + (-1)^{n-1} b_{n-1} + \ldots - b_1 + b_0\right] \vdots (k+1)$.

Định lý được chứng minh.

Hệ quả 1.3.6

Nếu d là ước của $k+1$ thì $b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_k$ chia hết cho d khi và chỉ khi tổng $S' = (-1)^n b_n + (-1)^{n-1} b_{n-1} + \ldots - b_1 + b_0$ chia hết cho d. Hay ta còn nói tổng đan dấu các chữ số của b trong biểu diễn theo cơ số k là số chia hết cho d.

Chứng minh

Ta có d là ước của $k+1$ nên tồn tại số c nguyên dương sao cho $k+1 = c.d$

Từ chứng minh của định lý 1.3.4 ta đã có: với mọi q nguyên dương $k^q = (-1)^q + (k+1) \times t_q$ trong đó t_q là số nguyên dương nào đó. Hay

$k^q = (-1)^q + c.d.t_q = (-1)^q + d \times t'_q$. (với $t'_q = c.t_q$)

$$\Rightarrow b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_k = b_n.k^n + b_{n-1}.k^{n-1} + \ldots + b_1.k + b_0$$

$$= b_n \times \left[(-1)^n + d.t'_n \right] + b_{n-1}\left[(-1)^{n-1} + d.t'_{n-1} \right] + ... + b_1\left[(-1)^1 + d.t'_1 \right] + b_0$$

$$= (-1)^n b_n + (-1)^{n-1} b_{n-1} + ... - b_1 + b_0 + d\left(b_n t'_n + b_{n-1} t'_{n-1} + ... + b_1 t'_1 \right)$$

Vậy: $b \vdots d \Leftrightarrow \left[(-1)^n b_n + (-1)^{n-1} b_{n-1} + ... - b_1 + b_0 \right] \vdots d$.

Nhận xét 1.3.2

Chúng ta có thể sử dụng Định lý 1.3.5 và Hệ quả 1.3.6 để soi lại các dấu hiệu chia hết cho 11, dấu hiệu chia hết cho 7, 11, 13 ở hệ đếm cơ số 10 đã biết. Và các dấu hiệu chia hết ở các hệ đếm cơ số khác. Chẳng hạn;

Dấu hiệu chia hết cho 2, 5, 10 trong hệ đếm cơ số 9

Tổng đan dấu các chữ số của nó trong hệ cơ số 9 là số chia hết cho 2, 5, 10 vì 2, 5, 10 là ước của 10=9+1.

Dấu hiệu chia hết cho 3, 9 trong hệ đếm cơ số 8

Tổng đan dấu các chữ số của nó trong hệ đếm cơ số 8 là số chia hết cho 3, 9 vì 3 và 9 là ước của (8+1).

Thí dụ 1.3.4

1. Số $(23456780113)_9$ có tổng đan đấu các chữ số là S'=3-1+1-0+8-7+6-5+4-3+2=8 là số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 5, 10 nên số $(23456780113)_9$ chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 5, 10.

Kiểm tra qua phần mềm *Maple* có kết quả hoàn toàn đúng.

```
> convert(23456780113,decimal,9);
```

8335586568

```
> ifactor(8335586568);
```

$(2)^3 (3) (347316107)$

2. Số $(356776130112)_8$ có tổng đan dấu các chữ số là S'=2-1+1-0+3-1+6-7+7-6+5-3=6 là số chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9 nên số $(356776130112)_8$ chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 9.

Kiểm tra qua phần mềm *Maple* có kết quả hoàn toàn đúng:

>**convert(356776130112,decimal,octal);**

32077557834

>**ifactor(32077557834);**

(2) (3) (7) (763751377)

3. Xét xem số $(120124123432100123341)_5$ có chia hết cho 2, 7, 9 hay không?

Ta có 2×7×9=126 =125+1. Nên ta chuyển số đã cho thành số viết trong hệ đếm cơ số 125, bằng cách tách số đó ra thành từng nhóm có 3 chữ số từ phải qua trái (nhóm cuối cùng có thể không đủ 3 chữ số) và mỗi nhóm chuyển thành số viết trong hệ đếm cơ số 125. Khi đó ta lấy tổng đan dấu các chữ số của số đó viết trong hệ đếm cơ số 125 kể từ phải qua trái. Nếu tổng đó chia hết cho 2, 7, 9 thì số đó chia hết cho 2, 7, 9. Ta có:

$341 = 3\times5^2 + 4\times5 + 1 = 96$; $123 = 1\times5^2 + 2\times5 + 3 = 38$;
$100 = 1\times5^2 + 0\times5 + 0 = 25$; $432 = 4\times5^2 + 3\times5 + 2 = 117$;
$123 = 1\times5^2 + 2\times5 + 3 = 38$; $124 = 1\times5^2 + 2\times5 + 4 = 39$;
$120 = 1\times5^2 + 2\times5 + 0 = 35$.

Tổng đan dấu các chữ số của nó là S = 96 -38 + 25 – 117 + 38 -39 + 35 = 0 là số chia hết cho 2, 7, 9 nên số đã cho chia hết cho 2, 7, 9. Thực ra thì ta có thể lấy tổng đan dấu của các nhóm có 3 chữ số từ phải qua trái của số đã cho, nếu tổng ấy chia hết cho 2, 7, 9 thì số đó chia hết cho 2, 7, 9 chứ không cần thiết phải đổi từng nhóm sang hệ đếm cơ số 125 như trên.

Kiểm tra qua phần mềm Maple có kết quả hoàn toàn đúng:

> **convert(120124123432100123341,decimal,5);**

134714096098596

> **ifactor(134714096098596);**

$(2)^2 (3)^2 (7) (59729) (8950087)$

Nhận xét 1.3.3

Sử dụng phần mềm *Maple* có ưu điểm rất lớn là tìm được các ước của một số a ở trong hệ đếm cơ số tùy ý một cách dễ dàng bằng cách chuyển đổi số đó qua hệ đếm cơ số 10, rồi phân tích nó ra thừa số nguyên tố hoặc chia trực tiếp tìm kết quả rồi kết luận. Cũng có thể kiểm tra tính chia hết dựa vào việc chia tìm dư. Tuy nhiên máy tính mặc dù đã được sử dụng nhiều hiện nay song không phải bất kỳ lúc nào cũng có sẵn sàng ở mọi nơi mọi lúc. Cho nên việc tìm hiểu về các dấu hiệu chia hết ở các hệ đếm với cơ số khác nhau vẫn luôn là một vấn đề cần thiết cho việc sử dụng cũng như phát triển tư duy toán học.

§2. Sử dụng hệ đếm trong giải toán

Trong phần này chúng ta đề cập tới một số bài toán được phát biểu bằng ngôn ngữ hệ đếm hoặc sử dụng các kiến thức về hệ đếm để giải. Các bài toán này thường hay gặp trong các kỳ thi quốc gia và quốc tế. Hệ đếm được sử dụng trong việc giải các bài toán này chủ yếu là hệ nhị phân (hệ đếm cơ số 2) và hệ tam phân (hệ đếm cơ số 3), tuy nhiên cũng có thể có những bài sử dụng cơ số khác hoặc những bài phát biểu cho hệ đếm cơ số bất kì. Những bài này thường khó và đa dạng, nói chung không có phương pháp tổng quát để giải.

Các bài dạng này thường phải sử dụng phương pháp quy nạp toán học và một số tính chất của số viết trong hệ đếm cơ số 2 và hệ đếm cơ số 3. Thí dụ:

1) Nếu $a=(a_na_{n-1}...a_1a_0)_2$ thì: $2a=(a_na_{n-1}...a_1a_00)_2$, $4a=(a_na_{n-1}...a_1a_000)_2$, $2a+1=(a_na_{n-1}...a_1a_01)_2$ và $\frac{a}{2}=(a_na_{n-1}...a_1.a_0)_2$, $\frac{a}{4}=(a_na_{n-1}...a_2.a_1a_0)_2$.

Tương tự trong hệ đếm cơ số 3 ta có

2) Nếu $a=(a_na_{n-1}...a_1a_0)_3$ thì: $3a=(a_na_{n-1}...a_1a_00)_3$, $9a=(a_na_{n-1}...a_1a_000)_3$, $3a+1=(a_na_{n-1}...a_1a_01)_3$, $3a+2=(a_na_{n-1}...a_1a_02)_3$ và

$\frac{a}{3}=(a_na_{n-1}...a_1.a_0)_3$, $\frac{a}{9}=(a_na_{n-1}...a_2.a_1a_0)_3$.

2.1 Các bài toán được phát biểu trên ngôn ngữ hệ đếm

Bài toán 1 (Vô địch Canada, 1972)

Chứng minh rằng

1) $(10201)_b$ là hợp số với mọi $b > 2$.

2) $(10101)_k$ là hợp số với mọi k.

Giải

1) Vì $(10201)_b = b^4 + 2b^2 + 1 = (b^2+1)^2$ nên $(10201)_b$ là hợp số với mọi $b > 2$.

2) Ta có:

$$(10101)_k = k^4 + k^2 + 1 = (k^4 + 2k^2 + 1) - k^2 = (k^2+1)^2 - k^2 = (k^2 + k + 1)(k^2 - k + 1).$$

Với mọi $k > 1$ thì $k^2 - k + 1 > 1$ nên $(10101)_k$ là hợp số với mọi k vì $(10101)_k$ là tích của hai nhân tử khác 1.

Bài toán 2 (Vô địch Canada, 1987)

Tìm tất cả các cách viết số 1987 trong hệ đếm cơ số k có ba chữ số để cho tổng $a_1 + a_2 + a_3 = 25$.

Giải

Số đó có dạng $A = (a_1a_2a_3)_k = a_1k^2 + a_2k + a_3$, $0 \le a_1, a_2, a_3 \le k-1$, $0 < a_1$.

Do đó $k^2 \le A \le (k-1)k^2 + (k-1)k + k - 1 = k^3 - 1 < k^3$.

