BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

NINH VĂN THU

ĐA TẠP PHỨC VỚI NHÓM CÁC TỰ ĐẲNG CẤU KHÔNG COMPACT

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

HÀ NỘI - 2010

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
----------------📖-----------------

NINH VĂN THU

ĐA TẠP PHỨC VỚI NHÓM CÁC TỰ ĐẲNG CẤU KHÔNG COMPACT

CHUYÊN NGÀNH: Hình học và Tôpô
MÃ SỐ: 62.46.10.01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC: GS.TSKH ĐỖ ĐỨC THÁI

Hà Nội - 2010

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan những kết quả được trình bày trong luận án là mới, đã được công bố trên các tạp chí Toán học trong và ngoài nước. Các kết quả viết chung với GS. TSKH Đỗ Đức Thái và GS. TSKH François Berteloot đã được sự đồng ý của các đồng tác giả khi đưa vào luận án. Các kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Nghiên cứu sinh: Ninh Văn Thu

LỜI CẢM ƠN

Luận án được hoàn thành dưới sự quan tâm và hướng dẫn tận tình của GS.TSKH Đỗ Đức Thái. Nhân dịp này, tôi xin được gửi tới thầy lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất. Tôi cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn đến GS.TSKH Nguyễn Văn Khuê và PGS.TS Nguyễn Đình Sang, những người đã bỏ công sức đọc bản thảo và cho tôi nhiều ý kiến chỉnh sửa quý báu để tôi có thể hoàn thành tốt hơn bản luận án này.

Tôi xin được cám ơn chương trình Formath Việt Nam, Labo Emile Picard - Trường Đại học Paul Sabatier (Toulouse - CH Pháp) và GS.TSKH François Berteloot đã giúp đỡ tôi thực tập tại Labo trong thời gian làm luận án.

Tôi xin được bày tỏ lòng cảm ơn đến Ban chủ nhiệm Khoa Toán - Tin, Phòng Sau đại học và Ban Giám hiệu của Trường ĐHSP Hà Nội đã tạo mọi điều kiện thuận lợi để tôi có thể hoàn thành luận án của mình

Cuối cùng, tôi cũng xin được bày tỏ lòng biết ơn đến các thầy cô trong Khoa Toán-Tin thuộc Trường ĐHSP Hà Nội, Khoa Toán- Cơ- Tin học thuộc Trường ĐHKHTN - ĐHQGHN, Trường THPT Hải Hậu B, các thành viên của Seminar Hình học phức thuộc Khoa Toán - Tin và Seminar Các phương pháp trong giải tích thuộc Khoa Toán - Cơ - Tin học, cùng các bạn đồng nghiệp về sự động viên khích lệ cũng như những trao đổi hữu ích trong suốt quá trình học tập và công tác.

Nghiên cứu sinh: Ninh Văn Thu

MỤC LỤC

DANH MỤC CÁC KÝ HIỆU

- $Aut(\Omega)$: nhóm tự đẳng cấu của miền Ω.
- $\mathcal{C}^k(\Omega)$: không gian các hàm khả vi liên tục đến cấp k trên Ω.
- $\mathcal{H}(\omega, \Omega)$ (hoặc $Hol(\omega, \Omega)$): tập các ánh xạ chỉnh hình từ ω vào Ω.
- $\mathcal{P}_{2m}$: không gian tất cả các đa thức giá trị thực xác định trên $\mathbb{C}$ với bậc $\leq 2m$ và không chứa bất kì hạng tử điều hòa.
- $\mathcal{H}_{2m}$: không gian tất cả các đa thức, giá trị thực, thuần nhất, điều hòa dưới trên $\mathbb{C}$ với bậc $2m$.
- $M_Q = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_n + Q(z_1) + |z_2|^2 + \cdots + |z_{n-1}|^2 < 0\}$ với $Q \in \mathcal{P}_{2m}$.
- $\Omega_1 \simeq \Omega_2$ với nghĩa: Ω_1 và Ω_2 là song chỉnh hình.
- $a \lesssim b$ có nghĩa là tồn tại hằng số $C > 0$, độc lập với các tham số (thường là q và tham số thực ϵ) sao cho $a \leq Cb$.
- $a \approx b$ có nghĩa là tồn tại hằng số $C_1, C_2 > 0$, độc lập với các tham số (thường là q và tham số thực ϵ) sao cho $C_1 b \leq a \leq C_2 b$.
- $\tau(\partial\Omega, p)$: kiểu của biên $\partial\Omega$ tại điểm biên $p \in \partial\Omega$.
- $T_p^{\mathbb{C}}(M)$: không gian tiếp xúc phức của đa tạp phức M tại p.
- $\Delta_r = D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$.
- K_Ω: giả metric Royden-Kobayashi trên miền Ω.

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Giả sử M là một đa tạp phức. Nhóm tự đẳng cấu của M (ký hiệu bởi $Aut(M)$) là tập hợp các song chỉnh hình của M với phép toán hai ngôi là hợp thành của hai tự đẳng cấu. Tôpô trên $Aut(M)$ là tôpô hội tụ đều trên các tập con compact (tức là tôpô compact-mở).

Theo quan điểm của F. Klein, hình học của mỗi một lớp đối tượng là hình học của nhóm biến đổi. Chẳng hạn Hình học Euclid là hình học của nhóm các phép biến đổi đẳng cự, Hình học Affine là hình học của nhóm biến đổi Affine. Vì thế, hình học của các đa tạp phức cũng có thể xem như hình học của nhóm các tự đẳng cấu của đa tạp phức. Có hai bài toán cơ bản khi nghiên cứu hình học của các đa tạp phức:

Bài toán 1. Tìm các tính chất hình học bất biến qua nhóm các tự đẳng cấu.

Bài toán 2. Phân loại các đa tạp phức dựa trên nhóm các tự đẳng cấu của chúng.

Luận án tập trung nghiên cứu Bài toán 2. Cụ thể hơn, chúng tôi nghiên cứu mối quan hệ giữa hình học của miền trong $\mathbb{C}^n$ và cấu trúc của nhóm tự đẳng cấu của nó, tức là xét xem miền được xác định bởi nhóm tự đẳng cấu đến mức độ nào.

Nếu Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ thì $Aut(\Omega)$ là một nhóm Lie thực. Tổng quát hơn, S. Kobayashi [25] đã chứng minh rằng: nếu Ω là hyperbolic thì chiều của nhóm Lie thực $Aut(\Omega)$ không vượt quá $n^2 + 2n$. Hơn nữa, nếu nhóm này có chiều dương thực sự thì nó không thể là nhóm Lie phức. Một câu hỏi hoàn toàn tự nhiên được đặt ra là: nhóm Lie thực nào có thể xem như nhóm tự đẳng cấu của một đa tạp phức? Năm 2004 J. Winkelmann [38] đã chỉ ra rằng cho trước một nhóm Lie thực compact K thì luôn luôn tồn tại miền bị chặn giả lồi chặt $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ sao cho $Aut(\Omega)$ đẳng cấu với K. Như vậy, bài toán phân loại các miền với nhóm tự đẳng cấu compact đã được giải quyết khá trọn vẹn.

Đối với trường hợp nhóm tự đẳng cấu không compact, các nhà toán học đã phân loại thành công các miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Còn đối với trường hợp miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$, bài toán phân loại mới chỉ được giải quyết trong một số trường hợp đặc biệt.

Tiếp tục luồng nghiên cứu trên, chúng tôi chọn đề tài luận án là: *"Đa tạp phức với nhóm các tự đẳng cấu không compact"*.

2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích của luận án là nghiên cứu bài toán phân loại các miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact. Ngoài ra, luận án còn nghiên cứu tính chất hình học địa phương của điểm biên tụ quỹ đạo.

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Như đã trình bày ở phần lý do chọn đề tài, đối tượng nghiên cứu của luận án là các đa tạp phức, cụ thể là các miền trong $\mathbb{C}^n$. Trong luận án, tư tưởng chính xuyên suốt là xét xem với điều kiện nào của miền thì từ tính chất địa phương suy ra tính chất toàn cục. Điều đó cho phép chúng tôi phân loại được một số lớp miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ nhờ tính không compact của nhóm tự đẳng cấu của nó.

4. Phương pháp nghiên cứu

Để giải quyết những vấn đề đặt ra trong luận án, chúng tôi sử dụng các phương pháp nghiên cứu và kĩ thuật truyền thống của Hình học phức, Giải tích phức, đặc biệt là kĩ thuật scaling của S. Pinchuk, đồng thời chúng tôi cũng sáng tạo ra những kĩ thuật mới.

5. Các kết quả đạt được và ý nghĩa của đề tài

Luận án gồm ba chương.

Chương I trình bày về đặc trưng của miền trong $\mathbb{C}^n$ bởi nhóm tự đẳng cấu không compact.

Trước hết, ta nhắc lại một kết quả cổ điển của H. Cartan: nếu Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ và nhóm tự đẳng cấu $Aut(\Omega)$ không compact thì tồn tại các điểm $x \in \Omega$, $p_\infty \in \partial\Omega$ và dãy các tự đẳng cấu $\varphi_j \in Aut(\Omega)$ sao cho $\lim \varphi_j(x) = p_\infty$. Trong trường hợp này, ta gọi điểm biên p_∞ là *điểm biên tụ quỹ đạo*.

Các công trình trong hơn 20 năm qua đã chỉ ra rằng tính chất hình học địa phương của điểm biên tụ quỹ đạo cho ta thông tin toàn cục về miền. Chẳng hạn, B. Wong và J. P. Rosay [39], [42] đã chứng minh định lý đặc trưng cho hình cầu đơn vị trong $\mathbb{C}^n$.

Định lý 1 (Wong-Rosay). *Miền bất kì $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ có biên trơn lớp $\mathcal{C}^2$, giả lồi chặt và có nhóm tự đẳng cấu không compact đều song chỉnh hình với hình cầu đơn vị trong $\mathbb{C}^n$.*

Bây giờ ta nhắc lại khái niệm kiểu hữu hạn theo nghĩa J. P. D'Angelo. Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền với biên nhẵn và cho điểm biên $p \in \partial\Omega$. Khi đó, kiểu $\tau(\partial\Omega, p)$ của $\partial\Omega$ tại p được định nghĩa bởi

$$\tau(\partial\Omega, p) = \sup_F \frac{\nu(\rho \circ F)}{\nu(F)},$$

trong đó ρ là một hàm xác định biên của miền Ω trong lân cận của p, supremum được lấy trên tất cả các ánh xạ chỉnh hình F xác định trong một lân cận của $0 \in \mathbb{C}$ vào $\mathbb{C}^n$ sao cho $F(0) = p$ và $\nu(F)$ là cấp triệt tiêu của hàm F tại gốc tọa độ trong $\mathbb{C}$. Biên $\partial\Omega$ được gọi là có kiểu hữu hạn tại p nếu $\tau(\partial\Omega, p) < \infty$. Miền Ω được gọi là miền có kiểu hữu hạn nếu $\partial\Omega$ có kiểu hữu hạn tại mọi điểm biên. Chẳng hạn biên của Ellipsoid $E_m = \{(z, w) : |z^2| + |w|^{2m} < 1\}$, $m \in \mathbb{N}^*$ có kiểu $2m$ tại điểm biên $(1, 0)$.

Bằng cách sử dụng kĩ thuật scaling của S. Pinchuk, năm 1991 E. Bedford và S. Pinchuk [4] đã chứng minh định lý sau đây về đặc trưng cho các ellipsoid phức.

Định lý 2 (Bedford-Pinchuk). *Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền bị chặn với biên nhẵn, giả lồi và có kiểu hữu hạn. Giả sử rằng hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n - 2$ tại mỗi điểm biên của miền Ω. Khi đó, nếu $Aut(\Omega)$*

là không compact thì Ω *song chỉnh hình với miền*

$$E_m = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + |z_2|^{2m} + |z_3|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 1\},$$

với số nguyên $m \geq 1$ *nào đó.*

Cách tiếp cận của Bedford-Pinchuk được chia thành hai bước. Trong bước đầu họ sử dụng kĩ thuật scaling để chỉ ra rằng miền Ω song chỉnh hình với miền D cho bởi

$$D = \{z = (z_1, z') \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_1 + Q(z', \bar{z}') < 0\},$$

trong đó Q là một đa thức. Trên miền D tồn tại trường véctơ chỉnh hình không tầm thường. Ở bước thứ hai, trường véctơ này được kéo lùi về miền Ω. Sau đó, họ phân tích trường véctơ này tại điểm parabolic cố định để kết luận rằng miền Ω song chỉnh hình với Ellipsoid E_m.

Lịch sử phát triển của việc nghiên cứu nhóm tự đẳng cấu của các đa tạp phức có thể chia thành hai giai đoạn. Giai đoạn đầu: từ cuối thế kỷ 19 cho đến cuối thập niên 70 của thế kỷ trước bởi các công trình của H. Poincaré, H. Cartan, S. Kobayashi, ... Kết quả chủ yếu trong giai đoạn này là đã chỉ ra những tính chất tôpô quan trọng của nhóm các tự đẳng cấu của đa tạp phức. Giai đoạn thứ hai hình thành và phát triển từ thập niên 80 của thế kỷ trước mở đầu bởi các công trình của E. Bedford và S. Pinchuk. Sau này, phương pháp của E. Bedford và S. Pinchuk được mở rộng và phát triển bởi các nhà toán học như: S. Krantz, A. Kodama, F. Berteloot, K. T. Kim, H. Gaussier... Phương pháp được sử dụng chủ yếu là phương pháp scaling của Pinchuk. Thành công chính của giai đoạn này là các tác giả đã phân loại được các miền bị chặn kiểu hữu hạn trong

$\mathbb{C}^n$.

Tuy nhiên, nhiều kĩ thuật của E. Bedford và S. Pinchuk không áp dụng được cho các miền không bị chặn. Vì thế, bài toán đối với các miền không bị chặn đòi hỏi phải có cách tiếp cận khác. Trong khoảng 20 năm qua, nhiều nhà toán học đã cố gắng đưa ra những cách tiếp cận mới và vì vậy vấn đề đã được giải quyết trong một số trường hợp riêng. Chẳng hạn, trong $\mathbb{C}^2$, năm 1994 F. Berteloot [8] đã mở rộng được Định lý 2 cho các miền (không nhất thiết bị chặn).

Định lý 3 (F. Berteloot). *Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^2$ và cho điểm biên $p_\infty \in \partial\Omega$. Giả sử rằng tồn tại dãy $\{\varphi_p\} \subset Aut(\Omega)$ và một điểm $a \in \Omega$ sao cho $\lim \varphi_p(a) = p_\infty$. Nếu $\partial\Omega$ nhẵn, giả lồi và có kiểu hữu hạn trong lân cận nào đó của điểm p_∞ thì Ω song chỉnh hình với miền*

$$D = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re} w + H(z, \bar{z}) < 0\},$$

trong đó H là một đa thức thuần nhất đa điều hòa dưới trên $\mathbb{C}$ với bậc $2m$ $(\tau(\partial\Omega, p_\infty) = 2m)$.

Cũng cần phải nhấn mạnh rằng nhiều kĩ thuật của F. Berteloot rất khó áp dụng cho các miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với $n \geq 3$. Kết quả chính thứ nhất của luận án (Định lý 1.3.2) chỉ ra rằng Định lý 3 đúng cho các miền (không nhất thiết bị chặn) trong $\mathbb{C}^n$. Nghĩa là, chúng tôi chứng minh rằng nếu miền với biên $\partial\Omega$ nhẵn, giả lồi, có kiểu hữu hạn trong một lân cận nào đó của điểm tụ quỹ đạo $p_\infty \in \partial\Omega$ và hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n-2$ tại p_∞ thì Ω song chỉnh hình với miền dạng sau đây:

$$M_H = \{(w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} w_n + H(w_1, \bar{w}_1) + |w_2|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2 < 0\},$$

trong đó H là một đa thức thuần nhất điều hòa dưới trên $\mathbb{C}$.

Kết quả này là một mở rộng thực sự các kết quả của Bedford-Pinchuk và F. Berteloot. Để chứng minh kết quả trên, chúng tôi sử dụng hệ tọa độ được xây dựng bởi S. Cho [13] thay cho hệ tọa độ được xây dựng bởi D. Catlin [11] mà F. Berteloot đã sử dụng để chứng minh Định lý 3. Bên cạnh việc sử dụng những ý tưởng và kĩ thuật của các tác giả trước chúng tôi cũng đã đề xuất những ý tưởng và kĩ thuật mới nhằm vượt qua các trở ngại khi chuyển từ miền bị chặn sang miền không bị chặn, từ miền trong $\mathbb{C}^2$ lên miền trong $\mathbb{C}^n$ và từ việc xử lý các đa thức một biến sang đa thức nhiều biến.

Chương II dành cho việc nghiên cứu bài toán phân loại các miền lồi tuyến tính trong $\mathbb{C}^n$. Đối với các miền lồi trong $\mathbb{C}^n$, bằng cách áp dụng kĩ thuật scaling và cách xây dựng đa đĩa của McNeal [28], [29], năm 1997 H. Gaussier [16] đã chứng minh kết quả sau đây.

Định lý 4 (H. Gaussier). *Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $p_\infty \in \partial\Omega$ là một điểm biên. Giả sử rằng p_∞ là điểm tụ quỹ đạo của miền Ω. Khi đó, nếu biên $\partial\Omega$ là nhẵn, lồi trong một lân cận của p_∞ và có kiểu $2m$ tại p_∞ thì Ω song chỉnh hình với miền sau đây.*

$$D = \{(z_1, z') \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_1 + P(z') < 0\},$$

trong đó P là một đa thức lồi không suy biến với bậc $\leq 2m$.

Tính không suy biến của P được cho bởi điều kiện: tập $\{P = 0\}$ không chứa bất kì tập con giải tích thực sự. Chúng tôi muốn nhấn mạnh rằng giả thiết về tính lồi của miền trong định lý trên là rất quan trọng trong chứng minh của H. Gaussier. Bởi vậy, có một câu hỏi tự nhiên rằng liệu Định lý 4 còn đúng cho miền bất kì $\mathbb{C}^n$ hay không? Kết quả chính thứ hai của luận án (Định lý 2.3.2) chỉ ra rằng Định lý 4 vẫn còn đúng đối với các miền lồi tuyến tính không nhất thiết bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Ở đây miền Ω được gọi là **lồi tuyến tính địa phương tại** $p_\infty \in \partial\Omega$ nếu tồn tại một lận cận U của p_∞ sao cho

$$(z + T_z^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)) \cap (\Omega \cap U) = \emptyset$$

với mọi $z \in \partial\Omega \cap U$.

Chương III dành cho việc giới thiệu về giả thuyết Greene-Krantz và nghiên cứu tính chất hình học của điểm biên tụ quỹ đạo. Năm 1993 R. E. Greene và S. G. Krantz [18] đã đưa ra giả thuyết nổi tiếng sau đây.

Giả thuyết Greene-Krantz. *Giả sử $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ là một miền bị chặn với biên nhẵn và nhóm tự đẳng cấu $Aut(\Omega)$ không compact. Khi đó, mọi điểm biên tụ quỹ đạo đều có kiểu hữu hạn.*

Cho đến nay giả thuyết này vẫn còn là một câu hỏi mở. Bây giờ ta sẽ phân tích nguyên nhân thành công của E. Bedford, S. Pinchuk và F. Berteloot mà ta đã giới thiệu ở trên. Họ đã chỉ ra rằng nếu p là điểm biên kiểu hữu hạn thì miền song chỉnh hình với miền dạng sau đây:

$$M_P = \{(z_1, z') \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_1 + P(z', \bar{z}') < 0\},$$

trong đó P là một đa thức thuần nhất của các biến z và $\bar{z}$. Mỗi một miền dạng M_P được gọi là một mô hình của Ω tại p. Để chứng minh điều này, trước tiên họ áp dụng phương pháp scaling để chỉ ra rằng nhóm $Aut(\Omega)$ chứa một nhóm con parabolic, tức là: tồn tại một điểm $p_\infty \in \partial\Omega$ và một nhóm con một tham số $\{h^t\}_{t\in\mathbb{R}} \subset Aut(\Omega)$ sao cho

$$\lim_{t\to\pm\infty} h^t(z) = p_\infty, \tag{1}$$

với mọi $z \in \Omega$. Mỗi một điểm biên thỏa mãn (1) được gọi là điểm biên parabolic của miền Ω. Sau đó họ tiến hành phân tích trường véctơ H sinh bởi nhóm con một tham số $\{h^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ để chỉ ra rằng miền Ω song chỉnh hình với một mô hình mong muốn. Những điều này gợi chúng ta đưa ra định nghĩa sau đây:

Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$. Một điểm biên $p \in \partial\Omega$ được gọi là *điểm biên tụ quỹ đạo parabolic* nếu tồn tại một nhóm con một tham số

$$\{\psi_t \in Aut(\Omega), -\infty < t < \infty\}$$

sao cho

$$\lim_{t\to\pm\infty} \psi_t(x_0) = p$$

với mỗi điểm $x_0 \in \Omega$.

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ là một miền bị chặn với biên nhẵn. Ta nói rằng Ω thỏa mãn điều kiện Bell (R) nếu phép chiếu Bergman $P : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ có thể thác triển thành ánh xạ $C^\infty(\bar{\Omega}) \to C^\infty(\bar{\Omega})$. Năm 2006 K. T. Kim và S. Krantz [24] đã chứng minh định lý sau đây:

Định lý 5 (Kim-Krantz). *Giả sử $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ là một miền với biên nhẵn, giả lồi và thỏa mãn điều kiện Bell (R). Giả sử rằng biên $\partial\Omega$ không chứa bất kì tập con giải tích không tầm thường. Khi đó, mọi điểm biên tụ quỹ đạo parabolic đều có kiểu hữu hạn.*

Chú ý rằng định lý này chứng minh giả thuyết Greene-Krantz cho trường hợp đặc biệt. Nhưng đáng tiếc rằng chứng minh của họ không chính xác. Thật vậy, chúng ta có thể thấy điều đó qua phân tích dưới đây.

Giả sử $p_\infty \in \partial\Omega$ là một điểm biên tụ quỹ đạo parabolic kiểu vô hạn. Chọn một hệ tọa độ chỉnh hình địa phương tại p_∞ sao cho p_∞ trở thành điểm gốc và hàm xác định địa phương của Ω trong lân cận của gốc tọa độ có dạng

$$\rho(z) = \operatorname{Re} z_1 + \Psi(z_2, \operatorname{Im} z_1).$$

Khi đó, K. T. Kim và S. Krantz chỉ ra rằng Ψ triệt tiêu cấp vô hạn theo cả hai biến tại gốc. Nhưng điều này nói chung không chính xác. Chẳng hạn hàm $\Psi(z_2, \operatorname{Im} z_1) = e^{-1/|z_2|^2} + |z_2|^4.|\operatorname{Im} z_1|^2$ chỉ triệt tiêu cấp 2 theo biến z_1 tại gốc tọa độ.

Trong chương cuối, chúng tôi chỉ ra rằng định lý trên đúng cho những miền với hàm xác định biên dạng $\rho = \operatorname{Re} z_1 + P(z_2) + |z_2|^4|\operatorname{Im} z_1|^2 Q(z_2, \operatorname{Im} z_1)$, trong đó $P(z_2)$ là hàm dương, nhẵn và triệt tiêu cấp vô hạn tại $z_2 = 0$ và $Q(z_2, \operatorname{Im} z_1)$ là một hàm nhẵn nào đó (Định lý 3.1.1).

6. Cấu trúc luận án

Bố cục của luận án ngoài phần mở đầu và phần phụ lục gồm ba chương được viết theo tư tưởng kế thừa. Ba chương của luận án được viết dựa trên bốn công trình trong đó hai công trình đã được đăng và một công trình đã được nhận đăng.

Chương I: Đặc trưng của miền trong $\mathbb{C}^n$ bởi nhóm tự đẳng cấu không compact.

Chương II: Đặc trưng của miền lồi tuyến tính trong $\mathbb{C}^n$ bởi nhóm tự đẳng cấu không compact.

Chương III: Giả thuyết Greene-Krantz.

Chương 1

Đặc trưng của miền trong $\mathbb{C}^n$ bởi nhóm tự đẳng cấu không compact

Trong chương này, chúng tôi sẽ chứng minh kết quả chính thứ nhất (Định lý 1.3.2). Kết quả này đã được công bố trong bài báo [33]. Khó khăn chủ yếu khi chúng ta xét các miền trong $\mathbb{C}^n$ $(n > 2)$ là nghiên cứu tính chuẩn tắc của dãy các đa thức nhiều biến (các đa thức này là một biến đối với trường hợp miền trong $\mathbb{C}^2$). Tuy nhiên, khi có thêm điều kiện hạng của dạng Levi lớn hơn $n-3$ chúng tôi có thể vượt qua được khó khăn này bằng cách cải tiến kỹ thuật scaling của S. Pinchuk. Phần mở đầu, chúng ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản cần thiết. Mục tiếp theo dành cho việc xây dựng các đa đĩa tại các điểm gần biên của miền và đưa ra một số tính chất của các đa đĩa này. Sau đó, chúng ta áp dụng kỹ thuật scaling để chỉ ra rằng miền Ω song chỉnh hình với một mô hình M_P với $P \in \mathcal{P}_{2m}$. Vì vậy, chúng tôi có thể áp dụng phương pháp của F. Berteloot để hoàn thành chứng minh Định lý 1.3.2.

1.1 Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

Trong mục này, chúng ta nhắc lại khái niệm giả lồi và khái niệm về sự hội tụ chuẩn tắc theo nghĩa Carathéodory của các miền trong đa tạp phức (xem trong [15]). Khái niệm hội tụ Carathéodory cần thiết cho lập luận của phương pháp scaling.

Gọi Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$. Trong một lân cận đủ bé U của điểm biên $p \in \partial\Omega$, ta có thể viết

$$\Omega \cap U = \{z \in U : \rho(z) < 0\},$$

trong đó ρ là hàm thỏa mãn $\nabla\rho \neq 0$ trên $\partial\Omega \cap U$. Hàm ρ được gọi là hàm xác định biên của miền Ω trong lân cận của p. Ta nói rằng miền Ω có biên trơn lớp $\mathcal{C}^k$ ($1 \leq k \leq \infty$) tại p nếu hàm xác định biên ρ trơn lớp $\mathcal{C}^k$ tại p. Biên $\partial\Omega$ được gọi là trơn lớp $\mathcal{C}^k$ nếu nó trơn lớp $\mathcal{C}^k$ tại mọi điểm.

