ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM HỒNG NAM

KIỂU ĐA THỨC CỦA MÔĐUN TRÊN VÀNH NOETHER ĐỊA PHƯƠNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - năm 2009

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

TRẦN DANH TUYÊN

KIỂU ĐA THỨC CỦA MÔĐUN TRÊN VÀNH NOETHER ĐỊA PHƯƠNG

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 60.46.05

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS-TSKH. NGUYỄN TỰ CƯỜNG

Thái Nguyên - năm 2009

Mục lục

Lời nói đầu

Một ý tưởng quan trọng trong Hình học đại số và Đại số giao hoán là thông qua việc nghiên cứu thông qua nghiên cứu các bất biến bằng số để nói lên cấu trúc của các đa tạp hoặc cấu trúc của các vành giao hoán điều này có thể thấy rõ trong những lý thuyết nổi tiếng như lý thuyết bất biến của Mumford, lý thuyết giải kỳ dị của Hironaka... Một ví dụ điển hình trong Đại số giao hoán là vành Cohen- Macaulay, một lớp vành quan trọng nhất trong Đại số giao hoán. Cho $(A, \mathfrak{m})$ là một vành giao hoán , địa phương, Noether có chiều $\dim A = d$. Một iđêan $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ được gọi là một iđêan tham số nếu $\mathfrak{q}$ là $\mathfrak{m}-$ nguyên sơ và sinh bởi d phần tử. Khi đó A là vành Cohen- Macaulay khi và chỉ khi tồn tại một iđêan tham số $\mathfrak{q}$ sao cho $l_A(A/\mathfrak{q}) = e(\mathfrak{q}; A)$. ở đây $l_A(*)$ kí hiệu cho độ dài các A môđun và $e(\mathfrak{q}; A)$ là số bội Zariski-Samuel của A đối với iđêan tham số $\mathfrak{q}$. Ta cũng biết rằng với mọi iđêan tham số $\mathfrak{q}$ thì $l_A(A/\mathfrak{q}) \geq e(\mathfrak{q}; A)$. Đặt $I(\mathfrak{q}; A) = l_A(A/\mathfrak{q}) - e(\mathfrak{q}; A)$. Khi đó nếu $I(\mathfrak{q}; A)$ là một hằng số không đổi với mọi iđêan tham số $\mathfrak{q}$, (chú ý rằng khi A là vành Cohen- Macaulay thì $I(\mathfrak{q}; A) = 0$ với mọi iđêan tham số $\mathfrak{q}$) thì lớp vành đó được gọi là vành Buchbaum.

Nếu $\sup_{\mathfrak{q}} I(\mathfrak{q}; A) < \infty$, trong đó $\mathfrak{q}$ chạy khắp trên tập các iđêan tham số của A thì khi đó nó được gọi là vành Cohen-Macaulay suy rộng. Như vậy các lớp vành quen thuộc trong Đại số giao hoán đều được đặc trưng qua lý thuyết bội và hàm độ dài. Mục đích chính của luận văn là trình bày lại các kết quả của GS - TSKH Nguyễn Tự Cường về kiểu đa thức trên vành Noether, địa phương trong các bài báo [4], [5] và [6].

Trong suốt luận văn này ta luôn ký hiệu $(A, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán, địa phương, Noether và M là một $A-$ môđun hữu hạn sinh có chiều $\dim M = d$. Một hệ phần tử $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ của A được gọi là hệ tham số của M nếu $l_A(M/\underline{x}M) < \infty$. Cho $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ là một bộ d số nguyên dương tuỳ ý. Khi đó chúng ta có thể xem hiệu

$$I_M(\underline{n}, \underline{x}) = l_A(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) - n_1 \ldots n_d e(\underline{x}, M)$$

như một hàm số theo $\underline{n}$ có giá trị không âm với mọi biến nguyên, trong đó $e(\underline{x}; M)$ là số bội theo nghĩa Serre của M đối với hệ tham số $\underline{x}$. Khi $M = A$ thì nó chính là số bội Zariski - Samuel. Năm 1985, Sharp đưa ra câu hỏi mở: *Phải chăng $I_M(\underline{n}; \underline{x})$ là một đa thức theo $\underline{n}$ khi $\underline{n}$ đủ lớn (ký hiệu là $\underline{n} \gg 0$)?*

Một loạt ví dụ được đưa ra để chứng tỏ rằng $I_M(\underline{n}; \underline{x})$ không phải là đa thức khi $\underline{n} \gg 0$. Từ đây nảy sinh ra một câu hỏi: *Khi nào thì $I_M(\underline{n}; \underline{x})$ là đa thức theo $\underline{n}$ khi $\underline{n} \gg 0$?* Một trả lời trọn vẹn cho câu hỏi này được đưa ra trong [4] nói rằng $I_M(\underline{n}; \underline{x})$ là đa thức khi và chỉ khi $\underline{x}$ là một *u.p - dãy*.

Khi $I_M(\underline{n};\underline{x})$ không còn là đa thức thì ta nhận thấy rằng hàm $I_M(\underline{n};\underline{x})$ luôn bị chặn trên bởi đa thức $n_1 \ldots n_d l(M/(x_1, \ldots, x_d)M)$ (xem trong [6]). Như vậy bậc bé nhất của tất cả các đa thức chặn trên theo $\underline{n}$ chặn hàm $I_M(\underline{n};\underline{x})$ là tồn tại. Điều đó dẫn đến một bất biến mới trên M, gọi là kiểu đa thức của M. Bất biến này được bắt đầu từ một kết quả sau (xem trong [6]):

Bậc bé nhất của tất cả các đa thức theo $\underline{n}$ chặn trên hàm $I_M(\underline{n};\underline{x})$ không phụ thuộc vào hệ tham số $\underline{x}$. Vậy bậc bé nhất này là một bất biến của M. Ta ký hiệu bất biến đó là $p(M)$ và gọi nó là kiểu đa thức của M.

Ta quy ước bậc của đa thức không bằng $-\infty$. Khi đó ta dễ dàng thấy rằng M là môđun Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $p(M) = -\infty$. Rõ ràng M là Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi $p(M) \leq 0$. Như vậy tính Cohen-Macaulay được dễ dàng đặc trưng qua tính đa thức. Luận văn được chia thành 2 chương:

Chương I nói về tính đa thức của hàm $I_M(\underline{n};\underline{x})$ trên vành giao hoán Noether địa phương (A, m). Kết quả quan trọng nhất của chương này là định lý 1.3.4 nó cũng là câu trả lời trọn vẹn cho câu hỏi mở của Sharp nói rằng :

Hàm số $I_M(\underline{n};\underline{x})$ là đa thức theo $\underline{n}$ với $\underline{n} \gg 0$ khi và chỉ khi hệ tham số $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ là u.p-dãy

Chương II đưa ra khái niệm kiểu đa thức $p(M)$ của một môđun M trên vành giao hoán, Noether, địa phương. Đây là khái niệm quan trọng nhất trong luận văn. Ngoài ra một loạt các tính chất của kiểu đa thức cũng như các cận trên và dưới được đưa trong chương này. Một kết quả quan trọng là định lý 2.3.9 và hệ quả 2.4.2 nói lên ý nghĩa hình học của kiểu đa thức nói rằng:

Giả sử A có phức đối ngẫu hoặc A là vành thương của vành Cohen-Macaulay. Nếu M là đẳng chiều thì

$$p(M) = \dim \mathrm{nCM}(M).$$

Chú ý rằng quỹ tích không Cohen-Macaulay nCM(M) được xác định bởi nCM$(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M) | M_{\mathfrak{p}}$ không là môđun Cohen-Macaulay$\}$.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của GS - TSKH Nguyễn Tự Cường. Nhân dịp này em xin tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy.

Em xin bày tỏ lòng biết ơn các thầy cô trong ĐH Thái Nguyên và Viện Toán học đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ em rất nhiều trong quá trình làm luận văn.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn trường ĐH Khoa Học - Thái Nguyên, Khoa Toán - Tin đã tạo điều kiện thuận lợi cho tôi thực hiện kế hoạch học tập của mình.

Tôi xin cảm ơn người thân, đồng nghiệp, bạn bè đã cổ vũ, động viên tôi trong quá trình làm luận văn.

Chương 1

Tính đa thức của hàm độ dài

Trong chương này, chúng ta luôn giả thiết $(A, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán, địa phương, Noether với $\mathfrak{m}$ là iđêan cực đại và M là A-môđun hữu hạn sinh có chiều $\dim M = d$.

1.1 Một số kiến thức chuẩn bị

Trước hết ta nhắc lại định lý quan trọng sau đây

Định lý 1.1.1. *Cho $\mathfrak{q}$ là iđêan của A sao cho $l(M/\mathfrak{q}M) < \infty$. Khi đó $l(M/\mathfrak{q}^n M)$ là một đa thức với hệ số hữu tỷ khi $n \gg 0$ và*

$$\begin{aligned} d &= \dim M = \deg(l(M/\mathfrak{q}^n M) \\ &= \inf\{t | \exists\ x_1, \ldots, x_t \in \mathfrak{m} \text{ để } l(M/(x_1, \ldots, x_t)M) < \infty\}. \end{aligned}$$

Đa thức $l(M/\mathfrak{q}^n M)$, khi $n \gg 0$ được gọi là *đa thức Hilbert-Samuel của M ứng với* $\mathfrak{q}$. Theo định lý trên tồn tại hệ $\{x_1, \ldots, x_d\} \subseteq \mathfrak{m}$ sao cho $l(M/(x_1, \ldots, x_d)M) < \infty$. Một hệ $\{x_1, \ldots, x_d\}$ thoả mãn tính chất trên được gọi là một *hệ tham số* của M. Chú ý rằng nếu $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ là một hệ tham số của M thì $(x_1^{n_1} \ldots, x_d^{n_d})$ cũng là một hệ tham số của M với mọi $(n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}^d$.

Cho $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ là một hệ tham số của M. Đặt $\mathfrak{q} = (x_1, \ldots, x_d)A$ thì khi đó ta gọi $\mathfrak{q}$ là *iđêan tham số* của M. Theo định lý trên, $l(M/\mathfrak{q}^n M)$ là một đa thức với hệ số hữu tỷ khi $n \gg 0$, đa thức này nhận giá trị nguyên với mọi biến nguyên. Vì thế nó có biểu diễn

$$l(M/\mathfrak{q}^{n+1}M) = e_0(\mathfrak{q}; M)\binom{n+d}{d} + e_1(\mathfrak{q}; M)\binom{n+d-1}{d-1} + \ldots + e_d(\mathfrak{q}; M),$$

trong đó $e_i \in \mathbb{Z}, e_0 > 0$ với mọi $i = 0 \ldots, d$.

Định nghĩa 1.1.2. Số e_0 trong biểu diễn trên được gọi là *số bội Zariski - Samuel* của M ứng với iđêan tham số $\mathfrak{q}$ và được kí hiệu là $e(\mathfrak{q}; M)$.

Định nghĩa 1.1.3. Một hệ các phần tử $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_t)$ của A được gọi là *hệ bội* của M nếu $l(M/(x_1, \ldots, x_t)M) < \infty$.

Nếu $t = 0$ thì điều kiện trên được hiểu là $l(M) < \infty$. Khi đó ký hiệu bội $e(\underline{x}; M)$ đối với hệ bội $\underline{x}$ được định nghĩa quy nạp theo t như sau:

Nếu $t = 0$, tức là $l(M) < \infty$. Khi đó ta đặt $e(\emptyset; M) = l(M)$.

