ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGÔ THỊ THU THUỶ

VỀ ĐỊNH LÍ DUBOVITSTKII-MILYUTIN VÀ ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2008

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Lý thuyết các điều kiện tối ưu đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết tối ưu hóa. Năm 1965, A. Ya. Dubovitskii và A. A. Milyutin [1] đã đưa ra lý thuyết các điều kiện cần tối ưu dưới ngôn ngữ giải tích hàm và cho ta phương pháp giải tích hàm hiệu quả để nghiên cứu các bài toán tối ưu và điều khiển. Công trình nổi tiếng của Dubovitskii-Milyutin [1] đánh dấu một bước phát triển quan trọng của lý thuyết tối ưu hóa.

I. Lasiecka [4] đã tổng quát hóa các kết quả của Dubovitskii-Milyutin trên cơ sở chứng minh một mở rộng của định lý tách. Chú ý rằng các điều kiện tối ưu của định lý Dubovitskii-Milyutin dựa trên việc tách một nón chấp nhận được và một nón tiếp tuyến, trong đó nón chấp nhận được là xấp xỉ nón của tập ràng buộc bất đẳng thức và tập mức của hàm mục tiêu. Còn kết quả của Lasiecka [4] lại dựa trên tách một nón trong và một nón ngoài.

Sử dụng định lý Dubovitskii-Milyutin, Đ. V. Lưu và N. M. Hùng [5] đã thiết lập một định lý luân hồi kiểu Tucker cho hệ bao gồm các bất đẳng thức, đẳng thức và một bao hàm thức. Từ đó Lưu-Hùng [5] đã chứng minh các điều kiện cần Kuhn-Tucker với các nhân tử Lagrange dương ứng với các thành phần của hàm mục tiêu cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu với các ràng buộc bất đẳng thức, đẳng thức và ràng buộc tập trong không gian định chuẩn.

Luận văn trình bày các định lý Dubovitskii-Milyutin, các mở rộng của chúng và ứng dụng để dẫn các điều kiện cần Kuhn-Tucker cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu với các ràng buộc bất đẳng thức, đẳng thức và ràng buộc tập trong không gian định chuẩn.

Luận văn bao gồm phần mở đầu, ba chương, kết luận và danh mục các tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày các định lý của Dubovitskii-Milyutin về điều kiện tối ưu tổng quát và một số kết quả có liên quan.

Chương 2 trình bày các kết quả của Lasiecka [4] về các tổng quát hóa các điều kiện tối ưu của Dubovitskii-Milyutin trên cơ sở chứng minh một định lý tách cho một nón trong và một nón ngoài không tương giao.

Chương 3 trình bày một ứng dụng của định lý Dubovitskii-Milyutin để thiết lập một định lý luân hồi kiểu Tucker cho hệ các bất đẳng thức, đẳng thức, bao hàm thức và dẫn các điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu với các ràng buộc bất đẳng thức, đẳng thức và ràng buộc tập. Chú ý rằng các nhân tử Lagrange ứng với tất cả các thành phần hàm mục tiêu ở đây là dương.

Cuối cùng tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS. TS. Đỗ Văn Lưu, người đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tôi hoàn thành bản luận văn này.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm khoa Toán trường Đại học sư phạm-Đại học Thái Nguyên cùng các thầy giáo cô giáo đã tham gia giảng dạy khóa học, xin chân thành cảm ơn gia đình, bạn bè đồng nghiệp và các thành viên trong lớp Cao học Toán K14 đã luôn quan tâm, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập và quá trình làm luận văn.

Thái nguyên, tháng 9 năm 2008

Chương 1

ĐỊNH LÍ DUBOVITSTKII-MILYUTIN

Chương 1 trình bày định lý Dubovitskii-Milyutin (1965, [1]) và một số kết quả có liên quan trong giải tích không trơn.

1.1. CÁC KIẾN THỨC BỔ TRỢ

Giả sử X là không gian tôpô tuyến tính, X^* là không gian liên hợp của X, K là một nón trong X có đỉnh tại 0, tức là $\lambda K \subset K$ $(\forall \lambda > 0)$. Khi đó nón liên hợp K^* của K được định nghĩa như sau:

$$K^* = \left\{ x^* \in X^* : \left\langle x^*, x \right\rangle \geq 0,\ \forall x \in K \right\}.$$

Mệnh đề 1.1 ([6])

Giả sử K là nón có đỉnh tại x_0, x^* *là một phiếm hàm tuyến tính và*

$$\left\langle x^*, x \right\rangle \geq \alpha \quad \left(\forall x \in K\right).$$

Khi đó,

$$\left\langle x^*, x \right\rangle \geq \left\langle x^*, x_0 \right\rangle \ \left(\forall x \in K\right).$$

Mệnh đề 1.2 ([6])

Hai tập lồi khác rỗng bất kì không tương giao trong không gian tôpô tuyến tính, một tập có điểm trong thì tách được.

Định lí 1.1

Giả sử K là một nón lồi có đỉnh tại 0, $\operatorname{int} K \neq \varnothing$, L là một không gian con, $\operatorname{int} K \cap L \neq \varnothing$. Giả sử x^* là một phiếm hàm tuyến tính liên tục trên L thỏa mãn

$$\left\langle x^*, x \right\rangle \geq 0 \ \left(\forall x \in K \cap L \right).$$

Khi đó, tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục $\tilde{x}^*$ trên X sao cho

$$\left\langle \tilde{x}^*, x \right\rangle = \left\langle x^*, x \right\rangle \ \left(\forall x \in L \right),$$

$$\left\langle \tilde{x}^*, x \right\rangle \geq 0 \ \left(\forall x \in K \right).$$

Chứng minh

(a) Nếu $x^* = 0$ trên L, thì ta chọn $\tilde{x}^* = 0$.

(b) Nếu $x^* \neq 0$, ta đặt

$$Q_1 := \left\{ x \in L : \left\langle x^*, x \right\rangle = 0 \right\}.$$

Khi đó, Q_1 lồi và khác $\varnothing$ (bởi vì $0 \in Q_1$). Đồng thời

$$Q_1 \cap \left(\operatorname{int} K \right) = \varnothing.$$

Thật vậy, nếu

$$Q_1 \cap \left(\operatorname{int} K \right) \neq \varnothing.$$

$$\Rightarrow \qquad \exists x_0 \in Q_1 \cap \left(\operatorname{int} K \right).$$

$$\Rightarrow \qquad x_0 \in L, \ \left\langle x^*, x_0 \right\rangle = 0.$$

Bởi vì $x_0 \in L \cap intK$, cho nên trong lân cận của điểm x_0 ta tìm được điểm $x_1 \in L \cap K$ mà $\langle x^*, x_1 \rangle < 0$. Điều đó mâu thuẫn với tính không âm của $\langle x^*, x \rangle$ trên $L \cap K$. Vì vậy,

$$Q_1 \cap (intK) = \varnothing.$$

Do đó, tồn tại siêu phẳng tách Q_1 và $intK$, tức là tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục $\xi \in X^*$ sao cho

$$\langle \xi, x \rangle > 0 \quad (\forall x \in intK), \tag{1.1}$$

$$\langle \xi, x \rangle = 0 \quad (\forall x \in Q_1). \tag{1.2}$$

Để chứng minh tiếp định lý, ta cần bổ đề sau:

Bổ đề 1.1

Giả sử $\xi_1, \xi_2 \in X^*$,

$$Q_1 := \{\ x : \ \langle \xi_1, x \rangle = 0\ \},$$

$$Q_2 := \{\ x : \ \langle \xi_2, x \rangle = 0\ \},$$

và $Q_1 \subset Q_2$. *Khi đó, hoặc* $\xi_2 = 0$ *(tức là* $Q_2 = X$ *) hoặc* $\xi_1 = \lambda \xi_2, \lambda \neq 0$ *(tức là* $Q_1 = Q_2$*).*

Bây giờ trên không gian con L ta xét hai phiếm hàm tuyến tính liên tục x^* và ξ. Xét các tập hợp:

$$Q_1 := \left\{\ x \in L : \ \left\langle x^*, x \right\rangle = 0\ \right\},$$

$$Q_2 := \{\ x \in L : \ \langle \xi, x \rangle = 0\ \}.$$

Ta có $Q_1 \subset Q_2$ (do (1.2)). Áp dụng bổ đề 1.1, ta nhận được hai trường hợp:

(i) Hoặc $Q_1 = Q_2$,

(ii) Hoặc $Q_2 = L$.

Trường hợp (ii) không thể xảy ra, bởi vì từ (1.1) ta có $\langle \xi, x \rangle > 0$, nếu

$$x \in L \cap int K.$$

Vì vậy, theo bổ đề 1.1

$$\left\langle x^*, x \right\rangle = \lambda \langle \xi, x \rangle \ (\lambda \neq 0)$$

trên L. Bởi vì $\left\langle x^*, x \right\rangle$ và $\langle \xi, x \rangle$ cùng dấu trên $K \cap L$, cho nên $\lambda > 0$. Khi đó, $\tilde{x}^* = \lambda \xi$ là thác triển cần tìm của x^*. □

Mệnh đề 1.3 ([6])

$$\left(\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \right)^* \supset \sum_{\alpha \in I} K_\alpha^*.$$

1.2. ĐỊNH LÝ DUBOVITSKII-MILYUTIN

Định lý 1.2.

Giả sử $K_1, K_2, \ldots, K_n$ *là các nón lồi mở (đỉnh tại 0),* $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \varnothing$. *Khi đó,*

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} K_i \right)^* = \sum_{i=1}^{n} K_i^*.$$

Chứng minh

Xét không gian tích $\tilde{X} = X \times \ldots \times X = X^n$. Mỗi điểm $\tilde{x} \in \tilde{X}$ có dạng:

$$\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in X;$$

$\tilde{X}^* = X^* \times \ldots \times X^*;\ \tilde{\zeta} \in \tilde{X}^*$ có dạng:

$$\tilde{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n),\ \zeta_i \in X^*;$$

$$\langle \tilde{\zeta}, \tilde{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \zeta_i, x_i \rangle.$$

Đặt

$$\tilde{K} := \{\ \tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n):\ x_i \in K_i,\ i = 1, \ldots, n\ \}.$$

Ta có $\tilde{K}$ là một nón lồi mở trong $\tilde{X},$ bởi vì $\tilde{K}$ là tích của các nón lồi mở $K_i.$

Đặt

$$\tilde{L} := \{\ \tilde{x} = (x, \ldots, x):\ x \in X\ \}.$$

Ta có $\tilde{L}$ là không gian con tuyến tính của $\tilde{X}.$ Bởi vì $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \varnothing$, cho nên

$$\tilde{L} \cap \tilde{K} \neq \varnothing.$$

Bây giờ ta lấy $x^* \in \left(\bigcap_{i=1}^{n} K_i \right)^*$. Ta sẽ chứng minh

$$x^* \in \sum_{i=1}^{n} K_i^*.$$

Đặt

$$\langle \xi, \tilde{x} \rangle = \langle x^*, x \rangle,$$

trong đó

$$x \in X,\ \tilde{x} = (x, \ldots, x) \in \tilde{L}.$$

Khi đó, ξ là một phiếm hàm tuyến tính trên $\tilde{L}$. Ta có

$$\left\langle \xi, \tilde{x} \right\rangle \geq 0 \ \left(\forall \tilde{x} \in \tilde{L} \cap \tilde{K}\right),$$

bởi vì

$$\tilde{x} = \left(x, \ldots, x\right) \in \tilde{L} \cap \tilde{K}.$$

$$\Rightarrow \qquad x \in \bigcap_{i=1}^{n} K_i.$$

$$\Rightarrow \qquad \left\langle \xi, \tilde{x} \right\rangle = \left\langle x^*, x \right\rangle \geq 0.$$

Áp dụng định lý 1.1, tồn tại $\tilde{\xi} \in \tilde{X}^*$ sao cho

$$\left\langle \tilde{\xi}, \tilde{x} \right\rangle \geq 0 \ \left(\forall \tilde{x} \in \tilde{K}\right), \tag{1.3}$$

$$\left\langle \tilde{\xi}, \tilde{x} \right\rangle = \left\langle \xi, \tilde{x} \right\rangle \ \left(\forall \tilde{x} \in \tilde{L}\right). \tag{1.4}$$

Giả sử $\tilde{\xi} = \left(\xi_1, \ldots, \xi_n\right)$. Khi đó, với mọi $x \in X$, thì $\tilde{x} = \left(x, \ldots, x\right) \in \tilde{L}$ và từ (1.4) ta có

$$\left\langle \tilde{\xi}, \tilde{x} \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \xi_i, x \right\rangle = \left\langle \xi, \tilde{x} \right\rangle = \left\langle x^*, x \right\rangle.$$

$$\Rightarrow \qquad x^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Từ (1.3), ta suy ra

$$\sum_{i=1}^{n}\langle \xi_i, x_i\rangle \geq 0 \ \left(\forall x_i \in K_i,\ i=1,\ldots,n\right).$$