Vì $45^2 = 2025 > 1987$ nên với $k \ge 45$ thì $A = (a_1a_2a_3)_k \ge 45^2 > 1987 \Rightarrow k \le 44$.

Mặt khác, $12^3 = 1728 < 1987$ nên với $k \le 12$ nên $A = (a_1a_2a_3)_k < 12^3 < 1987$.

Suy ra $k \ge 13$. Do vậy $13 \le k \le 44$. Vì $a_1 + a_2 + a_3 = 25$ nên ta có:

$$A = (a_1a_2a_3)_k = a_1k^2 + a_2k + 25 - a_1 - a_2 \Leftrightarrow 1987 = a_1(k^2-1) + a_2(k-1) + 25$$

$$\Leftrightarrow 1962 = (k-1)[a_1(k+1) + a_2] \Leftrightarrow 18.109 = (k-1)[a_1(k+1) + a_2].$$

Ta xét các trường hợp có thể xảy ra sau:

- $k-1$ là ước của 109 $\Rightarrow$k=2 hoặc k = 110 (đều không thỏa mãn).
- $k-1$ là ước của 18:

Nếu $k-1$=1, 2, 3, 6, 9 thì k =2, 3, 4, 7, 10 (đều không thỏa mãn).

Do vậy $k-1=18 \Rightarrow$ $k=19$(thỏa mãn) $\Rightarrow a_1=5; a_2=9; a_3=11$.

Vậy có duy nhất một cách biểu diễn thỏa mãn yêu cầu là: $1987=\left(59\overline{11}\right)_{19}$.

Bài toán 3 (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1965)

Kí hiệu 25_b là số có hai chữ số trong hệ đếm cơ số b. Nếu 52_b gấp đôi 25_b thì b bằng (chọn một trong năm đáp số):

a) $b=7$; b) $b=8$; c) $b=9$; d) $b=11$; e) $b=12$.

Giải

Vì $52_b=5b+2$ và $25_b=2b+5$ nên theo bài ra ta có: $5b+2=2(2b+5)$.

Suy ra $b=8$. Đáp án b) là đúng.

Bài toán 4 (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1967)

Các số 12, 15, 16 được viết trong cơ số b có tích là 3146 trong cơ số b. Vậy trong cơ số b, tổng của chúng bằng (chọn một trong năm đáp số):

a) 43; b) 44; c) 45; d) 46; e) 47.

Giải

Vì $12_b=b+2$; $15_b=b+5$; $16_b=b+6$ nên

$$12_b\times 15_b\times 16_b=(b+2)(b+5)(b+6)=b^3+13b^2+52b+60.$$

Mặt khác, $3146_b=3b^3+b^2+4b+6$.

Theo bài ra ta có: $12_b\times 15_b\times 16_b=3146_b$

$\Leftrightarrow b^3+13b^2+52b+60=3b^3+b^2+4b+6 \Leftrightarrow b^3-6b^2-24b-27=0 \Leftrightarrow b=9$.

Vậy $\begin{aligned}&12_b+15_b+16_b=12_9+15_9+16_9=(9+2)+(9+5)+(9+6)\\&=3.9+13=3.9+9+4=4.9+4=44_9.\end{aligned}$

Đáp án b) là đúng.

Bài toán 5 (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1968)

Số N có ba chữ số khi viết trong cơ số 7. Khi viết N trong cơ số 9, các chữ số đảo ngược lại. Thế thì số chính giữa là (chọn một trong năm đáp số):

a) 0; b) 1; c) 3; d) 4; e) 5.

Giải

Giả sử $N_7 = (abc)_7 = a.7^2 + b.7 + c$, $0 \le a,b,c \le 6$, $a > 0$.

Khi ấy $N_9 = (cba)_9 = c.9^2 + b.9 + a$.

Suy ra $49a + 7b + c = 81c + 9b + a \Leftrightarrow b = 24a - 40c \Leftrightarrow b = 8(3a - 5c)$.

Do $0 \le a,b,c \le 6$, $a > 0$ nên số nguyên $n = 3a - 5c = 0$.

Chứng tỏ $b = 0$ và $a = 5$, $c = 3$. Vậy số cần tìm là $(503)_7 = (305)_9$. Chọn a

Bài toán 6 (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1969)

Nếu trong cơ số 2 số N là 11000. Thế thì số nguyên liền trước viết trong cơ số 2 là (chọn một trong năm đáp số):

a) 10001; b) 10010; c) 10011; d) 10110; e) 10111.

Giải

Cách 1: Số liền trước số 11000_2 trong cơ số 2 sẽ là (làm phép trừ trong cơ số 2):

$11000_2 - 1 = 10111_2$. Chọn e

Cách 2: Đổi qua cơ số 10: $11000_2 = 2^4 + 2^3 = 24$.

Số liền trước số 24 là $23 = 2^4 + 2^2 + 2 + 1 = 10111_2$.

Bài toán 7 (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1970)

Số 10! (10 được viết trong cơ số 10), khi viết trong cơ số 12 có đúng k chữ số cuối cùng đều bằng 0. Giá trị của k là (chọn một trong năm đáp số):

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5.

Giải

Trong cơ số 10 ta có: $10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 = 2^8.3^4.5^2.7 = 12^4.5^2.7$.

Vì $5^2.7 = 25.7 = 175 = 12^2 + 2.12 + 7 = (127)_{12}$ nên

$$10! = 12^4.5^2.7 = 10000_{12}.127_{12} = 1270000_{12}.$$

Chứng tỏ 10! có 4 chữ số 0 trong cơ số 12. Đáp án d) đúng.

Bài toán 8 (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1971)

Một số khi viết trong cơ số a là 47, khi viết trong cơ số b là 74. Giả sử cả hai cơ số là số nguyên dương. Giá trị nhỏ nhất của $a+b$ được viết trong hệ thống số La Mã là (chọn một trong năm đáp số):

a) XIII; b) XV; c) XXI; d) XXIV; e) XVI.

Giải

Ta có $47_a = 4a + 7$ với $a > 7$; $74_b = 7b + 4$ với $b > 7$.

Suy ra $47_a = 74_b \Leftrightarrow 4a + 7 = 7b + 4 \Leftrightarrow 7b - 4a = 3$.

Đây là một phương trình vô định với a và b là những số nguyên dương.

Tập tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình này là $a = 1 + 7t; b = 1 + 4t$ với t là số không âm bất kì.

Dễ thấy rằng với $t = 2$ ta được nghiệm nhỏ nhất với $a = 15 > 7; b = 9 > 7$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a+b$ là 24=XXIV. Đáp án d) đúng.

Bài toán 9 (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1973)

Số 544 trong hệ đếm cơ số b là bình phương của số 24 viết trong hệ cơ số b. Số đó viết trong hệ cơ số 10 sẽ là (chọn một trong năm đáp số):

a) 6; b) 8; c) 12; d) 14; e) 16.

Giải

Ta có $b > 5$. Vì $24_b = 2b + 4$ nên $(24_b)^2 = (2b+4)^2 = 4b^2 + 16b + 16$.

Mặt khác, $554_b = 5b^2 + 5b + 4$. Suy ra

$(24_b)^2 = 554_b \Leftrightarrow 4b^2 + 16b + 16 = 5b^2 + 5b + 4 \Leftrightarrow b^2 - 11b - 12 = 0 \Leftrightarrow b = 12$.

Vậy đáp án c) là đúng.

Bài toán 10 (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1978)

Biết số nguyên $n>8$ là nghiệm của phương trình $x^2-ax+b=0$ và biểu diễn của a trong cơ số n là 18. Thế thì biểu diễn của b trong cơ số n là (chọn một trong năm đáp số):

a) 18; b) 28; c) 80; d) 81; e) 280.

Giải

Vì $n>8$ là nghiệm của phương trình $x^2-ax+b=0$ nên ta có $n^2-an+b=0$.

Mặt khác, $a=(18)_n=n+8$. Suy ra $b=an-n^2=(n+8)n-n^2=8n=(80)_n$.

Vậy c) là đáp án đúng.

Bài toán 11 (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1981)

Biểu diễn trong hệ đếm cơ số 3 của x là 12112211122211112222. Chữ số đầu tiên (tức là chữ số bên trái) của x khi viết trong hệ cơ số 9 là (chọn một trong năm đáp số):

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5.

Giải

Cách 1: Ta có $(12112211122211112222)_3=$

$$\left(1.3^{19}+2.3^{18}\right)+\left(1.3^{17}+1.3^{16}\right)+\left(2.3^{15}+2.3^{14}\right)+...+\left(2.3^{1}+2\right)$$

$$=(1.3+2).\left(3^2\right)^9+(1.3+1)\left(3^2\right)^8+...+(2.3+2)=5.9^9+4.9^8+8.9^7+...+8.$$

Vậy chữ số đầu tiên trong biểu diễn cơ số 9 là 5. Đáp án e) là đúng.

Cách 2: Chia thành từng cụm 2 chữ số từ phải qua trái rồi chuyển nhóm cuối sang hệ đếm cơ số 9.

2.2. Các bài toán được giải nhờ phương pháp hệ đếm

Nhiều bài toán phát biểu rất đa dạng và phong phú (phương trình hàm, ngôn ngữ tập hợp,...), tuyệt nhiên không có một giả thiết nào về hệ đếm, nhưng nhờ phát biểu lại dưới ngôn ngữ hệ đếm, ta có lời giải đẹp cho chúng. Có những bài lời giải có lẽ là duy nhất. Các bài toán dưới đây là những ví dụ minh họa.

Bài toán 12 (Vô địch Trung quốc, 2005)

Cho $T=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ và $M=\left\{\frac{a_1}{7}+\frac{a_2}{7^2}+\frac{a_3}{7^3}+\frac{a_4}{7^4};\ a_i\in T, i=\overline{1,4}\right\}$.