Nếu $t > 0$, tức là $l(M/(x_1, \ldots, x_t)M) < \infty$. Từ đó ta suy ra

$$l((0_M : x_1)/(x_1, \ldots, x_t)(0_M : x_1)) < \infty,$$

tức là $(x_2, \ldots, x_t)$ là hệ bội của $0_M : x_1$. Theo giả thiết quy nạp thì

$$e((x_2, \ldots, x_t); M/x_1M) \text{ và } e((x_2, \ldots, x_t); 0_M : x_1)$$

là tồn tại. Khi đó ta định nghĩa

$$e(\underline{x}; M) = e((x_2, \ldots, x_t); M/x_1M) - e((x_2, \ldots, x_t); 0_M : x_1).$$

Số $e(\underline{x}; M)$ được định nghĩa như trên được gọi là số bội của M ứng với hệ bội $\underline{x}$.

Chú ý 1.1.4. Cho $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_t)$ là hệ bội của M. Dưới đây chúng ta sẽ đưa ra một số tính chất cơ bản của số bội $e(\underline{x}; M)$ thường được sử dụng trong luận văn.

(i) $0 \leq e(\underline{x}; M) \leq l(M/(x_1, \ldots, x_t)M)$. Nếu tồn tại i sao cho $x_i^n M = 0$, với n là một số tự nhiên nào đó thì $e(\underline{x}; M) = 0$.

(ii) (Định lý cộng tính của bội). Giả sử

$$0 \longrightarrow M_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \longrightarrow 0$$

là dãy khớp các $A-$ môđun Noether và $\underline{x}$ là hệ bội của M_i, với mọi $i = 0, \ldots, n$. Khi đó,

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i e(\underline{x}; M_i) = 0.$$

(iii) Cho $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_t)$ là một hệ bội của M. Khi đó $e(\underline{x}; M) = 0$ khi và chỉ khi $t > \dim M$.

(iv) Cho $(n_1, \ldots, n_t) \in \mathbb{N}^t$. Khi đó,

$$e((x_1^{n_1}, \ldots, x_t^{n_t}); M) = n_1 \ldots n_t e(\underline{x}; M)$$

(v) Nếu $\underline{x}$ là một hệ tham số của M tức là $t = d$, thì ta có công thức liên hệ giữa số bội hình thức và số bội Zariski - Samuel là $e_0(\mathfrak{q}; M) = e(\underline{x}; M)$, trong đó $\mathfrak{q} = (x_1, \ldots .x_d)A$.

(vi) Công thức Auslander - Buchsbaum [A- B]. Với những kí hiệu trên thì

$$l(M/(x_1, \ldots, x_d)M) - e(\underline{x}; M)$$
$$= \sum_{i=0}^{d-1} e((x_{i+1}, \ldots, x_d); (x_1, \ldots, x_{i-1})M : x_i/(x_1, \ldots, x_{i-1})M.$$

Khi đó M là A-môđun Cohen-Macaulay khi và chỉ khi tồn tại một hệ tham số $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ sao cho

$$l(M/(x_1, \ldots, x_d)M) = e(\underline{x}; M).$$

Định nghĩa 1.1.5. (i) Một A-môđun M được gọi là môđun Cohen-Macaulay suy rộng nếu

$$I(M) = \sup\{l(M/(x_1, \ldots, x_d)M - e(\underline{x}; M))\} < \infty$$

trong đó $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ chạy khắp tập các hệ tham số của M.

(ii) Một hệ tham số $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ của M được gọi là hệ tham số chuẩn tắc của M nếu

$$l_A(M/(x_1, \ldots, x_d)M) - e(\underline{x}; M) = l_A(M/(x_1^2, \ldots, x_d^2) - e((x_1^2, \ldots, x_d^2); M)$$

Chú ý 1.1.6. Khi đó ta có một số đặc trưng về môđun Cohen-Macaulay suy rộng.

(i) M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi M có ít nhất một hệ tham số chuẩn tắc. Hơn nữa, $I(M) = l_A(M/(x_1, \ldots, x_d)M) - e(\underline{x}; M)$ nếu $\underline{x}$ là một hệ tham số chuẩn tắc.

(ii) Giả sử M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Khi đó $M_\mathfrak{p}$ là môđun Cohen-Macaulay và dim$M_\mathfrak{p}$ + dim$A/\mathfrak{p} = d$ với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \in$ Supp$M \setminus \{\mathfrak{m}\}$. Hơn nữa nếu A là vành thương của vành Cohen-Macaulay thì điều ngược lại cũng đúng.

(iii) Ký hiệu $\widehat{M}$ là bao đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic của M. Khi đó M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi $\widehat{M}$ là môđun Cohen-Macaulay suy rộng.

(iv) Cho M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. Khi đó dim$(R/\mathfrak{p})$ = dim$M$ với mọi $\mathfrak{p} \in$ Ass$M, \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$.

1.2 Nhận xét mở đầu

Cho hệ tham số $\underline{x} = (x_1, ..., x_d)$ của M và một tập các số nguyên dương $\underline{n} = (n_1, ..., n_d)$ ta đặt $\underline{x}(\underline{n}) = (x_1^{n_1}, ..., x_d^{n_d})$. Xét hiệu

$$I_M(\underline{n}; \underline{x}) = \ell(M/\underline{x}(\underline{n})M) - n_1...n_d e(\underline{x}; M)$$

như một hàm của $n_1, ..., n_d$, trong đó $e(\underline{x}; M)$ là số bội của M tương ứng với $\underline{x}$. Khi đó, nhìn chung $I_M(\underline{n}; \underline{x})$ không là đa thức với $n_1, ..., n_d$ đủ lớn, tuy nhiên chúng luôn nhận giá trị không âm. Thật vậy, ta xét ví dụ sau:

Cho $A = k[[X, Y, Z]]/I$, trong đó $k[[X, Y, Z]]$ là vành chuỗi luỹ thừa hình thức theo ba biến X, Y, Z trên trường đóng đại số k và $I = (X^2, XYZ)$. Rõ ràng ta có dim$A = 2$ và hệ $\underline{x} = (x_1, x_2)$ là hệ tham số của A, trong đó x_1 là ảnh của $Y + Z$ trong A và x_2 là ảnh của Y trong A. Khi đó ta có

$$x_1^n A : x_2^m = \begin{cases} (x, x_1^n)A & \text{nếu} \quad m \geq n+1 \\ (x, x_1^n)A \cap (x_2, z, x_2^{n-m})A & \text{nếu} \quad m \leq n \end{cases}$$

trong đó x là ảnh của X trong A và z là ảnh của Z trong A. Cho $\underline{n} = (n, m)$ và $\underline{x} = (x_1, x_2)$. Giả sử $I_M(\underline{n}; \underline{x}) = \ell(M/\underline{x}(\underline{n})M) - nme(\underline{x}; M)$ là đa thức.

Theo công thức [A-B] ta có

$$\begin{aligned}
&l(M/(x_1^n, x_2^{km})M) - l(M/(x_1^n, x_2^m)M)\\
&= l(x_1^n M : x_2^{km}/x_1^n M) - l(x_1^n M : x_2^m/x_1^n M)\\
&+ e((x_1^n, x_2^{(k-1)m}); M) + e(x_2^{(k-1)m)}; 0 :_M x_1^n)\\
&= l(M/(x_1^n, x_2^{km})M) - l(M/(x_1^n, x_2^m)M)\\
&+ l(M/(x_1^n, x_2^{(k-1)m})M) - l(x_1^n M : x_2^{(k-1)m}/x_1^n M)
\end{aligned}$$

với mọi số tự nhiên k. Cố định n thì do mọi dãy tăng các môđun con của M đều dừng nên ta luôn tìm được k sao cho

$$x_1^n M : x_2^{km} = x_1^n M : x_2^{(k-1)m}.$$

Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}
l(x_1^n M : x_2^m/x_1^n M) &= l(M/(x_1^n, x_2^m)M)\\
&+ l(M/(x_1^n, x_2^{(k-1)m})M) - l(M/(x_1^n, x_2^{km})M).
\end{aligned}$$

Theo giả thiết các số hạng bên phải của đẳng thức là các đa thức với $\underline{n} \gg 0$. Vậy $l(x_1^n M : x_2^m/x_1^n M)$ cũng là đa thức. Cố định n, khi đó tồn tại số m_0 sao cho

$$x_1^n M : x_2^m = x_1^n M : x_2^{m_0},$$

điều này là mâu thuẫn. Vậy $I_M(\underline{n}; \underline{x}) = \ell(M/\underline{x}(\underline{n})M) - n_1...n_d e(\underline{x}; M)$ không là đa thức với $\underline{n} \gg 0$.

Do đó một câu hỏi được đặt ra là: Khi nào thì $I_M(\underline{n}; \underline{x})) = \ell(M/\underline{x}(\underline{n})M) - n_1...n_d e(\underline{x}; M)$ là một đa thức với $\underline{n} \gg 0$? Câu hỏi này được giải quyết trọn vẹn trọng mục 1.3

1.3 Đặc trưng tính chất đa thức của hàm độ dài

Định nghĩa 1.3.1. (i) Một phần hệ tham số $x_1, x_2, \ldots, x_j$ của M được gọi là *p - dãy* nếu tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho

$$(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i} = (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_0}$$

với mọi $n_1, \ldots, n_j \gg 0$ và $i = 1, \ldots, j$ (ở đây ta đặt $x_0 = 0$).

(ii) Dãy $x_1, x_2, \ldots, x_j$ được gọi là *p - dãy không điều kiện,* ký hiệu là *u.p - dãy* nếu nó là p - dãy với mọi hoán vị của dãy đó.

Trước khi phát biểu kết quả chính của mục này chúng ta cần sử dụng một số kết quả sau.

Mệnh đề 1.3.2. *Cho $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ là một hệ tham số của M. Khi đó các phát biểu sau là tương đương:*

(i) $\underline{x}$ là một u.p-dãy;

(ii) Tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n_1, \ldots, n_d \geq n_0$ và với mọi hoán vị α của tập $\{1, \ldots, d\}$ ta có

$$((x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, \ldots, x_{\alpha(i-1)}^{n_{\alpha(i-1)}})M : x_{\alpha(i)}^{n_{\alpha(i)}}) \bigcap (x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, \ldots, x_{\alpha(i)}^{n_{\alpha(i)}})M \\ = (x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, \ldots, x_{\alpha(i-1)}^{n_{\alpha(i-1)}})M, \forall i = 1, \ldots, d;$$

(iii) Tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n_1, \ldots, n_d \geq n_0$ và với mọi hoán vị α của tập $\{1, \ldots, d\}$ ta có

$$((x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, \ldots, x_{\alpha(d-1)}^{n_{\alpha(d-1)}})M : x_{\alpha(d)}^{n_{\alpha(d)}}) \bigcap (x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, \ldots, x_{\alpha(d)}^{n_{\alpha(d)}})M \\ = (x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, \ldots, x_{\alpha(d-1)}^{n_{\alpha(d-1)}})M;$$

(iv) Tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho với mọi $n_1, \ldots, n_d \geq n_0$ và với mọi hoán vị α của tập $\{1, \ldots, d\}$ ta có

$$(x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, \ldots, x_{\alpha(d-1)}^{n_{\alpha(d-1)}})M : x_{\alpha(d)}^{n_{\alpha(d)}} = (x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, \ldots, x_{\alpha(d-1)}^{n_{\alpha(d-1)}})M : x_{\alpha(d)}^{n_0}.$$

Chứng minh. : (i) $\Longrightarrow$ (ii). Bằng cách đánh số lại dãy $x_1, \ldots, x_d$ ta chỉ cần chứng minh rằng

$$((x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i}) \bigcap (x_1)^{n_1}, \ldots, x_i^{n_i})M = (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M.$$

Giả sử $a \in ((x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i}) \bigcap (x_1^{n_1}, \ldots, x_i^{n_i})M$. Ta có thể viết $a = \sum_{j=1}^{i} y_j {x_j}^{n_j}$ với $y_j \in M$. Vì $ax_i^{n_i} \in (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n(i-1)})M : x_i^{n_i}$ nên $y_i x_i^{2ni} \in (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1)}^{n(i-1)})M$. Vậy với mọi $n_i \geq n_0$ ta được

$$y_i \in (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{2ni} = (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i}.$$

Từ đó ta suy ra $y_i x_i^{ni} \in (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M$, tức $a \in (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) là hiển nhiên.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Với $n_1, \ldots, n_d \geq n_0$ ta có

$$((x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{n_0}) \bigcap (x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}}, x_d^{n_0})M = (x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}})M.$$

Chia cả hai vế đẳng thức trên cho $x_d^{n_0}$ ta thu được

$$(x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{2n_0} = (x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{n_0}.$$

Từ đây ta suy ra

$$(x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{kn_0} = (x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{n_0}$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d \geq n_0$ và $k \geq 1$. Vì chứng minh trên không phụ thuộc vào thứ thụ của dãy $x_1, \ldots, x_d$ nên ta suy ra (iv).

