ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN
--------oOo--------

TRẦN NGỌC DANH

CẤU TRÚC CỦA V-THỨ TỰ VÀ ĐỊNH LÝ KIỂU KRUSKAL-KATONA

Chuyên ngành: ĐẠI SỐ VÀ LÝ THUYẾT SỐ
Mã số : 1.01.03

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:
1. GS.TS. DAVID E. DAYKIN
2. GS.TS. NGUYỄN HỮU ANH

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH NĂM 2001

LỜI CẢM ƠN

Trước tiên, tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy hướng dẫn, GSTS David E. Daykin, thuộc trường Đại học Reading, England, người thầy khả kính, dù xa xôi cách trở, nhưng bằng cách này cách khác đã tận tình hướng dẫn tôi từng bước trên con đường nghiên cứu toán học với tất cả niềm say mê. Những kết quả trong luận án này không thể có được nếu không có sự tận tâm của thầy.

Tôi cũng xin vô cùng biết ơn thầy đồng hướng dẫn, GSTS Nguyễn Hữu Anh, đã tận tình giúp đỡ tôi trong quá trình thực hiện luận án này.

Tôi không thể không nói lên lòng biết ơn sâu sắc đến GSTS Đặng Đình Áng, người thầy đã truyền đạt không chỉ cho tôi mà cho biết bao thế hệ những kiến thức toán học hết sức giá trị và niềm đam mê không hề biết mệt mỏi đối với Toán học.

Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy giới thiệu luận án đã đọc và cho nhiều ý kiến thiết thực.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám Hiệu, Phòng Sau Đại Học Và Hợp Tác Quốc Tế, Khoa Toán-Tin học của Trường Đại Học Khoa Học Tự Nhiên Tp Hồ chí Minh cùng các thầy cô và các bạn đồng nghiệp, đặc biệt là các đồng nghiệp trong Bộ môn Đại số, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi và giúp đỡ tôi rất nhiều trong quá trình thực hiện luận án này.

Tác giả luận án.

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi hoặc cùng với Giáo sư hướng dẫn. Các số liệu và các kết quả trong luận án này là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

Tác giả luận án

Trần ngọc Danh

Mục Lục

BẢNG KÝ HIỆU

$\mathbb{N}$	:	Tập hợp các số nguyên không âm
$B(n)$	:	Tập hợp các véctơ Bool n chiều
$V(n)$	:	Tập hợp các véctơ nguyên không âm n chiều
$\mathcal{B}$	:	Tập hợp tất cả các véctơ Bool
V	:	Tập hợp tất cả các véctơ nguyên không âm
$x \prec y$	:	y là trội trực tiếp của x
x^+	:	Trội trực tiếp của x
$r(x)$	:	Hạng của x
Δx	:	Bóng của x
$\|a\|$	:	Số phần tử của a
$a \cap b$	:	Phần giao của a và b
$a \cup b$	:	Phần hội của a và b
$a - b$	:	Phần hiệu của a và b
$a + b$	:	Phần hiệu đối xứng của a và b
$\binom{n}{k}$	:	Tổ hợp n chập k
$C(A)$	:	Phần nén của A
$C_i(A)$	:	Phần nén thứ i của A
PC	:	Part compressed: Bị nén từng phần
P_k	:	Mức thứ k của poset P
$IS_k(a)$	:	Tập hợp các $x \in P_k$ sao cho $x \leq a$
$\delta_j \mathbf{x}$	:	Véctơ có được sau khi xóa thành phần thứ j của $\mathbf{x}$
$\vee \mathbf{a}$	:	Số nguyên h sao cho $a_{h-1} > a_h,\ a_h \leq \cdots \leq a_n$
$\mathbf{a}^*$	:	Véctơ $\delta_h \mathbf{a}$ với $h = \vee \mathbf{a}$
$w\mathbf{a}$	:	Trọng lượng của $\mathbf{a}$ và bằng $a_1 + \cdots + a_n$
$\mu\mathbf{a}$	:	$\max\{a_i : 1 \leq i \leq n\}$
$\nu\mathbf{a}$	:	Số các i thỏa $a_i = \mu\mathbf{a}$
$\lambda\mathbf{a}$	:	$\min\{a_i : 1 \leq i \leq n\}$
$\mathbf{z}_n$	:	Véctơ zero n chiều
$\mathbf{g}_n$	:	Véctơ n chiều với tất cả các thành phần bằng 1
$A_{i:d}$	:	Tập hợp các véctơ của $A \subset V(n)$ có thành phần thứ i bằng d
Ad	:	Tập hợp các véctơ của có dạng $\mathbf{x}d$ với $\mathbf{x} \in A$
dA	:	Tập hợp các véctơ của có dạng $d\mathbf{x}$ với $\mathbf{x} \in A$
$B(n,k)$	:	Tập hợp các véctơ $\mathbf{x} \in B(n)$ với $w\mathbf{x} = k$
$\Delta' \mathbf{a}$	:	$\{\delta_j \mathbf{a} : 1 \leq j \leq n \text{ và } a_j = 0\}$
$\alpha(\mathbf{a},\mathbf{b})$	:	$\min\{j : a_j \neq b_j\}$
$\omega(\mathbf{a},\mathbf{b})$	:	$\max\{j : a_j \neq b_j\}$

Chương 1.

TỔNG QUAN VỀ K-POSET

1.1 Đôi nét lịch sử về K-poset

Cũng như trong định lý kiểu KK, trong thuật ngữ K-poset, chữ K gắn liền với 2 cái tên Kruskal và Katona, còn "poset" để chỉ một tập hợp có thứ tự bộ phận. Năm 1963, Kruskal công bố bài báo *"The number of simplices in a complex"* [24] nhưng chưa ai hiểu rõ ý nghĩa của nó. Năm 1966, Katona tìm lại kết quả trên nhưng chứng minh của ông [23] rất phức tạp và có sai sót. Từ đó cái tên định lý Kruskal-Katona hay định lý KK ra đời, và đã có nhiều chứng minh cho định lý này, trong đó có chứng minh của Daykin, D.E. (1974), Hilton (1979) và Frankl(1984). Định lý KK đã trở thành một định lý cơ bản của Combinatorics và từ định lý này có thể suy ra một số các định lý khác như Định lý EKR, Định lý Kleitman...Những sách giáo khoa chuyên ngành thường dành riêng một chương cho định lý KK như trong [9] và [13]. Vì vậy thật dễ hiểu khi các nhà toán học trong ngành thường quan tâm đến việc tìm kiếm những kết quả tương tự.

Năm 1969, trong bài báo *"A generalization of a combinatorial theorem of Macaulay"*, Clements va Linström đã thành công trong việc mở rộng định lý KK cho đa tập hợp [14] (cái tên Macaulay liên hệ đến một ví dụ mà Macaulay đã tìm ra năm 1927). Một cách tự nhiên, các nhà toán học đã nghĩ đến việc chứng minh định lý Kruskal-Katona cho các poset khác như poset các véctơ Bool. Năm 1984, với thuật ngữ K-poset, Daykin, D.E. đã giới thiệu tổng quát về các bài toán kiểu KK [17], trong đó Strehl và Winkelmann đã đưa ra một thứ tự tuyến tính trên poset các véctơ Bool và véctơ nguyên không âm và giả định rằng với thứ tự tuyến tính ấy, định lý kiểu KK cũng đúng.

Năm 1994, chúng tôi đã chứng minh định lý kiểu KK cho các véctơ Bool và gửi đến Journal of London Math. Soc. Nhưng nột người phản biện đã báo cho chúng tôi biết là bài toán đã được giải quyết năm

1992 bởi Bezrukov và Gronau trong bài báo *"A Kruskal-Katona type theorem"* [12], đồng thời gửi cho chúng tôi bản sao bài báo này. Sau một thời gian nghiên cứu, chúng tôi phát hiện ra rằng chứng minh của Bezrukov và Gronau là sai, không thể sửa chữa được và Math. Reviews đã có phụ lục đính chính bằng phản ví dụ của chúng tôi (Math. Reviews, 1995 m, Errata and Addenda to earlier issues, p.7148). Ngay sau đó các công trình của chúng tôi đã được nhận đăng (1994). Sau này, Ahlswede và Cai đã đưa ra một chứng minh khác [10] mà Daykin đã nhanh chóng chỉ ra sai sót của họ. Ahlswede và Cai đã sửa chữa lại và được đăng như trong [11].

1.2 Các khái niệm cơ bản

Gọi $I\!N$ là tập hợp các số nguyên không âm. Trước tiên chúng ta nhắc lại một số khái niệm về poset, K-poset.