Giả sử Ω có biên trơn lớp $\mathcal{C}^2$ gần $p \in \partial\Omega$. Biên $\partial\Omega$ được gọi là giả lồi tại p nếu tồn tại hàm xác định biên ρ của Ω sao cho

$$\mathcal{L}_\rho(p)(w, w) := \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2\rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p) w_j \bar{w}_k \geq 0 \quad (*),$$

với mọi $w = (w_1, \cdots, w_n) \in T_p^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$; ở đây $T_p^{\mathbb{C}}(\partial\Omega)$ là không gian tiếp xúc phức với $\partial\Omega$ tại p.

Ta nói rằng $p \in \partial\Omega$ là điểm giả lồi chặt nếu $\mathcal{L}_\rho(p)(w, w) > 0$ với mọi $w \in T_p^{\mathbb{C}}(\partial\Omega) \setminus \{0\}$. Dạng Hermit $\mathcal{L}_\rho(p)$ xác định trong (*) được gọi là dạng Levi của $\partial\Omega$ tại p. Bây giờ ta nhắc lại một số khái niệm sau.

Định nghĩa 1.1.1. *Giả metric Royden -Kobayashi K_Ω trên miền Ω được định nghĩa bởi*

$$K_\Omega(p, \overrightarrow{X}) := \inf\{\frac{1}{r} |\ \exists f \in Hol(\Delta, \Omega)\ sao\ cho f(0) = p, f'(0) = r\overrightarrow{X}\}$$

với $p \in \Omega$ và $\overrightarrow{X} \in \mathbb{C}^n$.

Định nghĩa 1.1.2. *Giả khoảng cách Kobayashi d_Ω được định nghĩa bởi*

$$d_\Omega(p, q) = \inf_\gamma \int_0^1 K_\Omega(\gamma(t), \gamma'(t))dt,$$

trong đó infimum được lấy trên tất cả các đường cong trơn $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ sao cho $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$.

Định nghĩa 1.1.3. *Miền $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ được gọi là miền hyperbolic nếu d_Ω là một khoảng cách. Miền hyperbolic Ω gọi là hyperbolic đầy nếu Ω là đầy theo khoảng cách d_Ω.*

Định nghĩa 1.1.4. *(i) Dãy các ánh xạ chỉnh hình $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset Hol(\Omega, D)$ gọi là phân kì compact nếu với mỗi tập con compact $K \subset \Omega$ và mỗi tập con compact $L \subset D$, tồn tại j_0 sao cho $f_j(K) \cap L = \emptyset$ với mọi $j \geq j_0$.*

(ii) Miền D được gọi là miền taut nếu với mọi dãy $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset Hol(\Delta, D)$ chứa một dãy con hội tụ hoặc chứa một dãy con phân kì compact.

Định nghĩa 1.1.5. *Một hàm φ được gọi là hàm peak đa điều hoà dưới địa phương tại một điểm p thuộc $\partial\Omega$ nếu tồn tại một lân cận U của p trong $\mathbb{C}^n$ sao cho φ là đa điều hoà dưới trên $U \cap \Omega$, liên tục trên $U \cap \overline{\Omega}$*

và thoả mãn

$$\begin{cases} \varphi(p) = 0, \\ \varphi(z) < 0 \text{ với mọi } z \in (U \cap \overline{\Omega}) \setminus \{p\}. \end{cases}$$

Định nghĩa 1.1.6 (Hội tụ Carathéodory)**.** *Giả sử* $\{\Omega_\nu\}$ *là một dãy các miền trong đa tạp phức sao cho* $p \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu$*. Nếu p là một điểm trong của* $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu$*, nhân Carathéodory* $\hat{\Omega}$ *tại p của dãy* $\{\Omega_\nu\}$ *là miền lớn nhất chứa p thỏa mãn tính chất: mỗi tập con compact của* $\hat{\Omega}$ *nằm trong tất cả các miền trừ ra một số hữu hạn các miền* Ω_ν*. Nếu p không là điểm trong của* $\bigcap_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu$ *thì nhân Carathéodory* $\hat{\Omega}$ *là* $\{p\}$*. Dãy* $\{\Omega_\nu\}$ *được gọi là hội tụ đến nhân của nó tại p nếu mọi dãy con của dãy* $\{\Omega_\nu\}$ *đều có cùng nhân tại p.*

Chúng ta nói rằng dãy $\{\Omega_\nu\}$ *các miền trong đa tạp phức hội tụ chuẩn tắc đến* $\hat{\Omega}$ *(kí hiệu bởi* $\lim \Omega_\nu = \hat{\Omega}$*) nếu tồn tại một điểm* $p \in \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \Omega_\nu$ *sao cho* $\{\Omega_\nu\}$ *hội tụ đến nhân Carathéodory* $\hat{\Omega}$ *tại p.*

Mệnh đề sau là một mở rộng của định lý Greene-Krantz (xem trong [17]).

Mệnh đề 1.1.7. *Giả sử* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *và* $\{\Omega_i\}_{i=1}^{\infty}$ *là hai dãy các miền trong đa tạp phức M với* $\lim A_i = A_0$ *và* $\lim \Omega_i = \Omega_0$ *trong đó* A_0 *và* Ω_0 *là các miền trong M. Giả sử rằng* $\{f_i : A_i \to \Omega_i\}$ *là một dãy các song chỉnh hình. Giả sử thêm rằng dãy* $\{f_i : A_i \to M\}$ *hội tụ đều trên các tập con compact của* A_0 *đến ánh xạ chỉnh hình* $F : A_0 \to M$ *và dãy* $\{g_i := f_i^{-1} : \Omega_i \to M\}$ *hội tụ đều trên các tập con compact của* Ω_0 *đến ánh xạ chỉnh hình* $G : \Omega_0 \to M$*. Khi đó một trong hai khẳng định sau là* *đúng.*

(i) Dãy $\{f_i\}$ phân kỳ compact, nghĩa là với mỗi tập con compact $K \subset A_0$ và mỗi tập con compact $L \subset \Omega_0$, tồn tại i_0 sao cho $f_i(K) \cap L = \emptyset$ với mọi $i \geq i_0$, hoặc

(ii) Tồn tại một dãy con $\{f_{i_j}\} \subset \{f_i\}$ sao cho dãy $\{f_{i_j}\}$ hội tụ đều trên các tập con compact của A_0 đến song chỉnh hình $F : A_0 \to \Omega_0$.

Chứng minh. Giả sử rằng dãy $\{f_i\}$ không phân kỳ compact. Khi đó F ánh xạ một điểm p nào đó của A_0 vào Ω_0. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng F là song chỉnh hình từ A_0 lên Ω_0. Đặt $q = F(p)$, ta có

$$G(q) = G(F(p)) = \lim_{i\to\infty} g_i(F(p)) = \lim_{i\to\infty} g_i(f_i(p)) = p,$$

trong đó đẳng thức cạnh đẳng thức cuối được suy ra từ sự hội tụ đều. Lấy một lân cận V của p trong A_0 sao cho $F(V) \subset \Omega_0$. Khi đó sự hội tụ đều cho phép chúng ta kết luận rằng $G(F(z)) = \lim_{i\to\infty} g_i(f_i(z)) = z$ với mọi $z \in V$. Vì vậy ánh xạ $F_{|V}$ đơn ánh. Theo định lý Osgood ánh xạ $F_{|V} : V \to F(V)$ là song chỉnh hình.

Xét các hàm chỉnh hình $J_i : A_i \to \mathbb{C}$ và $J : A_0 \to \mathbb{C}$ cho bởi $J_i(z) = det((df_i)_z)$ và $J(z) = det((dF)_z)$. Khi đó $J(z) \neq 0$ $(z \in V)$ và với mỗi $i \in \mathbb{N}^*$, hàm J_i không đâu triệt tiêu trên A_i. Hơn nữa, dãy $\{J_i\}_{i=0}^{\infty}$ hội tụ đều trên các tập con compact của A_0 đến J. Theo định lý Hurwitz hàm J cũng không đâu triệt tiêu. Điều này suy ra rằng ánh xạ $F : A_0 \to M$ là mở và điểm $z \in A_0$ bất kỳ đều cô lập trong $F^{-1}(F(z))$. Theo [30, Mệnh đề 5], ta có $F(A_0) \subset \Omega_0$.

Lặp lại những lý luận như ở trên ta có thể kết luận rằng $G(\Omega_0) \subset A_0$. Khi đó sự hội tụ đều cho phép chúng ta kết luận rằng $G \circ F(z) = \lim_{i\to\infty} g_i(f_i(z)) = z$ với mọi $z \in A_0$ và $F \circ G(w) = \lim_{i\to\infty} f_i(g_i(w)) = w$ với mọi $w \in \Omega_0$.

Điều này chỉ ra rằng F và G là các ánh xạ một-một và là ánh xạ lên, đặc biệt F là ánh xạ song chỉnh hình. □

Theo [8, Mệnh đề 2.1], chúng ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.1.8. *Giả sử Ω là một miền trong đa tạp phức M chiều n và $p_\infty \in \partial\Omega$ là một điểm biên. Giả sử rằng $\partial\Omega$ giả lồi và có kiểu hữu hạn trong một lân cận nào đó của điểm biên p_∞.*

(a) Giả sử D là một miền trong đa tạp phức Y chiều m. Khi đó dãy bất kì $\{\varphi_p\} \subset Hol(D, \Omega)$ hội tụ đều trên các tập con compact của D đến p_∞ nếu và chỉ nếu $\lim \varphi_p(a) = p_\infty$ với a là một điểm nào đó trong D.

(b) Hơn nữa, giả sử rằng tồn tại dãy $\{\varphi_p\} \subset Aut(\Omega)$ sao cho $\lim \varphi_p(a) = p_\infty$ với $a \in \Omega$ thì miền Ω là taut.

Chứng minh. Do miền $\partial\Omega$ giả lồi và có kiểu hữu hạn trong lân cận của $p_\infty \in \partial\Omega$ nên tồn tại hàm peak đa điều hòa dưới địa phương tại p_∞ (xem trong [12]). Hơn nữa, do biên $\partial\Omega$ nhẵn và giả lồi trong một lân cận của p_∞ nên tồn tại lân cận B đủ nhỏ của p_∞ sao cho sao cho $B \cap \Omega$ là miền giả lồi với biên nhẵn. Theo [26, Định lý 5.2.5, tr. 252], miền $B \cap \Omega$ là taut. Vì vậy, mệnh đề được suy ra trực tiếp từ [8, Mệnh đề 2.1]. □

Bổ đề sau là một mở rộng của [8, Bổ đề 2.3].

Bổ đề 1.1.9. *Giả sử* σ_∞ *là hàm điều hòa dưới lớp* C^2 *trên* $\mathbb{C}$ *sao cho* $\sigma_\infty(0) = 0$ *và* $\int_{\mathbb{C}} \bar{\partial}\partial\sigma_\infty = +\infty$. *Gọi* $\{\sigma_k\}_k$ *là một dãy các hàm điều hòa dưới trên* $\mathbb{C}$ *hội tụ đều trên các tập con compact của* $\mathbb{C}$ *đến* σ_∞. *Giả sử* ω *là một miền tùy ý trong một đa tạp phức chiều* m $(m \geq 1)$ *và giả sử* z_0 *là một điểm cố định trong* ω. *Kí hiệu* $\{M_k\}$ *là dãy miền trong* $\mathbb{C}^n$ *xác định bởi*

$$M_k = \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Im} z_1 + \sigma_k(z_2) + |z_3|^2 + \cdots + |z_n|^2 < 0\}.$$

Khi đó, dãy bất kì $\{h_k\} \subset Hol(\omega, M_k)$ *thỏa mãn* $\{h_k(z_0), k \geq 0\} \Subset M_\infty$ *đều chứa một dãy con nào đó hội tụ đều trên các tập con compact của* ω *đến một phần tử của* $Hol(\omega, M_\infty)$.

Chứng minh. Chúng ta xét trường hợp ω là đa đĩa Δ^m trong $\mathbb{C}^m$. Ta sẽ chứng minh bổ đề này theo phương pháp quy nạp theo m. Trường hợp tổng quát được suy ra từ trường hợp này bằng lập luận về phủ hữu hạn.

Trước hết, ta giả sử rằng $m = 1$. Gọi $h_k \in H(\Delta, M_k)$ và kí hiệu bởi $(h_{k_1}, h_{k_2}, \cdots, h_{k_n})$ các thành phần của h_k. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng h_k liên tục trên $\overline{\Delta}$. Từ công thức Jensen, ta có

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} \int_{\Delta_t} \bar{\partial}\partial[\sigma_k \circ h_{k_2}] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma_k \circ h_{k_2}(e^{i\theta}) d\theta - \sigma_k \circ h_{k_2}(0). \tag{1.1}$$

Cố định $r \in (0,1)$. Do tính giải tích của h_{k_2} và tính điều hòa dưới của $\sigma_k \circ h_{k_2}$ nên ta nhận được

$$\begin{aligned}\int_{h_{k_2}(\Delta_r)} \bar{\partial}\partial\sigma_k \leq \int_{\Delta_r} \bar{\partial}\partial(\sigma_k \circ h_{k_2}) \lesssim \int_r^1 \frac{dt}{t} \int_{\Delta_r} \bar{\partial}\partial(\sigma_k \circ h_{k_2}) \\ \leq \int_r^1 \frac{dt}{t} \int_{\Delta_t} \bar{\partial}\partial(\sigma_k \circ h_{k_2}).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\sigma_k\circ h_{k_2}(e^{i\theta})d\theta &\le \int_0^{2\pi}-\operatorname{Im}h_{k_1}(e^{i\theta})d\theta-\sum_{j=3}^n\int_0^{2\pi}|h_{k_j}(e^{i\theta})|^2d\theta\\ &\le -2\pi\operatorname{Im}h_{k_1}(0)-2\pi\sum_{j=3}^n|h_{k_j}(0)|^2.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Do (1.1) nên tồn tại hằng số $A>0$ sao cho

$$\int_{h_{k_2}(\Delta_r)}\bar\partial\partial\sigma_k\le A,\ \forall k\ge 0.\tag{1.4}$$

Bây giờ ta chọn hai tập compact rời nhau K_1 và K_2 trong $\mathbb{C}$ sao cho $\int_{K_1}\bar\partial\partial\sigma_\infty > 2A$ và $\int_{K_2}\bar\partial\partial\sigma_\infty > 2A$. Bất đẳng thức (1.4) suy ra rằng $K_1\not\subset h_{k_2}(\Delta_r)$, $K_2\not\subset h_{k_2}(\Delta_r)$ với k đủ lớn. Do đó, mỗi $\{h_{k_2}\}$ không nhận hai giá trị a_k và b_k với $|a_k|,|b_k|$ bị chặn và $|a_k-b_k|$ bị chặn dưới bởi một số dương thực sự. Do đó, sau khi trích ra dãy con, dãy $\{h_{k_2}\}$ hội tụ đều trên các tập con compact của Δ_r. Do Im $h_{k_1}\le\sup_{\Delta_{r'}}(-\sigma_k\circ h_{k_2}-|h_{k_3}|^2-\cdots-|h_{k_n}|^2)\le\sup_{\Delta_{r'}}(-\sigma_k\circ h_{k_2})$ với bất kì $r'<r$ nên sự hội tụ của dãy $\{h_{k_1}\}$ được suy ra từ định lý Montel. Hơn nữa, với mỗi $r'<r$, trên $\Delta_{r'}$ ta có bất đẳng thức sau

$$|h_{k_3}|^2+\cdots+|h_{k_n}|^2<\sup_{\Delta_{r'}}(-\sigma_k\circ h_{k_2}-\operatorname{Im}\ h_{k_1}).$$

Theo định lý Montel, sau khi trích dãy con, các dãy $\{h_{k_3}\},\cdots,\{h_{k_n}\}$ hội tụ đều trên các tập con compact của Δ_r. Do r được chọn tùy ý trong $[0,1)$ nên bổ đề được chứng minh cho trường hợp $\omega=\Delta$.

Bây giờ ta giả sử qui nạp rằng bổ đề được thiết lập với $\omega=\Delta^{m-1}$ ($m\ge 2$). Xét trường hợp $\omega=\Delta^m$. Theo định lý Montel, ta chỉ cần chứng minh rằng dãy $\{h_k\}$ bị chặn đều trên mỗi tập con compact của Δ^m.

Giả sử phản chứng rằng dãy này không bị chặn. Khi đó ta có thể tìm được một dãy các điểm $\{z_k\}$ trong Δ^m sao cho $\{z_k, k \geq 1\} \Subset \Delta^m$ và $\lim |h_{k_1}(z_k)| + \cdots + |h_{k_n}(z_k)| = +\infty$. Ta viết $z = (z_1, z')$, trong đó $z_1 \in \mathbb{C}$ và $z' \in \mathbb{C}^{m-1}$. Theo chứng minh ở trên và trích dãy con nếu cần, dãy $\{\Delta \ni u \mapsto h_k(u, 0')\}$ hội tụ đều trên các tập con compact của Δ đến một phần tử nào đó của $Hol(\Delta, M_\infty)$. Vì vậy $\{h_k(z_{k_1}, 0'), k \geq 1\} \Subset M_\infty$ và ta có thể áp dụng giả thiết qui nạp cho dãy $\{\Delta^{m-1} \ni z' \mapsto h_k(z_{k_1}, z')\}$. Điều này dẫn đến mâu thuẫn vì $\{h_k(z_k)\}$ không có điểm tụ hữu hạn. $\square$

1.2 Ước lượng metric Kobayashi của miền trong $\mathbb{C}^n$

Trong mục này, chúng tôi sử dụng lập luận của D. Catlin [11] để nghiên cứu hệ tọa độ đặc biệt và các đa đĩa. Sau đó, chúng tôi cải tiến kĩ thuật của F. Berteloot trong [41] để xây dựng dãy các phép co giãn, ước lượng metric Kobayashi và chứng minh tính chuẩn tắc của dãy scaling.

1.2.1 Hệ tọa độ đặc biệt và các đa đĩa

Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ với biên $\partial\Omega$ nhẵn, giả lồi và có kiểu hữu hạn trong một lân cận của điểm $p_\infty \in \partial\Omega$. Giả sử rằng hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n-2$ tại p_∞. Chúng ta có thể giả sử rằng $p_\infty = 0$ và hạng của dạng Levi tại p_∞ chính xác bằng $n-2$. Gọi r là một hàm xác định biên nhẵn của miền Ω. Chú ý rằng do $\partial\Omega$ giả lồi tại p_∞ nên kiểu của biên $\partial\Omega$ tại p_∞ là một số nguyên chẵn $2m$ $(m \geq 1)$. Chúng ta có thể giả sử rằng $\dfrac{\partial r}{\partial z_n}(z) \neq 0$ với tất cả z trong một lân cận U của

p_∞. Sau khi thực hiện đổi biến tuyến tính, ta có thể tìm các hàm tọa độ $z_1, \cdots, z_n$ xác định trên U sao cho.

$$L_n = \frac{\partial}{\partial z_n}, L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + b_j \frac{\partial}{\partial z_n}, L_j r \equiv 0, b_j(p_\infty) = 0, 1 \le j \le n-1 \quad (1.5)$$

lập thành một cơ sở của $T^{\mathbb{C}}(U)$ và thỏa mãn

$$\partial\bar{\partial} r(p_\infty)(L_i, \bar{L}_j) = \delta_{ij},\ 2 \le i, j \le n-1, \quad (1.6)$$

trong đó $\delta_{ij} = 1$ nếu $i = j$ và $\delta_{ij} = 0$ nếu ngược lại. Ta muốn chỉ ra rằng quanh mỗi điểm $z' = (z'_1, \cdots, z'_n)$ trong U, tồn tại một đa đĩa lớn nhất sao cho trên đó hàm $r(z)$ thay đổi không vượt quá một số nhỏ tùy ý cho trước δ. Trước tiên, chúng ta xây dựng các tọa độ quanh z' (xem trong [13]). Các tọa độ này sẽ được dùng để định nghĩa đa đĩa.

Lấy các hàm tọa độ $z_1, \cdots, z_n$ quanh p_∞ sao cho (1.6) đúng. Vì thế $|L_n r(z)| \ge c > 0$ với mọi $z \in U$ và $\partial\bar{\partial} r(z)(L_i, \bar{L}_j)_{2\le i,j\le n-1}$ có $(n-2)$ giá trị riêng dương trong U, trong đó

$$L_n = \frac{\partial}{\partial z_n},$$
$$L_j = \frac{\partial}{\partial z_j} - (\frac{\partial r}{\partial z_n})^{-1} \frac{\partial r(z')}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_n},\ j = 1, \cdots, n-1.$$

Đối với mỗi $z' \in U$, ta định nghĩa các hàm tọa độ mới $u_1, \cdots, u_n$ cho bởi $z = \varphi_1(u)$

$$z_n = z'_n + u_n - \sum_{j=1}^{n-1} \big[(\frac{\partial r}{\partial z_n})^{-1} \frac{\partial r(z')}{\partial z_j}\big] u_j,$$
$$z_j = z'_j + u_j,\ j = 1, \cdots, n-1.$$

Do đó, L_j có thể viết dưới dạng sau $L_j = \frac{\partial}{\partial u_j} + b'_j \frac{\partial}{\partial u_n},\ j = 1, \cdots, n-1,$ trong đó $b'_j(z') = 0$. Trong hệ tọa độ $u_1, \cdots, u_n$, ma trận $A =$

$\Big(\dfrac{\partial^2 r(z')}{\partial u_i \partial \bar{u}_j}\Big)_{2\le i,j\le n-1}$ là một ma trận Hermit và tồn tại ma trận Unita $P = \big(P_{ij}\big)_{2\le i,j\le n-1}$ sao cho $P^*AP = D$, trong đó D là ma trận đường chéo mà các phần tử trên đường chéo chính gồm các giá trị riêng dương của A.

Định nghĩa $u = \varphi_2(v)$ bởi

$$u_1 = v_1,\ u_n = v_n,$$
$$u_j = \sum_{k=2}^{n-1} \bar{P}_{jk} v_k,\ j = 2, \cdots, n-1.$$

Khi đó $\dfrac{\partial^2 r(z')}{\partial v_i \partial \bar{v}_j} = \lambda_i \delta_{ij},\ 2 \le i, j \le n-1$, trong đó $\lambda_i > 0$ là một phần tử thứ i của D (ta có thể giả sử rằng $\lambda_i \ge c > 0$ trong U với mọi i). Tiếp theo ta định nghĩa $v = \varphi_3(w)$ bởi

$$v_1 = w_1,\ v_n = w_n,$$
$$v_j = \lambda_j w_j,\ j = 2, \cdots, n-1.$$

Vì vậy, $\dfrac{\partial^2 r(z')}{\partial w_i \partial \bar{w}_j} = \delta_{ij},\ 2 \le i, j \le n-1$ và $r(w)$ có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} r(w) &= r(z') + \operatorname{Re} w_n + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \sum_{1\le k\le m} \operatorname{Re}\big[(a_k^\alpha w_1^k + b_k^\alpha \bar{w}_1^k) w_\alpha\big] + \operatorname{Re}\sum_{\alpha=2}^{n-1} c_\alpha w_\alpha^2 \\ &+ \sum_{2\le j+k\le 2m} a_{j,k} w_1^j \bar{w}_1^k + \sum_{\alpha=2}^{n-1} |w_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \sum_{\substack{j+k\le m\\ j,k>0}} \operatorname{Re}(b_{j,k}^\alpha w_1^j \bar{w}_1^k w_\alpha) \\ &+ O(|w_n||w| + |w^*|^2|w| + |w^*|^2|w_1|^{m+1} + |w_1|^{2m+1}), \end{aligned} \tag{1.7}$$

trong đó $w^* = (0, w_2, \cdots, w_{n-1}, 0)$. Thực hiện phép đổi biến $w = \varphi_4(t)$

cho bởi

$$w_n = t_n - \sum_{2\le k\le 2m} \frac{2}{k!}\frac{\partial^k r(0)}{\partial w_1^k} t_1^k - \sum_{\alpha=2}^{n-1} \frac{\partial^2 r(0)}{\partial w_\alpha^2} t_\alpha^2 -$$
$$- \sum_{\alpha=2}^{n-1} \sum_{1\le k\le m} \frac{2}{(k+1)!}\frac{\partial^{k+1} r(0)}{\partial w_\alpha \partial w_1^k} t_\alpha t_1^k,$$
$$w_j = t_j,\ j = 1, \cdots, n-1,$$

để loại bỏ các hạng tử điều hòa trong khai triển (1.7), tức là: phép biến đổi này loại bỏ các hạng tử $w_1^k, \bar{w}_1^k, w_\alpha^2$ cũng như các hạng tử $w_1^k w_\alpha, \bar{w}_1^k \bar{w}_\alpha$ trong (1.7). Cuối cùng, chúng ta thực hiện phép đổi biến $t = \varphi_5(\zeta)$ cho bởi

$$t_1 = \zeta_1,\ t_n = \zeta_n,$$
$$t_\alpha = \zeta_\alpha - \sum_{1\le k\le m} \frac{1}{(k+1)!}\frac{\partial^{k+1} r(0)}{\partial \bar{t}_\alpha \partial t_1^k} \zeta_1^k,\ \alpha = 2, \cdots, n-1$$

để loại bỏ các hạng tử dạng $\bar{w}_1^j w_\alpha$ từ công thức (1.7). Vì vậy, ta nhận được mệnh đề sau (xem [13, Mệnh đề 2.2, tr. 806]).

Mệnh đề 1.2.1 (S. Cho)**.** *Với mỗi $z' \in U$ và số nguyên dương chẵn m, tồn tại song chỉnh hình $\Phi_{z'} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,\ z = \Phi_{z'}^{-1}(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ sao cho*

$$\begin{aligned} r(\Phi_{z'}^{-1}(\zeta)) = r(z') + \operatorname{Re}\zeta_n + \sum_{\substack{j+k\le 2m\\ j,k>0}} a_{jk}(z')\zeta_1^j \bar{\zeta}_1^k \\ + \sum_{\alpha=2}^{n-1} |\zeta_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \operatorname{Re}\Big(\big(\sum_{\substack{j+k\le m\\ j,k>0}} b_{jk}^\alpha(z')\zeta_1^j \bar{\zeta}_1^k\big)\zeta_\alpha\Big) \\ + O(|\zeta_n||\zeta| + |\zeta^*|^2|\zeta| + |\zeta^*|^2|\zeta_1|^{m+1} + |\zeta_1|^{2m+1}), \end{aligned} \tag{1.8}$$

trong đó $\zeta^* = (0, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n-1}, 0)$.