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Theo định lý giao Krull, từ (iv) ta suy ra

$$\begin{aligned}
(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i} &\subseteq \bigcap_{k=n_0}^{\infty} ((x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}}, x_{i+1}^k, \ldots, x_d^k)M : x_i^{n_i}) \\
&= \bigcap_{k=n_0}^{\infty} ((x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}}, x_{i+1}^k, \ldots, x_d^k)M : x_i^{n_0}) \\
&= (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_0} \\
&\subseteq (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i},
\end{aligned}$$

với mọi $i = 1, \ldots, d$ và $n_1, \ldots, n_d \geq n_0$. Cũng như trên, phép chứng minh không phụ thuộc vào thứ tự của dãy $x_1, \ldots, x_d$. Vậy $x_1, \ldots, x_d$ là một u.p - dãy và mệnh đề 1.3.2 được chứng minh. □

Bổ đề 1.3.3. *Giả sử $l(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M)$ là đa thức theo $\underline{n}$ khi $\underline{n} \gg 0$. Khi đó đa thức trên là tuyến tính theo từng biến $n_1, \ldots, n_d$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bổ đề bằng quy nạp theo $\dim M = d$. Vì ta có $I_M(\underline{n}; \underline{x}) = l(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) - n_1 \ldots n_d e(\underline{x}; M)$ nên ta chỉ cần chứng minh đa thức $I_M(\underline{n}; \underline{x})$ là tuyến tính theo từng biến $n_1, \ldots, n_d$. Thật vậy, với $d = 1$ khi đó ta có $I_M(\underline{n}; \underline{x}) = l(M/x_1^{n_1}M) - n_1 e(x_1; M)$ là đa thức theo n_1 với $n_1 \gg 0$. Theo công thức Lech ta có

$$\lim_{n_1 \to \infty} \frac{lM/(x_1^{n_1}M)}{n_1} = e(x_1; M)$$

nên suy ra bậc của đa thức $I_M(\underline{n};\underline{x})$ là bằng 0. Do đó đa thức $I_M(\underline{n};\underline{x})$ là đa thức tuyến tính theo n_1.

Giả sử $d > 1$. Cố định n_1 đặt $E = M/x_1^{n_1}M$ thì $\dim E = d-1$. Khi đó ta có

$$l(M/(x_1^{n_1},\ldots,x_d)M) = l(E/(x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})E).$$

Khi đó $I_M(\underline{n};\underline{x}) = l(E/(x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})E) - n_1.n_2\ldots n_d e(\underline{x};M)$. Theo giả thiết quy nạp suy ra $I_M(\underline{n};\underline{x})$ là đa thức tuyến tính theo $n_2,\ldots,n_d$. Cố định $n_2,\ldots,n_d$ đặt $F = M/(x_2^{n_2},\ldots,x_d^{n_d})M$ thì $\dim F = 1$. Khi đó

$$l(M/(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d})M) = l(F/x_1^{n_1}F).$$

Suy ra $I_M(\underline{n};\underline{x}) = l(F/x_1^{n_1}F) - n_1\ldots n_{d-1}n_d e(\underline{x};M)$. Theo giả thiết quy nạp suy ra $I_M(\underline{n};\underline{x})$ là đa thức tuyến tính theo n_1. $\square$

Tiếp theo là một kết quả chính của tiết này cũng là một trả lời trọn vẹn cho câu hỏi trong mục 1.2.

Định lý 1.3.4. *Hàm số $I_M(\underline{n};\underline{x})$ là một đa thức theo $\underline{n}$ với $\underline{n} \gg 0$ khi và chỉ khi hệ tham số $\underline{x}$ là u.p-dãy.*

Chứng minh. Điều kiện cần: Theo công thức [A-B] ta có

$$\begin{aligned}
&l(M/(x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}},x_d^{kn_d})M) - l(M/(x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}},x_d^{n_d})M)\\
&= l((x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{kn_d}/(x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M)\\
&-l((x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{n_d}/(x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M)\\
&+\sum_{i=1}^{d-1} e((x_{i+1}^{n_{i+1}},...,x_{d-1}^{n_{d-1}},x_d^{kn_d});(x_1^{n_1},...,x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i}/(x_1^{n_1},...,x_{i-1}^{n_{i-1}})M)\\
&-\sum_{i=1}^{d-1} e((x_{i+1}^{n_{i+1}},...,x_{d-1}^{n_{d-1}},x_d^{n_d});(x_1^{n_1},...,x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i}/(x_1^{n_1},...,x_{i-1}^{n_{i-1}})M)\\
&= l((x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{kn_d}/(x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M)\\
&-l((x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{n_d}/(x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M)\\
&+\sum_{i=1}^{d-1} e((x_{i+1}^{n_{i+1}},...,x_{d-1}^{n_{d-1}},x_d^{(k-1)n_d});(x_1^{n_1},...,x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i}/(x_1^{n_1},...,x_{i-1}^{n_{i-1}})M)\\
&= l((x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{kn_d}/(x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M)\\
&-l((x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{n_d}/(x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M)
\end{aligned}$$

$$+l(M/(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}},x_d^{(k-1)n_d})M)$$
$$-l((x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M:x_d^{(k-1)n_d}/(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M)$$

với mọi số tự nhiên k. Khi đó với $d-1$ số nguyên dương $n_1,\dots,n_{d_1}$ ta luôn có thể tìm được một số k sao cho

$$(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M:x_d^{kn_d}=(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M:x_d^{(k-1)n_d}.$$

Từ đây suy ra

$$l((x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M:x_d^{n_d}/(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M)=l(M/(x_1^{n_1},\dots,x_d^{n_d})M)$$
$$+l(M/(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}},x_d^{(k-1)n_d})M)-l(M/(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}},x_d^{kn_d})M).$$

Theo mệnh đề 1.3.3 các số hạng bên phải đẳng thức là những đa thức tuyến tính theo từng biến n_i với $n\gg 0$. Do đó

$$l((x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M:x_d^{n_d}/(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M)$$

cũng là đa thức. Cố định $n_1,\dots,n_{d-1}$ thì tồn tại số tự nhiên n_0 sao cho

$$(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M:x_d^{n_d}=(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_d})M:x_d^{n_0}$$

với $n_d\geq n_0$. Do đó đa thức trên không phụ thuộc vào n_d. Vậy tồn tại một số tự nhiên n_0 sao cho

$$(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M:x_d^{n_d}=(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M:x_d^{n_0}$$

với mọi $n_1,\dots,n_d\geq n_0$. Vì chứng minh không phụ thuộc vào thứ tự của dãy $x_1,\dots,x_d$ nên điều kiện cần được chứng minh.

Chứng minh điều kiện đủ. Đặt

$$e(\emptyset;(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M:x_d^{n_d}/(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M$$
$$=l((x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M:x_d^{n_d}/(x_1^{n_1},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M.$$

Khi đó theo công thức [A-B] ta chỉ cần chứng minh

$$e((x_{i+1}^{n_{i+1}},\dots,x_{d-1}^{n_{d-1}},x_d^{n_d});(x_1^{n_1},\dots,x_{i-1}^{n_{i-1}})M:x_i^{n_i}/(x_1^{n_1},\dots,x_{i-1}^{n_{i-1}})M)$$

là các đa thức theo $n_1,\dots,n_i\gg 0$, với $i=0,\dots,d$. Ta sẽ chứng minh quy nạp theo d và i.

Nếu $d=1$ hoặc $i=0$ và d bất kỳ thì mệnh đề trên hiển nhiên đúng.

Cho $d>1$ và $i\geq 1$. Giả sử mệnh đề đúng với $d-1$ hoặc $i-1$, ta cần chứng minh

$$e((x_{i+1}^{n_{i+1}},\dots,x_d^{n_d});(x_1^{n_1},\dots,x_{i-1}^{n_{i-1}})M:x_i^{n_i}/(x_1^{n_1},\dots,x_{i-1}^{n_{i-1}})M)$$

là một đa thức với $n_1, \ldots, n_d \gg 0$. Thật vậy, xét hoán vị $\alpha = (\alpha(1), ..., \alpha(d))$ của tập $\{1, \ldots, d\}$ xác định bởi $\alpha(i-1) = i, \alpha(i) = i-1$ và $\alpha(j) = j$ với mọi $j \neq \{i-1, i\}$. Khi đó, theo giả thiết vì $x_1, \ldots, x_d$ là u.p-dãy và dựa vào công thức [A-B] ta tìm được số tự nhiên n_0 sao cho

$$\begin{aligned}
0 &= l(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) - l(M/(x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, \ldots, x_{\alpha(d)}^{n_{\alpha(d)}})M)\\
&= e((x_i^{n_i}, \ldots, x_d^{n_d}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})M : x_{i-1}^{n_0}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})M)\\
&+ \ e((x_{i+1}^{n_{i+1}}, \ldots, x_d^{n_d}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_0}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M)\\
&- \ e((x_{\alpha(i)}^{n_{\alpha(i)}}, \ldots, x_{\alpha(d)}^{n_{\alpha(d)}}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})M : x_i^{n_0}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})M)\\
&- \ e((x_{i+1}^{n_{i+1}}, ..., x_d^{n_d}); (x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, ..., x_{\alpha(i-1)}^{n_{\alpha(i-1)}})M : x_{i-1}^{n_0}/(x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, ..., x_{\alpha(i-1)}^{n_{\alpha(i-1)}})M
\end{aligned}$$

với mọi $n_1, \ldots, n_d \geq n_0$. Suy ra

$$\begin{aligned}
&e((x_i^{n_i}, \ldots, x_d^{n_d}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})M : x_{i-1}^{n_0}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})M)\\
&- \ e((x_{i+1}^{n_{i+1}}, ..., x_d^{n_d}); (x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, ..., x_{\alpha(i-1)}^{n_{\alpha(i-1)}})M : x_{i-1}^{n_0}/(x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, ..., x_{\alpha(i-1)}^{n_{\alpha(i-1)}})M\\
&= e((x_{\alpha(i)}^{n_{\alpha(i)}}, \ldots, x_{\alpha(d)}^{n_{\alpha(d)}}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})M : x_i^{n_0}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})M)\\
&- \ e((x_{i+1}^{n_{i+1}}, \ldots, x_d^{n_d}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_0}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M).
\end{aligned}$$