$\Rightarrow$ $$\langle \xi_i, x_i\rangle \geq 0 \ \left(\forall x_i \in K_i\right).$$

$\Rightarrow$ $$\xi \in K_i^* \ \left(i=1,\ldots,n\right).$$

$\Rightarrow$ $$x^* \in \sum_{i=1}^{n} K_i^*.$$

$\Rightarrow$ $$\left(\bigcap_{i=1}^{n} K_i\right)^* \subset \left(\sum_{i=1}^{n} K_i\right)^*.$$

Mặt khác, theo mệnh đề 1.3,

$$\sum_{i=1}^{n} K_i^* \ \subset \ \left(\bigcap_{i=1}^{n} K_i\right)^*.$$

Do đó, định lý được chứng minh. □

Định lý 1.3 *(Dubovitskii-Milyutin)*

Giả sử $K_1, K_2, \ldots, K_n, K_{n+1}$ *là các nón lồi đỉnh tại 0; Các nón* $K_1, K_2, \ldots,$ K_n *mở. Khi đó,* $\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i = \varnothing \Leftrightarrow \exists\, x_i^* \in K_i^* \ \left(i=1,\ldots,n+1\right)$ *không đồng thời bằng 0, sao cho*

$$x_1^* + \cdots + x_n^* + x_{n+1}^* = 0. \tag{1.5}$$

Chứng minh

(a) *Điều kiện cần.* Giả sử $\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i = \varnothing.$

- *Trường hợp 1* : $\bigcap_{i=1}^{n} K_i \neq \varnothing.$

Đặt $K := \bigcap_{i=1}^{n} K_i$. Khi đó, $K \neq \varnothing$, mở và $K \cap K_{n+1} = \varnothing$. Theo mệnh đề 1.2, tồn tại $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$ sao cho

$$\left\langle x^*, y \right\rangle \leq \alpha \leq \left\langle x^*, x \right\rangle \ \left(\forall x \in K, \forall y \in K_{n+1} \right).$$

Bởi vì K là nón có đỉnh tại 0, cho nên từ mệnh đề 1.1 ta suy ra

$$\left\langle x^*, y \right\rangle \leq 0 \leq \left\langle x^*, x \right\rangle \ \left(\forall x \in K, \forall y \in K_{n+1} \right). \tag{1.6}$$

Từ đó,

$$x^* \in K^* = \left(\bigcap_{i=1}^{n} K_i \right)^*.$$

Áp dụng định lý 1.2 ta nhận được

$$x^* = \sum_{i=1}^{n} x_i^*, \ x_i^* \in K_i^* \ \left(i = 1, \ldots, n \right).$$

Đặt $x_{n+1}^* = -x^*$. Khi đó, từ (1.6) suy ra $x_{n+1}^* \in K_{n+1}^*$. Hơn nữa $x_{n+1}^* \neq 0$ và

$$x_1^* + \cdots + x_n^* + x_{n+1}^* = 0.$$

- *Trường hợp 2 :* $\bigcap_{i=1}^{n} K_i = \varnothing.$

Khi đó, tồn tại s: $1 \leq s < n$ sao cho

$$K = \bigcap_{i=1}^{s} K_i \neq \varnothing, \ \bigcap_{i=1}^{s+1} K_i = \varnothing.$$

Áp dụng trường hợp 1 (với *s* đóng vai trò là *n*) ta nhận được

$$x_i^* \in K_i^* \ \left(i = 1, \ldots, s+1 \right), \ x_{s+1}^* \neq 0$$

sao cho

$$x_1^* + \cdots + x_s^* + x_{s+1}^* = 0.$$

Chọn $x_{s+2}^* = \cdots = x_{n+1}^* = 0$ ta nhận được (1.5).

(b) *Điều kiện đủ*. Giả sử tồn tại $x_i^* \left(i = 1, \ldots, n+1\right)$ không đồng thời bằng 0 sao cho $x_1^* + \cdots + x_n^* + x_{n+1}^* = 0,$ nhưng $\bigcap_{i=1}^{n+1} K_i \neq \varnothing.$

Do đó, tồn tại $x_0 \in K_i$ $\left(i = 1, \ldots, n+1\right)$. Đồng thời, tồn tại chỉ số j : $1 \le j \le n$ sao cho $x_j^* \neq 0$, bởi vì nếu không thì $x_{n+1}^* = -\sum_{i=1}^{n} x_i^* = 0$, vì thế x_1^*, …, x_{n+1}^* đồng thời bằng 0.

Ta có $\left\langle x_j^*, x_0 \right\rangle > 0$ (bởi vì K_j mở, nếu $\left\langle x_j^*, x_0 \right\rangle = 0,$ thì tồn tại $x_1 \in K_j$ sao cho $\left\langle x_j^*, x_1 \right\rangle < 0$ (!)). Do đó,

$$0 = \left\langle x_1^* + \cdots + x_n^* + x_{n+1}^*, x_0 \right\rangle \ge \left\langle x_j^*, x_0 \right\rangle > 0 : \text{vô lí (!)}. \qquad \square$$

Định nghĩa 1.1

Véc tơ v được gọi là phương giảm của hàm $f\left(x\right)$ tại x_0, nếu tồn tại lân cận U của v, số $\alpha < 0$ và số $\varepsilon_0 > 0$ sao cho $\forall \varepsilon \in \left(0, \varepsilon_0\right)$, $\forall u \in U$, ta có

$$f\left(x_0 + \varepsilon u\right) \le f\left(x_0\right) + \varepsilon \alpha \tag{1.7}$$

Các phương giảm của f tại x_0 lập thành nón mở có đỉnh tại 0.

Hàm f được gọi là *giảm đều*, nếu nón các phương giảm của f tại x_0 là lồi.

Định nghĩa 1.2

Véc tơ v được gọi là phương chấp nhận được của tập Q tại x_0, nếu tồn tại lân cận U của v, số $\varepsilon_0 > 0$ sao cho

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \forall u \in U:\ x_0 + \varepsilon u \in Q$$

Tập các phương chấp nhận được lập thành một nón ta gọi là nón chấp nhận được của Q tại x_0.

Các phương chấp nhận được của tập Q tại x_0 lập thành nón mở với đỉnh tại 0.

Ta gọi hạn chế Q loại bất đẳng thức là *đều* tại x_0, nếu nón các phương chấp nhận được tại x_0 là lồi.

Đối với các hạn chế loại đẳng thức, tức là không có điểm trong, nón các phương chấp nhận được (theo định nghĩa 1.2) bằng $\varnothing$.

Định nghĩa 1.3

Véc tơ v được gọi là phương tiếp xúc với Q tại x_0*, nếu*

$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \exists x_\varepsilon \in Q$ *sao cho*

$$x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon v + r(\varepsilon),$$

trong đó $r(\varepsilon) \in X$ *sao cho với bất kì lân cận U của 0:* $\dfrac{r(\varepsilon)}{\varepsilon} \in U$ *với mọi* $\varepsilon > 0$ *đủ nhỏ.*

Tập các phương tiếp xúc với Q tại x_0 lập thành một nón ta gọi là nón tiếp tuyến của Q tại x_0.

v là phương chấp nhận được của Q tại $x_0 \Rightarrow$ *v* là phương tiếp xúc của Q tại x_0.

Các phương tiếp xúc với Q tại x_0 lập thành một nón có đỉnh tại 0. Nón các phương tiếp xúc không đóng cũng không mở. Trong nhiều trường hợp nón đó là một không gian con.

Ta nói hạn chế Q loại đẳng thức là *đều* tại x_0, nếu nón các phương tiếp xúc với Q tại x_0 là lồi.

Định lí 1.4 *(Dubovitskii-Milyutin)*

Giả thiết:

(i) *Hàm* $f(x)$ *đạt cực tiểu địa phương trên* $Q := \bigcap_{i=1}^{n+1} Q_i$ *tại* $\overline{x} \in Q$;

(ii) $f(x)$ *giảm đều tại* $\overline{x}$, *với các nón phương giảm* K_0;

(iii) *Hạn chế loại bất đẳng thức* Q_i $(i = 1,\ldots,n)$ *là đều tại* $\overline{x}$, *với nón các phương chấp nhận được* K_i;

(iv) *Hạn chế loại đẳng thức* Q_{n+1} *là đều tại* $\overline{x}$, *với nón các phương tiếp xúc* K_{n+1}.

Khi đó, tồn tại $x_i^* \in K_i^*$ $(i = 0,1,\ldots,n+1)$ *không đồng thời bằng 0 thỏa mãn phương trình Euler - Lagrange*:

$$x_0^* + x_1^* + \cdots + x_n^* + x_{n+1}^* = 0 \tag{1.8}$$

Chứng minh

Trước hết ta chứng minh rằng từ giả thiết (i) ta phải có $\bigcap_{i=0}^{n+1} K_i = \varnothing.$ Điều này có nghĩa là một phương giảm không là phương tiếp xúc theo tất cả các hạn chế (Chú ý : một phương chấp nhận được cũng là phương tiếp xúc).

Phản chứng: $\bigcap_{i=0}^{n+1} K_i \neq \varnothing,$ tức là tồn tại $v \in K_i$ $(i = 1,\ldots,n+1)$. Theo định nghĩa của K_i $(i = 1,\ldots,n),$ tồn tại $\varepsilon_0 > 0$, lân cận U của v và số $\alpha < 0$ sao cho $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0),\ \forall u \in U$:

$$x_\varepsilon = \overline{x} + \varepsilon u \in \bigcap_{i=1}^{n} Q_i, \tag{1.9}$$

$$f\left(\overline{x} + \varepsilon u\right) \le f\left(\overline{x}\right) + \varepsilon\alpha. \tag{1.10}$$

Bởi vì v là phương tiếp xúc của Q_{n+1} tại $\overline{x}$, cho nên $\exists \varepsilon_1 > 0, \forall \varepsilon \in \left(0, \varepsilon_1\right)$, $\exists x_\varepsilon \in Q_{n+1}$ sao cho

$$x_\varepsilon = \overline{x} + \varepsilon v + r\left(\varepsilon\right) \in Q_{n+1} \tag{1.11}$$

Chọn ε_2 để với mọi $\varepsilon \in \left(0, \varepsilon_2\right)$ ta có

$$\frac{r\left(\varepsilon\right)}{\varepsilon} \in U - v,$$

hay là

$$u_\varepsilon = v + \frac{r\left(\varepsilon\right)}{\varepsilon} \in U \tag{1.12}$$

Đặt $\varepsilon_3 = min\left(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2\right)$. Từ (1.11) và (1.12) suy ra

$$x_\varepsilon = \overline{x} + \varepsilon u_\varepsilon \in Q_{n+1} \quad \left(\forall \varepsilon \in \left(0, \varepsilon_3\right)\right).$$

Từ (1.9) - (1.12) ta nhận được

$$x_\varepsilon = \bigcap_{i=1}^{n+1} Q_i \quad \left(\forall \varepsilon \in \left(0, \varepsilon_3\right)\right).$$

Từ (1.10), (1.12) ta có

$$f\left(\overline{x} + \varepsilon u_\varepsilon\right) \le f\left(\overline{x}\right) + \varepsilon\alpha < f\left(\overline{x}\right) \quad \left(\forall \varepsilon \in \left(0, \varepsilon_3\right)\right).$$

Như vậy, $\overline{x}$ không phải là cực tiểu địa phương của f trên Q : Mâu thuẫn với giả thiết $\left(i\right)$ (!). Do đó,

$$\bigcap_{i=0}^{n+1} K_i = \varnothing.$$

Từ các giả thiết $(ii),(iii)$ ta nhận được $K_0, K_1, \ldots, K_n$ là các nón lồi mở đỉnh tại 0. Theo giả thiết (iv), K_{n+1} là nón lồi đỉnh tại 0. Áp dụng định lí 1.3, tồn tại $x_i^* \in K_i^* \left(i = 0,1,\ldots,n+1\right)$ không đồng thời bằng 0 thỏa mãn (1.8). $\sqcup$

Từ chứng minh định lý 1.4 ta suy ra $\bigcap_{i=0}^{n+1} K_i \neq \varnothing \;\Rightarrow\; x_0^* \neq 0.$

Mệnh đề 1.4 ([6])

Giả sử

$$\xi \in X^*;\ K_1 = \left\{x:\ \langle \xi, x\rangle = 0\right\};\ K_2 = \left\{x:\ \langle \xi, x\rangle \geq 0\right\};\ K_3 = \left\{x:\ \langle \xi, x\rangle > 0\right\}.$$

Khi đó,

(a) $\qquad K_1^* = \left\{\lambda\xi:\ -\infty < \lambda < +\infty\right\};$

(b) $\qquad K_2^* = \left\{\lambda\xi:\ 0 \leq \lambda < +\infty\right\};$

(c) $\qquad K_3^* = \begin{cases} X^*, & \text{nếu } \xi = 0\ ; \\ K_2^*, & \text{nếu } \xi \neq 0. \end{cases}$

Định lý 1.5 *(Fakas-Minkovskii)*

Giả sử

$$K = \left\{\ x \in \mathbb{R}^m:\ \left\langle a^i, x\right\rangle \geq 0,\ a^i \in \mathbb{R}^m,\ i = 1,\ldots,n\ \right\};$$

Khi đó,

$$K^* = \left\{\ \sum_{i=1}^{n} a^i y_i:\ y_i \geq 0,\ i = 1,\ldots,n\ \right\}.$$

Chứng minh

Kí hiệu

$$Q_i := \left\{ x : \left\langle a^i, x \right\rangle \geq 0 \right\}.$$

Khi đó, $K = \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$. Theo mệnh đề 1.4,

$$Q_i^* = \left\{ a^i y_i : y_i \geq 0 \right\}.$$

Xét tập :

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^* = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a^i y_i : y_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Ta có

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} a^i y_i : y_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n \right\}$$

là tập đóng trong $\mathbb{R}^m$. Bởi vì trong $\mathbb{R}^m$ tất cả các tôpô là trùng nhau, cho nên $\sum_{i=1}^{n} Q_i^*$ là đóng *yếu trong $\mathbb{R}^m$. Theo [6, hệ quả 1.12.1],

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i \right)^* = \sum_{i=1}^{n} Q_i^*,$$

tức là

$$K^* = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a^i y_i : y_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n \right\}. \qquad \square$$

Chương 2

TỔNG QUÁT HOÁ ĐỊNH LÍ DUBOVITSTKII-MILYUTIN

Chương 2 trình bày các tổng quát hóa các điều kiện tối ưu của Dubovitskii-Milyutin. Các kết quả trong chương này là của I. Lasiecka [4].