1.2.1 Định nghĩa. *(i)* Poset *(partially ordered set) là một tập hợp với thứ tự bộ phận, tức $P = (S, \leq)$ với $\leq$ là một quan hệ thứ tự bộ phận trên S.*

Với x, y là hai phần tử của poset P, ta bảo y là trội trực tiếp *của x nếu $x \leq y$ và không có $z \neq x, y$ sao cho $x \leq z \leq y$; khi ấy ta viết $x \prec y$ và $x = y^-$, $y = x^+$.*

(ii) Giả sử có một ánh xạ r từ poset P vào $I\!N$ thỏa $r(p) = 0$ nếu p là phần tử tối tiểu của P và $r(p) = r(q) + 1$ nếu $q \prec p$. Khi ấy P gọi là một poset có hạng *(ranked poset), r gọi là* hàm hạng *(rank function) và với $k = 0, 1, 2, \ldots$, ta định nghĩa* mức thứ *k (level k) của P là*

$$P_k = \{p \in P : r(p) = k\}.$$

(iii) Cho P là 1 poset có hạng với các mức P_0, P_1, $P_2, \ldots$ Với $k \geq 1$ và $p \in P_k$, bóng *(shadow) của p được định nghĩa là*

$$\Delta p = \{q \in P_{k-1} : q \leq p\}$$

và bóng của $A \subset P_k$ là

$$\Delta A = \dot{\bigcup_{p \in A}} \Delta p.$$

Sau đây là một số ví dụ về poset có hạng mà ta sẽ dùng đến trong các phần kế tiếp. Như thông lệ, ký hiệu $|A|$ để chỉ số phần tử của tập hợp A. Và để đơn giản ký hiệu, véctơ $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ được viết là $x_1x_2\ldots x_k$ nếu không có gì nhầm lẫn.

Ví dụ 1.1 Poset $P(S)$ các tập con của $S = \{1, 2, ..., n\}$.

Phần tử: Tập con của S.

Thứ tự bộ phận: $a \leq b \Leftrightarrow a \subset b$.

Hàm hạng: $r(a) = |a|$=số phần tử của a.

Mức thứ k: $P_k(S) = \{a \subset S : |a| = k\}$.

Bóng của $a \in P_k(S)$: $\Delta a = \{b \subset a : |b| = k-1\}$.

Ví dụ 1.2. Poset các đa tập hợp $P = S(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ trong đó $k_1 \leq \ldots \leq k_n$, $k_i \in I\!N$.

Phần tử: $\mathbf{x} = x_1x_2\ldots x_n$ với $0 \leq x_i \leq k_i$ và $x_i \in I\!N$.

Thứ tự bộ phận: Với $\mathbf{x} = x_1x_2\ldots x_n$, $\mathbf{y} = y_1y_2\cdots y_n$ thì

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow x_i \leq y_i, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

Hàm hạng: $r(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

Mức thứ k: $P_k = \{\mathbf{x} : r(\mathbf{x}) = k\}$.

Bóng của $\mathbf{x} = x_1\ldots x_n \in P_k$: Đặt $\theta_j\mathbf{x} = y_1\cdots y_j\cdots y_n$.

với $y_i = x_i$ nếu $i \neq j$ và $y_j = x_j - 1$ thì

$$\Delta\mathbf{x} = \{\theta_j\mathbf{x} : 1 \leq j \leq n \text{ và } x_j > 0\}.$$

Ví dụ 1.3. Poset $P = \mathcal{B}$ các véctơ Bool.

Phần tử: $x_1x_2\ldots x_k$, $k \in I\!N$ và $x_i \in \{0, 1\}$.

Thứ tự bộ phận: Với $\mathbf{x} = x_1x_2\ldots x_k$, $\mathbf{y} = y_1y_2\cdots y_n$ thì $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ nếu

$$k \leq n \text{ và } \exists i_1, \ldots, i_k : i_1 < \ldots < i_k \text{ và } x_1 = y_{i_1}, \ldots, x_k = y_{i_k}.$$

Hàm hạng: Với $\mathbf{x} \cdot\ x_1 \quad . x_k$ thì $r(\mathbf{x}) = k = \dim \mathbf{x}$.

Mức thứ k: $P_k = \{\mathbf{x} \in . ^{?} . \dim \mathbf{x} = k\}$ và $P_0 = \{\emptyset\}$.

Bóng của $\mathbf{x} = x_1 \ldots x_k \in P_k$: Gọi $\delta_j \mathbf{x}$ là véctơ có được

từ $\mathbf{x}$ bằng cách bỏ x_j thì

$$\Delta \mathbf{x} = \{\delta_j \mathbf{x} : 1 \leq j \leq n\}.$$

Ví dụ 1.4. Poset $P = V$ các véctơ nguyên không âm.

Phần tử: $x_1 \ldots x_n$ với $x_i,\ n \in I\!N$.

Thứ tự bộ phận: Với $\mathbf{x} = x_1 x_2 \ldots x_k$ và $\mathbf{y} = y_1 y_2 \ldots y_n$ thì $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ nếu

$$k \leq n \text{ và } \exists i_1, \ldots, i_k : \ i_1 < \ldots < i_k \text{ và } x_1 = y_{i_1}, \ldots, x_k = y_{i_k}.$$

Hàm hạng: Với $\mathbf{x} = x_1 \ldots x_k$ thì $r(\mathbf{x}) = k = \dim \mathbf{x}$.

Mức thứ k: $P_k = \{\mathbf{x} \in V : \dim \mathbf{x} = k\}$ và $P_0 = \{\emptyset\}$.

Bóng của $\mathbf{x} = x_1 \ldots x_k \in P_k$: Gọi $\delta_j \mathbf{x}$ là véctơ có được

từ $\mathbf{x}$ bằng cách bỏ x_j thì

$$\Delta \mathbf{x} = \{\delta_j \mathbf{x} : 1 \leq j \leq n\}.\Diamond$$

Ta viết $\binom{n}{k}$ để chỉ tổ hợp n chập k, tức là

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

với $\binom{n}{k} = 0$ nếu $n < k$.

Từ năm 1928, Sperner đã chứng minh rằng, nếu $A \subset P_k(S)$ với $S = \{1, \ldots, n\}$ thì ta có

$$\binom{n}{k} |\Delta A| \geq \binom{n}{k-1} |A|.$$

Vấn đề tự nhiên được nêu ra là tìm chặn dưới lớn nhất của $|\Delta A|$. Một cách tổng quát, với P_k là mức thứ k của poset có hạng P và m là số tự nhiên cho sẵn, tìm $A \subset P_k$ sao cho $|A| = m$ và

$$|\Delta A| = \min\{|\Delta B| : B \subset P_k \text{ và } |B| = m\}.$$

Để giải quyết bài toán này, thường người ta tìm một thứ tự toàn phần trên P_k, $k = 1, 2, \ldots$ mà ta gọi là thứ tự tuyến tính và chứng minh rằng tập A phải tìm gồm m phần tử đầu tiên của P_k trong thứ tự tuyến tính ấy. Đó là nội dung chủ yếu của định lý KK mà ta sẽ xét ở phần dưới.

1.2.2 Định nghĩa. *Cho P là một poset có hạng với các mức $P_0, P_1, P_2, \ldots$ Giả sử trên P có một thứ tự gọi là* thứ tự tuyến tính *(linear order) $\leq_L$ sao cho P_k được sắp toàn phần với mọi $k \geq 1$. (Vậy trên P có 2 thứ tự : $\leq$ và $\leq_L$) và ta viết $(P, \leq, \leq_L)$.*

(i) Tập $I \subset P_k$ gọi là một đoạn đầu *(initial section) của P_k, ký hiệu IS, nếu I gồm những phần tử đầu tiên của P_k trong thứ tự tuyến tính. Nói cách khác, có $a \in P_k$ sao cho I có dạng $I = \{x \in P_k : x \leq_L a\}$.*

(ii) Cho $A \subset P_k$ với $|A| = m$. Phần nén *(compression) của A, ký hiệu $C(A)$, là tập con của P_k gồm m phần tử đầu tiên của P_k trong thứ tự tuyến tính.*

(iii) Ta bảo A bị nén *(compressed) nếu $C(A) = A$.*

Vậy theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned} A \text{ là } IS \ &\Leftrightarrow\ C(A) = A \\ &\Leftrightarrow\ \text{có } a \in P_k \text{ sao cho } A = \{x \in P_k : x \leq_L a\} \\ &\Leftrightarrow\ x < y \text{ và } y \in A \text{ thì } x \in A. \end{aligned}$$

Có thể có nhiều thứ tự tuyến tính trên P nhưng ta chỉ quan tâm đến thứ tự tuyến tính tối ưu hay thích hợp như trong định nghĩa sau.