Ký hiệu F là hàm bên phải của đẳng thức. Rõ ràng vế trái của đẳng thức không phụ thuộc vào n_{i-1} nên F cũng không phụ thuộc vào n_{i-1}. Do đó với $n_1, \ldots, n_d \geq n_0$ suy ra

$$\begin{aligned}
F &= e((x_{i-1}^{n_0}, x_{i+1}^{n_{i+1}} \ldots, x_d^{n_d}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})M : x_i^{n_0}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})M)\\
&- \ e((x_{i+1}^{n_{i+1}}, \ldots, x_d^{n_d}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_0})M : x_i^{n_0}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_0})M).
\end{aligned}$$

Đặt $\overline{M} = M/x_{i-1}^{n_0}M$. Suy ra dim$\overline{M} = d-1$, từ giả thiết quy nạp theo d ta có

$$\begin{aligned}
&e((x_{i+1}^{n_{i+1}}, \ldots, x_d^{n_d}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_0})M : x_i^{n_0}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_0})M)\\
&= e((x_{i+1}^{n_{i+1}}, \ldots, x_d^{n_d}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})\overline{M} : x_i^{n_0}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})\overline{M})
\end{aligned}$$

là một đa thức khi $n_1, \ldots, n_d \geq n_0$. Mặt khác từ giả thiết quy nạp theo i thì

$$e((x_{i-1}^{n_0}, x_{i+1}^{n_{i+1}} \ldots, x_d^{n_d}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})M : x_i^{n_0}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-2}^{n_{i-2}})M)$$

cũng là đa thức khi $n_1, \ldots, n_d \geq n_0$. Vì F là tổng của hai đa thức nên F cũng là đa thức khi $n_1, \ldots, n_d \geq n_0$. Cuối cùng, từ quy nạp theo i ta suy ra

$$\begin{aligned} &e((x_{i+1}^{n_{i+1}}, \ldots, x_d^{n_d}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_0}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M) \\ &= e((x_{i+1}^{n_{i+1}}, ..., x_d^{n_d}); (x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, ..., x_{\alpha(i-1)}^{n_{\alpha(i-1)}})M : x_{i-1}^{n_0}/(x_{\alpha(1)}^{n_{\alpha(1)}}, ..., x_{\alpha(i-1)}^{n_{\alpha(i-1)}})M + F \end{aligned}$$

là đa thức khi $n_1, \ldots, n_d \geq n_0$. $\square$

Khái niệm u.p-dãy lúc đầu được đưa ra là để giải quyết câu hỏi khi nào hàm số $I_M(\underline{n}; \underline{x})$ là đa thức. Sau này khái niệm này còn được dùng vào nhiều lĩnh vực khác nhau của Đại số giao hoán. Trong mục tiếp theo chúng ta chỉ ra rằng u.p-dãy có thể dùng để đặc trưng cho môđun Cohen-Macaulay.

1.4 Một số áp dụng

Nhắc lại rằng, một hệ tham số $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ của M được gọi là *f - dãy chính quy* nếu $x_i \notin \mathfrak{p}$ với mọi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M) \backslash \mathfrak{m}\}$, $i = 1, \ldots, d$. Nó được gọi là *f -dãy chính quy hoán vị được* nếu mọi hoán vị của nó đều là f-dãy chính quy.

Môđun M được gọi là *f-môđun* nếu mọi hệ tham số của M đều là f-dãy chính quy. Như chúng ta đã biết, f-môđun có những tính chất rất đẹp như $M_\mathfrak{p}$ là Cohen-Macaulay với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$. Mặc dầu với tính chất tốt như vậy nhưng tồn tại f-môđun không là Cohen-Macaulay suy rộng. Trong mục này ta sẽ đặc trưng tính chất đó thông qua u.p-dãy. Trước khi phát biểu kết quả chính của mục này ta sẽ sử dụng một số bổ đề sau.

Bổ đề 1.4.1 (xem trong 4.7 của [1])**.** *Cho $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ là hệ tham số của M. Khi đó*

$$e((x_{i+1}, \ldots, x_d; (x_1, \ldots, x_{i-1})M : x_i/(x_1, \ldots, x_{i-1})M) = 0,$$

$i = 1, \ldots, d-1$ *khi và chỉ khi* $x_i \notin \mathfrak{p}$ *với mọi* $\mathfrak{p} \in$ *Ass*$(M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M)$, *thoả mãn* $\dim(A/\mathfrak{p}) \geq d - i$ *với mọi* $i = 1, \ldots, d-1$.

Từ bổ đề trên ta suy ngay ra một hệ quả sau.

Hệ quả 1.4.2. *Cho $x_1, \ldots, x_d$ là một hệ tham số của M. Khi đó nếu $\underline{x}$ là f-dãy chính quy thì*

$$e((x_{i+1}, \ldots, x_d; (x_1, \ldots, x_{i-1})M : x_i/(x_1, \ldots, x_{i-1})M) = 0$$

với mọi $i = 1, \ldots, d$.

Định lý 1.4.3. *Một A-môđun M là Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi tồn tại một hệ tham số là u.p dãy và cũng là f-dãy chính quy hoán vị được.*

Chứng minh. Theo [7] thì điều kiện cần của định lý là hiển nhiên. Ta sẽ chứng minh điều kiện đủ. Thật vậy, giả sử $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ là một f-dãy chính quy hoán vị được. Theo hệ quả trên ta suy ra

$$e((x_{i+1}, \ldots, x_d; (x_1, \ldots, x_{i-1})M : x_i/(x_1, \ldots, x_{i-1})M) = 0$$

với mọi $i = 1, \ldots, d$. Theo công thức [A-B] ta nhận được

$$I_M(\underline{n}; \underline{x}) = l((x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{n_d}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}})M)$$

là một đa thức với $\underline{n} \gg 0$ vì khi đó $\underline{x}$ cũng là một u.p-dãy. Vậy đa thức này không phụ thuộc vào cách chọn n_d. Hoán vị thứ tự của dãy $x_1, \ldots, x_d$ thì đa thức $I_M(\underline{n}; \underline{x})$ không phụ thuộc vào $n_1, \ldots, n_d$ khi $\underline{n} \gg 0$. Vậy $I_M(\underline{n}; \underline{x})$ là hàm hằng khi $\underline{n} \gg 0$, điều này chứng tỏ M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng. □

Từ định lý trên ta suy ra ngay một hệ quả sau.

Hệ quả 1.4.4. *Cho M là một f-môđun. Khi đó mọi hệ tham số của M không là u.p-dãy khi và chỉ khi M không là môđun Cohen-Macaulay.*

Chứng minh. Giả sử mọi hệ tham số của M đều không là u.p dãy. Khi đó $I_M(\underline{n}; \underline{x})$ không là đa thức hằng. Do đó M không là môđun Cohen-Macaclay suy rộng. Ngược lại, giả sử M không là môđun Cohen-Macaulay suy rộng ta cần chứng minh mọi hệ tham số của M đều không là u.p-dãy. Thật vậy, giả sử ngược lại là tồn tại hệ tham số $\underline{x}$ của M là u.p-dãy. Theo giả thiết vì

M là f-môđun nên $\underline{x}$ là f-dãy chính quy hoán vị được. Theo định lý trên thì M là Cohen-Macaulay suy rộng. Điều này là mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $\underline{x}$ không là u.p-dãy. $\square$

Chương 2

Kiểu đa thức

Trong suốt chương này ta ký hiệu $(A, \mathfrak{m})$ là vành Noether, địa phương, giao hoán M là $R-$môđun hữu hạn sinh khác không với $\dim M = d$.

2.1 Kiến thức chuẩn bị

Cho $\mathfrak{a} \in M$ là một iđêan của A. Khi đó môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{a}}(M)$ thứ i của M ứng với giá $\mathfrak{a}$ được xác định bởi hàm tử dẫn xuất phải thứ i của hàm tử $\mathfrak{a}$-xoắn $\Gamma_{\mathfrak{a}}(\bullet)$: $H^i_{\mathfrak{a}}(M) = R^i\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$, trong đó $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$ được định nghĩa bởi

$$\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) = \bigcup_{n \geq 0}(0_M : \mathfrak{a}^n)$$

là một hàm tử hiệp biến khớp trái. Tiếp theo ta sẽ nhắc lại một số định lý quan trọng sau.

Định lý 2.1.1 (xem trong [3]). *Cho $\mathfrak{a}$ là một iđêan của vành Noether A và M là A-môđun hữu hạn sinh. Khi đó*

$$H^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$$

với mọi $i > \dim M$.

Định lý 2.1.2 (xem trong [3]). *Cho $M \neq 0$ là môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$ trên vành Noether địa phương $(A, \mathfrak{m}.)$ Khi đó*

$$H^d_{\mathfrak{m}}(M) \neq 0.$$

Chú ý 2.1.3. Môđun Cohen-Macaulay và Cohen-Macaulay suy rộng cũngđược đặc trưng qua môđun đối đồng điều như sau:

(i) M là môđun Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0, \forall i = 0, \ldots, d-1$.

(ii) M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi $l_A(H^i_{\mathfrak{m}}(M)) < +\infty, \forall i = 0, \ldots, d-1$.

Đặt $\mathfrak{a}_i(M) = \mathrm{Ann}_A H^i_{\mathfrak{m}}(M), i = 0, \ldots, d$ và $\mathfrak{a}(M) = \mathfrak{a}_0(M) \ldots \mathfrak{a}_{d-1}(M)$. Khi đó ta đưa ra kết quả sau đây của P. Schenzel:

(iii) Đặt

$$\mathfrak{b}_{\underline{x}}(M) = \bigcap_{i=0}^{d-1} (\bigcap_{t \geq 0} \mathrm{Ann}_A((x_1^t, \ldots, x_i^t)M : x_{i+1}^i/(x_1^t, \ldots, x_i^t)M),$$

và $\mathfrak{b}(M) = \cap_{\underline{x}} \mathfrak{b}_{\underline{x}}(M)$, $\underline{x}$ chạy trên toàn bộ hệ tham số của M. Khi đó ta có

$$\mathfrak{a}(M) \subseteq \mathfrak{b}(M) \subseteq \mathfrak{a}_0(M) \cap \ldots \cap \mathfrak{a}_{d-1}(M),$$

và $\mathfrak{b}(M)^d \subseteq \mathfrak{a}(M)$.

Từ chú ý trên ta suy ra được ngay bổ đề sau.

Bổ đề 2.1.4. *Cho $x_1, \ldots, x_i$ là một phần hệ tham số của M. Giả sử tồn tại một phần tử $a \in \mathfrak{a}(M)$ sao cho $(x_1, \ldots, x_i, a)$ cũng là một phần hệ tham số của M. Khi đó*

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_i)M : \mathfrak{a}(M) &= \bigcup_{t \geq 0} ((x_1, \ldots, x_i)M : \mathfrak{a}^t(M)) \\ &= \bigcup_{t \geq 0} ((x_1, \ldots, x_i)M : a^t)\end{aligned}$$

Định nghĩa 2.1.5. (i) Một vành A được gọi là vành *catenary* nếu như mọi dãy tăng các iđêan nguyên tố bão hoà nằm giữa hai iđêan nguyên tố bất kỳ $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ đều có cùng độ dài.

(ii) Một vành A được gọi là *catenary phổ dụng* (universally catenary) nếu A là Noether và $A[X_1, ..., X_n]$ là vành catenary với mọi $n \geq 0$.

(iii) Cho $(A, \mathfrak{m})$ là vành Nother địa phương, A được gọi là vành *Gorenstein* nếu nó thoả mãn điều kiện sau inj dim$A < \infty$, trong đó inj dim(A) là chiều nội xạ của A.

