ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ BÍCH HẰNG

HỌ S- CHUẨN TẮC CÁC ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH VÀ TÍNH HYPERBOLIC CỦA CÁC KHÔNG GIAN PHỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2008

MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU

Vào những năm đầu của thế kỷ 20, Montel đã đưa ra khái niệm họ chuẩn tắc các hàm chỉnh hình. Từ đó, khái niệm họ chuẩn tắc giữ một vai trò quan trọng đối với lý thuyết hàm biến phức và có ứng dụng rộng rãi trong động lực học, lý thuyết tối ưu,…Điều này đã khiến cho việc nghiên cứu các ánh xạ chuẩn tắc được nhiều nhà toán học quan tâm. Việc tìm ra các tiêu chuẩn cho tính chuẩn tắc cho đến nay đã đạt được nhiều kết quả đẹp đẽ như tiêu chuẩn của Montel, tiêu chuẩn của Marty, tiêu chuẩn của Miranda,…Đồng thời có những mối liên hệ mật thiết giữa lý thuyết họ ánh xạ chuẩn tắc với giải tích phức hyperbolic. Chẳng hạn, những ánh xạ chuẩn tắc vào không gian phức tuỳ ý có những tính chất quan trọng nhất của ánh xạ chỉnh hình vào không gian phức hyperbolic compact (hay không gian nhúng hyperbolic). Vì thế, tính hyperbolic của các không gian phức có thể được nghiên cứu từ cách nhìn của họ ánh xạ chuẩn tắc. Đã có nhiều nghiên cứu theo hướng nói trên, năm 1991 dựa trên ý tưởng của Aladro, M.Zaidenberg đã đưa ra khái niệm họ *s*-chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình trên các không gian phức. Trong luận văn này, chúng tôi muốn trình bày những kết quả về họ *s*-chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình nhiều biến dưới góc độ của giải tích phức hyperbolic. Chúng tôi cũng lưu ý đến mối liên hệ mật thiết về tính hyperbolic của không gian phức và tính chuẩn tắc của các ánh xạ thuộc họ *s*-chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình.

Nội dung của luận văn gồm có hai chương.

Trong chương 1, chúng tôi trình bày những vấn đề cơ bản về giải tích phức nhiều biến và giải tích hyperbolic nhằm chuẩn bị cho chương sau.

Chương 2 là nội dung chính của luận văn. Trong chương này chúng tôi trình bày khái niệm và các tiêu chuẩn metric của họ *s*-chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình nhiều biến, mối liên hệ giữa lý thuyết họ ánh xạ *s*-chuẩn tắc với tính hyperbolic của các không gian phức. Việc chứng minh chủ yếu dựa trên kiểu của bổ đề

Schwarz-Pick hoặc tính chất giảm khoảng cách và các bao hàm thức, bất đẳng thức đã được chứng minh chi tiết. Cuối cùng là phần kết luận của luận văn trình bày tóm tắt các kết quả đã đạt được. Luận văn không thể tránh khỏi những thiếu sót hạn chế, rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các độc giả.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Việt Đức. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới Thầy. Nhân dịp này em cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các Thầy, Cô đã giảng dạy cho em các kiến thức khoa học trong suốt quá trình học tập tại trường. Xin cảm ơn Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tạo điều kiện thuận lợi cho việc học tập của tôi. Cuối cùng tôi xin cảm ơn gia đình, người thân và bạn bè đã động viên giúp đỡ tôi trong suốt quá trình hoàn thành khoá học.

Thái Nguyên, *tháng 9 năm 2008*

Tác giả

CHƯƠNG 1: MỘT SỐ KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. GIẢ KHOẢNG CÁCH KOBAYASHI TRÊN KHÔNG GIAN PHỨC

Với $0 < r <$ [redacted] đặt [redacted], và gọi [redacted] là đĩa bán kính r, [redacted] là đĩa đơn vị trong .

1.1.1. Metric Bergman – Poincaré và chuẩn hyperbolic trên các đĩa

Metric Bergman – Poincaré trên đĩa đơn vị [redacted] và đĩa [redacted] được định nghĩa như sau :

ds^2 [redacted] ;

1 [redacted]

ds_r^2 [redacted] .

r^2 [redacted]

Khi đó, chuẩn của một vectơ tiếp xúc sinh bởi metric Bergman – Poincaré trên [redacted] và [redacted] được xác định bởi : Với z [redacted] (hoặc z [redacted]) và v [redacted] (hoặc v [redacted]) là vectơ tiếp xúc tại z, ta có

$|v|_{hyp,z}$ [redacted]

1 [redacted]

$|v|_{hyp,r,z}$ [redacted]

1 [redacted]

trong đó $|v|_{euc}$ là chuẩn Euclide trên .

Các chuẩn $|v|_{hyp,z}, |v|_{hyp,r,z}$ được gọi là chuẩn hyperbolic trên [redacted] tương ứng. Chú ý rằng tại $z = 0$ chuẩn hyperbolic bằng hai lần chuẩn Euclide. Để đơn giản ta ký hiệu $|v|_{hyp}$ và $|v|_r$ hoặc $H(v)$ và H [redacted] là các chuẩn hyperbolic trên [redacted] tương ứng .

1.1.2. Định nghĩa

Giả sử *X,Y* là các không gian với các hàm khoảng cách *d,d'* tương ứng. Ánh xạ $f : X$ [redacted] được gọi là giảm khoảng cách nếu

$$d'(f(x), f(y))$$ [redacted].

1.1.3. Khoảng cách Bergman – Poincaré

Khoảng cách sinh bởi metric Bergman – Poincaré trên đĩa đơn vị [redacted] ký hiệu [redacted], được gọi là khoảng cách Bergman – Poincaré. Do đó khoảng cách Bergman – Poincaré cũng chính là khoảng cách sinh bởi chuẩn hyperbolic xác định trong 1.1.1. Sử dụng định nghĩa khoảng cách sinh bởi hàm độ dài là chuẩn hyperbolic trên đĩa đơn vị mở [redacted]a có thể xác định công thức tính khoảng cách Bergman – Poincaré như sau:

[redacted]

1.1.4. Định nghĩa giả khoảng cách Kobayashi

Giả sử *X* là một không gian phức, *p* và *q* là hai điểm tùy ý của *X*. Ta gọi một dây chuyền chỉnh hình [redacted]nối *p* với *q* là tập hợp :

$$a_1, a_2, ..., a_n$$ [redacted]

sao cho

$$f_1(0)$$ [redacted]

trong đó Hol([redacted]là không gian các ánh xạ chỉnh hình từ đĩa đơn vị [redacted]vào không gian phức *X* được trang bị tô pô compact mở.

Ta đặt: [redacted] và định nghĩa $k_X(p,q)$ [redacted], trong đó infimum lấy theo tất cả các dây chuyền chỉnh hình [redacted]nối p với q .

Dễ thấy k_X thỏa mãn các tiên đề về giả khoảng cách, tức là :

$i)\ k_X(p,q)$ [redacted]

$ii)\ k_X(p,q)$ [redacted]

$iii)\ k_X(p,r)$ [redacted]

Nói cách khác k_X là một giả khoảng cách trên *X*. Giả khoảng cách k_X được gọi là giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức *X*.

1.1.5. Tính chất

Ta có thể dễ dàng chứng minh các tính chất sau của k_X :

i) k [redacted] và k [redacted] $,(w_j))$ [redacted] với mọi $(z_i),(w_j)$ [redacted].

ii) Nếu $f : X$ [redacted] là ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức *X*, *Y* thì

$$k_X(p,q)\ \text{[redacted]}.$$

Từ đó suy ra rằng nếu $f : X$ [redacted] là song ánh chỉnh hình thì

$$k_X(p,q)\ \text{[redacted]}.$$

iii) Đối với một không gian phức *X* tùy ý, hàm khoảng cách k_X là liên tục trên X [redacted]

iv) Nếu *X*, *Y* là các không gian phức thì với mọi x_1, x_2 [redacted] ta có

$$\max\ k_X(x_1,x_2), k_Y(y_1,y_2)\ \text{[redacted]}\ y_1),(x_2,y_2)).$$

1.1.6. Định nghĩa

Ta gọi g là Aut([redacted]) bất biến khi và chỉ khi với mọi f [redacted] thì f^*g [redacted].

(Metric Poincaré là Aut([redacted]) - bất biến).

1.2. KHÔNG GIAN PHỨC HYPERBOLIC

1.2.1. Định nghĩa

Không gian phức *X* được gọi là không gian hyperbolic nếu giả khoảng cách Kobayashi k_X là khoảng cách trên *X*, nghĩa là

$$k_X(p,q)\ \text{[redacted]}.$$

1.2.2. Tính chất

i) Nếu *X, Y* là không gian phức, thì X [redacted] là không gian hyperbolic khi và chỉ khi cả *X* và *Y* đều là các không gian hyperbolic.

ii) Nếu *X* là không gian con phức của không gian hyperbolic *Y* thì *X* cũng là hyperbolic.

iii) **Định lý Barth**

Giả sử X là không gian phức liên thông. Nếu X là hyperbolic thì k_X *sinh ra tô pô tự nhiên của X.*

1.2.3. Ví dụ

+) Đĩa [redacted]à đa đĩa [redacted] là hyperbolic.

+) $\mathbb{C}^n$ không là hyperbolic. Thật vậy, giả sử $k_{\mathbb{C}^n}$ là giả khoảng cách Kobayashi trên $\mathbb{C}^n$, ta sẽ chỉ ra rằng $k_{\mathbb{C}^n}$ [redacted] và do đó $k_{\mathbb{C}^n}$ không là khoảng cách trên $\mathbb{C}^n$. Với x, y [redacted]và [redacted], xét ánh xạ :

f : [redacted]

$z \mapsto x$ [redacted] p

Khi đó f là ánh xạ chỉnh hình, $f(0)$ [redacted] và $f(p)$ [redacted]. Do đó f là giảm khoảng cách đối với k [redacted] và $k_{\mathbb{C}^n}$ nên ta có:

k [redacted] $)); f(p))$.