1.2.3 Định nghĩa. *Cho P là một poset có hạng với các mức $P_0, P_1, P_2, \ldots$ Một thứ tự tuyến tính trên P gọi là* tối ưu *(optimal) hay* thích hợp *(suitable) nếu*

$$|\Delta C(A)| \leq |\Delta A|, \ \forall A \subset P_k \tag{1.1}$$

Khi ấy P gọi là poset Macaulay.

Hiển nhiên, nếu $\Delta C(A) \subset C(\Delta A)$ thì vì $|C(B)| = |B|$ với mọi B nên $|\Delta C(A)| \leq |C(\Delta A)| = |\Delta A|$ và do đó (1.1) thỏa.

Bây giờ ta có thể định nghĩa K-poset, đối tượng chính của chúng ta.

1.2.4 Định nghĩa. *Cho P là một poset có hạng với các mức $P_0, P_1, P_2, \ldots$. Ta gọi P là một* K-poset *nếu có một thứ tự tuyến tính trên P sao cho với mọi $k \geq 1$ ta có*

(i) $\Delta P_k = P_{k-1}$;

(ii) Bóng của một IS của P_k là một IS của P_{k-1};

(iii) $|\Delta C(A)| \leq |\Delta A|$, $\forall A \subset P_k$.

Ta viết $(P, \leq, \leq_L)$.

Liên hệ đến K-poset, ta có các bài toán sau đây.

1.2.5 Định nghĩa. *Cho $(P, \leq, \leq_L)$ là một K-poset. Với $a \in P_k$, ta đặt $IS_k(a) = \{x \in P_k : x \leq_L a\}$. Các bài toán sau gọi là các* bài toán về biểu diễn *của K-poset.*

Bài toán 1. *Cho $a \in P_k$. Tìm $m = |IS_k(a)|$ và $\Delta m = |\Delta IS_k(a)|$.*

Bài toán 2. *Cho $m \in \mathbb{N}$. Tìm $a \in P_k(S)$ sao cho $|IS_k(a)| = m$.*

Ví dụ đầu tiên và cơ bản về K-poset là Định lý KK [17] mà ta sẽ xét dưới đây.

1.3 Định lý KK

Gọi $P(S)$ là poset có hạng của tất cả các tập con của $S = \{1, \ldots, n\}$ thì theo Ví dụ 1.1, mức thứ k của $P(S)$ là

$$P_k(S) = \{a \subset S : |a| = k\}.$$

Ta sẽ định nghĩa một thứ tự tuyến tính trên $P(S)$ để $P(S)$ là một K-poset.

Từ đây ta cũng dùng ký hiệu $<$ hay $\leq$ để chỉ thứ tự tuyến tính và $xyz\ldots$ sẽ được viết thay cho $\{x, y, z, \ldots\}$ khi không có gì nhầm lẫn. Ta viết $a - b$ để chỉ hiệu của hai tập hợp a và b còn $a + b$ để chỉ phần hiệu đối xứng: $a + b = (a - b) \cup (b - a) = (a \cup b) - (a \cap b)$. Vậy, nếu $a \cap b = \emptyset$ thì $a + b = a \cup b$.

1.3.1 Định nghĩa. *Với $a, b \in P_k(S)$, ta định nghĩa:*

$$a < b \Leftrightarrow \max(a - b) < \max(b - a) \Leftrightarrow \max(a + b) \in b.$$

Thứ tự này gọi là thứ tự dồn *(squashed order).*

Ví dụ 1.5. Với $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ thì các phần tử của $P_k(S)$, $k = 0, 1, \ldots, 5$ xếp theo thứ tự dồn tăng dần như sau

$P_5(S):$ 12345.

$P_4(S):$ 1234, 1235, 1245, 1345, 2345.

$P_3(S):$ 123, 124, 134, 234, 125, 135, 235, 145, 245, 345.

$P_2(S):$ 12, 13, 23, 14, 24, 34, 15, 25, 35, 45.

$P_1(S):$ 1, 2, 3, 4, 5.

$P_0(S):$ $\emptyset$.

Nhận xét rằng, phần tử lớn nhất của $P_k(S)$ trong thứ tự dồn là $\{n - k + 1, \ldots, n - 1, n\}$.

Đến đây ta có thể phát biểu Định lý KK mà chứng minh của nó có thể tìm thấy trong [9] và [21].

1.3.2 Định lý KK. (Kruskal 1963, Katona 1966). *Cho tập hợp $S = \{1, \ldots, n\}$. Với thứ tự bộ phận là thứ tự bao hàm và thứ tự tuyến tính là thứ tự dồn thì $P(S)$ là K-poset.*

Như vậy $|\Delta C(A)| \leq |\Delta A|$, $\forall A \subset P_k(S)$, $k \geq 1$ nên Định lý KK chỉ ra rằng, trong số các tập con gồm m phần tử của $P_k(S)$ thì m phần tử đầu tiên trong thứ tự dồn có bóng bé nhất.

Ví dụ 1.6. Với $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, lấy $A = \{124, 234, 245\}$ và $B = \{123, 124, 134\}$ thì $B = C(A)$ gồm $|A| = 3$ phần tử đầu tiên trong $P_3(S)$ (xem Ví dụ 1.5) và ta có

$$\Delta A = \{12, 23, 14, 24, 34, 25, 45\}.$$

$$\Delta B = \{12, 13, 23, 14, 24, 34\}.$$

Ta có ΔB là một IS với

$$|\Delta B| = |\Delta C(A)| = 6 \leq |\Delta A| = 7.$$

Định lý KK khẳng định rằng, tất cả tập con gồm 3 phần tử của $P_3(S)$ đều có bóng với kích thước (số phần tử) lớn hơn hay bằng $6 = |\Delta B|$.$\diamondsuit$

Với m, k nguyên dương cho sẵn, ta gọi n_k, $n_{k-1}, \ldots$ lần lượt là các số nguyên lớn nhất sao cho

$$m_1 = \binom{n_k}{k} \leq m$$

$$m_2 = \binom{n_{k-1}}{k-1} \leq m - m_1$$

$$m_3 = \binom{n_{k-2}}{k-2} \leq m - m_1 - m_2$$

....

Tiếp tục quá trình trên ta có

1.3.3 Định lý. *Cho m, k là các số nguyên dương. Tồn tại duy nhất các số nguyên $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_t$ sao cho*

$$n_k > n_{k-1} > \cdots > n_t \geq t \geq 1 \tag{1.2}$$

$$m = \binom{n_k}{k} + \binom{n_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{n_t}{t} \tag{1.3}$$

Chẳng hạn với $m = 22$ và $k = 4$ thì

$$m = \binom{6}{4} + \binom{4}{3} + \binom{3}{2}.$$

1.3.4 Định nghĩa. *Công thức (1.3) thỏa điều kiện (1.2) gọi là* biểu diễn k-nhị thức *(k-binomial representation) hay một* k-cascade *của số nguyên m.*

Bây giờ ta xét các bài toán về biểu diễn trong K-poset $P(S)$. Nhắc lại rằng với $a \in P_k(S)$ thì ta viết $IS_k(a)$ để chỉ tập hợp các phần tử $b \in P_k(S)$ sao cho $b \leq a$ trong thứ tự dồn.

Trước tiên ta xét Bài toán 1, tức là tìm $m = |IS_k(a)|$ với a cho sẵn và $\Delta m = |\Delta IS_k(a)|$.

Nếu $k = 1$ thì $a = \{r\}$ với $1 \leq r \leq n$ thì $\Delta a = \{\emptyset\}$ và hiển nhiên

$$m = r = \binom{r}{1}, \ |\Delta m| = \binom{r}{0} = 1.$$

Xét $k > 1$ và $a = \{a_1, \ldots, a_k\}$ với $a_1 < \cdots < a_k$.