2.1. CÁC XẤP XỈ NÓN

Trong chương này ta kí hiệu *E* là một không gian tôpô tuyến tính lồi địa phương; *A* là một tập hợp trong *E*; x^0 là điểm thuộc *A*; $U(x)$ là lân cận của *x* trong *E*; $OC(x)$ là nón mở chứa *x* với đỉnh tại 0; *S* là một đơn hình trong *E*; *I* là ánh xạ đồng nhất. Phát biểu $r(\varepsilon)/\varepsilon \in U(0)$ được hiểu theo nghĩa sau:

$$\forall U(0),\ \exists \varepsilon_1 > 0 \text{ sao cho, } \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_1),\ r(\varepsilon)/\varepsilon \in U(0).$$

Hơn nữa,

$$p^n \triangleq \left\{ \beta \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1 \right\}.$$

$P'\left(x^0\right)$ kí hiệu đạo hàm Fréchet của toán tử *P* tại x^0.

Các định nghĩa về xấp xỉ nón cũng như là mối quan hệ của chúng được trình bày trong mục này. Các định nghĩa của nón trong và xấp xỉ lồi cấp một được cho bởi Neustadt [9].

Định nghĩa 2.1

Nón trong $IC\left(A,x^0\right)$ *của A tại* x^0 *là nón lồi không tầm thường (nghĩa là nón chứa các điểm khác với đỉnh) thoả mãn các điều kiện sau:*

$(i)\ \forall x \in IC\left(A,x^0\right),\ \exists OC(x) \subset IC\left(A,x^0\right)$

sao cho

$(ii)\ \exists U\left(x^0\right)$ *thỏa mãn* $\left[\left(x^0 + OC(x)\right) \cap U\left(x^0\right) \setminus \left\{x^0\right\}\right] \subset A.$

Định nghĩa 2.2

Xấp xỉ lồi cấp một $CAI(A)$ *của A là một tập lồi thoả mãn các điều kiện sau:*

$(i)\quad O \in CAI(A);$

$(ii)\quad CAI(A)$ *chứa ít nhất một điểm khác O;*

$(iii)\quad \forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in CAI(A),\ \forall U(0),\ \exists \varepsilon_0(x_i, n) > 0$ *sao cho*

$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \exists \zeta_\varepsilon\colon\ p^n \to E$ *thỏa mãn*

$$\zeta_\varepsilon(\beta) \in \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + U(0)\right) \cap A;$$

$(iv)\quad \zeta_\varepsilon$ *là ánh xạ liên tục.*

Các định nghĩa của nón chấp nhận được và nón tiếp tuyến của *A* được cho bởi Dubovitskii-Milyutin [1].

Nhắc lại rằng nón chấp nhận được của *A* tại x^0 được xác định bởi

$$AC\left(A,x^0\right) = \Big\{ x \in E \mid \exists \varepsilon_1 > 0,\ \exists U(x) \text{ sao cho } \forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_1),\ \forall \overline{x} \in U(x),\ \left(x^0 + \varepsilon \overline{x}\right) \in A \Big\}.$$

Nhắc lại rằng nón tiếp tuyến của *A* tại x^0 được xác định bởi

$TC\left(A,x^0\right) = \big\{ x \in E \mid \exists \varepsilon_1 > 0$ sao cho $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_1),\ \exists r(\varepsilon) \in E$ thỏa mãn

$$\left(x^0 + \varepsilon x + r(\varepsilon)\right) \in A \text{, trong đó } r(\varepsilon)/\varepsilon \in U(0)\big\}.$$

Một nón chấp nhận được hoặc nón tiếp tuyến được gọi là chính quy, và được kí hiệu tương ứng bởi $RAC\left(A,x^0\right)$ hoặc $RTC\left(A,x^0\right)$, nếu nó là nón lồi. Sự tồn tại của nón trong kéo theo sự tồn tại của xấp xỉ lồi cấp một. Thật vậy, ta chỉ cần đặt:

$$\zeta_\varepsilon = I$$

trong định nghĩa 2.2 là được.

Hơn nữa, một kết luận trực tiếp của hai định nghĩa nhắc lại ở trên là

$$AC\left(A,x^0\right) \subset TC\left(A,x^0\right).$$

Các quan hệ của

$$IC\left(A,x^0\right), CAI\left(A,x^0\right) \text{ và } AC\left(A,x^0\right), TC\left(A,x^0\right)$$

được trình bày trong các bổ đề sau.

Bổ đề 2.1

Mọi $IC\left(A,x^0\right)$ *được chứa trong* $AC\left(A,x^0\right)\cup\{0\}$ *và mọi nón lồi mở nằm trong* $AC\left(A,x^0\right)\cup\{0\}$ *là một nón trong.*

Chứng minh

Ta sẽ chỉ ra rằng mọi nón trong được chứa trong một nón chấp nhận được. Thật vậy, giả sử $\exists\, \overline{x} \neq 0$ sao cho

$$\overline{x} \in IC\left(A,x^0\right) \text{ và } \overline{x} \notin AC\left(A,x^0\right).$$

Khi đó, $\exists OC(\overline{x}) \subset IC\left(A,x^0\right), \exists U\left(x^0\right)$ sao cho

$$\left[\left(x^0 + OC(\overline{x})\right) \cap U\left(x^0\right) \setminus \left\{x^0\right\}\right] \subset A, \tag{2.1}$$

$\forall \varepsilon_1 > 0, \forall U(\overline{x}), \exists \varepsilon \in (0, \varepsilon_1), \exists \overline{\overline{x}} \in U(\overline{x})$ sao cho

$$\left(x^0 + \varepsilon \overline{\overline{x}}\right) \notin A. \tag{2.2}$$

Kí hiệu

$$U(\overline{x}) = OC(\overline{x}) \setminus \{0\}.$$

Ta chọn ε_1 sao cho

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1),\ \left(x^0 + \varepsilon \overline{\overline{x}}\right) \in U\left(x^0\right).$$

Như vậy,

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1),\ \left(x^0 + \varepsilon \overline{\overline{x}}\right) \in \left(x^0 + OC(\overline{x})\right) \cap U\left(x^0\right).$$

Vì thế , (2.1) kéo theo

$$\left(x^0 + \varepsilon \overline{\overline{x}}\right) \in A.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.2).

Để chứng minh phần hai của bổ đề 2.1 giả sử OC là nón lồi mở bất kì nằm trong $AC\left(A, x^0\right) \cup \{0\}$ và $0 \neq \overline{x} \in OC.$ Theo định nghĩa nón chấp nhận được, ta có

$$\exists \varepsilon_1 > 0,\ \exists U(\overline{x}) \text{ sao cho } \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_1),\ \forall \overline{\overline{x}} \in U(\overline{x}),\ \left(x^0 + \varepsilon \overline{\overline{x}}\right) \in A. \tag{2.3}$$

Giả sử $U_1(\overline{x})$ là lân cận bất kì của $\overline{x}$ nằm trong OC . Đặt

$$U_0(\overline{x}) = U_1(\overline{x}) \cap U(\overline{x}),$$

$$OC(\overline{x}) = \left\{\ \alpha \overline{\overline{x}} : \overline{\overline{x}} \in U_0(\overline{x}),\ \alpha \geq 0\ \right\}.$$

Giả sử $U\left(x^0\right)$ là lân cận bất kì của x^0 với tính chất sau: nếu

$$\overline{\overline{x}} \in U_0(\overline{x}) \text{ và } \left(x^0 + \alpha\overline{\overline{x}}\right) \in U\left(x^0\right)$$

thì

$$\alpha < \varepsilon_1.$$

Bây giờ việc kiểm tra $OC(\overline{x})$ và $U\left(x^0\right)$ thoả mãn tất cả các điều kiện của định nghĩa 2.1 là đơn giản. Thật vậy,

$$\forall x \in \left(x^0 + OC(\overline{x})\right) \cap U\left(x^0\right),$$

ta có

$$x = x^0 + \alpha\overline{\overline{x}},$$

trong đó

$$\overline{\overline{x}} \in U_0(\overline{x}) \text{ và } \alpha < \varepsilon_1.$$

Vì thế, (2.3) kéo theo $x \in A$, điều này kết thúc việc chứng minh OC là một nón trong. $\square$

Từ bổ đề 2.1 ta nhận được hệ quả sau.

Hệ quả 2.1

$RAC\left(A, x^0\right) \cup \{0\}$ là nón trong của A tại x^0.

Bổ đề 2.2

Mọi nón lồi nằm trong $CAI\left(A \setminus \left\{x^0\right\}\right)$ thì nằm trong $TC\left(A, x^0\right)$.

Chứng minh

Giả sử C là một nón lồi nằm trong $CAI\left(A \setminus \left\{x^0\right\}\right)$ và $x \in C$. Khi đó, tồn tại một đơn hình $S \subset C$ với các đỉnh $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_n$ sao cho

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i \beta_i.$$

Điều này suy ra từ tính lồi của C. Từ định nghĩa 2.2 ta suy ra $\forall U(0)$, $\exists \varepsilon_0 > 0$ sao cho

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \exists \zeta_\varepsilon:\ p^n \to E, \tag{2.4}$$

thỏa mãn

$$\zeta_\varepsilon(\beta) = \left(\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i + \varepsilon u(0)\right) \in \left(A \setminus \left\{x^0\right\}\right),\ \ u(0) \in U(0).$$

Đặt

$$r(\varepsilon)\ =\ u(0),$$

trong đó

$$u(0) \in U(0).$$

Khi đó, (2.4) kéo theo

$$\left(x^0 + \varepsilon x + r(\varepsilon)\right) \in A.$$

Vì vậy,

$$x \in TC\left(A,\ x^0\right). \qquad \square$$

Định nghĩa 2.3

Nón ngoài $EC\left(A, x^0\right)$ *của A tại* x^0 *là nón lồi không tầm thường thỏa mãn các điều kiện sau:*

$$\forall x \in EC\left(A, x^0\right), \forall OC(x), \exists U_1\left(x^0\right) \text{ sao cho với mọi } U\left(x^0\right) \subset U_1\left(x^0\right),$$

$$\left[\left(x^0 + OC(x)\right) \cap A \cap U\left(x^0\right)\right] \neq \varnothing.$$

Bổ đề trình bày ở dưới chỉ ra rằng nón ngoài là một loại xấp xỉ yếu hơn nón tiếp tuyến; nón ngoài thực chất là một loại xấp xỉ yếu nhất.

Bổ đề 2.3

Mọi nón lồi nằm trong nón tiếp tuyến là một nón ngoài.