Như đã biết coi A như A-môđun thì A luôn tồn tại một lời giải nội xạ là $P^\bullet$. Khi đó nếu $P_n = 0$ với mọi $n > d$ và $P_d \neq 0$ thì ta nói rằng A có chiều nội xạ là d, ký hiệu là inj dim$(A) = d$. Nếu không tồn tại d thoả mãn $P_n = 0$ với mọi $n > d$ và $P_d \neq 0$ thì ta quy ước inj dim$(A) = \infty$. Từ định nghĩa trên ta có bổ đề sau

Hệ quả 2.1.6 (xem trong [8])**.** *Mọi vành Gorenstien đều là vành Cohen-Macaulay.*

Tiếp theo ta nhắc lại một định lý quan trọng sau đây.

Định lý 2.1.7 (xem trong [8])**.** *Vành thương của vành Cohen-Macaulay là vành catenary phổ dụng.*

Từ định lý và bổ đề trên ta suy ra ngay một hệ quả sau.

Hệ quả 2.1.8. *Vành thương của vành Gorenstein là vành catenary phổ dụng.*

Tiếp theo ta nhắc lại khái niệm sau.

Định nghĩa 2.1.9. Một A-môđun M được gọi là *unmixed* nếu nó thoả mãn dim$(\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}}) =$ dim$M$ với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}_{\widehat{R}}\widehat{M}$.

Định lý 2.1.10 (xem trong [8])**.** *Cho A là vành catenary phổ dụng. Khi đó với mọi $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}A$ thì $A/\mathfrak{p}$ là unmixed.*

Định nghĩa 2.1.11. Cho $D^\bullet : \ldots \to D^{-n} \to \ldots \to D^0 \to D^1 \to \ldots \to D^n \to \ldots$ là một phức các A-môđun. Khi đó $D^\bullet$ được gọi là phức đối ngẫu của A nếu thoả mãn các điều kiện sau:

(i) $D^\bullet$ bị chặn, tức là $D^n = 0$ với $|n| >> 0$.

(ii) $H^i(D^\bullet)$ là hữu hạn sinh với mọi i.

(iii) D_n là các A-môđun nội xạ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) Với mọi phức M thoả mãn các điều kiện (i) và (ii) ở trên ta đều có

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{Hom}_A(M^\bullet, D^\bullet), D^\bullet) \approx M^\bullet$$

ở đây $\approx$ là tựa đẳng cấu trong phạm trù các phức.

Chú ý 2.1.12. Sau đây ta nhắc lại một số tính chất cơ bản về phức đối ngẫu.

(i) Vành thương của vành có phức đối ngẫu luôn có phức đối ngẫu. Ta biết rằng phép giải nội xạ tối thiểu của một vành Gorenstein là một phức đối ngẫu của vành đó, vậy mọi vành thương của vành Gorenstein đều có phức đối ngẫu.

(ii) Nếu A có phức đối ngẫu thì A là vành catenar, nghĩa là mọi dãy các iđêan nguyên tố nằm giữa hai iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ bất kỳ đều có cùng độ dài. Hơn nữa nếu A không là vành địa phương thì ta vẫn có $\dim A < \infty$.

(iii) Giả sử A có phức đối ngẫu. Khi đó quỹ tích không Cohen - Macaulay của M định nghĩa bởi

$$\mathrm{nCM}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}M | M_{\mathfrak{p}} \text{ không là Cohen - Macaulay}\},$$

là tập đóng trong $\mathrm{Spec}(A)$ theo tôpô Zariski.

(iv) Giả sử A có phức đối ngẫu. Khi đó với $i = 0, \ldots, d$ ta có $\dim(A/\mathfrak{a}_i(M)) \leq i$.

2.2 Kiểu đa thức

Trước khi đưa ra khái niệm cơ bản của mục này chúng ta sẽ đưa ra kết quả sau.

Bổ đề 2.2.1. *Cho $x = (x_1, \ldots, x_d)$ là hệ tham số của M và $n = (n_1, \ldots, n_d)$ $\in \mathbb{N}^d$. Khi đó ta có $l(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) \leq n_1 \ldots n_d l(M/(x_1, \ldots, x_d)M)$.*

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh quy nạp theo d. Khi $d = 1$, xét dãy khớp

$$M/x_1M \xrightarrow{x_1} M/x_1^2M \longrightarrow M/x_1M \longrightarrow 0.$$

Từ dãy khớp trên suy ra $l(M/x_1^2M) \leq 2l(M/x_1M)$. Hoàn toàn tương tự có dãy khớp

$$M/x_1^2M \xrightarrow{x_1} M/x_1^3M \longrightarrow M/x_1M \longrightarrow 0.$$

Từ dãy khớp trên suy ra

$$l(M/x_1^3M) \leq l(M/x_1^2M) + l(M/x_1M).$$

Từ hai bất đẳng thức trên suy ra $l(M/x_1^3M) \leq 3l(M/x_1^3)$. Tiếp tục quá trình trên suy ra $l(M/x_1^{n_1}) \leq n_1 l(M/x_1M)$.
Giả sử $d > 1$. Đặt $E = M/x_1^{n_1}M$ và $F = M/(x_2, \ldots, x_d)M$. Khi đó theo giả thiết quy nạp ta có

$$\begin{aligned} l(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) &= l(E/(x_2^{n_2}, \ldots, x_d^{n_d})E) \\ &\leq n_2 \ldots n_d l(E/(x_2, \ldots, x_d)E) \\ &= n_2 \ldots n_d l(F/x_1^{n_1}F) \\ &\leq n_1 \ldots n_d l(M/(x_1, \ldots, x_d)M). \end{aligned}$$

□

Khi $n_1 = n_2 = \ldots = n_d = 1$ đặt $I_M(\underline{n}, \underline{x}) = I_M(\underline{x})$. Từ bổ đề ta suy ra ngay một hệ quả sau.

Hệ quả 2.2.2. $I_M(\underline{n}, \underline{x}) \leq n_1 \ldots n_d I_M(\underline{x})$.

Hệ quả trên nói lên rằng nếu hàm số $I_M(\underline{n}, \underline{x})$ không là đa thức thì nó cũng bị chặn trên bởi đa thức $n_1 \ldots n_d I_M(\underline{x})$. Do đó bậc nhỏ nhất của tất cả các đa thức theo $\underline{n}$ chặn là tồn tại nhưng liệu rằng nó có phụ thuộc vào cách chọn hệ tham số $\underline{x}$? Định lý sau đây sẽ trả lời trọn vẹn câu hỏi đó. Định lý này cũng dẫn đến những khái niệm cơ bản của luận văn.

Định lý 2.2.3. *Bậc bé nhất của tất cả các đa thức theo $\underline{n}$ chặn trên hàm số $I_M(\underline{n}, \underline{x})$ không phụ thuộc vào cách chọn $\underline{x}$.*

Chứng minh. Cho $t = (t, \ldots, t) \in \mathbb{N}$. Khi đó theo Garcia Roig, J. .L thì bậc bé nhất của tất cả các đa thức theo t chặn trên hàm số $I_M(\underline{t}, \underline{x})$ không phụ thuộc vào cách chọn $\underline{x}$. Ký hiệu bất biến này là $p'(M)$ và gọi $p(x)$ là bậc bé nhất của tất cả các đa thức chặn trên hàm $I_M(\underline{n}, \underline{x})$. Ta sẽ chứng minh hàm $I_M(\underline{n},\underline{x})$ là đồng biến. Thật vậy, theo quy nạp ta chỉ cần chứng minh $I_M(\underline{m},\underline{x}) \geq I_M(\underline{n},\underline{x})$, với $m_i = n_i, \forall i < d$. Theo công thức [A-B] và công thức bội ta có

$$\begin{aligned}
I_M(\overline{m},\underline{x}) &= l(M/(x_d^{m_1},\ldots,x_d^{m_d})M) - m_1\ldots m_d e(\underline{x},M)\\
&= l(x_1^{m_1},\ldots,x_{d-1}^{m_{d-1}})M : x_d^{m_d}/(x_1^{m_1},\ldots,x_{d-1}^{m_{d-1}})M)\\
&+ \sum_{i=1}^{d-1} e((x_{i+1}^{m_{i+1}},\ldots,x_d^{m_d});(x_1^{m_1},\ldots,x_{i-1}^{m_{i-1}})M : x_i^{m_i}/(x_1^{m_1},\ldots,x_{i-1}^{m_{i-1}})M)\\
&\geq l(x_1^{m_1},\ldots,x_{d-1}^{m_{d-1}})M : x_d^{n_d}/(x_1^{m_1},\ldots,x_{d-1}^{m_{d-1}})M)\\
&+ \sum_{i=1}^{d-1} e((x_{i+1}^{m_{i+1}},\ldots,x_d^{m_d});(x_1^{m_1},\ldots,x_{i-1}^{m_{i-1}})M : x_i^{m_i}/(x_1^{m_1},\ldots,x_{i-1}^{m_{i-1}}M)\\
&\geq l(x_1^{m_1},\ldots,x_{d-1}^{m_{d-1}})M : x_d^{n_d}/(x_1^{m_1},\ldots,x_{d-1}^{m_{d-1}})M)\\
&+ \sum_{i=1}^{d-1} e((x_{i+1}^{n_{i+1}},\ldots,x_d^{n_d});(x_1^{n_1},\ldots,x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i}/(x_1^{n_1},\ldots,x_{i-1}^{n_{i-1}})M)\\
&= l(x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{n_d}/(x_1^{n_1},\ldots,x_{d-1}^{n_{d-1}})M)\\
&+ \sum_{i=1}^{d-1} e((x_{i+1}^{n_{i+1}},\ldots,x_d^{n_d});(x_1^{n_1},\ldots,x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i}/(x_1^{n_1},\ldots,x_{i-1}^{n_{i-1}})M)\\
&= I_M(\underline{n},\underline{x}).
\end{aligned}$$

Do đó ta có $I_M(\underline{t},\underline{x}) \leq I_M(\underline{n},\underline{x})$, với mọi $t \leq n_i, i = 1,\ldots,d$. Suy ra $p'(M) \leq p(x)$. Tương tự ta có $I_M(\underline{t},\underline{x}) \geq I_M(\underline{n},\underline{x})$, với mọi $t \geq n_i, i = 1,\ldots,d$. Suy ra $p'(M) \geq p(x)$. Do đó ta suy ra $p'(M) = p(x)$ với mọi hệ tham số $\underline{x}$. □

Định lý trên đưa ta đến khái niệm cơ bản sau và nó cũng là xuất phát điểm quan trọng dẫn đến các kết quả chính của chương này.

Định nghĩa 2.2.4. Bậc bé nhất của tất cả các đa thức chặn trên $I_M(\underline{n},\underline{x})$ là một bất biến của M. Bất biến này gọi là *kiểu đa thức* của M và ký hiệu là $p(M)$.

Chú ý 2.2.5. (i) Quy ước bậc của đa thức 0 là $-\infty$. Khi đó ta suy ra ngay M là môđun Cohen-Macaulay khi và chỉ khi $p(M) = -\infty$ vì ta chọn được hệ tham số của M sao cho $I_M(\underline{n},\underline{x}) = 0$. Ta cũng suy ra, M là môđun Cohen-Macaulay suy rộng khi và chỉ khi $p(M) \leq 0$.

(ii) Theo công thức Lech ta có

$$\lim_{min(n_i)\to\infty} \frac{l(M/(x_1^{n_1},\ldots,x_d^{n_d})M)}{n_1\ldots n_d} = e(\underline{x}, M)$$

suy ra $0 < p(M) \leq \dim M - 1$ khi M không là môđun Cohen-Macaulay.

Như vậy kiểu đa thức có thể xem như một độ đo tính Cohen-Macaulay phù hợp cho môđun. Hệ quả sau đây được sử dụng nhiều trong mục tiếp theo.