Nếu $a_{i+1} = 1 + a_i$, $i = 1, \ldots, k-1$ thì $IS_k(a) = P_k(S')$ và $\Delta IS_k(a) = P_{k-1}(S')$ với $S' = \{1, 2, \ldots, a_k\}$ nên

$$m = \binom{a_k}{k}, \ \Delta m = \binom{a_k}{k-1}.$$

Ngược lại, đặt $n_k = a_k - 1$. Nhận xét rằng nếu $b \in P_k(S)$ và $\max b \leq n_k$ thì $b < a$ nên $b \in IS_k(a)$. Đặt $S_0 = \{1, 2, \ldots, n_k\}$ và $G_0 = \{b \in P_k(S_0) : \max b \leq n_k\} = P_k(S_0)$, ta có

$$G_0 \subset IS_k(a) \ \text{ và } \ |G_0| = \binom{n_k}{k}.$$

Những phần tử còn lại của $IS_k(a)$ (nếu có) chứa a_k nên có dạng $b \cup \{a_k\}$ với $b \in P_{k-1}(S)$ và $b \subset \{1, \ldots, a_{k-1}\}$. Đặt $n_{k-1} = a_{k-1} - 1$ và G_1 là tập con của $P_k(S)$ gồm những phần tử có dạng $c \cup \{a_k\}$ với $|c| = k-1$ và $c \subset S_1 = \{1, 2, \ldots, n_{k-1}\}$ thì

$$G_1 \subset IS_k(a) \ \text{ và } \ |G_1| = \binom{n_{k-1}}{k-1}.$$

Nếu $IS_k(a) - (G_0 \cup G_1) \neq \emptyset$ thì những phần tử của nó có dạng $d \cup \{a_{k-1}, a_k\}$ trong đó $|d| = k-2$, $d \subset \{1, \ldots a_{k-2}\}$. Như trên, với $n_{k-2} = a_{k-2} - 1$ và G_2 gồm những phần tử của $P_k(S)$ có dạng $d \cup \{a_{k-1}, a_k\}$ trong đó $|d| = k-2$ và $d \subset S_2 = \{1, \ldots, n_{k-2}\}$ thì

$$G_2 \subset IS_k(a) \ \text{ và } \ |G_2| = \binom{n_{k-2}}{k-2}.$$

Bằng cách tiếp tục quá trình trên, cuối cùng ta có $t \geq 1$ sao cho

$$IS_k(a) = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{k-t}$$

và với $r = 1, \ldots, k-t$ thì $|G_r| = \binom{n_r}{r}$ nên

$$m = |IS_k(a)| = \binom{n_k}{k} + \binom{n_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{n_t}{t}$$

với $n_k > n_{k-1} > \cdots > n_t \geq t \geq 1$.

Vì $G_0 = P_k(S_0)$ với $S_0 = \{1, \ldots, n_k\}$ nên

$$\Delta G_0 = P_{k-1}(S_0) = \{b \in P(S_0) : |b| = k-1\}.$$

Với $r = 1, \ldots, k-t$ thì $G_0 + \cdots + G_r$ là IS. Đặt

$$H_0 = P_{k-1}(S_0)$$
$$H_1 = \{b \cup \{a_k\} : b \in P_{k-2}(S_1)\}$$
$$H_2 = \{c \cup \{a_{k-1}, a_k\} : c \in P_{k-3}(S_2)\}$$

....

Khi ấy

$$\Delta(G_0 + G_1) = H_0 + H_1$$
$$\Delta(G_0 + G_1 + G_2) = H_0 + H_1 + H_2$$
$$\Delta(G_0 + \cdots + G_3) = H_0 + \cdots + H_3$$

....

$$\Delta IS_k(a) = H_0 + \cdots + H_{k-t}$$

Hơn nữa

$$|H_0| = \binom{n_k}{k-1}, \ |H_1| = \binom{n_{k-1}}{k-2}, \ |H_2| = \binom{n_{k-2}}{k-3} \ldots$$

Từ đó suy ra

$$\Delta m = |\Delta IS_k(a)| = \binom{n_k}{k-1} + \binom{n_{k-1}}{k-2} + \cdots + \binom{n_t}{t-1} \qquad (1.4)$$

Nhận xét rằng Δm suy từ m bằng phép biến đổi $\binom{r}{s} \longrightarrow \binom{r}{s-1}$ trên mỗi số hạng của m.

Kết quả trên cùng với Định lý 1.3.3 cho ta các thuật toán để giải quyết các bài toán về biểu diễn trong K-poset $P(S)$ với $S = \{1, \ldots, n\}$.

Thuật toán 1. *Cho $a = \{a_1, \ldots, a_k\}$ là một phần tử của $P_k(S)$ với $a_1 < \cdots < a_k$. Tìm $m = |IS_k(a)|$ và $\Delta m = |\Delta IS_k(a)|$.*

Bắt đầu. $m := 0, \quad h = k.$

Bước 1. *Nếu $h = 1$ hay $a_{i+1} = 1 + a_i$, $i = 1, \ldots, h-1$ thì*

$$m := m + \binom{a_h}{h}. \text{ Dừng.}$$

Ngược lại đến Bước 2.

Bước 2. $n_h = a_h - 1$ *và* $m := m + \dbinom{n_h}{h}.$

Bước 3. $h := h - 1$, *trở lại Bước 1.*

Ví dụ 1.7. Cho $S = \{1, 2, \ldots, 8\}$ và $a = a_1a_2a_3a_4a_5 \in P_5(S)$ (ta viết $a = a_1a_2a_3a_4a_5$ thay cho $a = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$)

(i) Với $a = 13568$ thì Thuật toán 1 cho ta

$$\begin{aligned} n_5 &= a_5 - 1 = 7 \\ n_4 &= a_4 - 1 = 5 \\ n_3 &= a_3 - 1 = 4 \\ n_2 &= a_2 - 1 = 2 \\ n_1 &= \quad a_1 \quad = 1 \end{aligned}$$

Do đó

$$m = |IS_5(a)| = \binom{7}{5} + \binom{5}{4} + \binom{4}{3} + \binom{2}{2} + \binom{1}{1} = 32.$$

Vậy a là phần tử thứ 32 của $P_5(S)$ trong thứ tự dồn và ta có

$$\Delta m = |\Delta IS_5(a)| = \binom{7}{4} + \binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{2}{1} + \binom{1}{0} = 54.$$

(ii) Với $a = 34578$ thì $a_2 = 1 + a_1$, $a_3 = 1 + a_2$ và ta có

$$n_5 = a_5 - 1 = 7,\ n_4 = a_4 - 1 = 6,\ n_3 = 5.$$

Vậy

$$m = |IS_5(a)| = \binom{7}{5} + \binom{6}{4} + \binom{5}{3} = 46.$$

Do đó a là phần tử thứ 46 của $P_5(S)$. Hơn nữa,

$$\Delta m = |\Delta IS_5(a)| = \binom{7}{4} + \binom{6}{3} + \binom{4}{2} = 65.$$

Thuật toán 2. *Cho $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ và m, k nguyên dương. Tìm $a \in P_k(S)$ sao cho $|\Delta IS_k(a)| = m$.*

Bắt đầu. $a := \emptyset,\quad h = k.$

Bước 1. *Tìm d lớn nhất sao cho $\binom{d}{k} \le m$.*

$$m := m - \binom{d}{k}.$$

Bước 2. *Nếu $m = 0$ thì $a := a \cup \{d, \ldots, d - h + 1\}$. Dừng.*

Nếu $m > 0$ thì $a := a \cup \{d + 1\}$. Đến Bước 3.

Bước 3. $h := h - 1$ *trở về Bước 1.*

Nói cách khác, nếu k-cascade của m là

$$\begin{cases} m = \binom{n_k}{k} + \binom{n_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{n_t}{t} \\ n_k > n_{k-1} > \cdots > n_t \ge t \ge 1 \end{cases}$$

thì ta có

$$a = \{1 + n_k, 1 + n_{k-1}, \ldots, 1 + n_{t+1}, n_t, \ldots, n_t - t + 1\} \tag{1.5}$$

Ví dụ 1.8. Cho $S = \{1, 2, \ldots, 7\}$ và $m = 22$. Ta sẽ tìm $a \in P_4(S)$ sao cho $|IS_4(a)| = m$.

Ta viết $m = 22 = \binom{6}{4} + \binom{4}{3} + \binom{3}{2}$. Suy ra $a = 2357$.

Ví dụ 1.9. Ta tìm phần tử thứ 32 trong $a \in P_5(S)$ với $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$.

Ta có

$$32 = \binom{7}{5} + \binom{5}{4} + \binom{4}{3} + \binom{2}{2} + \binom{1}{1}.$$

Công thức (1.5) cho ta $a = 13568$.

Ta thấy rằng các tính toán trên đây tương đối phức tạp nên ta cần một công thức đơn giản hơn. Nhưng trước tiên, ta nới rộng định nghĩa của hệ số nhị thức.

