ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN DUY PHAN

ĐẶC TRƯNG CỦA CÁC TÍNH CHẤT ($\underline{DNDZ}$) VÀ ($\underline{WDZ}$) TRONG LỚP CÁC KHÔNG GIAN FRECHET

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2007

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN DUY PHAN

ĐẶC TRƯNG CỦA CÁC TÍNH CHẤT $(\underline{DN}DZ)$ VÀ $(\underline{W}DZ)$ TRONG LỚP CÁC KHÔNG GIAN FRECHET

Chuyên ngành: GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
TS. PHẠM HIẾN BẰNG

THÁI NGUYÊN - 2007

MỤC LỤC

	Trang
MỞ ĐẦU	1
Chương 1. Đặc trưng của các tính chất ($DNDZ$) và (WDZ) trong lớp các không gian frechet	4
1.1. Một số khái niệm cơ bản.	4
1.2. Đặc trưng của tính chất ($DNDZ$).	7
1.2.1. Tính chất ($DNDZ$) và Định lý chẻ tame.	7
1.2.2. Đặc trưng của tính chất ($DNDZ$).	11
1.3. Đặc trưng của tính chất (WDZ).	12
1.3.1. Tính chất (WDZ) và định lý chẻ tame.	12
1.3.2. Đặc trưng của tính chất (WDZ).	15
Chương 2. Đặc trưng của các tính chất ($\underline{DNDZ}$) và ($\underline{WDZ}$) trong lớp các không gian frechet	25
2.1. Các tính chất ($\underline{DNDZ}$) và ($\underline{WDZ}$).	25
2.2. Đặc trưng của các tính chất ($\underline{DNDZ}$).	27
2.3. Đặc trưng của các tính chất ($\underline{WDZ}$).	35
2.4. Tính ổn định của các tính chất ($\underline{DNDZ}$) và ($\underline{WDZ}$) đối với không gian đối ngẫu thứ hai.	46
KẾT LUẬN	50
TÀI LIỆU THAM KHẢO	51

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Như đã biết, các bất biến tôpô tuyến tính của các không gian Frechet có vai trò rất quan trọng trong lý thuyết các không gian Frechet, nói riêng, trong các định lý phân rã. Các bất biến tôpô tuyến tính (DN) và (Ω) đã được D.Vog giới thiệu và nghiên cứu sâu sắc. Vog đã sử dụng các bất biến tôpô tuyến tính đó để chứng minh định lý phân rã đối với các không gian Frechet trong trường hợp không gian hạch và trường hợp không gian Frechet - Hilbert. Đồng thời đã cho đặc trưng đầy đủ của các bất biến tôpô tuyến tính (DN) và (Ω).

Từ năm 1990 M.Poppenberg đã giới thiệu và nghiên cứu các tính chất $(DNDZ)$ và (ΩDZ) trong lớp các không gian Frechet phân bậc. Ông đã giới thiệu khái niệm ánh xạ tuyến tính tame giữa các không gian Frechet phân bậc và thiết lập định lý phân rã trong phạm trù các không gian Frechet phân bậc và các ánh xạ tuyến tính tame. Tiếp theo, trong trường hợp không gian hạch, Poppenberg đã cho đặc trưng đầy đủ của các tính chất $(DNDZ)$ và (ΩDZ). Theo hướng nghiên cứu này, chúng tôi chọn đề tài : " *Đặc trưng của các tính chất* $(\underline{DNDZ})$ *và* $(\underline{\Omega DZ})$ *trong lớp các không gian Frechet* ".

Theo chúng tôi đề tài này có tính hiện đại và tính thời sự được nhiều người quan tâm nghiên cứu.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

2.1. Mục đích nghiên cứu. Luận văn nghiên cứu về đặc trưng của các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{\Omega DZ})$ trong lớp các không gian Frechet phân bậc.

2.2. Nhiệm vụ nghiên cứu. Trên cơ sở mục đích đã đặt ra, luận văn tập trung vào các nhiệm vụ sau đây:

- Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất $(DNDZ)$ và (WDZ) trong lớp các không gian Frechet phân bậc cùng đặc trưng của các tính chất $(DNDZ)$ và (WDZ).
- Chứng minh chi tiết một số kết quả về các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{WDZ})$ trong lớp các không gian Frechet phân bậc cùng đặc trưng của các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{WDZ})$.

3. Phương pháp nghiên cứu

Để giải quyết các nhiệm vụ đặt ra chúng tôi đã tiến hành:

- Đọc tham khảo các tài liệu trong và ngoài nước, trao đổi, tham khảo và học tập các chuyên gia cùng lĩnh vực nghiên cứu.
- Áp dụng các phương pháp truyền thống của giải tích hàm, giải tích hiện đại và các phương pháp của lý thuyết về các bất biến tôpô tuyến tính. Cụ thể ở đây chúng tôi đã kế thừa các kết quả và phương pháp gần đây của Vogt, M.Poppenberg để giải quyết các bài toán cụ thể đã nêu ra ở trên.

4. Bố cục của luận văn. Nội dung luận văn gồm 52 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1 của luận văn trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất $(DNDZ)$ và (WDZ) trong lớp các không gian Frechet phân bậc cùng đặc trưng của các tính chất $(DNDZ)$ và (WDZ).

Chương 2 của luận văn cũng là chương cuối với nội dung chính là trình bày chứng minh chi tiết các kết quả của N.V.Khuê, L.M.Hải và B.Đ.Tắc về các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{WDZ})$ trong lớp các không gian Frechet phân bậc cùng đặc trưng của các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{WDZ})$. Phần cuối cùng của chương này dành cho việc trình bày các kết quả về tính ổn định của các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{WDZ})$ đối với không gian đối ngẫu thứ hai.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

Bản luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo trong tổ Giải tích, các thầy cô giáo trong trường Đại học sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Xin chân thành cảm ơn trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, trường Cao Đẳng kỹ thuật mỏ Quảng Ninh cùng các đồng nghiệp đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi về mọi mặt trong suốt quá trình học tập và hoàn thành bản luận văn này.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Thái Nguyên, tháng 09 năm 2007

Tác giả

Nguyễn Duy Phan

CHƯƠNG 1
ĐẶC TRƯNG CỦA CÁC TÍNH CHẤT $(DNDZ)$ VÀ (WDZ) TRONG LỚP CÁC KHÔNG GIAN FRECHET

Trước tiên chúng tôi sẽ trình bày một số khái niệm và kết quả về các tính chất $(DNDZ)$ và (WDZ) là cơ sở để trình bày đặc trưng của các tính chất $(DNDZ)$, (WDZ).

1.1. Một số khái niệm cơ bản.

1.1.1. Định nghĩa. *Một dãy khớp các không gian lồi địa phương và ánh xạ tuyến tính liên tục là một dãy hữu hạn hay vô hạn*

$$\cdots \to E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \to \cdots$$

sao cho ảnh của ánh xạ tuyến tính vào bằng hạt nhân của ánh xạ tuyến tính ra.

1.1.2. Định nghĩa. *Một dãy các không gian lồi địa phương và ánh xạ tuyến tính liên tục có dạng*

$$0 \to E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \to 0$$

được gọi là dãy khớp ngắn nếu $Kerf = \{0\}$, $imf = kerg$ *và* $img = G$.

1.1.3. Định nghĩa. *Dãy khớp ngắn* $0 \to E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \to 0$ *được gọi là chẻ nếu xảy ra một trong hai điều kiện tương đương sau :*

$i)$ f *có ngược trái.*

$ii)$ g *có ngược phải.*

Khi đó $F = E \oplus G$ ($\oplus$ là tổng trực tiếp tô pô của E và G).

Bây giờ xét phạm trù tame với các vật là các không gian Frechet phân bậc $E, F, \ldots$ (trên $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{C}$), tức là các không gian Frechet được trang bị dãy các nửa chuẩn cố định

$$\|.\|_0 \le \|.\|_1 \le \|.\|_2 \le \ldots$$

xác định tôpô; dãy được gọi là bậc. Các không gian con và không gian thương được trang bị các nửa chuẩn cảm sinh. Các cấu xạ là các ánh xạ tuyến tính tame giữa các không gian Frechet phân bậc.

1.1.4. Định nghĩa. *Ánh xạ tuyến tính $A : E \to F$ được gọi là tame nếu tồn tại $b \geq 0$ và các hằng số $c_n > 0$ (có thể phụ thuộc vào n) sao cho*

$$\|Ax\|_n \leq c_n \|x\|_{n+b} \quad \text{với mọi } n \geq 0 \text{ và } x \in E.$$

1.1.5. Định nghĩa. *Ánh xạ tuyến tính $A : E \to F$ được gọi là đẳng cấu tame nếu A là song ánh và A, A^{-1} đều là tame.*

Hai bậc trên E được gọi là tương đương tame nếu phép đồng nhất là đẳng cấu tame.

1.1.6. Định nghĩa. *Dãy khớp ngắn các không gian Frechet phân bậc*

$$0 \to E \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} G \to 0$$

được gọi là khớp tame nếu các ánh xạ chính tắc $i : E \to iE$ và $\pi : F / iE \to G$ là các đẳng cấu tame.

1.1.7. Định nghĩa. *E được gọi là tổng trực tiếp tame của F, nếu tồn tại các ánh xạ tuyến tính tame $i : E \to F$ và $L : F \to E$ sao cho $L \circ i$ là phép đồng nhất trên E.*

Với mỗi $\varphi \in E'$ ta định nghĩa

$$\|\varphi\|_n^* = sup\left\{|\varphi(x)| : \|x\|_n \leq 1\right\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

$$U_n = \{x \in E : \|x\|_n \leq 1\}, U_n^0 = \left\{\varphi \in E' : \|\varphi\|_n^* \leq 1\right\}.$$

Các không gian Frechet sau đây là các không gian phân bậc một cách tự nhiên, tức là không gian dãy *Köthe* $l^p(a)$ và không gian các chuỗi luỹ thừa kiểu hữu hạn $\Lambda_\infty^p(a)$:

$$l^p(a) = \left\{x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in K^{\infty} : \|x\|_n < +\infty, \forall n\right\},$$

$$\|x\|_n = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j\right|^p a_{j,n}^p\right)^{1/p} \text{ nếu } 1 \le p < +\infty ,$$

$$\|x\|_n = \sup_{j=1,2,\ldots,\infty} \left|x_j\right| a_{j,n} \text{ nếu } p = \infty ,$$

trong đó $a = (a_{j,n})_{j=1,n=0}^{\infty}$ là ma trận thoả mãn $0 \le a_{j,n} \le a_{j,n+1}$ với mọi j,n và $\sup_n a_{j,n} > 0$ với mọi j.

Đối với dãy bất kỳ $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \uparrow +\infty$, $\Lambda_\infty^p(\alpha) = l^p(a)$ với $a_{j,n} = e^{n\alpha_j}$. Đối với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, $s_\varepsilon^p = \Lambda_\infty^p(\varepsilon \log j) = l^p(a)$ với $a_{j.n} = j^{\varepsilon n}$, $l(a) = l^1(a), \Lambda_\infty(\alpha) = \Lambda_\infty^1(\alpha), s_\varepsilon = s_\varepsilon^1, s = s_1$.

Ta trang bị cho $\omega = \mathbb{K}^\infty$ (tương ứng $(s_\varepsilon^p)^\infty$) các bậc

$$\|x\|_n = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \text{ (tương ứng } \left\|(x^0,x^1,\ldots)\right\|_n = \sum_{i=1}^{n} \left|x^i\right|_n, x^i \in s_\varepsilon^p \text{).}$$

Trang bị cho $D[a,b] = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : supp\, f \subset [a,b]\}$ với bậc

$$\|f\|_n = \sup_{i=\overline{0,n}} \sup_{x\in[a,b]} \left|f^{(i)}(x)\right|.$$

Nếu H là không gian Frechet và $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2 \le \ldots \le \|\cdot\|_n \le \ldots$ là hệ tăng các nửa chuẩn liên tục trong H, H_k là không gian Banach kết hợp với nửa chuẩn $\|.\|_k$; $\omega_k : H \to H_k$ và $\omega_{n,k} : H_n \to H_k$ $(n > k)$ là các ánh xạ chính tắc.

Tương tự , nếu E là không gian Frechet phân bậc thì ta ký hiệu E_n là không gian Banach kết hợp với nửa chuẩn $\|.\|_n$, tức là không gian nhận được bằng cách bổ sung $(E / ker\|.\|_n)$ đối với $\|.\|_n$.

Ký hiệu s không gian các dãy giảm nhanh với hệ các nửa chuẩn tương đương:

$$\|x\|_k = \sup\left\{\left|x_j\right| j^k : j \in \mathbb{N}\right\} \text{ với mọi } x = (x_1,x_2,\ldots) \in s .$$

Với mỗi k cố định đặt:

$$s_k = \{x = (x_1, x_2, \ldots) \in s : \|x\|_k = sup|x_j| j^k < +\infty\}.$$

1.1.8. Định nghĩa. *Cho E là không gian Frechet phân bậc.*

i) Cho $\varepsilon > 0$ bất kỳ, E được gọi là (ε)- hạch tame nếu E đẳng cấu tame với không gian con của $(s_\varepsilon^2)^\infty$.

ii) E được gọi là hạch tame nếu tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho E là (ε)- hạch tame, hoặc tương đương:

tồn tại $\varepsilon > 0, \theta \geq 0$ và các hằng số $c_{k,m} > 0$ sao cho

$$a_n(E_{k+m} \to E_k) \leq c_{k,m}(n+1)^{-\varepsilon(m-\theta)} \text{ với mọi } m \geq \theta, k \geq 0 \text{ và } n \geq 0,$$

ở đó $a_n(k, k+m) = a_n(E_{k+m} \to E_k)$ là các số xấp xỉ của các ánh xạ chính tắc $E_{k+m} \to E_k$.

Với không gian tuyến tính E bất kỳ và các tập con tuyệt đối lồi $A \subset B \subset E$ ta ký hiệu

$$d_n(A,B) := inf\{d(A,B,F) : F \subset E, dimF \leq n\}$$

là số Kolmogorov thứ n, mà trong đó với bất kỳ không gian con $F \subset E$

$$d(A,B,F) = inf\{d > 0 : A \subset dB + F\}$$

1.2. Đặc trưng của tính chất $(DNDZ)$.