Suy ra

$k_{\mathbb{C}^n}(x, y)$ [redacted].

Cho p dần tới 0 ta có $k_{\mathbb{C}^n}(x, y)$ [redacted]. Vậy $\mathbb{C}^n$ không là hyperbolic.

1.2.4. Bổ đề

Giả sử X, Y là các không gian phức, k'_Y *là hàm khoảng cách trên Y, liên tục với tô pô của* Y. *Giả sử* [redacted]*là ánh xạ chỉnh hình có tính chất giảm khoảng* *cách từ* k_X *tới* k'_Y *và* *B(y,s) là hình cầu mở ứng với khoảng cách* k'_Y *với* x [redacted]. *Khi đó tồn tại hằng số* $c(s)$ [redacted] *chỉ phụ thuộc vào s thoả mãn*

$$k_X(x,x') \text{[redacted]} (s) k_V(x,x')$$

với mọi x' [redacted] $s))$.

Chứng minh

Giả sử f_i : [redacted] với f_i [redacted] là một dây chuyền chỉnh hình trong *X* nối *x* với *x'*.

Ta xét hai trường hợp sau:

i) Tồn tại một chỉ số *j* sao cho [redacted].

Khi đó ta có

$$\text{[redacted]}))$$

$$\text{[redacted]}$$

$$\text{[redacted]}.$$

Từ đó $k_X(x,x')$ [redacted].

ii) [redacted] với mọi chỉ số *j*.

Trước hết ta có nhận xét:

Giả sử f : [redacted] là ánh xạ chỉnh hình, *r* và *q* là hai số thực thoả mãn 0 [redacted] <1. Khi đó tồn tại một phép chia [0 = t_0, t_1, …,t_n = *q*] của đoạn [0, *q*] trong [redacted], có các số r_k (k=1,…,N) thoả mãn 0 [redacted] và có các tự đẳng cấu g_k : [redacted] sao cho g_k ánh xạ [0,r_k] lên [t_{k-1}, t_k]. Nếu ta thay *f* bởi $f \circ g_1, ..., f \circ g_N$ thì ta nhận được từ *f* một dây chuyền chỉnh hình nối các điểm $f(0)$ với $f(q)$, nói cách khác ta có phép chia đoạn [0, *q*] thoả mãn

0 [redacted] mà dây chuyền chỉnh hình vẫn có cùng độ dài Kobayashi.

Ta áp dụng nhận xét trên cho mỗi hàm f_i ($i = 1, .. ., m$) của dây chuyền chỉnh hình đã cho. Chọn r (0 [redacted]) thoả mãn

k [redacted] với z [redacted].

Khi đó r chỉ là một hàm đối với s. Theo nhận xét trên, không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng dây chuyền chỉnh hình được lấy thoả mãn q_i [redacted] với mọi i. Nếu dây chuyền chỉnh hình mới này thoả mãn điều kiện của i) thì ta có điều phải chứng minh. Trong trường hợp còn lại ta có

$f_i(0)$ [redacted].

Vì k'_Y([redacted], ta nhận được

f_i([redacted] với mọi i.

Tồn tại số c [redacted] sao cho

k [redacted] với z [redacted].

Khi đó tổng Kobayashi thoả mãn bất đẳng thức

[redacted]

[redacted])

[redacted]').

Thật vậy, f_i([redacted] với mọi i. Vì vậy nếu ta ký hiệu bởi m_r là phép nhân với r, thì $\{f_1 \circ m_r, ..., f_m \circ m_r\}$ là một dây chuyền chỉnh hình trong V. Vì vậy ta cũng có $k_X(x,x')$ [redacted]').

Từ cả hai trường hợp trên có ra điều phải chứng minh.

Sau đây là một số tiêu chuẩn nhận biết tính hyperbolic của các không gian phức thông qua các ánh xạ chỉnh hình.

1.2.5. Mệnh đề (Bổ đề Eastwood)

Giả sử [redacted] *là ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức. Giả sử Y là hyperbolic (đầy) và với mỗi điểm* y [redacted] *có lân cận U của y sao cho* [redacted] *là hyperbolic (đầy) thì X là hyperbolic (đầy).*

Mệnh đề trên là trường hợp riêng của mệnh đề sau

1.2.6. Mệnh đề

Giả sử X,Y là các không gian phức và $k_Y^{'}$ *là hàm khoảng cách trên Y mà xác định tô pô của Y. Giả sử* [redacted] *là ánh xạ chỉnh hình và*

i) [redacted] *là giảm khoảng cách từ* k_X *tới* $k_Y^{'}$.

ii) *Với mỗi điểm* y [redacted] *có một lân cận mở U sao cho* [redacted] *là hyperbolic.*

Khi đó X là hyperbolic.

Chứng minh

Lấy x, x' [redacted]

+ Nếu [redacted] thì từ giả thiết [redacted] là giảm khoảng cách ta có $k_X(x, x')$ [redacted], do đó X là hyperbolic.

+ Nếu [redacted]: theo giả thiết có một lân cận mở U của y mà [redacted] là hyperbolic. Từ đó tồn tại $s > 0$ sao cho $k_Y^{'}$ - cầu $B(y, 2s)$ [redacted].

Mặt khác [redacted]s) là hyperbolic vì nó là không gian con của không gian hyperbolic [redacted]. Suy ra $k_X(x, x')$ [redacted]. Vậy X là hyperbolic.

1.3. KHÔNG GIAN PHỨC HYPERBOLIC BRODY

1.3.1. Định nghĩa

Giả sử X là không gian phức. Ta nói X là hyperbolic Brody nếu với mỗi ánh xạ chỉnh hình $f :$ □ [redacted] đều là ánh xạ hằng.

Các kết quả sau được trình bày trong [1]

1.3.2. Mệnh đề

Nếu X là không gian phức hyperbolic, thì mọi ánh xạ chỉnh hình $f :$ □ [redacted] *đều là ánh xạ hằng.*

1.3.3. Định lý Brody

Giả sử X là không gian phức compact . Nếu X không là hyperbolic thì tồn tại một ánh xạ chỉnh hình khác hằng $f :$ £ [redacted]

1.3.4. Định lý

Giả sử X là không gian phức compact. Khi đó X là hyperbolic Brody khi và chỉ khi X là hyperbolic Kobayashi.

1.4. KHÔNG GIAN PHỨC HYPERBOLIC ĐẦY

1.4.1. Định nghĩa

Không gian phức *X* được gọi là hyperbolic đầy nếu *X* là hyperbolic và mọi dãy Cô si đối với khoảng cách k_X đều hội tụ.

Ví dụ : Các đĩa và đa đĩa là hyperbolic đầy.

1.4.2. Mệnh đề

Giả sử X là không gian hyperbolic liên thông. Khi đó X là hyperbolic đầy nếu và chỉ nếu với mọi x [redacted] *và* r [redacted] *mọi hình cầu đóng* $\overline{B}(x,r)$ *là compact.*

Để chứng minh mệnh đề trên ta cần chứng minh các bổ đề sau:

Giả sử *X* là không gian phức và *Y* là tập con tuỳ ý, r [redacted]. Đặt

$U(Y,r)$ [redacted]

Nói cách khác $U(Y,r)$ là tập các điểm trong *X* thoả mãn khoảng cách tới một điểm nào đó của *Y* nhỏ hơn *r*.

1.4.3. Bổ đề

Giả sử X là không gian phức, a [redacted] *và* r, r' [redacted]. *Khi đó*

$U\ U(a,r), r'$ [redacted].

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh $U\ U(a,r),r'$ [redacted].

Lấy x [redacted] $r),r'$, theo định nghĩa tập U, có điểm y [redacted] sao cho

$$k_X(x,a)$$ [redacted]

Do đó x [redacted]

Ngược lại, với bất kỳ x [redacted], lấy [redacted] sao cho

$$k_X(a,x)$$ [redacted]

Tồn tại dây chuyền chỉnh hình trong X nối a với x, gọi đường nối [redacted] là ảnh của dây chuyền đó trong X, thỏa mãn

$$k_X(a,x)$$ [redacted]

Gọi j là số lớn nhất sao cho độ dài của đường nối

$$L$$ [redacted]

Chia cung [redacted] thành hai cung [redacted] và [redacted] bởi điểm x_j trên [redacted] sao cho

$$L$$ [redacted]

Khi đó, $k_X(a,x_j)$ [redacted], tức là x_j [redacted]. Xét đường nối

[redacted]

ta có

$$k_X(x,x_j)$$ [redacted]

Vậy tồn tại x_j [redacted] sao cho $k_X(x_j,x)$ [redacted] Từ đó x [redacted] $r),r'$. Bổ đề được chứng minh.

1.4.4. Bổ đề

Giả sử X là không gian con phức compact địa phương với hàm khoảng cách d thỏa mãn đẳng thức

$$U\ U(a,r),r'$$ [redacted]

với mọi a [redacted] *và* r, r' [redacted]. *Khi đó với* a [redacted] *và* r [redacted], *nếu tồn tại* s [redacted] *sao cho* $\overline{U}(x,s)$ *là compact với mỗi* x [redacted] *thì* $\overline{U}(a,r)$ *là compact .*

Chứng minh

Vì X là compact địa phương nên có $t > 0$ sao cho $t < r$ và $\overline{U}(a,t)$ là compact. Ta chỉ cần chứng minh $\overline{U}(a,t$ [redacted] là compact. Lấy x_n là một dãy trong $\overline{U}(a,t$ [redacted]. Ta chứng minh x_n có dãy con hội tụ. Theo giả thiết, với mỗi n tồn tại điểm y_n [redacted] sao cho

$$d(x_n, y_n)$$ [redacted]

Vì $\overline{U}(a,t)$ là compact, bằng cách lấy dãy con nếu cần ta có thể giả thiết y_n hội tụ với y [redacted] Khi đó $\overline{U}(y,s)$ chứa x_n với n đủ lớn. Vì $\overline{U}(y,s)$ là compact theo giả thiết, nên dãy x_n [redacted]. Rõ ràng x [redacted]. Bổ đề được chứng minh.