1.3.5 Định nghĩa. *Cho x là số thực không âm và $k \in I\!N$. Ta định nghĩa*

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } k = 0 \\ \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!} & \text{nếu } x \geq k-1 \geq 0 \end{cases}$$

Hệ thức Pascal cũng đúng trong trường hợp này:

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}.$$

Hơn nữa, hàm $f(x) = \binom{x}{k}$ là hàm tăng, liên tục nên với $n,\ k \in I\!N$ cho sẵn và $m \in I\!N$ sao cho $\binom{n-1}{k} < m < \binom{n}{k}$ thì sẽ có $x \in I\!R^+$ sao cho $\binom{x}{k} = m$.

Định lý Lovasz [9] dưới đây sẽ cho ta một công thức đơn giản hơn để nhanh chóng xác định chặn dưới của $|\Delta A|$ với $A \subset P_k(S)$.

1.3.6 Định lý. (Lovasz, 1979). *Cho $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ và $A \subset P_k(S)$. Nếu $|A| = \binom{x}{k}$, $x \geq k$ thì $|\Delta A| \geq \binom{x}{k-1}$.*

1.4 Định lý Clements-Linström

Ví dụ thứ hai về K-poset là định lý Clements-Linström. Về thực chất, định lý này là một mở rộng của định lý KK.

Trong phần này, ta xét poset có hạng $P = S(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_n$ như trong Ví dụ 1.2 với mức thứ k là $P_k = \{x_1x_2 \ldots x_n : x_1 + \cdots + x_n = k\}$.

1.4.1 Định nghĩa. *Với* $\mathbf{x} = x_1x_2 \ldots x_n$, $\mathbf{y} = y_1y_2 \ldots y_n$ *là hai phần tử của* P_k*, ta định nghĩa*

$$\mathbf{x} < \mathbf{y} \Longleftrightarrow x_i < y_i, \quad i = \min\{j : x_j \neq y_j\}.$$

Thứ tự này gọi là thứ tự tự điển *(lexicographic order).*

Ví dụ 1.10. Sau đây là các véctơ ở mức 2 và mức 3 của $P = S(2,3,3)$ xếp theo thứ tự tự điển tăng dần với các phần tử có dạng $x_1x_2x_3$.

$$P_3: \ 003, 012, 021, 030, 102, 111, 120, 201, 210.$$

$$P_2: \ 002, 011, 020, 101, 110, 200.$$

Với $A = \{012, 102, 201\}$ thì $C(A)$ gồm $|A| = 3$ véctơ đầu tiên của P_3 trong thứ tự tự điển nên $C(A) = \{003, 012, 021\}$ và ta có $\Delta A = \{002, 011, 101, 200\}$, $\Delta C(A) = \{002, 011, 020\}$. Vậy

$$\Delta C(A) \subset C(\Delta A) = \{002, 011, 020, 101\}.$$

1.4.2 Định lý. (Clements-Linström, 1969). *Với thứ tự tuyến tính là thứ tự tự điển thì* $P = S(k_1, \ldots, k_n)$ *là một K-poset.*

Định lý Clements-Linström là một mở rộng của Định lý KK. Thật vậy, với $a \subset S = \{1, \ldots, n\}$ ta biểu diễn a bằng một véctơ Bool $\mathbf{a} = a_1a_2 \ldots a_n$ với

$$a_i = \begin{cases} 1 \text{ nếu } n - i + 1 \in a \\ 0 \text{ nếu } n - i + 1 \notin a \end{cases}$$

Chẳng hạn với $a = \{1, 2, 4\} \subset \{1, \ldots, 5\}$ có thể biểu diễn bằng véctơ 01011.

Với $a, b \in P_k(S)$, a biểu diễn bởi $\mathbf{a} = a_1a_2\ldots a_n$ và b biểu diễn bởi $\mathbf{b} = b_1b_2\ldots b_n$ ta đặt $i = \min\{j : a_j \neq b_j\}$, và $h = \max\{j : j \in a + b\}$ thì

$$\begin{aligned} \mathbf{a} < \mathbf{b} &\Leftrightarrow a_i < b_i \\ &\Leftrightarrow a_i = 0,\ b_i = 1 \\ &\Leftrightarrow h = n - i + 1 \in b \\ &\Leftrightarrow a < b. \end{aligned}$$

Vậy $a < b$ trong thứ tự dồn nếu và chỉ nếu $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ trong thứ tự tự điển. Như thế Định lý KK chính là Định lý Clements-Lindström với $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1$.

1.5 Các vấn đề đặt ra trong luận án

Trong luận án này, chúng tôi sẽ chứng minh định lý kiểu KK cho poset $\mathcal{B}$ các véctơ Bool sau khi chỉ ra những sai sót của Bezrukov và Gronau. Để chứng minh $\mathcal{B}$ là K-poset, điều quan trọng nhất là xác định một thứ tự tuyến tính thích hợp trên $\mathcal{B}$, thứ tự tuyến tính ấy không thể là thứ tự BG [12] vì thứ tự này không thích hợp, như chúng tôi sẽ chỉ ra. Những vấn đề này sẽ được giải quyết trong Chương 2.

Tiếp theo, chúng tôi sẽ đưa ra các thuật toán để giải quyết các bài toán về biểu diễn trong K-poset $\mathcal{B}$. Chúng tôi cũng chứng minh định lý kiểu Lovasz giúp xác định nhanh chóng một chặn dưới của $|\Delta A|$ với A là một họ các véctơ Bool n chiều và $|A| = m$ với m cho sẵn.

Sau cùng, chúng tôi sẽ nêu lên những kết quả mà chúng tôi đã đạt được trên poset V các véctơ nguyên không âm trong nỗ lực chứng minh định lý kiểu KK trên V.

Chương 2.

ĐỊNH LÝ KIỂU KK

Trong chương này chúng tôi sẽ chứng minh rằng tập hợp $\mathcal{B}$ các vectơ Bool là một K-poset, tức là chứng minh định lý kiểu KK trên $\mathcal{B}$. Các kết quả của chúng tôi trong chương này đã được công bố trong [5], [6] và [7].

2.1 Ký hiệu.

Gọi $I\!N$ là tập hợp các số nguyên không âm. Với $n \in I\!N$ thì ký hiệu $V(n)$ để chỉ tập hợp các véctơ $\mathbf{a} = a_1a_2 \ldots a_n$, $a_i \in I\!N$:

$$V(n) = \{a_1a_2 \ldots a_n : a_i \in I\!N\} \text{ với } V(0) = \{\emptyset\}.$$

Tương tự, $B(n)$ là tập hợp các véctơ Bool n chiều:

$$B(n) = \{a_1a_2 \ldots a_n : a_i = 0 \text{ hay } a_i = 1\} \text{ với } B(0) = \{\emptyset\}.$$

Ta có $B(n) \subset V(n)$.

Các véctơ sẽ được thể hiện bằng chữ có nét đậm và chữ thường sẽ được dùng để chỉ các thành phần của nó, chẳng hạn như:

$$\mathbf{a} = a_1a_2 \ldots a_n, \ \mathbf{a}^* = a_1^*a_2^* \ldots a_n^*.$$

Cho $\mathbf{a} = a_1a_2 \ldots a_n \in V(n)$, $n \geq 1$.

- $\mathsf{V}\mathbf{a}$ là số nguyên xác định như sau

$$\mathsf{V}\mathbf{a} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a_1 \leq \cdots \leq a_n \\ n & \text{nếu } a_{n-1} > a_n \\ h & \text{nếu } a_{h-1} > a_h \text{ và } a_h \leq \cdots \leq a_n \end{cases}$$

• $\delta_i\mathbf{a}$ là véctơ trong $V(n-1)$ có được từ $\mathbf{a}$ bằng cách bỏ thành phần thứ i của $\mathbf{a}$, tức là

$$\begin{cases} \delta_1\mathbf{a} &= a_2\dots a_n, \\ \delta_n\mathbf{a} &= a_1\dots a_{n-1}, \\ \delta_i\mathbf{a} &= a_1\dots a_{i-1}a_{i+1}\dots a_n,\ 1 < i < n. \end{cases}$$

• $\mathbf{a}^*$, $w\mathbf{a}$, $\mu\mathbf{a}$, $\nu\mathbf{a}$ $\lambda\mathbf{a}$ được định nghĩa như sau

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* &= \delta_h\mathbf{a} \text{ với } h = \vee\mathbf{a} \\ w\mathbf{a} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ \mu\mathbf{a} &= \max\{a_i : 1 \le i \le n\} \\ \nu\mathbf{a} &= \text{số các i thỏa } a_i = \mu\mathbf{a} \\ \lambda\mathbf{a} &= \min\{a_i : 1 \le i \le n\}. \end{aligned}$$

Nếu $\mathbf{a} \in B(n)$ thì $\mathbf{a}^* = \delta_k\mathbf{a} = \delta_h\mathbf{a}$ với $h = \vee\mathbf{a}$ và $k = \max\{i : a_i = 0\}$ nên ta có thể giả sử $\vee\mathbf{a} = k$ khi tính $\mathbf{a}^*$.