1.2.1. Tính chất $(DNDZ)$ và Định lý chẻ tame.

Trong [11], [15] D.Vog đã chứng minh rằng không gian Frechet hạch E đẳng cấu tôpô với không gian con của s nếu E có tính chất (DN), tức là

$$\|.\|_n^2 \leq \|.\|_{n-1} . \|.\|_{n+1} \text{ với mọi } n.$$

Trong trường hợp này, với mỗi $0 \leq i \leq n$ và $k \geq 0$ ta có

$$\|.\|_n^{k+i} \leq \|.\|_{n-i}^k . \|.\|_{n+k}^i,$$

từ đó bằng cách lấy minimum theo r với mọi $r > 0$ ta nhận được

$$\|.\|_n \le r^i \|.\|_{n-i} + \frac{1}{r^k}\|.\|_{n+k},$$

và theo định lý song pô la với mọi $r > 0$ ta có

$$U_n^0 \subset r^i U_{n-i}^0 + \frac{1}{r^k} U_{n+k}^0 .$$

1.2.1.1. Định nghĩa. *Cho E là không gian Frechet phân bậc . Ta nói rằng E có tính chất $(DNDZ)$ Nếu tồn tại $b, p \ge 0$ và các hằng số $c_n > 0, c_{n,k} > 0$ sao cho*

$$U_n^0 \subset c_n\left(\bigcap_{i=-p}^{n-b} r^{i+p} U_{n-1}^0\right) + \left(\bigcap_{k=p}^{\infty} \frac{C_{n,k}}{r^{k-p}} U_{n+k}^0\right).$$

Khi $b = p = 0$, E gọi là có tính chất (DND).

1.2.1.2. Mệnh đề [5]. *Nếu không gian Frechet phân bậc E đẳng cấu tame với không gian con phân bậc của $\Lambda_\infty(a)$ thì E có tính chất $(DNDZ)$.*

1.2.1.3. Mệnh đề. *Giả sử* $0 \longrightarrow \Lambda_\infty^\infty(a) \xrightarrow{i} \tilde{E} \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0$ *là dãy khớp tame các không gian Frechet phân bậc và E có tính chất $(DNDZ)$. Khi đó dãy khớp là chẻ tame, tức là q có ngược phải tame.*

Chứng minh.

Bỏ đi một số hữu hạn các nửa chuẩn trong $\tilde{E}$ và trang bị cho E các nửa chuẩn thương, ta giả sử với $x \in \Lambda_\infty^\infty(a)$ và $y \in E$:

$$\|x\|_n \le \|ix\|_n, \|y\|_n = \inf\left\{\|x\|_n : x \in \tilde{E}, qx = y\right\},$$

và E có tính chất $(DNDZ)$ với $b = 0$, tức là với $n \ge 0, r > 0$

$$U_n^0 \subset c_n\left(\bigcap_{m=0}^{n+p} c_{m,n} r^{n+p-m} U_m^0\right) + \left(\bigcap_{m=n+p}^{\infty} c_{m,n} r^{n+p-m} U_m^0\right).$$

Theo định lý Hahn - Banach ta thác triển hàm toạ độ thứ j $f_j \in \Lambda_\infty^\infty(a)'$, $f_j(x) = x_j$ tới hàm $F_j^n \in \tilde{E}'$ sao cho $\left\|F_j^n\right\|_n^* = e^{-na_j}$. Chọn

$$G_j^n \in 2e^{-n\alpha_j}U_{n+1}^0 \subset E'$$

sao cho

$$G_j^n \circ q = F_j^{n+1} - F_j^n, \text{ và chọn } 1 \le c_k \le c_{k+1} \text{ với}$$

$$D_m := 2^{m-p}c_m^m \sup_k \frac{c_{m,k}}{c_k} < +\infty \ .$$

Áp dụng điều kiện $(DNDZ)$ trên G_j^n với $r = \dfrac{1}{2c_{n+1}}e^{\alpha_j}$, ta chọn $g_j^n \in E'$ sao cho

$$\left\|g_j^n\right\|_m^* \le D_m 2^{-n}e^{(p+1-m)\alpha_j} \quad \text{với mọi } m \le n+p,$$

$$\left\|G_j^n - g_j^n\right\|_m^* \le D_m 2^{-n}e^{(p+1-m)\alpha_j} \quad \text{với mọi } m > n+p.$$

Chuỗi $g_j := \sum_{n=0}^{\infty} g_j^n$ hội tụ trong E', nên ta đặt

$$\varphi_j := F_j^0 + (g_j \circ q) = F_j^{m+1} - \left\{\sum_{n=0}^{m}(G_j^n - g_j^n) - \sum_{n=m+1}^{\infty} g_j^n\right\}\circ q\,.$$

Ta có

$$\left\|\varphi_j\right\|_{m+p+1}^* \le e^{-(m+1)\alpha_j} + D_{m+p+1}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}e^{-m\alpha_j} \le (1+2D_{m+p+1})e^{-m\alpha_j}.$$

Ta định nghĩa ánh xạ $\varphi : \tilde{E} \to \Lambda_\infty^\infty(\alpha)$, xác định bởi $\varphi x = (\varphi_j x)_{j=1}^\infty$, và nhận được

$$\left\|\varphi x\right\|_m = \sup_{1\le j\le\infty}\left|\varphi_j x\right|e^{m\alpha_j} \le (1+2D_{m+p+1})\|x\|_{m+p+1}\,.$$

Từ đó, φ là ngược trái tame của i.

1.2.1.4. Hệ quả. *Nếu E có tính chất $(DNDZ)$ và $\Lambda_\infty(\alpha)$ là hạch thì* mỗi *dãy khớp tame* $0 \to \Lambda_\infty(\alpha) \to \tilde{E} \to E \to 0$ *đều chẻ tame.*

1.2.1.5. Mệnh đề. *Giả sử không gian Frechet phân bậc E là hạch và có tính chất $(DNDZ)$. Khi đó E là hạch tame.*

Chứng minh. Giả sử E có tính chất $(DNDZ)$ với $b = 0$. Ký hiệu $B_k = U_k^0$ và lấy $1 \le k + p \le m$. Khi đó với mọi $r > 0$ ta có

$$B_k \subset c_{l,k,m}\left(r^{k-l+p}B_l + \frac{1}{r^{m-k-p}}B_m\right),$$

Lấy $F \subset E'$ là không gian con và $d > d(B_l,B_m;F)$. Khi đó

$$B_k \subset c_{l,k,m}\left(r^{k-l+p}d + \frac{1}{r^{m-k-p}}\right)B_m + F \quad \text{với mọi } r > 0,$$

Từ đó

$$d(B_k,B_m;F) \le c_{l,k,m}\left(r^{k-l+p}d(B_l,B_m;F) + \frac{1}{r^{m-k-p}}\right).$$

Lấy minimum theo tất cả $r > 0$ ta nhận được

$$d(B_k,B_m;F)^{m-1} \le c_{l,k,m}d(B_l,B_m;F)^{m-k-p}. \qquad (*)$$

Nói riêng, với mọi $n \ge 1, k \ge q \ge p$ ta nhận được

$$\begin{aligned} d(B_k,B_{k+nq};F)^{nq+q} &\le c_{k,n}d(B_{k-q},B_{k+nq};F)^{nq-p} \\ &\le c_{k,n}d(B_{k-q},B_k;F)^{nq-p}d(B_k,B_{k+nq};F)^{nq-p}. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra với mọi $n \ge 1, k \ge q \ge p$ ta có

$$d(B_k,B_{k+nq};F) \le c_{k,n}d(B_{k-q},B_k;F)^{\frac{nq-p}{p+q}} \qquad (**)$$

Theo (*) với mọi $k \ge q \ge p$ và $m \ge p$ ta có

$$\begin{aligned} d(B_k,B_{k+m};F)^{k+m-q} &\le c_{k,m}d(B_q,B_{k+m};F)^{m-p} \\ &\le c_{k,m}d(B_q,B_k;F)^{m-p}d(B_k,B_{k+m};F)^{m-p}. \end{aligned}$$

Thêm nữa, với mọi $k \ge q \ge p$ và $m \ge p$ ta có

$$d(B_k,B_{k+m};F) \le c_{k,m}d(B_q,B_k;F)^{\frac{m-p}{k-q+p}} \qquad (***)$$

Từ (**) và (***) với $q \ge p$, $k \ge 3p + 3q, m \ge p$ với $n := \left[\frac{k}{q}\right]$ ta nhận được

$$d(B_k,B_{k+m};F) \le c_{k,m} d(B_q,B_k;F)^{\frac{m-p}{k-q+p}} \le c_{k,m} d(B_q,B_{nq};F)^{\frac{m-p}{k-q+p}}$$

$$\le c_{k,m} d(B_0,B_q;F)^{\frac{m-p}{k-q+p}\times\frac{k-p-2q}{p+q}} \le c_{k,m} d(B_0,B_q;F)^{\frac{1}{2}\times\frac{m-p}{q+p}}.$$

Lấy infimum của vế trái theo tất cả $F \subset E'$ với $\dim F \le n$ ta nhận được

$$d_n(B_k,B_{k+m}) \le c_{k,m} d_n(B_0,B_q)^{\frac{m-p}{2q+2p}}$$

với $q \ge p$, $k \ge 3p+3q$, $m \ge p$.

Sử dụng tính hạch của E ta chọn $q \ge p$ với

$$d_n(B_0,B_q) \le c(n+1)^{-2}.$$

Đặt $\varepsilon = \dfrac{1}{p+q}$. Khi đó với $k \ge 0$ và $m \ge 6p+5q$ ta được

$$a_n(k,k+m) \le (n+1)d_n(U_{k+m},U_k) \le (n+1)^2 d_n(U_k^0,U_{k+m}^0)$$

$$\le c_{k,m}(n+1)^2(n+1)^{-\left(\frac{m-4p-3q}{p+q}\right)} \le c_{k,m}(n+1)^{-\varepsilon(m-6p-5q)}.$$

1.2.2. Đặc trưng của tính chất $(DNDZ)$.

1.2.2.1. Bổ đề [12 và 18]. *Với mỗi* $\varepsilon > 0$ *tồn tại dãy khớp tame*

$$0 \to s_\varepsilon \to s_\varepsilon \to (s_\varepsilon)^\infty \to 0$$

1.2.2.2. Định lý. *Nếu E là không gian Frechet phân bậc (e)- hạch tame có tính chất $(DNDZ)$ thì E đẳng cấu tame với không gian con phân bậc của s_ε*

.

Chứng minh.

Do bổ đề 1.2.2.1 tồn tại dãy khớp tame

$$0 \to s_\varepsilon \to \tilde{E} \to E \to 0$$

với không gian con phân bậc $\tilde{E}$ của s_ε. Áp dụng hệ quả 1.2.1.4 ta có điều phải chứng minh.

1.2.2.3. Định lý. *Với mỗi không gian Frechet hạch phân bậc E, các mệnh đề sau là tương đương:*

$i)$ E có tính chất $(DNDZ)$.

$ii)$ Tồn tại $e > 0$ sao cho E đẳng cấu tame với không gian con phân bậc của s_e.

$iii)$ E là hạch tame và mỗi dãy khớp tame

$$0 \longrightarrow \Lambda_{\infty}^{\infty}(a) \xrightarrow{j} \hat{E} \xrightarrow{q} E \longrightarrow 0$$ *là chẻ tame.*

Chứng minh. $i) \Rightarrow iii)$ do định lý 1.2.1.3 và mệnh đề 1.2.1.5.

$iii) \Rightarrow ii)$ do bổ đề 1.2.2.1.

$ii) \Rightarrow i)$ do mệnh đề 1.2.1.2.

1.3. Đặc trưng của tính chất (WDZ).

1.3.1. Tính chất (WDZ) và định lý chẻ tame.

1.3.1.1.Định nghĩa. *Cho E là không gian Frechet phân bậc. Ta nói rằng E có tính chất (WDZ) Nếu tồn tại $b, p \geq 0$ và các hằng số $c_n > 0, c_{n,k} > 0$ sao cho với mọi $n \geq b + p$ và $r > 0$*

$$U_n \subset c_n \left(\bigcap_{i=p}^{n-b} r^{i-p} U_{n-1} \right) + \left(\bigcap_{k=-p}^{\infty} \frac{C_{n,k}}{r^{k+p}} U_{n+k} \right).$$

Khi $b = p = 0$, E gọi là có tính chất (WD).

1.3.1.2. Mệnh đề. *Nếu không gian Frechet phân bậc E đẳng cấu tame với không gian thương phân bậc của $\Lambda_{\infty}^{p}(a)$ thì E có tính chất (WDZ).*

1.3.1.3. Mệnh đề. *Giả sử* $0 \to E \xrightarrow{j} G \xrightarrow{q} H \to 0$
là dãy khớp tame các không gian Frechet phân bậc và E có tính chất (WDZ), H đẳng cấu tame với không gian con của $\Lambda_{\infty}(a)$. Khi đó dãy khớp là chẻ tame, tức là q có ngược phải tame.

Chứng minh.

Giả sử $E \subset G$ và $H \subset \Lambda_\infty(a)$ là các không gian con phân bậc và E có tính chất (ΩDZ) với $b = 0$, tức là với mọi $n \ge p$ và mọi $r > 0$ ta có

$$U_n \subset \left(\bigcap_{m=0}^{n-p} r^{n-p-m} U_m\right) + \left(\bigcap_{m=n-p}^{\infty} c_{m,n} r^{n-p-m} U_m\right).$$

Ký hiệu $\|.\|_n$, $|.|_n$ theo thứ tự là bậc của $\Lambda_\infty^1(a)$, $\Lambda_\infty^2(a)$ và $\|.\|_n^{\cdot}$ là bậc cảm sinh bởi các nửa chuẩn thương trên H. Chọn b,d cố định sao cho với $y \in H$ bất kỳ, ta có

$$\|y\|_n^{\cdot} \le c'_n |y|_{n+b} \le c'_n |y|_{n+d}$$

và

$$\sum_j e^{-2da_j} < +\infty ,$$

do đó

$$\|x\|_n \le c'_n |x|_{n+d} , x \in \Lambda_\infty(a).$$

Ký hiệu H_n là là bao đóng của H trong

$$l^2(e^{na_j}) = \{x = (x_1, x_2, \ldots) : |x|_n < +\infty\},$$

$p_n : l^2(e^{na_j}) \to H_n$ là phép chiếu chính tắc; E_n, G_n (tương ứng $\tilde{H}_n$) là bổ sung của E,G (tương ứng H) đối với $\|.\|_n^G$ (tương ứng $\|.\|_n^{\cdot}$) và nhận được dãy khớp

$$0 \to E_n \xrightarrow{j} G_n \xrightarrow{q_n} \tilde{H}_n \to 0.$$

Ký hiệu $e_j \in \Lambda_\infty(a)$ là véc tơ đơn vị thứ n, và chọn $d_j^n \in G_n$ sao cho

$$q_n d_j^n = p_{n+b} e_j, \quad \left\|d_j^n\right\|_n \le c'_n e^{(n+b)a_j} .$$

Đặt

$$R^n x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j d_j^n, \quad x \in \Lambda_\infty(a).$$

Ta nhận được

$$R^n \in \mathcal{L}(H,G_n),\ \|R^n x\|_n \le c'_n |x|_{n+b}.$$

Vì $q_n \circ R^n = id$, nên ta có

$$S^n := R^{n+1} - R^n \in \mathcal{L}(H,E_n)$$

và $S^n \in L(H_{n+b+d+1},E_n)$, bằng cách thác triển liên tục đến $H_{n+b+d+1}$.