Chứng minh

Giả sử C là một nón lồi nằm trong $TC\left(A,x^0\right)$ và $x \in C$. Khi đó, $\exists \varepsilon_1 > 0$, $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_1)$, $\exists r(\varepsilon) \in U(0)$ sao cho

$$\left(x^0 + \varepsilon x + r(\varepsilon)\right) \in A. \tag{2.5}$$

Giả sử $OC(x)$ là một nón mở bất kì chứa x. Khi đó $\exists \varepsilon_0 > 0$ sao cho $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$,

$$\left[x^0 + \varepsilon\left(x + r(\varepsilon)/\varepsilon\right)\right] \in \left(x^0 + OC(x)\right). \tag{2.6}$$

Kí hiệu

$$\varepsilon_2 = min(\varepsilon_0,\varepsilon_1),$$

$$x(\varepsilon) = x^0 + \varepsilon\left(x + r(\varepsilon)/\varepsilon\right),\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_2).$$

Khi đó, (2.5) và (2.6) kéo theo

$$\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_2), x(\varepsilon) \in \left(x^0 + OC(x)\right) \cap A.$$

Vì vậy, $\forall U\left(x^0\right)$, $\exists \varepsilon_3 \in (0,\varepsilon_2)$ sao cho

$$\left[x^0 + \varepsilon_3\left(x + r(\varepsilon)/\varepsilon_3\right)\right] \in U\left(x^0\right).$$

Từ đó, ta nhận được

$$\forall x \in C,\ \forall OC(x),\ \forall U\left(x^0\right),\ \exists x(\varepsilon_3) \neq x^0,$$

sao cho

$$x(\varepsilon_3) \in \left[\left(x^0 + OC(x) \right) \cap U\left(x^0 \right) \cap A \right]. \tag{2.7}$$

Từ (2.7) ta suy ra

$$\forall U\left(x^0\right),\ \left[\left(x^0 + OC(x) \right) \cap U\left(x^0 \right) \setminus \left\{ x^0 \right\} \right] \neq \varnothing;$$

Do đó, C là một nón ngoài của A tại x^0 theo định nghĩa 2.3. $\square$

Từ bổ đề 2.3 ta nhận được hệ quả sau.

Hệ quả 2.2

$RTC\left(A, x^0\right)$ là một nón ngoài của A tại x^0.

Nhận xét 2.1

Không phải mọi nón ngoài đều là nón tiếp tuyến. Chẳng hạn một dãy vô hạn các điểm mà nó không có nón tiếp tuyến mặc dù nó có nón ngoài là

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^{-1}, x = 2^{-n},\ n = 0,1,2,\ldots \right\},\ x^0 = 0.$$

Ở đây, $\mathbb{R}$ là nón ngoài của A tại x^0 nhưng nón tiếp tuyến của A không tồn tại. Từ các kết quả trên ta có quan hệ thứ tự giữa các xấp xỉ nón như sau:

$$RAC \leftrightarrow IC \to CAI \to TC \to EC$$

trong đó

$$A \to B$$

có nghĩa là nếu A tồn tại thì B tồn tại.

2.2. CÁC TỔNG QUÁT HÓA CỦA ĐỊNH LÝ DUBOVITSKII-MILYUTIN

Điều kiện cần tối ưu được cho bởi Dubovitskii-Milyutin dựa trên việc tách một nón chấp nhận được và một nón tiếp tuyến, trong đó nón chấp nhận được là một xấp xỉ nón của tập hợp được mô tả bởi các ràng buộc bất đẳng thức và tập mức của hàm mục tiêu, còn nón tiếp tuyến là xấp xỉ của tập được mô tả bởi các ràng buộc đẳng thức. Neustadt sử dụng việc tách một nón trong và một xấp xỉ cấp một.

Một định lý được phát biểu dưới đây chỉ ra rằng với giả thiết nào đó, các nón trong và ngoài có thể tách được. Những xấp xỉ này yếu hơn những xấp xỉ đã được sử dụng bởi Dubovitskii-Milyutin và Neustadt vì

$$CAI \to EC \text{ và } TC \to EC.$$

Định lý 2.1 *(Định lý tách).*

Giả sử các điều kiện sau thoả mãn:

(i) $A, B \subset E,\ int\, A \neq \varnothing;\ x^0 \in A \cap B;$

(ii) $\exists U\left(x^0\right)$ *sao cho* $(int\, A) \cap B \cap U\left(x^0\right) = \varnothing;$

(iii) *Tồn tại* $IC\left(A, x^0\right)$ *và* $EC\left(B, x^0\right).$

Khi đó, $IC\left(A, x^0\right)$ *và* $EC\left(B, x^0\right)$ *tách được.*

Chứng minh

Ta cần chỉ ra rằng

$$\left[IC\left(A, x^0\right) \cap EC\left(B, x^0\right) \setminus \{0\}\right] = \varnothing.$$

Giả sử điều này không đúng. Khi đó, tồn tại $\overline{x} \neq 0$ sao cho

$$\overline{x} \in \left[IC\left(A, x^0\right) \cap EC\left(B, x^0\right)\right].$$

Từ định nghĩa 2.1, suy ra $\exists OC(\overline{x}) \subset IC\left(A, x^0\right), \exists U_0\left(x^0\right)$ sao cho

$$\left(x^0 + OC(\overline{x})\right) \cap U_0\left(x^0\right) \setminus \left\{x^0\right\} \subset A. \tag{2.8}$$

Bởi vì

$$\overline{x} \in EC\left(B, x^0\right),$$

cho nên $\exists U_1\left(x^0\right)$ sao cho $\forall U\left(x^0\right) \subset U_1\left(x^0\right)$,

$$\left[\left(x^0 + OC(\overline{x})\right) \cap U\left(x^0\right) \cap B \setminus \left\{x^0\right\}\right] \neq \varnothing. \qquad (2.9)$$

Kí hiệu

$$U_2\left(x^0\right) := U_1\left(x^0\right) \cap U_0\left(x^0\right);$$

Từ (2.8) và (2.9) ta suy ra

$$\left[\left(x^0 + OC(\overline{x})\right) \cap U_2\left(x^0\right) \setminus \left\{x^0\right\}\right] \subset A,$$

$$\left[\left(x^0 + OC(\overline{x})\right) \cap U_2\left(x^0\right) \cap B \setminus \left\{x^0\right\}\right] \neq \varnothing. \qquad (2.10)$$

Như vậy, tồn tại $x \neq x^0$ sao cho

$$x \in \left(x^0 + OC(\overline{x})\right) \cap U_2\left(x^0\right) \cap A \cap B. \qquad (2.11)$$

Hơn nữa, từ (2.10) và (2.11) kéo theo *x* là một điểm trong của *A*. Từ (2.11), ta có

$$x \in (int\, A) \cap B \cap U\left(x^0\right).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết (ii). □

Dựa trên định lý 2.1, định lý tiếp theo chỉ ra rằng điều kiện tối ưu Dubovitskii-Milyutin có thể suy rộng được.

Định lý 2.2 *(Định lý Dubovitskii-Milyutin suy rộng)*

Giả sử

(i) $A_0, A_1, \ldots, A_n \subset E$; $B \subset E$; $x^0 \in \bigcap_{i=0}^{n} A_i \cap B$;

(ii) *Tồn tại* $IC\left(A_i, x^0\right), i = 0, \ldots, n$ *và* $EC\left(B, x^0\right)$;

(iii) $\exists U_1\left(x^0\right)$ *sao cho* $\forall U\left(x^0\right)\subset U_1\left(x^0\right)$,

$$\left[\left(int\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)\cap B\cap U\left(x^0\right)\setminus\left\{x^0\right\}\right]=\varnothing.$$

Khi đó, tồn tại các phiếm hàm tuyến tính liên tục

$$f_i\in\left[IC\left(A_i,x^0\right)\right]^*,\ i=0,\ldots,n,\ f_{n+1}\in\left[EC\left(B,x^0\right)\right]^*,$$

không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\sum_{i=0}^{n+1} f_i=0.$$

Chứng minh

Trước hết, ta giả sử rằng

$$\bigcap_{i=0}^{n} IC\left(A_i,x^0\right)\neq\{0\}.$$

Khi đó,

$$\bigcap_{i=0}^{n} IC\left(A_i,x^0\right) \text{ là nón trong của } \bigcap_{i=0}^{n} A_i.$$

Định lý 2.1 có thể áp dụng cho các tập

$$\bigcap_{i=0}^{n} A_i \text{ và } B.$$

Do đó, tồn tại một phiếm hàm tuyến tính liên tục $f\in E^*$ sao cho

$$f(x)\geq 0,\quad \forall x\in\bigcap_{i=0}^{n} IC\left(A_i,x^0\right), \tag{2.12}$$

$$f(x)\leq 0,\quad \forall x\in EC\left(B,x^0\right). \tag{2.13}$$

Từ định lý 1.2 ta suy ra

$$f = \sum_{i=0}^{n} f_i,$$

trong đó

$$f_i \in \left[IC\left(A_i, x^0 \right) \right]^*.$$

(định lý 1.2 có thể áp dụng được vì $IC\left(A_i, x^0 \right)$ là các nón lồi mở và có giao khác rỗng). Kí hiệu

$$f_{n+1} = -f\,.$$

Như vậy, (2.13) kéo theo

$$f_{n+1} \in \left[EC\left(B, x^0 \right) \right]^* \text{ và } \sum_{i=0}^{n+1} f_i = 0.$$

Điều đó kết thúc chứng minh của định lý trong trường hợp

$$\bigcap_{i=0}^{n} IC\left(A_i, x^0 \right) \neq \{0\}.$$

Nếu

$$\bigcap_{i=0}^{n} IC\left(A_i, x^0 \right) = \{0\},$$

thì tồn tại

$$0 \le s < n$$

sao cho

$$\bigcap_{i=0}^{n} IC\left(A_i, x^0 \right) \neq \{0\}.$$

Dùng lập luận tương tự, ta nhận được

$$\sum_{i=0}^{n+1} f_i = 0,$$

trong đó

$$f_{s+2} = \cdots = f_{n+1} = 0 \qquad \square$$

Chú ý rằng các điều kiện cần tối ưu Dubovitskii-Milyutin có thể phát biểu như là hệ quả đơn giản của định lý 2.2, bởi vì nón tiếp tuyến là một loại xấp xỉ mạnh hơn nón ngoài.

Một phát biểu khác của điều kiện tối ưu Dubovitskii-Milyutin được gọi là định lý Dubovitskii-Milyutin đối ngẫu .

Trong định lý đối ngẫu ta xấp xỉ tập ràng buộc bất đẳng thức bởi nón chấp nhận được và tập mức của phiếm hàm bởi một nón ngoài (các ràng buộc đẳng thức được loại bỏ hoặc diễn đạt bởi hai ràng buộc bất đẳng thức).

Cho $F : E \to \mathbb{R}$ và $A^0 \equiv \left\{x \in E \mid F(x) < F\left(x^0\right)\right\} \cup \left\{x^0\right\}$.

Định lý 2.3 *(Định lý đối ngẫu).*

Giả sử

(i) $A_0, A_1, \ldots, A_n \subset E;\ x^0 \in \bigcap_{i=0}^{n} A_i;$

(ii) *Tồn tại* $RAC\left(A_i, x^0\right),\ i = 1, \ldots, n$ *và* $EC\left(A_0, x^0\right);$

(iii) $F(x)$ *đạt giá trị cực tiểu địa phương tại* x^0 *trên tập* $\bigcap_{i=0}^{n} A_i.$

Khi đó, tồn tại các phiếm hàm tuyến tính liên tục

$$f_i \in \left[RAC\left(A_i, x^0\right)\right]^*, \quad i = 1, \ldots, n, \quad f_0 \in \left[EC\left(A_0, x^0\right)\right]^*,$$

không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = 0.$$

Chứng minh suy trực tiếp từ định lý 2.2. Thật vậy, ta đặt

$$B = A_0.$$

Bởi vì x^0 là cực tiểu địa phương của $F(x)$ trên $\bigcap_{i=0}^{n} A_i,$ cho nên

$$\left[\left(int\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B \cap U\left(x^0\right) \setminus \left\{x^0\right\}\right] = \emptyset.$$

Chú ý rằng

$$RAC\left(A_i, x^0\right) \cup \{0\}$$

là một nón trong của *A* (hệ quả 2.1). Khi đó, tất cả các giả thiết của định lý 2.2 thoả mãn , và do đó ta nhận được định lý 2.3.

Chương 3

ĐIỀU KIỆN CẦN CHO NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN ĐA MỤC TIÊU

Chương 3 trình bày các tổng quát hóa của định lý luân hồi Tucker cho hệ các bất đẳng thức, đẳng thức và bao hàm thức trên cơ sở các định lý Dubovitskii-Milyutin đã trình bày trong chương 1, và các điều kiện cần Kuhn-Tucker với tất cả các nhân tử Lagrange dương ứng với các thành phần của hàm mục tiêu, cho nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa mục tiêu với các ràng buộc bất đẳng thức, đẳng thức và ràng buộc tập trong không gian định chuẩn. Các kết quả của chương này là của Đ. V. Lưu - N. M. Hùng [5].