Nhận xét 1.2.2. *Các phép đổi biến ở trên là duy nhất và vì thế ánh xạ $\Phi_{z'}$ xác định duy nhất.*

Bây giờ ta sẽ định nghĩa đa đĩa quanh z'. Trước hết, ta đặt

$$\begin{aligned} &A_l(z') = \max\{|a_{j,k}(z')|, j+k=l\}, (2 \le l \le 2m),\\ &B_{l'}(z') = \max\{|b^{\alpha}_{j,k}(z')|, j+k=l', 2 \le \alpha \le n-1\}, (2 \le l' \le m). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Với mỗi số $\delta > 0$, ta định nghĩa $\tau(z', \delta)$ như sau

$$\tau(z',\delta) = \min\{\big(\delta/A_l(z')\big)^{1/l}, \big(\delta^{\frac{1}{2}}/B_{l'}(z')\big)^{1/l'}, 2 \le l \le 2m, 2 \le l' \le m\}. \tag{1.10}$$

Vì kiểu của $\partial\Omega$ tại p_∞ bằng $2m$ và hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n-2$ tại p_∞ nên $A_{2m}(p_\infty) \neq 0$. Mặt khác , do $\Phi_\eta \to Id$ khi $\eta \to (0, \cdots, 0)$ nên ta có thể chọn lân cận U đủ nhỏ sao cho $|A_{2m}(z')| \ge c > 0$ với mọi $z' \in U$. Điều này suy ra bất đẳng thức:

$$\delta^{1/2} \lesssim \tau(z', \delta) \lesssim \delta^{1/2m} \ (z' \in U), \tag{1.11}$$

trong đó các hằng số không phụ thuộc vào $\eta \in U$ và δ. Từ định nghĩa $\tau(z', \delta)$ ta dễ dàng suy ra rằng: nếu $\delta' < \delta''$ thì

$$(\delta'/\delta'')^{1/2}\tau(z', \delta'') \le \tau(z', \delta') \le (\delta'/\delta'')^{1/2m}\tau(z', \delta''). \tag{1.12}$$

Đặt $\tau_1(z', \delta) = \tau(z', \delta) = \tau$, $\tau_2(z', \delta) = \cdots = \tau_{n-1}(z', \delta) = \delta^{1/2}$, $\tau_n(z', \delta) = \delta$. Bây giờ ta có thể định nghĩa đa đĩa

$$R(z', \delta) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : |\zeta_k| < \tau_k(z', \delta); k = 1, \cdots, n\} \tag{1.13}$$

và giả đa đĩa

$$Q(z', \delta) = \{\Phi_{z'}^{-1}(\zeta) : \zeta \in R(z', \delta)\}. \tag{1.14}$$

Từ giờ về sau ta kí hiệu D_k^l là toán tử đạo hàm riêng bất kì dạng $\frac{\partial}{\partial \zeta_k^\mu}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_k^\nu}$, trong đó $\mu + \nu = l,\ k = 1, 2, \cdots, n$. Để chứng minh tính thuần nhất của $Q(z', \delta)$ ta cần hai bổ đề sau.

Bổ đề 1.2.3 (Mệnh đề 2.3, tr.807 trong [13]). *Giả sử z' là điểm bất kì trong U. Khi đó, hàm $\rho(\zeta) = r(\Phi_{z'}^{-1}(\zeta))$ thỏa mãn*

$$\begin{aligned} &|\rho(\zeta) - \rho(0)| \lesssim \delta, \\ &|D_k^i D_1^l \rho(\zeta)| \lesssim \delta \tau_1(z', \delta)^{-l} \tau_k(z', \delta)^{-i}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

với $\zeta \in R(z', \delta)$ và $l + im \leq 2m,\ i = 0, 1;\ k = 2, \cdots, n-1$.

Bổ đề 1.2.4 (Hệ quả 2.8, tr.812 trong [13]). *Giả sử rằng $z \in Q(z', \delta)$. Khi đó*

$$\tau(z, \delta) \approx \tau(z', \delta). \tag{1.16}$$

Bây giờ ta áp dụng Bổ đề 1.2.4 để trả lời cho câu hỏi: "các đa đĩa $Q(z', \delta)$ và $Q(z'', \delta)$ quan hệ với nhau như thế nào?" Gọi $\Phi_{z'}^{-1}$ là ánh xạ kết hợp với z' như trong Mệnh đề 1.2.1. Định nghĩa ζ'' bởi $z'' = \Phi_{z'}^{-1}(\zeta'')$. Áp dụng Mệnh đề 1.2.1 tại điểm ζ'' với r được thay bởi $\rho = r \circ \Phi_{z'}^{-1}$, ta nhận được ánh xạ $\Phi_{\zeta''}^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ cho bởi $\Phi_{\zeta''}^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \varphi_4 \circ \varphi_5$ trong đó

$z = \varphi_1(u)$ xác định bởi

$$\begin{aligned} z_n &= \zeta''_n + u_n + \sum_{j=1}^{n-1} b_j u_j, \\ z_j &= \zeta''_j + u_j,\ j = 1, \cdots, n-1, \end{aligned}$$

$u = \varphi_2(v)$ xác định bởi

$$u_1 = v_1,\ u_n = v_n,$$
$$u_j = \sum_{k=2}^{n-1} \bar{P}_{jk} v_k,\ j = 2, \cdots, n-1,$$

$v = \varphi_3(w)$ xác định bởi

$$v_1 = w_1,\ v_n = w_n,$$
$$v_j = \lambda_j w_j,\ j = 2, \cdots, n-1,$$

$w = \varphi_4(t)$ xác định bởi

$$w_n = t_n + \sum_{2 \le k \le 2m} d_k t_1^k + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \sum_{1 \le k \le m} d_{\alpha,k} t_\alpha t_1^k + \sum_{\alpha=2}^{n-1} c_\alpha t_\alpha^2,$$
$$w_j = t_j,\ j = 1, \cdots, n-1,$$

và $t = \varphi_5(\xi)$ xác định bởi

$$t_1 = \xi_1,\ t_n = \xi_n,$$
$$t_\alpha = \xi_\alpha + \sum_{1 \le k \le m} e_{\alpha,k} \xi_1^k,\ \alpha = 2, \cdots, n-1.$$

$$\begin{aligned}
\rho(\Phi_{\zeta''}^{-1}(\xi)) = \rho(\zeta'') + \operatorname{Re} \xi_n + \sum_{\substack{j+k \le 2m \\ j,k > 0}} a_{jk}(\zeta'') \xi_1^j \bar{\xi}_1^k \\
+ \sum_{\alpha=2}^{n-1} |\xi_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \operatorname{Re}\Big(\big(\sum_{\substack{j+k \le m \\ j,k > 0}} b_{jk}^\alpha(\zeta'') \xi_1^j \bar{\xi}_1^k\big) \xi_\alpha\Big) \\
+ O(|\xi_n||\xi| + |\xi''|^2|\xi| + |\xi''|^2|\xi_1|^{m+1} + |\xi_1|^{2m+1}).
\end{aligned}$$

Bởi vì ánh xạ hợp thành $\Phi_{z'}^{-1} \circ \Phi_{\zeta''}^{-1}$ sinh ra một ánh xạ có cùng dạng như $\Phi_{z''}^{-1}$, trong đó $\Phi_{z''}^{-1}$ nhận được bởi áp dụng Mệnh đề 1.2.1 cho hàm

r và điểm z'' và do sự duy nhất của ánh xạ Φ trong Mệnh đề 1.2.1 nên ta có:

$$\Phi_{z''}^{-1} = \Phi_{z'}^{-1} \circ \Phi_{\zeta''}^{-1}. \tag{1.17}$$

Vì vậy, để nghiên cứu $Q(z'', \delta)$ ta phải xác định ánh xạ $\Phi_{\zeta''}^{-1}$.

Bổ đề 1.2.5. *Giả sử rằng $z'' \in Q(z', \delta)$. Khi đó*

$$\begin{aligned} &|b_j| \lesssim \delta\tau_j(z', \delta)^{-1},\ |c_\alpha| \lesssim \delta\tau_\alpha(z', \delta)^{-2},\ |d_k| \lesssim \delta\tau_1(z', \delta)^{-k}, \\ &|d_{\alpha,l}| \lesssim \delta\tau_1(z', \delta)^{-l}\tau_\alpha(z', \delta)^{-1},\ |e_{\alpha,l}| \lesssim \delta\tau_1(z', \delta)^{-l}\tau_\alpha(z', \delta)^{-1}, \end{aligned} \tag{1.18}$$

với $1 \le j \le n-1,\ 1 \le k \le 2m,\ 2 \le \alpha \le n-1,\ 1 \le l \le m$.

Chứng minh. Từ chứng minh Mệnh đề 1.2.1, ta thấy rằng

$$\begin{aligned} b_j &= -\left(\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_1}\right)^{-1}\frac{\partial\rho(\zeta'')}{\partial\zeta_j}, \\ c_\alpha &= -\frac{\partial^2\rho(0)}{\partial\zeta_\alpha^2}, \\ d_k &= -\frac{2}{k!}\frac{\partial^k\rho(0)}{\partial w_1^k}, \\ d_{\alpha,l} &= -\frac{2}{(l+1)!}\frac{\partial^{l+1}\rho(0)}{\partial w_\alpha \partial w_1^l}, \\ e_{\alpha,l} &= -\frac{1}{(l+1)!}\frac{\partial^{l+1}\rho(0)}{\partial \bar{t}_\alpha \partial t_1^l}, \end{aligned}$$

với $1 \le j \le n-1,\ 1 \le k \le 2m,\ 2 \le \alpha \le n-1,\ 1 \le l \le m$. Do Bổ đề 1.2.3 và cách xây dựng song chỉnh hình $\Phi_{\zeta''}^{-1}$ nên ta kết luận rằng (1.18) đúng. □

Mệnh đề 1.2.6. *Tồn tại một hằng số C sao cho: nếu $z'' \in Q(z', \delta)$ thì*

$$Q(z'', \delta) \subset Q(z', C\delta) \tag{1.19}$$

và

$$Q(z',\delta) \subset Q(z'',C\delta). \tag{1.20}$$

Chứng minh. Ta định nghĩa $S(z'',\delta) = \{\Phi_{\zeta''}^{-1}(\xi) : \xi \in R(z'',\delta)\}$. Dễ thấy rằng $Q(z'',\delta) = \Phi_{z'}^{-1} \circ S(z'',\delta)$. Bởi vậy, để chứng minh (1.19) ta chỉ cần chỉ ra rằng

$$S(z'',\delta) \subset R(z',C\delta). \tag{1.21}$$

Thật vậy, với mỗi $\xi \in R(z'',\delta)$, đặt $t = \varphi_5(\xi)$. Theo các Bổ đề 1.2.4 và Bổ đề 1.2.5, ta có:

$$\begin{aligned}
&|t_1| = |\xi_1| \le \tau_1(z'',\delta) \lesssim \tau_1(z',\delta),\\
&|t_n| = |\xi_n| \le \tau_n(z'',\delta) = \tau_n(z',\delta) = \delta,\\
&|t_\alpha| \le |\xi_\alpha| + \sum_{k=2}^{n-1} |e_{\alpha,k}||\xi_1|^k \lesssim \tau_\alpha(z'',\delta) + \delta\tau_1(z',\delta)^{-k}\tau_\alpha(z',\delta)^{-1}\tau_1(z'',\delta)^k\\
&\qquad \lesssim \tau_\alpha(z',\delta), \quad 2 \le \alpha \le n-1.
\end{aligned}$$

Ta cũng đặt $w = \varphi_4(t)$. Theo Bổ đề 1.2.5, ta có:

$$\begin{aligned}
|w_n| &\le |t_n| + \sum_{k=2}^{2m} |d_k||t_1|^k + \sum_{\alpha=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} |d_{\alpha,k}||t_\alpha||t_1|^k + \sum_{\alpha=2}^{n-1} |c_\alpha||t_\alpha|^2\\
&\lesssim \tau_n(z',\delta) + \sum_{k=2}^{2m} \delta\tau_1(z',\delta)^{-k}\tau_1(z',\delta)^k + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \delta\tau_\alpha(z',\delta)^{-2}\tau_\alpha(z',\delta)^2\\
&\quad + \sum_{\alpha=2}^{n-1}\sum_{k=1}^{m} \delta\tau_1(z',\delta)^{-k}\tau_\alpha(z',\delta)^{-1}\tau_\alpha(z',\delta)\tau_1(z',\delta)^k \lesssim \delta = \tau_n(z',\delta),\\
|w_j| &= |t_j| \lesssim \tau_j(z',\delta), \quad 1 \le j \le n-1.
\end{aligned}$$

Đặt $v = \varphi_3(w)$, $u = \varphi_2(v)$ và $\zeta = \varphi_1(u)$. Dễ thấy rằng $|v_j| \lesssim \tau_j(z',\delta)$, $|u_j| \lesssim \tau_j(z',\delta)$, $|\zeta_j| \lesssim \tau_j(z',\delta)$, $1 \le j \le n$ và vì thế (1.21) đúng nếu C đủ lớn. Để chứng minh (1.20) ta định nghĩa $P(z',\delta) = \{\Phi_{\zeta''}(\zeta) : \zeta \in R(z',\delta)\}$. Chú ý rằng $Q(z',\delta) = \Phi_{z''}^{-1} \circ P(z'',\delta)$. Vậy, ta chỉ cần chỉ ra rằng:

$$P(z',\delta) \subset R(z'',C\delta). \tag{1.22}$$

Thật vậy, ta thấy $\Phi_{\zeta''} = \varphi_5^{-1} \circ \varphi_4^{-1} \circ \varphi_3^{-1} \circ \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1^{-1}$ và

$$\tau(z',\delta) \lesssim \tau(z'',\delta).$$

Áp dụng (1.18) theo cách tương tự như trên, ta kết luận rằng nếu $\zeta \in R(z',\delta)$ thì $\xi = \Phi_{\zeta''}(\zeta) \in R(z'',C\delta)$, trong đó C đủ lớn. Vì vậy, (1.22) đúng. $\square$

1.2.2 Co giãn các tọa độ

Giả sử Ω là miền trong $\mathbb{C}^n$ với biên $\partial\Omega$ nhẵn, giả lồi, kiểu hữu hạn trong một lân cận nào đó của điểm $p_\infty \in \partial\Omega$ và hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n-2$ tại p_∞. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $p_\infty = 0$ và hạng của dạng Levi tại p_∞ chính xác bằng $n-2$. Gọi ρ là hàm xác định biên nhẵn của miền Ω. Sau khi thực hiện phép đổi tọa độ ta có thể tìm được các hàm tọa độ $z_1, \cdots, z_n$ xác định trên một lân cận nào đó U_0 của p_∞ sao cho

$$\begin{aligned}
\rho(z) = \operatorname{Re} z_n &+ \sum_{\substack{j+k\le 2m\\ j,k>0}} a_{j,k} z_1^j \bar{z}_1^k \\
&+ \sum_{\alpha=2}^{n-1} |z_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \sum_{\substack{j+k\le m\\ j,k>0}} \operatorname{Re}((b_{j,k}^\alpha z_1^j \bar{z}_1^k) z_\alpha) \\
&+ O(|z_n||z| + |z^*|^2|z| + |z^*|^2|z_1|^{m+1} + |z_1|^{2m+1}),
\end{aligned}$$

trong đó $z^* = (0, z_2, \cdots, z_{n-1}, 0)$. Theo Mệnh đề 1.2.1, với mỗi điểm η trong một lân cận của gốc toạ độ, tồn tại duy nhất tự đẳng cấu Φ_η của $\mathbb{C}^n$ sao cho

$$\begin{aligned}\rho(\Phi_\eta^{-1}(w)) - \rho(\eta) = \operatorname{Re} w_n + &\sum_{\substack{j+k\le 2m\\ j,k>0}} a_{j,k}(\eta) w_1^j \bar{w}_1^k \\ &+ \sum_{\alpha=2}^{n-1} |w_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \sum_{\substack{j+k\le m\\ j,k>0}} \operatorname{Re}[(b_{j,k}^\alpha(\eta) w_1^j \bar{w}_1^k) w_\alpha] \\ &+ O(|w_n||w| + |w^*|^2|w| + |w^*|^2 |w_1|^{m+1} + |w_1|^{2m+1}),\end{aligned} \tag{1.23}$$

trong đó $w^* = (0, w_2, \cdots, w_{n-1}, 0)$.

Bây giờ, chúng ta định nghĩa phép co giãn không đẳng hướng Δ_η^ϵ bằng cách đặt

$$\Delta_\eta^\epsilon(w_1, \cdots, w_n) = (\frac{w_1}{\tau_1(\eta,\epsilon)}, \cdots, \frac{w_n}{\tau_n(\eta,\epsilon)}),$$

trong đó $\tau_1(\eta,\epsilon) = \tau(\eta,\epsilon),\ \tau_k(\eta,\epsilon) = \sqrt{\epsilon}\ (2 \le k \le n-1)$ và $\tau_n(\eta,\epsilon) = \epsilon$. Đối với mỗi $\eta \in \partial\Omega$, ta đặt $\rho_\eta^\epsilon(w) = \epsilon^{-1}\rho \circ \Phi_\eta^{-1} \circ (\Delta_\eta^\epsilon)^{-1}(w)$. Khi đó

$$\begin{aligned}\rho_\eta^\epsilon(w) = \operatorname{Re} w_n + \sum_{\substack{j+k\le 2m\\ j,k>0}} a_{j,k}(\eta)\epsilon^{-1}\tau(\eta,\epsilon)^{j+k} w_1^j \bar{w}_1^k + \sum_{\alpha=2}^{n-1} |w_\alpha|^2 \\ + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \sum_{\substack{j+k\le m\\ j,k>0}} \operatorname{Re}(b_{j,k}^\alpha(\eta)\epsilon^{-1/2}\tau(\eta,\epsilon)^{j+k} w_1^j \bar{w}_1^k w_\alpha) + O(\tau(\eta,\epsilon)).\end{aligned} \tag{1.24}$$

Với mỗi $\eta \in U_0$, chúng ta định nghĩa giả đa đĩa $Q(\eta,\epsilon)$ bởi

$$\begin{aligned}Q(\eta,\epsilon) &:= \Phi_\eta^{-1}(\Delta_\eta^\epsilon)^{-1}(D \times \cdots \times D) \\ &= \Phi_\eta^{-1}\{|w_k| < \tau_k(\eta,\epsilon),\ 1 \le k \le n\},\end{aligned} \tag{1.25}$$

trong đó $D_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Khi đó, theo các kết quả đã được chỉ ra ở mục trước, tồn tại các hằng số $0 \leq \alpha \leq 1$ và $C_1, C_2, C_3 \geq 1$ sao cho các ước lượng sau được thỏa mãn với mọi $\eta' \in U_0$, $\epsilon \in (0, \alpha]$ và $\eta \in Q(\eta', \epsilon)$

$$\rho(\eta) \leq \rho(\eta') + C_1\epsilon, \tag{1.26}$$

$$\frac{1}{C_2}\tau(\eta, \epsilon) \leq \tau(\eta', \epsilon) \leq C_2\tau(\eta, \epsilon), \tag{1.27}$$

$$Q(\eta, \epsilon) \subset Q(\eta', C_3\epsilon) \text{ và } Q(\eta', \epsilon) \subset Q(\eta, C_3\epsilon). \tag{1.28}$$

Đặt $\epsilon(\eta) := |\rho(\eta)|$, $\Delta_\eta := \Delta_\eta^{\epsilon(\eta)}$ và $C_4 = C_1 + 1$. Từ (1.26), ta có

$$\eta \in Q(\eta', \epsilon(\eta')) \Rightarrow \epsilon(\eta) \leq C_4\epsilon(\eta'). \tag{1.29}$$

Cố định các lân cận W_0, V_0 của gốc tọa độ với $W_0 \subset V_0 \subset U_0$. Khi đó với các hằng số đủ nhỏ α_1, α_0 $(0 < \alpha_1 \leq \alpha_0 < 1)$, ta có

$$\eta \in V_0 \ \text{ và } 0 < \epsilon \leq \alpha_0 \Rightarrow Q(\eta, \epsilon) \subset U_0 \text{ và } \epsilon(\eta) \leq \alpha_0 \tag{1.30}$$

$$\eta \in W_0 \ \text{ và } 0 < \epsilon \leq \alpha_1 \Rightarrow Q(\eta, \epsilon) \subset V_0. \tag{1.31}$$

Bây giờ ta định nghĩa giả metric

$$M(\eta, \overrightarrow{X}) := \sum_{k=1}^{n} \frac{|(\Phi'_\eta(\eta)\overrightarrow{X})_k|}{\tau_k(\eta, \epsilon(\eta))} = \|\Delta_\eta \circ \Phi'_\eta(\eta)\overrightarrow{X}\|_1$$

trên U_0, trong đó chuẩn $\|\overrightarrow{X}\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |X_j|$ với $\overrightarrow{X} = (X_1, \cdots, X_n) \in \mathbb{C}^n$. Theo (1.11), ta có

$$\frac{\|\overrightarrow{X}\|_1}{\epsilon(\eta)^{1/2m}} \lesssim M(\eta, \overrightarrow{X}) \lesssim \frac{\|\overrightarrow{X}\|_1}{\epsilon(\eta)}.$$

Bổ đề sau đóng vai trò quan trọng trong kĩ thuật scaling.

Bổ đề 1.2.7. *Tồn tại các hằng số $K \geq 1$ và $0 < A < 1$ sao cho với mỗi số nguyên $N \geq 1$ và mỗi hàm chỉnh hình $f : D_N \to U_0$ thỏa mãn $M(f(u), f'(u)) \leq A$ trên D_N, ta có*

$$f(0) \in W_0 \text{ và } K^{N-1}\epsilon(f(0)) \leq \alpha_1 \Rightarrow \overline{f(D_N)} \subset Q[f(0), K^N\epsilon(f(0))].$$

Chứng minh. Giả sử $\eta_0 \in V_0$ và $\eta \in Q(\eta_0, \epsilon_0)$, trong đó $\epsilon_0 = \epsilon(\eta_0)$. Từ (1.29), (1.27) và (1.12) ta có $\epsilon(\eta) \leq C_4\epsilon_0$ và

$$\tau(\eta, \epsilon(\eta)) \leq \tau(\eta, C_4\epsilon_0) \leq C_2\sqrt{C_4}\tau(\eta_0, \epsilon_0).$$

Vì vậy $M(\eta, \overrightarrow{X}) \gtrsim \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{|(\Phi'_\eta(\eta)\overrightarrow{X})_k|}{\tau_k(\eta_0, \epsilon_0)}$. Để thay $\Phi'_\eta(\eta)$ bởi $\Phi'_{\eta_0}(\eta)$ trong bất đẳng thức trên chúng ta xét đẳng cấu $\Psi := \Phi_\eta \circ \Phi_{\eta_0}^{-1}$. Đẳng cấu này bằng $\Phi_a^{-1} = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 \circ \varphi_4 \circ \varphi_5$ trong đó $a := \Phi_\eta(\eta_0)$ và $\varphi_j (1 \leq j \leq 5)$ được chỉ ra ở mục trước. Nếu ta đặt $\Lambda := \Phi'_\eta(\eta) \circ (\Phi'_{\eta_0}(\eta))^{-1} = \Psi'(\Phi_{\eta_0}(\eta))$ thì $\Lambda = \varphi'_1 \circ \varphi'_2 \circ \varphi'_3 \circ \varphi'_4 \circ \varphi'_5$. Bằng việc tính toán đơn giản, ta có

$$\varphi'_1(w_1, \cdots, w_n) = (w_1, w_2, \cdots, w_n + \sum_{k=1}^{n-1} b_k w_k)$$

trong đó $|b_k| \leq C.\frac{\epsilon_0}{\tau_k(\eta_0, \epsilon_0)}$ $(1 \leq k \leq n-1)$ với hằng số nào đó $C \geq 1$.