1.4.5. Bổ đề

Giả sử X là không gian con phức compact địa phương với hàm khoảng cách d thỏa mãn đẳng thức

$$U\ U(a,r), r'$$ [redacted]

với mọi a [redacted] *và* r, r' [redacted] *Khi đó X là đầy đối với hàm khoảng cách d nếu và chỉ nếu bao đóng* $\overline{U}(x,r)$ *là compact với mọi* x [redacted] *và với mọi số dương r.*

Chứng minh

Nếu mọi hình cầu đóng $\overline{U}(a,r)$ là compact với mọi a [redacted] thì hiển nhiên X là đầy. Thật vậy, giả sử x_n là dãy Côsi trong X, khi đó x_n bị chặn, do đó tồn tại $r > 0$, x [redacted] sao cho x_n [redacted]. Theo giả thiết $\overline{U}(x,r)$ là compact, nên tồn tại dãy con

x_{n_k} [redacted].

Mà x_n là dãy cơ bản nên x_n [redacted]. Vậy X là đầy.

Ngược lại, giả sử X là đầy. Theo bổ đề 1.4.4, ta chỉ cần chứng minh tồn tại số $s > 0$ sao cho với mọi dãy x[redacted] hình cầu đóng $\overline{U}(s,x)$ là compact. Giả sử ngược lại, khi đó tồn tại x_1[redacted]sao cho $\overline{U}(x_1,1/2)$ không là compact. Theo bổ dề 1.4.4, tồn tại x_2 [redacted]2) sao cho $\overline{U}(x_1,1/2^2)$ không là compact. Lập luận tương tự, tồn tại x_n [redacted]sao cho $\overline{U}(x_n,1/2^n)$ không là compact. (*)

Theo giả thiết, dãy Côsi x_n hội tụ tới điểm x. Vì X là compact địa phương, tồn tại hình cầu đóng $\overline{U}(x,t)$ với $t > 0$ nào đó thỏa mãn $\overline{U}(x_n,1/2^n)$ nằm trong $\overline{U}(x,t)$ với n đủ lớn, và do đó $\overline{U}(x_n,1/2^n)$ phải là compact. Điều này mâu thuẫn với (*).

Chứng minh mệnh đề 1.4.2

Suy ra từ các bổ đề 1.4.3 và 1.4.5.

1.4.6. Định lý

Giả sử X là không gian con phức compact tương đối của không gian phức Y. Nếu $\overline{X}$ là hyperbolic Brody trong Y, thì tồn tại một lân cận mở của $\overline{X}$ trong Y mà là hyperbolic.

Chứng minh

(Xem định lý 4.2.1 trong [1])

Định lý sau là một ứng dụng của định lý Brody trong việc xét tính hyperbolic qua các ánh xạ chỉnh hình riêng.

1.4.7. Định lý

Giả sử [redacted] *là ánh xạ chỉnh hình riêng giữa các không gian phức. Khi đó*

i) *Nếu Y là hyperbolic và mỗi thớ* [redacted] *là hyperbolic với mọi* y[redacted] *thì X là* *hyperbolic .*

ii) *Nếu có điểm* y_0 [redacted] *sao cho* [redacted] *là hyperbolic, thì tồn tại một lân cận U của y_0 trong Y sao cho* [redacted] *là hyperbolic với mọi* y [redacted].

Chứng minh

i) Theo bổ đề Eastwood ta chỉ cần chứng minh rằng với y [redacted] cho trước, tồn tại một lân cận mở U của y sao cho [redacted] là hyperbolic.

Lấy U là lân cận mở của y sao cho $\overline{U}$ là compact. Khi đó [redacted] là mở và bao đóng của nó nằm trong [redacted] và do đó là compact (vì [redacted] là ánh xạ riêng và $\overline{U}$ là compact). Theo định lý Brody nếu [redacted] không là hyperbolic thì tồn tại một ánh xạ chỉnh hình khác hằng

$f :$ [redacted] (*).

Với mọi x, x' [redacted] ta có

$k_Y($ [redacted].

Suy ra

$k_Y($ [redacted]

mà Y là hyperbolic nên

[redacted]

Vậy [redacted] là ánh xạ hằng hay [redacted]. Do đó $f($ $)$ [redacted]

Theo giả thiết [redacted] là hyperbolic nên theo mệnh đề 1.3.2 ta có $f :$ [redacted] cũng là ánh xạ hằng. Điều này mâu thuẫn với (*). Tránh mâu thuẫn này thì [redacted] là hyperbolic. Vậy X là hyperbolic.

ii) Vì [redacted] là ánh xạ riêng y_0 là tập compact nên [redacted] là compact, theo định lý 1.4.6 có lân cận V của [redacted], V là hyperbolic, do đó tồn tại lân cận U của y_0 sao cho [redacted] (**).

Suy ra với mọi y [redacted] có

[redacted] V là hyperbolic.

Vậy [redacted] là hyperbolic với mọi y [redacted]

Chứng minh (**): Giả sử (**) không xảy ra suy ra tồn tại dãy x_n [redacted] sao cho

[redacted].

Gọi K là lân cận compact của y_0 trong Y, do [redacted] là ánh xạ riêng suy ra [redacted] là compact trong X. Vì y_n [redacted] nên tồn tại n_0 để

[redacted] thì y_n [redacted]

Do đó tồn tại dãy x_{n_k} [redacted] sao cho x_{n_k} [redacted], mà [redacted] liên tục nên

[redacted].

Suy ra x_0 [redacted]. Vậy x_{n_k} [redacted] nên tồn tại k_0 [redacted] sao cho

[redacted] thì x_{n_k} [redacted]

Điều này mâu thuẫn với giả thiết x_n [redacted] Do vậy

[redacted]

V là hyperbolic nên [redacted] là hyperbolic [redacted] Định lý được chứng minh.

1.4.8. Mệnh đề

Giả sử X là không gian hyperbolic đầy và f là một hàm chỉnh hình bị chặn. Khi đó tập mở X_f [redacted] *là hyperbolic đầy.*

Chứng minh

Do $f : X$ [redacted] là hàm bị chặn nên nếu nhân f với số c [redacted] đủ nhỏ ta có thể giả thiết $f : X$ [redacted]. Giả sử x_n là dãy k_{X_f} - Côsi, do X_f [redacted] nên

k_{X_f} [redacted] suy ra x_n là dãy k_X - Côsi, X đầy nên x_n hội tụ đến x [redacted]. Ta chứng minh x [redacted].Ta có

$$k\ [redacted]),\ f(x_m))\ [redacted]$$

Suy ra $f(x_n)$ là dãy k [redacted]-Côsi mà [redacted] là hyperbolic đầy nên

mà k [redacted] nên $f(x_n)$ hội tụ theo k [redacted] đến y. Lại do f liên tục và

x_n [redacted], $f(x_n)$ [redacted] suy ra y [redacted] do đó x [redacted] đầy.

Rõ ràng X_f [redacted] X là hyperbolic nên X_f hyperbolic.

Vậy X_f là hyperbolic đầy (đpcm).

1.5. KHÔNG GIAN PHỨC NHÚNG HYPERBOLIC

1.5.1. Định nghĩa

Giả sử X là không gian con phức của không gian phức Y. Khi đó ta nói X là nhúng hyperbolic trong Y nếu với mọi x, y [redacted], tồn tại các lân cận mở U của x và V của y trong Y sao cho

$$k_X(X\ [redacted]$$

1.5.2. Nhận xét

i) Không gian phức X là hyperbolic khi và chỉ khi X là nhúng hyperbolic trong chính nó.

ii) Nếu X_1 là nhúng hyperbolic trong Y_1 và X_2 là nhúng hyperbolic trong Y_2 thì X_1 [redacted] là nhúng hyperbolic trong Y_1 [redacted].

iii) Nếu có hàm khoảng cách [redacted] trên $\overline{X}$ thỏa mãn

$$k_X(x, y)\ [redacted]$$

thì X là nhúng hyperbolic trong Y.

1.5.3. Định lý

Giả sử X là không gian con phức của không gian phức Y. Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

HI1. *X là nhúng hyperbolic trong Y.*

HI2. *X là hyperbolic và nếu* x_n , y_n *là các dãy trong X thỏa mãn* x_n [redacted] *thì x = y.*

HI3. *Giả sử* x_n , y_n *là các dãy trong X thỏa mãn* x_n [redacted] *Khi đó nếu* $k_X(x_n, y_n)$ [redacted] *khi* n [redacted] *thì x = y.*

HI4. *Giả sử H là hàm độ dài trên Y. Khi đó tồn tại các hàm liên tục dương* [redacted] *trên Y sao cho:*

$f^*($ [redacted]

trong đó H[redacted] *là chuẩn hyperbolic trên đĩa đơn vị* [redacted].

HI5. *Tồn tại hàm độ dài H trên Y sao cho với mọi f* [redacted] *ta có*

f^*H [redacted].

1.5.4. Định lý (Kiernan)

Giả sử X là không gian con phức, compact tương đối trong không gian phức Y. Khi đó X là nhúng hyperbolic trong Y nếu và chỉ nếu Hol([redacted] *là compact tương đối trong* Hol([redacted]

Chứng minh

Giả sử Hol([redacted] là compact tương đối trong Hol([redacted] nhưng *X* không là nhúng hypebolic trong *Y*. Theo định lý 1.5.3, **HI5**, thì với mỗi hàm độ dài trên *Y* và với mỗi số nguyên dương *n*, tồn tại một ánh xạ chỉnh hình

f_n : [redacted] và z_n [redacted]

sao cho

$|df_n(z_n)v|$ [redacted] với mọi v [redacted] (*).