Đặt $T^n = S^n \circ p_{n+b+d+1}$. Khi đó

$$T_j^n = T^n e_j, \text{ và } \|T_j^n\|_n \le c''_n e^{(n+a)a_j}, \quad a := b+d+1.$$

Chọn $\tilde{T}_j^n \in c''_n e^{(n+a)a_j} U_n \subset E$ sao cho $\|T_j^n - \tilde{T}_j^n\| \le 2^{-n}$, và chọn $1 \le c_n \le c_{n+1}$ sao cho $D_m := 2^{m+p} c_{m+p}^{m+p+1} \sup\limits_n \dfrac{c_{m,n} c''_n}{c_n} < +\infty, \quad m \ge 0$.

Áp dụng điều kiện (WDZ) cho $\tilde{T}_j^n$ với $r = (2c_n e^{a_j})^{-1}$, ta được $t_j^n \in E$:

$$\|t_j^n\|_m \le 2^{-n} D_m e^{(m+a+p)a_j} \text{ với mọi } m < n-p,$$

$$\|\tilde{T}_j^n - t_j^n\|_m \le 2^{-n} D_m e^{(m+a+p)a_j} \text{ với mọi } m \ge n-p.$$

Từ đó, $t_j = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (t_j^n + (T_j^n - \tilde{T}_j^n))$ hội tụ trong E_n.

Đặt $Rx = R^0 x + \sum\limits_{j=1}^{\infty} t_j x_j, \quad x \in H \subset \Lambda_\infty(a)$ ta nhận được $R \in L(H,G_0)$.

Vì

$$Rx = R^{m+p+1}x - \sum_{n=0}^{m+p} T^n x + \sum_{j=1}^{\infty} t_j x_j$$

$$= R^{m+p+1}x - \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{m+p} (\tilde{T}_j^n - T_j^n) - \sum_{n=m+p+1}^{\infty} (t_j^n + (T_j^n - \tilde{T}_j^n))\right) x_j,$$

nên ta có $\|Rx\|_m \le c'_{m+p+1} |x|_{m+a+p} + 3D_m |x|_{m+a+p}$, $x \in H$. Từ đó, $Rx \in G_m$ với mọi m và ta có ánh xạ tuyến tính tame $R : H \to G$ sao cho $q \circ R = id$.

1.3.1.4. Hệ quả. *Nếu E có tính chất (ΩDZ), H là hạch và có tính chất $(DNDZ)$, thì mỗi dãy khớp tame $0 \to E \to G \to H \to 0$ đều là chẻ tame.*

1.3.2. Đặc trưng của tính chất (ΩDZ).

1.3.2.1. Mệnh đề. ***Cho*** *E là không gian Frechet hạch phân bậc.*

$i)$ Nếu E có tính chất $(DNDZ)$, thì tồn tại dãy khớp tame

$$0 \to E \to s_e \to F \to 0, \quad F \subset s_d \text{ không gian con phân bậc.}$$

$ii)$ Nếu E có các tính chất $(DNDZ)$ và (ΩDZ), thì E là tổng trực tiếp tame của s_e, $e > 0$.

Chứng minh. Theo định lý 1.2.2.2 tồn tại dãy khớp tame

$$0 \to E \to s_t \xrightarrow{p} Q \to 0, \quad t > 0.$$

Vì Q là hạch tame nên tồn tại dãy khớp tame

$$0 \to s_d \to F \xrightarrow{q} Q \to 0, \quad F \subset s_d \text{ không gian con phân bậc, } d > 0.$$

Đặt

$$H = \{(x,y) \in F \times s_t : qx = py\}$$

ta nhận được các dãy khớp tame

$$0 \to E \xrightarrow{i_2} H \xrightarrow{p_1} F \to 0,$$

$$0 \to s_d \xrightarrow{i_1} H \xrightarrow{p_2} s_t \to 0.$$

Như vậy, ta có đẳng cấu tame $H \cong s_d \times s_t \cong s_{\min(d,t)}$. Từ đó suy ra $i)$.

Cuối cùng định lý chẻ 1.3.1.3 suy ra $ii)$.

1.3.2.2. Hệ quả. *Nếu E là không gian Frechet hạch phân bậc có tính chất $(DNDZ)$, thì tồn tại dãy khớp tame*

$$0 \to E \to s_e \to s_e \to 0, \quad e > 0.$$

Chứng minh.

Không gian F xuất hiện trong mệnh đề 1.3.2.1 có tính chất $(DNDZ)$ *và* (ΩDZ), nên F đẳng cấu tame với $\Lambda_\infty(\alpha)$. Vì $F \subset s_\delta$ và s_δ đẳng cấu tame với không gian con phân bậc của F, nên suy ra F đẳng cấu tame với $s_\delta, \delta \geq \varepsilon$. Từ đó thay ánh xạ $\theta \times id : s_\varepsilon \times s_\varepsilon \to s_\delta \times s_\varepsilon$ đối với ánh xạ $\theta : s_\varepsilon \to s_\delta$, ta nhận được dãy khớp tame cần tìm.

1.3.2.3. Định lý. *Với mỗi không gian Frechet phân bậc E, các mệnh đề sau là tương đương*:

$i)$ E *có tính chất* $(DNDZ)$ *và* (ΩDZ).

$ii)$ E *đẳng cấu tame với không gian các chuỗi luỹ thừa kiểu hữu hạn* $\Lambda_\infty(\alpha)$

.

$iii)$ E *là tổng trực tiếp của* $s_\varepsilon, \varepsilon > 0$ *nào đó.*

$iv)$ E *đẳng cấu tame với không gian với không gian con phân bậc của* $s_\varepsilon, \varepsilon > 0$, *và đẳng cấu tame với không gian thương của* $s_\delta, \delta > 0$ *nào đó.*

Bây giờ chúng ta sẽ giới thiệu điều kiện (ΩD^*Z) của dãy khớp tame, là điều kiện đủ đối với (ΩDZ)- tính chất ba không gian. Chú ý rằng trong chứng minh đặc trưng của không gian thương của s trong trường hợp tôpô, 'tính chất ba không gian" đã được áp dụng cho dãy tiêu chuẩn [19]

$$0 \to s \to \tilde{E} \to E \to 0$$

1.3.2.4. Định nghĩa. *Cho* $0 \to F \to \tilde{E} \longrightarrow E \to 0$ *là dãy khớp các không gian Frechet phân bậc,* $U_n := \{x \in \tilde{E} : \|x\|_n \leq 1\}$.

$i)$ *Dãy khớp* (hoặc φ) *có tính chất* (ΩD^*Z), *nếu tồn tại* $s \geq 0$ *và các hằng số* $c_n > 0$ *sao cho với mọi* $n \geq s, k \geq -s$ *và* $c_{n,k} > 0$ *tồn tại* $\tilde{c}_{n,k} > 0$ *sao cho với mọi* $0 < r < 1$ *thì* (*) *và* (**) *xảy ra*:

$$\sum_{i=0}^{n} r^{i}\varphi(U_{n-i}) \subset c_n\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} r^{i-s}U_{n-i}\right), \qquad (*)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{n,k}}{r^{k}}\varphi(U_{n+k}) \subset \varphi\left(\sum_{k=-s}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n,k}}{r^{k+s}}U_{n+k}\right). \qquad (**)$$

ii) Dãy (hoặc φ) *có tính chất* (ΩD^{*}), *nếu với* $s = 0$ (*) và (**) *xảy ra với mọi* $r > 0$.

1.3.2.5. Mệnh đề. *Cho* $0 \to F \to \tilde{E} \xrightarrow{\varphi} E \to 0$ *là dãy khớp tame các không gian Frechet phân bậc. Dãy có tính chất* $(\Omega D^{*}Z)$, E *và* F *có tính chất* (ΩDZ). *Khi đó* $\tilde{E}$ *cũng có tính chất* (ΩDZ).

Chứng minh.

Giả sử $\{U_n\}_n \subset \tilde{E}$. Ta xét dãy tương đương tame $\{U_n \cap F\}_n \subset F$, tương ứng $\{\varphi(U_n)\}_n \subset E$, và giả sử F có tính chất (ΩDZ) với $b = 0$ và q, E với $b = 0$ và p. Lấy $p \geq s + p + q,\ 0 < r < 1, x \in U_n$. Áp dụng tính chất $(\Omega D^{*}Z)$ cho $n - p$, ta nhận được

$$\begin{aligned}
\varphi(x) \in \varphi(U_n) &\subset c_n\left(\sum_{i=p}^{n} r^{i-p}\varphi(U_{n-i})\right) + \left(\sum_{k=-p}^{\infty} \frac{c_{n,k}}{r^{k+p}}\varphi(U_{n+k})\right)\\
&\subset \tilde{c}_n\varphi\left(\sum_{i=s}^{n-p} r^{i-s}\varphi(U_{n-i-p})\right) + \varphi\left(\sum_{k=-s}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n,k}}{r^{k+s}}\varphi(U_{n-p+k})\right)\\
&= \tilde{c}_n\varphi\left(\sum_{i=s+p}^{n} r^{i-s-p}\varphi(U_{n-i})\right) + \varphi\left(\sum_{k=-s-p}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n,k}}{r^{k+s+p}}\varphi(U_{n+k})\right).
\end{aligned}$$

Từ đó, ta được $x = a + b + z$ với $z \in F$, và

$$a \in \tilde{c}_n\left(\sum_{i=s+p+q}^{n} r^{i-s-p-q}U_{n-i}\right),$$

$$b \in \sum_{k=-s-p-q}^{\infty} \frac{\tilde{c}_{n,k}}{r^{k+s+p+q}}U_{n+k},$$

$$z \in c_n U_{n-s-p} \cap F \subset \tilde{\rho}_n \left(\sum_{i=q}^{n-s-p} r^{i-q} U_{n-s-p-i} + \sum_{k=-q}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}_{n,k}}{r^{k+q}} U_{n-s-p+k} \right)$$

$$= \tilde{\rho}_n \left(\sum_{i=s+p+q}^{n} r^{i-s-p-q} U_{n-i} + \sum_{k=-s-p-q}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}_{n,k}}{r^{k+s+p+q}} U_{n+k} \right).$$

1.3.2.6. Mệnh đề. [11] *"Dãy Borel"*

$$0 \to D[-1,0] \times D[0,1] \xrightarrow{i} D[-1,1] \xrightarrow{b} \omega \to 0,$$

i là ánh xạ nhúng, $b(f) = (f(0), f'(0), f''(0), \ldots)$, là dãy khớp tame đẳng cự.

Chứng minh.

Theo định lý Borel, b là toàn ánh. Từ đó khẳng định về i là tầm thường và khẳng định về b dễ dàng được chứng minh.

1.3.2.7. Mệnh đề. *Dãy Borel có tính chất* (ΩD^*).

Chứng minh.

Chọn cố định $\psi \in D[-1,1]$, $0 \le \psi \le 1$, $\psi \equiv 1$ trong $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

i) Lấy $n \ge 0, r > 1, f_1, \ldots, f_n \in D[-1,1]$ sao cho $\|f_i\|_i \le r^i$ và $b(f_i) = b(f_0)$ với mọi $0 \le i \le n$. Đặt

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} f_i^{(i)}(0) x^i, \quad \tilde{g}(x) = p(x)\psi(rx).$$

Với $0 \le i \le n$, ta có

$$\|\tilde{g}\|_i \le c_n r^i \text{ và } \tilde{g}^{(i)}(0) = f_i^{(i)}(0).$$

Chọn $h \in D[-1,1]$ với $\|h\|_n \le 1$ sao cho $b(h) = b(f_0 - \tilde{g})$ và đặt $g = \tilde{g} + h$

.

Khi đó $b(g) = b(f_i)$ và $\|g\|_i \le c_n r^i$ với mọi $0 \le i \le n$.

ii) Lấy $n \ge 0, r > 1, f_n, f_{n+1}, \ldots \in D[-1,1]$, $c_{n,k} \ge 1$ sao cho

$$\|f_{n+k}\|_{n+k} \le c_{n,k} r^k \text{ và } b(f_{n+k}) = b(f_n) \text{ với mọi } k \ge 0.$$

Đặt

$$\tilde{g}(x) = \sum_{i=n}^{\infty} \frac{x^i}{i!} f_n^{(i)}(0)\psi(2rc_{n,i-n}x).$$

Ta có

$$\tilde{g} \in D[-1,1] \text{ và } \|\tilde{g}_{n+k}\|_{n+k} \le \tilde{c}_{n,k}\, r^k,$$

$$g^{(n+k)}(0) = f_n^{(n+k)}(0) \text{ với mọi } k \ge 0.$$

Chọn $g_0,\dots,g_{n-1} \in D[-1,1]$ sao cho $g_i^{(j)}(0) = \delta_{ij}$ với mọi $j \ge 0$, và đặt

$$g = \sum_{i=0}^{n-1} f_n^{(i)}(0) g_i + \tilde{g}.$$

Ta nhận được $b(g) = b(f_{n+k})$ và $\|g_{n+k}\|_{n+k} \le \tilde{c}_{n,k}\, r^k$ với mọi $k \ge 0$.

Bây giờ nếu E, F là các không gian Frechet phân bậc, thì ε- tích $E\varepsilon F := \mathcal{L}_e(F'_c, E)$ là không gian Frechet phân bậc với bậc

$$\|u\|_n := \sup\left\{\|u(f')\|_n^E : f' \in U_n^0 \subset F'\right\},\quad u \in E\varepsilon F.$$

Hiển nhiên, ta có $E\varepsilon F = F\varepsilon E$, $E\varepsilon F = E\hat{\otimes}_\pi F$ là các đẳng cấu tame trong đó $E\hat{\otimes}_\varepsilon F$ và $E\hat{\otimes}_\pi F$ được phân bậc một cách tự nhiên.

Cùng với $u : E_1 \to E_2$ và $v : F_1 \to F_2$ là

$$u\varepsilon v : E_1\varepsilon F_1 \to E_2\varepsilon F_2,\quad u\varepsilon v(x) = u \circ x \circ v$$

đẳng cự tame, đơn ánh tame, và mở tame. Nếu u là toàn ánh và một trong các không gian E_1, E_2, F là hạch, thì $u\varepsilon id_F$ cũng là toàn ánh.

1.3.2.8. Mệnh đề. *Cho $\varepsilon > 0$ tuỳ ý. Dãy Borel (s_ε)- giá trị*

$$0 \to D[-1,0]\times D[0,1]\varepsilon s_\varepsilon \xrightarrow{i\varepsilon id} D[-1,1]\varepsilon s_\varepsilon \xrightarrow{b\varepsilon id} \omega\varepsilon s_\varepsilon \to 0$$

là dãy khớp tame.

Chứng minh.