3.1. CÁC KHÁI NIỆM

Giả sử X là một không gian tuyến tính định chuẩn và A là một tập con khác rỗng của X. Cho f, g và h là các ánh xạ từ X tương ứng vào $\mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^q$ và $\mathbb{R}^r$. Chú ý f, g, h có thể viết như sau:

$$f = \left(f_1, f_2, \ldots, f_p\right), g = \left(g_1, g_2, \ldots, g_q\right), h = \left(h_1, h_2, \ldots, h_r\right),$$

trong đó

$$f_k, g_j, h_l : X \mapsto \mathbb{R} \quad \left(k = 1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, q;\ l = 1, \ldots, r\right).$$

Trong chương này ta nghiên cứu bài toán quy hoạch đa mục tiêu sau đây:

$$\text{(VP)} \qquad \begin{cases} \min f\left(x\right), \\ g_j\left(x\right) \le 0,\ j = 1, \ldots, q; \\ h_l\left(x\right) = 0,\ \ l = 1, \ldots, r; \\ x \in A. \end{cases}$$

Kí hiệu M là tập chấp nhận được của bài toán (VP)

$$M = \{ x \in A : g_j(x) \le 0,\ h_l(x) = 0,\ j = 1, \ldots, q;\ l = 1, \ldots, r \}.$$

Nhắc lại rằng một điểm $\bar{x} \in M$ được gọi là nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (VP) nếu tồn tại số $\delta > 0$ sao cho $\forall x \in M \cap B(\bar{x};\delta)$,

$$f(x) - f(\bar{x}) \notin -\mathbb{R}_+^p \setminus \{0\},$$

trong đó $\mathbb{R}_+^p$ là orthant không âm của $\mathbb{R}^p$, $B(\bar{x};\delta)$ kí hiệu hình cầu mở tâm $\bar{x}$ bán kính δ. Điều này có nghĩa $\bar{x} \in M$ là một nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (VP) nếu tồn tại số $\delta > 0$ sao cho không tồn tại $x \in M \cap B(\bar{x};\delta)$ thỏa mãn

$$f_k(x) \le f_k(\bar{x}), \quad k = 1, \ldots, p,$$

$$f_i(x) < f_i(\bar{x}) \text{ với một } i \in \{1, \ldots, p\} \text{ nào đó.}$$

Nhắc lại nón tiếp liên của A tại $\bar{x} \in A$ là tập sau:

$$CC(A;\bar{x}) = \left\{ v \in X : \exists v_n \to v,\ \exists t_n \to 0^+ \text{ sao cho } \bar{x} + t_n v_n \in A, \forall n \right\}.$$

Nón các phương tiếp tuyến dãy (hoặc nón radian dãy) của A tại $\bar{x} \in A$ là tập sau:

$$ZC(A;\bar{x}) = \left\{ v \in X : \exists t_n \to 0^+ \text{ sao cho } \bar{x} + t_n v \in A, \forall n \right\}.$$

Chú ý cả hai nón trên là khác rỗng. Nón $CC(A;\bar{x})$ là đóng và nó có thể không lồi;

$$ZC(A;\bar{x}) \subset CC(A;\bar{x}).$$

Giả sử $\tilde{f}$ là hàm thực xác định trên X. Các đạo hàm theo phương sẽ được sử dụng sau đây:

Đạo hàm Dini dưới của hàm $\tilde{f}$ tại $\bar{x} \in X$ theo phương $v \in X$ là

$$\underline{D}\tilde{f}\left(\bar{x};v\right) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{\tilde{f}\left(\bar{x}+tv\right)-\tilde{f}\left(\bar{x}\right)}{t};$$

Đạo hàm Dini trên của hàm $\tilde{f}$ tại $\bar{x} \in X$ theo phương $v \in X$ là

$$\overline{D}\tilde{f}\left(\bar{x};v\right) = \limsup_{t \to 0^+} \frac{\tilde{f}\left(\bar{x}+tv\right)-\tilde{f}\left(\bar{x}\right)}{t};$$

Đạo hàm Hadamard dưới của hàm $\tilde{f}$ tại $\bar{x} \in X$ theo phương $v \in X$ là

$$\underline{d}\tilde{f}\left(\bar{x};v\right) = \liminf_{(t,u) \to \left(0^+,v\right)} \frac{\tilde{f}\left(\bar{x}+tu\right)-\tilde{f}\left(\bar{x}\right)}{t};$$

Đạo hàm Hadamard trên của hàm $\tilde{f}$ tại $\bar{x} \in X$ theo phương $v \in X$ là

$$\overline{d}\tilde{f}\left(\bar{x};v\right) = \limsup_{(t,u) \to \left(0^+,v\right)} \frac{\tilde{f}\left(\bar{x}+tu\right)-\tilde{f}\left(\bar{x}\right)}{t};$$

Nếu $\underline{D}\tilde{f}\left(\bar{x};v\right) = \overline{D}\tilde{f}\left(\bar{x};v\right)$, thì ta kí hiệu giá trị chung của chúng là $D\tilde{f}\left(\bar{x};v\right)$. Đó là đạo hàm theo phương thông thường của $\tilde{f}$ tại $\bar{x} \in X$ theo phương $v \in X$. Trong trường hợp $D\tilde{f}\left(\bar{x};.\right)$ là ánh xạ tuyến tính liên tục thì $\tilde{f}$ gọi là khả vi Gâteaux tại $\bar{x}$ và

$$D\tilde{f}\left(\bar{x};v\right) = \left\langle \nabla_G \tilde{f}\left(\bar{x}\right), v\right\rangle,$$

trong đó $\nabla_G \tilde{f}\left(\bar{x}\right)$ kí hiệu là đạo hàm Gâteaux của $\tilde{f}$ tại $\bar{x}$ và $\left\langle \nabla_G \tilde{f}\left(\bar{x}\right), v\right\rangle$ là giá trị của phiếm hàm tuyến tính $\nabla_G \tilde{f}\left(\bar{x}\right)$ tại điểm *v*. Như vậy, nếu $\tilde{f}$ khả vi Fréchet tại $\bar{x}$ với đạo hàm Fréchet $\nabla\tilde{f}\left(\bar{x}\right)$ thì

$$D\tilde{f}\left(\bar{x};v\right) = \left\langle \nabla\tilde{f}\left(\bar{x}\right), v\right\rangle.$$

Tương tự, nếu $\underline{d}\tilde{f}(\overline{x};v)=\overline{d}\tilde{f}(\overline{x};v)$ thì ta kí hiệu giá trị chung của chúng là $d\tilde{f}(\overline{x};v)$. Đó là đạo hàm Hadamard của $\tilde{f}$ tại $\overline{x}$ theo phương *v*. Chú ý nếu $d\tilde{f}(\overline{x};v)$ tồn tại thì $D\tilde{f}(\overline{x};v)$ cũng tồn tại và chúng bằng nhau.

Đặt

$$I(\overline{x})=\left\{j\in\{1,\ldots,q\}:\ g_j(\overline{x})=0\right\};$$

$$Q=\{x\in A: f_k(x)\le f_k(\overline{x}),\ g_j(x)\le 0,\ h_l(x)=0,$$
$$k=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,q;\ l=1,\ldots,r\};$$

$$Q^i=\{x\in A: f_k(x)\le f_k(\overline{x}),\ g_j(x)\le 0,\ h_l(x)=0,$$
$$k=1,\ldots,p,\ k\ne i;\ j=1,\ldots,q;\ l=1,\ldots,r\}\quad \left(i\in\{1,\ldots,p\}\right).$$

Nếu với mỗi một $v\in ZC(A;\overline{x})$ mà $Dh_l(\overline{x};v)(l=1,\ldots,r)$ tồn tại, thì ta đặt

$$C_D(Q;\overline{x})=\{\ v\in ZC(A;\overline{x}):\ \underline{D}f_k(\overline{x};v)\le 0,\ k=1,\ldots,p,$$
$$\underline{D}g_j(\overline{x};v)\le 0,\ j\in I(\overline{x}),$$
$$Dh_l(\overline{x};v)=0,\ l=1,\ldots,r\ \}.$$

Nếu với mỗi một $v\in CC(A;\overline{x})$ mà $dh_l(\overline{x};v)(l=1,\ldots,r)$ tồn tại, thì đặt

$$C_d(Q;\overline{x})=\{\ v\in CC(A;\overline{x}):\ \underline{d}f_k(\overline{x};v)\le 0,\ k=1,\ldots,p,$$
$$\underline{d}g_j(\overline{x};v)\le 0,\ j\in I(\overline{x}),$$
$$dh_l(\overline{x};v)=0,\ l=1,\ldots,r\ \}.$$

Do tính thuần nhất dương của các đạo hàm theo phương Dini và Hadamard dưới nên $C_D(Q;\overline{x})$ và $C_d(Q;\overline{x})$ là các nón đỉnh tại 0.

3.2. ĐỊNH LÝ LUÂN HỒI KIỂU TUCKER

Để dẫn điều kiện cần Kuhn-Tucker cho nghiệm hữu hiệu. Trong mục này, ta nghiên cứu các định lý luân hồi cho một hệ gồm các bất đẳng thức, các đẳng thức và một bao hàm thức.

Giả sử X là một không gian tuyến tính định chuẩn với không gian liên hợp X^*. Giả sử a_k, b_j, c_l là các véc tơ thuộc X^* $(k=1,\ldots,p; j=1,\ldots,q; l=1, \ldots,r)$ và A là một tập con khác rỗng của X. Với $i \in \{1,...,p\}$, ta đặt

$$A_k = \{ v \in X : \langle a_k, v \rangle \le 0 \} \quad (k=1,\ldots,p; k \ne i),$$

$$\tilde{A}_i = \{ v \in X : \langle a_i, v \rangle < 0 \},$$

$$B_j = \{ v \in X : \langle b_j, v \rangle \le 0 \} \quad (j=1,\ldots,s),$$

$$C_l = \{ v \in X : \langle c_l, v \rangle = 0 \} \quad (l=1,\ldots,r).$$

Chú ý A_k và B_j $(k=1,\ldots,p; k \ne i; j=1,\ldots,s)$ là các nón lồi đóng có đỉnh tại 0, $\tilde{A}_i$ là nón lồi mở có đỉnh tại 0 và C_l $(l=1,\ldots,r)$ là các không gian con tuyến tính đóng của X.

Định lý 3.1

Giả sử

(a) *K là một nón con lồi khác rỗng bất kì của* $CC(A;\bar{x})$ *có đỉnh tại 0 và K đóng;*

(b) *Với mỗi* $i \in \{1,\ldots,p\}$, *tập hợp*:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{p} A_k^* + \sum_{j=1}^{s} B_j^* + \sum_{l=1}^{r} C_l^* + K^*$$

đóng **yếu trong* X^*.

Khi đó, hai phát biểu sau là tương đương:

(i) *Với mỗi* $i \in \{1,\ldots,p\}$, *hệ sau*

$$\langle a_k, v\rangle \le 0,\ \ k = 1,\ldots,p;\ k \ne i; \tag{3.1}$$

$$\langle a_i, v\rangle < 0, \tag{3.2}$$

$$\langle b_j, v\rangle \le 0,\ \ j = 1,\ldots,s, \tag{3.3}$$

$$\langle c_l, v\rangle = 0,\ \ l = 1,\ldots,r, \tag{3.4}$$

$$v \in K, \tag{3.5}$$

không có nghiệm $v \in X$.