Ta gọi $w\mathbf{a}$ là trọng lượng của $\mathbf{a}$.

• Véctơ zero của $V(n)$ là véctơ có trọng lượng bằng 0 và được ký hiệu $\mathbf{z}_n$ (với $\mathbf{z}_0 = \emptyset$).

• Véctơ có trọng lượng n trong $B(n)$ được viết là $\mathbf{g}_n$. Vậy $\mathbf{g}_n = 1\dots1$ (với $\mathbf{g}_0 = \emptyset$) và $\mathbf{g}_n$ là véctơ có trọng lượng lớn nhất của $B(n)$.

• $\mathbf{a}d$, $d\mathbf{a}$ với $d \in I\!N$ lần lượt là các véctơ sau đây của $V(n+1)$

$$\mathbf{a}d = a_1\dots a_n d, \quad d\mathbf{a} = da_1\dots a_n.$$

Ngoài ra, với $A \subset V(n)$ thì ta viết

$$A^* = \{\mathbf{a}^* : \mathbf{a} \in A\}.$$

$$A_{i:d} = \{a_1a_2\dots a_n \in A : a_i = d\}.$$

$$Ad = \{\mathbf{a}d : \mathbf{a} \in A\} \subset V(n+1).$$

$$dA = \{d\mathbf{a} : \mathbf{a} \in A\} \subset V(n+1).$$

Vậy với $A \subset B(n)$, $n \ge 2$ thì A có thể viết

$$A = M0 + N1 \quad \text{với} \quad M,\ N \subset B(n-1).$$

• Nếu $\mathbf{a} = a_1 \ldots a_p$ và $\mathbf{b} = b_1 \ldots b_q$ thì $\mathbf{ab} = a_1 \ldots a_p b_1 \ldots b_q$ (vậy $\mathbf{ab} = \mathbf{a}$ nếu $q = 0$ và $\mathbf{ab} = \mathbf{b}$ nếu $p = 0$).

• Nếu $A \subset V(p)$, $B \subset V(q)$ thì

$$AB = \{\mathbf{ab} : \mathbf{a} \in A, \mathbf{b} \in B\} \subset V(p+q).$$

• Với $\mathbf{a} = a_1 \ldots a_n$ và $\mathbf{b} = b_1 \ldots b_n$ là hai véctơ của $V(n)$ ta đặt

$$\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \min\{i : a_i \neq b_i\}.$$

Như ta đã biết trong Chương 1, $V = \bigcup_{n \geq 0} V(n)$ là một poset có hạng với mức thứ n là $V(n)$, bóng của $\mathbf{a} \in V(n)$ là $\Delta\mathbf{a} = \{\delta_j \mathbf{a} : 1 \leq j \leq n\}$ và bóng của $A \subset V(n)$ là $\Delta A = \bigcup_{\mathbf{a} \in A} \Delta\mathbf{a}$. Tương tự cho $\mathcal{B} = \bigcup_{n \geq 0} B(n)$.

2.2 Thứ tự BG là không thích hợp

Như đã nói ở phần trên, năm 1992 Bezrukov và Gronau công bố bài báo "A Kruskal-Katona type theorem" [12], trong đó họ cho rằng định lý kiểu KK cho poset các véctơ nguyên không âm đã được chứng minh (và do đó bài toán cho véctơ Bool cũng được giải quyết). Chúng tôi đã chỉ ra cái sai của bài báo trên trong [6].

Bezrukov và Gronau đã đưa ra thứ tự tuyến tính sau đây mà chúng tôi gọi là thứ tự BG.

2.2.1 Định nghĩa. (Thứ tự BG). *Ta sắp thứ tự $V(n)$ bằng qui nạp như sau:*

Với $n = 1$ thì $V(1) = \mathbb{N}$ được sắp tự nhiên

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 \ldots$$

Xét $n > 1$ và giả sử trên $V(n-1)$ đã có thứ tự.

Cho $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *là hai véctơ của* $V(n)$ *với* $\mathbf{a} = a_1 a_2 \ldots a_n$, $\mathbf{b} = b_1 b_2 \ldots b_n$. *Đặt* $h = \max\{i : a_i = \lambda\mathbf{a}\}$, $k = \max\{i : b_i = \lambda\mathbf{b}\}$. *Ta viết* $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ *nếu*

(i) $\mu\mathbf{a} < \mu\mathbf{b}$, *hoặc*

(ii) $\mu\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$ *và* $\delta_h\mathbf{a} < \delta_k\mathbf{b}$ *trong* $V(n-1)$, *hoặc*

(iii) $\mu\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$ *và* $\delta_h\mathbf{a} = \delta_k\mathbf{b}$ *và* $w\mathbf{a} < w\mathbf{b}$, *hoặc*

(vi) $\mu\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$ *và* $\delta_h\mathbf{a} = \delta_k\mathbf{b}$ *và* $w\mathbf{a} = w\mathbf{b}$ *và* $a_j > b_j$ *trong đó* $j = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Định nghĩa trên và ví dụ sau đây được trích từ [12].

Ví dụ 2.1. Trong $V(3)$, 27 phần tử đầu tiên theo thứ tự BG tăng dần là:

000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111, 200,
020, 002, 210, 201, 021, 211, 120, 102, 012,
121, 112, 220, 202, 022, 221, 212, 122, 222.

Nhắc lại rằng nếu $A \subset V(n)$ thì $A_{i:d}$ là tập hợp tất cả các véctơ của A có thành phần thứ i bằng d.

2.2.2 Định nghĩa. *Giả sử trên V đã có một thứ tự tuyến tính, tức là trên $V(n)$, $n \geq 1$ đã có một thứ tự toàn phần. Với $A \subset V(n)$, gọi $C_i(A_{i:d})$ là $|A_{i:d}|$ véctơ đầu tiên của $V(n)$ có thành phần thứ i bằng d và* $p = \max\{\mu\mathbf{a} : \mathbf{a} \in A\}$.

(i) Phần nén thứ i *(i-compression) của A được định nghĩa là*

$$C_i(A) = \bigcup_{d=0}^{p} C_i(A_{i:d}).$$

(ii) Nếu $C_i(A) = A$ thì ta bảo A có bị nén ở thành phần thứ i *(i-compressed).*

Ví dụ 2.2. Xét $V(3)$ với thứ tự BG. Cho $A = \{122, 212, 222\}$ thì $A = A_{3:2}$ nên $C_i(A)$ gồm 3 véctơ đầu tiên trong thứ tự BG có thành phần thứ 3 bằng 2. Theo Ví dụ 2.1 thì 3 véctơ đầu tiên ấy là 002, 102, 012, tức là $C_3(A) = \{002, 102, 012\}$.

Ví dụ 2.3. Xét $B(5)$ với thứ tự BG. Ta đặt

$$\begin{aligned} E &= \{00000, 10000, 01000, 00100, 00010, 00001, 11000\} \\ G &= \{10001, 01001, 00101, 00011\} \\ H &= \{10100, 01100, 01010, 01001\}. \end{aligned}$$

Với $A = E \cup G$ thì $C_1(A_{1:0})$ gồm 8 véctơ đầu tiên của $B(5)$ có thành phần thứ nhất là 0 và $C_1(A_{1:1})$ gồm 3 véctơ đầu tiên có thành phần thứ nhất là 1. Vậy phần nén thứ nhất của A là

$$C_1(A) = C_1(A_{1:0}) \cup C_1(A_{1:1}) = E \cup H.$$

Để ý rằng, trong ví dụ này A bị nén ở thành phần thứ 5. Trong [12], Bezrukov và Gronau cho rằng thứ tự BG là thích hợp trên $V(n)$. Chúng tôi đã chỉ ra rằng điều này không đúng bằng phản ví dụ sau:

Phản ví dụ 1. Xét $V(3)$ với thứ tự BG và $A \subset V(3)$:

$$A = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111, 200, 210, 201, 211\}.$$

$C(A)$ là tập hợp $|A| = 12$ véctơ đầu tiên của $V(3)$ trong thứ tự BG (xem Ví dụ 2.1) nên

$$C(A) = \{000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111, 200, 020, 002, 210\}.$$

Ta có

$$\Delta A = \{00, 10, 01, 11, 20, 21\}.$$

$$\Delta C(A) = \{00, 10, 01, 11, 20, 02, 21\}.$$

Vậy $|\Delta C(A)| = 7 > |\Delta A| = 6$ nên thứ tự BG là không thích hợp.