Sắp xếp các số của M theo thứ tự giảm dần thì số thứ 2005 của M sẽ là số nào trong các số sau:

a) $\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{3}{7^4}$; b) $\frac{5}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{6}{7^3}+\frac{2}{7^4}$;

c) $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{4}{7^4}$; d) $\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{0}{7^3}+\frac{3}{7^4}$.

Giải (sử dụng hệ đếm cơ số 7)

Kí hiệu $(a_1a_2...a_k)_p$ là số viết trong hệ đếm cơ số p với k chữ số.

Lấy số bất kì trong tập M nhân với 7^4 ta được một số mới dạng

$$a_1.7^3+a_2.7^2+a_3.7+a_4.$$

Kí hiệu tập các số mới là M^* thì

$$M^*=\{a_1.7^3+a_2.7^2+a_3.7+a_4;\, a_i\in T, i=\overline{1,4}\}=\{(a_1a_2a_3a_4)_7\}.$$

Như vậy, khi a_i nhận giá trị trong tập $T=\{0,1,2,3,4,5,6\}$thì M^* chính là tập tất cả các số có không quá 4 chữ số trong hệ đếm cơ số 7.

Số lớn nhất trong tập M^* là số $(6666)_7$=2400.

Sắp xếp các số của tập M^*theo thứ tự giảm dần thì số 2400 là số đứng thứ nhất. Số đứng thứ 2005 của tập M^* là 2400 – 2004 = 396 = $(1104)_7$.

Đem các số của tập M^* chia cho 7^4 thì ta được các số của tập M, và tập M cũng được sắp thứ tự giảm dần giống như tập M^*. Chính vì vậy số đứng thứ 2005 của tập M được sinh ra do số thứ 2005 của tập M^* chia cho 7^4.

Vậy số cần tìm là $(1104)_7 : 7^4 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{0}{7^3} + \frac{4}{7^4}$. Đáp án c) là đáp án đúng.

Bài toán 13 (Bài toán Josephus)

Trong cuộc chiến tranh Do Thái-La Mã, Josephus ra nhập đội quân Do Thái. Trong một trận chiến đấu ác liệt, 41 người lính, trong đó có Josephus đã bị quân La Mã vây chặt trong một hang động. Với tinh thần thà tự sát còn hơn là bị bắt, họ quyết định đứng thành vòng tròn, rồi theo chiều kim đồng hồ, bắt đầu từ người thứ hai, cứ cách một người lại có một người tự sát, hết vòng này đến vòng khác, cho đến người cuối cùng thì dừng. Người này phải sống và tìm cách thoát ra khỏi hang động để kể lại cho mọi người tinh thần hy sinh anh dũng của những người lính. Hỏi người đó phải đứng ở vị trí nào trên vòng tròn trong số 41 người.

Giải

Xét bài toán Josephus tổng quát với n người. Kí hiệu $J(n)$ là vị trí người sống sót. Ta có $J(1) = 1$.

Trường hợp 1 $n = 2k$. Sau một vòng còn lại k người mang số cũ là $1, 3, 5, ..., 2k-1$ và được đánh số mới là $1, 2, ..., k$. Tiếp tục như thế, ta có

$$J(2k) = 2J(k) - 1. \tag{1a}$$

Trường hợp 2 $n = 2k+1$. Sau một vòng còn lại k người mang số cũ là $1, 3, 5, ..., 2k$ và được đánh số mới là $1, 2, ..., k$. Tiếp tục như thế, ta có

$$J(2k+1) = 2J(k) + 1. \tag{1b}$$

Xét $2^m \le n < 2^{m+1}$, tức là $n = 2^m + r$ với $0 \le r < 2^m$. Ta sẽ chứng minh bằng qui nạp rằng

$$J(n) = J(2^m + r) = 2r + 1. \tag{2}$$

Với $m = 1$ thì $J(n) = J(2^0 + 0) = 2.0 + 1 = 1$. Công thức (2) đúng.

Nếu n chẵn ($n = 2k$) thì $2^{m-1} \le k = \frac{n}{2} = 2^{m-1} + \frac{r}{2} < 2^m$; r cũng là một số chẵn và $\frac{r}{2}$ là một số nguyên. Theo công thức (1a) và giả thiết qui nạp ta có

$J(n) = J(2^m + r) = J(2k) = 2J(k) - 1 = 2J(2^{m-1} + \frac{r}{2}) - 1 = 2(2.\frac{r}{2} + 1) - 1 = 2r + 1.$

Nếu n lẻ ($n = 2k+1$) thì $2^{m-1} \le k = \frac{n-1}{2} = 2^{m-1} + \frac{r-1}{2} < 2^m$; r cũng là một số lẻ và $\frac{r-1}{2}$ là một số nguyên. Theo công thức (1b) và giả thiết qui nạp ta có

$J(n) = J(2k+1) = 2J(k) + 1 = 2J(2^{m-1} + \frac{r-1}{2}) + 1 = 2(2.\frac{r-1}{2} + 1) + 1 = 2r + 1.$

Vậy công thức (2) được chứng minh.

Giả sử n được viết trong hệ đếm cơ số 2 là

$$n = (1a_{m-1}...a_0)_2 = 2^m + (a_{m-1}...a_0)_2 = 2^m + r.$$

Khi ấy theo công thức (2) ta có

$$J(n) = 2r + 1 = 2(a_{m-1}...a_0)_2 + 1 = (a_{m-1}...a_0 0)_2 + 1 = (a_{m-1}...a_0 1)_2$$

hay $J(1a_{m-1}...a_0)_2 = (a_{m-1}...a_0 1)_2$.

Vì $41 = 2^5 + 2^3 + 1 = (101001)_2$ nên $J(41) = (10011)_2 = 2^4 + 2 + 1 = 19$.

Người sống sót là người đứng thứ 19 trên vòng tròn tính theo chiêu kim đồng hồ.

Bài toán 14

Cho N^* là tập các số nguyên dương, $f: N^* \to N^*$ là hàm tăng chặt thỏa mãn

$$f(f(n)) = 3n. \quad (1)$$

Tính $f(2009)$.

Giải (sử dụng hệ tam phân)

Nếu $f(1) = 1$ thì $f(f(1)) = f(1) = 1$. Vô lý vì theo giả thiết ta có $f(f(1)) = 3$.

Vậy $f(1)>1$. Vì $f:N^*\to N^*$ là hàm tăng chặt nên

$$f\left(f(1)\right)>f(1)\Rightarrow 3=3.1=f(f(1))>f(1)>1\Rightarrow\ f(1)=2.$$

Từ đó ta có

$f(2)=f\left(f(1)\right)=3;\ f(3)=f\left(f(2)\right)=6;\ f(6)=f\left(f(3)\right)=9;$

$\Rightarrow f(4)=7;\ f(5)=8$ (vì f là hàm tăng chặt).

$\Rightarrow\ f(7)=f(f(4))=12;\ f(8)=f\left(f(5)\right)=15;\ f(9)=f\left(f(6)\right)=18;$

$\Rightarrow f(12)=f\left(f(7)\right)=21\Rightarrow f(10)=19;\ f(11)=20$ (vì f là hàm tăng chặt).

Từ đây, do $f(1)=2$ được xác định duy nhất nên tồn tại duy nhất hàm tăng chặt $f:N^*\to N^*$ thỏa mãn (1).

Đến đây ta vẫn chưa thấy qui luật. Số 3 trong đầu bài gợi ý việc ta sử dụng hệ đếm cơ số 3. Vậy ta viết đối số và các giá trị của hàm số theo hệ đếm cơ số 3 để thử tìm quy luật.

Ta có:

f(1) =2 $\Leftrightarrow$ f($\mathbf{1}_3$) = $\mathbf{2}_3$; f(2) =3 $\Leftrightarrow$ f($\mathbf{2}_3$) = $\mathbf{10}_3$; f(3) =6 $\Leftrightarrow$ f($\mathbf{10}_3$) = $\mathbf{20}_3$;

f(4) =7 $\Leftrightarrow$ f($\mathbf{11}_3$) = $\mathbf{21}_3$; f(5) = 8 $\Leftrightarrow$ f($\mathbf{12}_3$) = $\mathbf{22}_3$; f(6) =9 $\Leftrightarrow$ f($\mathbf{20}_3$) =$\mathbf{100}_3$;

f(7) =12 $\Leftrightarrow$ f($\mathbf{21}_3$) = $\mathbf{110}_3$; f(8) =15 $\Leftrightarrow$ f($\mathbf{22}_3$) = $\mathbf{120}_3$; f(9)=18 $\Leftrightarrow$ f($\mathbf{100}_3$) =$\mathbf{200}_3$;

f(10)=19 $\Leftrightarrow$ f($\mathbf{101}_3$)=$\mathbf{201}_3$; f(11)=20 $\Leftrightarrow$ f($\mathbf{102}_3$)=$\mathbf{202}_3$; f(12)=21 $\Leftrightarrow$ f($\mathbf{110}_3$)= $\mathbf{210}_3$;

Từ đây ta thấy quy luật:

$f\left((1x_nx_{n-1}...x_1x_0)_3\right)=(2x_nx_{n-1}...x_1x_0)_3$ và $f\left((2x_nx_{n-1}...x_1x_0)_3\right)=(1x_nx_{n-1}...x_1x_00)_3$. (2)

Ta sẽ chứng minh qui luật (2) thỏa mãn (1).

Trường hợp 1 $n=3m$.

Nếu $m=(1x_kx_{k-1}...x_1x_0)_3$ thì $n=10_3\times(1x_kx_{k-1}...x_1x_0)_3=(1x_kx_{k-1}...x_1x_00)_3$.

Theo (2) thì $f(n)=f(3m)=f\left((1x_kx_{k-1}...x_1x_00)_3\right)=(2x_kx_{k-1}...x_1x_00)_3$;

$f(f(n))=f\left((2x_kx_{k-1}...x_1x_00)_3\right)=(1x_kx_{k-1}...x_1x_000)_3=3(1x_kx_{k-1}...x_1x_00)_3=3n$.