Đặt $\overrightarrow{Y} := \Phi'_{\eta_0}(\eta)\overrightarrow{X}$, $\overrightarrow{Y^4} := \varphi'_5\overrightarrow{Y}$, $\overrightarrow{Y^3} := \varphi'_4\overrightarrow{Y^4}$, $\overrightarrow{Y^2} := \varphi'_3\overrightarrow{Y^3}$ và $\overrightarrow{Y^1} := \varphi'_2\overrightarrow{Y^2}$. Do $\Phi'_\eta(\eta)\overrightarrow{X} = \Lambda[\overrightarrow{Y}] = \varphi'_1\overrightarrow{Y^1}$ nên ta có

$$\begin{aligned} M(\eta, \overrightarrow{X}) &\gtrsim \frac{|(\Phi'_\eta(\eta)\overrightarrow{X})_1|}{\tau_1(\eta_0, \epsilon_0)} + \cdots + \frac{|(\Phi'_\eta(\eta)\overrightarrow{X})_2|}{\tau_{n-1}(\eta_0, \epsilon_0)} + \frac{|(\Phi'_\eta(\eta)\overrightarrow{X})_n|}{2C\epsilon_0} \\ &\gtrsim \sum_{k=1}^{n-1}(1 - \frac{|b_k|\tau_k(\eta_0, \epsilon_0)}{2C\epsilon_0})\frac{|Y_k^1|}{\tau_k(\eta_0, \epsilon_0)} + \frac{|Y_n^1|}{2C\epsilon_0} \\ &\gtrsim \sum_{k=1}^{n} \frac{|Y_k^1|}{\tau_k(\eta_0, \epsilon_0)}. \end{aligned}$$

Do định nghĩa các ánh xạ φ_2 và φ_3, ta dễ dàng chỉ ra rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|Y_k^1|}{\tau_k(\eta_0,\epsilon_0)} \gtrsim \sum_{k=1}^{n} \frac{|Y_k^2|}{\tau_k(\eta_0,\epsilon_0)} \gtrsim \sum_{k=1}^{n} \frac{|Y_k^3|}{\tau_k(\eta_0,\epsilon_0)}.$$

Tiếp theo, chúng ta cũng có

$$\varphi'_4(w_1,\cdots,w_n) = (w_1, w_2,\cdots, w_n + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k w_k),$$

trong đó

$$\begin{aligned}
|\gamma_k| &\lesssim \sum_{j=1}^{m} |d_{k,j}|\tau_1(\eta_0,\epsilon_0)^j + 2.|c_k|\tau_k(\eta_0,\epsilon_0) \le C.\frac{\epsilon_0}{\tau_k(\eta_0,\epsilon_0)},\\
|\gamma_1| &\lesssim \sum_{\alpha=2}^{n-1}\sum_{j=1}^{m} |d_{\alpha,j}|\tau_\alpha(\eta_0,\epsilon_0).j.\tau_1(\eta_0,\epsilon_0)^{j-1} + \sum_{j=2}^{2m} |d_j|.j.\tau_1(\eta_0,\epsilon_0)^{j-1}\\
&\le C.\frac{\epsilon_0}{\tau_1(\eta_0,\epsilon_0)},
\end{aligned}$$

với $k = 2,\cdots, n-1$ và hằng số nào đó $C \ge 1$. Lập luận tương tự như trên, ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|Y_k^3|}{\tau_k(\eta_0,\epsilon_0)} \gtrsim \sum_{k=1}^{n} \frac{|Y_k^4|}{\tau_k(\eta_0,\epsilon_0)}.$$

Đạo hàm của φ_5 xác định bởi

$$\varphi'_5(w_1,\cdots,w_n) = (w_1, w_2 + \beta_2 w_1,\cdots, w_{n-1} + \beta_{n-1}w_1, w_n),$$

trong đó $|\beta_k| \lesssim \sum\limits_{l=1}^{m} |e_{k,l}|.l.\tau_1(\eta_0,\epsilon_0)^{l-1} \le C.\frac{\epsilon_0}{\tau_k(\eta_0,\epsilon_0)\tau_1(\eta_0,\epsilon_0)}$ $(2 \le k \le n-1)$

với hằng số nào đó $C \geq 1$. Do $\overrightarrow{Y^4} = \varphi'_5 \overrightarrow{Y}$ nên ta có:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{|Y_k^4|}{\tau_k(\eta_0, \epsilon_0)} &\gtrsim \frac{|Y_1^4|}{\tau_1(\eta_0, \epsilon_0)} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{|Y_k^4|}{2nC\tau_k(\eta_0, \epsilon_0)} + \frac{|Y_n^4|}{\tau_n(\eta_0, \epsilon_0)} \\ &\gtrsim (1 - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{|\beta_k|\tau_1(\eta_0, \epsilon_0)}{2nC\tau_k(\eta_0, \epsilon_0)}) \frac{|Y_1|}{\tau_1(\eta_0, \epsilon_0)} + \\ &+ \sum_{k=2}^{n-1} \frac{|Y_k|}{2nC\tau_k(\eta_0, \epsilon_0)} + \frac{|Y_n|}{\tau_n(\eta_0, \epsilon_0)} \\ &\gtrsim \sum_{k=1}^{n} \frac{|Y_k|}{\tau_k(\eta_0, \epsilon_0)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|(\Phi'_{\eta_0}(\eta)\overrightarrow{X})_k|}{\tau_k(\eta_0, \epsilon_0)}.\end{aligned}$$

Vì thế tồn tại hằng số $1 \geq A > 0$ sao cho $M(\eta, \overrightarrow{X}) \geq A\|\Delta_{\eta_0} \circ \Phi'_{\eta_0}(\eta)\overrightarrow{X}\|_1$ với mọi $\eta_0 \in V_0$ và mọi $\eta \in Q(\eta_0, \epsilon(\eta_0))$. Nhờ điều này ta có thể kết thúc chứng minh bổ đề.

Giả sử $f \in Hol(D_N, U_0)$ thỏa mãn các điều kiện đặt ra trong bổ đề. Đặt $\eta_0 = f(0)$ và $\epsilon_0 = \epsilon(f(0))$. Bây giờ ta xét các trường hợp sau

a) Với $N = 1$, nếu $f(0) \in W_0$ thì $f(D_1) \subset Q(\eta_0, \epsilon_0)$. Điều này suy ra từ nhận xét: nếu $f(u) \in Q(\eta_0, \epsilon_0)$ thì $\|\frac{d}{du}\Delta_{\eta_0} \circ \Phi_{\eta_0} \circ f(u)\|_1 \leq 1$.

b) Bây giờ ta giả sử rằng $N \geq 2$ và $f(0) \in W_0$. Cố định $\theta_0 \in (0, 2\pi]$. Đặt $u_j = je^{i\theta_0}$, $\eta_j := f(u_j)$ và $\epsilon_j = \epsilon(\eta_j)$. Ta chỉ cần chỉ ra rằng $\overline{f[D(u_i, 1)]} \subset Q(\eta_0, K^i\epsilon_0)$ với $i \leq N - 1$, trong đó $D(u_i, 1)$ là hình tròn trong mặt phẳng phức tâm tại u_i và bán kính bằng 1.

Với $i = 0$, khẳng định này đã được chứng minh ở a). Giả sử khẳng định trên thỏa mãn với bất kì $i \leq j < N - 1$. Do $\eta_{j+1} \in Q(\eta_0, K^j\epsilon_0)$ nên ta có $\epsilon_{j+1} \leq C_4K^j\epsilon_0 < \alpha_1$. Hơn nữa, vì $\eta_0 \in W_0$ nên ta cũng có $\eta_{j+1} \in V_0$ (xem (1.31)). Áp dụng a) cho hàm f hạn chế trên hình tròn $D(u_{j+1}, 1)$, ta có

$$\overline{f[D(u_{j+1},1)]} \subset Q(\eta_{j+1},\epsilon_{j+1}) \subset Q(\eta_{j+1}, C_4K^j\epsilon_0)$$
$$\subset Q(\eta_0, C_3C_4K^j\epsilon_0) = Q(\eta_0, K^{j+1}\epsilon_0).$$

Điều này kết thúc chứng minh bổ đề. □

Với bất kì dãy $\{\eta_p\}_p$ các điểm trong $U_0 \cap \{\rho < 0\} =: U_0^-$ hội tụ đến gốc tọa, ta kết hợp với dãy các điểm $\eta'_p = (\eta_{1p}, \cdots, \eta_{np} + \epsilon_p)$, $\epsilon_p > 0$ sao cho η'_p thuộc siêu mặt $\{\rho = 0\}$. Xét dãy các phép co giãn $\Delta^{\epsilon_p}_{\eta'_p}$. Khi đó, $\Delta^{\epsilon_p}_{\eta'_p} \circ \Phi_{\eta'_p}(\eta_p) = (0, \cdots, 0, -1)$. Bởi vì (1.24), ta thấy rằng $\Delta^{\epsilon_p}_{\eta'_p} \circ \Phi_{\eta'_p}(\{\rho = 0\})$ được cho bởi phương trình sau

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} w_n + P_{\eta'_p}(w_1,\bar{w}_1) + \sum_{\alpha=2}^{n-1}|w_\alpha|^2 + \sum_{\alpha=2}^{n-1}\operatorname{Re}(Q^\alpha_{\eta'_p}(w_1,\bar{w}_1)w_\alpha) + \\ + O(\tau(\eta'_p,\epsilon_p)) = 0,\end{aligned} \tag{1.32}$$

trong đó

$$P_{\eta'_p}(w_1,\bar{w}_1) := \sum_{\substack{j+k\le 2m\\ j,k>0}} a_{j,k}(\eta'_p)\epsilon_p^{-1}\tau(\eta'_p,\epsilon_p)^{j+k}w_1^j\bar{w}_1^k,$$
$$Q^\alpha_{\eta'_p}(w_1,\bar{w}_1) := \sum_{\substack{j+k\le m\\ j,k>0}} b^\alpha_{j,k}(\eta'_p)\epsilon_p^{-1/2}\tau(\eta'_p,\epsilon_p)^{j+k}w_1^j\bar{w}_1^k.$$

Chú ý rằng từ (1.9) ta đã biết rằng các hệ số của $P_{\eta'_p}$ và $Q^\alpha_{\eta'_p}$ bị chặn bởi 1. Các đa thức $Q^\alpha_{\eta'_p}$ không đóng vai trò quan trọng bằng đa thức $P_{\eta'_p}$. Chính xác hơn, S. Cho [13]đã chứng minh bổ đề sau.

Bổ đề 1.2.8 (Bổ đề 2.4, tr.810 trong [13]). $|Q^\alpha_{\eta'_p}(w_1,\bar{w}_1)| \le \tau(\eta'_p,\epsilon_p)^{\frac{1}{10}}$ *với mọi* $\alpha = 2, \cdots, n-1$ *và* $|w_1| \le 1$.

Bởi Bổ đề 1.2.8, sau khi trích ra dãy con nếu cần, ta có $\Delta^{\epsilon_p}_{\eta'_p} \circ \Phi_{\eta'_p}(U_0^-)$ hội tụ đến miền sau

$$M_P := \{\hat{\rho} := \operatorname{Re} w_n + P(w_1, \bar{w}_1) + |w_2|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2 < 0\}, \quad (1.33)$$

trong đó $P(w_1, \bar{w}_1)$ là một đa thức bậc $\leq 2m$ không chứa các hạng tử điều hòa.

Do M_P là giới hạn của các miền giả lồi $\Delta^{\epsilon_p}_{\eta'_p} \circ \Phi_{\eta'_p}(U_0^-)$, nên nó là giả lồi. Vì vậy hàm $\hat{\rho}$ trong (1.33) là đa điều hòa dưới và vì thế P là đa thức điều hòa dưới với $\Delta P \not\equiv 0$.

Bổ đề 1.2.9. *Miền M_P là hyperbolic Brody, tức là mọi ánh xạ chỉnh hình $\varphi : \mathbb{C} \to M_P$ đều là ánh xạ hằng.*

Chứng minh. Giả sử $\varphi : \mathbb{C} \to M_P$ là chỉnh hình. Do đó, các hàm $\operatorname{Re}\varphi_n + P \circ \varphi_1 + \sum_{\alpha=2}^{n-1} |\varphi_\alpha|^2$ và $\operatorname{Re}\varphi_n + P \circ \varphi_1$ là điều hòa dưới âm trên $\mathbb{C}$. Hệ quả là các hàm này là hằng. Điều này suy ra rằng $P \circ \varphi_1$ là điều hòa. Vì vậy $\varphi_1, \operatorname{Re}\varphi_n$ và φ_n là hằng. Thêm nữa hàm $\sum_{\alpha=2}^{n-1} |\varphi_\alpha|^2$ cũng hằng. Vì thế φ_α $(2 \leq \alpha \leq n-1)$ là hằng. □

1.2.3 Ước lượng metric Kobayashi

Nhắc lại rằng metric Kobayashi K_Ω của Ω được cho bởi

$$K_\Omega(\eta, \overrightarrow{X}) := \inf\{\frac{1}{R} | \ \exists f : D \to \Omega \text{ sao cho} f(0) = \eta, f'(0) = R\overrightarrow{X}\}.$$

Lập luận tương tự như [40, tr. 93], tồn tại một lân cận U của gốc tọa độ với $U \subset U_0$ sao cho

$$K_\Omega(\eta, \overrightarrow{X}) \leq K_{\Omega \cap U_0}(\eta, \overrightarrow{X}) \leq 2K_\Omega(\eta, \overrightarrow{X}) \text{ với mọi } \eta \in U \cap \Omega.$$

Chúng ta cần bổ đề sau (xem [41]).

Bổ đề 1.2.10. *Giả sử* (X, d) *là một không gian metric đầy và* $M : X \to \mathbb{R}^+$ *là một hàm bị chặn địa phương. Khi đó, với mọi* $\sigma > 0$ *và mọi* $u \in X$ *thỏa mãn* $M(u) > 0$*, tồn tại* $v \in X$ *sao cho:*

(i) $d(u, v) \leq \frac{2}{\sigma M(u)}$

(ii) $M(v) \geq M(u)$

(iii) $M(x) \leq 2M(v)$ *nếu* $d(x, v) \leq \frac{1}{\sigma M(v)}$.

Chứng minh. Giả sử rằng v không tồn tại ta xây dựng một dãy $\{v_j\}$ sao cho $v_0 = u$, $M(v_{n+1}) \geq 2M(v_j) \geq 2^{n+1}M(u)$ và $d(v_{n+1}, v_j) \leq \frac{1}{\sigma M(v_j)} \leq \frac{1}{\sigma M(u) 2^n}$. Vì vậy dãy này là dãy Cauchy. □

Định lý 1.2.11. *Giả sử* Ω *là một miền trong* $\mathbb{C}^n$ *với biên* $\partial\Omega$ *nhẵn, giả lồi, kiểu hữu hạn trong một lân cận nào đó của điểm* $p \in \partial\Omega$ *và hạng của dạng Levi ít nhất bằng* $n - 2$ *tại* p_∞*. Khi đó, tồn tại một lân cận* V *của* p_∞ *sao cho:*

$$M(\eta, \overrightarrow{X}) \lesssim K_\Omega(\eta, \overrightarrow{X}) \lesssim M(\eta, \overrightarrow{X}) \text{ với mọi } \eta \in V \cap \Omega.$$

Chứng minh. Theo định nghĩa metric Kobayashi, bất đẳng thức thứ hai là hiển nhiên. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức thứ nhất. Ta có thể giả sử rằng $p_\infty = (0, \cdots, 0)$. Ta sẽ chỉ ra rằng với η gần 0 và $\overrightarrow{X}$ khác không, ta có:

$$K_\Omega\left(\eta, \frac{\overrightarrow{X}}{M(\eta, \overrightarrow{X})}\right) \gtrsim 1.$$

Giả sử rằng điều này không đúng. Khi đó, tồn tại $f_p : D \to \Omega \cap U$ sao cho $f_p(0) = \eta_p$ dần đến gốc tọa độ và ${f_p}'(0) = R_p \dfrac{\overrightarrow{X}_p}{M(\eta_p, \overrightarrow{X}_p)}$, trong đó $R_p \to \infty$ khi $p \to \infty$. Ta có thể giả sử rằng $R_p \geq p^2$. Do đó, $M(f_p(0), {f'}_p(0)) = M\left(\eta_p, R_p \dfrac{\overrightarrow{X}_p}{M(\eta_p, \overrightarrow{X}_p)}\right) = R_p \geq p^2$. Áp dụng Bổ đề 1.2.10 cho hàm $M_p(t) := M(f_p(t)), {f_p}'(t))$ trên $\bar{D}_{1/2}$ với $u = 0$ và $\sigma = \frac{1}{p}$. Khi đó tồn tại $\tilde{a}_p \in \bar{D}_{1/2}$ sao cho $|\tilde{a}_p| \leq \dfrac{2p}{M_p(0)}$ và $M_p(\tilde{a}_p) \geq M_p(0) \geq p^2$. Hơn nữa,

$$M_p(t) \leq 2M_p(\tilde{a}_p) \text{ trên } D(\tilde{a}_p, \frac{p}{M_p(\tilde{a}_p)}).$$

Ta định nghĩa $\{g_p\} \subset Hol(D_p, \Omega)$ bởi $g_p(t) := f_p\left(\tilde{a}_p + \dfrac{At}{2M_p(\tilde{a}_p)}\right)$. Dãy này thỏa mãn ước lượng

$$M[g_p(t), {g_p}'(t)] \leq A \text{ trên } D_p.$$

Do $\tilde{a}_p \to 0$, dãy $g_p(0) = f_p(\tilde{a}_p)$ dần đến gốc tọa độ. Chọn dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng $K^p \epsilon(g_p(0)) \leq \alpha_1$, trong đó K, A và α_1 là các hằng số xuất hiện trong Bổ đề 1.2.7. Từ Bổ đề 1.2.7 ta suy ra rằng

$$g_p(D_N) \subset Q[g_p(0), K^N \epsilon(g_p(0))] \text{ với } N \leq p. \tag{1.34}$$

Bây giờ ta có thể áp dụng phương pháp co giãn tọa độ. Đặt $\eta_p := g_p(0)$ và ${\eta'}_p := \eta_p + (0, \cdots, 0, \epsilon_p)$, trong đó $\epsilon_p > 0$ và $\rho({\eta'}_p) = 0$. Dễ dàng thấy rằng $\epsilon_p \approx \epsilon(\eta_p)$ và $\eta_p \in Q({\eta'}_p, c\epsilon_p)$ với hằng số $c \geq 1$. Từ (1.34) và (1.28), tồn tại hằng số $C \geq 1$ sao cho

$$g_p(D_N) \subset Q[{\eta'}_p, CK^N \epsilon_p] \text{ với } N \leq p. \tag{1.35}$$

Đặt $\varphi_p := \Delta^{\epsilon_p}_{{\eta'}_p} \circ \Phi_{{\eta'}_p} \circ g_p$. Từ (1.28) suy ra rằng

$$\varphi_p(D_N) \subset D_{\sqrt{CK^N}} \times \cdots \times D_{\sqrt{CK^N}} \times D_{CK^N}.$$

Bằng cách áp dụng định lý Montel và quá trình lấy dãy đường chéo ta có thể trích ra dãy con $\{\varphi_{p_k}\}$ của dãy $\{\varphi_p\}$ hội tụ trên các tập con compact của $\mathbb{C}$ đến đường cong nguyên $\varphi : \mathbb{C} \to M_P$. Do M_P là hyperbolic Brody nên φ là hàm hằng.

Mặt khác, ta có:

$$\frac{A}{2} = M[g_p(0), {g_p}'(0)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{|({\Phi'}_{\eta_p}(\eta_p){g_p}'(0))_k|}{\tau_k(\eta_p, \epsilon(\eta_p))}.$$

Do $\epsilon_p \approx \epsilon(\eta_p)$, $\eta_p \in Q({\eta'}_p, c\epsilon_p)$ và ${\Phi'}_{\eta_p}(\eta_p) \circ \left({\Phi'}_{{\eta'}_p}(\eta_p)\right)^{-1}$ hội tụ đến Id khi $p \to \infty$, ta có

$$\frac{A}{2} \lesssim \sum_{k=1}^{n} \frac{|({\Phi'}_{{\eta'}_p}(\eta_p){g_p}'(0))_k|}{\tau_k({\eta'}_p, \epsilon_p)} = \|{\varphi_p}'(0)\|_1.$$

Vì thế $\|\varphi'(0)\|_1 = \lim_{p_k\to\infty} \|{\varphi_{p_k}}'(0)\|_1 \gtrsim \frac{A}{2}$. Điều này mâu thuẫn vì φ là ánh xạ hằng. $\square$

1.2.4 Tính chuẩn tắc của họ các ánh xạ chỉnh hình

Trong mục này, chúng tôi sẽ chứng minh định lý sau.

Định lý 1.2.12. *Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ với biên $\partial\Omega$ nhẵn, giả lồi, kiểu hữu hạn trong lân cận của điểm biên $(0, \cdots, 0) \in \partial\Omega$ và hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n-2$ tại $(0, \cdots, 0)$. Giả sử ω là một miền trong $\mathbb{C}^k$ và $\varphi_p : \omega \to \Omega$ là dãy các ánh xạ chỉnh hình sao cho $\eta_p := \varphi_p(a)$ hội tụ đến $(0, \cdots, 0)$ với điểm nào đó $a \in \omega$. Gọi $\{T_p\}_p$ là một dãy các tự đẳng cấu của $\mathbb{C}^n$ kết hợp với dãy $(\eta_p)_p$ theo phương pháp co giãn tọa độ (nghĩa là: $T_p = \Delta^{\epsilon_p}_{{\eta'}_p} \circ \Phi_{{\eta'}_p}$). Khi đó $\{T_p \circ \varphi_p\}_p$ là chuẩn tắc và giới* *hạn của nó là các ánh xạ chỉnh hình từ ω đến miền dạng sau*

$$M_P = \{(w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} w_n + P(w_1, \bar{w}_1) + |w_2|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2 < 0\},$$

trong đó $\tau(\partial\Omega, 0) = 2m$ *và* $P \in \mathcal{P}_{2m}$.

Chứng minh. Giả sử $f : D \to \Omega$ là một hàm chỉnh hình với $f(0)$ gần $(0, \cdots, 0)$. Theo Định lý 1.2.11, ta có

$$M[f(u), f'(u)] \lesssim K_\Omega(f(u), f'(u)) \leq K_D(u, \frac{\partial}{\partial u}).$$

Gọi $r_0 \in (0, 1)$ là số thực sao cho $r_0 \sup\limits_{|u| \leq r_0} K_D(u, \frac{\partial}{\partial u}) \leq A$, trong đó A là hằng số xuất hiện trong Bổ đề 1.2.7. Đặt $f_{r_0}(u) := f(r_0 u)$. Khi đó, $M[f_{r_0}(u), {f_{r_0}}'(u)] \leq A$. Hơn nữa, theo Bổ đề 1.2.7, ta có $f(D_{r_0}) = f_{r_0}(D) \subset Q[f(0), \epsilon(f(0))]$. Bao hàm thức này vẫn còn đúng nếu miền D được thay bởi hình cầu đơn vị trong $\mathbb{C}^k$. Gọi $f : \omega \to \Omega$ là ánh xạ chỉnh hình sao cho $f(a)$ gần $(0, \cdots, 0)$ với điểm nào đó $a \in \omega$. Với tập con compact bất kì K của miền ω, bằng cách phủ bởi hữu hạn các hình cầu bán kính r_0 và theo tính chất (1.28), ta có

$$f(K) \subset Q[f(a), C(K)\epsilon(f(a))],$$

trong đó $C(K)$ là một hằng số phụ thuộc vào K. Do $\eta_p := \varphi_p(a)$ hội tụ đến gốc tọa độ nên ta suy ra rằng

$$\varphi_p(K) \subset Q[{\eta'}_p, C(K)\epsilon(\eta_p)].$$

Vì vậy $T_p \circ \varphi_p(K) \subset D_{\sqrt{C(K)}} \times \cdots \times D_{\sqrt{C(K)}} \times D_{C(K)}$. Theo Định lý Montel và quá trình lấy dãy đường chéo, dãy $\{T_p \circ \varphi_p\}$ là chuẩn tắc và giới hạn của nó là các ánh xạ chỉnh hình từ ω đến miền dạng sau

$$M_P = \{(w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} w_n + P(w_1, \bar{w}_1) + |w_2|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2 < 0\}.$$

□

1.3 Sự tồn tại mô hình thuần nhất của miền trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact

Trong mục này, chúng tôi sẽ chứng minh kết quả chính thứ nhất của luận án. Trước hết, ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 1.3.1. *Giả sử $Q \in \mathcal{P}_{2m}$ và $H \in \mathcal{H}_{2m}$. Nếu M_Q và M_H là song chỉnh hình thì phần thuần nhất bậc cao nhất của đa thức Q bằng đa thức thuần nhất $\lambda H(e^{i\nu}z)$ với $\lambda > 0$ và $\nu \in [0, 2\pi]$ nào đó.*

Chứng minh. Theo [4], tồn tại một hàm chỉnh hình ϕ xác định trên M_Q, liên tục trên $\overline{M_Q}$ sao cho $|\phi| < 1$ với $z \in M_Q$ và $\phi(z)$ dần đến 1 khi z dần ra vô cùng. Gọi $\psi : M_H \to M_Q$ là ánh xạ song chỉnh hình. Ta có thể khẳng định rằng tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \inf |\psi(0', x + it_0)| < +\infty$. Thật vậy, nếu điều này không xảy ra thì hàm $\phi \circ \psi$ sẽ bằng 1 trên nửa phẳng $\{\operatorname{Re} z_n < 0, z' = 0\}$ và điều này không thể được vì $|\phi| < 1$ với $|z| \gg 1$. Vì vậy, chúng ta có thể giả sử rằng tồn tại dãy $x_k < 0$ sao cho $\lim x_k = 0$ và $\lim \psi(0', x_k) = z_0 \in \partial M_Q$. Theo [41], ánh xạ ψ có thể thác triển thành ánh xạ đồng phôi cho đến biên ∂M_H trong một lân cận của $(0, \cdots, 0)$. Hơn nữa, S. Bell [6] đã chỉ ra rằng thác triển này thực sự là một vi phôi. Điều này dễ dàng suy ra kết luận của bổ đề. □

Bây giờ chúng tôi sẽ chứng minh kết quả chính thứ nhất của luận án:

Định lý 1.3.2. *Giả sử* Ω *là một miền trong* $\mathbb{C}^n$ *và* $p_\infty \in \partial\Omega$ *là một điểm biên. Giả sử rằng*

(a) $\partial\Omega$ *là nhẵn, giả lồi trong một lân cận nào đó của điểm* $p_\infty \in \partial\Omega$ *và có kiểu* $2m$ *tại* p_∞,

(b) Hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n-2$ *tại* p_∞,

(c) Tồn tại dãy $\{\varphi_p\}$ *thuộc* $Aut(\Omega)$ *sao cho* $\lim \varphi_p(a) = p_\infty$*với điểm nào đó* $a \in \Omega$,

Khi đó, Ω *song chỉnh hình với miền có dạng sau*

$$M_H = \{(w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} w_n + H(w_1, \bar{w}_1) + |w_2|^2 + \cdots + |w_{n-1}|^2 < 0\},$$

trong đó H *là đa thức thuần nhất, bậc* $2m$ *và điều hòa dưới trên* $\mathbb{C}$.