Hệ quả 2.2.6. *Cho $\widehat{M}$ là bao đầy đủ $\mathfrak{m}$-adic của M. Khi đó $p(M) = p(\widehat{M})$.*

Chứng minh. Vì $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ là hệ tham số của M thì $\underline{x}$ cũng là hệ tham số của $\widehat{M}$. Mặt khác độ dài và bội là bất biến qua phép lấy đầy đủ, nghĩa là

$$l(M/(\underline{x})M) = l(\widehat{M}/(\underline{x})\widehat{M}) \text{ và } e(\underline{x}; M) = e(\underline{x}; \widehat{M}.)$$

Do đó với mỗi bộ d số nguyên dương $n_1, \ldots, n_d$ ta có

$$l(M/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})M) = l(\widehat{M}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_d^{n_d})\widehat{M}).$$

Từ đây suy ra $I_{\widehat{M}}(\underline{n}, \underline{x}) = I_M(\underline{n}, \underline{x})$. Do đó $p(\widehat{M}) = p(M)$. □

2.3 Các chặn trên và dưới của kiểu đa thức

Chú ý 2.2.5(ii) nói lên rằng nếu không biết chính xác $p(M)$ thì ta cũng thấy rằng nó luôn bị chặn. Tuy nhiên chúng ta chưa thể tính các chặn của nó. Các kết quả chính của mục này sẽ nói lên ý nghĩa hình học của $p(M)$, tính được các chặn của $p(M)$ và tính được $p(M)$ trong một số trường hợp đặc biệt. Trước khi phát biểu các kết quả chính trong mục này chúng ta cần định nghĩa và một số bổ đề sau.

Định nghĩa 2.3.1. Một phần hệ tham số $x_1, \ldots, x_j$ của M được gọi là dãy thu gọn nếu $x_i \notin \mathfrak{p}, \forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M)$ với $\dim(A/\mathfrak{p}) \geq d - i$, $i = 1, \ldots, j$.

Từ định nghĩa trên ta có thể định nghĩa thêm một bất biến nữa của M là $r(M) = \inf\ \{k\}$, trong đó k thoả mãn điều kiện mọi phần hệ tham số của M có $d - k - 1$ phần tử là dãy thu gọn của M.

Bổ đề 2.3.2 (xem trong 4.8 của [1]). *Cho* $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ *là hệ tham số của* M. *Khi đó* $x_k \notin \mathfrak{p}$ *với mọi* $\mathfrak{p} \in Ass(M/(x_1, \ldots, x_{k-1})M)$ *thoả mãn* $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq d - k (k = 1, \ldots, d-1)$ *nếu và chỉ nếu*

$$e((x_1, \ldots, x_d); M) = l(M/(x_1, \ldots, x_d)M) \\ - l((x_1, \ldots, x_{d-1})M) : x_d/(x_1, \ldots, x_{d-1})M).$$

Bổ đề 2.3.3. *Cho* $x_1, \ldots, x_j$ *là dãy thu gọn hoán vị được (mọi hoán vị của* $x_1, \ldots, x_j$ *đều là dãy thu gọn). Khi đó với mọi* $\mathfrak{p} \in Ass(M/(x_1, \ldots, x_{j-1})M)$ *thoả mãn* $dim(A/\mathfrak{p}) \geq d - j$ *ta có*

$$\dim(M_\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = d.$$

Chứng minh. Giả sử $\dim M_\mathfrak{p} = k < j$ thì khi đó ta có thể chọn được thứ tự của dãy $x_1, \ldots, x_j$ sao cho $x_1, \ldots, x_k$ là hệ tham số của $M_\mathfrak{p}$. Vì $(x_1, \ldots, x_k)M_\mathfrak{p} \subseteq (x_1, \ldots, x_{j-1})M_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}M_\mathfrak{p}$ nên suy ra $(x_1, \ldots, x_{j-1})M_\mathfrak{p}$ là $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$- nguyên sơ. Theo [8], 7.C ta nhận được $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M/(x_1, \ldots, x_{j-1})M)$. Điều này là mâu thuẫn với giả thiết $x_1, \ldots, x_j$ là dãy thu gọn. Vậy $\dim M_\mathfrak{p} = j$, tức là $\dim M_\mathfrak{p} + \dim(A/\mathfrak{p}) = d$. □

Bổ đề 2.3.4. *Cho* $\mathfrak{p} \in SuppM$ *thoả mãn* $\dim(A/\mathfrak{p}) > r(M)$. *Khi đó* $M_\mathfrak{p}$ *là môđun Cohen-Macaulay và* $\dim(M_\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = d$.

Chứng minh. Đặt $k = r(M)$ và chọn một phần hệ tham số $x_1, \ldots, x_j$ của M nằm trong $\mathfrak{p}$ sao cho j là số lớn nhất. Khi đó ta suy ra $\dim(A/\mathfrak{p}) = d - j$. Vì $k < d - j$ nên $d - k - 1 \geq j$, tức là $x_1, \ldots, x_j$ là dãy thu gọn hoán vị được của M. Theo bổ đề trên ta có $\dim(M_\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = d$. Mặt khác, vì $x_1, \ldots, x_j$ cũng là dãy thu gọn của $M_\mathfrak{p}$ nên theo bổ đề 2.3.2 ta có

$$l(M_\mathfrak{p}/(x_1, \ldots, x_j)M_\mathfrak{p}) - e((x_1, \ldots, x_j); M_\mathfrak{p}) \\ = l((x_1, \ldots, x_{j-1})M_\mathfrak{p} : x_j/(x_1, \ldots, x_{j-1})M_\mathfrak{p}).$$

Hơn nữa $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}(M_\mathfrak{p}/(x_1, \ldots, x_{j-1})M_\mathfrak{p})$, từ đó suy ra

$$(x_1, \ldots, x_{j-1})M_\mathfrak{p} : x_j = (x_1, \ldots, x_{j-1})M_\mathfrak{p}.$$

Suy ra $l(M_\mathfrak{p}/(x_1, \ldots, x_j)M_\mathfrak{p}) - e((x_1, \ldots, x_j); M_\mathfrak{p}) = 0$. Điều này chứng tỏ $M_\mathfrak{p}$ là môđun Cohen-Macaulay. □

Bổ đề 2.3.5. *Giả sử* A *có phức đối ngẫu và cho* $a \in \mathfrak{a}(M)$ *là một phần tử tuỳ ý sao cho* $\dim(M/aM) = d-1$. *Khi đó, nếu* $\dim(A/\mathfrak{a}(M)) < d-1$ *thì*

$$\dim(A/\mathfrak{a}(M/aM)) = \dim(A/\mathfrak{a}(M)).$$

Chứng minh. Đặt $\overline{M} = M/aM$ và $k = \dim(A/\mathfrak{a}(M))$. Khi đó xét các dãy khớp sau

$$0 \longrightarrow 0_M : \mathfrak{a}(M) \longrightarrow M \longrightarrow M/(0_M : \mathfrak{a}(M) \longrightarrow 0 \qquad (S_1)$$

$$0 \longrightarrow M/(0_M : \mathfrak{a}(M)) \xrightarrow{a} M \longrightarrow \overline{M} \longrightarrow 0 \qquad (S_2).$$

Hiển nhiên (S_1) là khớp và (S_2) là khớp vì $0_M : aA = 0_M : \mathfrak{a}(M)$ theo [9], 2.4.4. Mặt khác vì $\dim(0_M : \mathfrak{a}(M)) = k$, nên theo định lý 2.1.1 ta suy ra $H^i_{\mathfrak{m}}(0_M : \mathfrak{a}(M)) = 0$ với mọi $i > k$. Khi đó dãy khớp (S_1) sinh ra các đẳng cấu

$$f_i \quad : \quad H^i_{\mathfrak{m}}(M) \quad \cong \quad H^i_{\mathfrak{m}}(M/(0_M : \mathfrak{a}(M))).$$

Hơn nữa vì $a.H^i_{\mathfrak{m}}(M) = 0$ với $0 \leq i \leq d-1$ nên từ biểu đồ giao hoán

$$\begin{tikzcd}
H^i_{\mathfrak{m}}(M) \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "f_i"'] & & H^i_{\mathfrak{m}}(M) \\
& H^i_{\mathfrak{m}}(M/(0_M : \mathfrak{a}(M))) \arrow[ur, "g_i"'] &
\end{tikzcd}$$

ta suy ra g_i là ánh xạ không với $k \leq i \leq d-1$. Vì dãy khớp (S_2) sinh ra dãy khớp dài các đối đồng điều địa phương và do f_i là các đẳng cấu nên ta thu được

$$0 \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow H^i_{\mathfrak{m}}(\overline{M}) \longrightarrow H^{i+1}_{\mathfrak{m}}(M) \longrightarrow 0$$

là một dãy khớp ngắn khi $k \leq i \leq d-1$. Từ đó suy ra

$$\mathrm{Rad}(\mathfrak{a}_k(M))\ldots\mathrm{Rad}(\mathfrak{a}_{d-1}(M)) = \mathrm{Rad}(\mathfrak{a}_k(\overline{M}))\ldots\mathrm{Rad}(\mathfrak{a}_{d-2}(\overline{M})).$$

Mặt khác vì A có phức đối ngẫu nên theo 2.1.12(iv) ta nhận được

$$\dim(A/\mathfrak{a}_0(M)\ldots\mathfrak{a}_{k-1}(M)) \leq k-1 \text{ và } \dim(A/\mathfrak{a}_0(\overline{M})\ldots\mathfrak{a}_{k-1}(\overline{M})).$$

Mặt khác A là catenar do đó $\dim(A/\mathfrak{a}(\overline{M})) = \dim(A/\mathfrak{a}(M))$. $\square$

Bổ đề 2.3.6. *Cho* $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ *là một hệ tham số của* M *sao cho* $x_i \in \mathfrak{a}(M/(x_{i+1}, \ldots, x_d)M)$, *với* $i = 1, \ldots, d$. *Khi đó*

$$(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i} \subseteq (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_j$$

với mọi $j \geq i \geq 1$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bổ đề quy nạp lùi theo j. Khi $j = d$ thì bổ đề là hiển nhiên vì $x_d \in \mathfrak{a}(M)$ (theo 2.1.3(iii)). Với $d > j \geq i$ từ định nghĩa của $\underline{x}$ và hệ quả 2.1.4 ta có

$$\begin{aligned}(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i} &\subseteq (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}}, x_{j+1}, \ldots, x_d)M : x_i^{n_i}\\ &\subseteq (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}}, x_{j+1}, \ldots, x_d)M : x_j.\end{aligned}$$

Cho $a \in (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i}$, thì khi đó ta có khai triển

$$a.x_j = b + c_{j+1}x_{j+1} + \ldots + c_d x_d$$

với $b \in (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M, c_{j+1}, \ldots, c_d \in M$. Từ giả thiết quy nạp ta suy ra

$$ax_jx_{j+1} = bx_{j+1} + c_{j+1}x_{j+1}^2 + \ldots + c_dx_dx_{j+1} \in (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M,$$

nghĩa là $c_{j+1}x_{j+1}^2 \in (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}}, x_{j+2}, \ldots, x_d)M$. Lại dựa vào định nghĩa của $\underline{x}$ và hệ quả 2.1.4 ta suy ra

$$c_{j+1} \in (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}}, x_{j+2}, \ldots, x_d)M : x_{j+1}^2$$

$$= (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}}, x_{j+2}, \ldots, x_d)M : x_{j+1}.$$

Điều này chứng tỏ rằng $ax_j \in (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}}, x_{j+2}, \ldots, x_d)M$.