Nếu $m=(2x_kx_{k-1}...x_1x_0)_3$ thì $n=10_3\times(2x_kx_{k-1}...x_1x_0)_3=(2x_kx_{k-1}...x_1x_00)_3$.

Theo (2) thì $f(n)=f(3m)=f\left((2x_kx_{k-1}...x_1x_00)_3\right)=(1x_kx_{k-1}...x_1x_000)_3$;

$f(f(n))=f\left((1x_kx_{k-1}...x_1x_000)_3\right)=(2x_kx_{k-1}...x_1x_000)_3=3(2x_kx_{k-1}...x_1x_00)_3=3n$.

Trường hợp 2 $n=3m+1$.

Nếu $m=(1x_kx_{k-1}...x_1x_0)_3$ thì $n=10_3\times(1x_kx_{k-1}...x_1x_0)_3+1=(1x_kx_{k-1}...x_1x_01)_3$.

Theo (2) thì $f(n)=f(3m+1)=f\left((1x_kx_{k-1}...x_1x_01)_3\right)=(2x_kx_{k-1}...x_1x_01)_3$;

$f(f(n))=f\left((2x_kx_{k-1}...x_1x_01)_3\right)=(1x_kx_{k-1}...x_1x_010)_3=3(1x_kx_{k-1}...x_1x_01)_3=3n$.

Nếu $m=(2x_kx_{k-1}...x_1x_0)_3$ thì $n=10_3\times(2x_kx_{k-1}...x_1x_0)_3+1=(2x_kx_{k-1}...x_1x_01)_3$.

Theo (2) thì

$f(n)=f(3m+1)=f\left((2x_kx_{k-1}...x_1x_01)_3\right)=(1x_kx_{k-1}...x_1x_010)_3$;

$f(f(n))=f\left((1x_kx_{k-1}...x_1x_010)_3\right)=(2x_kx_{k-1}...x_1x_010)_3=3(2x_kx_{k-1}...x_1x_01)_3=3n$.

Trường hợp 3 $n=3m+2$.

Nếu $m=(1x_kx_{k-1}...x_1x_0)_3$ thì $n=10_3\times(1x_kx_{k-1}...x_1x_0)_3+2=(1x_kx_{k-1}...x_1x_02)_3$.

Theo (2) thì $f(n)=f(3m+2)=f\left((1x_kx_{k-1}...x_1x_02)_3\right)=(2x_kx_{k-1}...x_1x_02)_3$;

$f(f(n))=f\left((2x_kx_{k-1}...x_1x_02)_3\right)=(1x_kx_{k-1}...x_1x_020)_3=3(1x_kx_{k-1}...x_1x_02)_3=3n$.

Nếu $m=(2x_kx_{k-1}...x_1x_0)_3$ thì $n=10_3\times(2x_kx_{k-1}...x_1x_0)_3+2=(2x_kx_{k-1}...x_1x_02)_3$.

Theo (2) thì $f(n)=f(3m+2)=f\left((2x_kx_{k-1}...x_1x_02)_3\right)=(1x_kx_{k-1}...x_1x_020)_3$;

$f(f(n))=f\left((1x_kx_{k-1}...x_1x_020)_3\right)=(2x_kx_{k-1}...x_1x_020)_3=3(2x_kx_{k-1}...x_1x_02)_3=3n$.

Vậy (2) thỏa mãn (1). Do tính duy nhất nên (1) và (2) tương đương.

Quay lại bài toán ta có:

$2009 = 2202102_3 \Rightarrow f(2009)= f\left((2202102)_3\right)= 12021020_3 = 3840$.

Bài toán 15a

Chứng minh rằng giữa các số 0, 1, 2,…, 3^k-1 có thể tìm thấy 2^k các số khác nhau sao cho không có số nào trong các số ấy là trung bình cộng của hai số khác.

Giải

Vì $3^k - 1 = \left(1\underbrace{00...0}_{k}\right)_3 - 1 = \left(\underbrace{22...2}_{k}\right)_3$ nên mọi số $m \in \{0, 1, 2, ..., 3^k - 1\}$ đều có thể biểu diễn được dưới dạng một số trong hệ đếm cơ số 3 có độ dài k:

$(m)_3 = (a_1 a_2 ... a_k)_3$, trong đó a_i nhận một trong các giá trị $0,1,2$. Thí dụ,

$$0_3 = \left(\underbrace{0...0}_{k}\right)_3;\ \left(\frac{3^k - 1}{2}\right)_3 = \left(\underbrace{1...1}_{k}\right)_3;\ 3^k - 1 = \left(\underbrace{22...2}_{k}\right)_3.$$

Trong tập các số 0, 1, 2,…, $3^k - 1$ xét tập T tất các số mà biểu diễn của chúng chỉ gồm các chữ số 0 và chữ số 1. Mỗi vị trí trong tất cả k vị trí của các số đó có thể nhận chữ số 0 hoặc chữ số 1 nên có tất cả 2^k số.

Tổng $a + b$ của hai số (khác nhau) a và b trong các số này chắc chắn chứa chữ số 1 (tồn tại một vị trí k_0 nào đó mà chữ số của a là 0, còn chữ số của b là 1 hoặc ngược lại). Nhưng số $2c$, trong đó c cũng thuộc tập trên (c chỉ có các chữ số 0 và 1) có biểu diễn chỉ gồm các chữ số 0 và 2. Vì vậy đẳng thức $2c = a + b$ là không xảy ra. Vậy T là tập gồm 2^k số cần tìm.

Bài 15b (Thi Olympic Quốc tế, 1983)

Có thể tìm được hay không 2009 số nguyên dương khác nhau nhỏ hơn hoặc bằng 10^5 sao cho ba số bất kỳ trong các số đó không lập thành ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng.

Giải (sử dụng hệ tam phân)

Ta xây dựng một tập hợp T có thể nhiều hơn 2009 số nguyên dương nhỏ hơn 10^5, sao cho trong tập hợp đó không có ba số liên tiếp nào là ba số hạng của một cấp số cộng, tức là không xảy ra đẳng thức $x + y = 2z$ với mọi $x, y, z \in T$.

Thật vậy, ta xét tập hợp T gồm tất cả các số nguyên dương mà trong cách biểu diễn theo hệ đếm cơ số 3 có nhiều nhất 11 chữ số và mỗi một trong chúng là 0 hoặc 1. Như vậy ta có $2^{11} – 1 = 2047 > 2009$ số mà số lớn nhất là:

$$3^{10}+3^9+3^7+3^6+3^5+3^4+3^3+3^2+3^1+3^0=88573<10^5$$

Giả sử có $x+y=2z$ với bộ ba $x,y,z\in T$ nào đó. Số $2z$ với mọi $z\in T$ chỉ gồm các chữ số 0 và 2. Từ đó suy ra x và y phải bằng nhau từng chữ số một, do đó ta có $x=y=z$. Vô lý. Vậy T là tập không chứa ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Suy ra T thỏa mãn yêu cầu của đầu bài.

Bài 16a (Vô địch Trung Mĩ, 1989)

Cho hàm số $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ thỏa mãn $\begin{cases} f(1)=1 \\ f(2n+1)=f(2n)+1 \\ f(2n)=3f(n) \end{cases}$

Tìm tất cả các số m sao cho tồn tại n để $m=f(n)$

Giải (sử dụng hệ nhị phân)

Vì $f(2n)=3f(n)$ và $f(2n+1)=1+f(2n)=1+3f(n)$ với mọi n, tức là $f(2n)$ và $f(2n+1)$ đều được tính theo theo $f(n)$ nên ta nghĩ tới viết các số trong hệ đếm cơ số 2. Ta có:

$f(2)=f(10_2)=3f(1)=3=10_3$; $f(3)=f(11_2)=1+3f(1)=4=11_3$;

$f(4)=f(100_2)=3f(2)=9=100_3$; $f(5)=f(101_2)=1+3f(2)=10=101_3$;

$f(6)=f(110_2)=3f(3)=12=110_3$; $f(7)=f(111_2)=1+3f(3)=13=111_3$.

Qui luật

Giá trị của hàm số $f(n)$ viết trong cơ số 3 có các chữ số chính là các chữ số của n viết trong hệ đếm cơ số 2, tức là khi $n=\left(a_pa_{p-1}...a_1a_0\right)_2$ thì

$$f(n)=f\left(\left(a_pa_{p-1}...a_1a_0\right)_2\right)=\left(a_pa_{p-1}...a_1a_0\right)_3. \tag{1}$$

Chứng minh

Giả sử công thức (1) đúng với mọi $n<k$. Ta chứng minh nó đúng với $n=k$.

Nếu $n=k$ lẻ, thì $n=2m+1$ và $m<k$. Nếu $m=\left(a_pa_{p-1}...a_1\right)_2$ thì

$n = 2m + 1 = 2\left(a_p a_{p-1}...a_1\right)_2 + 1 = \left(a_p a_{p-1}...a_1 0\right)_2 + 1 = \left(a_p a_{p-1}...a_1 1\right)_2$.

Theo qui nạp ta có $f(m) = f\left(\left(a_p a_{p-1}...a_1\right)_2\right) = \left(a_p a_{p-1}...a_1\right)_3$. Vậy

$f(n) = f(2m+1) = 1 + 3f(m) = 1 + 3\left(a_p a_{p-1}...a_1\right)_3 = 1 + \left(a_p a_{p-1}...a_1 0\right)_3 = \left(a_p a_{p-1}...a_1 1\right)_3$.

Nếu n chẵn, thì $n = 2m = 2\left(a_p a_{p-1}...a_1\right)_2 = \left(a_p a_{p-1}...a_1 0\right)_2$. Ta có

$f(n) = f(2m) = 3f(m) = 3\left(a_p a_{p-1}...a_1\right)_3 = \left(a_p a_{p-1}...a_1 0\right)_3 = (n)_3$.