Do tính thuần nhất của [redacted] đối với nhóm $\mathrm{Aut}($[redacted] ta có thể giả sử z_n [redacted]. Vì X compact tương đối trong Y và $f_n(z_n)$ [redacted] nên tồn tại y [redacted] thỏa mãn $f_n(0)$ [redacted]. Theo giả thiết $\mathrm{Hol}($[redacted] là compact tương đối trong $\mathrm{Hol}($[redacted] sau khi lấy dãy con ta có thể giả thiết rằng f_n hội tụ đều tới f trên một lân cận của 0. Do đó $f'_n(0)$ [redacted], điều này mâu thuẫn với (*). Vậy X là nhúng hypebolic trong Y.

Ngược lại, giả sử X nhúng hypebolic trong Y. Theo Ascoli, vì X là compact tương đối trong Y nên $f(x)| f$ [redacted] $X)$ compact tương đối trong Y. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $\mathrm{Hol}($[redacted] là đồng liên tục đối với một hàm khoảng cách d_H sinh bởi một hàm độ dài H trên Y. Nhưng theo định lý 1.5.3, **HI5** do X nhúng hyperbolic trong Y nên tồn tại hàm độ dài H trên Y sao cho

f^*H [redacted] với mọi f [redacted].

Suy ra

$d_H(f(x), f(y))$ [redacted]

Mà [redacted] liên tục nên tập các ánh xạ chỉnh hình $\mathrm{Hol}($[redacted] là đồng liên tục.

Vậy $\mathrm{Hol}($[redacted] là compact tương đối trong $\mathrm{Hol}($[redacted]. Định lý được chứng minh.

1.6. METRIC VI PHÂN ROYDEN-KOBAYASHI

1.6.1. Định nghĩa

Giả sử M là một đa tạp phức và TM là phân thớ tiếp xúc của M. Một ánh xạ $F: TM$ [redacted] được gọi là metric vi phân trên M nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau :

i) $F(0_x)$ [redacted] trong đó 0_x là vectơ không của T_xM .

ii) Với mọi [redacted] và a [redacted] thì $F(a$[redacted].

1.6.2. Định nghĩa

Cho X là không gian phức.

Giả sử x là điểm trong X. Nón tiếp xúc $T_x X$ gồm các vectơ có dạng $f_*(u)$ trong đó u [redacted] và f [redacted].

Khi đó $K_X : T_x X$ [redacted] được định nghĩa bởi :

$$K_X(v)$$ [redacted].

Trong đó $\|u\|$ là độ dài của vectơ tiếp xúc u được đo bởi metric Poincaré ds^2 của đĩa đơn vị [redacted] và infimum lấy theo mọi f [redacted] và u [redacted] sao cho $f_*(u)$ [redacted]

Nếu x là điểm chính quy, thì mỗi v [redacted] luôn tồn tại vectơ u [redacted] sao cho $f_*(u)$ [redacted] do đó $K_X(v)$ [redacted]

Nếu x là điểm kỳ dị và nếu không tồn tại u như trên thì ta đặt $K_X(v)$ [redacted]

Ta gọi K_X là metric vi phân Royden – Kobayashi trên không gian phức X.

1.6.3. Một số tính chất của metric vi phân Royden – Kobayashi

a) Nếu X và Y là hai không gian phức, thì

$$K_Y(f_*(v))$$ [redacted] với f [redacted]

Đặc biệt dấu bằng xảy ra khi f là song ánh chỉnh hình.

b) + Trong đĩa đơn vị [redacted], K [redacted] đồng nhất với metric Bergman – Poincaré, tức là

$$K_D^2$$ [redacted]

+ $K_{\mathbb{C}^m}$ [redacted]

c) Trong không gian phức X ta có

$$K_X(f_*(u))$$ [redacted]

Hơn nữa, nếu E là một hàm tựa chuẩn xác định trên TX thỏa mãn

$$E(f_*u)$$ [redacted]

thì

$$E(v)$$ [redacted].

d) Giả sử X,Y là các không gian phức, ta có

K_X [redacted] [redacted] $(u), K_Y(v)$ với u [redacted]

e) Giả sử X là không gian phức và [redacted] là không gian phủ chỉnh hình của X. Khi đó $K_{\tilde{X}}$ [redacted].

f) Nếu X là đa tạp phức, thì K_X là hàm nửa liên tục trên trên TX. Nếu X là không gian phức hypebolic đầy thì K_X liên tục.

g) Gọi E là hàm độ dài nào đó của X sao cho E [redacted], thế thì

$$E(f_*u)$$ [redacted].

Vậy nếu gọi [redacted] là khoảng cách trên X sinh bởi E thì mọi ánh xạ chỉnh hình $f:($ [redacted] là giảm khoảng cách . Ta có [redacted] từ đó X là hypebolic.

CHƯƠNG 2:
HỌ S- CHUẨN TẮC CÁC ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH VÀ TÍNH HYPERBOLIC CỦA KHÔNG GIAN PHỨC

Nội dung chính của chương này là trình bày một số kết quả của họ s-chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình. Đồng thời trình bày một số ứng dụng của họ s-chuẩn tắc trong việc nghiên cứu tính hyperbolic hay tính nhúng hyperbolic của các không gian phức. Ta biết rằng các metric hyperbolic đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết các hàm chuẩn tắc [5]. Ở đây chúng tôi muốn nhấn mạnh mối liên hệ sâu sắc giữa lý thuyết các hàm chuẩn tắc với giải tích hyperbolic. Cụ thể, các ánh xạ chuẩn tắc vào các không gian phức tùy ý đều có những tính chất quan trọng nhất của các ánh xạ chỉnh hình vào không gian phức hyperbolic compact (hoặc nhúng hyperbolic). Chẳng hạn chúng thỏa mãn định lý tương tự như định lý Kiernan về tính nhúng hyperbolic hay tiêu chuẩn Eastwood về tính hyperbolic. Cuối chương là một tiêu chuẩn về tính s – chuẩn tắc dưới dạng không tồn tại các đường cong nguyên. Kết quả này là một mở rộng tiêu chuẩn Brody cho tính hyperbolic [2] và tiêu chuẩn về tính chuẩn tắc của Hahn [4].

2.1. HỌ S-CHUẨN TẮC CÁC ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH VÀ TIÊU CHUẨN METRIC CHO TÍNH S- CHUẨN TẮC

Cho X và Y' là các không gian phức. Y là tập con compact tương đối trong Y'.

2.1.1. Định nghĩa

Họ $\mathcal{F}$ [redacted] Y được gọi là *s-chuẩn tắc* nếu họ các ánh xạ hợp thành

$\mathcal{F} \circ$ Hol [redacted]

là không gian con compact tương đối trong Hol [redacted].

Rõ ràng nếu họ $\mathscr{F}$ là s-chuẩn tắc thì họ con của họ $\mathscr{F}$ cũng là s-chuẩn tắc (vì tập con của tập compact tương đối cũng là tập compact tương đối).

2.1.2. Định nghĩa

Ánh xạ f $:X$ [redacted] gọi là chuẩn tắc nếu họ $\mathscr{F}=$ f là s-chuẩn tắc.

2.1.3. Chú ý

+ Nếu Z là không gian con của không gian phức X và $f : X$ [redacted] là ánh xạ chuẩn tắc thì ánh xạ hạn chế $f|_Z : Z$ [redacted] là ánh xạ chuẩn tắc.

+ Nếu [redacted] là ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức và ánh xạ $f : X$ [redacted] là chuẩn tắc thì $f \circ$ [redacted] là ánh xạ chuẩn tắc.

+ Cho $f_i : X_i$ [redacted] **(**i [redacted]) là các ánh xạ chuẩn tắc thì tích trực tiếp f_1 [redacted] f_2 $: X_1$ [redacted] X_2 [redacted] Y_2 là ánh xạ chuẩn tắc.

Chứng minh

+ Vì $f : X$ [redacted] là ánh xạ chuẩn tắc suy ra $f \circ \mathrm{Hol}($[redacted] là compact tương đối trong $\mathrm{Hol}($[redacted] (1). Mà $f|_Z \circ \mathrm{Hol}($[redacted] nên $f|_Z \circ \mathrm{Hol}($[redacted] cũng là tập compact tương đối của $\mathrm{Hol}($[redacted]. Do đó $f|_Z$ là chuẩn tắc.

+ Xét dãy

$f \circ$ [redacted] với [redacted]

Vì [redacted] chỉnh hình nên [redacted] chỉnh hình. Do đó

$(f \circ$ [redacted].

Mà f chuẩn tắc nên tồn tại dãy con $\{f \circ ($[redacted] của dãy $f \circ$ [redacted] hội tụ trong Hol([redacted]. Suy ra $f \circ$[redacted]là compact tương đối trong Hol([redacted]. Vậy $f \circ$[redacted] là chuẩn tắc.

+ Xét dãy

f_1[redacted].

Ta có

f_1[redacted].

Vì f_1 chuẩn tắc nên với dãy

$f_1 \circ$[redacted]

tồn tại dãy con $f_1 \circ$[redacted] hội tụ đến $f_1 \circ$[redacted]. Tương tự vì f_2 chuẩn tắc nên tồn tại dãy $f_2 \circ y_{n_k}$ là dãy con của $\{f_2 \circ y_n\}_n$[redacted]hội tụ đến $f_2 \circ y$[redacted]. Nên tồn tại dãy

f_1[redacted]

hội tụ đến $(f_1$[redacted]thuộc Hol([redacted].

Vậy

f_1[redacted]

compact tương đối trong Hol([redacted], do đó f_1 [redacted] f_2 là chuẩn tắc. Tổng quát hơn ta có mệnh đề

2.1.4. Mệnh đề

+ *Nếu Z là không gian con của X và $\mathcal{F}$ là họ s- chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh* *hình từ X vào Y thì họ* $\mathcal{F}|_Z$ [redacted] *là họ s- chuẩn tắc.*

+ Nếu [redacted] *là ánh xạ chỉnh hình giữa các không gian phức và* $\mathcal{F}$ *là họ s- chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình từ X vào Y thì họ*

$\mathcal{F} \circ$ [redacted]

là họ s- chuẩn tắc.