Theo mệnh đề 1.3.2.6 ta có dãy khớp tame

$$0 \to D[-1,0]\times D[0,1] \longrightarrow D[-1,1] \longrightarrow \omega \to 0$$

Lấy ε- tích đối với $i\varepsilon id_s$, π- tích đối với $b\varepsilon id_s$ suy ra điều phải chứng minh.

1.3.2.9. Bổ đề. *Cho* $\varphi : F \to G$ *có tính chất* (ΩD^*) *và* $\varepsilon > 0$ *tuỳ ý. Khi đó* $\varphi\varepsilon id_s : F\varepsilon s_\varepsilon \to G\varepsilon s_\varepsilon$ *có tính chất* $(\Omega D^* Z)$.

Chứng minh.

Xét các bậc $U_n \subset F, V_n \subset s_\varepsilon, W_n \subset F\varepsilon s_\varepsilon$. Khi đó

$$W_n = \{T \in F\varepsilon s_\varepsilon : T(V_n^0) \subset U_n\}.$$

Chọn $s > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Lấy $n \ge s$ và $\rho > 1$. Ký hiệu $e'_j \in s'$ là hàm toạ độ thứ j.

$i)$ Lấy $T_0,\dots,T_n \in F\varepsilon s_\varepsilon$ sao cho

$$T_i \in \rho^i W_i \text{ và } \varphi \circ T_i = \varphi \circ T_0 \text{ với mọi } 0 \le i \le n.$$

Vì

$$\varphi(T_i(e'_j)) \in \varphi(T_i(j^{-\varepsilon i}V_i^0)) \subset j^{-\varepsilon i}\rho^i\varphi(U_i),$$

nên ta có

$$\varphi(T_0(e'_j)) \in \bigcap_{i=0}^{n}\left(\frac{\rho}{j^\varepsilon}\right)^i \varphi(U_i) \subset c_n\varphi\left(\bigcap_{i=0}^{n}\left(\frac{\rho}{j^\varepsilon}\right)^i U_i\right).$$

Với mỗi j sao cho $j^\varepsilon \le \rho$, ta chọn $u_j \in c_n \bigcap_{i=0}^{n}\left(\frac{\rho}{j^\varepsilon}\right)^i U_i)$ sao cho $\varphi(u_j) = \varphi(T_0(e'_j))$, còn với j mà $j^\varepsilon \ge \rho$, thì ta đặt $u_j = T_n(e'_j)$. Khi đó $T(e'_j) = u_j$ xác định $T \in F\varepsilon s_\varepsilon$, với $\varphi \circ T = \varphi \circ T_i$, với mọi $0 \le i \le n$.

Hơn nữa, ta có

$$T \in c_n \bigcap_{i=0}^{n-s} \rho^{i+s} W_i),$$

vì với $0 \le i \le n - s$ và $a'_j \in V_i^0$, thì

$$\|T(a_j')\|_i \le \sum_{j=i}^{\infty} j^{ei}\|u_j\|_{i+s} \le c_n\sum_{j=i}^{\infty} j^{ei}\left(\frac{\rho}{j^{e}}\right)^{i+s} \le c_n\rho^{i+s}.$$

$ii)$ Lấy $T_n, T_{n+1}, \ldots \in Fes_e$ sao cho $T_{n+k} \in c_{n,k}\rho^k W_{n+k}$ và $\varphi \circ T_{n+k} = \varphi \circ T_n$ với mọi $k \ge 0$. Vì $T_{n+k}(e_j') \in c_{n,k}\rho^k j^{-e(n+k)}U_{n+k}$, nên ta có

$$\varphi(T_n(e_j')) \in \bigcap_{k=0}^{\infty} c_{n,k}\rho^k j^{-e(n+k)}\varphi(U_{n+k}) \subset \varphi\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_{n,k}\rho^k j^{-e(n+k)}U_{n+k}\right).$$

Ta chọn

$$u_j \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_{n,k}\rho^k j^{-e(n+k)}U_{n+k} \text{ sao cho } \varphi(u_j) = \varphi(T_n(e_j')).$$

Khi đó $T(e_j') = u_j$ xác định $T \in Fes_e$, với $\varphi \circ T = \varphi \circ T_{n+k}$, với mọi $k \ge 0$.

Vì $T(V^0_{n+k-s}) \subset \tilde{c}_{n,k}\rho^k U_{n+k}$ với mọi $k \ge 0$, nên ta có

$$T \in \bigcap_{k=-s}^{\infty} \tilde{c}_{n,k}\rho^{k+s}W_{n+k}.$$

Từ đó Dãy Borel (s_e) - giá trị là khớp tame và có tính chất (ΩD^*Z).

1.3.2.10. Bổ đề.

$i)$ Nếu $\Lambda^2_\infty(b)$ đẳng cấu tame với không gian con phân bậc của $\Lambda^2_\infty(a)$, thì

$$\lim_{j\to\infty} sup\frac{a_j}{b_j} \le 1.$$

$ii)$ Cho $\Lambda_\infty(a), \Lambda_\infty(b)$ là hạch. Khi đó $\Lambda_\infty(a) \cong \Lambda_\infty(b)$ là đẳng cấu tame khi và chỉ khi

$$\lim_{j\to\infty}\frac{a_j}{b_j} = 1$$

1.3.2.11. Mệnh đề. *Nếu $a < b$, thì $D[a,b] \cong s$ là đẳng cấu tame.*

1.3.2.12. Mệnh đề.

$i)$ $ses \cong s$ là đẳng cấu tame.

ii) Cho $\delta, \varepsilon > 0$. *Khi đó* $s_\delta \otimes s_\varepsilon \cong s_{\min(\delta,\varepsilon)}$ *là đẳng cấu tame*

Chứng minh. Ta trang bị cho $s \otimes s$ bậc tương đương tame

$$\|u\|_n = \left\|(a_i^j)\right\|_n = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left|a_i^j\right| (ij)^n ,$$

trong đó $(a_1^j, a_2^j, \ldots) := u(e'_j),\ e'_j \in s'$ là véc tơ đơn vị thứ n . Chọn song ánh

$$\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$k \mapsto (i,j)$$

sao cho $k_1 \le k_2 \Rightarrow i_1 j_1 \le i_2 j_2$. Ta định nghĩa ánh xạ $s \otimes s \to s, (a_i^j) \mapsto (a_k)_{k=1}^{\infty}$

sao cho $a_k := a_i^j$ nếu $\psi(k) = (i,j)$. Với $\varphi(k) := card\left\{(i,j) : ij \le k\right\}$, ta nhận được

$$\varphi(k) = \sum_{i=1}^{k} \left[\frac{k}{i}\right] = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{k}{i} + O(1)\right) = k\log(k) + O(k).$$

Như vậy, nếu $\psi(k) = (i,j)$, thì ta có $(ij)^n \le k^n \le \varphi(ij)^n \le c_n (ij)^{n+1}$.

$ii)$ Trường hợp $\delta = \varepsilon$, chứng minh giống như $i)$.Như vậy $ii)$ là hệ quả của định lý 1.3.2.3 và bổ đề 1.3.2.10.

1.3.2.13. Định lý.

$i)$ *Tồn tại một dãy khớp tame có tính chất* $(\Omega\Delta^* Z)$

$$0 \to s \to s \to \omega \to 0.$$

$ii)$ *Với* $\varepsilon > 0$ *tuỳ ý, tồn tại dãy khớp tame có tính chất* $(\Omega\Delta^* Z)$

$$0 \to s_{\delta} \to s_{\delta} \to (s_\varepsilon)^{\infty} \to 0, \quad \delta = min(\varepsilon, 1).$$

$iii)$ *Nếu* E *là* (ε)- *hạch tame, thì tồn tại dãy khớp tame có tính chất* $(\Omega\Delta^* Z)$

$0 \to s_{\tilde{\varepsilon}} \to \tilde{E} \to E \to 0$, $\tilde{E} \subset s_{\tilde{\varepsilon}}$ *là không gian con phân bậc,* $\tilde{\varepsilon} = min(\varepsilon, 1)$.

1.3.2.14. Định lý. *Cho* E *là* (ε)- *hạch tame,* $\varepsilon > 0$ *có tính chất* (ΩDZ), *đặt* $\tilde{\varepsilon} = min(\varepsilon, 1)$. *Khi đó*

$i)$ *Tồn tại dãy khớp tame có tính chất* $(\Omega D^* Z)$

$$0 \to s_{\tilde{\varepsilon}} \to s_{\tilde{\varepsilon}} \to E \to 0$$

$ii)$ E *đẳng cấu tame với không gian thương phân bậc của* $s_{\tilde{\varepsilon}}$.

Chứng minh.

Ta xét dãy khớp tame của định lý 1.3.2.13. $iii)$. $\tilde{E}$ (theo mệnh đề 1.3.2.5) có tính chất $(DNDZ)$ và (ΩDZ). Từ đó, theo định lý 1.3.2.3, $\tilde{E}$ đẳng cấu tame với $\Lambda_\infty(\alpha)$. Như vậy, phép nhúng tame $s_{\tilde{\varepsilon}} \to \tilde{E}$, $\tilde{E} \subset s_{\tilde{\varepsilon}}$ đã chỉ ra rằng $\tilde{E} \cong s_{\tilde{\varepsilon}}$ là đẳng cấu tame.

Để chứng minh tính cần của (ΩDZ) đối với định lý chẻ, ta cần bổ đề 1.3.2.15 sau, mà phép chứng minh của nó giống trường hợp tôpô.

1.3.2.15. Bổ đề ([18] và [19]). *Nếu*

$$0 \to E_1 \to E_2 \xrightarrow{\quad} Q \to 0, \quad 0 \to F_1 \to F_2 \xrightarrow{\quad} Q \to 0$$

là các dãy khớp tame và $\psi : F_2 \to E_2$ *là ánh xạ tuyến tính tame với* $\eta \circ \psi = \varphi$, *thì tồn tại dãy khớp tame*

$$0 \to F_1 \to E_1 \times F_2 \to E_2 \to 0.$$

1.3.2.16. Định lý. *Với mỗi không gian Frechet phân bậc* E, *các mệnh đề sau là tương đương*

$i)$ E *là hạch tame và có tính chất* (ΩDZ).

$ii)$ E *đẳng cấu tame với không gian thương phân bậc của* $s_\varepsilon, \varepsilon > 0$.

$iii)$ E là hạch tame và với mỗi $(DNDZ)$- không gian hạch H, mỗi dãy khớp tame $0 \to E \to G \to H \to 0$ đều là chẻ tame.

Chứng minh.

Do định lý 1.3.2.13 tồn tại không gian con phân bậc $\tilde{E} \subset s_d$ và các dãy khớp tame

$$0 \to E \to (s_e)^{\infty} \longrightarrow Q \to 0,$$

$$0 \to s_e \to \tilde{E} \longrightarrow Q \to 0.$$

Vì định lý chẻ được thoả mãn nên tồn tại ánh xạ nâng tame $\psi : \tilde{E} \to (s_e)^{\infty}$ sao cho $h \circ \psi = \varphi$ (xem [19]).

Do bổ đề 1.3.2.15 và định lý 1.3.2.13 tồn tại các dãy khớp tame

$$0 \to s_d \to E \times \tilde{E} \to (s_e)^{\infty} \to 0,$$

$$0 \to s_{\tilde{d}} \to s_{\tilde{d}} \to (s_e)^{\infty} \to 0.$$

Áp dụng lập luận tương tự tồn tại dãy khớp tame

$$0 \to s_{\tilde{d}} \to s_t \to E \times \tilde{E} \to 0, \quad t = min(d, \tilde{d}).$$

Phần còn lại là chỉ ra rằng $iii) \Rightarrow i)$ (xem [18]).

CHƯƠNG 2
ĐẶC TRƯNG CỦA CÁC TÍNH CHẤT $(\underline{DNDZ})$ VÀ $(\underline{WDZ})$ TRONG LỚP CÁC KHÔNG GIAN FRECHET

Chương này chúng tôi sẽ trình bày các đặc trưng của các tính chất $(\underline{DNDZ})$, $(\underline{WDZ})$. Cụ thể sẽ trình bày hai kết quả chính sau đây: không gian Frechet phân bậc E có tính chất $(\underline{DNDZ})$ khi và chỉ khi tồn tại tập chỉ số I sao cho E đẳng cấu tame tuyến tính với không gian con của không gian Frechet phân bậc $l^{\infty}(I)\hat{\otimes}_p s$. Không gian Frechet phân bậc E có tính chất $(\underline{WDZ})$ khi và chỉ khi tồn tại tập chỉ số I sao cho E đẳng cấu tame tuyến tính với không gian thương phân bậc của $l^1(I)\hat{\otimes}_p s$.

Trước tiên chúng tôi sẽ trình bày một số khái niệm và kết quả về các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{WDZ})$.

2.1. Các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{WDZ})$.

Cho E là không gian Frechet phân bậc với

$$\|.\|_0 \le \|.\|_1 \le \|.\|_2 \le \dots$$

2.1.1 Định nghĩa. *Cho E là không gian Frechet phân bậc . Ta nói rằng E có tính chất*:

i) $(\underline{DNDZ})$ Nếu tồn tại $a > 0, b \ge 0, p \ge 0$ và hằng số $C_{n,k} > 0$ sao cho

$$U_n^0 \subset \left(\sum_{m=-p}^{(n-b)} C_{n,m} r^{m+p} U^0_{a^2 n - am}\right) + \left(\sum_{k=p}^{\infty} \frac{C_{n,k}}{r^{k-p}} U^0_{a^2 n + ak}\right), \text{ với mọi } r > 0.$$

ii) $(DNDZ)$, nếu $a = 1$.

iii) (DND), nếu E có tính chất $(DNDZ)$ với $b = 0 = p$.

2.1.2. Định nghĩa. *Cho E là không gian Frechet phân bậc. Ta nói rằng E có tính chất*:

i) ($\underline{WDZ}$) *nếu tồn tại* $a > 0, b \geq 0, p \geq 0$ *và hằng số* $C_{m,n} > 0$ *sao cho*

$$U_n \subset \left(\sum_{m=p}^{(n-b)} C_{m,n} r^{m-p} U_{a^2n-am}\right) + \left(\sum_{m=-p}^{\infty} \frac{C_{m,n}}{r^{k+p}} U_{a^2n+am}\right).$$

ii) (WDZ) *nếu* $a = 1$.

iii) (WD) *nếu* E *có tính chất* (WDZ) *với* $b = 0 = p$.

2.1.3. Mệnh đề. *Các tính chất* ($\underline{DNDZ}$) *và* ($\underline{WDZ}$) *là các bất biến tôpô tuyến tính qua các đẳng cấu tame tuyến tính.*

Chứng minh.

Giả sử $T : E \to F$ là đẳng cấu tame tuyến tính giữa các không gian Frechet phân bậc E và F. Hiển nhiên có thể xét $E = F$ và T là ánh xạ đồng nhất.