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có

$$f\left(\left(a_p a_{p-1}...a_1 a_0\right)_2\right) = \left(a_p a_{p-1}...a_1 a_0\right)_3.$$

Từ chứng minh trên ta có: Tất cả các số tự nhiên m cần tìm sao cho tồn tại n để $m = f(n)$ chính là tập các số tự nhiên được viết trong cơ số 3 mà không có chữ số 2.

Bài toán 16b (Vô địch Trung Quốc, 1995)

Giả sử $f : N \to N$ có $f(1) = 1$ và hai điều kiện sau đây được thỏa mãn với mọi số nguyên dương n:

1) $3f(n)f(2n+1) = f(2n)(1 + 3f(n))$;

2) $f(2n) < 6f(n)$.

Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $f(k) + f(m) = 293$.

Giải

Vì $3f(n)$ và $1 + 3f(n)$ là nguyên tố cùng nhau nên từ điều kiện 1) suy ra, $f(2n)$ chia hết cho $3f(n)$, tức là $f(2n) = k.3f(n)$ với k nguyên dương nào đó.

Từ điều kiện 2) suy ra $k = 1$ hay $f(2n) = 3f(n)$ với mọi n.

Lại từ điều kiện 1) suy ra $f(2n+1) = 1 + 3f(n)$.

Như vậy, ta trở về Bài 16a. Suy ra $f(n)$ viết trong cơ số 3 có các chữ số chính là các chữ số của n khi $n=\left(a_pa_{p-1}...a_1a_0\right)_2$ viết trong hệ đếm cơ số 2, tức là

$$f\left(\left(a_pa_{p-1}...a_1a_0\right)_2\right)=\left(a_pa_{p-1}...a_1a_0\right)_3.$$

Bởi vì $293=101212_3$ nên số nghiệm của phương trình $f(k)+f(m)=293$ cũng chính là số cách viết 101212_3 dưới dạng tổng của hai số trong hệ đếm cơ số 3 mà các chữ số của nó chỉ có thể là 0 hoặc 1 (do chúng chính là các chữ số trong biểu diễn cơ số 2). Nhận xét rằng cộng hai số như vậy trong hệ đếm cơ số 2 sẽ không có nhớ, vì vậy cả hai phải cùng là 0 tại vị trí thứ 2 (từ bên trái) và cùng là 1 tại ví trí thứ tư và thứ sáu. Tại vị trí thứ nhất, thứ 3 và thứ 5 một số có chữ số là 0 và một số có chữ số là 1. Như vậy, ta có tất cả 4 khả năng sau:

1) $101212_3=101111_3+000101_3$; 2) $101212_3=100101_3+001111_3$;

3)$101212_3=101101_3+000111_3$; 4)$101212_3=100111_3+001101_3$.

Vậy phương trình $f(k)+f(m)=293$ có 4 trường hợp:

1) $f\left(101111_2\right)+f\left(000101_2\right)=101111_3+000101_3=101212_3$ hay

$f(47)+f(5)=283+10=293$;

2) $f\left(100101_2\right)+f\left(001111_2\right)=100101_3+001111_3=101212_3$ hay

$f(37)+f(15)=253+40=293$;

3) $f\left(101101_2\right)+f\left(000111_2\right)=101101_3+000111_3=101212_3$ hay

$f(45)+f(7)=280+13=293$;

4) $f\left(100111_2\right)+f\left(001101_2\right)=100111_3+001101_3=101212_3$ hay

$f(39)+f(13)=256+37=293$.

Đáp số: 8 cặp nghiệm

k	47	37	45	39	5	15	7	13
m	5	15	7	13	47	37	45	39

Lời bình

Đây là các bài toán giải phương trình hàm thường rất hay gặp ở các kì thi học sinh giỏi. Ta thấy trong phát biểu của bài toán không có liên quan tới hệ đếm nhưng khi giải chúng thì phải sử dụng tới các hệ đếm (cơ số 2, cơ số 3,...). Do vậy hệ đếm có thể được xem như *một phương pháp* để giải quyết một lớp các bài toán về phương trình hàm trên tập số tự nhiên.

2.3 Các bài toán được giải nhờ kết hợp hệ đếm với các dạng toán khác hoặc các phương pháp khác

Phương pháp hệ đếm không chỉ liên quan đến các phương trình hàm, mà hệ đếm còn liên quan đến các loại bài toán khác như các bài toán giải phương trình và hệ phương trình, giải phương trình nghiệm nguyên, số thập phân vô hạn tuần hoàn, liên phân số, công thức truy hồi,... Các bài toán sau đây minh họa điều này.

Bài toán 17 (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1966)

Trong cơ số R_1, phân số F_1 khai triển thành 0.373737... và phân số F_2 khai triển thành 0.737373...; Trong cơ số R_2, phân số F_1 khai triển thành 0.252525..., còn phân số F_2 khai triển thành 0.525252.... Tổng số $R_1 + R_2$ viết trong cơ số 10 bằng (chọn một trong năm đáp số):

a) 24; b) 22; c) 21; d) 20; e) 19.

Giải

Vì 0.373737... là số "thập phân" vô hạn tuần hoàn nên nó là số hữu tỉ (phân số).

Trong hệ đếm cơ số 10, ta có

$$0.373737... = \frac{37}{100} + \frac{37}{100^2} + \frac{37}{100^3} + ... = \frac{37}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + ...\right) = \frac{37}{100}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{100}}\right) = \frac{37}{99}.$$

Tương tự, trong hệ cơ số R_1, ta có

$$F_1 = (0.373737...)_{R_1} = \frac{37}{R_1(R_1-1)+(R_1-1)} = \frac{37}{R_1^2-1} = \frac{3R_1+7}{R_1^2-1};$$

$$F_2 = (0.737373...)_{R_1} = \frac{73}{R_1(R_1-1)+(R_1-1)} = \frac{73}{R_1^2-1} = \frac{7R_1+3}{R_1^2-1}.$$

Tương tự, trong hệ cơ số R_2, ta có

$$F_1 = (0.252525...)_{R_2} = \frac{25}{R_2(R_2-1)+(R_2-1)} = \frac{25}{R_2^2-1} = \frac{2R_2+5}{R_2^2-1};$$

$$F_2 = (0.525252...)_{R_2} = \frac{52}{R_2(R_2-1)+(R_2-1)} = \frac{52}{R_2^2-1} = \frac{5R_2+2}{R_2^2-1}.$$

Suy ra: $F_1 + F_2 = \frac{3R_1+7}{R_1^2-1} + \frac{7R_1+3}{R_1^2-1} = \frac{10R_1+10}{R_1^2-1} = \frac{10}{R_1-1}$

và $F_1 + F_2 = \frac{2R_2+5}{R_2^2-1} + \frac{5R_2+2}{R_2^2-1} = \frac{7R_2+7}{R_2^2-1} = \frac{7}{R_2-1}$.

Vậy ta có: $\frac{R_1-1}{10} = \frac{R_2-1}{7}$ hay $7R_1 - 10R_2 + 3 = 0$.

Mặt khác, $F_1 - F_2 = \frac{3R_1+7}{R_1^2-1} - \frac{7R_1+3}{R_1^2-1} = -\frac{4R_1-4}{R_1^2-1} = \frac{-4}{R_1+1}$

và $F_1 - F_2 = \frac{2R_2+5}{R_2^2-1} - \frac{5R_2+2}{R_2^2-1} = -\frac{3R_2-3}{R_2^2-1} = \frac{-3}{R_2+1}$.

Suy ra $\frac{R_1-1}{4} = \frac{R_2-1}{3}$ hay $3R_1 - 4R_2 - 1 = 0$.

Giải hệ phương trình $7R_1 - 10R_2 + 3 = 0; 3R_1 - 4R_2 + 1 = 0$ ta được $R_1 = 11$ và $R_2 = 8$. Vậy $R_1 + R_2 = 19$. Đáp án e) là đáp án đúng.

Bài toán 18 (Thi trắc nghiệm học sinh giỏi toán toàn nước Mỹ, 1981)

Trong hệ đếm cơ số 8, cho một số chính phương $ab3c$, trong đó $a \neq 0$. Vậy c bằng (chọn một trong năm đáp số):

a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) Không xác định được một cách duy nhất.

Giải

Cách 1

Đặt $n^2 = (ab3c)_8$ với $n = (de)_8$. Khi ấy

$$n^2 = (8d + e)^2 = 8^2 d^2 + 8.2de + e^2.$$

Chứng tỏ số 3 trong $ab3c$ là chữ số đầu tiên (trong hệ cơ số 8) của tổng các chữ số của hàng chục của e^2 (trong hệ cơ số 8) và chữ số đơn vị của $(2de)_8$. Chữ số đơn vị của $(2de)_8$ là chẵn nên chữ số hàng chục của e^2 phải là lẻ. Ta có tất cả các khả năng sau đây của e^2 trong cơ số 8:

e	1	2	3	4	5	6	7
e^2	1	4	11	20	31	44	61

Vậy chữ số hàng chục của e^2 là lẻ khi e bằng 3 hoặc 5. Trong cả hai trường hợp, chữ số hàng đơn vị của e^2 là 1. Thử các trường hợp, n là $(33)_8$; $(73)_8$; $(45)_8$. Bình phương các số này tương ứng là $(1331)_8$; $(6631)_8$ và $(2531)_8$.

Cách 2

Ta có $n^2 = (ab3c)_8 = a.8^3 + b.8^2 + 3.8 + c$.

Nếu n là số chẵn, thì $n^2 = 4k^2$ chia hết cho 4. Do đó số dư của n^2 khi chia cho 8 chỉ có thể là 0 hay 4.

Nếu n lẻ, tức là $n = 2k + 1$. Khi ấy $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$.

Vì $k(k+1)$ luôn là chẵn nên $n^2 = 4k(k+1) + 1$ khi chia cho 8 luôn có số dư là 1.

Như vậy, trong mọi trường hợp, số c chỉ có thể là 0, 1 hay 4.