+ Nếu $\mathcal{F}_i$ *là các họ s- chuẩn tắc từ* X_i *vào* Y_i *với* $i = \overline{1,2}$ *thì*

$\mathcal{F}_1$ [redacted]

là họ s- chuẩn tắc.

Việc chứng minh hoàn toàn tương tự như trong 2.1.3.

2.1.5. Một số ký hiệu

Cho k_X là giả khoảng cách Kobayashi trên X. Nếu X là đa tạp phức và K_X là giả metric vi phân Royden – Kobayashi trên TX. Với metric [redacted] tuỳ ý trên Y ta ký hiệu Hol_c $(X,Y,$[redacted]$)$ là họ tất cả các ánh xạ f [redacted]ol(X,Y) thoả mãn bất đẳng thức:

f^* [redacted].

Nếu X và Y là trơn và [redacted] được sinh bởi metric vi phân nửa liên tục trên [redacted] trên TY thì bất đẳng thức trên tương đương với bất đẳng thức

f^* [redacted].

2.1.6. Bổ đề

Cho [redacted] *là metric Hermit trên Y' và* [redacted] *là metric trên Y. Nếu* [redacted] *thì* $\mathrm{Hol}_c(X,Y,$[redacted] *là họ s - chuẩn tắc với bất kì số c* [redacted].

Chứng minh

Ta phải chứng minh họ $\mathscr{F}$ [redacted] là compact tương đối trong Hol [redacted].

+ [redacted] ta có $\mathscr{F}_x$ [redacted] mà Y compact tương đối trong Y' nên $\mathscr{F}_x$ compact tương đối trong Y'. (1)

+ [redacted] ta có h [redacted] với [redacted] và f [redacted] $,Y,$ [redacted]. Vì

f^* [redacted] ck_X

nên [redacted] z' [redacted] ta có

d [redacted].

Lại do [redacted] nên

d [redacted]

mà k_X liên tục nên họ $\mathscr{F}$ đồng liên tục. (2)

Từ (1), (2) và theo định lý Ascoli ta có đpcm.

Để chứng minh tiêu chuẩn metric của tính s - chuẩn tắc trong định lý 2.1.9 ta cần đưa ra khái niệm KRG -metric. Và từ đây ta giả thiết rằng X *và* Y' là nhẵn.

2.1.7. Định nghĩa

Giả sử $\{U_i\}_{i=\overline{1,n}}$ là một phủ hữu hạn của bao đóng $\overline{Y}$ của Y trong Y'. Đặt $U_i^*=U_i$ [redacted] (với $i = \overline{1,n}$). Xét H [redacted] $\}$ trong đó $K_{U_i^*}$ là các giả metric vi phân Royden – Kobayashi trên U_i^*. Đặt G : [redacted] Metric G và hàm khoảng cách g tương ứng được gọi là metric Kobayashi- Royden-Green và ký hiệu là KRG - metric.

2.1.8. Chú ý

Rõ ràng KRG-metric phụ thuộc vào sự lựa chọn phủ $\{U_i\}_{i=\overline{1,n}}$. Với một phủ đủ nhỏ thì các metric G và H trong 2.1.7 là tương đương. G là metric đầy với một phủ thích hợp khi và chỉ khi Y là đa tạp con hyperbolic đầy địa phương của Y'.

2.1.9. Định lý

Cho G là KRG-*metric trên Y. Họ* $\mathcal{F}$ [redacted]Y *là s-chuẩn tắc khi và chỉ khi* $\mathcal{F}$ [redacted]$,Y,G)$ *với một hằng số c* [redacted] *nào đó.*

Chứng minh

+ Nếu $\mathcal{F}$ [redacted]$,Y,G)$ với c [redacted] thì $\mathcal{F}$ là s-chuẩn tắc. Thật vậy từ định nghĩa của KRG – metric ta có G [redacted] với mọi metric [redacted] trên Y'. Theo bổ đề 2.1.6 ta có $\mathrm{Hol}_c\,(X,Y,G)$ là họ s-chuẩn tắc, mà họ con của họ s-chuẩn tắc cũng là họ s-chuẩn tắc, do đó $\mathcal{F}$ là s-chuẩn tắc.

+ Ngược lại nếu $\mathcal{F}$ [redacted]Y là s-chuẩn tắc ta chứng minh

$\mathcal{F}$ [redacted]$,Y,G)$ với c [redacted].

Giả sử $\mathcal{F}$ [redacted]$,Y,G)$, với mọi c [redacted]. Khi đó tồn tại các dãy

f_n [redacted] $,\{v_n\}$ [redacted]X

để

$K_X(v_n)$ [redacted] n và $|df_n(v_n)|_G$ [redacted] với mỗi n [redacted].

Theo định nghĩa của K_X, tồn tại các dãy

$\{$[redacted] và $\{u_n\}$ [redacted]

thoả mãn

$$|u_n| [redacted] \text{ và } d [redacted], \text{ với } n [redacted].$$

Đặt r_n [redacted], y_n z [redacted] với [redacted]. Xét hai dãy các đĩa chỉnh hình

$$\Phi_n [redacted]$$

và

$$\Psi_n [redacted].$$

Vì họ $\mathcal{F}$ là s-chuẩn tắc nên tồn tại các dãy con của Φ_n và Ψ_n hội tụ. Có thể giả thiết rằng

$$\Phi_n [redacted] \Psi_n [redacted],$$

với Φ [redacted], Ψ [redacted]').

Ta chứng minh Ψ = const. Cố định một điểm z_0 [redacted] tuỳ ý, đặt $p_0 := \Psi(0)$ và $q_0 := \Psi(z_0)$ (p_0, q_0 [redacted]l(Y)). Xét các dãy

$$z_n [redacted], \quad z_n [redacted],$$

$$q_n [redacted], \quad p_n [redacted]$$

Ta có

$$q_n [redacted]$$

[redacted].

Đồng thời

$$p_n [redacted]$$

[redacted].

Vì Φ_n [redacted] nên [redacted] sao cho [redacted] thì

[redacted] với n đủ lớn.

Đặc biệt, ta có

[redacted] với n đủ lớn

(vì z [redacted] nên $|z|$ đủ nhỏ và z_n [redacted], $\Phi_n(0)$ [redacted]),

hay q_n [redacted]. Mặt khác q_n [redacted] nên $p_0 = q_0$. Tức là $\Psi(z_0)$ [redacted] với z_0 tuỳ ý thuộc [redacted].

Lấy g là KRG-metric ứng với phủ U_i ^n_i [redacted] của $\bar{Y}$. Lấy p_0 [redacted]. Do Ψ_n [redacted] và tính liên tục của Ψ_n, Ψ [redacted] nên ta có với n đủ lớn thì $\Psi_n($ [redacted] Với những giá trị đó của n thì

$$K_{U_i^*}\left(d\Psi_n\left(\frac{d}{dz}\bigg|_0\right)\right) < \frac{1}{2}.$$

Từ $d\Psi_n\left(\frac{d}{dz}\bigg|_0\right) = df_n(v_n)$, ta có

$$|df_n(v_n)|_H < \frac{1}{2}.$$

Nhưng $|df_n(v_n)|_G = 1$ và do đó $|df_n(v_n)|r = 1$. Từ đó suy ra

$$\bigg|d\Psi$$ [redacted]

Điều này mâu thuẫn với Ψ [redacted]. Tránh mâu thuẫn này thì $\mathcal{F}$ [redacted] $,Y,G)$. Định lý được chứng minh.

Định lý sau là một tiêu chuẩn metric đối với họ s - chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình.

2.1.10. Định lý

Họ $\mathcal{F}$ [redacted] Y *là* s - *chuẩn tắc nếu và chỉ nếu* $\mathcal{F}$ [redacted] $,Y,$ [redacted] *với hằng số* c [redacted] *nào đó và* [redacted] *là metric Hermit trên* Y'.

Chứng minh

+ Nếu $\mathcal{F}$ [redacted] $,Y,$ [redacted] thì vì $Hol_c(X,Y,$ [redacted] là họ s-chuẩn tắc nên $\mathcal{F}$ là s-chuẩn tắc.

+ Nếu $\mathcal{F}$ là s-chuẩn tắc chứng minh $\mathcal{F}$ [redacted] $,Y,$ [redacted].

Thật vậy do $\mathcal{F}$ [redacted] Y là họ s - chuẩn tắc nên theo định lý 2.1.9, ta có

$\mathcal{F}$ [redacted] $,Y,G)$.

Mà G [redacted], suy ra với mọi f [redacted] thì

f^* [redacted]

Do đó

f [redacted] $,Y,$ [redacted] Vậy $\mathcal{F}$ [redacted] $,Y,$ [redacted].

Định lý được chứng minh.

2.1.11. Hệ quả

Cho [redacted] *là metric Hermit trên* Y' *và* G *là* KRG-*metric trên* Y. *Giả sử* $\mathcal{F}$ [redacted] Y *là họ thoả mãn*

$|df(v)|_\rho$ [redacted] , [redacted]

với hằng số c [redacted] *nào đó. Khi đó tồn tại hằng số* c_1 [redacted] *thoả mãn*

$$|df(v)|_G \text{ [redacted]}, \text{ [redacted]}.$$

Chứng minh

Vì $\mathscr{F}$ thoả mãn $|df(v)|_\rho$ [redacted], [redacted] với số c [redacted] nào đó nên

với mọi f [redacted] có $f^*\rho|_Y$ [redacted] suy ra f [redacted] $,Y,\rho|_Y)$. Vậy theo 2.1.10

ta có $\mathscr{F}$ là họ s- chuẩn tắc . Do đó theo 2.1.9 thì $\mathscr{F}$ [redacted] $,Y,G)$ với c_1 [redacted]

nào đó. Nghĩa là tồn tại hằng số c_1 [redacted] để

$$f^*G \text{ [redacted]}$$

Hay [redacted] có $|df(v)|_G$ [redacted] với mọi f [redacted].