$a)$ Giả sử E có tính chất ($\underline{DNDZ}$). Chọn $a \geq 1$ sao cho

$$U_n^0 \subset \left(\sum_{m=0}^{an} C_{n,m} r^m U^0_{a^2n-am}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{n,k}}{r^k} U^0_{a^2n+ak}\right), \text{ với mọi } r > 0, n \geq 0. \quad (1)$$

trong đó $b = p = 0$.

Vì các bậc của E và F là tương đương tame tuyến tính nên ta có thể lấy $b \geq 1$ sao cho

$$U_n \supset W_{bn} \text{ và } W_n \supset U_{bn} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Từ đó

$$U_n^0 \subset W_{bn}^0 \text{ và } W_n^0 \subset U_{bn}^0.$$

Từ (1) suy ra

$$W_n^0 \subset U_{bn}^0 \subset \left(\sum_{m=0}^{abn} C_{bn,m} r^m U^0_{a^2bn-am}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{bn,k}}{r^k} U^0_{a^2bn+ak}\right)$$

$$\subseteq \left(\sum_{m=0}^{abn} C_{bn,m} r^m W^0_{a^2b^2n-abm}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_{bn,k}}{r^k} W^0_{a^2b^2n+abk}\right)$$

với mọi $r > 0, n \geq 0$.

Từ đó E có tính chất $(\underline{DNDZ})$ đối với các bậc của E xác định bởi cơ sở lân cận $\{W_n\}$.

$b)$ trường hợp E có tính chất $(\underline{WDZ})$ chứng minh tương tự như $a)$.

2.2. Đặc trưng của các tính chất $(\underline{DNDZ})$.

2.2.1. Mệnh đề. *Giả sử*

$$0 \to l^{\infty}(I) \hat{\otimes}_p s \longrightarrow \tilde{E} \longrightarrow E \to 0$$

là dãy khớp tame tuyến tính các không gian Frechet phân bậc và E *có tính chất* $(\underline{DNDZ})$*. Khi đó* q *có ngược phải tame tuyến tính. Tức là tồn tại ánh xạ tame tuyến tính* $R : E \to \tilde{E}$ *sao cho* $q \circ R = id_E$.

Chứng minh.

Do mệnh đề 2.1.3 và định nghĩa của dãy khớp tame tuyến tính ta có thể giả sử rằng các bậc của $l^{\infty}(I) \hat{\otimes}_p s$ và E được cảm sinh bởi bậc của $\tilde{E}$. Như vậy, với mọi $y \in E$ ta có

$$\|y\|_n = inf\,\{\|x\|_n : qx = y\}$$

và

$$\|ex\|_n = \|x\|_n \text{ với } n \geq 0.$$

Hơn nữa, không mất tính tổng quát, ta giả sử E có tính chất $(\underline{DNDZ})$ với $b = p = 0$. Từ đó tồn tại hằng số $C_{m,n} > 0$ sao cho

$$U_n^0 \subset \left(\bigcap_{m=0}^{an} C_{n,m} r^m U^0_{a^2n-am}\right) + \left(\bigcap_{m=0}^{\infty} \frac{C_{m,n}}{r^m} U^0_{a^2n+am}\right)$$

$$= \left(\bigcap_{p \in A_n} \tilde{C}_{p,n} r^{an-\frac{p}{a}} U_p^0\right) + \left(\bigcap_{q \in B_n} \tilde{C}_{q,n} r^{an-\frac{q}{a}} U_q^0\right),$$

trong đó

$$A_n = \{a^2 n - ka : 0 \leq k \leq na\}$$

và $$B_n = \{a^2 n + ka : k \ge 0\}.$$

Với mỗi $(i,j) \in I \times \infty$, xét phiếm hàm tuyến tính trên $l^\infty(I)\hat{\otimes}_\pi s$ cho bởi

$$f_{ij}([x_{ij} : I \times \infty]) = x_{ij}, \quad [x_{ij} : I \times \infty] \in l^\infty(I)\hat{\otimes}_\pi s.$$

Ta có

$$\|f_{ij}\|_n^* = \sup_{\|[x_{k,l}:I\times\infty]\| \le 1} \{ |f_{ij}[x_{k,l} : I \times \infty]| \}$$

$$= \sup_{\|[x_{k,l}:I\times\infty]\| \le 1} \{ |x_{ij}| \} = j^{-n} = e^{-na_j}.$$

Theo định lý Hahn - Banach ta thác triển f_{ij} tới $F_{ij}^{(n)} \in \tilde{E}'$ sao cho

$$\|F_{ij}^{(n)}\|_n^* = j^{-n} e^{-na_j}.$$

Ta có

$$\|F_{ij}^{(n+1)} - F_{ij}^{(n)}\|_{n+1}^* \le \|F_{ij}^{(n+1)}\|_{n+1}^* + \|F_{ij}^{(n)}\|_{n+1}^*$$

$$\le \|F_{ij}^{(n+1)}\|_{n+1}^* + \|F_{ij}^{(n)}\|_n^* \le e^{-(n+1)a_j} + e^{-na_j} \le 2e^{-na_j}.$$

Mặt khác, ta có $F_{ij}^{(n+1)} - F_{ij}^{(n)} = 0$ trên $l^\infty(I)\hat{\otimes}_\pi s$, vì thế $F_{ij}^{(n+1)} - F_{ij}^{(n)}$ cảm sinh một phiếm hàm tuyến tính liên tục $G_{ij}^{(n)} \in 2e^{-na_j}U_{n+1}^0 \subset E'$ sao cho

$$G_{ij}^{(n)} \circ q = F_{ij}^{(n+1)} - F_{ij}^{(n)}.$$

Chọn $1 \le C_n \le C_{n+1}$ với

$$D_p = 2^p C_p^p \sup_n \frac{\tilde{C}_{p,n+1}}{C_n} < +\infty$$

với mọi $p \in A_{n+1} \cup B_{n+1}$.

Vì

$$U^0_{n+1} \subset \left(\sum_{p\in A_{n+1}} \tilde{C}_{p,n+1} r^{a(n+1)-\frac{p}{a}} U^0_p\right) + \left(\sum_{q\in B_{n+1}} \tilde{C}_{q,n+1} r^{a(n+1)-\frac{q}{a}} U^0_q\right)$$

nên suy ra

$$2e^{-na_j} U^0_{n+1} \subset 2e^{-na_j} \sum_{p\in A_{n+1}} \tilde{C}_{p,n+1} r^{a(n+1)-\frac{p}{a}} U^0_p + 2e^{-na_j} \sum_{q\in B_{n+1}} \tilde{C}_{q,n+1} r^{a(n+1)-\frac{q}{a}} U^0_q .$$

Lấy $r = \dfrac{1}{2^a C^a_{n+1}} e^{\frac{a_j}{a}}$ và chọn

$$g^{(n)}_{ij} \in 2e^{-na_j} \tilde{C}_{p,n+1} \frac{1}{2^{a^2(n+1)-p}} \cdot \frac{1}{C^{a^2(n+1)-p}_{n+1}} e^{((n+1)-\frac{p}{a})a_j} U^0_p ,\ p \in A_{n+1} .$$

Từ đó

$$\left\|g^{(n)}_{ij}\right\|^*_p \le 2\tilde{C}_{p,n+1} \frac{2^p}{2^{a^2(n+1)}} \cdot \frac{C^p_{n+1}}{C^{a^2(n+1)}_{n+1}} e^{(1-\frac{p}{a^2})a_j}$$

$$\le 2\tilde{C}_{p,n+1} \frac{2^p}{2^{(n+1)}} \cdot \frac{C^p_{n+1}}{C^{(n+1)}_{n+1}} e^{(1-\frac{p}{a^2})a_j}$$

$$\le 2^p C^p_p \frac{\tilde{C}_{p,n+1}}{C_{n+1}} 2^{-n} \cdot \frac{C^p_{n+1}}{C^p_p C^n_{n+1}} e^{(1-\frac{p}{a^2})a_j}$$

$$\le D_p 2^{-n} e^{(1-\frac{p}{a^2})a_j} ,\ \text{với } p \in A_{n+1} .$$

Mặt khác,

$$g^{(n)}_{ij} \in 2e^{-na_j} U^0_{n+1} \ \text{ và}$$

$$G^{(n)}_{ij} - g^{(n)}_{ij} \in 2e^{-na_j} \sum_{q\in B_{n+1}} \tilde{C}_{q,n+1} r^{a(n+1)-\frac{q}{a}} U^0_q ,$$

suy ra

$$\left\|G^{(n)}_{ij} - g^{(n)}_{ij}\right\|^*_p \le D_q 2^{-n} e^{(1-\frac{p}{a^2})a_j} ,\ \text{với } q \in B_{n+1} .$$

Bây giờ ta xét chuỗi

$$g_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} g_{ij}^{(n)}$$

hội tụ trong

$$E'_n = \left\{ u \in E' : \|u\|_0^* = \sup \left\{ |u(x)| : \|x\|_0 \le 1 \right\} < +\infty \right\},$$

vì

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| g_{ij}^{(n)} \right\|_0^* \le D_0 e^{a_j} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} < +\infty .$$

Từ đó $g_{ij} \in E'$ với mọi $i \in I, j \ge 1$. Đặt

$$\varphi_{ij} = F_{ij}^{(0)} + g_{ij} \circ \theta =$$

$$= F_{ij}^{(k+1)} - \left\{ \sum_{n=0}^{k} (G_{ij}^{(n)} - g_{ij}^{(n)}) - \sum_{n=K+1}^{\infty} g_{ij}^{(n)} \right\} \circ \theta$$

với mỗi $(i,j) \in I \times \infty$.

Ta có

$$\left\| \varphi_{ij} \right\|_{a^2(k+1)}^* \le \left\| F_{ij}^{(k+1)} \right\|_{a^2(k+1)}^* + \sum_{n=0}^{k} \left\| G_{ij}^{(n)} - g_{ij}^{(n)} \right\|_{a^2(k+1)}^* + \sum_{n=k+1}^{\infty} \left\| g_{ij}^{(n)} \right\|_{a^2(k+1)}^*$$

$$\le \left\| F_{ij}^{(k+1)} \right\|_{a^2(k+1)}^* + D_{a^2(k+1)} \sum_{n=0}^{k} 2^{-n} e^{(1-(k+1))a_j} + D_{a^2(k+1)} \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n} e^{(1-(k+1))a_j}$$

$$\le e^{-(k+1)a_j} + D_{a^2(k+1)} e^{(1-(k+1))a_j} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$$

$$\le e^{-ka_j} + 2D_{a^2(k+1)} e^{-ka_j} = (1 + 2D_{a^2(k+1)}) e^{-ka_j} .$$

Từ đó

$$|\varphi_{ij}(x)| \le (1 + 2D_{a^2(k+1)}) e^{-ka_j} \|x\|_{a^2(k+1)} \text{ với mọi } x \in \overset{0}{E}'.$$

Đặt

$$\varphi(x) = \left[\varphi_{ij}(x) : (i,j) \in I \times \infty \right] \quad x \in \overset{0}{E}'.$$

Bây giờ ta kiểm tra $\varphi(x) \in l^{\infty}(I)\hat{\otimes}_{\pi} s$ với $x \in \tilde{E}$ và φ là ngược trái tame của e. Thật vậy

$$\|\varphi(x)\|_k = \sup_i \sum_{j \geq 1} |\varphi_{ij}(x)| e^{k\alpha_j}$$

$$\leq (1 + 2D_{a^2(2k+1)}) \|x\|_{a^2(2k+1)} \sup_i \sum_{j \geq 1} e^{-k\alpha_j}$$

$$\leq (1 + 2D_{a^2(2k+1)}) \|x\|_{a^2(2k+1)} \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^k}$$

$$\leq \left((1 + 2D_{a^2(2k+1)}) \sum_{j \geq 1} \frac{1}{j^k} \right) \|x\|_{a^2(2k+1)}$$

$$\leq \tilde{D}_{a^2(2k+1)}) \|x\|_{a^2(2k+1)} \text{ với } k \geq 2.$$

Từ đó

$$\|\varphi(x)\|_k \leq \tilde{D}_{a^2(2k+1)}) \|x\|_{a^2(2k+1)}.$$

Hơn nữa

$$\varphi e([x_{ij} : I \times \infty]) = [\psi_{ij}(e[x_{ij} : I \times \infty])]$$

$$= \left[F_{ij}^{(k+1)}(e[x_{ij} : I \times \infty]) - \left\{ \sum_{k=0}^{n} (G_{ij}^{(n)} - g_{ij}^{(n)}) - \sum_{n=k+1}^{\infty} g_{ij}^{(n)} \right\} \theta(e[x_{ij} : I \times \infty]) : I \times \infty \right]$$

$$= [f_{ij}([x_{ij} : I \times \infty]) : I \times \infty]$$

$$= [x_{ij} : I \times \infty] = id_{l^{\infty}(I)\hat{\otimes}_{\pi} s}.$$

2.2.2. Bổ đề. ([6]) *Tồn tại dãy khớp tame* $0 \to s \to s \to \omega \to 0$, *ở đó* ω *là không gian các dãy số phức với*

$$\|(x_0, x_1, \ldots, x_n)\| = \sum_{i=0}^{n} |x_i|.$$

2.2.3. Bổ đề. *Với mỗi không gian Banach* B *tồn tại dãy khớp tame*

$$0 \to s(B) \to s(B) \to B^{\infty} \to 0,$$

ở đó $s(B)$ là không gian Frechet với bậc được cho bởi

$$s(B) = \left\{ \left(x_j : j \geq 1\right) \subset B : \left\| \left(x_j : j \geq 1\right) \right\|_k = \sum_{j \geq 1} \left\| x_j \right\| j^k < +\infty \right\}.$$

Chứng minh.

Theo bổ đề trên, ta có dãy khớp tame

$$0 \to s \longrightarrow s \longrightarrow \omega \to 0.$$

Từ đó ta có dãy sau là khớp tame

$$0 \to L(B'_c, s) \longrightarrow L(B'_c, s) \longrightarrow L(B'_c, \omega) \to 0.$$

Mặt khác, lại có

$$L(B'_c, s) \overset{tame}{\cong} s(B) \text{ và } L(B'_c, \omega) \overset{tame}{\cong} \omega(B) \overset{tame}{\cong} B^{\infty}.$$

Vậy ta có

$$0 \to s(B) \to s(B) \to B^{\infty} \to 0$$

là dãy khớp tame. Bổ đề được chứng minh.