Để chứng minh định lý này, chúng ta áp dụng phương pháp của F. Berteloot (xem trong [8]). Trước tiên, với một miền Ω trong $\mathbb{C}^n$ và $z \in \Omega$ ta kí hiệu $\mathcal{P}(\Omega, z)$ là tập các đa thức $Q \in \mathcal{P}_{2m}$ sao cho Q là điều hòa dưới và tồn tại một song chỉnh hình $\psi : \Omega \to M_Q$ thỏa mãn $\psi(z) = (0', -1)$. Bằng lập luận tương tự như trong chứng minh của [8, Mệnh đề 3.1] (áp dụng Định lý 1.2.12 và Bổ đề 1.1.9), ta cũng nhận được khẳng định sau: nếu Ω thỏa mãn các giả thiết của Định lý 1.3.2 thì $\mathcal{P}(\Omega, z)$ khác rỗng. Hơn nữa, tồn tại các cách chọn điểm z sao cho phần tử bất kì của $\mathcal{P}(\Omega, z)$ đều có bậc $2m$. Chính xác hơn ta có mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.3.3. *Giả sử* Ω *là một miền trong* $\mathbb{C}^n$ *thỏa mãn*

(1) $\exists p_\infty \in \partial\Omega$ *sao cho* $\partial\Omega$ *nhẵn, giả lồi và có kiểu hữu hạn trong một lân cận nào đó của điểm* p_∞,

(2) Hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n-2$ *tại* p_∞*,*

(3) $\exists z_0 \in \Omega,\ \exists \varphi_p \in Aut(\Omega)$ *sao cho* $\lim \varphi_p(z_0) = p_\infty$.

Khi đó

(a) $\forall z \in \Omega : \mathcal{P}(\Omega, z) \neq \emptyset$*,*

(b) $\exists \tilde{z}_0 \in \Omega$ *sao cho nếu* $Q \in \mathcal{P}(\Omega, \tilde{z}_0)$ *thì* $\deg Q = 2m$*, trong đó* $2m$ *là kiểu của* $\partial\Omega$ *tại* p_∞*,*

(c) $\exists Q \in \mathcal{P}(\Omega, \tilde{z}_0)$ *sao cho* $Q = H + R$*, trong đó* $H \in \mathcal{H}_{2m}$ *và* $\deg R < 2m$*.*

Chứng minh. a) Gọi $z \in \Omega$. Theo Mệnh đề 1.1.8, ta có $\lim \varphi_p(z) = p_\infty$. Xét dãy các điểm $\{\eta_p := \varphi_p(z)\}$ và dãy các phép biến đổi $\{T_p\}$ kết hợp với dãy $\{\eta_p\}$. Dãy $\{T_p\}$ xác định trong một lân cận U của $p_\infty \in \partial\Omega$. Do đó, ta có hai dãy các miền $\Omega_p := \varphi_p^{-1}(\Omega \cap U)$, $D_p := T_p(\Omega \cap U)$ và dãy các song chỉnh hình

$$\begin{aligned} \psi_p : &\Omega_p \to D_p \\ &z \mapsto (0', -1) \end{aligned}$$

cho bởi $\psi_p := T_p \circ \varphi_p |_{\Omega_p}$. Do Mệnh đề 1.1.7, bằng việc trích dãy con nếu cần, ta phải kiểm tra các tính chất sau

(i) $\{\Omega_p\}$ hội tụ đến Ω,

(ii) $\{D_p\}$ hội tụ đến M_Q với $Q \in \mathcal{P}_{2m} \setminus \{0\}$ nào đó,

(iii) $\{\psi_p^{-1}\}$ hội tụ đều trên các tập con compact của M_Q,

(iv) $\{\psi_p\}$ hội tụ đều trên các tập con compact của Ω,

(v) Nếu $\psi := \lim \psi_p$ thì $\psi(\Omega) \subset M_Q$.

Phần a) của Mệnh đề 1.1.8 chỉ ra rằng $\{\varphi_p\}$ hội tụ đều trên các tập con compact của Ω đến p_∞ và điều này có nghĩa rằng Ω_p hội tụ đến Ω. Sự hội tụ của D_p đến mô hình M_Q nào đó được suy ra từ việc chọn các phép biến đổi $\{T_p\}$ như đã chỉ ra ở mục 1.2. Do $\partial\Omega$ nhẵn và giả lồi trong một lân cận nào đó của điểm p_∞ nên tồn tại một lân cận đủ bé B của p_∞ sao cho $\Omega \cap B$ siêu lồi. Vì thế $\Omega \cap B$ là miền taut. Vì vậy, Mệnh đề 1.1.8 (phần b) chỉ ra rằng Ω cũng là miền taut. Do $\psi_p^{-1}(0', -1) = z$ với mọi p nên $\{\psi_p^{-1}\}$ hội tụ đều trên các tập con compact của M_Q (trích ra dãy con nếu cần). Sự hội tụ của dãy $\{\psi_p\}$ suy ra từ Định lý 1.2.12. Cuối cùng, vì $\rho \leq 0$ trên M và $\rho(z) = -1$ nên bằng cách áp dụng nguyên lý cực đại cho hàm $\operatorname{Re}\psi_n + Q \circ \psi_1 + |\psi_2|^2 + \cdots + |\psi_{n-1}|^2 =: \rho$ ta có $\psi(\Omega) \subset M_Q$.

b) Sau khi thực hiện các phép biến đổi tọa độ, ta có thể giả sử rằng tồn tại lân cận đủ nhỏ U của p_∞ sao cho

$$z \in \Omega \cap U \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_n + H(z_1, \bar{z}_1) + \sum_{\alpha=2}^{n-1} \operatorname{Re}(B^\alpha(z_1, \bar{z}_1) z_\alpha) + \sum_{\alpha=2}^{n-1} |z_\alpha|^2 + \\ + O(|z_1|^{2m+1} + |z_n||z| + \sum_{\alpha=2}^{n-1} |z_\alpha|^3) < 0,$$

trong đó $H \in \mathcal{H}_{2m}$ và $B^\alpha(z_1, \bar{z}_1) \in \mathcal{P}_{2m}$ $(2 \leq \alpha \leq n-1)$.

Gọi $z_p = (0', -\frac{1}{p})$. Ta xét dãy các song chỉnh hình tùy ý $\psi_p : \Omega \to M_{Q_p}$ sao cho $\psi_p(z_p) = (0', -1)$. Ta sẽ chứng minh rằng $\deg Q_p = 2m$ khi p đủ lớn. Lấy hợp thành ψ_p với phép biến đổi dạng $(z_1, z_2, \cdots, z_n) \to$

$(\lambda_p z_1, z_2, \cdots, z_n), \lambda_p > 0$, ta có thể giả sử rằng $\|Q_p\| = 1$ với mọi p. Khi đó, lấy dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng $\lim Q_p =: Q_\infty \in P_{2m}$. Tiếp theo, ta xét các phép co giãn $\Delta_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ cho bởi $\Delta_p(z_1, \cdots, z_n) = (\sqrt[2m]{p} z_1, \sqrt{p} z_2, \cdots, \sqrt{p} z_{n-1}, p z_n)$ và các miền $\Omega_p := \Delta_p(\Omega \cap U)$, $D_p := \psi_p(\Omega \cap U)$. Bằng cách đặt $\tilde{\psi}_p = \psi_p |_{\Omega\cap U} \circ \Delta_p^{-1}$ ta nhận được dãy các song chỉnh hình

$$\tilde{\psi}_p : \Omega_p \to D_p$$
$$(0', -1) \mapsto (0', -1).$$

Áp dụng Mệnh đề 1.1.7, ta có thể chỉ ra rằng dãy $\{\tilde{\psi}_p\}$ hội tụ đến song chỉnh hình $\tilde{\psi} : M_H \to M_{Q_\infty}$. Điều này suy ra rằng $\deg Q_\infty = \deg H = 2m$ và $\deg Q_p = 2m$ với p đủ lớn. Dễ dàng thấy rằng Ω_p đến M_H. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng D_p hội tụ đến M_{Q_∞}. Theo Mệnh đề 1.1.8, dãy $\{\psi_p^{-1}\}$ hội tụ đều trên các tập con compact của M_{Q_∞} đến p_∞. Điều này có nghĩa là: với mọi $K \Subset M_{Q_\infty}$, ta có $\psi_p^{-1}(K) \Subset \Omega \cap U$ (tức là: $K \Subset D_p$) với p đủ lớn. Mặt khác, do $K \Subset D_p$ với p đủ lớn nên ta có $\psi_p^{-1}(K) \Subset \Omega \cap U$. Điều này suy ra rằng $K \Subset M_{Q_p}$ với p đủ lớn. Do đó, $K \Subset M_{Q_\infty}$. Sự hội tụ của $\tilde{\psi}_p^{-1}$ (tương ứng $\tilde{\psi}_p$) được suy ra trực tiếp từ Định lý 1.2.12 (tương ứng Bổ đề 1.1.9). Cuối cùng, do $\tilde{\psi}(M_H) \subset \overline{M_{Q_\infty}}$ và $\tilde{\psi}(0', -1) = (0', -1)$ nên bằng cách áp dụng nguyên lý cực đại cho hàm $\operatorname{Re} \tilde{\psi}_n + Q_\infty \circ \tilde{\psi}_1 + |\tilde{\psi}_2|^2 + \cdots + |\tilde{\psi}_{n-1}|^2$ ta thấy rằng $\tilde{\psi}(M_H) \subset M_{Q_\infty}$. Từ Bổ đề 1.3.1, ta có $\deg Q_\infty = 2m$. Điều này kết thúc chứng minh phần b).

c) Ta xét song chỉnh hình đã được xây dựng ở phần a)

$$\psi : \Omega \to M_Q$$
$$\tilde{z}_0 \mapsto (0', -1).$$

Ta biết rằng

$$Q = \lim \frac{1}{\epsilon_p} \sum_{l=2}^{2m} (\tau_1(\eta'_p, \epsilon_p))^l \mathcal{P}_{l,p},$$

trong đó $\eta'_p = (\eta_{1p}, \cdots, \eta_{np} + \epsilon_p) \in \partial\Omega$, $\epsilon_p > 0$, $\lim \epsilon_p = \lim \tau_1(\eta'_p, \epsilon_p) = 0$, $P_{l,p} := \sum_{j+k=l} a_{jk}(\eta'_p) w_1^j \bar{w}_1^k$, $\lim \|\mathcal{P}_{l,p}\| = 0$ với $l < 2m$ và $\lim \mathcal{P}_{2m,p} = H$. Tuy nhiên, theo phần b), bậc của Q bằng $2m$. Do đó, $\epsilon_p \approx \tau_1(\eta'_p, \epsilon_p)^{2m}$. Vì vậy phần thuần nhất bậc $2m$ của đa thức Q bằng λH với $\lambda > 0$ nào đó. Lấy hợp thành ψ với $(z_1, z_2, \cdots, z_n) \to (\lambda^{1/2m} z_1, z_2, \cdots, z_n)$ ta được điều cần chứng minh. □

Bây giờ ta cần nhắc lại bổ đề sau (xem [8, Bổ đề 4.2]).

Bổ đề 1.3.4. *Giả sử* $Q \in \mathcal{P}_{2m}$ *với* $\deg Q > 2$ *và tồn tại dãy* $z_k \in \mathbb{C}$ *hội tụ đến* ∞ *sao cho* $\lim Q_{j,\bar{q}}(z_k) = 0$ *với* $j, q > 0$ *và* $(j+q) < \deg Q$*. Khi đó, tồn tại một số* $\nu \in [0, 2\pi)$ *sao cho*

(i) $\lim \mathrm{Re}(e^{i\nu} z_k) = 0$*,*

(ii) $Q = \lambda[(2\,\mathrm{Re}(e^{i\nu} z))^s - 2\,\mathrm{Re}(e^{i\nu} z)^s]$*, trong đó* $\lambda > 0$ *và* $s = \deg Q$*.*

Để chứng minh định lý chính thứ nhất ta cũng cần bổ đề sau. Bổ đề này là một mở rộng của [8, Bổ đề 4.3].

Bổ đề 1.3.5. *Giả sử* Ω *là một miền trong* $\mathbb{C}^n$ *với biên nhẵn, giả lồi và có kiểu hữu hạn trong một lân cận nào đó của* ξ*. Giả sử rằng tồn tại song chỉnh hình* $f : M_Q \to \Omega$ $(Q \in \mathcal{P}_{2m})$ *và dãy nào đó* a_p *trong* M_Q *sao cho*

(i) $\lim |a_p| = +\infty$*,*

(ii) $|\operatorname{Re} a_{np} + Q(a_{1p}) + |a_{2p}|^2 + \cdots + |a_{n-1p}|^2| \geq c > 0,\ \forall p \geq 0,$

(iii) $\lim f(a_p) = \xi.$

Khi đó, $\lim_{t\to+\infty} f(z', z_n \pm it) = \xi$ *với bất kì* $z \in M_Q$*.*

Chứng minh. Gọi ϕ là hàm chỉnh hình trên M_Q đã được đưa ra ở phần đầu của chứng minh Bổ đề 1.3.3. Do $|\phi(z)| < 1$ và $\phi(z)$ hội tụ đến 1 khi $z \to \infty$ nên tồn tại các hằng số $A > 0$ và $a > 0$ sao cho ta có thể định nghĩa được hàm đa điều hòa dưới âm $\tilde{\phi}$ trên M_Q bởi

$$\begin{cases} \tilde{\phi} = \max(|\phi|^2 - 1, -a) \text{ trên } M_Q \setminus \{|z| \leq A\} \\ \tilde{\phi} = -a \text{ trên } M_Q \cap \{|z| < A\} \end{cases}$$

Theo cách xây dựng, $\tilde{\phi}$ thỏa mãn các ước lượng sau

$$|\tilde{\phi}(z)| \lesssim [|z_n| + |z_1|^{2m}]^{-1/N} \text{ với } |z| \geq M > 0, \tag{1.36}$$

trong đó $M > 0$ là số đủ lớn. Áp dụng bổ đề Holf cho hàm $\tilde{\phi} \circ f^{-1}$, ta có thể tìm được một lân cận V của ξ sao cho

$$d[f(z), \partial\Omega] \lesssim [|z_n| + |z_1|^{2m}]^{-1/N} \text{ với } |z| \geq M \text{ và } f(z) \in V. \tag{1.37}$$

Gọi $({a'}_p, z_n) \in M_Q$ là một dãy cho trước sao cho $f({a'}_p, z_n) \in V$. Xét đĩa giải tích $h \in \mathcal{H}(\Delta, \Omega)$ cho bởi $h(u) = f({a'}_p, z_n + u|c_p|)$, trong đó $c_p = \operatorname{Re} z_n + Q(a_{1p}) + |a_{2p}|^2 + \cdots + |a_{n-1p}|^2$. Từ Định lý 1.2.12, ta suy ra rằng

$$|u| \leq 1/2 \Rightarrow |h(u) - h(0)| \lesssim d(h(0), \partial\Omega)^{1/2m}. \tag{1.38}$$

Từ (1.37) và (1.38), ta có

$$\left|\frac{\partial f_j}{\partial z_n}({a'}_p, z_n)\right| \lesssim \frac{1}{|\operatorname{Re} z_n + Q(a_{1p}) + |a_{2p}|^2 + \cdots + |a_{n-1p}|^2|(|z_n| + |a_{1p}|^{2m})^{\alpha}} \tag{1.39}$$

với $|z| \geq M$, $f(a'_p, z_n) \in V \cap \Omega$, $j = 1, \cdots, n$ và $\alpha = (2mN)^{-1}$.

Xét dãy ánh xạ $F_p : [0, +\infty) \to \Omega$ cho bởi

$$F_p(x) = f(a'_p, a_{np} - x).$$

Bây giờ ta sẽ chỉ ra rằng (F_p) hội tụ đều trên $[0, +\infty)$ đến ξ_0. Thật vậy, giả sử phản chứng rằng điều này không đúng. Tồn tại hình cầu $B \subset V$ tâm ξ và một dãy $X_p \in (0, +\infty)$ sao cho $F_p(X_p) \in \partial B$ và $F_p([0, X_p]) \subset \overline{B} \subset V$ (trích dãy con nếu cần và chú ý rằng $\lim F_p(0) = \xi$ do điều kiện iii)). Từ bất đẳng thức (1.39) và điều kiện ii), ta có

$$|F_p(X_p) - F_p(0)| \lesssim \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x + c)[|x - \operatorname{Re} a_{np}| + B_p]^\alpha}, \tag{1.40}$$

trong đó $B_p := |\operatorname{Im} a_{np}| + 2|a_{1p}|^{2m}$. Kí hiệu $I_p := \int_0^{+\infty} h_p(x)dx$ là tích phân ở vế phải của (1.40). Ta sẽ dẫn đến mâu thuẫn bằng việc chỉ ra rằng $\liminf I_p = 0$. Nếu $\liminf(\operatorname{Re} a_{np}) = -\infty$ thì điều này được suy ra trực tiếp từ định lý hội tụ bị chặn của Lebesgue vì $h_p(x) \leq (x+c)^{-(\alpha+1)}$. Nếu $\liminf(\operatorname{Re} a_{np}) > -\infty$ thì tồn tại số $K > 0$ sao cho $\operatorname{Re} a_{np} \leq -K$ với mọi p. Do đó, $|\operatorname{Re} a_{np}| \leq \max(K, |Q(a_{1p})|)$ và từ i) suy ra rằng $\lim B_p = +\infty$. Đặt $y = x - \operatorname{Re} a_{np}$, ta nhận được

$$I_p = \int_K^{+\infty} \frac{dy}{(y + c + \operatorname{Re} a_{np})(y + B_p)^\alpha} + \int_{-\operatorname{Re} a_{np}}^{K} \frac{dy}{(y + c + \operatorname{Re} a_{np})(|y| + B_p)^\alpha}. \tag{1.41}$$

Theo định lý Lebesgue tích phân đầu hội tụ về không. Mặt khác, tích phân thứ hai nhỏ hơn đại lượng

$$B_p^{-\alpha} \int_{-\operatorname{Re} a_{np}}^{K} \frac{dy}{y + c + \operatorname{Re} a_{np}} = B_p^{-\alpha} Ln(\frac{K + c + \operatorname{Re} a_{np}}{c}).$$

Do $-K \leq \operatorname{Re} a_{np} \leq |Q(a_{1p})| \lesssim |a_{1p}|^{2m}$ nên tích phân thứ hai cũng hội tụ về không.

Tiếp theo, chúng ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại dãy $\{\xi_p\},\ \xi_p \in \partial\Omega$ sao cho $\lim \xi_p = \xi$ và $\lim_{x\to+\infty} f(a'_p, a_{np} - x) = \lim_{t\to+\infty} f(a'_p, a_{np} \pm it) = \xi_p$ với mọi p. Theo chứng minh trên, ta có thể giả sử rằng $F_p([0, +\infty)) \subset V$. Do đó từ (1.39) và ii) ta có

$$\forall X, X' \in [0, +\infty) : |F_p(X) - F_p(X')| \lesssim \int_X^{X'} \frac{dx}{(x+c)[|x - \operatorname{Re} a_{np}| + B_p]^\alpha} \tag{1.42}$$

Điều này chứng minh sự tồn tại của dãy $\{\xi_p\}$. Sự hội tụ của dãy này suy ra từ sự hội tụ của dãy $\{F_p\}$. Bây giờ ta còn phải chứng tỏ rằng $\lim_{t\to+\infty} f(a'_p, a_{np} \pm it) = \xi_p$ với mọi p. Giả sử rằng điều này không đúng. Khi đó, tồn tại hình cầu đủ nhỏ $B \subset V$ tâm ξ_p và một dãy $\{X_l\}$ sao cho $f(a'_p, a_{np} + iX_l) \not\subset B$ và $\lim |X_l| = +\infty$. Xét đường $\gamma_l : [0, 1] \to M_Q$ cho bởi $\gamma_l(t) = (1-t)(a'_p, a_{np} - |X_l|) + t(a'_p, a_{np} + iX_l)$. Do $\lim f \circ \gamma_l(0) = \xi_p$ nên tồn tại $x_l \in [0, 1]$ sao cho $f \circ \gamma_l(x_l) \in \partial B$ và $f \circ \gamma_l([0, x_l]) \subset \overline{B} \subset V$. Vì vậy, từ (1.39) và ii), ta có

$$\begin{aligned} |f \circ \gamma_l(0) - f \circ \gamma_l(x_l)| &\lesssim \int_0^{x_l} \frac{dx}{[c + (1-u)|x_l|][X_l]^\alpha} \\ &\lesssim |X_l|^{-\alpha} Ln(\frac{c + |X_l|}{c}). \end{aligned} \tag{1.43}$$

Điều này không thể xảy ra.

Ta sẽ kết thúc chứng minh bằng việc chỉ ra rằng dãy $\{\xi_p\}$ thực sự là dãy hằng. Do $\lim \xi_p = \xi$ nên ta có thể giả sử rằng $\partial\Omega$ giả lồi, kiểu hữu hạn tại ξ_p. Do đó, theo Mệnh đề 1.1.8, ta có $\lim_{t\to+\infty} f(z', z_n \pm it) = \xi_p$ với bất kì $z \in M_Q$. Vì vậy dãy $\{\xi_p\}$ là dãy hằng. $\square$

Việc kiểm soát dãy các phép co giãn kết hợp với quỹ đạo $\{\varphi_p(\tilde{z}_0)\}$ liên quan chặt chẽ với dáng điệu của $\{\varphi_p(\tilde{z}_0)\}$ trong Ω. Nhưng tiếc rằng việc kiểm tra trực tiếp dáng điệu này dường như không thể. Vì thế mục đích của chúng ta là nghiên cứu ảnh của dãy $\{\varphi_p(\tilde{z}_0)\}$ trong một mô hình đa thức M_Q của Ω. Từ đó, chứng minh của Định lý 1.3.2 được suy ra từ mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.3.6. *Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ thỏa mãn các giả thiết sau*

(1) $\partial\Omega$ nhẵn, giả lồi trong một lân cận nào đó của $p_\infty \in \partial\Omega$ và có kiểu $2m$ tại p_∞,

(2) $\exists z_0 \in \Omega$, $\exists \varphi_p \in Aut(\Omega)$ sao cho $\lim \varphi_p(z_0) = p_\infty$. Gọi $\tilde{z}_0 \in \Omega$ và $Q \in \mathcal{P}(\Omega, \tilde{z}_0)$ được cho bởi Mệnh đề 1.3.3. Đặt ψ là song chỉnh hình giữa Ω và M_Q, nó biến $\tilde{z}_0$ thành điểm $(0', -1)$. Kí hiệu $\psi \circ \varphi_p(\tilde{z}_0)$ bởi $a_p = (a_{1p}, \cdots, a_{np})$ và kí hiệu $|\operatorname{Re}\psi_n \circ \varphi_p(\tilde{z}_0) + Q[\psi_1 \circ \varphi_p(\tilde{z}_0)] + |\psi_2 \circ \varphi_p(\tilde{z}_0)|^2 + \cdots + |\psi_{n-1} \circ \varphi_p(\tilde{z}_0)|^2|$ bởi ϵ_p. Gọi H là phần thuần nhất bậc cao nhất của đa thức Q.

Khi đó, ta có ba khả năng sau đây.

(i) Nếu $\lim \epsilon_p = 0$ và $\liminf |a_{1p}| < +\infty$, thì $Q(z) = H(z-a) + 2\operatorname{Re}\sum_{j=0}^{2m} \frac{Q_j(a)}{j!}(z-a)^j (a \in \mathbb{C})$ và $\Omega \simeq M_H$,

(ii) Nếu $\lim \epsilon_p = 0$ và $\liminf |a_{1p}| = +\infty$ thì $Q(z) = H = \lambda[(2\operatorname{Re}(e^{i\nu}z))^{2m} - 2\operatorname{Re}(e^{i\nu}z)^{2m}] (\lambda > 0,\ \nu \in [0, 2\pi))$ và $\Omega \simeq M_H$,

(iii) $\limsup \epsilon_p > 0$ thì $H = \lambda|z|^{2m} (\lambda > 0)$ và $\Omega \simeq M_H$.