2.1.12. Ví dụ

Cho Y' [redacted] là không gian xạ ảnh và Y [redacted] $\{(1:0)\}$, [redacted] là metric cầu xác định trên P^1. Cho G là KRG-metric trên Y được xác định như sau:

$$|u|_G \text{ [redacted]} \ u \text{ [redacted] và } |z| \text{ [redacted] } |).$$

Theo hệ quả 2.1.11 ta có bất kỳ hàm chỉnh hình f trên không gian phức X thoả mãn bất đẳng thức:

$$\frac{|df(v)|}{1 \text{ [redacted]}} \text{ [redacted]} \quad \text{[redacted]},$$

đều thoả mãn bất đẳng thức mạnh hơn

$$\frac{|df(v)|}{|f(v)| \text{ [redacted]}} \text{ [redacted]} \quad \text{[redacted]},$$

với hằng số c_1 [redacted].

2.1.13. Hệ quả

Ký hiệu N(X,Y) là tập tất cả các ánh xạ chuẩn tắc từ X đến Y thì

$$N(X,Y) \text{ [redacted] }).$$

c [redacted]

Chứng minh

Ta có f là ánh xạ chuẩn tắc [redacted] là họ s – chuẩn tắc (theo định nghĩa 2.1.2).

[redacted]

[redacted] (X,Y,G) [redacted] $(X,Y,$ [redacted]. Suy ra điều phải chứng minh.

Chú ý rằng nói chung họ *N*(*X*,*Y*) không là họ s-chuẩn tắc. Thật vậy ta xét ví dụ sau:

Ví dụ:

Xét họ $\mathscr{F}$ [redacted] với $\mathscr{F}$ [redacted] và $f_n(z)$ [redacted] $n(nz$ [redacted].

Khi đó mỗi ánh xạ f_n là ánh xạ chuẩn tắc nhưng họ $\mathscr{F}$ không phải là họ s – chuẩn tắc.

Chứng minh

Ta có $|f_n(z)|$ [redacted] $n|nz$ [redacted].

Với mỗi số *n* ta có

$f_n \circ \mathrm{Hol}($[redacted] trong đó

$$f_n \circ h :$$ [redacted] $) \setminus B(0, \frac{1}{n(n}$ [redacted]$).$

Do $P^1(\pounds) \setminus B(0, \frac{1}{n(n}$ [redacted] là hyperbolic, compact nên ta có

$f_n \circ h| \ h$ [redacted] là compact,

do đó tập một phần tử f_n là họ s – chuẩn tắc. Vậy ánh xạ f_n là chuẩn tắc.

Mặt khác với [redacted] xác định bởi

n^3 [redacted] $(1$ [redacted]

ta có

$f_n($ [redacted] n^3

và

$f_n($ [redacted] $\frac{1}{n}$ $\frac{1}{n^3}$ $\frac{1}{n}$

Suy ra $\mathcal{F} \circ \mathrm{Aut}($[redacted] không compact tương đối trong $\mathrm{Hol}($[redacted] nên $\mathcal{F} \circ \mathrm{Hol}($[redacted] không compact tương đối trong $\mathrm{Hol}($[redacted] (do $\mathrm{Aut}($[redacted]$)$. Vậy $\mathcal{F}$ không là s- chuẩn tắc.

2.1.14. Hệ quả

Cho Z là đa tạp phức và $\mathcal{F}$ [redacted] Y *là họ s – chuẩn tắc. Xét họ*

$\mathcal{F}_Z$ [redacted] $X)$ }.

Khi đó ta có $\mathcal{F}_Z$ [redacted]$)$ *là họ s – chuẩn tắc. Hơn nữa* $\mathcal{F}_Z$ *là không gian con compact tương đối trong* $\mathrm{Hol}(Z,Y')$.

Chứng minh

Vì $\mathcal{F}$ là họ s – chuẩn tắc nên theo định lý 2.1.10 ta có $\mathcal{F}$ [redacted]$,Y,\rho|_Y)$ với số c [redacted] ([redacted] là metric Hermit trên Y'). Do đó với mọi f [redacted] ta có

$$f^*\rho|_Y \text{ [redacted]}.$$

Ánh xạ chỉnh hình $\varphi : Z$ [redacted] có tính chất giảm từ k_Z đến k_X nên với mọi $f \circ$ [redacted] ta có

d [redacted]

Nên

$$f \circ \text{[redacted]} Y,\rho|_Y) \text{ do đó } \mathcal{F}_Z \text{ [redacted]} ,Y,\rho|_Y).$$

Vậy $\mathcal{F}_Z$ là họ s – chuẩn tắc. Ta có

$$\mathcal{F}_Z(x) \text{ [redacted]}$$

mà Y compact tương đối trong Y' nên $\mathcal{F}_Z(x)$ compact tương đối trong Y'. Hơn nữa $\mathcal{F}_Z$ đồng liên tục (suy ra từ (1) và do k_Z là hàm liên tục).

Áp dụng định lý Ascoli ta suy ra điều phải chứng minh.

2.1.15. Hệ quả

Nếu X là đa tạp thì một họ s–chuẩn tắc $\mathcal{F}$ [redacted] Y *là chuẩn tắc theo nghĩa Montel.*

Chứng minh

Áp dụng hệ quả trên khi X là đa tạp ta có $\mathcal{F}$ [redacted]$)$ là compact tương đối trong Hol(X, Y'), do đó $\mathcal{F}$ là chuẩn tắc theo nghĩa Montel.

2.2. TÍNH CHUẨN TẮC VÀ TÍNH HYPEBOLIC

Định lý sau đây là sự diễn đạt lại tiêu chuẩn nhúng hyperbolic của Kiernan (định lý 1.5.4 chương 1).

2.2.1. Định lý

Cho Y là không gian con phức compact tương đối trong không gian phức Y'. Các điều kiện sau là tương đương :

i) *Họ* $\mathcal{F}$ = Hol ([redacted] *là họ s – chuẩn tắc.*

ii) *Ánh xạ* id_Y *là ánh xạ chuẩn tắc.*

iii) Hol ([redacted] *là không gian con compact tương đối trong* Hol([redacted]

iv) *Y là không gian con nhúng hyperbolic trong không gian Y'.*

Chứng minh

+i[redacted]ii: Có $id_Y \circ$ Hol([redacted] = Hol ([redacted] mà từ giả thiết i) suy ra $\mathcal{F} \circ$ Hol([redacted] là compact tương đối trong Hol([redacted]. Vậy id_Y là ánh xạ chuẩn tắc.

+ii[redacted]iii: f [redacted]là ánh xạ chuẩn tắc nên $f \circ$ Hol([redacted] compact tương đối trong Hol([redacted].

+iii[redacted]i: Có $\mathcal{F} \circ$ Hol([redacted] là compact tương đối trong Hol([redacted] (theo iii). Vậy $\mathcal{F}$ là họ s – chuẩn tắc.

+iv[redacted]: Suy ra từ định lý Kiernan 1.5.4 .

Định lý dược chứng minh.

2.2.2. Hệ quả

Cho X, Y' *là các không gian phức, Y là không gian con compact tương đối trong Y'. Khi đó họ ánh xạ chỉnh hình* $\mathcal{F}$ = Hol (X, Y) *là họ s-chuẩn tắc nếu và* *chỉ nếu Y nhúng hyperbolic trong Y'.*

Chứng minh

+ Theo định lý 2.2.1 ta có Y nhúng hyperbolic trong Y' khi và chỉ khi Hol ([redacted] compact tương đối trong Hol([redacted]. Mà $\mathcal{F} \circ$ Hol([redacted] nên $\mathcal{F} \circ$ Hol([redacted] compact tương đối trong Hol([redacted]. Vậy $\mathcal{F}$ là họ s-chuẩn tắc.

+ Ngược lại nếu $\mathcal{F}$ = Hol(X,Y) là họ s-chuẩn tắc với X là không gian phức bất kỳ thì Hol([redacted] cũng là họ s-chuẩn tắc. Do đó theo định lý 2.2.1 ta có Y nhúng hyperbolic trong Y'.

2.2.3. Chú ý

Theo định lý Kiernan 1.5.4 ta có iii) và iv) là tương đương với

ii') cK_Y [redacted].

Hơn nữa ii) tương đương với ii') được suy ra từ định lý 2.1.10.

Thật vậy:

Ánh xạ id_Y là ánh xạ chuẩn tắc khi và chỉ khi id_Y [redacted] $,Y,\rho|_Y)$ với số c [redacted] nào đó hay

$$id_Y^* \rho|_Y \text{ [redacted] với } c \text{ [redacted]}.$$

Điều này tương đương với $\rho|_Y$ [redacted] với c [redacted].

2.2.4. Một số ký hiệu

Cho (X,ρ) là không gian metric và Q [redacted]. Ta ký hiệu $Q^{(r,\rho)}$ là r – lân cận của Q nghĩa là $Q^{(r,\rho)}$ [redacted] $x,r)$ với $B_\rho(x,r)$ là các [redacted]- cầu tâm x [redacted] bán kính r. Với mỗi không gian phức X, lân cận $Q^{(r,k_X)}$ tương ứng với giả khoảng cách Kobayashi được ký hiệu đơn giản là $Q^{(r)}$.