(ii) *Tồn tại* $\overline{\lambda}_k > 0\ (k = 1,\ldots,p), \overline{\mu}_j \ge 0\ (j = 1,\ldots,s)$ *và* $\overline{\nu}_l \in \mathbb{R}\ \ (l = 1,\ldots,r)$

sao cho

$$\sum_{k=1}^{p} \overline{\lambda}_k \langle a_k, v\rangle + \sum_{j=1}^{s} \overline{\mu}_j \langle b_j, v\rangle + \sum_{l=1}^{r} \overline{\nu}_l \langle c_l, v\rangle \ge 0\ \ (\forall v \in K). \tag{3.6}$$

Nhận xét 3.1

(1) Nếu giả thiết (a) được thay bởi K là một nón con lồi khác rỗng của $ZC(A;\overline{x})$ và K là đóng thì định lý 3.1 vẫn đúng bởi vì

$$ZC(A;\overline{x}) \subset CC(A;\overline{x}).$$

(2) Trong trường hợp $K = X$, bất đẳng thức (3.6) tương đương với

$$\sum_{k=1}^{p} \overline{\lambda}_k a_k + \sum_{j=1}^{s} \overline{\mu}_j b_j + \sum_{l=1}^{r} \overline{\nu}_l c_l = 0.$$

Chứng minh định lý 3.1

$(i) \Rightarrow (ii)$ Ta chỉ cần xét trường hợp tất cả $a_k \neq 0(k=1,\ldots,p)$ bởi vì trong trường hợp tồn tại $a_{k_0}=0$ thì ta lấy $\overline{\lambda}_{k_0}=1$ là được. Với mỗi $i \in \{1,\ldots,p\}$, giả sử hệ (3.1)-(3.5) không có nghiệm $v \in X$. Đặt

$$D_i = \left(\bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} A_k \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{s} B_j \right) \cap \left(\bigcap_{l=1}^{r} C_l \right) \cap K,$$

ta thấy rằng D_i là một nón lồi đóng khác rỗng trong X có đỉnh tại 0 và

$$\tilde{A}_i \cap D_i = \varnothing.$$

Chú ý $\tilde{A}_i$ là một nón lồi khác rỗng có đỉnh tại 0, bởi vì $a_i \neq 0$. Từ định lí 1.3 suy ra tồn tại $\xi_i \in \tilde{A}_i^*$ và $\eta_i \in D_i^*$ không đồng thời bằng 0 sao cho

$$\xi_i + \eta_i = 0 \tag{3.7}$$

Từ (3.7) suy ra ngay rằng $\xi_i \neq 0$ (cũng như $\eta_i \neq 0$). Bởi vì các nón lồi A_k, B_j, $C_l\left(k=1,\ldots,p; k \neq i; j=1,\ldots,s; l=1,\ldots,r\right)$ và K là đóng cho nên nó là đóng yếu. Vì thế các giả thiết của định lý 1.2 là thoả mãn. Sử dụng định lý 1.2, ta có

$$D_i^* = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} A_k^* + \sum_{j=1}^{s} B_j^* + \sum_{l=1}^{r} C_l^* + K^*. \tag{3.8}$$

Mặt khác, do mệnh đề 1.4 ta có

$$A_k^* = \left\{ \lambda a_k : \lambda \leq 0 \right\}, \quad k=1,\ldots,p; k \neq i;$$

$$\tilde{A}_i^* = \left\{ \lambda a_i : \lambda \leq 0 \right\} \quad \text{(cũng như } a_i \neq 0\text{);}$$

$$B_j^* = \left\{\mu b_j : \mu \le 0\right\}, \quad j = 1,\dots,s;$$

$$C_l^* = \left\{\nu c_l : \nu \in \mathbb{R}\right\}, \quad l = 1,\dots,r.$$

Bởi vì $\xi_i \in \mathbb{A}_i^*$, $\xi_i \ne 0$ cho nên $\xi_i = \lambda_i a_i$ với $\lambda_i < 0$. Do (3.8), tồn tại

$$\lambda_{ik} \le 0, \left(k = 1,\dots,p;\ k \ne i\right),\ \mu_{ij} \le 0\ \left(j = 1,\dots,s\right), \nu_{il} \in \mathbb{R}\ \left(l = 1,\dots,r\right)$$

và $\zeta_i \in K^*$ sao cho

$$\eta_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{p} \lambda_{ik} a_k + \sum_{j=1}^{s} \mu_{ij} b_j + \sum_{l=1}^{r} \nu_{il} c_l + \zeta_i.$$

Đặt

$$\bar{\lambda}_{ik} = -\lambda_{ik}\ \left(k = 1,\dots,p; k \ne i\right), \bar{\lambda}_{ii} = -\lambda_i,$$

$$\bar{\mu}_{ij} = -\mu_{ij}\ \left(j = 1,\dots,s\right), \bar{\nu}_{il} = -\nu_{il}\ \left(l = 1,\dots,r\right),$$

ta có

$$\bar{\lambda}_{ik} \ge 0 \left(k = 1,\dots,p; k \ne i\right), \bar{\lambda}_{ii} > 0, \bar{\mu}_{ij} \ge 0 \left(j = 1,\dots,s\right) \text{ và } \bar{\nu}_{il} \in \mathbb{R}\ \left(l = 1,\dots,r\right).$$

Từ (3.7) suy ra

$$\sum_{k=1}^{p} \bar{\lambda}_{ik} a_k + \sum_{j=1}^{s} \bar{\mu}_{ij} b_j + \sum_{l=1}^{r} \bar{\nu}_{il} c_l = \zeta_i \in K^*.$$

Do đó,

$$\sum_{k=1}^{p} \bar{\lambda}_{ik} \left\langle a_k, v\right\rangle + \sum_{j=1}^{s} \bar{\mu}_{ij} \left\langle b_j, v\right\rangle + \sum_{l=1}^{r} \bar{\nu}_{il} \left\langle c_l, v\right\rangle \ge 0 \quad \left(\forall v \in K\right). \qquad (3.9i)$$

Chú ý rằng với mỗi $i \in \{1,\dots,p\}$, ta nhận được bất đẳng thức (3.9i). Cộng hai vế của (3.9i) , $i = 1,\dots,p$ và đặt

$$\overline{\lambda}_k = \sum_{i=1}^{p} \overline{\lambda}_{ik},\ \overline{\mu}_j = \sum_{i=1}^{p} \overline{\mu}_{ij} \text{ và } \overline{v}_l = \sum_{i=1}^{p} \overline{v}_{il},$$

ta nhận được

$$\overline{\lambda}_k > 0,\ \overline{\mu}_j \geq 0,\ \overline{v}_l \in \mathbb{R} \ \ \left(k = 1,\ldots,p;\ j = 1,\ldots,s;\ l = 1,\ldots,r\right)$$

và

$$\sum_{k=1}^{p} \overline{\lambda}_k \left\langle a_k, v\right\rangle + \sum_{j=1}^{s} \overline{\mu}_j \left\langle b_j, v\right\rangle + \sum_{l=1}^{r} \overline{v}_l \left\langle c_l, v\right\rangle \geq 0 \ \ \left(\forall v \in K\right).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Giả sử tồn tại $\overline{\lambda}_k > 0,\ \overline{\mu}_j \geq 0$ và $\overline{v}_l \in \mathbb{R}$ $\left(k = 1,\ldots,p; j = 1,\ldots,s;\right.$ $\left.l = 1,\ldots,r\right)$ thoả mãn (3.6). Nếu (i) là sai thì phải tồn tại $i \in \{1,\ldots,p\}$ sao cho hệ từ (3.1)-(3.5) có một nghiệm $v_0 \in X$. Từ đó suy ra

$$\sum_{k=1}^{p} \overline{\lambda}_k \left\langle a_k, v_0\right\rangle + \sum_{j=1}^{s} \overline{\mu}_j \left\langle b_j, v_0\right\rangle + \sum_{l=1}^{r} \overline{v}_l \left\langle c_l, v_0\right\rangle < 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (3.6). Định lý được chứng minh. $\square$

Hệ quả 3.1

Giả sử A là một tập lồi và với mỗi $i \in \{1,\ldots,p\}$, *tập hợp:*

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} A_k^* + \sum_{j=1}^{s} B_j^* + \sum_{l=1}^{r} C_l^* + CC\left(A;\overline{x}\right)^*$$

đóng **yếu trong* X^*.

Khi đó, hai phát biểu sau là tương đương:

(i) *Với mỗi* $i \in \{1,\ldots,p\}$, *hệ* (3.1)-(3.5) *mà K được thay bởi* $CC\left(A;\overline{x}\right)$ *không có nghiệm* $v \in X$.

(ii) *Tồn tại* $\overline{\lambda}_k > 0, \overline{\mu}_j \geq 0, \overline{v}_l \in \mathbb{R}$ $(k = 1,\ldots,p; j = 1,\ldots,s; l = 1,\ldots,r)$ *sao cho*

$$\sum_{k=1}^{p} \overline{\lambda}_k \langle a_k, v\rangle + \sum_{j=1}^{s} \overline{\mu}_j \langle b_j, v\rangle + \sum_{l=1}^{r} \overline{v}_l \langle c_l, v\rangle \geq 0 \quad (\forall v \in CC(A;\overline{x})).$$

Nhận xét 3.2

Trong trường hợp $CC(A;\overline{x}) = X,$ bất đẳng thức trên tương đương với đẳng thức sau

$$\sum_{k=1}^{p} \overline{\lambda}_k a_k + \sum_{j=1}^{s} \overline{\mu}_j b_j + \sum_{l=1}^{r} \overline{v}_l c_l = 0.$$

Chứng minh hệ quả 3.1

Bởi vì A là lồi khác rỗng, cho nên $CC(A;\overline{x})$ là một nón lồi đóng khác rỗng. Áp dụng định lý 3.1 cho $K = CC(A;\overline{x})$, ta nhận được hệ quả 3.1. $\square$

Với mỗi $i \in \{1,\ldots,p\}$, ta đặt

$$E_i = \left(\bigcap_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{p} A_k\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{s} B_j\right) \cap \left(\bigcap_{l=1}^{r} C_l\right).$$

Rõ ràng $E_i\,(i = 1,\ldots,p)$ là một nón đóng khác rỗng có đỉnh tại 0.

Trong trường hợp $\dim X < +\infty$, do định lý Farkas-Minkowski, điều kiện (b) trong định lý 3.1 sẽ được thay bởi một điều kiện làm yếu hơn như trong định lý sau.

Định lý 3.2

Giả sử $\dim X < +\infty$, *K là một nón con lồi khác rỗng của* $CC(A;\overline{x})$ *với đỉnh tại 0 và K đóng. Giả thiết với mỗi* $i \in \{1,\ldots,p\}$, *tập* $E_i^* + K^*$ *đóng. Khi đó, hai phát biểu sau là tương đương:*

(i) *Với mỗi* $i \in \{1,\ldots,p\}$, *hệ* (3.1)-(3.5) *không có nghiệm* $v \in X$.

(ii) *Tồn tại* $\overline{\lambda}_k > 0, \overline{\mu}_j \geq 0$ *và* $\overline{v}_l \in \mathbb{R}$ $(k=1,\ldots,p; j=1,\ldots,s; l=1,\ldots,r)$*sao cho* (3.6) *đúng.*

Chứng minh

Bởi vì $dim\, X < +\infty$ cho nên $dim\, X^* = dim\, X$ và vì thế các tô pô mạnh, yếu, *yếu trong X^* là trùng nhau. Do định lí 1.5 ta rút ra rằng với mỗi $i \in \{1,\ldots,p\}$,

$$E_i^* = \Big\{ \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p} \lambda_{ik} a_k + \sum_{j=1}^{s} \mu_{ij} b_j + \sum_{l=1}^{r} \nu_{il} c_l : \ \lambda_{ik} \leq 0, \mu_{ij} \leq 0, \nu_{il} \in \mathbb{R},$$
$$k=1,\ldots,p,\ k\neq i;\ j=1,\ldots,s;\ l=1,\ldots,r \Big\}.$$

Do đó,

$$E_i^* = \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p} A_k^* + \sum_{j=1}^{s} B_j^* + \sum_{l=1}^{r} C_l^* \quad (i=1,\ldots,p).$$

Vì vậy, theo giả thiết, tập hợp:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p} A_k^* + \sum_{j=1}^{s} B_j^* + \sum_{l=1}^{r} C_l^* + K^*$$

là đóng, và do đó nó đóng * yếu. Như vậy tất cả các giả thiết của định lý 3.1 đúng và từ định lý 3.1 ta suy ra kết luận. $\square$

Trong trường hợp $dim\, X < +\infty$ và $A = X$ từ định lý 3.2 ta có thể nhận được định lý luân hồi Tucker cổ điển như là một trường hợp đặc biệt.

Hệ quả 3.2

Giả sử $dim\, X < +\infty$. *Khi đó, hai phát biểu sau là tương đương:*

(i) *Với mỗi* $i \in \{1,\ldots,p\}$, *hệ* (3.1)-(3.4) *không có nghiệm* $v \in X$.

(ii) *Tồn tại* $\bar{\lambda}_k > 0, \bar{\mu}_j \geq 0, \bar{v}_l \in \mathbb{R}$ $(k=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,s;\ l=1,\ldots,r)$ *sao cho*

$$\sum_{k=1}^{p} \bar{\lambda}_k a_k + \sum_{j=1}^{s} \bar{\mu}_j b_j + \sum_{l=1}^{r} \bar{v}_l c_l = 0. \tag{3.10}$$

Chứng minh

Với $A = X$ thì $CC(A;\bar{x}) = X$ và vì thế $CC(A;\bar{x})^* = \{0\}$. Hơn nữa, bởi vì $dim\, X < +\infty$, cho nên với mỗi $i \in \{1,\ldots,p\}$, E_i^* là một nón lồi đóng khác rỗng trong X^* và $0 \in E_i^*$. Vì vậy,

$$E_i^* + CC(A;\bar{x})^* = E_i^*,$$

và do đó $E_i^* + CC(A;\bar{x})^*$ là đóng trong X^*. Bây giờ ta áp dụng định lý 3.2 cho $A = X$ và suy ra (i) là tương đương với tồn tại

$$\bar{\lambda}_k > 0, \bar{\mu}_j \geq 0, \bar{v}_l \in \mathbb{R} \quad (k=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,s;\ l=1,\ldots,r)$$

sao cho

$$\sum_{k=1}^{p} \bar{\lambda}_k \langle a_k, v\rangle + \sum_{j=1}^{s} \bar{\mu}_j \langle b_j, v\rangle + \sum_{l=1}^{r} \bar{v}_l \langle c_l, v\rangle \geq 0 \quad \left(\forall v \in CC(X;\bar{x}) = X\right),$$

bất đẳng thức trên tương đương với (3.10). $\square$

3.3. ĐIỀU KIỆN CHÍNH QUY

Bây giờ ta trở lại bài toán (VP). Dưới đây chúng ta sẽ đưa vào hai điều kiện chính quy kiểu Abadie dưới ngôn ngữ các đạo hàm theo phương Dini, Hadamard và dẫn các điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu.