2.2.4. Định nghĩa. *Không gian Frechet phân bậc E gọi là có hệ các toán tử trơn $\{T_q : q > 0\}$, nếu tồn tại các ánh xạ tuyến tính $T_q : E \to E, q > 0$ và $p \geq 0, C_{m,n} > 0$ sao cho với mọi $q > 0$ và $x \in E$*

$$\left\| T_q x \right\|_n \leq C_{m,n} q^{n+p-m} \|x\|_m \text{ với } m \leq n + p,$$

$$\left\| x - T_q x \right\|_n \leq C_{m,n} q^{n+p-m} \|x\|_m \text{ với } m \leq n + p.$$

Trong [6] ta biết rằng E có các toán tử trơn, nếu E có các tính chất $(DNDZ)$ và (ΩDZ).

Bây giờ ta sẽ chứng minh bổ đề sau

2.2.5. Mệnh đề. $l^{\infty}(I) \hat{\otimes}_{\pi} s$ ***có tính chất*** $(\underline{DNDZ})$ *đối với mọi tập chỉ số I.*

Chứng minh.

Theo [7], s có họ các toán tử trơn $\{T_q : q > 0\}$ thoả mãn

$$\|T_q x\|_n \le C_{m,n} q^{n+p-m} \|x\|_m \text{ với } m \le n+p, x \in s,$$

$$\|x - T_q x\|_n \le C_{m,n} q^{n+p-m} \|x\|_m \text{ với } m \le n+p, x \in s.$$

Xét họ

$$\hat{T}_q : l^\infty(I) \hat{\otimes}_\pi s \to l^\infty(I) \hat{\otimes}_\pi s$$
$$[x_i, I] \mapsto [T_q x_i, I]$$

trong đó x_i và $T_q x_i$ thuộc s với mọi $i \in I$.

Ta có

$$\left\|\hat{T}_q [x_i, I]\right\|_n = \left\|T_q [x_i, I]\right\|_n = \sup_i \|T_q x_i\|_n$$
$$\le C_{m,n} q^{n+p-m} \sup_i \|x_i\|_m = C_{m,n} q^{n+p-m} \left\|[x_i, I]\right\|_m$$

với $m \le n+p$.

Tương tự, ta có

$$\left\|[x_i, I] - \hat{T}_q [x_i, I]\right\|_n = \left\|[x_i - T_q x_i, I]\right\|_n$$
$$= \sup_i \|x_i - T_q x_i\|_n \le C_{m,n} q^{n+p-m} \sup_i \|x_i\|_m$$
$$\le C_{m,n} q^{n+p-m} \left\|[x_i, I]\right\|_m \text{ với } m \ge n+p.$$

Từ đó, $l^\infty(I) \hat{\otimes}_\pi s$ có họ các toán tử trơn và do [6] nó có tính chất $(DNDZ)$ và do đó có tính chất $(\underline{DNDZ})$.

2.2.6. Mệnh đề. *Cho E là không gian Frechet phân bậc. Khi đó tồn tại tập chỉ số I và phép nhúng tame $e : E \to [l^\infty(I)]^\infty$, ở đó $[l^\infty(I)]^\infty$ được phân bậc với hệ các nửa chuẩn*

$$\|x\|_n = \sup_{1 \le k \le n} \|x\|_k,$$

ở đó $x_k \in l^\infty(I)$ và $x = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in [l^\infty(I)]^\infty$.

Chứng minh.

Giả sử $\{\|.\|_k\}_{k \geq 1}$ là hệ các nửa chuẩn xác định bậc trên E. Với mỗi $k \geq 1$, đặt $I_k = U_k^0$ và $I = \bigcup_{k \geq 1} I_k$.

Theo định lý Hahn - Banach, với mỗi $x \in E$ ta có

$$\|x\|_k = sup\,\{|u(x)| : u \in I_k\}.$$

Xét ánh xạ $e_k : E \to l^\infty(I_k)$ cho bởi

$$e_k(x) = [u(x) : u \in I_k].$$

Ta có

$$\|e_k(x)\|_{l^\infty(I_k)} = \|x\|_k \text{ với } x \in E.$$

Xét ánh xạ $e : E \to \prod_{k=1}^{\infty} l^\infty(I_k)$ xác định bởi

$$e(x) = [e_k(x) : k \geq 1],$$

ở đó $\prod_{k=1}^{\infty} l^\infty(I_k)$ được phân bậc bởi hệ các nửa chuẩn

$$\|x\|_n = \sup_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|_k,$$

ở đó $x_k \in l^\infty(I_k)$ và $\|x_k\|_k = \|x_k\|_{l^\infty(I_k)}$. Ta có

$$\|e(x)\|_n = \|[e_k(x) : k \geq 1]\|_n = \sup_{1 \leq k \leq n} \|e_k(x)\|_k$$

$$= sup\,\{\|x\|_k : 1 \leq k \leq n\} = \|x\|_n.$$

Từ đó e là phép nhúng tame. Mặt khác, $I = \bigcup_{k \geq 1} I_k$ và do định nghĩa bậc trên $\prod_{k=1}^{\infty} l^\infty(I_k)$ và $[l^\infty(I)]^\infty$, ta có dạng

$$e[f_k : \infty] = [e_k(f_k) : \infty],$$

ở đó

$$e_k(f_k) = \begin{cases} f_k(i), & i \in I_k \\ 0, & i \notin I_k \end{cases}$$

xác định phép nhúng tame từ $\prod_{k=1}^{\infty} l^{\infty}(I_k)$ vào $[l^{\infty}(I)]^{\infty}$.

2.2.7. Định lý. *Không gian Frechet phân bậc E có tính chất $(\underline{DNDZ})$ khi và chỉ khi tồn tại tập chỉ số I sao cho E đẳng cấu tame tuyến tính với không gian con của không gian Frechet phân bậc $l^{\infty}(I)\hat{\otimes}_{\pi} s$.*

Chứng minh.

Điều kiện đủ. Vì không gian con phân bậc của không gian Frechet phân bậc có tính chất $(\underline{DNDZ})$ cũng có tính chất $(\underline{DNDZ})$ và theo mệnh đề 2.2.5 điều kiện đủ được chứng minh.

Điều kiện cần. Do mệnh đề 2.2.6 tồn tại phép nhúng tame $\varphi : E \to [l^{\infty}(I)]^{\infty}$.

Mặt khác, theo bổ đề 2.2.3 ta có dãy khớp tame

$$0 \to l^{\infty}(I)\hat{\otimes}_{\pi} s \longrightarrow l^{\infty}(I)\hat{\otimes}_{\pi} s \longrightarrow [l^{\infty}(I)]^{\infty} \to 0.$$

Đặt $\tilde{E} = q^{-1}(E)$. Khi đó ta có dãy khớp tame

$$0 \to l^{\infty}(I)\hat{\otimes}_{\pi} s \longrightarrow \tilde{E} \longrightarrow E \to 0$$

với không gian con phân bậc $\tilde{E}$ của $l^{\infty}(I)\hat{\otimes}_{\pi} s$. Vì E có tính chất $(\underline{DNDZ})$ nên theo mệnh đề 2.2.1 suy ra q có ngược phải tame tuyến tính. Từ đó E đẳng cấu tame tuyến tính với không gian con phân bậc của $l^{\infty}(I)\hat{\otimes}_{\pi} s$.

Nhận xét: Định lý vẫn còn đúng nếu E có tính chất $(DNDZ)$. Trong trường hợp này, E đẳng cấu tame với không gian con của $l^{\infty}(I)\hat{\otimes}_{\pi} s$ khi và chỉ khi E có tính chất $(DNDZ)$.

Vì $l^{\infty}(I)\hat{\otimes}_{\pi} s$ có tính chất $(DNDZ)$ nên từ định lý 2.2.7 suy ra

2.2.8. Hệ quả. *Mỗi không gian Frechet phân bậc E có tính chất $(\underline{DNDZ})$ đều đẳng cấu tame tuyến tính với không gian Frechet phân bậc F có tính chất $(DNDZ)$.*

2.2.9. Hệ quả. *Cho E là không gian Frechet hạch phân bậc. Khi đó E có tính chất $(\underline{DNDZ})$ khi và chỉ khi E đẳng cấu tame tuyến tính với không gian con của s.*

2.3. Đặc trưng của các tính chất $(\underline{WDZ})$.

Tượng tự như mệnh đề 2.2.5 ta có

2.3.1. Mệnh đề. $l^1(I)\,\hat{\otimes}_\pi s$ *có tính chất* $(\underline{WDZ})$.

2.3.2. Mệnh đề. *Cho dãy khớp tame tuyến tính*

$$0 \to E \longrightarrow G \longrightarrow l^1(I)\,\hat{\otimes}_\pi s \to 0,$$

ở đó $l^1(I)\,\hat{\otimes}_\pi s$ *được phân bậc với hệ các nửa chuẩn*

$$\|x\|_k = \left\| \left[x_{ij}\right] \in I \times \infty \right\|_k = \sum_{i\in I}\sum_{j\geq 1} \left|x_{ij}\right| j^k < +\infty .$$

Khi đó θ có ngược phải tame tuyến tính nếu E có tính chất $(\underline{WDZ})$.

Chứng minh. Do mệnh đề 2.1.3 ta có thể giả sử rằng các bậc của E và $l^1(I)\,\hat{\otimes}_\pi s$ được cảm sinh bởi bậc của G. Từ đó với mỗi $n \geq 1$ ta có dãy khớp

$$0 \to E_n \longrightarrow G_n \longrightarrow (l^1(I)\,\hat{\otimes}_\pi s)_n \to 0$$

giữa các không gian Banach, trong đó

$$(l^1(I)\,\hat{\otimes}_\pi s)_n = \Big\{ \left[x_{ij}\right] : \in I \times \infty : \left\| \left[x_{ij}\right] : \in I \times \infty \right\|_n$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\geq 1} \left|x_{ij}\right| j^n < +\infty \Big\} = l^1(I)\,\hat{\otimes}_\pi s_n .$$

Với mỗi $(i,j) \in I \times \infty$, do định lý ánh xạ mở, tồn tại $d_{ij}^{(n)} \in G_n$ sao cho

$$\theta_n(d_{ij}^{(n)}) = e_{ij} = \left[\delta_{ij}^{kl} : \in I \times \infty\right]$$

trong đó

$$\delta_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1, & i = k, j = l \\ 0, & \text{trong cac truong hop khac} \end{cases}$$

và

$$\left\|d_{ij}^{(n)}\right\|_n \le 2\left\|e_{ij}\right\|_n = 2j^n.$$

Xét ánh xạ

$$R^{(n)} : (l^1(I) \otimes_p s)_n \to G_n$$

xác định bởi

$$R^{(n)}\left[x_{ij} : I \times \infty\right] = \sum_{i\in I}\sum_{j\ge 1} x_{ij} d_{ij}^{(n)}.$$

Ta có

$$\left\|R^{(n)}\right\| . \left\|\left[x_{ij} : I \times \infty\right]\right\|_n \le \sum_{i\in I}\sum_{j\ge 1}\left|x_{ij}\right| . \left\|d_{ij}^{(n)}\right\|_n.$$

$$\le 2\sum_{i\in I}\sum_{j\ge 1}\left|x_{ij}\right| . \left\|e_{ij}\right\|_n = 2\sum_{i\in I}\sum_{j\ge 1}\left|x_{ij}\right| . j^n = 2\left\|x_{ij} : (i,j) \in I \times \infty\right\|_n.$$

Do đó $R^{(n)}$ liên tục với mọi $n \ge 1$.

Mặt khác

$$q_n R^{(n)}\left[x_{ij} : I \times \infty\right] = q_n\Big(\sum_{i\in I}\sum_{j\ge 1} x_{ij} d_{ij}^{(n)}\Big)$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\ge 1} x_{ij}\, q_n(d_{ij}^{(n)}) = \sum_{i\in I}\sum_{j\ge 1} x_{ij}\, e_{ij} = \left[x_{ij} : I \times \infty\right]$$

Từ đó ta có

$$q_n \circ R^{(n)} = id_{(l^1(I)\otimes_p)_n}.$$

Đặt

$$T^{(n)} = \omega_{n+1}^{n} \circ R^{(n+1)} - R^{(n)},$$

trong đó $\omega_{n+1}^{n} : G_{n+1} \to G_n$ là ánh xạ chính tắc. Từ biểu đồ giao hoán

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & E_{n+1} & \longrightarrow & G_{n+1} & \longrightarrow & (l^1(I)\hat{\otimes}_p s)_{n+1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow \omega^n_{n+1} & & \downarrow \omega^n_{n+1} & & \downarrow \omega^n_{n+1} & & \\
0 & \to & E_n & \longrightarrow & G_n & \longrightarrow & (l^1(I)\hat{\otimes}_p s)_n & \to & 0
\end{array}$$

ta có

$$\begin{aligned} \theta_n \circ T^{(n)} &= \theta_n \omega^n_{n+1} R^{(n+1)} - \theta_n R^{(n)} \\ &= \omega^n_{n+1}\theta_{n+1} R^{(n+1)} - \theta_n R^{(n)} = 0 \end{aligned}$$

trên $(l^1(I)\hat{\otimes}_p s)_{n+1}$. Do đó

$$T^{(n)} : (l^1(I)\hat{\otimes}_p s)_{n+1} = l^1(I)\hat{\otimes}_p s_{n+1} \to ker\theta_n = im e_n = E_n .$$

Đặt $T^{(n)}_{ij} = T^{(n)}(e_{ij}) \in E_n$. Ta có

$$\begin{aligned} \left\|T^{(n)}_{ij}\right\|_n &= \left\|T^{(n)}(e_{ij})\right\|_n = \left\|\omega^n_{n+1} R^{(n+1)}(e_{ij}) - R^{(n)}(e_{ij})\right\|_n \\ &\le \left\|\omega^n_{n+1}\right\| . \left\|R^{(n+1)}(e_{ij})\right\|_n + \left\|R^{(n)}(e_{ij})\right\|_n \le \left\|\delta^{(n+1)}_{ij}\right\|_{n+1} + \left\|\delta^{(n)}_{ij}\right\|_n \\ &\le 2\left\|e_{ij}\right\|_{n+1} + 2\left\|e_{ij}\right\|_n \le 2e^{(n+1)\alpha_j} + 2e^{n\alpha_j} \le 4e^{(n+1)\alpha_j} \end{aligned}$$

với mọi i, j.

Chọn $\tilde{T}^{(n)}_{ij} \in 4e^{(n+1)\alpha_j} U_n \in E$ sao cho

$$\left\|\tilde{T}^{(n)}_{ij} - T^{(n)}_{ij}\right\|_n \le 2^{-n} .$$

Vì E có tính chất ($\underline{WDZ}$), nên ta có thể giả sử $b = 0 = p$ và

$$\begin{aligned} U_n &\subset \sum_{m=0}^{\alpha n} C_{m,n} \rho^m U_{\alpha^2 n - \alpha m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{m,n}}{\rho^m} U_{\alpha^2 n + \alpha m} \\ &\subset \Big(\sum_{p \in A_n} \tilde{C}_{p,n} \rho^{\alpha n - \frac{p}{\alpha}} U_p\Big) + \Big(\sum_{q \in B_n} \tilde{C}_{q,n} \rho^{\alpha n - \frac{p}{\alpha}} U_q\Big), \end{aligned}$$

trong đó $A_n = \{\alpha^2 n - k\alpha : 0 \le k \le n\alpha\}$ và $B_n = \{\alpha^2 n + k\alpha : k \ge 0\}$.