2.2.5. Bổ đề

Cho X, Y' *là các không gian phức, Y là không gian con phức compact tương đối trong Y’,* ρ *là metric Hermit trên Y’ và G là* KRG – *metric trên Y. Giả sử* $\mathcal{F}$ [redacted] Y *là họ s-chuẩn tắc. Khi đó tồn tại các hằng số c* [redacted] *sao cho với bất kỳ f* [redacted] *r* [redacted] *và Q* [redacted] *ta có các bao hàm thức:*

$$f(Q^{(r)}) \text{ [redacted] } {}^{(cr,\rho)}$$

và

$$f(Q^{(r)}) \text{ [redacted] } {}^{(c_1 r, g)}.$$

Chứng minh

Vì $\mathcal{F}$ [redacted] Y là họ s-chuẩn tắc nên theo 2.1.10 ta có

$$\mathcal{F} \text{ [redacted] } Y, \rho|_Y) \text{ với } c \text{ [redacted]}$$

và theo 2.1.9 thì

$$\mathcal{F} \text{ [redacted] } ,Y,G) \text{ với } c_1 \text{ [redacted]}.$$

+ Vì $\mathcal{F}$ [redacted] $Y, \rho|_Y)$ với số c [redacted] nên

[redacted] ta có $f^*\rho$ [redacted] (1) [redacted],

theo 2.2.4 ta có tồn tại x_1 [redacted] để x thuộc k_X - cầu $B(x_1, r)$ do đó từ (1) suy ra

$$cr \text{ [redacted] } x_1)),$$

hay

$$d\rho(f(x), f(x_1)) \text{ [redacted]}.$$

Do đó $f(x)$ thuộc ρ - cầu $B(f(x_1),cr)$ mà x_1 [redacted] nên $f(x_1)$ [redacted].

Suy ra $f(x)$ [redacted] $^{cr,\rho)}$. Vậy f [redacted] $^{cr,\rho)}$.

+ Vì $\mathscr{F}$ [redacted] $,Y,G)$ với c_1 [redacted] nên

[redacted] ta có f^*G [redacted] (2) , [redacted].

Tương tự như trên ta có

$c_1 r$ [redacted] $))$ hay $g(f(x), f(x_1))$ [redacted].

Suy ra $f(x)$ thuộc g – cầu $B(f(x_1),c_1r)$. Do đó

$f(x)$ [redacted] $^{c_1 r,g)}$. Vậy f [redacted] $^{c_1 r,g)}$.

2.2.6. Chú ý

Các khái niệm và kết quả sau được trình bày trong [3].

+ Tập Q [redacted] gọi là r – trù mật trong X nếu và chỉ nếu $Q^{(r)}$ [redacted] và Q [redacted] gọi là r – trù mật, chỉnh hình trong X nếu và chỉ nếu bao đóng của $Q^{(r)}$ tương ứng với đại số $\mathrm{H}(X)$ các hàm chỉnh hình trên X trùng với X.

+ Một hàm f chuẩn tắc trên X và bị chặn trên một tập r–trù mật chỉnh hình Q [redacted] thì bị chặn trên X (Nhận xét này được rút ra từ bổ đề 2.2.5 và nguyên lý mô đun cực đại).

+ Một đường cong [redacted] thực r-trù mật chỉnh hình trong đĩa đơn vị [redacted] được gọi là đường xoắn ốc r - trù mật nghĩa là $\gamma^{(r)}$ chứa những hình khuyên

K [redacted] với [redacted].

+ Một hàm chuẩn tắc trên đĩa đơn vị [redacted] mà bị chặn trên đường xoắn ốc trù mật hữu hạn thì bị chặn trên [redacted].

+ Cho f : [redacted] là hàm chuẩn tắc và bị chặn trên đường xoắn ốc trù mật hữu hạn khi đó tập [redacted] là hyperbolic đầy.

Chứng minh

Vì f là hàm chuẩn tắc và bị chặn trên đường xoắn ốc trù mật hữu hạn nên theo chú ý trên ta có f bị chặn trên đĩa đơn vị [redacted]. Do [redacted] là hyperbolic đầy và theo mệnh đề 1.4.8 ta suy ra [redacted] là hyperbolic đầy.

2.2.7. Bổ đề

Cho đa tạp phức X và Q [redacted]. *Khi đó với bất kì r* [redacted] *ta có các bất đẳng thức:*

$$(\tanh(r)).K_{Q^{(r)}}\Big|_Q \text{ [redacted]}.$$

Chứng minh

+ Chứng minh $K_X\big|_Q$ [redacted]:

Vì $Q^{(r)}$ [redacted] và ánh xạ nhúng

$$id_{Q^{(r)}} : Q^{(r)} \text{ [redacted] là ánh xạ chỉnh hình}$$

nên ta có

$$K_X\big|_Q \text{ [redacted]}.$$

+ Chứng minh $(\tanh(r)).K_{Q^{(r)}}\Big|_Q$ [redacted]:

Cố định x [redacted] và v [redacted] tuỳ ý. Theo định nghĩa của K_X ta có với mọi [redacted] tồn tại

$$s$$ [redacted] và φ [redacted]

sao cho

$$d\varphi(\frac{d}{dz}\Big|_0)$$ [redacted].

Ký hiệu W_r là đĩa hyperbolic bán kính r tâm tại gốc O trong [redacted]. Bởi tính chất giảm của metric Kobayashi ta có $f(W_r)$ [redacted].

Do đó $K_{Q(r)}(v)$ [redacted] với $t=t(s,r)$ là bán kính Euclid của $W_r =$ [redacted], trong đó

r [redacted] hay t [redacted]).

Nên

$K_{Q(r)}(v)$ [redacted] tanh(r) [redacted].

Hay

$\tanh(r)K_{Q(r)}(v)$ [redacted] , [redacted]

Tức là

$\tanh(r)K_{Q(r)}(v)$ [redacted]

Vậy $\tanh(r)K_{Q(r)}\Big|_Q$ [redacted]. Bổ đề được chứng minh.

Định lý sau là sự mở rộng của định lý Eastwood 1.2.5 tới các ánh xạ chuẩn tắc vào các không gian phức không là hyperbolic.

2.2.8. Định lý

Cho $f : X$ [redacted] *là ánh xạ chuẩn tắc giữa hai không gian phức. Nếu với phủ*

U [redacted] *của Y mà mọi tạo ảnh f* [redacted] *là hyperbolic thì X là hyperbolic. Nếu f* [redacted] *là hyperbolic đầy* [redacted] *và Y là hyperbolic đầy địa phương trong Y' thì X là hyperbolic đầy.*

Chứng minh

+ Với một điểm y tuỳ ý trong Y lấy [redacted]- cầu B: [redacted] sao cho tạo ảnh P [redacted] là hyperbolic. Đặt

$$Q: \text{[redacted]}.$$

Vì f là ánh xạ chuẩn tắc nên theo định lý 2.1.10 ta có f [redacted] $,Y,$ [redacted] với hằng số c [redacted]. Từ bổ đề 2.2.5 ta có

$$f(Q^{(\frac{r}{2c})}) \text{[redacted]}$$

hay $Q^{(\frac{r}{2c})}$ [redacted] (do P [redacted]). Do tính hyperbolic của P ta có K_P không suy biến. Theo bổ đề 2.2.7 ta có $K_X|_Q$ [redacted] $))K_P|_Q$. Do đó giả metric vi phân K_X cũng không suy biến. Vậy X là hyperbolic.

+ Vì f [redacted] là hyperbolic [redacted] nên theo chứng minh trên ta có X là hyperbolic.

Để chứng minh X đầy ta chứng minh [redacted] $,R$ [redacted] thì k_X - cầu đóng $\overline{B}(x,R)$ trong X là compact. Vì f là ánh xạ chuẩn tắc nên f [redacted] $,Y,G)$ với c [redacted] (theo định lý 2.1.9). Gọi g là hàm khoảng cách tương ứng với metric đầy G (vì theo chú ý 2.1.8 thì do Y là hyperbolic đầy địa phương nên tồn tại KRG–metric đầy G với một phủ hợp lý) ta có

$f(B(x,R))$ [redacted]) với y [redacted] (Theo 2.2.5 với Q [redacted]).

Vì G là metric đầy nên K [redacted] $,cR))$ là compact trong Y do đó $f(B(x,R))$ chứa trong tập compact K [redacted]. Do K compact nên

K [redacted] (với một họ con hữu hạn nào đó của U [redacted]).

Cho $r > 0$ là độ đo Lơbe của phủ hữu hạn của K tương ứng với metric đầy G.

Đặt W_i [redacted] và W [redacted]

suy ra

$\overline{B}(x,R)$ [redacted].

Đặt $H:$ [redacted] (K_{W_i} là các metric đầy đủ) là metric vi phân đầy trên W .

Phủ w_y [redacted] của tập compact K gồm các g – cầu $w_y:$ [redacted] cảm sinh phủ Q_y của f [redacted] là các tập mở).

Đặt $P_y:$ [redacted] $,r))$. Vì f [redacted] $,Y,G)$ với c [redacted] nên

$f(Q_y$ [redacted] (theo 2.2.5).

Suy ra

$f(Q_y$ [redacted] .

Do đó

Q_y [redacted].

Vì vậy theo bổ đề 2.2.7 ta có

$$K_X|_{Q_y}$$ [redacted] ,

với W_i thoả mãn P_y [redacted] và [redacted].

Mà Q_y là phủ của f [redacted] do đó

$$K_X|_f$$ [redacted] (vì H [redacted]) .

Hơn nữa $B_{k_X}(x,R)$ [redacted] nên

$$K_X|_{B_{k_X}(x,R)}$$ [redacted]

suy ra

$$B_{k_X}(x,R)$$ [redacted].

Lại do H là metric đầy nên $\overline{B_h}$ [redacted] là tập compact do đó $\overline{B}_{k_X}(x,R)$ là tập compact. Vậy X đầy.Định lý được chứng minh.

2.2.9. Định lý

Cho $f : X$ [redacted] là ánh xạ chuẩn tắc riêng giữa các không gian phức. Khi đó:

i) *Nếu mỗi thớ X_y :* [redacted]*, với y* [redacted] *là hyperbolic thì X là hyperbolic.*

ii) *Nếu Y là hyperbolic đầy địa phương và* [redacted] *có f* [redacted] *là hyperbolic thì X là hyperbolic đầy.*

iii) *Nếu có* y_0 [redacted]*ho* $f^{-1}(y_0)$ *là hyperbolic thì có lân cận U của* y_0 *trong Y để* $f^{-1}(y)$ *là hyperbolic với mọi* y[redacted].