Mệnh đề 3.1

Giả sử $\overline{x} \in M$.

(a) *Nếu với mỗi* $v \in CC(A;\overline{x})$ *các đạo hàm theo phương Hadamard* $dh_1(\overline{x};v),\ldots,dh_r(\overline{x};v)$ *tồn tại thì*

$$\bigcap_{i=1}^{p} CC\left(Q^i;\overline{x}\right) \subset C_d\left(Q;\overline{x}\right). \quad (3.11)$$

(b) *Nếu với mỗi* $v \in ZC(A;\overline{x})$ *các đạo hàm theo phương Dini* $Dh_1(\overline{x};v)$, $\ldots,Dh_r(\overline{x};v)$ *tồn tại thì*

$$\bigcap_{i=1}^{p} ZC\left(Q^i;\overline{x}\right) \subset C_D\left(Q;\overline{x}\right). \quad (3.12)$$

Chứng minh

Ta chỉ chứng minh (3.11)còn (3.12) được chứng minh tương tự. Trước hết ta chỉ ra rằng với mỗi $i \in \{1,\ldots,p\}$ thì

$$CC\left(Q^i;\overline{x}\right) \subset C_d\left(Q^i;\overline{x}\right), \quad (3.13)$$

trong đó

$$C_d\left(Q^i;\overline{x}\right) = \{v \in CC(A;\overline{x}):\ \underline{d}f_k(\overline{x};v) \le 0,\ k=1,\ldots,p, k \ne i,$$
$$\underline{d}g_j(\overline{x};v) \le 0,\ j \in I(\overline{x}),$$
$$dh_l(\overline{x};v) = 0,\ l=1,\ldots,r\}.$$

Với $i \in \{1,\ldots,p\}$, khi lấy $v \in CC\left(Q^i;\overline{x}\right)$ thì sẽ tồn tại $t_n \downarrow 0$ và $v_n \to v$ sao cho $\overline{x} + t_n v_n \in Q^i\ (\forall n)$. Khi đó $\overline{x} + t_n v_n \in A\ (\forall n)$, và do đó $v \in CC(A;\overline{x})$.

Hơn nữa, với $i \in \{1,\dots,p\}$ bởi vì $\overline{x} + t_n v_n \in Q^i$ cho nên

$$f_k(\overline{x} + t_n v_n) \le f_k(\overline{x}),\ \ k = 1,\dots,p;\ k \ne i;$$

$$g_j(\overline{x} + t_n v_n) \le 0 = g_j(\overline{x}),\ \ j \in I(\overline{x});$$

$$h_l(\overline{x} + t_n v_n) = 0 = h_l(\overline{x}),\ \ l = 1,\dots,r.$$

Vì vậy,

$$\underline{d}f_k(\overline{x};v) \le \lim_{n\to\infty} inf \frac{f_k(\overline{x} + t_n v_n) - f_k(\overline{x})}{t_n} \le 0,\ \ k = 1,\dots,p;\ k \ne i;$$

$$\underline{d}g_j(\overline{x};v) \le \lim_{n\to\infty} inf \frac{g_j(\overline{x} + t_n v_n) - g_j(\overline{x})}{t_n} \le 0,\ \ j \in I(\overline{x});$$

$$dh_l(\overline{x};v) = \lim_{n\to\infty} \frac{h_l(\overline{x} + t_n v_n) - h_l(\overline{x})}{t_n} = 0,\quad l = 1,\dots,r.$$

Do đó, $v \in C_d\left(Q^i;\overline{x}\right)$. Như vậy ta đã nhận được (3.13). Từ (3.13) suy ra

$$\bigcap_{i=1}^{p} CC\left(Q^i;\overline{x}\right) \subset \bigcap_{i=1}^{p} C_d\left(Q^i;\overline{x}\right) = C_d(Q;\overline{x}). \qquad \square$$

Chú ý rằng bao hàm thức ngược lại của (3.11) và (3.12) nói chung không đúng. Vì thế, để dẫn đến các điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu của bài toán (VP) thì ta sẽ đưa vào điều kiện chính quy tại $\overline{x}$ kiểu Abadie sau đây:

$$C_d(Q;\overline{x}) \subset \bigcap_{i=1}^{p} CC\left(Q^i;\overline{x}\right), \tag{3.14}$$

$$C_D(Q;\overline{x}) \subset \bigcap_{i=1}^{p} ZC\left(Q^i;\overline{x}\right). \tag{3.15}$$

Các điều kiện đó là tổng quát hoá của các điều kiện chính quy Abadie suy rộng trong $[3],[8],[10]$.

Nếu với mỗi $v \in CC(A;\overline{x})$ các đạo hàm theo phương Hadamard $df_k(\overline{x};v)$ và $dh_l(\overline{x};v)\,(k=1,\ldots,p;l=1,\ldots,r)$ tồn tại thì với mỗi $i \in \{1,\ldots,p\}$, đặt

$$L_d^i(f;\overline{x}) = \{v \in CC(A;\overline{x}):\ df_i(\overline{x};v) < 0,\ df_k(\overline{x};v) \le 0,\ k=1,\ldots,p;\ k \ne i\},$$

$$L_d(M;\overline{x}) = \{v \in CC(A;\overline{x}):\ \underline{d}g_j(\overline{x};v) \le 0,\ j \in I(\overline{x}),$$

$$dh_l(\overline{x};v) = 0,\ l=1,\ldots,r\},$$

trong đó M kí hiệu là tập chấp nhận được của bài toán (VP).

Một điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu có thể phát biểu như sau.

Định lý 3.3

Cho $\overline{x}$ là một nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (VP). Giả sử $g_j\,(j \notin I(\overline{x}))$ là liên tục tại $\overline{x}$ và với mỗi $v \in CC(A;\overline{x})$ các đạo hàm theo phương Hadamard $df_k(\overline{x};v)$, $dh_l(\overline{x};v)\,(k=1,\ldots,p;l=1,\ldots,r)$ tồn tại. Giả thiết rằng điều kiện chính quy (3.14) đúng tại $\overline{x}$. Khi đó, với mỗi $i \in \{1,\ldots,p\}$,

$$L_d^i(f;\overline{x}) \cap L_d(M;\overline{x}) = \varnothing \tag{3.16}$$

Chứng minh

Giả sử ngược lại, tồn tại $i_0 \in \{1,\ldots,p\}$ sao cho

$$L_d^{i_0}(f;\overline{x}) \cap L_d(M;\overline{x}) \ne \varnothing.$$

Điều đó kéo theo tồn tại $v_0 \in L_d^{i_0}(f;\overline{x}) \cap L_d(M;\overline{x})$. Bởi vì $v_0 \in L_d^{i_0}(f;\overline{x})$, cho nên

$$df_{i_0}(\overline{x};v_0) < 0,$$

$$df_k(\overline{x};v_0) \le 0,\ k=1,\ldots,p;k \ne i_0. \tag{3.17}$$

Rõ ràng $v_0 \in C_d(Q\,;\bar{x})$. Sử dụng điều kiện chính quy (3.14), ta có

$$v_0 \in \bigcap_{i=1}^{p} CC\left(Q^i;\bar{x}\right),$$

suy ra $v_0 \in CC\left(Q^{i_0};\bar{x}\right)$. Bởi vậy, tồn tại $t_n \downarrow 0$ và $v_n \to v_0$ sao cho

$$\bar{x} + t_n v_n \in Q^{i_0}\,(\forall n).$$

Vì thế $\bar{x} + t_n v_n \in A$, và

$$f_k(\bar{x} + t_n v_n) \le f_k(\bar{x}),\ k = 1,\ldots,p;\ k \ne i_0;$$

$$g_j(\bar{x} + t_n v_n) \le 0,\ j \in I(\bar{x});$$

$$h_l(\bar{x} + t_n v_n) = 0,\ l = 1,\ldots,r.$$

Hơn nữa, với $j \notin I(\bar{x})$ ta có $g_j(\bar{x}) < 0.$ Do tính liên tục của $g_j\left(j \notin I(\bar{x})\right)$, tồn tại một số tự nhiên N_1 sao cho $\forall n \ge N_1$,

$$g_j(\bar{x} + t_n v_n) \le 0\ \left(j \notin I(\bar{x})\right).$$

Mặt khác, bởi vì $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán(VP) cho nên tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho không tồn tại $x \in M \cap B(\bar{x};\delta)$ thoả mãn

$$f_k(x) \le f_k(\bar{x}),\ \ k = 1,\ldots,p,$$

$f_i(x) < f_i(\bar{x})$ với một $i \in \{1,\ldots,p\}$ nào đó.

Từ chứng minh trên suy ra tồn tại một số tự nhiên $N(\ge N_1)$ sao cho $\forall n \ge N$,

$$\bar{x} + t_n v_n \in M \cap B(\bar{x};\delta).$$

Do đó, $\forall n \ge N$,

$$f_{i_0}(\bar{x} + t_n v_n) > f_{i_0}(\bar{x}).$$

Điều đó dẫn đến $df_{i_0}(\bar{x};v_0) \ge 0.$ Điều này mâu thuẫn với (3.17).

Vì thế với mỗi $i \in \{1,...,p\}$ thì (3.16) đúng. □

Nhận xét 3.3

Định lý 3.3 là tổng quát của định lý 3.1 trong [8].

Nếu với mỗi $v \in ZC(A;\bar{x})$, đạo hàm theo phương Dini $Df_k(\bar{x};v)$ và $Dh_l(\bar{x};v)(k=1,\ldots,p;l=1,\ldots,r)$ tồn tại thì với $i \in \{1,...,p\}$, ta đặt

$$L_{\mathrm{D}}^i(f;\bar{x}) = \left\{ v \in ZC(A;\bar{x}) : Df_i(\bar{x};v) < 0, Df_k(\bar{x};v) \le 0,\ k=1,\ldots,p; k \ne i \right\},$$

$$L_{\mathrm{D}}(M;\bar{x}) = \Big\{ v \in ZC(A;\bar{x}) : \underline{D}g_j(\bar{x};v) \le 0,\ j \in I(\bar{x}),$$

$$Dh_l(\bar{x};v) = 0,\ l=1,\ldots,r \Big\}.$$

Chứng minh tương tự định lý 3.3 ta nhận được định lý sau.

Định lý 3.4

Cho $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (VP). Giả sử $g_j(j \notin I(\bar{x}))$ là liên tục tại $\bar{x}$ và với mỗi $v \in ZC(A;\bar{x})$ các đạo hàm theo phương Dini $Df_k(\bar{x};v)$, $Dh_l(\bar{x};v)$ $(k=1,\ldots,p;\ l=1,\ldots,r)$ tồn tại. Giả thiết rằng điều kiện chính quy (3.15) đúng tại $\bar{x}$. Khi đó, với mỗi $i \in \{1,\ldots,p\}$,

$$L_{\mathrm{D}}^i(f;\bar{x}) \cap L_{\mathrm{D}}(M;\bar{x}) = \varnothing.$$

3.4. ĐIỀU KIỆN CẦN KUHN-TUCKER

Trong mục này, ta giả sử các hàm f_k, g_j và h_l trong bài toán (VP) khả vi Gâteaux tại $\bar{x}$ với các đạo hàm Gâteaux $\nabla_G f_k(\bar{x}), \nabla_G g_j(\bar{x})$ và $\nabla_G h_l(\bar{x})$ $(k=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,q;\ l=1,\ldots,r)$ và các hàm $g_j(j \notin I(\bar{x}))$ là liên tục. Khi đó, với mỗi $v \in X$,

$$df_k(\bar{x};v) = Df_k(\bar{x};v) = \langle \nabla_G f_k(\bar{x}), v \rangle \quad (k = 1,\ldots,p),$$

$$dg_j(\bar{x};v) = Dg_j(\bar{x};v) = \langle \nabla_G g_j(\bar{x}), v \rangle \quad (j = 1,\ldots,q),$$

$$dh_l(\bar{x};v) = Dh_l(\bar{x};v) = \langle \nabla_G h_l(\bar{x}), v \rangle \quad (l = 1,\ldots,r),$$

và

$$C_d(Q;\bar{x}) = \{ v \in CC(A;\bar{x}) : \langle \nabla_G f_k(\bar{x}), v \rangle \le 0, \quad k = 1,\ldots,p,$$
$$\langle \nabla_G g_j(\bar{x}), v \rangle \le 0, \quad j \in I(\bar{x}),$$
$$\langle \nabla_G h_l(\bar{x}), v \rangle = 0, \quad l = 1,\ldots,r \}.$$

Chú ý nếu các hàm $g_j(j \notin I(\bar{x}))$ chỉ là khả vi Gâteaux tại $\bar{x}$ thì chúng không nhất thiết liên tục tại $\bar{x}$. Dùng các kí hiệu $A_k, \tilde{A}_i, B_j, C_l$ trong phần 3.2 và lấy

$$a_k = \nabla_G f_k(\bar{x}),\ b_j = \nabla_G g_j(\bar{x}),\ c_l = \nabla_G h_l(\bar{x})$$
$$(k = 1,\ldots,p;\ j \in I(\bar{x});\ l = 1,\ldots,r),$$

ta sẽ nhận được điều kiện cần Kuhn-Tucker cho nghiệm hữu hiệu của bài toán (VP) với các nhân tử Lagrange ứng với thành phần của hàm mục tiêu là dương.