Nếu $c = 0$ thì $n^2 = (ab30)_8 = a.8^3 + b.8^2 + 3.8 = 8(8p + 3)$ vô lí vì 8 không phải là số chính phương.

Nếu $c = 4$ thì $n^2 = (ab34)_8 = a.8^3 + b.8^2 + 3.8 + 4 = 4(8q + 7)$ vô lí vì không có số chính phương lẻ nào có dạng $8q + 7$.

Vậy $c=1$. Suy ra $n^2=(ab31)_8$ và n nhận một trong ba giá trị $(33)_8$; $(73)_8$; $(45)_8$. Bình phương các số này tương ứng là $(1331)_8$; $(6631)_8$ và $(2531)_8$.

Bài toán 19 (Vô địch Anh, 1982)

Một số tự nhiên $n\in N$ là bội của 17, có biểu diễn trong hệ đếm cơ số 2 chứa đúng 3 chữ số 1. Chứng minh rằng trong biểu diễn đó có không ít hơn 6 chữ số 0. Và nếu có đúng 7 chữ số 0, thì n là chẵn.

Giải

Vì trong biểu diễn cơ số 2 của n có đúng ba chữ số 1 (các chữ số còn lại bằng 0) nên n có dạng

$$n=(10...010...010...0)_2=2^k+2^l+2^m,$$

trong đó k,l,m là những số tự nhiên, $k<l<m$.

Giả sử n trong hệ cơ số 2 có ít hơn 6 chữ số 0. Vì n có đúng 3 chữ số 1 nên nó có nhiều nhất là 8 chữ số, do đó $n\le 11100000=2^7+2^6+2^5$. Chứng tỏ $m\le 7$.

Nhưng 2^i với $i=0,1,2,...,7$ chỉ có thể đồng dư với 1, 2, 4, 8, -1, -2, -4, -8 theo mod 17. Xem xét tất cả các trường hợp (tổng bộ ba từ các số 1, 2, 4, 8, -1, -2, -4, -8 không thể bằng 0 hoặc bằng bội của 17), ta đi đến kết luận: Số $n=2^k+2^l+2^m$ với $0\le k<l<m\le 7$ không thể chia hết cho 17.

Vậy muốn n chia hết cho 17 thì số chữ số 0 trong biểu diễn cơ số 2 của n phải có ít nhất 6 chữ số 0.

Nếu số chữ số 0 trong biểu diễn cơ số 2 của n đúng bằng 7 thì $m=9$ và $2^9\equiv 2(\text{mod}17)$. Khi ấy n không thể là số lẻ, bởi vì nếu n là số lẻ thì n có dạng $n=(1...1)_2=2^m+2^l+2^k$ hay $k=0$. Do đó $\left(2^m+2^k\right)=\left(2^9+2^0\right)\equiv 3(\text{mod}17)$, nghĩa là $2^l\equiv -3(\text{mod}17)$. Điều này không thể xảy ra với mọi $l=1,2,...,7,8$. Vô lí. Vậy n phải là số chẵn.

Chọn $m=9$, $l=6$, $k=1$ ta có

$$n = (1000100010)_2 = 2^9 + 2^6 + 2 = 512 + 64 + 2 = 578 = 17 \times 34$$

chia hết cho 17.

Bài toán 20

Tìm cơ số k của hệ đếm có cơ số nhỏ hơn 100 để số 2101_k là một số chính phương.

Giải

Số 2101_k là một số chính phương nghĩa là tồn tại số n sao cho

$$2101_k = 2k^3 + k^2 + 1 = (2k^2 - k + 1)(k + 1) = n^2.$$

Do $(2k^2 - k + 1) + (k + 1) = 2(k^2 + 1)$ là một số chẵn nên $2k^2 - k + 1$ và $k + 1$ phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Vì $2k^2 - k + 1 = (k + 1)(2k - 3) + 4$ hay $4 = \left(2k^2 - k + 1\right) - (k + 1)(2k - 3)$ nên ước số chung lớn nhất của $2k^2 - k + 1$ và $k + 1$ phải là ước của 4.

Nếu hai số $2k^2 - k + 1$ và $k + 1$ là lẻ thì ước số chung lớn nhất của chúng là 1, vì vậy $(2k^2 - k + 1)(k + 1) = n^2$ khi và chỉ khi $(2k^2 - k + 1)(k + 1) = n^2 = p^2q^2$ và $2k^2 - k + 1 = p^2$, còn $k + 1 = q^2$. Do $k < 100$ nên cho q lần lượt các giá trị từ 2 đến 10 ta được

q	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k = q^2 - 1$	3	8	15	24	35	48	63	80	99
$2k^2 - k + 1$	16	121	436	1129	2416	4561	7876	12721	19504
$\sqrt{2k^2 - k + 1}$	4	11	20.8	33.6	49.1	67.5	88.7	112.7	139.5

Như vậy, chỉ có hai giá trị $k = 3$, $2101_3 = 64 = 8^2$ và $k = 8$, $2101_8 = 1089 = 33^2$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Nếu hai số $2k^2 - k + 1 = 2p$ và $k + 1 = 2q$ là chẵn thì ước số chung lớn nhất của chúng là 2 hoặc 4. vì vậy $(2k^2 - k + 1)(k + 1) = n^2$ khi và chỉ khi $(2k^2 - k + 1)(k + 1) = 4n_1^2 = 4p^2q^2$ và $2k^2 - k + 1 = 2p^2$, còn $k + 1 = 2q^2$. Do đó $k = 2q^2 - 1$. Do $k < 100$ nên cho q lần lượt các giá trị từ 2 đến 7 ta không được thêm nghiệm nào.

q	2	3	4	5	6	7
$k = 2q^2 - 1$	7	17	31	49	71	97
$\dfrac{2k^2 - k + 1}{2}$	46	281	946	2377	5006	9361
$p = \sqrt{\dfrac{2k^2 - k + 1}{2}}$	6,7	16,7	30,5	48,7	70,7	96,7

Nhận xét

Bằng máy tính, ta có thể kiểm tra và khẳng định, trong khoảng $k < 10000$ cũng chỉ có hai giá trị $k = 3$ và $k = 8$ thỏa mãn điều kiện đầu bài. Ta có thể đặt

Câu hỏi

Tìm tất cả cơ số k để số 2101_k là một số chính phương?

Bài toán 21 (Victor Thébault)

Tìm mối quan hệ giữa ba số tự nhiên a, k, k' để cho số a trong các hệ đếm cơ số k và k' đều biểu diễn được dưới dạng một số có ba chữ số của cùng các chữ số. Sử dụng kết quả nhận được, hãy xét $k = 10$.

Giải

Phải tìm a_1, a_2, a_3 sao cho $a = a_k = \left(a_1a_2a_3\right)_k$ và $a = a'_{k'} = \left(a'_1a'_2a'_3\right)_{k'}$, trong đó a'_i, $i = 1,2,3$ là hoán vị của a_1, a_2, a_3, nghĩa là

$$a_1k^2 + a_2k + a_3 = a_1'k'^2 + a_2'k' + a_3'. \quad (1)$$

Với k, k' cố định thì biểu thức trên có thể được viết dưới dạng

$$pa_1 + qa_2 + ra_3 = 0, \quad (2)$$

trong đó p,q,r là các hàm nhận giá trị nguyên của các số tự nhiên k, k'.

Thí dụ, khi $a_1' = a_3, a_2' = a_1, a_3' = a_2$ thì (1) có dạng

$$a_1k^2 + a_2k + a_3 = a_3k'^2 + a_1k' + a_2$$

và (2) có các hệ số $p = k^2 - k', q = k - 1, r = 1 - k'^2$.

Phương trình (2) có vô số nghiệm dạng

$$a_1 = \frac{n_3q}{(p,q)} - \frac{n_2r}{(p,r)}; a_2 = \frac{n_1r}{(q,r)} - \frac{n_3q}{(p,q)}; a_3 = \frac{n_2p}{(p,r)} - \frac{n_1q}{(q,r)}, \quad (2')$$

trong đó (a,b) là ước chung dương lớn nhất của hai số a và b, còn n_1,n_2,n_3 là các số nguyên bất kì. Ngoài ra, theo định nghĩa cơ số, ta còn có điều kiện

$$0 \le a_1, a_2, a_3 < k, k'. \quad (3)$$

Có thể kiểm tra các số a_1,a_2,a_3 có thỏa mãn đồng thời cả hai điều kiện (2') và (3) hay không bằng phương pháp thử trực tiếp.

Với $k = 10$: Tất cả các nghiệm đã biết được cho trong bảng sau. Các số mà chữ số đầu tiên (hàng trăm) bằng 0 (biểu diễn trong hệ đếm cơ số bất kì nào đó) không được đưa vào bảng này.

$265_{10} = 526_7$	$283_{10} = 238_{11}$	$371_{10} = 173_{16}$	$825_{10} = 258_{19}$	$919_{10} = 199_{26}$
$316_{10} = 631_7$	$370_{10} = 307_{11}$	$913_{10} = 391_{16}$	$551_{10} = 155_{21}$	$961_{10} = 191_{26}$
$158_{10} = 185_9$	$191_{10} = 119_{13}$	$782_{10} = 278_{18}$	$912_{10} = 219_{21}$	$912_{10} = 219_{21}$
$227_{10} = 272_9$	$774_{10} = 477_{13}$	$441_{10} = 144_{19}$	$511_{10} = 115_{22}$	$912_{10} = 192_{26}$
$445_{10} = 544_9$	$834_{10} = 438_{14}$	$518_{10} = 185_{19}$	$910_{10} = 190_{26}$	$913_{10} = 319_{16}$
$196_{10} = 169_{11}$	$261_{10} = 126_{15}$	$882_{10} = 288_{19}$	$911_{10} = 191_{26}$	$913_{10} = 193_{26}$

Trong bảng trên, có hai số thú vị là

$$912_{10} = 219_{21} = 192_{26} \text{ và } 913_{10} = 391_{16} = 193_{28}.$$

Bài toán trên liên quan đến khá nhiều vấn đề khác của toán học. Thí dụ, nếu a_1a_1' không phải là số chính phương, thì tồn tại vô số cặp k, k' để (2) và (3) đồng thời được thỏa mãn. Thật vậy, giả sử (p,q) là cặp nghiệm nghiệm nguyên của phương trình Pell $x^2 - a_1a_1'y^2 = 1$ thì, theo công thức nghiệm tổng quát của phương trình Pell, các cơ số k_{n+1}, k_{n+1}' của hệ đếm được tính theo công thức

$$\begin{cases} k_{n+1} = \left(p^2 + a_1a_1'q^2\right)k_n + 2a_1'pqk_n' = \left(pqa_2' + q^2a_1'a_2\right); \\ k_{n+1}' = 2a_1pqk_n + \left(p^2 + a_1a_1'q^2\right)k_n' = \left(pqa_2 + q^2a_1a_2'\right). \end{cases} \tag{4}$$

thỏa mãn (2), nếu k_n, k_n' thỏa mãn (4).