Chứng minh. Ta có thể giả sử rằng $\deg Q > 2$. Nếu không thì $Q = |z|^2$ và Mệnh đề được suy ra từ Mệnh đề 1.3.3. Xét trường hợp $\lim \epsilon_p = 0$. Định nghĩa dãy đa thức $\{Q_p\}$ bởi

$$Q_p = \frac{1}{\epsilon_p} \sum_{j,q>0} \frac{Q_{j,\bar{q}}(a_{1p})}{(j+q)!} \tau_p^{j+q} z_1^j \bar{z}_1^q, \tag{1.44}$$

trong đó $\tau_p > 0$ được chọn để $\|Q_p\| = 1$. Lấy dãy con nếu cần ta có thể giả sử rằng $\lim Q_p = Q_\infty$, trong đó $Q_\infty \in \mathcal{P}_{2m}$ và $\|Q_\infty\| = 1$. Ta xét dãy các tự đẳng cấu của $\mathbb{C}^n$ sau

$$\phi_p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,$$

$$z \mapsto z',$$

trong đó z' cho bởi

$$\begin{cases} z'_n = \dfrac{1}{\epsilon_p}\Big[z_n - a_{np} - \epsilon_p + 2\sum\limits_{j=1}^{2m} \frac{Q_j(a_{1p})}{j!}(z_1 - a_{1p})^j + 2\sum\limits_{j=2}^{n-1} \bar{a}_{jp}(z_j - a_{jp})\Big] \\ z'_1 = \dfrac{1}{\tau_p}[z_1 - a_{1p}] \\ z'_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_p}}[z_2 - a_{2p}] \\ \dots \\ z'_{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_p}}[z_{n-1} - a_{n-1p}] \end{cases} \tag{1.45}$$

Dễ dàng kiểm tra thấy rằng ϕ_p là song chỉnh hình từ M_Q lên M_{Q_p} và biến a_p thành $(0', -1)$. Theo chứng minh của Mệnh đề 1.3.3, tồn tại lân cận U của p_∞ và dãy các phép biến đổi T_p kết hợp với dãy $\varphi_p(\tilde{z}_0)$ sao cho dãy các miền $D_p := T_p(\Omega \cap U)$ hội tụ đến mô hình M_Q. Đặt $\psi_p = (\phi_p \circ \psi)\mid_{\Omega\cap U} \circ T_p^{-1}$ và $M_p := \phi_p \circ \psi(\Omega \cap U)$, ta định nghĩa dãy các tự đẳng cấu

$$\psi_p : D_p \to M_p$$
$$(0', -1) \mapsto (0', -1).$$

Lập luận tương tự như ở mục trong chứng minh Mệnh đề 1.3.3, ta có thể giả sử rằng (ψ_p) hội tụ đến song chỉnh hình nào đó ψ_∞ từ M_Q lên M_{Q_∞} (ở đây, ta cũng áp dụng Định lý 1.2.12 và Bổ đề 1.1.9). Do đó, $\psi_\infty \circ \psi$ là một song chỉnh hình giữa Ω và M_{Q_∞} biến $\tilde{z}_0$ thành $(0', -1)$. Vì vậy, Mệnh đề 1.3.3b) suy ra rằng $\deg Q_\infty = 2m$. Nhưng đồng nhất thức (1.44) chứng tỏ rằng điều này là không thể trừ trường hợp

$$\tau_p \approx \epsilon_p^{1/2m} \tag{1.46}$$

và

$$\lim Q_{j,\bar{q}}(a_{1p}) = 0 \text{ với } j, q > 0 \text{ và } \ j + q < 2m. \tag{1.47}$$

Nếu $\liminf |a_{1p}| < +\infty$ thì trích ra dãy con nếu cần ta có thể giả sử rằng $\lim a_{1p} = a$. Do đó, (1.47) suy ra $Q_{j,\bar{q}}(a) = 0$ với $j, q > 0$ và $j + q < 2m$. Vì phần thuần nhất bậc $2m$ trong Q bằng H nên điều này chứng minh i). Nếu $\lim |a_{1p}| = +\infty$ thì khẳng định ii) được suy ra từ Bổ đề 1.3.4. Bây giờ ta xét trường hợp $\limsup \epsilon_p > 0$. Lấy dãy con nếu cần ta có thể giả sử rằng $\epsilon_p \geq c > 0$ với mọi p. Ta sẽ nghiên cứu tác động thực (g_t) lên Ω bởi

$$\begin{cases} g : \mathbb{R} \times \Omega \to \Omega \\ (t, z) \mapsto g_t(z) \\ g_t(z) = \psi^{-1}[\psi(z) + (0', it)]. \end{cases} \tag{1.48}$$

Từ Bổ đề 1.3.5, ta kết luận rằng tác động này là tác động parabolic, tức là

$$\forall z \in \Omega : \lim_{t \to \pm\infty} g_t(z) = p_\infty. \tag{1.49}$$

Theo [4], tác động $(g_t)_t$ là nhẵn. Vì thế, ta có thể xét trường véctơ tiếp xúc chỉnh hình $\vec{X}$ xác định trong một lân cận của điểm p_∞ trong $\partial\Omega$ cho bởi

$$\vec{X} = \frac{d}{dt} g_t(z)\Big|_{t=0}.$$

Áp dụng các kết quả của E. Bedford và S. Pinchuk [3], [4], ta kết luận rằng $H = |z|^{2m}$. Sau đó, ta có thể áp dụng kĩ thuật scaling để chỉ ra rằng Ω song chỉnh hình với $M_{|z|^{2m}}$. Điều này kết thúc chứng minh Mệnh đề 1.3.6. $\square$

Chương 2

Đặc trưng của miền lồi tuyến tính trong $\mathbb{C}^n$ bởi nhóm tự đẳng cấu không compact

Trong chương này, chúng tôi chứng minh kết quả chính thứ hai của luận án (Định lý 2.3.2). Kết quả này là mở rộng kết quả của H. Gaussier [16] và đã được công bố trong bài báo [35]. Trong bài báo [16], H. Gaussier đã sử dụng tính chất tách miền bởi các siêu phẳng tựa để chỉ ra tính chuẩn tắc của họ các ánh xạ scaling. Đối với miền không lồi thì tính chất này không còn nữa. Tuy nhiên, nếu miền là lồi tuyến tính thì chúng tôi sẽ chỉ ra rằng miền cũng tách được bởi các nón. Từ đó, tính chuẩn tắc của họ các ánh xạ scaling được chứng minh bằng các kỹ thuật cơ bản của Giải tích phức. Để trình bày kết quả này, mục đầu dành cho việc xây dựng các đa đĩa quanh những điểm gần biên của miền lồi tuyến tính và nêu ra một số tính chất của nó. Trong mục 2.2, ta xét các đa đĩa tâm tại $q^\nu := h_\nu(q)$, trong đó $q \in \Omega$ và dãy các tự đẳng cấu $\{h_\nu\}_\nu$ hội tụ đến

p_∞. Điều này cho phép ánh xạ miền Ω thành các miền scaling bằng cách co giãn hệ toạ độ. Sau đó, chúng ta chỉ ra rằng các miền scaling hội tụ đến miền với hàm xác định biên đa thức (một mô hình đa thức). Trong mục 2.3, chúng tôi chứng minh tính chuẩn tắc của dãy scaling. Từ đó, miền Ω song chỉnh hình với mô hình trên.

2.1 Hệ toạ độ và đa đĩa của M. Conrad

Trong luận án tiến sỹ, M. Conrad [43] đã đưa ra cách xây dựng các đa đĩa trên các miền lồi tuyến tính trong $\mathbb{C}^n$ và đồng thời chứng minh một số tính chất của các đa đĩa này. Nhưng những kết quả này chưa được xuất bản. Vì vậy, để tiện lợi chúng tôi sẽ đưa ra các chứng minh chi tiết.

Hệ toạ độ trong $\mathbb{C}^n$ được ký hiệu bởi $z = (z_1, z')$, trong đó $z_1 \in \mathbb{C}$ và $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ với biên $\partial\Omega$ nhẵn, lồi tuyến tính và có kiểu hữu hạn trong một lân cận nào đó của điểm p_∞. Không mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng $p_\infty = 0$ và kiểu của $\partial\Omega$ tại gốc tọa độ bằng $2m$. Khi đó, tồn tại một lân cận U của $p_\infty = 0$ trong $\mathbb{C}^n$ sao cho $\Omega \cap U$ là miền lồi tuyến tính và được xác định bởi một hàm nhẵn

$$r(z_1, z') = \operatorname{Re} z_1 + h(\operatorname{Im} z_1, z'),$$

trong đó h là một hàm nhẵn. Chúng ta có thể giả sử rằng tồn tại một số thực dương $\epsilon_0 > 0$ sao cho các tập mức $\{r(z) = \epsilon\}$ là lồi tuyến tính với mọi $-\epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_0$.

Với mỗi $\epsilon \in (0, \epsilon_0/2)$, $q \in \Omega \cap U$ thoả mãn $|r(q)| < \epsilon_0/2$ và mỗi véctơ đơn vị $v \in \mathbb{S}^{n-1} := \{v \in \mathbb{C}^n : |v| = 1\}$, ta đặt

$\tau(q, v, \epsilon) := \sup\{\rho > 0 : r(q+\lambda v) - r(q) < \epsilon$ với $\lambda \in \mathbb{C}$ thoả mãn $|\lambda| < \rho\}$.

Dễ dàng thấy rằng $\tau(q, v, \epsilon)$ là khoảng cách từ q đến $S_{q,\epsilon} := \{r(z) = r(q) + \epsilon\}$ dọc theo đường thẳng phức $\{q + \lambda v : \lambda \in \mathbb{C}\}$. Đối với mỗi điểm $q \in \Omega \cap U$ và bất kỳ hằng số dương đủ nhỏ ϵ ta kết hợp với

(1) Một hệ toạ độ chỉnh hình $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ tâm tại q và bảo toàn tính trực giao,

(2) Các điểm $p_1, p_2, \cdots, p_n$ trên siêu mặt $S_{q,\epsilon}$ và

(3) Các số thực dương $\tau_1(q, \epsilon), \tau_2(q, \epsilon), \cdots, \tau_n(q, \epsilon)$.

Cách xây dựng đa đĩa được tiến hành như sau. Trước hết, ta đặt

$$e_1 := \frac{\nabla r(q)}{|\nabla r(q)|} \text{ và } \tau_1(q, \epsilon) := \tau(q, e_1, \epsilon).$$

Với ϵ đủ bé, tồn tại duy nhất điểm p_1 thuộc $S_{q,\epsilon}$ sao cho khoảng cách trên đạt được. Chọn một tham số hoá toạ độ của đường thẳng phức nối q với p_1 sao cho $z_1(0) = q$ và p_1 nằm trên trục thực dương $\operatorname{Re} z_1$. Bởi cách chọn trục thực dương cho toạ độ z_1, ta có $\frac{\partial r}{\partial x_1}(q) = 1$ và vì thế nếu U đủ bé thì $\frac{\partial r}{\partial x_1}(z) \approx 1$ với mọi $z \in U$. Mặt khác, chúng ta cũng có

$$\tau_1(q, \epsilon) \approx \epsilon, \tag{2.1}$$

ở đây hằng số xác định một cách độc lập với q và ϵ. Bây giờ ta xét phần bù trực giao H_1 của không gian sinh bởi tọa độ z_1 trong $\mathbb{C}^n$. Với mỗi $\gamma \in H_1 \cap \mathbb{S}^{n-1}$, ta tính $\tau(q, \gamma, \epsilon)$. Do giả thiết biên $\partial\Omega$ có kiểu hữu hạn nên khoảng cách lớn nhất là hữu hạn và đạt được tại véctơ $e_2 \in H_1 \cap \mathbb{S}^{n-1}$ nào đó. Đặt $\tau_2(q,\epsilon) := \tau(q, e_2, \epsilon)$. Gọi $p_2 \in S_{q,\epsilon}$ là điểm sao cho $p_2 = q + \tau_2(q,\epsilon)e_2$. Toạ độ z_2 được xác định bởi việc tham số hoá đường thẳng phức nối q với p_2 sao cho $z_2(0) = q$ và p_2 nằm trên trục thực dương $\operatorname{Re} z_2$. Tiếp theo, ta gọi H_2 là phần bù trực giao của không gian sinh bởi z_1 và z_2 trong $\mathbb{C}^n$ và lặp lại cách xây dựng ở trên. Cứ tiếp tục quá trình này ta nhận được n hàm toạ độ z_j, các véctơ e_j, các số $\tau_j(q,\epsilon)$ và các điểm $p_j (1 \le j \le n)$. Do cách xây dựng ta có

$$\frac{\partial r}{\partial z_j}(p_k) = 0 \text{ và } \frac{\partial r}{\partial y_k}(p_k) = 0 \text{ với mọi } j > k \ge 2, \tag{2.2}$$

trong đó $z_j = x_j + iy_j$ $(1 \le j \le n)$. Các ϵ-đa đĩa và các đồng dạng của nó theo hệ số $c > 0$ được định nghĩa bởi

$$cP_\epsilon(q) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_k - q_k| < c\tau_k(q,\epsilon)\ ,\ \ 1 \le k \le n\}.$$

Bổ đề 2.1.1. *Tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho*

(i) $\tau_1(q,\epsilon) \le c\epsilon$,

(ii) Với mọi $j \ge 2$, $\tau_j(q,\epsilon) \le c\epsilon^{1/2m}$.

Chứng minh. (i) được suy ra từ cách xây dựng hệ tọa độ.

(ii) Giả sử ngược lại rằng tồn tại hằng số $C > 0$, chỉ số j, điểm $q \in \Omega \cap U$ và $\epsilon > 0$ sao cho $\tau_j(q,\epsilon)^{2m+1} \ge C.\epsilon$. Do $\epsilon \ge r(q + \lambda e_j) - r(q)$ với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$ thoả mãn $|\lambda| < \tau_j(q,\epsilon)$, ta có $\tau_j(q,\epsilon)^{2m+1} \ge C.(r(q + \lambda e_j) - r(q))$. Khi đó, tồn tại đường thẳng phức $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto q + \lambda e_j$ có cấp tiếp xúc lớn hơn $2m$ đối với $S_{q,0}$. Điều này trái với giả thiết của ta và (ii) đã được chứng minh. $\square$

Do tính lồi tuyến tính của mặt mức $\{r(z) = \epsilon\}$ nên chúng ta có hai bổ đề sau.

Bổ đề 2.1.2. *Tồn tại hằng số c_1 sao cho, với mọi $q \in \Omega \cap U$ và $0 < \epsilon < \epsilon_0/2$, ta có:*

$$c_1 P_\epsilon(q) \subset \{r(z) < r(q) + \epsilon\} \tag{2.3}$$

Chứng minh. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng (2.3) đúng với $c_1 = \frac{1}{4^n}$. Gọi $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ là hệ toạ độ tương ứng với q và ϵ trong xây dựng ở trên. Với mỗi $z \in P_\epsilon(q)$, ta định nghĩa hàm

$$h(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k| + |y_k|}{\tau_k(q, \epsilon)},$$

trong đó $x_k = \operatorname{Re} z_k,\ y_k = \operatorname{Im} z_k$. Dễ dàng thấy rằng $h(z) < 1,\ \forall z \in c_1 P_\epsilon(q)$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng $h(Q) \geq 1$ với mọi $Q \in S_{q,\epsilon} \cap U \cap P_\epsilon(q)$. Điều này kết thúc việc chứng minh bổ đề. Giả sử ngược lại rằng $h(Q) < 1$. Gọi H là không gian tiếp xúc với $S_{q,\epsilon}$ tại Q. Khi đó, tồn tại một véctơ $X \in \mathbb{C}^n,\ X \neq 0$ sao cho $H = \{z \in \mathbb{C}^n :< z, X >=< Q, X >\}$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $X_k \neq 0$ với $k = 1, 2, \cdots, n$. Bởi nếu không ta xét điểm $\tilde{Q} \in H \cap P_\epsilon(q)$ trong $U \cap \{z : z_k = 0 \text{ nếu } X_k = 0\}$ với

$$\tilde{Q} := \begin{cases} 0 \text{ nếu } X_k = 0 \\ Q_k \text{ nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Do chiều phức của H là $n - 1$ và $X_k \neq 0$ với mọi $1 \leq k \leq n$, nên tồn tại các điểm $z^k = \lambda_k e_k \in H$ thoả mãn $\lambda_k \in \mathbb{C}$ for $1 \leq k \leq n$. Do đó, ta có

$$|z^k| \geq \tau_k(q, \epsilon)\ (1 \leq k \leq n). \tag{2.4}$$

Bây giờ siêu phẳng được biểu diễn dưới dạng

$$H = \{z = z^1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k (z^1 - z^k),\ \alpha_k \in \mathbb{C}\}.$$

Do $Q \in H$ nên $Q = z^1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k (z^1 - z^k)$, trong đó $\alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ là các số phức nào đó. Vì vậy

$$Q_1 = (1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k) z_1^1 \text{ và } Q_k = -\alpha_k z_k^k,\ k = 2, \cdots, n. \tag{2.5}$$

Nếu $h(Q) < 1$ thì $1 > h(Q) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{|x_k| + |y_k|}{\tau_k(q, \epsilon)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{|Q_k|}{\tau_k(q, \epsilon)}$. Từ (2.5) và (2.4), ta có

$$\frac{|Q_1|}{\tau_1(q, \epsilon)} < 1 - \sum_{k=2}^{n} \frac{|Q_k|}{\tau_k(q, \epsilon} \leq 1 - \sum_{k=2}^{n} |\alpha_k|. \tag{2.6}$$

Tuy nhiên, từ (2.5) ta cũng có

$$|Q_1| = |1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k||z^1| \geq |1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k| \tau_1(q, \epsilon). \tag{2.7}$$

Vì vậy, từ (2.6) và (2.7) ta có

$$1 - \sum_{k=2}^{n} |\alpha_k| > |1 + \sum_{k=2}^{n} \alpha_k| \geq 1 - \sum_{k=2}^{n} |\alpha_k|.$$

Bất đẳng thức trên là mâu thuẫn. Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.1.3. *Tồn tại hằng số $c_2 > 0$ sao cho*

$$c_2 P_\epsilon(q) \supset \{r(z) > r(q) - \epsilon\}.$$

Chứng minh. Áp dụng định lý hàm ẩn và phép biến đổi toạ độ, ta có:

$$r(z) - r(q) = \operatorname{Re} z_1 + h_1(z') + h_2(\operatorname{Im} z_1, z'). \tag{2.8}$$

Do $S_{q,0}$ lồi tuyến tính nên $h_1(z') \geq 0$. Hơn nữa,

$$|h_2(\operatorname{Im} z_1, z')| \lesssim |\operatorname{Im} z_1|. \tag{2.9}$$

Từ (2.1), với mọi $z \in P_\epsilon(q)$ ta có

$$r(z) - r(q) \geq \operatorname{Re} z_1 + 0 - C|\operatorname{Im} z_1| \gtrsim -|z_1| \gtrsim \tau_1(q,\epsilon) \approx -\epsilon.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Bổ đề 2.1.4. *Tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho, với mọi $q \in \Omega \cap U$, ta có*

$$\Gamma_q \cap \Omega_{q,0} \cap U = \emptyset,$$

trong đó $\Gamma_q := \{z \in \mathbb{C}^n : \gamma_q(z) = \operatorname{Re}(\partial r(q)(z-q)) - C|\operatorname{Im}(\partial r(q)(z-q))| \geq 0\}$; $\Omega_{q,\epsilon} := \{r(z) < r(q) + \epsilon\}$.

Chứng minh. Từ (2.9) và (2.8), tồn tại hằng số A sao cho, với mọi $z \in \Omega_{q,0} \cap U$, ta có

$$0 \geq r(z) - r(q) \geq \operatorname{Re} z_1 - A|\operatorname{Im} z_1|.$$

Do cách chọn hệ toạ độ nên ta có $\partial r(q) = (1, 0, \cdots, 0)$ và vì thế $\gamma_q(z) = \operatorname{Re} z_1 - C|\operatorname{Im} z_1|$. Lấy $C \geq A$, ta nhận được $\gamma_q(z) \leq \operatorname{Re} z_1 - A|\operatorname{Im} z_1| < 0$, $\forall z \in \Omega_{q,0} \cap U$. Vì vậy, $\Gamma_q \cap \Omega_{q,0} \cap U = \emptyset$. □

Nhận xét 2.1.5. *Hằng số C bất biến qua mọi cách thay đổi toạ độ.*

Bổ đề 2.1.6. *(i) Với mọi $j \leq n$, ta có $\frac{\partial r}{\partial z_j}(p_j)$ là số thực.*

(ii) Tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho với mọi $j \leq n$, ta có

$$\left|\frac{\partial r}{\partial z_j}(p_j)\right| \geq c\frac{\tau_1(q,\epsilon)}{\tau_j(q,\epsilon)}.$$

(iii) Nếu $j \le n-1$ thì $\frac{\partial r}{\partial z_k}(p_j) = 0$ với mọi $k > j$.

Chứng minh. i) và iii) được suy ra từ cách xây dựng ở trên.

ii) Trong hệ toạ độ $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$, x_1 trực giao với $S_{q,\epsilon}$ tại p_1 và là một thay đổi nhỏ của pháp tuyến của mặt $\partial\Omega$ tại p_∞. Chọn lân cận U nhỏ hơn nếu cần và do dạng của hàm xác định biên r, với mỗi q trong U và với ϵ đủ bé, chúng ta có thể giả sử rằng

$$\frac{1}{2} \le |\frac{\partial r}{\partial x_1}(p_1)| \le 2.$$

Điều này chứng minh ii) cho trường hợp $j = 1$. Bây giờ ta xét các nón Γ_{p_k} với $k = 2, \cdots, n$. Theo i) ta có $\operatorname{Im} \partial r(p_k) p_k = 0$. Đặt

$$\alpha_k := \tau_1(q,\epsilon) \overline{\frac{\partial r}{\partial z_1}(p_k)}.$$

Khi đó, $|\alpha_k| \approx \tau_1(q,\epsilon)$ và $\operatorname{Im} \alpha_k \frac{\partial r}{\partial z_1}(p_k) = 0$. Với hằng số thích hợp $c > 0$ (độc lập với q, ϵ) thì $w^k \in S_{q,\epsilon}$, trong đó $w^k := (c\alpha_k, 0, \cdots, 0)$. Theo Bổ đề 2.1.4, ta có $\gamma_{p_k}(w^k) \le 0$, nghĩa là:

$$\operatorname{Re} \frac{\partial r}{\partial z_1}(p_k) c\alpha_k \le \operatorname{Re} \frac{\partial r}{\partial z_k}(p_k) \tau_k(q,\epsilon). \tag{2.10}$$

Từ $\operatorname{Re} \frac{\partial r}{\partial z_1}(p_k) c\alpha_k \approx |\frac{\partial r}{\partial z_1}(p_k)|^2 \tau_1(q,\epsilon) \gtrsim \tau_1(q,\epsilon)$, ta suy ra rằng ii) đúng với mọi $k = 2, \cdots, n$. □

2.2 Scaling miền $\Omega \cap U$

Trong mục này, chúng ta sử dụng phương pháp của H. Gaussier [16] để khẳng định rằng dãy miền scaling hội tụ. Giả sử rằng p_∞ là điểm tụ quỹ đạo của miền Ω trong $\mathbb{C}^n$. Khi đó, tồn tại dãy các tự đẳng cấu $\{h_\nu\}_{\nu\geq 0}$ của miền Ω và tồn tại điểm q trong Ω sao cho

$$\lim_{\nu\to\infty} h_\nu(q) = p_\infty.$$

Để thuận tiện chúng ta sử dụng các ký hiệu như sau.

$$q^\nu = h_\nu(q),$$
$$\epsilon_\nu = -r(q^\nu).$$

Tương ứng với q^ν và ϵ_ν, ta có hệ toạ độ mới $(z_1^\nu, \cdots, z_n^\nu)$, các số thực dương $\tau_{\nu,1}, \cdots, \tau_{\nu,n}$ và các điểm $p_1^\nu, \cdots, p_n^\nu$. Phép đổi toạ độ từ hệ toạ độ chính tắc sang hệ mới $(z_1^\nu, \cdots, z_n^\nu)$ là hợp thành của một phép tịnh tiến T_ν và một phép biến đổi Unita A_ν. Hơn nữa, $(A_\nu \circ T_\nu)^{-1}$ xác định trong một lân cận cố định của gốc toạ độ. Hàm xác định biên tương ứng r_ν được xác định bởi

$$r_\nu := r \circ (A_\nu \circ T_\nu)^{-1}.$$

Trong một lân cận cố định của $z = 0$ ta có thể viết

$$r_\nu(z) = -\epsilon_\nu + \mathrm{Re}(\sum_{j=1}^n a_j^\nu z_j) + \sum_{2\leq|\alpha|+|\beta|\leq 2m} C_{\alpha\beta}^\nu {z'}^\alpha \bar{z'}^\beta + O(|z|^{2m+1}),$$

trong đó $\alpha = (\alpha_2, \cdots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ và ${z'}^\alpha = z_2^{\alpha_2}. \cdots .z_n^{\alpha_n}$. Ở đây, đại lượng $O(|z|^{2m+1})$ xác định độc lập với ν.

Gọi $r \circ A$ là giới hạn của r_ν trên một lân cận compact cố định của p_∞ khi ν dần đến vô hạn, trong đó A là phép biến đổi Unita. Khi đó, với mọi $j \leq n$ và với mọi đa chỉ số α và β thoả mãn $2 \leq |\alpha| + |\beta| \leq 2m$ thì tồn tại các số a_j và $C_{\alpha\beta}$ sao cho

$$\lim_{\nu\to\infty} a_j^\nu = a_j \text{ và } \lim_{\nu\to\infty} C_{\alpha\beta}^\nu = C_{\alpha\beta}.$$

Bây giờ ta xét các phép co giãn toạ độ

$$\Lambda_\nu(z) := (\tau_{\nu,1}z_1, \cdots, \tau_{\nu,n}z_n)$$

và hàm số

$$\tilde{r}_\nu = \frac{1}{\epsilon_\nu} r_\nu \circ \Lambda_\nu.$$

Khi đó, hàm số $\tilde{r}_\nu$ có dạng sau

$$\tilde{r}_\nu(z) = -1 + \frac{1}{\epsilon_\nu} \operatorname{Re}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j^\nu \tau_{\nu,j} z_j\Big) + \frac{1}{\epsilon_\nu} \sum_{2\le|\alpha|+|\beta|\le 2m} C^\nu_{\alpha\beta}\tau_\nu^{\alpha+\beta} z'^\alpha \bar{z}'^\beta$$
$$+ O((\epsilon_\nu)^{1/2m}|z|^{2m+1}),$$

trong đó $\tau_\nu^{\alpha+\beta} = \tau_{\nu,2}^{\alpha_2+\beta_2}.\cdots.\tau_{\nu,n}^{\alpha_n+\beta_n}$.

Mệnh đề 2.2.1. *Các hàm $\tilde{r}_\nu$ là nhẵn và đa điều hoà dưới. Hơn nữa, tồn tại một dãy con của dãy $\{\tilde{r}_\nu\}_\nu$ hội tụ đều trên các tập con compact của $\mathbb{C}^n$ đến một hàm đa điều hoà dưới nhẵn $\tilde{r}$ có dạng*

$$\tilde{r}(z) = -1 + \operatorname{Re}\Big(\sum_{j\ge 1} b_j z_j\Big) + P(z'),$$

trong đó P là đa thức đa điều hoà dưới bậc nhỏ hơn hoặc bằng $2m$.