Nếu $j + 1 < d$ ta tiếp tục quá trình trên, sao cho cuối cùng ta đi đến $ax_j \in (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M$. □

Định lý 2.3.7. *Giả sử* A *có phức đối ngẫu. Khi đó ta có các đẳng thức*

$$p(M) = r(M) = \dim(A/\mathfrak{a}(M)).$$

Chứng minh. Để chứng minh định lý ta sẽ chỉ ra rằng

$$p(M) \geq r(M) \geq \dim(A/\mathfrak{a}(M)) \geq p(M).$$

Ta cần chứng minh $p(M) \geq r(M)$. Đặt $p(M) = k$. Giả sử $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ là một hệ tham số tuỳ ý của M. Theo công thức [A-B] ta có

$$\begin{aligned} I_M(\underline{n}, \underline{x}) &= l((x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d^{n_d}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}})M) \\ &+ \sum_{i=1}^{d-1} e((x_{i+1}^{n_{i+1}}, \ldots, x_d^{n_d}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M. \end{aligned}$$

Vì $p(M) = k$ nên $I_M(\underline{n}, \underline{x})$ bị chặn trên bởi một đa thức bậc k. Do đó

$$e((x_{i+1}^{n_{i+1}}, \ldots, x_d^{n_d}); (x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M : x_i^{n_i}/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{i-1}^{n_{i-1}})M) = 0$$

với $i = 1, \ldots, d-k-1$ và $n_1, \ldots, n_d \geq 1$. Cho $n_1 = n_2 = \ldots = n_i = 1$ thì khi đó suy ra

$$e((x_{i+1}, \ldots, x_d); (x_1, \ldots, x_{i-1})M : x_i/(x_1, \ldots, x_{i-1})M) = 0.$$

Theo bổ đề 1.4.1 suy ra $x_1, \ldots, x_{d-k-1}$ là một dãy thu gọn. Do đó theo định nghĩa của $r(M)$ suy ra $r(M) \leq k$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $r(M) \geq \dim(A/\mathfrak{a}(M))$. Đặt $r(M) = k$. Khi đó với mọi $\mathfrak{p} \in$ Supp$M$ thoả mãn $\dim(A/\mathfrak{p}) = d - j > k$ ta sẽ chứng minh $\mathfrak{a}(M) \not\subseteq \mathfrak{p}$. Thật vậy, theo bổ đề 2.3.3 ta có $\dim M_\mathfrak{p} + \dim(A/\mathfrak{p}) = d$. Suy ra $\dim M_\mathfrak{p} = j \leq d - k - 1$. Vì thế ta có thể tìm được hệ tham số $x_1, \ldots, x_j$ của M chứa trong $\mathfrak{p}$ và là một hệ tham số của $M_\mathfrak{p}$. Hơn nữa $x_1, \ldots, x_j$ còn là dãy thu gọn của $M_\mathfrak{p}$ vì $r(M) = k$. Từ bổ đề 2.3.2 suy ra

$$\begin{aligned} &l(M_\mathfrak{p}/(x_1, \ldots, x_j)M_\mathfrak{p}) - e((x_1, \ldots, x_j); M_\mathfrak{p}) \\ &= l((x_1, \ldots, x_{j-1})M_\mathfrak{p} : x_j/(x_1, \ldots, x_{j-1})M_\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

Vì $x_1, \ldots, x_j$ cũng là dãy thu gọn của M nên suy ra

$$\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \notin \mathrm{Ass}(M_\mathfrak{p}/(x_1, \ldots, x_{j-1})M_\mathfrak{p}),$$

từ đây suy ra

$$(x_1, \ldots, x_{j-1})M_{\mathfrak{p}} : x_j = (x_1, \ldots, x_{j-1})M_{\mathfrak{p}}.$$

Điều này chứng tỏ

$$l(M_{\mathfrak{p}}/(x_1, \ldots, x_j)M_{\mathfrak{p}}) - e((x_1, \ldots, x_j); M_{\mathfrak{p}}) = 0,$$

hay $M_{\mathfrak{p}}$ là Cohen-Macaualy. Khi đó theo [9], 2.4.6 thì $\mathfrak{a}(M) \notin \mathfrak{p}$. Vậy $\dim(A/\mathfrak{a}(M)) \leq k = r(M)$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\dim(A/\mathfrak{a}(M)) \geq p(M)$. Theo chú ý 2.2.5(ii) bất đẳng thức hiển nhiên đúng khi $\dim(A/\mathfrak{a}(M)) = d - 1$. Giả sử $\dim(A/\mathfrak{a}(M)) < d - 1$. Vì vành thương của vành có phức đối ngẫu luôn có phức đối ngẫu nên theo 2.1.12(iv) ta luôn có thể chọn được một hệ tham số $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ của M sao cho $\underline{x}$ thoả mãn giả thiết của bổ đề 2.3.6, nghĩa là

$$x_i \in \mathfrak{a}(M/(x_{i+1}, \ldots, x_d)M), i = 1, \ldots, d-1.$$

Đặt $\overline{M} = M/x_dM$, $\underline{x}' = (x_1, \ldots, x_{d-1})$, $\underline{n}' = (n_1, \ldots, n_{d-1})$. Khi đó $\underline{x}'$ là một hệ tham số của $\overline{M}$ và thoả mãn điều kiện của bổ đề 2.3.6 đối với $\overline{M}$. Khi đó theo bổ đề 2.3.3 ta có

$$\begin{aligned} I_M(\underline{n}, \underline{x}) &= l((x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}})M : x_d/(x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}})M) \\ &= I_M(\underline{n}', 1; \underline{x}). \end{aligned}$$

Mặt khác vì $0_M : x_d = 0_M : \mathfrak{a}(M)$ nên

$$I_M(\underline{n}', 1; \underline{x}) = I_{\overline{M}}(\underline{n}', \underline{x}') + e((x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}}); 0_M : x_d).$$

Vì $\dim(A/\mathfrak{a}(M)) < d - 1$ nên suy ra $e((x_1^{n_1}, \ldots, x_{d-1}^{n_{d-1}}); 0_M : x_d) = 0$. Vậy $I_M(\underline{n}; \underline{x}) = I_{\overline{M}}(\underline{n}'; \underline{x}')$. Do đó $p(M) = p(\overline{M})$. Sử dụng quy theo d và theo bổ đề 2.3.5 ta dễ dàng chứng minh được $\dim(A/\mathfrak{a}(M)) \geq p(M)$. □

Từ chứng minh của định lý ta luôn có $p(M) \geq r(M)$ do đó từ bổ đề 2.3.4 ta suy ra ngay hệ quả sau.

Hệ quả 2.3.8. *Cho* $\mathfrak{p} \in SuppM$ *sao cho* $\dim(A/\mathfrak{p}) > p(M)$. *Khi đó* $M_{\mathfrak{p}}$ *là môđun Cohen-Macaulay và* $\dim(M_{\mathfrak{p}}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = d$.

Nhắc lại rằng môđun M được gọi là đẳng chiều nếu dim$M = \dim(A/\mathfrak{p})$ với mọi $\mathfrak{p} \in \min$ Ass$M$. Định lý sau đây nói lên ý nghĩa hình học của kiểu đa thức của M.

Định lý 2.3.9. *Giả sử A có phức đối ngẫu và M là đẳng chiều. Khi đó*

$$p(M) = \dim(nCM(M)).$$

Chứng minh. Vì A có phức đối ngẫu nên theo 2.1.12(ii) thì A là vành catenar. Do M là đẳng chiều nên ta có dim$M_{\mathfrak{p}} + \dim(A/\mathfrak{p}) = d$. Theo [9] , 2.4.6 thì ta có $V(\mathfrak{a}(M)) =$ nCM(M). Vậy theo định lý trên ta có $p(M) = \dim(A/\mathfrak{a}(M)) =$ dim (nCM(M)). □

Từ hai định lý trên ta suy ra điều kiện A có phức đối ngẫu là rất quan trọng và định lý sẽ không còn đúng nữa nếu bỏ đi điều kiện A có phức đối ngẫu. Thật vậy ta xét một ví dụ sau

Ví dụ 2.3.10. Như đã biết Ferrand và Raynaud đã xây dựng được một miền nguyên địa phương (R, m) với dim$R = 2$ sao cho bao đầy đủ $m-$adic $\widehat{R}$ của R có một iđêan nguyên tố liên kết chiều 1. Giả sử $\widehat{\mathfrak{p}} \in \widehat{R}$ sao cho dim$\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}} = 1$. Do đó suy ra $\widehat{R}$ không là CM suy rộng. Vì nếu ngược lại nếu $\widehat{R}$ là CM suy rộng thì ta suy ra dim$\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}} =$ dim$\widehat{R} = 2$ với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in$ Ass$(\widehat{R})$, điều này là mâu thuẫn. Vậy $\widehat{R}$ không là CM suy rộng. Theo 1.1.6(iii) thì R không là CM suy rộng. Suy ra $p(R) \geq 1$. Vì dim$(R) = 2$ và theo chú ý 2.2.5 (ii) ta suy ra $p(R) = 1$.

Chú ý rằng R không có phức đối ngẫu. Vì nếu R có phức đối ngẫu thì khi đó R là Catenary phổ dụng. Do R là miền nguyên nên iđêan (0) là iđêan nguyên tố. Theo bổ đề 2.1.10 thì $R/(0) = R$ là umixed, nghĩa là dim$\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}} =$ dim$R$ với mọi $\widehat{\mathfrak{p}} \in$ Ass$\widehat{R}$, điều này là mâu thuẫn vì dim$R = 2$ và tồn tại $\widehat{\mathfrak{p}} \in$ Ass$\widehat{R}$ sao cho dim$\widehat{R}/\widehat{\mathfrak{p}} = 1$. Vậy R không có phức đối ngẫu.

Tiếp theo ta sẽ chỉ ra rằng nCM$(M) = \{m\}$. Thật vậy, nếu $\mathfrak{p} = 0$ thì $R_{\mathfrak{p}}$ là trường nên suy ra dim$R_{\mathfrak{p}} = 0 =$ depth$R_{\mathfrak{p}}$. Do đó $R_{\mathfrak{p}}$ là CM. Vậy $\mathfrak{p} \notin$ nCM(R). Với $\mathfrak{p} \in$ Spec$R$ sao cho $0 \neq \mathfrak{p}$ và $\mathfrak{p} \neq m$ thì do

$\dim R = 2$ nên suy ra $\dim(R/\mathfrak{p}) = 1$. Vì (R, m) là miền nguyên địa phương nên $(R_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}})$ là miền nguyên địa phương. Suy ra $\dim R_{\mathfrak{p}} = 1$. Do đó depth$R_{\mathfrak{p}} \leq \dim R_{\mathfrak{p}} = 1$. Do $R_{\mathfrak{p}}$ là miền nguyên địa phương nên mọi phần tử khác không đều là phần tử chính quy. Suy ra depth$R_{\mathfrak{p}} = 1$. Từ đó suy ra $R_{\mathfrak{p}}$ là CM. Vậy $\mathfrak{p} \notin$ nCM(R). Với $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ thì khi đó $R_{\mathfrak{m}} \simeq R$. Do đó $R_{\mathfrak{m}}$ không là CM. Vậy nCM(R) $= \{\mathfrak{m}\}$. Do đó dim (nCM$(R)) = 0$.