Như vậy, (4) sinh ra một dãy (vô số) các cơ số k_i, k_i' thỏa mãn (2’) và (3), bắt đầu từ một chỉ số i_0 nào đó. Dãy này nói chung không chứa tất cả các nghiệm.

Nếu ta cho thêm một quan hệ nào đó giữa hai cơ số k, k' thì ta có thể nhận được, bằng rất nhiều con đường, nghiệm của (2) phụ thuộc tham số nào đó.

Thí dụ, chọn $k' = 2k+1$, $a_1' = a_2, a_2' = a_3, a_3' = a_1$ thì phương trình (1) trở thành

$$a_1k^2 + a_2k + a_3 = \left(2k+1\right)^2 a_2 + \left(2k+1\right)a_3 + a_1. \tag{5}$$

Suy ra $\left(a_1 + a_2\right) \equiv 0 \left(\operatorname{mod} k\right)$. Do $0 \le a_1, a_2 < k$ nên $a_1 + a_2 = k$.

Thay $a_1 = k - a_2$ vào phương trình (5) ta được

$$\left(k - a_2\right)k^2 + a_2k + a_3 = \left(2k+1\right)^2 a_2 + \left(2k+1\right)a_3 + \left(k - a_2\right).$$

Ước lượng các số hạng đồng dạng, ta đi đến $k^2 - 1 = \left(5k+3\right)a_2 + 2a_3$.

Suy ra

$$2a_3 - 2a_2 = (k^2 - 1) - 5(k+1)a_2 \tag{6}$$

hay $2a_3 - 2a_2 \equiv 0(\mathrm{mod}(k+1))$, tức là $2a_3 - 2a_2 = m(k+1)$ với m nguyên. Vì $0 \le a_2, a_3 < k$ nên $-2k < 2a_3 - 2a_2 < 2k$. Vậy $2a_3 - 2a_2 = m(k+1)$ với $m = 0, \pm 1$.

Thay vào (6) ta được $m = (k-1) - 5a_2$ hay $k = 1 + 5a_2 - m$ với $m = 0, \pm 1$.

Vậy (với $m = 0$): $k = 1 + 5a_2$; $a_3 = a_2$; $a_1 = 4a_2 + 1$, a_2 bất kì;

(với $m = 1$): $k = 5a_2$; $a_3 = \dfrac{7a_2 + 1}{2}$; $a_1 = 4a_2$, a_2 là số lẻ bất kì.

Khi $m = -1$ thì $k = 5a_2 + 2$ và $2a_3 = 2a_2 - (5a_2 + 1) = -3a_2 + 1 < 0$ nên loại.

Tương tự, nếu chọn $k' = k + 1$, $(a_1a_2a_3)_k = (a_3a_1a_2)_k$ thì ta có các nghiệm riêng là $k = 4a_2 + 3$; $a_1 = 3a_2 + 3$; $a_3 = 3a_2 + 1$, a_2 bất kì.

Nếu chọn $k' = 2k - 1$, $(a_1a_2a_3)_k = (a_2a_3a_1)_{k'}$ thì ta có các nghiệm riêng là $k = 5a_2 - 2a_3 - 1$; $a_1 = 4a_2 - 1$; $a_2 > 2a_3$; a_3 bất kì.

Nếu chọn $k' = k + 1$, $(a_1a_2a_3)_k = (a_2a_3a_1)_{k'}$ thì ta có các nghiệm riêng là $k = 3a_1 + a_3 + 1$; $a_2 = 2a_1 + a_3 + 1$, a_1, a_3 bất kì.

Nếu chọn $k' = 2k$, $(a_1a_2a_3)_k = (a_2a_3a_1)_{k'}$ thì ta có các nghiệm riêng là $k = 7a_2 + 2$; $a_1 = 4a_2 + 1$, $a_1, a_3 < k$ bất kì.

Nếu chọn $k' = k + 2$, $(a_1a_2a_3)_k = (a_3a_2a_1)_{k'}$ thì ta có các nghiệm riêng là $k = 2a_3 + 1$; $a_1 = a_3 + 2$, $a_2 = 0$, a_3 bất kì.

Nếu chọn $k' = nu + 1$, $(a_1a_2a_3)_k = (a_3a_2a_1)_{k'}$ thì ta có các nghiệm riêng là $k = nv + 1$; $a_1 = u^2$, $a_2 = 2uv$, $a_3 = v^2$, trong đó u, v, n là những số nguyên bất kì thỏa mãn hệ bất đẳng thức $u > v$; $kv > \max\{u^2 - 1; 2uv - 1\}$.

2.4 Dãy nhị phân

Một dãy n số hạng $(x_1, x_2, ..., x_n)$ mà x_i chỉ bằng 0 hoặc bằng 1 được gọi là một *dãy nhị phân* độ dài n.

Nhiều bài toán về dãy nhị phân liên quan mật thiết với hệ đếm cơ số 2.

Dưới đây là một số thí dụ.

Bài toán 22 (Vô địch Canada, 1991)

Tìm tổng tất cả các số nguyên dương có n chữ số 0 và n chữ số 1 viết trong hệ đếm cơ số 2.

Giải

Ta cần tìm tổng của tất cả các số có dạng $(a_1a_2...a_{2n})_2$ với $a_1 = 1$ và có n chữ số 0, n-1 chữ số 1.

Do chữ số đầu tiên bên trái là 1 ($a_1 = 1$) nên trong $2n-1$ chữ số còn lại thì phải có n chữ số 0 và $n-1$ chữ số 1. Như vậy có tất cả $\dfrac{(2n-1)!}{n!\times(n-1)!}$ số thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Nếu $a_2 = 1$thì $2n-2$ chữ số còn lại sẽ có n chữ số 0 và n-2 chữ số 1 nên có $\dfrac{(2n-2)!}{n!\times(n-2)!}$ số mà có $a_1 = a_2 = 1$ và trong $2n-2$ chữ số còn lại sẽ có n chữ số 0 và $n-2$ chữ số 1.

Tương tự ta xét $a_3 = 1$ thì $2n-2$ chữ số còn lại sẽ có n chữ số 0 và $n-2$ chữ số 1 nên có $\dfrac{(2n-2)!}{n!\times(n-2)!}$số mà có $a_1 = a_3 = 1$và trong 2×n -2 chữ số còn lại sẽ có n chữ số 0 và $n-2$ chữ số 1.

Quá trình cứ tiếp tục như vậy và ta sẽ thu được kết quả

$$S = \sum(a_1a_2...a_{2n})_2 = \sum\left(a_1 2^{2\times n-1} + a_2 2^{2\times n-2} + a_3 2^{2\times n-3} + ... + a_{2n}\right)$$

$$= \quad 2^{2\times n-1}\times\sum a_1 + 2^{2\times n-2}\times\sum a_2 + 2^{2\times n-3}\times\sum a_3 ... + \sum a_{2\times n}$$

$$= \quad 2^{2\times n-1}\times\frac{(2n-1)!}{n!\times(n-1)!} + \frac{(2n-2)!}{n!\times(n-2)!}\times\left(2^{2\times n-2} + 2^{2\times n-3} + ... + 1\right)$$

$$= \ 2^{2\times n-1}\times\frac{(2n-1)!}{n!\times(n-1)!}+\frac{(2n-2)!}{n!\times(n-2)!}\times\left(2^{2\times n-1}-1\right).$$

Bài toán 23 (Vô địch Hàn Quốc, 1997)

Một từ được mã hóa bằng 8 chữ số, mỗi chữ số bằng 0 hoặc bằng 1. Gọi x và y là hai từ có đúng ba vị trí các chữ số khác nhau. Chứng minh rằng tổng số tất cả các từ khác với mỗi một trong hai từ x và y ít nhất 5 vị trí chữ số bằng 38.

Bài toán 24 (Dự tuyển vô địch Quốc tế lần thứ 34, 1993)

Gọi S_n là số các dãy $(x_1, x_2, ..., x_n)$ với $x_i \in \{0,1\}$, trong đó không có sáu cụm phần tử liên tiếp nào bằng nhau. Thí dụ, $(1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0)$ không chấp nhận được do có sáu cụm giống nhau là $(1,0,0)$.

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Bài toán 25 (Vô địch Trung Quốc, 2002)

Giả sử $M_n = \{0.a_1a_2...a_{n-1}1 \mid a_i \in \{0,1\}, 1 \le i \le n-1\}$ là tập các số thập phân trong hệ đếm cơ số 10. Gọi T_n và S_n tương ứng là số phần tử của M_n và tổng của tất cả các phần tử của M_n.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{T_n}$.

Bài toán 26 (Vô địch toán toàn nước Mỹ, 1996; Vô địch Trung Quốc, 1997)

Gọi a_n là số các dãy nhị phân độ dài n không chứa 3 số hạng liên tiếp 0, 1, trong mỗi dãy. Gọi b_n là số các dãy nhị phân độ dài n không chứa 4 số hạng liên tiếp 0, 0, 1, 1 hoặc 1, 1, 0, 0 (theo thứ tự như thế) trong mỗi dãy. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương ta có $b_{n+1} = 2a_n$.