Chứng minh. Các hàm $\tilde{r}_\nu$ là nhẵn và đa điều hoà dưới do cách xây dựng. Từ đó hàm giới hạn $\tilde{r}$ cũng nhẵn và đa điều hoà dưới. Do $O((\epsilon_\nu)^{1/2m}|z|^{2m+1})$ hội tụ về không trên các tập con compact của $\mathbb{C}^n$ khi ν dần ra vô cùng nên chúng ta chỉ cần xem xét sự hội tụ trong không gian các đa thức bậc nhỏ hơn hoặc bằng $2m$. Vì không gian này có chiều hữu hạn nên các chuẩn đều tương đương. Vì vậy, tồn tại hằng số dương d_1 sao cho với mọi $\nu \ge 1$ ta có

$$\sup_{j,\alpha,\beta}\{|a_j^\nu|\tau_{\nu,j}, |C^\nu_{\alpha,\beta}|\tau_\nu^{\alpha+\beta}\} \le d_1 \sup_{|\omega|\le C} |\operatorname{Re}(\sum_j a_j^\nu \tau_{\nu,j}\omega_j) + \sum_{\alpha,\beta} C^\nu_{\alpha,\beta}\tau_\nu^{\alpha+\beta}\omega'^\alpha \bar{\omega}'^\beta|,$$

trong đó $C := \min\{c_1, c_2\}$; c_1, c_2 được cho trong các Bổ đề 2.1.3 và Bổ đề 2.1.4. Điều này suy ra rằng tồn tại hằng số dương d_2 sao cho với mọi $\nu \geq 1$, ta có

$$\sup_{j,\alpha,\beta}\{|a_j^\nu|\tau_{\nu,j}, |C_{\alpha,\beta}^\nu|\tau_\nu^{\alpha+\beta}\} \leq d_2 \sup_{z \in CP_{\epsilon_\nu}(q^\nu)} |\operatorname{Re}(\sum_j a_j^\nu z_j) + \sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha,\beta}^\nu z'^\alpha \bar{z}'^\beta|.$$

Từ các Bổ đề 2.1.2 và Bổ đề 2.1.3, ta nhận được

$$\sup_{z \in CP_{\epsilon_\nu}(q^\nu)} |r(z)| \leq 2\epsilon_\nu.$$

Mặt khác, áp dụng Bổ đề 2.1.4 và từ định nghĩa các đa đĩa $P_{\epsilon_\nu}(q^\nu)$, ta có

$$\sup_{z \in CP_{\epsilon_\nu}(q^\nu)} O(|z|^{2m+1}) \leq \epsilon_\nu.$$

Từ đó, tồn tại hằng số dương d_3 độc lập với ν sao cho

$$\sup_{j,\alpha,\beta}\{|a_j^\nu|\tau_{\nu,j}, |C_{\alpha,\beta}^\nu|\tau_\nu^{\alpha+\beta}\} \leq d_3\epsilon_\nu.$$

Vì vậy ta có thể trích từ dãy $\{\tilde{r}_\nu\}_\nu$ một dãy con hội tụ đến hàm $\tilde{r}$ được cho trong Mệnh đề 2.2.1, trong đó b_j là các số phức. □

Gọi Ω_ν là ảnh của miền $\Omega \cap U$ qua phép đổi biến $\Lambda_\nu^{-1} \circ A_\nu \circ T_\nu$. Mệnh đề 2.2.1 suy ra rằng dãy miền $\{\Omega_\nu\}$ hội tụ đến miền $\tilde{D} = \{\tilde{r}(z) < 0\}$ theo nghĩa hội tụ chuẩn tắc theo nghĩa Carathéodory.

2.3 Tính chuẩn tắc của họ ánh xạ scaling

Xét dãy ánh xạ f_ν từ $h_\nu^{-1}(\Omega \cap U)$ đến Ω_ν được cho bởi

$$f_\nu = \Lambda_\nu^{-1} \circ A_\nu \circ T_\nu \circ h_\nu.$$

Nhắc lại rằng $\lim_{\nu\to\infty} h_\nu^{-1}(\Omega \cap U) = \Omega$ và trong mục trước ta đã chỉ ra rằng $\lim_{\nu\to\infty} \Omega_\nu = \tilde{D}$.

Bổ đề 2.3.1. *Họ ánh xạ $\{f_\nu\}_\nu$ là chuẩn tắc.*

Chứng minh. Đặt $e_j = \Lambda_\nu^{-1}(p_j^\nu)$, $\nu \geq 1$ và $j \geq 1$. Bây giờ ta xét hệ toạ độ đã được xây dưng ở trong mục 2.2 phụ thuộc vào ν. Trong hệ toạ độ $(z_1, \cdots, z_n)$ như vậy, ta có $p_j^\nu = (0, \cdots, 0, \tau_{\nu,j}, 0, \cdots, 0)$ và vì thế $e_j = (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0)$. Hơn nữa, ta cũng có

$$\frac{\partial \tilde{r}_\nu}{\partial z_j}(e_j) = \frac{\tau_{\nu,j}}{\epsilon_\nu}\frac{\partial r_\nu}{\partial z_j}(p_j^\nu).$$

Theo phần (ii) của Bổ đề 2.1.6, tồn tại hằng số dương d_4 sao cho

$$|\frac{\partial r_\nu}{\partial z_j}(p_j^\nu)| \geq d_4 \frac{\epsilon_\nu}{\tau_{\nu,j}}.$$

Chúng ta kết luận rằng tồn tại hằng số $d_5 > 0$ sao cho, với ν đủ lớn, ta có

$$|\frac{\partial \tilde{r}_\nu}{\partial z_j}(e_j)| \geq d_5. \tag{2.11}$$

Khi đó, phần (iii) của Bổ đề 2.1.6 suy ra rằng, với mỗi $k > j$ và ν đủ lớn, ta có

$$\frac{\partial \tilde{r}_\nu}{\partial z_k}(e_j) = 0.$$

Từ (2.11), ta có thể chỉ ra rằng họ $\{f_\nu^1\}_\nu$ thành phần đầu tiên của họ ánh xạ $\{f_\nu\}$ là chuẩn tắc. Thật vậy ta có e_1 thuộc $\partial\Omega_\nu$ với mọi ν. Theo Bổ đề 2.1.4, ta có $\gamma_{e_1}(z) \leq 0$ với mọi $z \in \Omega_\nu$, nghĩa là:

$$\Big(\frac{\partial \tilde{r}_\nu}{\partial x_1}(e_1)\Big)(\operatorname{Re} z_1 - 1) \leq C.|\frac{\partial \tilde{r}_\nu}{\partial x_1}(e_1) \operatorname{Im} z_1|.$$

Gọi K là tập con compact tuỳ ý của Ω. Với ν đủ lớn, K là tập con compact của $h_\nu^{-1}(\Omega \cap U)$ và vì thế $f_\nu(K)$ là tập con compact của Ω_ν. Khi đó bất kỳ điểm w trong K thỏa mãn bất đẳng thức

$$\Big(\frac{\partial \tilde{r}_\nu}{\partial x_1}(e_1)\Big)(\operatorname{Re} f_\nu^1(w) - 1) \le C.|\frac{\partial \tilde{r}_\nu}{\partial x_1}(e_1) \operatorname{Im} f_\nu^1(\omega)|.$$

Do điều kiện (2.11), ta có thể giả sử rằng

$$\operatorname{Re} f_\nu^1(w) - 1 \le C.|\operatorname{Im} f_\nu^1(w)|.$$

Hệ quả là họ $\{f_\nu^1\}_\nu$ chuẩn tắc. Hơn nữa, với mọi $\nu \ge 1$ ta luôn luôn có $f_\nu^1(q) = 0$. Vì thế ta có thể ta có thể trích được từ dãy $\{f_\nu^1\}_\nu$ một dãy con mà ta vẫn gọi là $\{f_\nu^1\}_\nu$ hội tụ đến ánh xạ chỉnh hình $f^1 : \Omega \to \mathbb{C}$.

Tiếp theo ta sẽ chỉ ra rằng $\{f_\nu^2\}_\nu$ là chuẩn tắc. Theo bổ đề 2.1.4, ta có $\gamma_{e_2}(z) \le 0$ với mọi $z \in \Omega_\nu$, nghĩa là:

$$\operatorname{Re}\Big(\frac{\partial \tilde{r}_\nu}{\partial z_1}(e_2) z_1\Big) + \frac{\partial \tilde{r}_\nu}{\partial x_2}(e_2)(\operatorname{Re} z_2 - 1) \le C.|\operatorname{Im}\Big(\frac{\partial \tilde{r}_\nu}{\partial z_1}(e_2) z_1\Big) + \frac{\partial \tilde{r}_\nu}{\partial x_2}(e_2) \operatorname{Im} z_2|.$$

Hơn nữa,

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\partial \tilde{r}_\nu}{\partial x_2}(e_2) = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial x_2}(e_2);$$

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{\partial \tilde{r}_\nu}{\partial z_1}(e_2) f_\nu^1(w) = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial z_1}(e_2) f^1(w).$$

Tiếp tục sử dụng (2.11) và trích ra dãy con nếu cần, ta có thể giả sử rằng với mọi w thuộc K và mọi ν đủ lớn, ta có

$$\operatorname{Re} f_\nu^2(w) - 1 \le C.|\operatorname{Im} f_\nu^2(w)|.$$

Khi đó, họ $\{f_\nu^2\}_\nu$ là chuẩn tắc và tồn tại dãy con hội tụ đến hàm chỉnh hình từ Ω vào $\mathbb{C}$. Lặp lại quá trình trên và trích dãy con nếu cần, ta có thể khẳng định rằng dãy $\{f_\nu\}_\nu$ hội tụ đến ánh xạ f từ Ω vào $\overline{\tilde{D}}$. $\square$

Định lý sau đặc trưng cho miền lồi tuyến tính trong $\mathbb{C}^n$. Đây là kết quả chính thứ hai của luận án.

Định lý 2.3.2. *Giả sử Ω là một miền trong $\mathbb{C}^n$ và $p_\infty \in \partial\Omega$ là một điểm biên tụ quỹ đạo của Ω. Khi đó, nếu $\partial\Omega$ nhẵn, lồi tuyến tính địa phương trong một lân cận của p_∞ và có kiểu hữu hạn $2m$ tại điểm p_∞ thì Ω song chỉnh hình với miền sau*

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_1 + P(z') < 0\},$$

trong đó P là một đa thức thực không suy biến đa điều hoà dưới bậc nhỏ hơn hoặc bằng $2m$.

Chứng minh. Dễ dàng thấy rằng bằng cách lấy dãy con nếu cần, các tính chất sau đúng.

(i) $\{\Omega_\nu\}_\nu$ hội tụ đến $\tilde{D}$.

(ii) $\{f_\nu\}_\nu$ hội tụ đều trên các tập con compact của Ω

(iii) $\{(f_\nu)^{-1}\}_\nu$ hội tụ đều trên các tập con compact của $\tilde{D}$.

(iv) Nếu $f := \lim f_\nu$ thì $f(\Omega) \subset \tilde{D}$.

Theo mệnh đề 1.1.7, ta khẳng định rằng Ω song chỉnh hình với miền $\tilde{D} = \{(z_1, z') \in \mathbb{C}^n : -1 + \operatorname{Re}(\sum_{j=1}^n b_j z_j) + P(z') < 0\}$. Từ (2.11), ta thấy rằng b_1 khác 0. Bằng phép biến đổi affine, miền $\tilde{D}$ song chỉnh hình với miền $D = \{(z_1, z') \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_1 + P(z') < 0\}$. Do Ω là hyperbolic nên D cũng là hyperbolic và theo một kết quả của Barth [1] miền D không chứa bất kỳ đường thẳng phức. Khi đó miền ∂D cũng không chứa đường thẳng phức. Theo [43, Định lý 2.1] miền D có kiểu hữu hạn và đa thức P không suy biến. $\square$

Chương 3

Giả thuyết Greene-Krantz

Trong chương này, chúng tôi chứng minh giả thuyết Greene-Krantz cho một lớp miền cụ thể (Định lý 3.1.1). Kết quả này đã được công bố trong bài báo [9]. Trước tiên, chúng ta giới thiệu kết quả của K. T. Kim và S. Krantz và chỉ ra lỗ hổng trong chứng minh của họ. Sau đó, chúng tôi đưa ra một số bổ đề. Các bổ đề này cho phép hoàn thành chứng minh kết quả chính của chương này.

3.1 Một số kết quả xung quanh giả thuyết Greene-Krantz

Năm 1993 R. Greene và S. G. Krantz [17] đưa ra giả thuyết sau.

Giả thuyết Greene-Krantz. *Nếu nhóm tự đẳng cấu $Aut(\Omega)$ của miền bị chặn, nhẵn và giả lồi $\Omega \Subset \mathbb{C}^n$ không compact thì điểm tụ quỹ đạo bất kì đều có kiểu hữu hạn.*

Các kết quả chính xung quanh giả thuyết này thể hiện trong các công trình của R. Greene và S. G. Krantz [17], K. T. Kim [22], K. T. Kim và S. G. Krantz [23],[24], H. B. Kang [21], M. Landucci [27], J. Byun và H. Gaussier [10].

Gọi $P_\infty(\partial\Omega)$ là tập tất cả các điểm biên $\partial\Omega$ có kiểu vô hạn. Trong [27], M. Landucci đã chứng minh rằng nếu $P_\infty(\partial\Omega)$ là một đoạn đóng trên biên của miền trong $\mathbb{C}^2$ thì nhóm tự đẳng cấu của Ω là compact. Năm 2005, J. Byun và H. Gaussier [10] đã chứng minh được rằng không tồn tại điểm tụ quỹ đạo parabolic trên biên $\partial\Omega$ nếu tập $P_\infty(\partial\Omega)$ là một đoạn đóng và hoành với không gian tiếp xúc phức tại một điểm biên nào đó. Đối với trường hợp tập $P_\infty(\partial\Omega)$ là một đường cong đóng thì có tồn tại điểm tụ quỹ đạo parabolic hay không? Năm 1994 H. B. Kang [21] đã chỉ ra rằng nhóm tự đẳng cấu của miền bị chặn $\Omega = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + P(w) < 1\}$ là compact, trong đó $P(w)$ là hàm nhẵn và triệt tiêu cấp vô hạn tại điểm $w = 0$. Năm 2006 K. T. Kim và S. G. Kantz [24] xét miền giả lồi $\Omega \subset \mathbb{C}^2$, trong đó hàm xác định của miền Ω có dạng $\rho(z) = \operatorname{Re} z_1 + \psi(z_2, \operatorname{Im} z_1)$ trong một lân cận của điểm kiểu vô hạn $(0,0)$. Họ đã chỉ ra rằng điểm $(0,0)$ không là điểm tụ quỹ đạo parabolic (xem [24, Định lý 4.1]). Họ chứng minh dựa vào điều kiện ψ triệt tiêu cấp vô hạn tại $(0,0)$. Tuy nhiên, điều này chưa chắc đúng. Chẳng hạn hàm $\psi(z_2, \operatorname{Im} z_1) = e^{-1/|z_2|^2} + |z_2|^4.|\operatorname{Im} z_1|^2$ chỉ triệt tiêu đến cấp hai theo z_1.

Mục đích của chương này là trình bày chứng minh định lý sau. Định lý này chỉ ra rằng: nếu $P_\infty(\partial\Omega)$ là đường cong đóng thì không tồn tại điểm tụ quỹ đạo parabolic.

Định lý 3.1.1. *Giả sử* $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ *là một miền bị chặn giả lồi trong* $\mathbb{C}^2$ *và* $0 \in \partial\Omega$. *Giả sử rằng*

(1) $\partial\Omega$ *là nhẵn và thỏa mãn điều kiện Bell (R),*

(2) Tồn tại lân cận U *của điểm* $0 \in \partial\Omega$ *sao cho*

$$\Omega \cap U = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : \rho = \operatorname{Re} z_1 + P(z_2) + Q(z_2, \operatorname{Im} z_1) < 0\},$$

trong đó P *và* Q *thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) P *là nhẵn, điều hòa dưới, dương thực sự tại tất cả các điểm trong lân cận nào đó của gốc tọa độ trừ gốc tọa độ và hàm này triệt tiêu mọi cấp tại* $(0, 0)$, *tức là:* $\lim\limits_{z_2 \to 0} \dfrac{P(z_2)}{|z_2|^N} = 0$, $\forall N \geq 0$,

(ii) $Q(z_2, \operatorname{Im} z_1)$ *là hàm nhẵn và có thể viết dưới dạng* $Q(z_2, \operatorname{Im} z_1) = |z_2|^4 |\operatorname{Im} z_1|^2 R(z_2, \operatorname{Im} z_1)$ *với hàm nhẵn* $R(z_2, \operatorname{Im} z_1)$ *nào đó.*

Khi đó, $(0, 0)$ *không phải là điểm tụ quỹ đạo parabolic.*

Nhận xét 3.1.2. *i) Bằng tính toán cụ thể ta có thể chỉ ra rằng điểm* $(0, 0)$ *có kiểu vô hạn, các điểm* $(it, 0)$ *với* t *đủ nhỏ có kiểu lớn hơn hoặc bằng* 4 *và các điểm còn lại trong một lân cận đủ nhỏ của gốc tọa độ đều giả lồi chặt (có kiểu bằng* 2*).*

ii) Phản ví dụ đã được đưa ra ở trên thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.1.1.

iii) Vấn đề mà K. T. Kim và S. Krantz đặt ra (Định lý 5) hiện nay vẫn còn là một câu hỏi mở và là một phần của giả thuyết Greene-Krantz. Định lý 3.1.1 là một trường hợp riêng của Định lý 5.

3.2 Sự tồn tại điểm tụ quỹ đạo parabolic

Giả Ω là một miền thỏa mãn các điều kiện của Định lý 3.1.1. Trong mục này, chúng ta sẽ chỉ ra rằng không tồn tại điểm tụ quỹ đạo parabolic với kiểu vô hạn. Trước tiên, chúng ta cần những bổ đề sau.

Bổ đề 3.2.1. *Không tồn tại các số* $a, b \in \mathbb{C}$ *với* $\operatorname{Re} a \neq 0$ *và* $b \neq 0$ *sao cho*

$$\operatorname{Re}[aP(z) + bz^k P'(z)] = \gamma(z)P(z), \tag{3.1}$$

với số nguyên $k \in \mathbb{N},\ k > 1$ *nào đó và với mọi* $|z| < \epsilon_0$*, trong đó* $\epsilon_0 > 0$ *là số thực đủ nhỏ,* $\gamma(z)$ *là hàm nhẵn và* $\gamma(z) \to 0$ *khi* $z \to 0$.

Chứng minh. Giả sử phản chứng rằng $a, b \in \mathbb{C}$ với $\operatorname{Re} a \neq 0$ và $b \neq 0$ sao cho

$$\operatorname{Re}[aP(z) + bz^k P'(z)] = \gamma(z)P(z), \tag{3.2}$$

với số nguyên $k \in \mathbb{N},\ k > 1$ nào đó và với mọi $|z| < \epsilon_0$, trong đó $\epsilon_0 > 0$ là số thực đủ nhỏ, $\gamma(z)$ là hàm nhẵn và $\gamma(z) \to 0$ khi $z \to 0$. Khi đó phương trình này tương đương với

$$1 + \operatorname{Re}[\frac{b}{\operatorname{Re} a} z^k \frac{P'(z)}{P(z)}] = \gamma_1(z), \quad \forall\, 0 < |z| < \epsilon_0, \tag{3.3}$$

trong đó $\gamma_1(z) = \gamma(z)/\operatorname{Re} a$. Đặt $F(z) = \ln P(z)$ và viết $z = re^{i\varphi}, \dfrac{b}{2\operatorname{Re} a} = \dfrac{1}{R} e^{i\psi}$. Khi đó, theo (3.3), ta có:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z)\cos(k\varphi + \psi) + \frac{\partial F}{\partial y}(z)\sin(k\varphi + \psi) = -\frac{R}{r^k} + \frac{R}{r^k}\gamma_1(z).$$

Đặt $\varphi_0 = \dfrac{2\pi - \psi}{k-1}$ và $g(r) := F(re^{i\varphi_0})$. Khi đó, ta dễ dàng thấy rằng:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(re^{i\varphi_0})\cos(\varphi_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(re^{i\varphi_0})\sin(\varphi_0) = -\frac{R}{r^k} + \frac{R}{r^k}\gamma_1(re^{i\varphi_0})$$

và

$$g'(r) = -\frac{R}{r^k} + \frac{R}{r^k}\gamma_1(re^{i\varphi_0}).$$

Đặt $h(r) := g(r) + \dfrac{R}{1-k}\dfrac{1}{r^k - 1}$. Khi đó

$$h'(r) = \frac{R}{r^k}\gamma_1(re^{i\varphi_0}).$$

Ta có thể giả sử rằng tồn tại r_0 đủ nhỏ sao cho $|h'(r)| \leq \dfrac{R}{2r^k}$, với mọi $0 < r \leq r_0$. Vì thế, ta có ước lượng sau

$$\begin{aligned}|h(r)| &\leq |h(r_0)| + \Big|\int_{r_0}^{r} |h'(r)|dr\Big| \\ &\leq |h(r_0)| + \frac{R}{2}\Big|\int_{r_0}^{r} r^{-k}dr\Big| \\ &\leq |h(r_0)| - \frac{R}{2(k-1)}r_0^{1-k} + \frac{R}{2(k-1)}r^{1-k}.\end{aligned}$$

Vì vậy,

$$g(r) \geq \frac{R}{k-1}r^{1-k} - |h(r_0)| + \frac{R}{2(k-1)}r_0^{1-k} - \frac{R}{2(k-1)}r^{1-k}.$$

Từ đó, $\lim\limits_{r\to 0^+} g(r) = +\infty$. Có nghĩa là $P(re^{i\varphi_0}) \not\to 0$ khi $r \to 0^+$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết rằng hàm $P(w)$ triệt tiêu tại $w = 0$. □

Bổ đề 3.2.2. *Không tồn tại các số $a, b \in \mathbb{C}$ với $\operatorname{Re} a \neq 0$ và $b \neq 0$ sao cho*

$$\operatorname{Re}[aP^{n+1}(z) + bz^kP'(z)] = \gamma(z)P(z), \tag{3.4}$$

với số nguyên $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ nào đó và với mọi $|z| < \epsilon_0$, trong đó $\epsilon_0 > 0$ là số thực đủ nhỏ, $\gamma(z)$ là hàm nhẵn và $\gamma(z) \to 0$ khi $z \to 0$.

Chứng minh. Giả sử phản chứng rằng $a, b \in \mathbb{C}$ với $\operatorname{Re} a \neq 0$ và $b \neq 0$ sao cho

$$\operatorname{Re}[aP^{n+1}(z) + bz^kP'(z)] = \gamma(z)P^{n+1}(z), \tag{3.5}$$

với số nguyên $k \in \mathbb{N},\ k > 1$ nào đó và với mọi $|z| < \epsilon_0$, trong đó $\epsilon_0 > 0$ là số thực đủ nhỏ, $\gamma(z)$ là hàm nhẵn và $\gamma(z) \to 0$ khi $z \to 0$. Khi đó phương trình này tương đương với

$$1 + \mathrm{Re}[\frac{b}{\mathrm{Re}\, a} z^k \frac{P'(z)}{P^{n+1}(z)}] = \gamma_1(z), \quad \forall\ 0 < |z| < \epsilon_0, \tag{3.6}$$

trong đó $\gamma_1(z) = \gamma(z)/\mathrm{Re}\, a$. Đặt $F(z) = \dfrac{1}{P^n(z)}$ và viết $z = re^{i\varphi}, \dfrac{-b}{2n\,\mathrm{Re}\, a} = \dfrac{1}{R}e^{i\psi}$. Theo (3.6), ta có

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z)\cos(k\varphi + \psi) + \frac{\partial F}{\partial y}(z)\sin(k\varphi + \psi) = -\frac{R}{r^k} + \frac{R}{r^k}\gamma_1(z).$$

Đặt $\varphi_0 = \dfrac{2\pi - \psi}{k-1}$ và $g(r) := F(re^{i\varphi_0})$. Khi đó

$$\frac{\partial F}{\partial x}(re^{i\varphi_0})\cos(\varphi_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(re^{i\varphi_0})\sin(\varphi_0) = -\frac{R}{r^k} + \frac{R}{r^k}\gamma_1(re^{i\varphi_0}).$$

và

$$g'(r) = -\frac{R}{r^k} + \frac{R}{r^k}\gamma_1(re^{i\varphi_0}).$$

Đặt $h(r) := g(r) + \dfrac{R}{1-k}\dfrac{1}{r^k - 1}$. Khi đó, ta có thể giả sử rằng tồn tại r_0 đủ nhỏ sao cho

$$|h'(r)| \leq \frac{3R}{2r^k},$$

với mọi $0 < r \leq r_0$. Vì thế, ta có ước lượng sau

$$\begin{aligned}
|g(r)| &\leq |g(r_0)| + \Big|\int_{r_0}^{r} |g'(r)|dr\Big| \\
&\leq |g(r_0)| + \frac{3R}{2}\Big|\int_{r_0}^{r} r^{-k}dr\Big| \\
&\leq |g(r_0)| - \frac{3R}{2(k-1)}r_0^{1-k} + \frac{3R}{2(k-1)}r^{1-k}.
\end{aligned}$$

Do vậy ta nhận được

$$\frac{1}{P^n(re^{i\varphi_0})} \lesssim \frac{1}{r^{1-k}},$$
$$P(re^{i\varphi_0}) \gtrsim r^{\frac{k-1}{n}}.$$

Vì thế ta suy ra rằng $P(re^{i\varphi_0})$ không triệt tiêu đến cấp vô hạn tại gốc. Điều này trái với giả thiết. $\square$

Bổ đề 3.2.3. *Không tồn tại các số $a, b \in \mathbb{C}$ với $\operatorname{Re} a \neq 0$ và $b \neq 0$ sao cho*

$$\operatorname{Re}[aP^{n+1}(z) + bzP'(z)] = \gamma(z)P^{n+1}(z), \tag{3.7}$$

với số nguyên $n \geq 0$ nào đó và với mọi $|z| < \epsilon_0$ với $\epsilon_0 > 0$ đủ bé, trong đó $\gamma(z) \to 0$ khi $z \to 0$.

Chứng minh. Giả sử rằng tồn tại t $a, b \in \mathbb{C}$ với $\operatorname{Re} a \neq 0$ và $b \neq 0$ sao cho (3.7) đúng. Trước tiên, ta xét trường hợp $n = 0$. Khi đó, phương trình (3.7) tương đương với

$$\operatorname{Re}[\frac{b}{\operatorname{Re} a} z \frac{\partial}{\partial z} \ln P(z)] = -1 + \gamma_1(z), \tag{3.8}$$

trong đó $\gamma_1(z) := \gamma(z)/\operatorname{Re} a$. Đặt $u(z) := \ln P(z)$ và viết $\dfrac{b}{2\operatorname{Re} a} = \alpha + i\beta,\ z = x + iy$. Khi đó, theo (3.8), ta có phương trình đạo hàm riêng bậc nhất sau

$$(\alpha x - \beta y)\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) + (\beta x + \alpha y)\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -1 + \gamma_1(x,y). \tag{3.9}$$

Để giải phương trình đạo hàm riêng này, ta cần giải hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x - \beta y \\ y'(t) = \beta x + \alpha y,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bằng tính toán đơn giản ta nhận được nghiệm

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ y(t) = -c_2 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_1 e^{\alpha t}\sin(\beta t,\ t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.10}$$

trong đó c_1, c_2 là các hằng số thực. Kí hiệu hàm $g(t) := u(x(t), y(t))$. Khi đó, $g'(t) = -1 + \gamma_1(x(t), y(t))$. Vì thế, $g(t) = -t + \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(x(s), y(s))ds + t_0 + g(t_0)$. Từ (3.10), ta nhận được

$$x^2 + y^2 = (c_1^2 + c_2^2)e^{2\alpha t},\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Xét các trường hợp sau.