Chọn $1 \le C_n \le C_{n+1}$ sao cho

$$D_p = 2^p C_p^p \sup_n \frac{4\tilde{C}_{p,n}}{C_n} < +\infty$$

với mọi $p \in A_n \cup B_n$. Ta có

$$4e^{(n+1)a_j} U_n \subset 4e^{(n+1)a_j}\Big(\bigcap_{p \in A_n} \tilde{C}_{p,n} r^{an - \frac{p}{a}} U_p\Big) + 4e^{(n+1)a_j}\Big(\bigcap_{q \in B_n} \tilde{C}_{q,n} r^{an - \frac{p}{a}} U_q\Big).$$

Lấy $r = \dfrac{1}{2^a C_n^a e^{\frac{a_j}{a}}}$ và chọn

$$t_{ij}^{(n)} \in 4e^{(n+1)a_j} \tilde{C}_{p,n} \frac{1}{2^{a^2 n - p} C_n^{a^2 n - p} e^{n a_j - \frac{p}{a^2} a_j}} U_p \quad \text{với } p \in A_n.$$

Khi đó

$$\left\| t_{ij}^{(n)} \right\|_p \le 4\tilde{C}_{p,n} e^{(1 + \frac{p}{a^2}) a_j} \frac{2^p}{2^{a^2 n}} \times \frac{C_n^p}{C_n^{a^2 n}}$$

$$\le 2^p C_p^p \frac{4\tilde{C}_{p,n}}{C_n} \times \frac{C_n^p}{C_n^p C_n^n} 2^{-n} e^{(1 + \frac{p}{a^2}) a_j}$$

$$\le D_p e^{(1 + \frac{p}{a^2}) a_j} 2^{-n} \quad \text{với } p \le a^2 n,\ p \in A_n.$$

Vì $\tilde{T}_{ij}^{(n)} \in 4e^{(n+1)a_j} U_n$, nên suy ra rằng

$$\tilde{T}_{ij}^{(n)} - t_{ij}^{(n)} \in 4e^{(n+1)a_j} \bigcap_{q \in B_n} \tilde{C}_{q,n} r^{an - \frac{p}{a}} U_q .$$

Từ đó

$$\left\| \tilde{T}_{ij}^{(n)} - t_{ij}^{(n)} \right\|_q \le D_q e^{(1 + \frac{p}{a^2}) a_j} 2^{-n} \quad \text{với } q \in B_n .$$

Xét chuỗi

$$t_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \big(t_{ij}^{(k)} + (T_{ij}^{(k)} - \tilde{T}_{ij}^{(k)})\big).$$

Chuỗi hội tụ đều trong $E_{a^2 n} = \{x \in E : \|x\|_{a^2 n} < +\infty\}$. Thật vậy, ta có đánh giá sau

$$\sum_{k=a^2n}^{+\infty} \left(\|t_{ij}^{(k)}\|_{a^2n} + \|T_{ij}^{(k)} - \tilde{T}_{ij}^{(k)}\|_{a^2n}\right)$$

$$\le \sum_{k=a^2n}^{+\infty} D_{a^2n} e^{(1+n)a_j} 2^{-k} + \sum_{k=a^2n}^{+\infty} 2^{-k} = D_{a^2n} e^{(1+n)a_j} \sum_{k=a^2n}^{+\infty} 2^{-k} + \sum_{k=a^2n}^{+\infty} 2^{-k}$$

$$\le (D_{a^2n} e^{(1+n)a_j} + 1) \sum_{k=a^2n}^{+\infty} 2^{-k} < +\infty .$$

Từ đó $t_{ij} \in E_{a^2n}$ với mọi $n \ge 0$.

Đặt

$$R([x_{ij} : (i,j) \in I \times \infty]) = R^0([x_{ij} : (i,j) \in I \times \infty]) + \sum_{i\in I} \sum_{j\ge 1} t_{ij} x_{ij} ,$$

trong đó $[x_{ij} : (i,j) \in I \times \infty] \in (l^1(I) \hat{\otimes}_p s)_0 = l^1(I) \hat{\otimes}_p s$. Khi đó $R : l^1(I) \hat{\otimes}_p s \to G_0$ là ánh xạ liên tục.

Ta có

$$R([x_{ij} : (i,j) \in I \times \infty]) = R^{a^2n}([x_{ij} : (i,j) \in I \times \infty]) -$$

$$- \sum_{k=0}^{a^2n-1} T^{(k)} [x_{ij} : (i,j) \in I \times \infty] + \sum_{i\in I} \sum_{j\ge 1} t_{ij} x_{ij}$$

$$= R^{a^2n}([x_{ij} : I \times \infty]) - \sum_{i\in I} \sum_{j\ge 1} \left(\sum_{k=0}^{a^2n-1} T_{ij}^{(k)} \right) x_{ij} + \sum_{i\in I} \sum_{j\ge 1} t_{ij} x_{ij}$$

$$= R^{a^2n}([x_{ij} : I \times \infty]) - \sum_{i\in I} \sum_{j\ge 1} \left(\sum_{k=0}^{a^2n-1} T_{ij}^{(k)} \right) x_{ij} + \sum_{i\in I} \sum_{j\ge 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (t_{ij}^{(k)} + (T_{ij}^{(k)} - \tilde{T}_{ij}^{(k)}))\right) x_{ij}$$

$$= R^{(a^2n)} [x_{ij}] - \sum_{i\in I} \sum_{j\ge 1} \left(\sum_{k=0}^{a^2n-1} T_{ij}^{(k)} - \sum_{k=0}^{a^2n-1} t_{ij}^{(k)} + T_{ij}^{(k)} - \tilde{T}_{ij}^{(k)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=a^2n}^{\infty} (t_{ij}^{(k)} + (T_{ij}^{(k)} - \tilde{T}_{ij}^{(k)}) \right) x_{ij}$$

$$= R^{(a^2n)} [x_{ij}] - \sum_{i\in I} \sum_{j\ge 1} \left(\sum_{k=0}^{a^2n-1} (\tilde{T}_{ij}^{(k)} - t_{ij}^{(k)}) - \sum_{k=a^2n}^{\infty} t_{ij}^{(k)} + T_{ij}^{(k)} - \tilde{T}_{ij}^{(k)} \right) x_{ij} .$$

Từ bất đẳng thức này ta nhận được ước lượng sau đây

$$
\begin{aligned}
\left\|R\left[x_{ij}\right]\right\|_{a^2n} \le{}& \left\|R^{(a^2n)}\left[x_{ij}\right]\right\|_{a^2n} + \sum_{i\in I}\sum_{j\ge 1}\left(\sum_{k=0}^{n}\left\|\tilde{T}_{ij}^{(k)} - t_{ij}^{(k)}\right\|_{a^2n} + \right.\\
&+ \left.\sum_{k=n+1}^{q_n^2-1}\left\|\tilde{T}_{ij}^{(k)} - t_{ij}^{(k)}\right\|_{a^2n} + \sum_{k=a^2n}^{\infty}\left\|t_{ij}^{(k)}\right\|_{a^2n} + \sum_{k=a^2n}^{\infty}\left\|T_{ij}^{(k)} - \tilde{T}_{ij}^{(k)}\right\|_{a^2n}\right)\left|x_{ij}\right|\\
&\le 2\left\|\left[x_{ij}\right]\right\|_{a^2n} + \sum_{i\in I}\sum_{j\ge 1}\left(\sum_{k=0}^{n} D_{a^2n}e^{(1+n)a_j}2^{-k} + \right.\\
&+ (a^2n - n - 1)\max_{n+1\le k\le a^2n-1}\left\|T_{ij}^{(k)} - t_{ij}^{(k)}\right\|_{a^2n} +\\
&+ \left.\sum_{k=a^2n}^{\infty} D_{a^2n}e^{(1+n)a_j}2^{-k} + \sum_{k=a^2n}^{\infty} 2^{-k}\right)\left|x_{ij}\right|\\
\le{}& 2\left\|\left[x_{ij}\right]\right\|_{a^2n} + \sum_{i\in I}\sum_{j\ge 1}\left(2D_{a^2n}e^{(1+n)a_j} + \tilde{D}_{a^2n}e^{(1+n)a_j} + 2D_{a^2n}e^{(1+n)a_j} + 2\right)\left|x_{ij}\right|\\
\le{}& 2\left\|\left[x_{ij}\right]\right\|_{a^2n} + \sum_{i\in I}\sum_{j\ge 1}\left(4D_{a^2n} + 2 + \tilde{D}_{a^2n}\right)e^{(1+n)a_j}\left|x_{ij}\right|\\
\le{}& 2\left\|\left[x_{ij}\right]\right\|_{a^2n} + \sum_{i\in I}\sum_{j\ge 1}\left(4D_{a^2n} + 2 + \tilde{D}_{a^2n}\right)e^{(1+a^2n)a_j}\left|x_{ij}\right|\\
&\le 2\left\|\left[x_{ij}\right]\right\|_{a^2n+1} + \left(4D_{a^2n} + 2 + \tilde{D}_{a^2n}\right)\left\|\left[x_{ij}\right]\right\|_{a^2n+1}\\
&\le \left(4 + 4D_{a^2n} + \tilde{D}_{a^2n}\right)\left\|\left[x_{ij}\right]\right\|_{a^2n+1}.
\end{aligned}
$$

Mặt khác

$$\left\|R\left[x_{ij}\right]\right\|_{n} \le \left\|R\left[x_{ij}\right]\right\|_{a^2n},$$

do đó

$$\left\|R\left[x_{ij}\right]\right\|_{n} \le \left(4 + 4D_{a^2n} + \tilde{D}_{a^2n}\right)\left\|\left[x_{ij}\right]\right\|_{a^2n+1}.$$

Điều đó đã chỉ ra rằng R là tame tuyến tính và

$$q \circ R = id_{l^1\hat{\otimes}_p s}.$$

2.3.3. Bổ đề. *Cho E là không gian Frechet phân bậc. Khi đó tồn tại dãy khớp tame*

$$0 \to E \xrightarrow{\quad} \prod_{k \geq 1} E_k \xrightarrow{\quad} \prod_{k \geq 1} E_k \to 0,$$

trong đó E_k là không gian Banach chính tắc kết hợp với các nửa chuẩn $\|.\|_k$ trên E và $\prod_{k \geq 1} E_k$ là không gian Frechet phân bậc với tôpô sinh bởi hệ các nửa chuẩn

$$\|x\|_m = \sup_{1 \leq k \leq m} \|x_k\|_k, \; x = (x_k)_{k \geq 1}, x_k \in E_k$$

và

$$e(x) = \{e_k(x)\}_{k \geq 1}, \quad q(\{x_k\}) = (w_{k+1}^k x_{k+1} - x_k),$$

$e_k : E \to E_k$ *và* $w_{k+1}^k : E_{k+1} \to E_k$ *là các ánh xạ chính tắc.*

Chứng minh. Dễ thấy e là đẳng cấu tame lên ảnh, bởi vì

$$\begin{aligned} \|e(x)\|_k &= max(\|e_1(x)\|_1, \ldots, \|e_n(x)\|_k) \\ &= max(\|x\|_1, \ldots, \|x\|_n) = \|x\|_k. \end{aligned}$$

Mặt khác, với mỗi $n \geq 1$, q cảm sinh một toàn ánh tuyến tính liên tục

$$q_n : \prod_{k=1}^{n+1} E_k \to \prod_{k=1}^{n} E_k$$

cho bởi

$$q_n(x_1, \ldots, x_n) = (w_2^1 x_2 - x_1, \ldots, w_{n+1}^n x_{n+1} - x_n).$$

Hiển nhiên q_n là toàn ánh và do đó là mở và $E_{n+1} = ker q_n$. Từ đó, ta có

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k / ker q\right)_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} E_k / ker q_n \overset{tame}{\cong} \prod_{k=1}^{n} E_k = \left(\prod_{k=1}^{\infty} E_k\right)_n.$$

2.3.4. Định lý. *Không gian Frechet phân bậc* E *có tính chất* $(\underline{\Omega DZ})$ *khi và chỉ khi tồn tại tập chỉ số* I *sao cho* E *đẳng cấu tame tuyến tính với không gian thương phân bậc của* $l^1(I)\,\hat{\otimes}_p\, s$.

Chứng minh.

Điều kiện đủ. Do mệnh đề 2.3.1 , $l^1(I)\,\hat{\otimes}_p\, s$ có tính chất $(\underline{\Omega DZ})$. Hơn nữa, tính chất $(\underline{\Omega DZ})$ được di truyền qua không gian thương. Do đó kết luận của điều kiện đủ được chứng minh.

Điều kiện cần. Giả sử E có tính chất $(\underline{\Omega DZ})$. Khi đó theo bổ đề 2.3.3 tồn tại dãy khớp tame tuyến tính

$$0 \to E \longrightarrow \prod_{k\geq 1} E_k \longrightarrow \prod_{k\geq 1} E_k \to 0.$$

Chọn không gian Banach F sao cho mỗi E_k là không gian con bù của F, tức là

$$F = \left\{ x = (x_k)_k \in \prod_k E_k : \|x\| = \sum_k \|x_k\|_k < +\infty \right\}.$$

Với k bất kỳ, lấy F_k là phần bù tôpô của E_k trong F, tức là $F = E_k \oplus F_k$.