Vì $p(R) = 1$ và theo chứng minh của định lý 2.3.7 ta suy ra $r(R) \leq p(R) = 1$. Giả sử $r(R) = 1$ thì suy ra $x_0 = 0$ là dãy thu gọn. Vì R là miền nguyên nên Ass$R = \{(0)\}$. Khi đó vì x_0 là dãy thu gọn nên suy ra $x_0 = 0 \notin (0)$, điều này là mâu thuẫn. Vậy $r(R) = 0$. Mặt khác theo [9] thì $\mathfrak{a}_1(R) = 0$ nên suy ra $\mathfrak{a}(R) = 0$. Do đó $\dim(R/\mathfrak{a}(R)) = 2$. Vậy ta có bất đẳng thức

$$\dim(R/\mathfrak{a}(R)) > p(R) > \dim\ (\text{nCM}(R)) = r(R) = 0.$$

Ví dụ trên nói lên rằng định lý 2.3.7 không còn đúng nữa nếu A không có phức đối ngẫu. Tuy nhiên ta có định lý sau trong trường hợp tổng quát.

Định lý 2.3.11. *(i) Với các ký hiệu như ở trên ta có*

$$\dim(A/\mathfrak{a}(M)) \geq p(M) \geq r(M).$$

(ii) Nếu $nCM(M)$ là đóng trong SuppM theo tôpô Zariski thì

$$p(M) \geq r(M) \geq \dim(nCM(M)).$$

Chứng minh. Ký hiệu $\widehat{A}$ và $\widehat{M}$ là bao đầy đủ $\mathfrak{m}$- adic của A và M. Khi đó ta có $\mathfrak{a}(M)\widehat{A} \subseteq \mathfrak{a}\widehat{M}$. Vì bao đầy đủ của một vành luôn có phức đối ngẫu nên từ hệ quả 2.2.6 và định lý 2.3.8 ta suy ra

$$\dim(A/\mathfrak{a}(M)) = \dim(\widehat{A}/\mathfrak{a}(M)\widehat{A}) \geq \dim(\widehat{A}/\mathfrak{a}(\widehat{M})) = p(\widehat{M}) = p(M).$$

Tiếp theo ta cần chứng minh $r(M) \geq$ dim (nCM(M)). Thật vậy theo hệ quả 2.3.5 thì nếu $\dim(A/\mathfrak{p}) > r(M)$ thì $M_{\mathfrak{p}}$ không là môđun Cohen-Macaulay. Do đó $\mathfrak{p} \notin$ Supp$M$. Suy ra dim (nCM$(M)) \leq r(M)$.

Các bất đẳng thức còn lại của định lý hoàn toàn được chứng minh giống như định lý 2.3.8, vì vậy chúng ta không nhắc lại chứng minh ở đây nữa. $\square$

2.4 Trường hợp A là vành thương của vành Cohen-Macaulay

Kết quả tiếp theo đây là một tiêu chuẩn rất hữu hiệu để tìm cận trên của kiểu đa thức $p(M)$.

Định lý 2.4.1. *Giả sử A là vành thương của vành Cohen-Macaulay, k là một số tự nhiên. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) $p(M) \leq k$;

(ii) Mọi phần hệ tham số gồm $d-k-1$ phần tử là dãy thu gọn;

(iii) Với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \in SuppM$ sao cho $\dim(A/\mathfrak{p}) > k$, ta có $M_\mathfrak{p}$ là CM và $\dim M_\mathfrak{p} + \dim(A/\mathfrak{p}) = d$;

(iv) Với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \in SuppM$ sao cho $\dim(A/\mathfrak{p}) = k+1$, ta có $M_\mathfrak{p}$ là CM và $\dim M_\mathfrak{p} + \dim(A/\mathfrak{p}) = d$.

Chứng minh. Vì tính chất Cohen-Macaulay ổn định qua tổng quát hoá nên (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv). Vì thế ta chỉ cần chứng minh (i)$\Longrightarrow$ (ii)$\Longrightarrow$ (iii)$\Longrightarrow$ (i.)
(i) $\Longrightarrow$ (ii) được suy ra ngay từ định lý 2.3.11. Thật vậy, theo 2.3.11 ta có $r(M) \leq p(M) \leq k$. Do đó mọi phần hệ tham số của M đều có số phần tử lớn hơn hoặc bằng $d-k-1$ là dãy thu gọn. Suy ra mọi phần hệ tham số của M đều có $d-k-1$ phần tử là dãy thu gọn.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Với mọi iđêan nguyên tố $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}M$ thoả mãn $\dim(A/\mathfrak{p}) > k$. Theo (ii) suy ra $r(M) \leq k$, từ đây suy ra $\dim(A/\mathfrak{p}) > r(M)$. Theo hệ quả 2.3.4 ta suy ra điều cần chứng minh.
(iii) $\Longrightarrow$ (i). Ký hiệu $\widehat{A}$ và $\widehat{M}$ là bao đầy đủ $\mathfrak{m}$- adic của A và M. Đặt $\dim(\widehat{A}/\mathfrak{a}(\widehat{M})) = k'$. Giả sử rằng $k' > k$. Chọn $P \in \mathrm{Ass}(\widehat{A}/\mathfrak{a}(\widehat{M}))$ sao cho $\dim(\widehat{A}/P) = k'$ và đặt $\mathfrak{p} = P \cap A$. Khi đó tồn tại một iđêan nguyên tố $Q \in \mathrm{Ass}(\widehat{A}/\mathfrak{p}\widehat{A})$ sao cho $Q \subseteq P$, tức là $Q \cap A = \mathfrak{p}$. Khi đó $\widehat{A}/\mathfrak{p}\widehat{A}$ là không trộn lẫn (unmixed) nên ta được

$$\dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(\widehat{A}/\mathfrak{p}\widehat{A}) = \dim(\widehat{A}/Q) \geq \dim(\widehat{A}/P) = k'.$$

Chú ý rằng $\widehat{A}$ là vành catenar, từ giả thiết (iii) và bổ đề 2.3.4 ta suy ra

$$d = \dim M_\mathfrak{p} + \dim(A/\mathfrak{p}) = \dim M_\mathfrak{p} + \dim(\widehat{A}/Q)$$

$$\begin{aligned}
&= \dim M_{\mathfrak{p}} + \dim(\widehat{A}/P) + \dim(\widehat{A}_P/Q\widehat{A}_P) \\
&= \dim M_{\mathfrak{p}} + \dim(\widehat{A}/P) + \dim(\widehat{A}_P/\mathfrak{p}\widehat{A}_P) \\
&= \dim \widehat{M}_P + \dim(\widehat{A}/P).
\end{aligned}$$

Mặt khác vì $\dim(A/\mathfrak{p}) \geq k' > k$ nên theo (iii) suy ra $M_{\mathfrak{p}}$ là môđun Cohen - Macaulay. Vậy $\widehat{M}_P$ cũng là môđun Cohen - Macaulay vì thớ của đồng cấu chính tắc $A \longrightarrow \widehat{A}$ là Cohen - Macaulay. Từ đó suy ra

$$d = \dim \widehat{M}_P + \dim(\widehat{A}/P) = \operatorname{depth}(\widehat{M}_P) + \dim(\widehat{A}/P).$$

Theo định lý 2.4.6 của [9] ta được $\alpha(\widehat{M}) \not\subseteq P$, điều này mâu thuẫn với cách chọn iđêan nguyên tố P. Vậy ta phải có $k \geq k'$. Vì $\widehat{A}$ có phức đối ngẫu nên theo bổ đề 2.2.6 và định lý 2.3.7 cuối cùng ta nhận được

$$p(M) = p(\widehat{M}) = k' \leq k.$$

□

Nếu A là vành thương của một vành Cohen - Macaulay khi đó quỹ tích không Cohen - Macaulay nCM(M) là tập đóng trong Spec$A$. Như vậy chúng ta có thể nói về chiều của nCM(M). Khi đó ta có hệ quả sau đây

Hệ quả 2.4.2. *Giả sử A là vành thương của một vành Cohen - Macaulay và M là đẳng chiều. Khi đó*

$$p(M) = r(M) = \dim(nCM(M)).$$

Chứng minh. Vì A là vành catenar và M là đẳng chiều nên $\dim M_{\mathfrak{p}} + \dim(A/\mathfrak{p}) = d$ với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$. Vậy từ định lý [9] 2.4.6 ta suy ra $V(\mathfrak{a}(M)) = \mathrm{nCM}(M)$. Do đó dim (nCM$(M)$) $= \dim(A/\mathfrak{a}(M))$. Từ định lý 2.3.11 ta suy ra $p(M) = r(M) =$ dim (nCM(M)). □

Như đã giới thiệu lớp môđun Cohen-Macaulay suy rộng lần đầu tiên được đưa ra trong [7]. Từ các định lý và hệ quả trên ta có thể nhận lại được tất cả các kết quả chính của [7] cho môđun Cohen-Macaulay suy rộng.

Hệ quả 2.4.3. *Cho A là vành thương cuả vành Cohen-Macaulay hoặc A có phức đối ngẫu. Khi đó các mệnh đề sau là tương đương:*

(i) M *là môđun Cohen-Macaulay suy rộng;*

(ii) $p(M) \leq 0$;

(iii) Mọi hệ tham số của M *đều là dãy thu gọn;*

(iv) $\dim(A/\mathfrak{a}(M)) \leq 0$;

(v) $\dim nCM(M) = 0$ *và* M *là đẳng chiều.*

Kết luận

Như vậy luận văn đã trình bày lại một số kết quả của GS. TSKH Nguyễn Tự Cường về tính đa thức và kiểu đa thức của một M là môđun hữu hạn sinh trên vành Noether, địa phương $(A, \mathfrak{m})$ cụ thể là:

Trình bày lại một số định nghĩa, các tính chất về bội và môđun Cohen - Macaulay suy rộng. Đưa ra khái niệm u.p - dãy và đặc trưng tính đa thức của hàm độ dài và tính Cohen-Macaulay của môđun thông qua u.p-dãy.

Nhắc lại một số kiến thức về môđun đối đồng điều địa phương, các khái niệm vành Catenary, catenary phổ dụng, Gorenstien và mối liên hệ giữa chúng. Nhắc lại khái niệm về phức đối ngẫu và một số tính chất của phức đối ngẫu. Đưa ra khái niệm kiểu đa thức, tính được nó trong một số trường hợp đặc biệt và tìm được cận trên và dưới của nó trong trường hợp tổng quát. Đưa ra ý nghĩa hình học của kiểu đa thức và đặc trưng môđun Cohen-Macaulay suy rộng thông qua kiểu đa thức, dãy thu gọn và chiều của quỹ đạo không Cohen-Macaulay.

Tài liệu tham khảo

[1] Auslander, M and D. A. Buchsbaum, *Codimension and multiplicity,* Ann. of Math. 68 (1958), 625-657.

[2] Atiyah, M. F and I. G. Macdonald, *Introduction to commutative algebra,* Reading, Mass, 1969.

[3] Brodmann. M, *Lectures on Local Cohomology,* Autumn schooll of Quinhon(Viet Nam), 9 -1999.

[4] Cuong, N. T, *On the length of the powers of systems of parameters in local ring,* Nagoya Math. J. 120 (1990), 77-88.

[5] Cuong, N. T, *On the dimension of the non- Cohen-Macaulay locus of local rings admitting dualizing complexes,* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 109(2) (1991), 479-488.

[6] Cuong, N. T, *On the least degree of polynomials bounding above the differences between lengs and multiplicities of certain systems of parameters in local rings,* Nagoya Math. J. 125 (1992), 105-114.

[7] Cuong, N, T, P. Schenzel and N. V. Trung, *Varallgemeinerte Cohen-Macaulay Moduln,* Math. Nachr. 85 (1978), 57-75.

[8] Matsumura. H, *Commutative algebra,* Second edition, London: Benjamin 41, Springer Verlag, 1980.

[9] Schenzel. P, *Dualisierende Komplexe in der lokalen Algebra und Buchsbaum ringe,* Lecture Notes in Mathematics 907, Berlin Heidelberg-NewYork, Springer, 1982.