TH 1. $\alpha = 0$. Trong trường hợp này, ta lấy $c_1 = r > 0,\ c_2 = 0$, trong đó r đủ bé. Khi đó, trên từng đường tròn $\{x(t) = r\cos(t),\ y(t) = r\sin(t),\ t \in [0, 2\pi]\}$, ta có $g(t) = -t + \int\limits_{0}^{t} \gamma_1(x(s), y(s))ds + u(r, 0)$. Lấy r đủ bé, ta có thể giả sử rằng $|\gamma_1(x(s), y(s))| \le 1/2$ với mọi $s \in [0, 2\pi]$. Dễ thấy $|g(2\pi) - g(0)| \ge \pi$. Điều này không thể xảy ra vì $g(2\pi) = g(0) = u(r, 0)$.

TH 2. $\alpha > 0$. Theo (3.11), ta có $(x(t), y(t)) \to 0$ khi $t \to -\infty$. Khi đó, $u(x(t), y(t)) \to +\infty$ khi $t \to -\infty$. Điều này trái với giả thiết.

TH 3. $\alpha < 0$. Theo (3.11), ta có $(x(t), y(t)) \to 0$ khi $t \to +\infty$ và $t = \dfrac{1}{2\alpha}\ln\dfrac{x^2 + y^2}{c_1^2 + c_2^2}$. Lấy $t_0 > 0$ đủ lớn, ta có thể giả sử rằng

$|\gamma_1(x(s), y(s))| \le 1$ với mọi $s \ge t_0$. Khi đó, với mọi $t \ge t_0$, ta có

$$
\begin{aligned}
g(t) &\ge -(t-t_0) - |\int_{t_0}^{t} \gamma_1(x(s), y(s))ds| - |g(t_0)| \\
&\ge -(t-t_0) - |\int_{t_0}^{t} |\gamma_1(x(s), y(s))|ds| - |g(t_0)| \\
&\ge -(t-t_0) - |t-t_0| - |g(t_0)| \\
&\ge -2(t-t_0) - |g(t_0)|.
\end{aligned}
$$

Vì vậy, với mọi $t \ge t_0$, ta nhận được

$$
\begin{aligned}
P(z(t)) &\gtrsim e^{-2t} \\
&\gtrsim |z(t)|^{-1/\alpha},
\end{aligned}
$$

trong đó $z(t) := x(t) + iy(t)$. Điều này không thể được vì P triệt tiêu cấp vô hạn tại 0.

Bây giờ ta xét trường hợp $n > 0$. Khi đó phương trình (3.7) tương đương với

$$
\operatorname{Re}[\frac{b}{-n \operatorname{Re} a} z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{P^n(z)}] = -1 + \gamma_1(z), \tag{3.12}
$$

trong đó $\gamma_1(z) := \gamma(z)/\operatorname{Re} a$. Đặt $u(z) := \dfrac{1}{P^n(z)}$ và viết $\dfrac{b}{-2n \operatorname{Re} a} = \alpha + i\beta,\ z = x + iy$. Khi đó, theo (3.12), ta có phương trình đạo hàm riêng cấp một sau

$$
(\alpha x - \beta y)\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) + (\beta x + \alpha y)\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = -1 + \gamma_1(x,y). \tag{3.13}
$$

Để giải phương trình đạo hàm riêng này, ta cần giải hệ phương trình vi phân sau

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x - \beta y \\ y'(t) = \beta x + \alpha y,\, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bằng tính toán đơn giản ta nhận được nghiệm

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ y(t) = -c_2 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t),\ t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.14}$$

trong đó c_1, c_2 là các hằng số thực. Đặt $g(t) := u(x(t), y(t))$. Khi đó $g'(t) = -1 + \gamma_1(x(t), y(t))$. Vì vậy, $g(t) = -t + \int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(x(s), y(s))ds + t_0 + g(t_0)$. Từ (3.14), ta có

$$x^2 + y^2 = (c_1^2 + c_2^2)e^{2\alpha t},\ t \in \mathbb{R}. \tag{3.15}$$

Ta xét các trường hợp sau.

TH 1. $\alpha = 0$. Bằng lập luận tương tự như trong **TH1** ở trên ta kết luận rằng trường hợp này cũng không xảy ra..

TH 2. $\alpha < 0$. Theo (3.15), ta có $(x(t), y(t)) \to 0$ khi $t \to +\infty$. Khi đó, $u(x(t), y(t)) \to -\infty$ khi $t \to -\infty$. Trái với giả thiết.

TH 3. $\alpha > 0$. Theo (3.15), ta có $(x(t), y(t)) \to 0$ khi $t \to -\infty$ và $t = \dfrac{1}{2\alpha} \ln \dfrac{x^2 + y^2}{c_1^2 + c_2^2}$. Lấy $t_0 < 0$ sao cho $|t_0|$ đủ lớn, ta có thể giả sử rằng $|\gamma_1(x(s), y(s))| \leq 1$ với mọi $s \leq t_0$. Khi đó, với mọi $t \leq t_0$, ta có ước lượng sau

$$
\begin{aligned}
g(t) &\le -(t-t_0) + \Big|\int\limits_{t_0}^{t} \gamma_1(x(s),y(s))ds\Big| + |g(t_0)| \\
&\le -(t-t_0) + \Big|\int\limits_{t_0}^{t} |\gamma_1(x(s),y(s))|ds\Big| + |g(t_0)| \\
&\le -(t-t_0) + |t-t_0| + |g(t_0)| \\
&\le -2(t-t_0) + |g(t_0)|.
\end{aligned}
$$

Vì vậy, với mọi $t \le t_0$, ta có:

$$
\begin{aligned}
P^n(z(t)) &\gtrsim \frac{1}{-2t} \\
&\gtrsim \frac{-1}{\ln|z(t)|},
\end{aligned}
$$

trong đó $z(t) := x(t) + iy(t)$. Điều này suy ra rằng

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{P(z(t))}{|z(t)|} = +\infty.$$

Điều này mâu thẫn với giả thiết P triệt tiêu cấp vô hạn tại 0. $\square$

Gọi $F = (f,g) \in Aut(\Omega)$ là tự đẳng cấu sao cho $F(0,0) = (0,0)$. Do điều kiện Bell (R) của $\partial\Omega$, ánh xạ F có thể thác triển thành hàm nhẵn xác định cho đến tận biên của miền Ω. Gọi U là một lân cận của $(0,0)$. Khi đó, tồn tại một lân cận V của $(0,0)$ sao cho

$$F(\overline{\Omega} \cap V) \subset \overline{\Omega} \cap U. \tag{3.16}$$

Bổ đề sau tương tự như [27, Bổ đề 2.5].

Bổ đề 3.2.4. *Giả sử $F = (f,g) \in Aut(\Omega)$. Gọi U, V là hai lân cận của $(0,0)$ sao cho (3.16) đúng. Khi đó, với mọi $(z_1,z_2) \in V$, ta có* *(i)* $g(z_1, 0) = 0$.

(ii) $f(z_1, z_2) = f(z_2)$

Chứng minh. a) Gọi U, V là hai lân cận của $(0, 0)$ sao cho (3.16) đúng. Gọi γ là tập tất cả các điểm $(it, 0) \in \partial\Omega \cap U$. Do điều kiện Bell (R) nên hàm F có thể thác triển thành hàm nhẵn trên $\overline{\Omega}$. Nó xác định một C-R tự đẳng cấu trên $\partial\Omega$. Bởi vì kiểu của biên theo nghĩa của D'Angelo là C-R bất biến nên ta có $F(\gamma \cap V) \subset \gamma$. Do đó, $g(it, 0) = 0$ và $\operatorname{Re} f(it, 0) = 0$. Kí hiệu $\mathcal{H} = \{z_1 \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z_1 < 0\}$ là nửa mặt phẳng trái của mặt phẳng phức. Vì $h(z_1) := g(z_1, 0) \in Hol(\mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{H}})$ nên $g(z_1, 0) \equiv 0$.

b) Theo Bổ đề Hopf, ta dễ dàng thấy hàm $(\rho \circ F)(z_1, z_2)$ cũng là hàm xác định biên xác định trên V. Đặc biệt, tồn tại hàm nhẵn $k(z_1, z_2) > 0$ sao cho với mọi $(z_1, z_2) \in V$, ta có

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re} z_1 + P(z_2) + Q(z_2, \operatorname{Im} z_1)\\ &\quad = k(z_1, z_2)\big[\operatorname{Re} f(z_1, z_2) + P(g(z_1, z_2)) + Q(g(z_1, z_2), \operatorname{Im} f(z_1, z_2)\big].\end{aligned} \tag{3.17}$$

Ta có khẳng định sau: với bất kì $N \geq 1$ và điểm $(it, 0) \in \gamma \cap V$, ta có

$$\frac{\partial^N}{\partial z_2^N}\Big(\operatorname{Re} f(z_1, z_2) + P(g(z_1, z_2)) + Q(g(z_1, z_2), \operatorname{Im} f(z_1, z_2))\Big)\Big|_{(it,0)} = 0. \tag{3.18}$$

Thật vậy, với bất kì điểm $(it, 0) \in \gamma \cap V$ ta có

$$\operatorname{Re} f(it, 0) + P(g(it, 0)) + Q(g(it, 0), \operatorname{Im} f(it, 0)) = 0.$$

Từ (3.17), ta suy ra rằng

$$\frac{\partial}{\partial z_2}\Big(\operatorname{Re} f(z_1, z_2) + P(g(z_1, z_2)) + Q(g(z_1, z_2), \operatorname{Im} f(z_1, z_2))\Big)\Big|_{(it,0)} = 0.$$

Do đó (3.18) đúng cho trường hợp $N = 1$. Lấy đạo hàm hai vế của (3.17) N lần theo biến z_2 và sử dụng phương pháp qui nạp ta suy ra rằng (3.18) đúng với bất kì $N > 1$. Từ a), (3.18) và tính chất $(2.i)$ ta có

$$\frac{\partial^N}{\partial z_2^N} f(it, 0) = 0, \tag{3.19}$$

với mọi $N \geq 1$ và $(it, 0) \in \partial\Omega \cap V$. Lập luận tương tự như ở (a), ta thấy rằng (3.19) suy ra (b). $\square$

Chứng minh Định lý 3.1.1. Giả sử rằng $(0, 0) \in \partial\Omega$ là điểm tụ quỹ đạo parabolic tương ứng với nhóm con 1-tham số $\{F_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}} \subset Aut(\Omega)$. Gọi H là trường véctơ sinh ra nhóm $\{F_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$, tức là:

$$H(z) = \frac{d}{d\theta} F_\theta(z)\Big|_{\theta=0}.$$

Do Ω thỏa mãn điều kiện Bell (R) nên mỗi tự đẳng cấu của Ω có thể thác triển thành hàm nhẵn trên $\overline{\Omega}$. Vì vậy, $H \in Hol(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Hơn nữa, vì $F_\theta(\partial\Omega) \subset \partial\Omega$ nên $H(z) \in T_z(\partial\Omega)$ với mọi $z \in \partial\Omega$, tức là:

$$(\operatorname{Re} H)\rho(\zeta) = 0, \ \forall\, \zeta \in \partial\Omega. \tag{3.20}$$

Trường véctơ $H \in Hol(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ thỏa mãn (3.20) được gọi là trường véctơ chỉnh hình tiếp xúc với miền Ω. Vì $F_\theta(0, 0) = (0, 0)$ nên từ Bổ đề 3.2.4 ta có $F_\theta(z_1, z_2) = (f_\theta(z_1), z_2 g_\theta(z_1, z_2))$, trong đó f_θ và g_θ chỉnh hình trên $U \cap \Omega$, ở đây U là một lân cận của $(0, 0)$. Vì vậy, trường véctơ H có dạng sau

$$H(z_1, z_2) = h_1(z_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 h_2(z_1, z_2)\frac{\partial}{\partial z_2},$$

trong đó h_1 và h_2 chỉnh hình trên $\Omega \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Hơn nữa, h_1 triệt tiêu tại gốc tọa độ. Bằng các tính toán đơn giản ta nhận được

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_1}\rho(z_1, z_2) &= \frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial z_1}Q(z_2, \operatorname{Im} z_1),\\ \frac{\partial}{\partial z_2}\rho(z_1, z_2) &= P'(z_2) + \frac{\partial}{\partial z_2}Q(z_2, \operatorname{Im} z_1).\end{aligned}$$

Vì H là trường véctơ tiếp xúc với $\partial\Omega$ nên ta có

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\Big[&(\frac{1}{2} + \frac{\partial}{\partial z_1}Q(z_2, \operatorname{Im} z_1))h_1(z_1)+\\ &+ (P'(z_2) + \frac{\partial}{\partial z_2}Q(z_2, \operatorname{Im} z_1))z_2 h_2(z_1, z_2)\Big] = 0,\end{aligned} \tag{3.21}$$

với mọi $(z_1, z_2) \in \partial\Omega$. Với bất kì $(it, 0) \in \partial\Omega \cap U$, ta có

$$\operatorname{Re} h_1(it) = 0. \tag{3.22}$$

Do $h_1 \in Hol(\mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{H}})$, trong đó $\mathcal{H}$ là nửa mặt phẳng trái, nên theo nguyên lý phản xạ Schwarz hàm h_1 có thể thác triển thành hàm chỉnh hình trong một lân cận của điểm $z_1 = 0$ trong mặt phẳng phức. Từ (3.21), ta có

$$\operatorname{Re}\Big[\frac{1}{2}h_1(-P(z_2)) + z_2 P'(z_2)h_2(-P(z_2), z_2)\Big] = 0 \tag{3.23}$$

với bất kì z_2 sao cho $(-P(z_2), z_2) \in \partial\Omega \cap U$. Khai triển h_1 và h_2 thành chuỗi Taylor trong lân cận của gốc tọa độ, ta nhận được $h_1(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ và $h_2(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z_1) z_2^k$, trong đó $a_n \in \mathbb{C}$, $b_k \in Hol(\mathcal{H}) \cap \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathcal{H}})$ với mọi $n, k \in \mathbb{N}$. Chú ý rằng $a_0 = 0$ vì $h_1(0) = 0$. Nếu tồn tại số tự nhiên $n \geq 1$ sao cho $\operatorname{Re} a_n \neq 0$ thì hạng tử lớn nhất trong $\operatorname{Re}[\frac{1}{2}h_1(-P(z_2))]$ có dạng $\operatorname{Re} a_n P^n(z_2)$. Do đó, tồn tại ít nhất một số nguyên $k \in \mathbb{N}$ sao cho hoặc $b_k(0) \neq 0$ hoặc $b_k(z_1)$ triệt tiêu cấp hữu hạn tại $z_1 = 0$. Khi đó, hạng tử lớn nhất trong $\operatorname{Re}\left[z_2P'(z_2)h_2(-P(z_2),z_2)\right]$ phải có dạng $\operatorname{Re}\left[bz_2^kP'(z_2)P^l(z_2)\right]$, trong đó $b\in\mathbb{C}^*$, $l\in\mathbb{N}$. Theo (3.23), tồn tại $\epsilon_0>0$ sao cho

$$\operatorname{Re}\left[a_nP^{n-l}(z_2)+bz_2^kP'(z_2)\right]=o(P^{n-l}(z_2)), \tag{3.24}$$

với mọi $|z_2|<\epsilon_0$. Dễ thấy rằng $n>l$. Vì thế theo Bổ đề 3.2.1, Bổ đề 3.2.2 và Bổ đề 3.2.3, ta có $\operatorname{Re}a_n=b=0$. Điều này mâu thuẫn. Vì vậy, $\operatorname{Re}a_n=0$ với mọi $n\geq 1$ và ta có thể viết $h_1(z_1)=i.\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_nz_1^n$, trong đó $\alpha_n\in\mathbb{R}$, $n=1,2,\cdots$. Đặt $u(z_1):=\operatorname{Re}h_1(z_1)$. Khi đó hàm u điều hòa trên nửa phẳng trái $\mathcal{H}$ và trơn cho đến biên $\partial\mathcal{H}$. Theo (3.22), ta có $u(it)=0$ với mọi số thực t đủ nhỏ. Hơn nữa, vì $h_1(z_1)=i\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_nz_1^n$ nên $u(-t)=0$ với mọi t đủ nhỏ. Vì thế, theo nguyên lý cực đại ta kết luận rằng $u(z_1)\equiv 0$. Hệ quả là $h_1(z_1)\equiv 0$ và do đó H trở thành trường véctơ phẳng. Điều này không thể xảy ra vì $\partial\Omega$ không phẳng trong một lân cận đủ nhỏ của gốc tọa độ. $\square$

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Kết luận

Các kết quả chính của luận án:

- Chứng minh định lý đặc trưng cho miền không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact và hạng của dạng Levi tại điểm tụ quĩ đạo $\geq n-2$.
- Chứng minh định lý đặc trưng cho miền lồi tuyến tính không bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ với nhóm tự đẳng cấu không compact.
- Chứng minh giả thuyết Greene-Krantz cho một lớp miền bị chặn trong $\mathbb{C}^n$.

Kiến nghị về những nghiên cứu tiếp theo

Mặc dù luận án chỉ nghiên cứu các miền trong $\mathbb{C}^n$ nhưng hai kết quả chính (Định lý 1.3.2 và 2.3.2) có thể mở rộng dễ dàng lên các miền bất kì trong đa tạp phức. Hướng nghiên cứu còn có các câu hỏi mở sau đây:

1. Phải chăng các định lý đặc trưng cho các miền trong $\mathbb{C}^n$ vẫn đúng mà không cần giả thiết về hạng của dạng Levi cũng như điều kiện lồi tuyến tính?

2. Phải chăng mỗi miền có nhóm tự đẳng cấu không compact với biên nhẵn, kiểu hữu hạn và biên lồi tuyến tính song chỉnh hình với một mô hình thuần nhất, tức là đa thức $P(z')$ trong Định lý 2.3.2 là thuần nhất?

3. Phải chăng Định lý Kim-Krantz vẫn còn đúng?

Tuy nhiên, vì thời gian hạn hẹp nên chúng tôi cũng chưa trả lời được các câu hỏi trên. Chúng tôi hy vọng rằng các câu hỏi này sớm được giải quyết.

Danh mục các công trình của tác giả liên quan đến luận án

[1] Ninh Van Thu (2009), *Characterization of linearly convex domains in* $\mathbb{C}^n$ *by their noncompact automorphism groups*, Vietnam Journal of Mathematics, 37(1), pp. 67-79.

[2] Do Duc Thai and Ninh Van Thu (2009), *Geometry of domains in* $\mathbb{C}^n$ *with noncompact automorphism groups*, Vietnam Journal of Mathematics, 37(2-3), pp. 1-12.

[3] Do Duc Thai and Ninh Van Thu (2009), *Characterization of domains in* $\mathbb{C}^n$ *by their noncompact automorphism groups*, Nagoya Mathematical Journal, 196, pp. 135-160.

[4] François Berteloot and Ninh Van Thu (2009), *Existence of parabolic boundary points of certain domains in* $\mathbb{C}^2$, http://arxiv.org/abs/0906.5125v1.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Anh

[1] Barth T. J. (1980), *Convex domains and Kobayashi hyperbolicity*, Proc. Amer. Math. Soc, 79, pp. 556-558.

[2] Bedford E. and Dadok J. (1987), *Bounded domains with prescribed group of automorphisms*, Comment. Math. Helv. 62 , no. 4, pp. 561–572.

[3] Bedford E. and Pinchuk S. (1989), *Domains in* $\mathbb{C}^2$ *with noncompact groups of automorphisms,* Math. USSR Sbornik 63, pp. 141-151.

[4] Bedford E. and Pinchuk S. (1991), *Domains in* $\mathbb{C}^{n+1}$ *with noncompact automorphism group,* J. Geom. Anal. , 1, pp. 165-191.

[5] Bedford E. and Pinchuk S. (1998), *Domains in* $\mathbb{C}^2$ *with noncompact automorphism groups,* Indiana Univ. Math. Journal 47, pp. 199-222.

[6] Bell S., *Local regularity of C.R. homeomorphisms,* Duke Math. J. 57(1988), 295-300.

[7] Bell S. (1987), *Compactness of families of holomorphic mappings up to the boundary* Lecture Notes in Math. Vol. 1268, Springer-Verlag, Berlin/New Jork, , pp. 29-42.

[8] Berteloot F. (1994), *Characterization of models in* $\mathbb{C}^2$ *by their automorphism groups,* Internat. J. Math. 5, pp. 619-634.

[9] François Berteloot and Ninh Van Thu (2009), *Existence of parabolic boundary points of certain domains in* $\mathbb{C}^2$, arxiv:0906.5125v1.

[10] Byun J. and Gaussier H. (2005), *On the compactness of the automorphism group of a domain*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1341, pp. 545-548.

[11] Catlin D. (1989), *Estimates of invariant metrics on pseudoconvex domains of dimension two*, Math. Z. 200, pp. 429-466.

[12] Cho S. (1992), *A lower bound on the Kobayashi metric near a point of finite type in* $\mathbb{C}^n$,J. Geom. Anal. 2-4, pp. 317-325.

[13] Cho S. (1994), *Boundary behavior of the Bergman kernal function on some pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$, Trans. of Amer. Math. Soc. 345, pp. 803-817.

[14] D'Angelo J. P. (1982), *Real hypersurfaces, orders of contact, and applications,* Ann. Math. 115, pp. 615-637.

[15] Duren P. (1983), *Univalent functions*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 259, Springer-Verlag.

[16] Gaussier H. (1997), *Characterization of convex domains with non-compact automorphism group* , Michigan Math. J. 44, pp. 375-388.

[17] Greene R. and Krantz S. (1987), *Biholomorphic self-maps of domains,* Lecture Notes in Math., 1276, pp. 136-207.

[18] Greene R. and Krantz S. G. (1993), *Techniques for studying automorphisms of weakly pseudoconvex domains,* Math. Notes, Vol 38, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, pp. 389-410.

[19] Gunning R. and Rossi H. (1965), *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.

[20] Isaev A. and Krantz S. G. (1999), *Domains with non-compact automorphism group : A survey,* Adv. Math. 146, pp. 1-38.

[21] Kang H. B. (1994), *Holomorphic automorphisms of certain class of domains of infinite type,* Tohoku Math. J. 46, pp. 345-422.

[22] Kim K. T. (1993), *On a boundary point repelling automorphism orbits,* J. Math. Anal. Appl. 179, pp. 463-482.

[23] Kim K. T. and Krantz S. G. (2001), *Convex scaling and domains with non-compact automorphism group,* Illinois J. Math. 45, pp. 1273-1299.

[24] Kim K. T. and Krantz S. G. (2003), *Some new results on domains in complex space with non-compact automorphism group,* J. Math. Anal. Appl. 281, pp. 417- 424.

[25] Kobayashi S. (1970), *Hyperbolic Manifolds and Holomorphic Mappings*, N. Y. Dekker.

[26] Kobayashi S. (1998), *Hyperbolic Complex Spaces,* v. 318 , Grund--lehrender mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag.

[27] Landucci M. (2004), *The automorphism group of domains with boundary points of infinite type,* Illinois J. Math. 48, pp. 33-40.

[28] McNeal J. D. (1992), *Convex domains of finite type* , J. Funct. Anal. 108, pp. 361-373.

[29] McNeal J. D. (1994), *Estimates on the Bergman kernels of convex domains*, Adv. in Math. 109, pp. 108-139.

[30] Narasimhan R. (1971), *Several Complex Variables,* Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press.

[31] Pinchuk S. (1991), *The scaling method and holomorphic mappings,* Proc. Symp. Pure Math. 52, Part 1, Amer. Math. Soc.

[32] Do Duc Thai and Tran Hue Minh (2004), *Generalizations of the theorems of Cartan and Greene- Krantz to complex manifolds,* Illinois Jour. of Math., 48, pp. 1367-1384.

[33] Do Duc Thai and Ninh Van Thu (2009), *Characterization of domains in $\mathbb{C}^n$ by their noncompact automorphism groups.* Nagoya Mathematical Journal, 196, pp. 135-160.

[34] Do Duc Thai and Ninh Van Thu (2009), *Geometry of domains in $\mathbb{C}^n$ with noncompact automorphism groups*, Vietnam Journal of Mathematics, 37(2-3) , pp. 1-12.

[35] Ninh Van Thu (2009), *Characterization of linearly convex domains in $\mathbb{C}^n$ by their noncompact automorphism groups*, Vietnam Journal of Mathematics, 37 (1), pp. 67-79.

[36] Ninh Van Thu (2009), *A remark on the Kim's theorem*, Acta Mathematica Vietnamica, 34(2), pp. 285-297.

[37] Saerens R. and Zame W. R. (1987), *The isometry groups of manifolds and the automorphism groups of domains*, Trans. Amer. Math. Soc. 301, no. 1, pp. 413–429.

[38] Winkelmann J. (2004), *Realizing connected Lie groups as automorphism groups of complex manifolds.* Comment. Math. Helv. 79 , no. 2, pp. 285–299.

[39] Wong B. (1977), *Characterization of the ball in $\mathbb{C}^n$ by its automorphism group*, Invent. Math. 41, pp. 253-257.

Tiếng Pháp

[40] Berteloot F. (1995), *Attraction de disques analytiques et continuité Holdérienne d'applications holomorphes propres* , Topics in Compl. Anal., Banach Center Publ., pp. 91-98.

[41] Berteloot F. (2003), *Principle de Bloch et Estimations de la Metrique de Kobayashi des Domains de* $\mathbb{C}^2$, J. Geom. Anal. Math. 1, pp. 29-37.

[42] Rosay J. P. (1979), *Sur une caracterisation de la boule parmi les domainesde* $\mathbb{C}^n$ *par son groupe d'automorphismes*, Ann. Inst. Fourier 29 (4), pp. 91-97.

Tiếng Đức

[43] Conrad M. (2002), *Anisotrope optimale Pseudometriken für lineal konvexe Gebiete von endlichen typs (mit Anwendungen)*, Ph. D. thesis, Berg. Universiträt-GHS Wuppertal.