Bài toán 27 (Dự tuyển vô địch Quốc tế lần thứ 42, 2001)

Dãy nhị phân $a=(x_1,x_2,...,x_{2n})$ được gọi là *dãy cân bằng* nếu nó chứa n số 0 và n số 1. Hai dãy nhị phân a và b được gọi là *láng giềng* nếu ta có thể dịch chuyển một vị trí của a đến một vị trí khác thì được b. Thí dụ, khi $n=4$, hai dãy $a=01101001$ và $b=00110101$ là láng giềng vì có thể chuyển số 0 ở vị trí thứ sáu (hoặc thứ bảy tính từ bên trái) của a sang vị trí đầu thì được dãy b.

Chứng minh rằng tồn tại tập hợp S gồm không quá $\frac{1}{n+1}C_{2n}^{n}$ dãy cân bằng sao cho mỗi dãy cân bằng bất kì độ dài $2n$ đều bằng hoặc là láng giềng của ít nhất một dãy cân bằng trong S.

Bài toán 28 (Peter Ulgar)

Những đoạn thẳng ba chữ số của số 1110001011 cho phép nhận được tất cả các số ba chữ số trong hệ đếm cơ số 2, ngoài ra một số nhận được đúng một lần.

Với số tự nhiên n bất kì cho trước ta cũng có thể xây dựng được một dãy tương tự gồm hữu hạn các số 0 và 1 theo cách sau.

Đầu tiên viết liên tiếp n chữ số 1, sau đó mỗi lần dịch chuyển một kí tự sang bên phải, ta sẽ viết vào chỗ trống chữ số 0, nếu số n chữ số trong cơ số 2 nhận được theo cách làm này chưa gặp trước đây, và viết số 1 nếu ngược lại.

Chứng minh rằng dãy số xây dựng theo cách này từ 2^n+n-1 kí tự cũng có tính chất hoàn toàn tương tự như dãy số 0 và số 1 nói ở phần đầu khi $n=3$.

2.5 Một số bài toán khác về hệ đếm hoặc sử dụng hệ đếm để giải

Bài toán 29 (Vô địch Bungaria, 1968)

Chứng minh rằng số C_n^k là lẻ khi và chỉ khi hai số tự nhiên k và n thỏa mãn điều kiện: nếu tại vị trí nào đó trong biểu diễn cơ số 2 của k là chữ số 1, thì tại vị trí ấy trong biểu diễn của n cũng là số 1.

Bài toán 30 (Vô địch Châu Á-Thái Bình dương lần thứ 6, 1994)

Chứng minh rằng, với bất kì số tự nhiên $n>1$, hoặc là tồn tại một lũy thừa của 10 mà khi viết trong hệ cơ số 2 nó sẽ có n chữ số, hoặc là tồn tại một lũy thừa của 10 mà khi viết trong hệ cơ số 5 nó sẽ có n chữ số, nhưng không tồn tại cả hai dạng đó.

Bài toán 31 (Dự tuyển vô địch Quốc tế lần thứ 34, 1993)

Gọi a, b, n là các số nguyên dương, $b>1$ và $b^{n-1} \mid a$. Chứng minh rằng biểu diễn của n theo cơ số b phải chứa ít nhất n chữ số khác 0.

Bài toán 32 (Vô địch Nhật bản, 1996)

Cho một số thực q thỏa mãn $\frac{1+\sqrt{5}}{2}<q<2$. Với một số n viết trong hệ nhị phân $n=2^k+a_{k-1}2^{k-1}+...+a_1 2+a_0$, trong đó $a_i \in \{0,1\}$, $i=0,1,...,n$ ta định nghĩa p_n như sau: $p_n=q^k+a_{k-1}q^{k-1}+...+a_1 q+a_0$. Chứng tỏ rằng tồn tại vô hạn số nguyên k sao cho không có số nguyên l nào để $p_{2k}<p_l<p_{2k+1}$.

Bài toán 33 (Chọn đội tuyển Hồng Kông thi IMO, lần 2, 1997)

Với số nguyên dương n, ta gọi $f(n)$ là số nguyên k lớn nhất sao cho 2^k chia hết n và $g(n)$ là tổng các chữ số trong biểu diễn nhị phân của n. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có

1) $f(n!)=n-g(n)$;

2) $C_{2n}^n=\frac{(2n)!}{n!n!}$ chia hết cho 4 khi và chỉ khi n không phải là lũy thừa của 2.

Bài toán 34 (Dự tuyển vô địch Quốc tế lần thứ 41, 2000)

Hàm số f được xác định trên tập hợp các số nguyên không âm và nhận giá trị trên tập hợp các số nguyên không âm, thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $n \geq 0$:

1) $f(4n)=f(2n)+f(n)$; 2) $f(4n+2)=f(4n)+1$; 3) $f(2n+1)=f(2n)+1$.

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương m, số các số nguyên n với $0 \le n < 2^m$ và $f(4n) = f(3n)$ bằng $f(2^{m+1})$.

Bài toán 35 (Dự tuyển vô địch Quốc tế lần thứ 34, 1993)

Tồn tại hay không một hàm f từ tập các số nguyên dương vào chính nó sao cho với mọi n ta có:

$$\begin{cases} f(1) = 2; \\ f(f(n)) = f(n) + n; \\ f(n) < f(n+1). \end{cases}$$

Bài toán 36 (Dự tuyển vô địch Quốc tế lần thứ 39, 1998. Canada đề nghị)

Cho $a_0, a_1, a_2, ...$ là dãy tăng các số nguyên không âm sao cho mỗi số nguyên không âm có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng $a_i + 2a_j + 4a_k$, trong đó i, j, k là các số nguyên phân biệt. Tính a_{1998}.

Bài toán 37 (Dự tuyển vô địch Quốc tế lần thứ 34, 1993)

Một tập hữu hạn T các số nguyên dương phân biệt được gọi là DS-tập nếu với mỗi số nguyên thuộc T chia hết tổng của tất cả các số nguyên dương trong T. Chứng minh rằng một tập hữu hạn các số nguyên dương là một tập con của một DS-tập nào đó.

Bài toán 38 (Vô địch Ba Lan, 1979)

Cho các số tùy ý $a_1, a_2, ..., a_m \in N$. Chứng minh rằng:

1) Tồn tại một bộ gồm $n < 2^m$ số mà tất cả các tập hợp con của nó có tổng khác nhau, đồng thời các tổng ấy có mặt tất cả các số $a_1, a_2, ..., a_m$.

2) Tồn tại một bộ gồm $n \le m$ số mà tất cả các tập hợp con của nó có tổng khác nhau, đồng thời các tổng ấy có mặt tất cả các số $a_1, a_2, ..., a_m$.

KẾT LUẬN

Từ nội dung của hai chương luận văn trình bày ở trên ta thấy có thể đưa lý thuyết về hệ đếm và những bài tập từ đơn giản đến phức tạp vào một nội dung học tập trong trường phổ thông. Điều này không những làm tăng khả năng tư duy toán học mà còn thúc đẩy quá trình nghiên cứu, học tập và thực hành trên máy tính của học sinh.

Hơn nữa chúng ta cũng biết hệ đếm với cơ số 2, cơ số 8 và cơ số 16 chính là cơ sở hoạt động của máy vi tính. Vì vậy trang bị cho các em kiến thức về hệ đếm cũng giúp các em hiểu hiểu sâu sắc các kiến thức về tin học và toán học.

Việc giải quyết các bài toán được phát biểu thông qua ngôn ngữ hệ đếm không phải là vấn đề quá khó khăn nếu như chúng ta đã được trang bị đầy đủ những kiến thức cơ bản về hệ đếm. Mặt khác ta cũng thấy rằng việc suy nghĩ, tư duy để đưa đến cách giải các bài toán trên nó cũng rất phù hợp với trình độ của các em học sinh phổ thông. Đồng thời hệ đếm cũng có thể được xem như *một phương pháp* để giải quyết các bài toán về phương trình hàm, đặc biệt là các bài toán về phương trình hàm trên tập số tự nhiên. Những bài toán về hệ đếm cũng kích thích những khám phá tìm tòi mới trong giải toán, giúp học sinh nâng cao tư duy sáng tạo trong học tập.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Stephen Barnett, *Discrete Mathematics: Numbers and Beyond*, Addison Wesley Longman, Singapore, 1998, pp. 1--124.

[2] Hoàng Chúng, *Số học - Bà chúa của toán học*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 1997.

[3] Phạm Huy Điển, Đinh Thế Lục, Tạ Duy Phượng, *Hướng dẫn thực hành tính toán trên chương trình Maple V*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 1998.

[4] Phạm Huy Điển, Hà Huy Khoái, *Mã hóa thông tin: Cơ sở toán học và ứng dụng*, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia, Hà Nội, 2004.

[5] Hà Huy Khoái, *Nhập môn Số học thuật toán*, Nhà xuất bản Khoa học, Hà Nội, 1996.

[6] Hà Huy Khoái, Phạm Huy Điển, *Số học thuật toán: Cơ sở lý thuyết và Tính toán thực hành*, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia, Hà Nội, 2003.

[7] Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên), Trần Nam Dũng, Vũ Đình Hòa, Đặng Huy Ruận, Tạ Duy Phượng, *Một số ứng dụng của giải tích trong đại số, hình học, số học và toán rời rạc* (Tài liệu bồi dưỡng giáo viên hè 2008), Đại học khoa học tự nhiên, Hà Nội, 2008, trang 131 --241.

[8] Tạ Duy Phượng, *Hệ đếm và ứng dụng* (trong bộ sách *Chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi* Giải toán trên máy tính điện tử), Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội, 2007, trang 5--96.

[9] Các trang WEB, các tạp chí Toán và các sách tuyển tập thi Olympic.