Chứng minh

i) Theo mệnh đề 4.6 trong [6] thì với bất kỳ y[redacted] có lân cận W_y [redacted] để f[redacted] là hyperbolic. Vậy X là hyperbolic (theo định lý 2.2.8).

ii) Theo i) ta có X là hyperbolic. Để chứng minh tính đầy của X ta chứng minh [redacted]và r [redacted] thì k_X- cầu đóng $\overline{B}(x,r)$ [redacted]là tập compact. Vì f là ánh xạ chuẩn tắc nên theo 2.1.9 ta có f [redacted]$,Y,G)$ với c [redacted] trong đó G là KRG – metric đầy. Từ đó theo 2.2.5 ta có

$$f(Q^{(r)})\ [redacted]^{(cr,g)} \text{ với } Q\ [redacted]$$

Suy ra

$$f(B(x,r))\ [redacted]) \text{ với } y\ [redacted].$$

Do G là metric đầy nên K [redacted]) là tập compact trong Y. Do đó $f(B(x,r))$ chứa trong tập compact K [redacted] Mà f là ánh xạ riêng nên f[redacted] là tập compact. Vậy $\overline{B}(x,r)$ là tập con đóng của tập compact f[redacted]. Vì vậy $\overline{B}(x,r)$ là compact với mọi x[redacted])hay X là hyperbolic đầy.

iii) Ta có y_0 là tập compact và f là ánh xạ riêng nên f[redacted] là compact.

Từ 1.3.3 và 1.4.3 suy ra có lân cận V của f[redacted]mà V là hyperbolic. Vậy tồn tại lân cận U của y_0 sao cho f[redacted](*).

Thật vậy, giả sử (*) không xảy ra. Khi đó tồn tại dãy

$$x_n\ [redacted]$$

sao cho

$$f(x_n) \text{[redacted]}.$$

Gọi K là một lân cận compact của y_0 trong Y, K [redacted]. Do f là ánh xạ riêng nên f [redacted] compact trong X. Vì y_n [redacted] nên với n đủ lớn thì y_n [redacted]. Lại do f [redacted] compact suy ra tồn tại dãy x_{n_k} [redacted] sao cho x_{n_k} [redacted].

Vì f liên tục nên

$$f(x_0) \text{[redacted]}$$

Tức là

$$x_0 \text{[redacted]}.$$

Vậy x_{n_k} [redacted] nghĩa là với n_k đủ lớn ta có x_{n_k} [redacted] trái với giả thiết x_{n_k} [redacted]. Vậy

$$f \text{[redacted]} \text{ với mỗi } y \text{[redacted]}$$

Từ đó f [redacted] là hyperbolic với mọi y [redacted]. Định lý được chứng minh.

Sau đây là một tiêu chuẩn về tính chuẩn tắc tương tự với tiêu chuẩn hyperbolic của Brody (Định lý 2.2.13). Trước hết ta xét các khái niệm sau:

2.2.10. Định nghĩa

Một đường cong nguyên trong không gian phức Y' là một ánh xạ khác hằng $\varphi:$ [redacted].

Nếu Y là không gian con của Y' và φ được xấp xỉ bởi các ánh xạ chỉnh hình $\varphi_n:$ [redacted] thì φ được gọi là đường cong nguyên Y – giới hạn.

Nếu cho trước họ $\mathscr{F}$ [redacted]) thì φ gọi là đường cong nguyên

$\mathcal{F}$ - giới hạn trong Y' nếu và chỉ nếu nó được xấp xỉ bởi những đường cong chỉnh hình

$f_n \circ \varphi_n :$ [redacted] với φ_n [redacted] và f_n [redacted]

Trong [6] ta có nếu Y là hyperbolic đầy địa phương trong Y' thì mọi đường cong chỉnh hình Y- giới hạn trong Y' cũng nằm trong Y hoặc trong [redacted].

2.2.11. Định lý [6]

Một không gian con compact tương đối Y của đa tạp phức Y' gọi là nhúng hyperbolic trong Y' khi và chỉ khi Y' không chứa đường cong nguyên

Y – giới hạn nào.

2.2.12. Định lý [4]

Họ $\mathcal{F}$ [redacted] *là compact tương đối trong* Hol([redacted] *khi và chỉ khi*

không tồn tại dãy b_n [redacted], *r_n giảm đến 0,* [redacted] *để* [redacted] *hội tụ đến một đường cong nguyên $\mathcal{F}$ - giới hạn £* [redacted].

2.2.13. Định lý

Họ $\mathcal{F}$ [redacted]) *là s- chuẩn tắc khi và chỉ khi không tồn tại đường cong nguyên $\mathcal{F}$ -giới hạn $\varphi :$* [redacted].

Chứng minh

+ Cho $\mathcal{F}$ là s- chuẩn tắc, theo 2.1.10 ta suy ra

$\mathcal{F}$ [redacted] $,Y,$ [redacted] với c [redacted].

Giả sử dãy Φ_n [redacted] hội tụ đến $\Phi :$ [redacted], trong đó f_n [redacted] và φ_n [redacted] Khi đó với hai điểm u, v [redacted] bất kỳ ta có

[redacted]

(Vì [redacted] có tính chất giảm với khoảng cách Kobayashi). Do đó

$$[redacted] \Phi_n(v)) [redacted],$$

Mà

$$\Phi_n \text{ [redacted] nên [redacted]}(v)) \text{ [redacted]}$$

Suy ra $\Phi(u)$ [redacted] hay Φ [redacted]. Vậy không tồn tại đường cong nguyên $\mathcal{F}$ - giới hạn $\Phi :$ [redacted].

+ Ngược lại, nếu không tồn tại đường cong nguyên $\mathcal{F}$ - giới hạn $\Phi :$ [redacted], ta phải chứng minh $\mathcal{F}$ là s- chuẩn tắc. Giả sử $\mathcal{F}$ không là s- chuẩn tắc, theo định nghĩa 2.1.1 ta có $\mathcal{F}$ [redacted] không là không gian con compact tương đối trong không gian $Hol($[redacted]. Áp dụng định lý 2.2.12 cho họ $\mathcal{F}$ [redacted] ta suy ra tồn tại đường cong nguyên $\mathcal{F}$ -giới hạn $\Phi :$ [redacted]. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $\mathcal{F}$ là họ s- chuẩn tắc.

Định lý được chứng minh.

2.2.14. Hệ quả

Ánh xạ f [redacted]$Y)$ *là chuẩn tắc khi và chỉ khi các ánh xạ {f}-giới hạn* $g :$ [redacted] *là các ánh xạ hằng.*

Chứng minh

Ta có f [redacted]$Y)$ là ánh xạ chuẩn tắc [redacted] $\mathcal{F}$ [redacted] là họ s-chuẩn tắc [redacted] không tồn tại đường cong nguyên f -giới hạn [redacted] (theo 2.2.13) [redacted] Nếu $g :$ [redacted] là đường cong nguyên $\mathcal{F}$ -giới hạn thì g là ánh xạ hằng. Ta có điều phải chứng minh.

KẾT LUẬN

Trong luận văn này, chúng tôi đã trình bày các kết quả cơ bản về họ *s*-chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình. Cụ thể là các kết quả sau:

Trình bày khái niệm về họ *s*-chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình nhiều biến. Đồng thời trình bày chi tiết một số tiêu chuẩn metric để xét tính *s*-chuẩn tắc của họ các ánh xạ trên các không gian phức, chỉ ra mối liên hệ giữa tính *s*-chuẩn tắc với tính chuẩn tắc theo nghĩa của Montel (Hệ quả 2.1.15). Để chứng minh tiêu chuẩn metric của tính *s*-chuẩn tắc chúng tôi trình bày khái niệm KRG-metric trên không gian ảnh.

Chúng tôi cũng trình bày một số tính chất đặc trưng của họ *s*-chuẩn tắc các ánh xạ chỉnh hình xác định trên không gian phức và sử dụng các tính chất đó để xét một số tính chất về tính hyperbolic và tính nhúng hyperbolic của các không gian phức. Cụ thể là tiêu chuẩn nhúng hyperbolic của Kiernan được diễn đạt lại theo ngôn ngữ của họ *s*-chuẩn tắc (định lý 2.2.1). Định lý Eastwood được mở rộng tới các ánh xạ của họ *s*-chuẩn tắc vào các không gian không hyperbolic (định lý 2.2.8). Tính hyperbolic của không gian tạo ảnh được xét thông qua các ánh xạ của họ *s*-chuẩn tắc (định lý 2.2.8, định lý 2.2.9). Việc chứng minh các định lý được dựa trên các bao hàm thức và bất đẳng thức đã được chứng minh chi tiết (bổ đề 2.2.5, bổ đề 2.2.7). Cuối cùng chúng tôi trình bày một tiêu chuẩn về tính s - chuẩn tắc tương tự với tiêu chuẩn hyperbolic của Brody (định lý 2.2.13).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

[1] Phạm Việt Đức (2005), *Mở đầu về lý thuyết các không gian phức hyperbolic* NXB ĐHSP.

Tiếng Anh

[2] Brody, R (1978), *Compact manifolds and hyperbolicity.* Trans. Amer. Math. Soc., 235, 213-219.

[3] Gavrilov, V.L (1964), *Limits on continuous curves and sequences of points of meromorphic and generalized meromorphic functions in the unit disc,* (in Russian). I. Vest. Mosk. Univ..30-36.

[4] Hahn, K. T (1984), *Asymptotic behavior of normal mappings of several complex variables,* Can. J. Math., 36, 718-746.

[5] Lehto, O., Virtanen, K. I (1957), *Boundary behavior and normal meromorphic functions,* Acta. Math., 97, 47-65.

[6] Zaidenberg, M. G (1983), *Picard theorem and hyperbolicity*, Sib.Math. J. 24, 858-867.

[7] Zaidenberg, M. G (1991), *Schottky-Landau growth estimates for s-normal families of holomorphic mappings,* Math. Ann. 293, 123-141.