Định lý 3.5

Giả sử $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (VP); K là một nón con lồi khác rỗng bất kì của $CC(A;\bar{x})$ với đỉnh tại 0 và K là đóng. Giả sử với mỗi $i \in \{1,\ldots,p\}$, tập hợp:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \ne i}}^{p} A_k^* + \sum_{j \in I(\bar{x})} B_j^* + \sum_{l=1}^{r} C_l^* + K^*$$

là đóng * *yếu trong* X^*. *Giả thiết rằng điều kiện chính quy (3.14) đúng tại* $\overline{x}$. *Khi đó, tồn tại*

$$\overline{\lambda}_k > 0,\ \overline{\mu}_j \ge 0 \ \textit{và}\ \overline{v}_l \in \mathbb{R} \quad \left(k = 1,\dots,p;\ j = 1,\dots,q;\ l = 1,\dots,r\right)$$

sao cho

$$\sum_{k=1}^{p} \overline{\lambda}_k \left\langle \nabla_G f_k\left(\overline{x}\right), v\right\rangle + \sum_{j=1}^{q} \overline{\mu}_j \left\langle \nabla_G g_j\left(\overline{x}\right), v\right\rangle + \sum_{l=1}^{r} \overline{v}_l \left\langle \nabla_G h_l\left(\overline{x}\right), v\right\rangle \ge 0 \quad \left(\forall v \in K\right), \tag{3.18}$$

$$\overline{\mu}_j g_j\left(\overline{x}\right) = 0 \quad \left(j = 1,\dots,q\right). \tag{3.19}$$

Chứng minh

Sử dụng định lý 3.3 ta rút ra với mỗi $i \in \{1,\dots,p\}$, hệ sau:

$$\left\langle \nabla_G f_k\left(\overline{x}\right), v\right\rangle \le 0, \quad k = 1,\dots,p, k \ne i; \tag{3.20}$$

$$\left\langle \nabla_G f_i\left(\overline{x}\right), v\right\rangle < 0, \tag{3.21}$$

$$\left\langle \nabla_G g_j\left(\overline{x}\right), v\right\rangle \le 0, \quad j \in I\left(\overline{x}\right), \tag{3.22}$$

$$\left\langle \nabla_G h_l\left(\overline{x}\right), v\right\rangle = 0, \quad l = 1,\dots,r, \tag{3.23}$$

$$v \in K, \tag{3.24}$$

không có nghiệm $v \in X$.

Áp dụng định lý 3.1 với

$$a_k = \nabla_G f_k\left(\overline{x}\right),\ b_j = \nabla_G g_j\left(\overline{x}\right),\ c_l = \nabla_G h_l\left(\overline{x}\right)$$

$$\left(k = 1,\dots,p;\ \ j \in I\left(\overline{x}\right);\ l = 1,\dots,r\right)$$

thì tồn tại

$$\overline{\lambda}_k > 0,\ \overline{\mu}_j \ge 0 \ \text{ và }\ \overline{v}_l \in \mathbb{R} \quad \left(k = 1,\dots,p;\ j \in I\left(\overline{x}\right);\ l = 1,\dots,r\right)$$

thoả mãn

$$\sum_{k=1}^{p}\bar{\lambda}_k\left\langle \nabla_G f_k(\bar{x}),v\right\rangle+\sum_{j\in I(\bar{x})}\bar{\mu}_j\left\langle \nabla_G g_j(\bar{x}),v\right\rangle+\sum_{l=1}^{r}\bar{\nu}_l\left\langle \nabla_G h_l(\bar{x}),v\right\rangle\geq 0$$

$$(\forall v\in K).$$

Với $j\notin I(\bar{x})$ ta lấy $\bar{\mu}_j=0$ và ta thu được (3.18). Hơn nữa, ta cũng có (3.19), bởi vì với $j\in I(\bar{x})$ thì $g_j(\bar{x})=0$ và với $j\notin I(\bar{x})$ thì $\mu_j=0.$ □

Hệ quả 3.3

Giả sử $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (VP) và A lồi. Giả sử với mỗi $i\in\{1,\ldots,p\}$, tập hợp:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{p}A_k^*+\sum_{j\in I(\bar{x})}B_j^*+\sum_{l=1}^{r}C_l^*+CC(A;\bar{x})^*$$

là đóng *yếu trong X^*. Giả thiết điều kiện chính quy (3.14) đúng tại $\bar{x}$. Khi đó, tồn tại

$$\bar{\lambda}_k>0,\ \bar{\mu}_j\geq 0 \text{ và } \bar{\nu}_l\in \mathbb{R}\ \ (k=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,q;\ l=1,\ldots,r)$$

sao cho (3.18) và (3.19) đúng, trong đó K được thay bởi $CC(A;\bar{x})$.

Chứng minh

Vì A là lồi khác rỗng nên $CC(A;\bar{x})$ là một nón lồi đóng khác rỗng của *X*. Áp dụng định lý 3.5 cho $K=CC(A;\bar{x})$ ta suy ra hệ quả 3.3.

Trong trường hợp *X* là hữu hạn chiều, ta nhận được điều kiện cần Kuhn-Tucker cho nghiệm hữu hiệu sau đây.

Định lý 3.6

Giả sử $\dim X<+\infty$ và $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (VP); K là một nón con lồi khác rỗng bất kì của $CC(A;\bar{x})$ với đỉnh tại 0 *và K đóng. Giả sử với mỗi* $i \in \{1,\ldots,p\}$, *tập* $E_i^* + K^*$ *là đóng trong* X^*, *trong đó*

$$E_i = \left(\bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{p} A_k \right) \cap \left(\bigcap_{j \in I(\overline{x})} B_j \right) \cap \left(\bigcap_{l=1}^{r} C_l \right)$$

với

$$a_k = \nabla_G f_k(\overline{x}),\ b_j = \nabla_G g_j(\overline{x}),\ c_l = \nabla_G h_l(\overline{x}),$$

$$(k = 1,\ldots,p;\ j \in I(\overline{x});\ l = 1,\ldots,r).$$

Giả thiết rằng điều kiện chính quy (3.14) đúng tại $\overline{x}$. *Khi đó, tồn tại*

$$\overline{\lambda}_k > 0, \overline{\mu}_j \geq 0 \text{ và } \overline{v}_l \in \mathbb{R}\ (k = 1,\ldots,p;\ j = 1,\ldots,q;\ l = 1,\ldots,r)$$

sao cho (3.18) và (3.19) đúng.

Chứng minh

Sử dụng định lý 3.3 ta suy ra với mỗi $i \in \{1,\ldots,p\}$ thì hệ (3.20)-(3.24) không có nghiệm $v \in X$. Phần còn lại của chứng minh này làm tương tự như trong chứng minh định lý 3.5 bằng sử dụng định lý 3.2 thay thế cho định lý 3.1. $\square$

Trong trường hợp $A = X$ kết quả sau đây chỉ ra rằng điều kiện $E_i^* + CC(A;\overline{x})^*$ là đóng có thể bỏ qua được.

Hệ quả 3.4

Giả sử $\dim X < +\infty$, $A = X$ *và* $\overline{x}$ *là một nghiệm hữu hiệu địa phương của bài toán (VP). Giả thiết rằng điều kiện chính quy (3.14) đúng tại* $\overline{x}$. *Khi đó, tồn tại*

$$\bar{\lambda}_k > 0,\ \bar{\mu}_j \geq 0\ \textit{và}\ \bar{v}_l \in \mathbb{R}\ \ (k=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,q;\ l=1,\ldots,r)$$

sao cho

$$\sum_{k=1}^{p} \bar{\lambda}_k \nabla_G f_k(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{q} \bar{\mu}_j \nabla_G g_j(\bar{x}) + \sum_{l=1}^{r} \bar{v}_l \nabla_G h_l(\bar{x}) = 0, \tag{3.25}$$

$$\bar{\mu}_j g_j(\bar{x}) = 0 \quad (j=1,\ldots,q). \tag{3.26}$$

Chứng minh

Cũng như trong chứng minh của hệ quả 3.2 với $A = X$ thì $CC(A;\bar{x}) = X$ và $E_i^* + CC(A;\bar{x})^* = E_i^*$. Vì vậy, $E_i^* + CC(A;\bar{x})^*$ là đóng trong X^*. Áp dụng định lý 3.6 với $A = X$, suy ra tồn tại

$$\bar{\lambda}_k > 0,\ \bar{\mu}_j \geq 0\ \text{và}\ \bar{v}_l \in \mathbb{R}\ \ (k=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,q;\ l=1,\ldots,r)$$

sao cho (3.26) đúng và

$$\sum_{k=1}^{p} \bar{\lambda}_k \langle \nabla_G f_k(\bar{x}), v\rangle + \sum_{j=1}^{q} \bar{\mu}_j \langle \nabla_G g_j(\bar{x}), v\rangle + \sum_{l=1}^{r} \bar{v}_l \langle \nabla_G h_l(\bar{x}), v\rangle \geq 0$$

$$(\forall v \in CC(A;\bar{x}) = X).$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{k=1}^{p} \bar{\lambda}_k \nabla_G f_k(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{q} \bar{\mu}_j \nabla_G g_j(\bar{x}) + \sum_{l=1}^{r} \bar{v}_l \nabla_G h_l(\bar{x}) = 0. \qquad \square$$

Nhận xét 3.3

(a) Từ hệ quả 3.4 ta nhận được định lý 3.3 trong [8] như là một trường hợp đặc biệt.

(b) Nếu nón $CC(A,\bar{x})$ thay bởi nón $ZC(A;\bar{x})$ thì định lý 3.5 và 3.6 vẫn đúng.

KẾT LUẬN

Luận văn đã trình bày các định lý Dubovitskii-Milyutin về điều kiện tối ưu dưới ngôn ngữ giải tích hàm và một số kết quả liên quan, các tổng quát hóa của các định lý Dubovitskii-Milyutin của Lasiecka [4], và ứng dụng của các định lý Dubovitskii-Milyutin trong tối ưu đa mục tiêu không trơn. Phạm vi áp dụng của các định lý Dubovitskii-Milyutin là rất rộng rãi. Nó cho ta phương pháp giải tích hàm hữu hiệu để nghiên cứu các bài toán cực trị. Sau công trình của Dubovitskii-Milyutin [1], hàng loạt các công trình khác về điều kiện tối ưu tổng quát ra đời và đã mang lại những kết quả sâu sắc.

Việc phát triển và ứng dụng các định lý Dubovitskii-Milyutin trong lý thuyết tối ưu không trơn là đề tài được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. A. Ya. Dubovitskii, and A. A. Milyutin, *Extremum Problems in presence of constraints*, Z. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. 5(1965), 395 - 453.

[2]. I. V. Girsanov, *Lectures on Mathematical Theory of Extremum Problems,* Beclin- Heigenberg, Spring - Verlag, 1972.

[3]. G. Giorgi, B. Jiménnes and V. Novo, *On constraint qualifications in directionally differentiable multiobjective optimization problems,* RAIRO Oper. Res. 38 (2004), 255 - 274.

[4]. I. Lasiecka, *Generalization of the Dubovitskii-Milyutin optimality condition*, Journal of Optimization Theory and Appl. 24 (1978), 421 - 436

[5]. D. V. Luu and N. M. Hung, *On alternative theorems and necessary condition for efficiency*, Optimization (nhận đăng); Online DOI: 10.1080/0233193070 1761433 (2008).

[6]. D. V. Lưu, *Lý thuyết các điều kiện tối ưu*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật 1999.

[7]. D. V. Lưu, *Giải tích lồi*, Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội, 2000.

[8]. T. Maeda, *Constraint qualifications in multiobjective optimization problems: Differentiable case*, J.Optim.Theory Appl. 80(1994), 483 - 500.

[9]. L. W. Neustadt, *An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems, I, General theory*, SIAM Journal on Control, 4(1966), No 3, 505 - 527.

[10]. V. Preda and I. Chitescu, *On Constraint qualifications in multiobjective optimization problems: Semidifferentiable case*, J. Optim. Theory Appl. 100 (1999), 417 - 433.