Vì bản thân thứ tự BG không phải là thứ tự thích hợp nên bài báo [12] không thể sửa chữa. Trong bài báo ấy, Bezrukov và Gronau đã "chứng minh" và sử dụng "bổ đề" sau:

$$|\Delta C_i(A)| \leq |\Delta A|,\ i = 1 \text{ hay } i = n\ , \forall A \subset V(n).$$

Điều này sai trên $B(n)$ với $i = 1$ và sai trên $V(n)$ với $i = n$, như trong các phản ví dụ sau:

Phản ví dụ 2. Cho $A = \{122, 212, 222\} \subset V(3)$ thì theo Ví dụ 2.2 ta có $C_3(A) = \{002, 102, 012\}$. Do đó

$$\Delta C_3(A) = \{00, 10, 01, 02, 12\} \text{ và } \Delta A = \{12, 21, 22\}.$$

Vậy $|\Delta C_3(A)| = 5 > |\Delta A| = 3$.

Phản ví dụ 3. Xét $B(5)$ với thứ tự BG và $A = E \cup G \subset B(5)$ như trong Ví dụ 2.3. Đặt $M = \{0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100\}$ thì

$$\Delta A = M \cup \{1001, 0101, 0011\}$$

$$\Delta C_1(A) = M \cup \{1010, 1001, 0110, 0101\}$$

Vậy $|\Delta C_1(A)| = 10 > |\Delta A| = 9$.

Sai lầm của Bezrukov và Gronau cho thấy rằng việc chứng minh định lý kiểu KK không phải là điều đơn giản.

2.3 K-poset các véctơ Bool

Trong phần này, ta sẽ chứng minh rằng $\mathcal{B}$ là K-poset bằng cách chứng minh rằng thứ tự $\vee$ là thích hợp trên $\mathcal{B}$. Nhắc lại rằng ở đây ta có $\vee\mathbf{a} = \max\{i : a_i = 0\}$ với $\mathbf{a} \in B(n)$.

2.3.1 Định nghĩa. (Thứ tự $\vee$). *Cho* $\mathbf{a}$ *và* $\mathbf{b}$ *là 2 véctơ khác nhau của* $B(n)$: $\mathbf{a} = a_1a_2\ldots a_n$, $\mathbf{b} = b_1b_2\ldots b_n$. *Ta viết* $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ *nếu*

(i) $w\mathbf{a} < w\mathbf{b}$, *hoặc*

(ii) $w\mathbf{a} = w\mathbf{b}$ *và* $a_i = 1 > b_i = 0$ *với* $i = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Vậy $\mathbf{z_n} = 00\ldots0$ là véctơ nhỏ nhất và $\mathbf{g}_n = 11\ldots1$ là véctơ lớn nhất của $B(n)$. Ngoài ra, đặt $B(n,k) = \{\mathbf{a} \in B(n) : w\mathbf{a} = k\}$, $0 \le k \le n$ thì ta có

2.3.2 Bổ đề. *Nếu* $\mathbf{a} = \min B(n,k)$ *và* $\mathbf{b} = \max B(n,k)$ thì

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}_k\mathbf{z}_{n-k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{z}_{n-k}\mathbf{g}_k \tag{2.1}$$

Chứng minh. Nếu $k = 0$ hay $k = n$ thì (2.1) là hiển nhiên nên ta chỉ xét $1 < k < n$. Cho $\mathbf{c} \in B(n,k)$. Nếu $\mathbf{c} \ne \mathbf{a}$ thì có i nhỏ nhất, $1 \le i \le k$, sao cho $c_i = 0$. Vì $a_1 = \cdots = a_k = 1$ nên $a_i = 1 > c_i = 0$ với $i = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{c})$. Suy ra $\mathbf{a} < \mathbf{c}$. Vậy $\mathbf{a} = \min B(n,k)$.

Phần còn lại chứng minh tương tự.

Ví dụ 2.4. Các véctơ của $B(4)$ được sắp theo thứ tự tăng dần như sau

$$\begin{aligned} B(4): \quad & 0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, \\ & 0110, 0101, 0011, 1110, 1101, 1011, 0111, 1111. \end{aligned}$$

Ta có $1100 = \min B(4,2)$, $0011 = \max B(4,2)$.

Từ định nghĩa, ta có ngay kết quả sau đây:

2.3.3 Bổ đề. *Với* $\mathbf{a} \in B(n)$ *và* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in B(r)$ *thì* $\mathbf{ax}$, $\mathbf{ay}$, $\mathbf{xa}$, $\mathbf{ya}$ *là các véctơ của* $B(n+r)$ *và ta có*

$$\mathbf{x} < \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{ax} < \mathbf{ay} \Leftrightarrow \mathbf{xa} < \mathbf{ya} \tag{2.2}$$

Nhắc lại rằng $\mathbf{a}^* = \delta_h \mathbf{a}$ với $h = \vee \mathbf{a} = \max\{i : a_i = 0\}$.

2.3.4 Bổ đề. *Với* $\mathbf{a} \in B(n)$ *ta có*

$$\mathbf{a}^* = \max\{\Delta \mathbf{a}\} = \max\{\delta_1 \mathbf{a}, \ldots, \delta_n \mathbf{a}\} \tag{2.3}$$

Chứng minh. Nếu $w\mathbf{a} = n$ tức là $\mathbf{a} = \mathbf{g}_n$ thì kết quả là hiển nhiên. Coi $\mathbf{a} \neq \mathbf{g}_n$ và cho $\mathbf{x} = \delta_j \mathbf{a} \in \Delta \mathbf{a}$, $\mathbf{a}^* = \delta_h \mathbf{a}$ với $h = \vee \mathbf{a} \neq j$. Nếu $a_j = 1$ thì vì $w\mathbf{x} < w\mathbf{a}^*$ nên $\mathbf{x} < \mathbf{a}^*$. Ta chỉ xét trường hợp $a_j = 0$ và do đó $w\mathbf{x} = w\mathbf{a}^* = w\mathbf{a}$. Do định nghĩa của h , ta có $j < h$ và ta có thể giả sử $a_{j+1} = 1$ (vì nếu $a_j = a_{j+1} = 0$ thì $\delta_j \mathbf{a} = \delta_{j+1} \mathbf{a}$). Khi ấy $x_j = a_{j+1} = 1 > a_j^* = a_j = 0$ và $j = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{a}^*)$ nên $\mathbf{x} < \mathbf{a}^*$.

Vậy $\mathbf{a} = \max\{\Delta \mathbf{a}\}$.◇

2.3.5 Bổ đề. *Với* $\mathbf{a} \in B(n)$ *ta có*

$$\mathbf{a}0 = \min\{\mathbf{b} \in B(n+1) : \mathbf{b}^* = \mathbf{a}\} \tag{2.4}$$

$$0\mathbf{a} = \max\{\mathbf{b} \in B(n+1) : \mathbf{b}^* = \mathbf{a}\} \tag{2.5}$$

Chứng minh. Coi $\mathbf{b} \in B(n+1)$ sao cho $\mathbf{a} = \delta_h \mathbf{b} = \mathbf{b}^*$ với $h = \vee \mathbf{b}$ và ta có thể giả sử $h = \max\{i : b_i = 0\}$.

Nếu $h = n$ thì $\mathbf{b} = \mathbf{a}0$ nên ta xét $h < n$, do đó $b_h = 0$ và $b_{h+1} = 1$. Vì $\mathbf{b}^* = \mathbf{a}$ nên $a_h = b_{h+1} = 1 > b_h = 0$ và ta có $\mathbf{b} > \mathbf{a}0$. Vậy $\mathbf{a}0 = \min\{\mathbf{b} \in B(n+1) : \mathbf{b}^* = \mathbf{a}\}$. Ta đã chứng minh (2.4).