Tổng trực tiếp của hệ thức trên với dãy khớp

$$0 \to E \to \prod_k E_k \xrightarrow{id} \prod_k E_k \to 0$$

có thể được xét như là dãy khớp tame

$$0 \to E \to F^{\infty} \to F^{\infty} \to 0.$$

Vì mỗi không gian Banach là không gian thương của $l^1(I)$ với tập chỉ số I nào đó, nên ta có dãy khớp

$$0 \to K \to l^1(I) \to F \to 0.$$

Xét dãy khớp tame

$$0 \to s \to s \to \omega \to 0.$$

Ta có biểu đồ giao hoán sau với các dòng và cột là khớp tame

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & F \hat{\otimes}_\pi s \arrow[r] \arrow[u] & F \hat{\otimes}_\pi s \arrow[r] \arrow[u] & F^\infty \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & l^1(I) \hat{\otimes}_\pi s \arrow[r, "i_1"] \arrow[u] & l^1(I) \hat{\otimes}_\pi s \arrow[r] \arrow[u] & l^1(I)^\infty \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \hat{\otimes}_\pi s \arrow[r] \arrow[u] & K \hat{\otimes}_\pi s \arrow[r] \arrow[u, "i_2"] & K^\infty \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Từ đó ta được dãy khớp tame sau

$$0 \to (l^1(I) \hat{\otimes}_\pi s) \oplus K \hat{\otimes}_\pi s \xrightarrow{i_1 \oplus i_2} l^1(I) \hat{\otimes}_\pi s \xrightarrow{q_2} F^\infty \to 0.$$

Đặt $M = ker q_2$. Ta có biểu đồ giao hoán sau với dòng và cột là khớp tame

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
 & & M \arrow[u] & M \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] & F^{\infty} \arrow[r, "q_1"] \arrow[u] & F^{\infty} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r] & H \arrow[r, "p_2"] \arrow[u, "p_1"] & l^1(I) \hat{\otimes}_p s \arrow[r] \arrow[u, "q_2"] & 0 \\
 & & M \arrow[u] & M \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

trong đó

$$H = \left\{ (x,y) \in F^{\infty} \times (l^1(I) \hat{\otimes}_p s) : q_1 x = q_2 y \right\}$$

và

$$p_1(x,y) = x, \quad p_2(x,y) = y .$$

Do mệnh đề 2.3.2, p_2 có ngược phải tame tuyến tính. Từ đó ta có biểu đồ giao hoán sau với các dòng và cột là khớp

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E \oplus (l^1(I) \hat{\otimes}_p s) \arrow[r] \arrow[u] & F^{\infty} \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & G \arrow[r, "g"] \arrow[u, "p_1"] & l^1(I) \hat{\otimes}_p s \arrow[r] \arrow[u, "q_2"] & 0 \\
 & & M \arrow[u] & M \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

trong đó G là tích thớ của $E \oplus (l^1(I)\hat{\otimes}_\pi s)$ và $l^1(I)\hat{\otimes}_\pi s$ trên F^∞.

Vì

$$M = \ker q_2 = Im(i_1 \oplus i_2),$$

nên M là không gian thương của

$$(l^1(I)\hat{\otimes}_\pi s)\oplus K\hat{\otimes}_\pi s \overset{tame}{\cong} (l^1(I)\oplus K)\hat{\otimes}_\pi s.$$

Chọn tập chỉ số J sao cho K là không gian thương của $l^1(J)$. Từ đó M là không gian thương tame của

$$(l^1(I)\oplus l^1(J))\hat{\otimes}_\pi s \overset{tame}{\cong} l^1(I \cup J)\hat{\otimes}_\pi s.$$

Hơn nữa, $l^1(I\cup J)\hat{\otimes}_\pi s$ có tính chất $(\underline{DZ})$ nên M cũng có tính chất $(\underline{DZ})$. Điều đó đã chỉ ra rằng dòng thứ hai của biểu đồ là chẻ tame

$$0 \to M \to G \longrightarrow l^1(I)\hat{\otimes}_\pi s \to 0.$$

Từ cột thứ nhất ta được dãy khớp tame

$$0 \to M \to M \oplus (l^1(I)\hat{\otimes}_\pi s) \to E \oplus (l^1(I)\hat{\otimes}_\pi s) \to 0.$$

Từ đó E là không gian thương tame của $M \oplus (l^1(I)\hat{\otimes}_\pi s)$ do đó là không gian thương tame của $(l^1(I\cup J)\oplus l^1(I))\hat{\otimes}_\pi s$. Vậy E là không gian thương tame tuyến tính của $l^1(I\cup J\cup I)\hat{\otimes}_\pi s$.

Vì $l^1(I)\hat{\otimes}_\pi s$ có tính chất $(\underline{DZ})$ nên từ định lý 2.3.4 suy ra

2.3.5. Hệ quả. *Mỗi không gian Frechet phân bậc E có tính chất $(\underline{DZ})$ đều đẳng cấu tame tuyến tính với không gian Frechet phân bậc F có tính chất $(\underline{DZ})$.*

2.3.6. Hệ quả. *Cho E là không gian Frechet hạch phân bậc. Khi đó E là hạch tame và có tính chất $(\underline{DZ})$ khi và chỉ khi E đẳng cấu tame tuyến tính với không gian thương của s.*

2.4. Tính ổn định của các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{\Omega DZ})$ đối với không gian đối ngẫu thứ hai.

Áp dụng các định lý 2.2.7 và 2.3.4 trong phần này chúng ta sẽ thiết lập mối qua hệ giữa các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{\Omega DZ})$ với không gian Frechet phân bậc E và không gian đối ngẫu thứ hai của nó.

Cho E là không gian Frechet phân bậc với cơ sở lân cận giảm cố định $\{U_n\}_{n\ge 1}$ xác định tôpô của nó. Khi đó ta xét không gian đối ngẫu thứ hai của nó E''_β là không gian Frechet phân bậc với cơ sở lân cận giảm cố định $\{U_n^{\circ\circ}\}_{n\ge 1}$. Ta có kết quả sau:

2.4.1. Định lý. *Không gian Frechet phân bậc E có tính chất $(\underline{DNDZ})$ nếu và chỉ nếu E''_β cũng có tính chất $(\underline{DNDZ})$.*

Chứng minh.

Trước tiên chú ý rằng nếu E là không gian con Frechet phân bậc của không gian Frechet phân bậc F, thì E''_β cũng là không gian con phân bậc của F''_β.

Điều kiện đủ là hiển nhiên.

Điều kiện cần. Giả sử E có tính chất $(\underline{DNDZ})$. Do định lý 2.2.7 tồn tại tập chỉ số I sao cho E đẳng cấu tame tuyến tính với không gian con F của $l^\infty(I)\hat{\otimes}_\pi s$, trong đó $l^\infty(I)\hat{\otimes}_\pi s$ được phân bậc bởi hệ các nửa chuẩn

$$l^\infty(I)\hat{\otimes}_\pi s = \left\{(x_j)_{j\ge 1} \in l^\infty(I) : \|(x_j)\|_k = \sum_{j\ge 1} \|x_j\| j^k < +\infty,\ \forall k\right\}.$$

Dễ thấy rằng

$$(l^\infty(I)\hat{\otimes}_\pi s)''_\beta \overset{tame}{\cong} l^\infty(I)\hat{\otimes}_\pi s \in (\underline{DNDZ}).$$

Do đó E''_β cũng có tính chất $(\underline{DNDZ})$.

2.4.2. Định lý. *Không gian Frechet phân bậc E có tính chất $(\underline{WDZ})$ nếu và chỉ nếu E''_b cũng có tính chất $(\underline{WDZ})$.*

Chứng minh. Tương tự như 2.4.1, ta chú ý rằng nếu E là không gian thương phân bậc của không gian Frechet phân bậc F, thì E''_b cũng là không gian thương phân bậc của F''_b.

Giả sử E có tính chất $(\underline{WDZ})$. Do định lý 2.3.4 tồn tại tập chỉ số I sao cho E đẳng cấu tame tuyến tính với không gian thương của $l^1(I) \otimes_p s$. Theo chú ý ở trên mỗi tập bị chặn của E đều là ảnh của tập bị chặn trong $l^1(I) \otimes_p s$ qua ánh xạ thương. Từ đó E''_b là không gian con của $(l^1(I) \otimes_p s)''_b$. Suy ra E''_b đẳng cấu tame tuyến tính với không gian thương của

$$(l^1(I) \otimes_p s)''_b \overset{tame}{\cong} l^1(I) \otimes_p s \in (\underline{WDZ}).$$

Vậy $E''_b \in (\underline{WDZ})$.

Ngược lại, giả sử $E''_b \in (\underline{WDZ})$. Khi đó tồn tại $a > 0, b \geq 0, p \geq 0, C_{m,n} > 0$ sao cho

$$U_n^{\circ\circ} \subset \left(\bigcap_{m=p}^{a(n-b)} C_{m,n} r^{m-p} U^{\circ\circ}_{a^2n-am} \right) + \left(\bigcap_{m=-p}^{\infty} \frac{C_{m,n}}{r^{m+p}} U^{\circ\circ}_{a^2n+am} \right).$$

Trước tiên ta sẽ chỉ ra rằng $U_n \subset \overline{B}$, trong đó đặt

$$B = \bigcap_{m=p}^{a(n-b)} C_{m,n} r^{m-p} U_{a^2n-am} + \bigcap_{m=-p}^{\infty} \frac{C_{m,n}}{r^{n+p}} U_{a^2n+am}.$$

Trong trường hợp ngược lại, giả sử rằng tồn tại $a \in U_n$ nhưng $a \notin \overline{B}$. Theo định lý Hahn - Banach tồn tại $u \in E'$ sao cho với mỗi $x \in B$: $|u(x)| \leq 1$ và $u(a) = 2$. Tuy vậy $Cl_{\sigma(E'',E')} U_{a^2n-am} = U^{\circ\circ}_{a^2n-am}$ và $Cl_{\sigma(E'',E')} U_{a^2n+am} = U^{\circ\circ}_{a^2n+am}$ nên suy ra

$$Cl_{s(E'',E')}B \supseteq \sum_{m=p}^{a(n-b)} C_{m,n} r^{m-p} U^{00}_{a^2n-am} + \sum_{m=-p}^{\infty} \frac{C_{m,n}}{r^{m+p}} U^{00}_{a^2n+am}.$$

Mặt khác, $E' = (E'', s(E'', E'))'$ nên u là $s(E'', E')$- liên tục. Từ đó $|u(x)| \le 1$ với

$$x \in \left(\sum_{m=p}^{a(n-b)} C_{m,n} r^{m-p} U^{00}_{a^2n-am} + \sum_{m=-p}^{\infty} \frac{C_{m,n}}{r^{m+p}} U^{00}_{a^2n+am} \right).$$

điều này là không thể. Vậy $U_n \subset \overline{B}$.

Vì $\sum_{m=p}^{a(n-b)} C_{m,n} r^{m-p} U_{a^2n-am}$ là lân cận của 0 trong E, nên suy ra

$$U_n \subset \sum_{m=p}^{a(n-b)} 2C_{m,n} r^{m-p} U_{a^2n-am} + \sum_{m=-p}^{\infty} \frac{C_{m,n}}{r^{m+p}} U_{a^2n+am}$$

$$\subset \sum_{m=p}^{a(n-b)} 2C_{m,n} r^{m-p} U_{a^2n-am} + \sum_{m=-p}^{\infty} \frac{2C_{m,n}}{r^{m+p}} U_{a^2n+am}$$

$$\subset \sum_{m=p}^{a(n-b)} \tilde{C}_{m,n} r^{m-p} U_{a^2n-am} + \sum_{m=-p}^{\infty} \frac{\tilde{C}_{m,n}}{r^{m+p}} U_{a^2n+am}.$$

Vậy E có tính chất $(\underline{WDZ})$.

KẾT LUẬN

- Trình bày tổng quan và hệ thống các kết quả về các tính chất $(DNDZ)$ và (ΩDZ) trong lớp các không gian Frechet phân bậc cùng đặc trưng của các tính chất $(DNDZ)$ và (ΩDZ).
- Chứng minh chi tiết một số kết quả về các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{\Omega DZ})$ trong lớp các không gian Frechet phân bậc cùng đặc trưng của các tính chất $(\underline{DNDZ})$ và $(\underline{\Omega DZ})$. Cụ thể đã:

  + Chứng minh: Không gian Frechet phân bậc E có tính chất $(\underline{DNDZ})$ khi và chỉ khi tồn tại tập chỉ số I sao cho E đẳng cấu tame tuyến tính với không gian con của không gian Frechet phân bậc $l^{\infty}(I)\hat{\otimes}_{\pi} s$.

  + Chứng minh: Không gian Frechet phân bậc E có tính chất $(\underline{\Omega DZ})$ khi và chỉ khi tồn tại tập chỉ số I sao cho E đẳng cấu tame tuyến tính với không gian thương phân bậc của $l^{1}(I)\hat{\otimes}_{\pi} s$.

- Trình bày các kết quả về tính ổn định của các tính chất **$(\underline{DNDZ})$** và **$(\underline{\Omega DZ})$** đối với không gian đối ngẫu thứ hai.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] **L.M.Hai, N.V.Khue and B.D. Tac,** *Characterization of* $(\underline{DNDZ})$ *and* $(\underline{WDZ})$ *in class of Frechet spaces*, Pubblications of CFCA. Vol. 3 (1999), 35 - 62.

[2]. **G.Kửthe**, *Topological vector spaces,* I. Berlin-Heidelberg-New York, Springer - Verlag 1969.

[3]. **Komura, Tund Y**, *Uber die Einbettung der nuklearn Raume in* $(s)^{\wedge}$, Math. Ann (1966),162.

[4] **J. Leiterer**, *Banach coherent analytic Frechet sheaves*, Math. Nachr. 85 (1978), 91-109.

[5] **M Poppenberg**, *Cheracterization of the subspaces of* (s) *in the tame category*, Arch. Math. 54 (1990),274 - 283.

[6] **M Poppenberg**, *Cheracterization of the quotient spaces of* (s) *in the tame category*, Math. Nachr. 150 (1991), 127 - 141.

[7] **M Poppenberg**, *Simultaneous smoothing and interpolation with respect to E.Borel's Theorem*, Arch. Math. 61 (1993) , 150 - 159.

[8] **M Poppenberg**, *A sufficient condition of type* (W) *for tame splitting of short exact sequences of Frechet spaces*, Manuscripta Math. 72 (1994), 257 - 274.

[9] **H. H. Schaefer**, *Topological vector spaces*, Berlin - Heidenberg, New York, 1971.

[10]. A.Pietsch, *Nuclear locally convex spaces.* Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1972.

[11] **D.Vogt**, *Subspaces and quotient spaces of* (s), In functional Analysis: Surveys and Recent Results, North - Holland Math. Stud. 27 (1997), 167 - 187.

[12] **D.Vogt**, *Tame spaces and power series spaces*, Math. Z., 196 (1987), 532 - 536.

[13] **D.Vogt**, *Frechtraume, zwischen denen jede stetige linear Abbildung beschrankt ist*, J. Reine Angew Math. 345 (1983), 182 - 200.

[14] **D.Vogt**, *On two classes of (F) – spaces*, Arch. Math, 45 (1985), 255-266.

[15]. **D.Vogt**, *Charakterisierung der Unterrọume von s*. Math 155 (1997), 109-117.

[16]. **D.Vogt**, *Charakterisierung der Unterrọume eines nuklearen stabilen Potenzreihen-rọumes von endlicher Typ*, Studia Math.

[17]. **D.Vogt**, *Eine Charakterisierung der Potenzreihenrọume von endlichen Typ und ihre Folgerungen*, Manuser Math, 37(1982), 269-301.

[18]. **D.Vogt and M.Wagner**, *Charakterisierung der Potenzreihenrọume und Quotientenrọme der nuklearen stabilen Potenzreihenrọume von unendlichen Typ*, studia Math, 70 (1981), 63-80

[19]. **D.Vogt and M.Wagner**, *Charakterisierung der quotientenrọume von sund eine vermutung von Martineau* , Stud. Math, 67 (1980), 225-240.