Xét (2.5). Đặt $r = \min\{j : a_j = 1\}$ và $\mathbf{u} = 0\mathbf{a}$. Vì $\mathbf{a} = \delta_h \mathbf{b}$ với $h = \vee\mathbf{b}$ nên $r \le h$. Nếu $r = h$ thì $b_1 = \cdots = b_h = 0$ nên $\mathbf{b} = \mathbf{u}$. Nếu $r < h$ thì ta có $b_r = a_r = 1 > u_r = 0$ và $r = \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{b})$ nên $\mathbf{b} < \mathbf{u}$ nghĩa là $\mathbf{u} = 0\mathbf{a} = \max\{\mathbf{b} \in B(n+1) : \mathbf{b}^* = \mathbf{a}\}$.◇

2.3.6 Bổ đề. *Với* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in B(n)$ *và* $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ *ta có*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} < \mathbf{b} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{a}^* \le \mathbf{b}^* \\ \mathbf{a}^* < \mathbf{b}^* \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{a} < \mathbf{b} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Chứng minh. Ta biết rằng $\mathbf{a}^* = \delta_h \mathbf{a}$, $\mathbf{b}^* = \delta_k \mathbf{b}$ trong đó $h = \max\{i : a_i = 0\}$, $k = \max\{i : b_i = 0\}$. Nếu $\mathbf{b} = \mathbf{g}_n$ thì $\mathbf{b}^* = \mathbf{g}_{n-1}$ và ta có ngay kết quả nên ta chỉ xét trường hợp $\mathbf{b} \neq \mathbf{g}_n$ và do đó $w\mathbf{a}^* = w\mathbf{a}$ và $w\mathbf{b}^* = w\mathbf{b}$.

Nếu $w\mathbf{a} < w\mathbf{b}$ thì $\mathbf{a}^* < \mathbf{b}^*$ vì $w\mathbf{a}^* < w\mathbf{b}^*$. Giả sử rằng $w\mathbf{a} = w\mathbf{b}$ thì vì $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ ta có $a_i = 1 > b_i = 0$ với $i = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Vì $a_j = b_j$ với $j < i$ và $w\mathbf{a} = w\mathbf{b}$ nên có $t > i$ sao cho $a_t = 0$. Vậy $h > i$. Hiển nhiên $k \ge i$. Nếu $k = h$ hay $k > i$ thì $\alpha(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*) = i$ và $a_i^* = 1 > b_i^* = 0$ nên $\mathbf{a}^* < \mathbf{b}^*$. Nếu $k = i$ thì $b_j = 1,\ \forall j > i$ và $a_j = 1,\ \forall j > i,\ j \neq h$ nên ta có $\mathbf{a}^* = \mathbf{b}^*$.

Bây giờ giả sử $\mathbf{a}^* < \mathbf{b}^*$ thì $w\mathbf{a} = w\mathbf{a}^* \le w\mathbf{b}^* = w\mathbf{b}$. Nếu $w\mathbf{a}^* < w\mathbf{b}^*$ thì vì $w\mathbf{a} < w\mathbf{b}$ nên $\mathbf{a} < \mathbf{b}$. Ta xét trường hợp $w\mathbf{a}^* = w\mathbf{b}^*$. Vì $\mathbf{a}^* < \mathbf{b}^*$ nên $a_i^* = 1 > b_i^* = 0$ với $i = \alpha(\mathbf{a}^*, \mathbf{b}^*)$, và do đó có $t > i$ sao cho $a_t = 0$. Mà $h = \vee\mathbf{a}$, $k = \vee\mathbf{b}$ và theo Bổ đề 2.3.4 thì $\mathbf{a}^* = \max \Delta\mathbf{a}$, $\mathbf{b}^* = \max \Delta\mathbf{b}$ nên $h \ge t > i$ và $k \ge i$. Suy ra $a_i^* = a_i$, $b_i^* = b_i$ nên $\alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = i$ với $a_i = 1 > b_i = 0$ và do đó $\mathbf{a} < \mathbf{b}$.◇

2.3.7 Bổ đề. *Cho* $\mathbf{a} \in B(n)$ *và* $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *là những véctơ trong* $B(n)$ *sao cho* $\mathbf{c} \prec \mathbf{a} \prec \mathbf{b}$. *Ta có*

$$\mathbf{b} = \begin{cases} \mathbf{u}01\mathbf{g}_r\mathbf{z}_{p-1} & \text{nếu} \quad \mathbf{a} = \mathbf{u}1\mathbf{z}_p\mathbf{g}_r \\ \mathbf{g}_{r+1}\mathbf{z}_{p-1} & \text{nếu} \quad \mathbf{a} = \mathbf{z}_p\mathbf{g}_r \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\mathbf{c} = \begin{cases} \mathbf{z}_{p+1}\mathbf{g}_{r-1} & \text{nếu} \quad \mathbf{a} = \mathbf{g}_r\mathbf{z}_p \\ \mathbf{v}10\mathbf{z}_p\mathbf{g}_r & \text{nếu} \quad \mathbf{a} = \mathbf{v}01\mathbf{g}_r\mathbf{z}_p \end{cases} \tag{2.8}$$

trong đó p, r *có thể là 0.*

Chứng minh. Chú ý rằng một véctơ $\mathbf{a} \in B(n)$ có một trong hai dạng trong (2.7) hoặc trong (2.8). Vì (2.8) là hệ quả của (2.7) nên ta chỉ cần chứng minh (2.7). Nếu $\mathbf{a} = \mathbf{z}_p\mathbf{g}_r$ với $p \geq 1$ và $p + r = n$ thì $\mathbf{a}$ là véctơ lớn nhất có trọng lượng bằng r nên $\mathbf{b}$ là véctơ đầu tiên có trọng lượng $r+1$, do đó $\mathbf{b} = \mathbf{g}_{r+1}\mathbf{z}_{p-1}$ theo Bổ đề 2.3.2. Ngược lại, $\mathbf{a}$ phải có dạng $\mathbf{a} = \mathbf{u}1\mathbf{z}_p\mathbf{g}_r$ với $p \geq 1$ và $r \geq 0$. Đặt $\mathbf{x} = \mathbf{u}01\mathbf{g}_r\mathbf{z}_{p-1}$ ta sẽ chứng minh $\mathbf{a} \prec \mathbf{x}$ tức là $\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Hiển nhiên $\mathbf{a} < \mathbf{x}$. Giả sử có $\mathbf{y} \in B(n)$ sao cho $\mathbf{a} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{x}$ thì $w\mathbf{x} = w\mathbf{y} = w\mathbf{a}$. Ta viết $\mathbf{y}$ dưới dạng $\mathbf{y} = \mathbf{ef}$ với $\dim \mathbf{e} = \dim \mathbf{u}$. Nếu có i sao cho $e_i > u_i$ hoặc $e_i < u_i$ thì $\mathbf{y} < \mathbf{a}$ hoặc $\mathbf{y} > \mathbf{x}$. Cả hai trường hợp đều vô lí nên $\mathbf{e} = \mathbf{u}$ và từ (2.2) ta suy ra $\mathbf{d} = 1\mathbf{z}_p\mathbf{g}_r \leq \mathbf{f} \leq 01\mathbf{g}_r\mathbf{z}_{p-1} = \mathbf{h}$. Nếu thành phần đầu của $\mathbf{f}$ là 0 thì ta có $\mathbf{f}' = \delta_1\mathbf{f} \leq 1\mathbf{g}_r\mathbf{z}_{p-1} = \mathbf{h}'$ và vì $w\mathbf{f}' = w\mathbf{h}'$ nên theo (2.1) ta phải có $\mathbf{f}' = \mathbf{h}' \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{h} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{x}$. Nếu thành phần đầu của $\mathbf{f}$ là 1 thì lý luận tương tự như trên ta có $\mathbf{y} = \mathbf{a}$. Vậy $\mathbf{a} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{x}$ hoặc $\mathbf{y} = \mathbf{a}$ nên $\mathbf{a} \prec \mathbf{x}$ tức là $\mathbf{x} = \mathbf{b}$.◇

2.3.8 Bổ đề. *Cho $A \subset B(n)$. Nếu A là một IS thì ΔA cũng là một IS và hơn nữa, nếu $A = G0 + H1$ thì*

(i) *G, H là các IS trong B(n-1).*

(ii) $\Delta A = G = A^* = \{\mathbf{a}^* : \mathbf{a} \in A\}$ (2.9)

Chứng minh.(i) Cho $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ và $\mathbf{y} \in G$, ta sẽ chứng minh $\mathbf{x} \in G$. Đặt $\mathbf{u} = \mathbf{x}0$, $\mathbf{v} = \mathbf{y}0$ thì vì $\mathbf{y} \in G$ nên $\mathbf{v} \in G0 \subset A$. Ta có $\mathbf{u} < \mathbf{v}$ theo (2.2). Mà A là một IS và $\mathbf{v} \in A$ nên $\mathbf{u} \in A$, tức là $\mathbf{x}0 \in G0$ nên $\mathbf{x} \in G$. Chứng minh tương tự cho H.

(ii) Hiển nhiên $G \subset A^* \subset \Delta A$. Cho $\mathbf{x} \in \Delta A$ thì có $\mathbf{a} \in A$ sao cho $\mathbf{x} \in \Delta\mathbf{a}$. Đặt $\mathbf{u} = \mathbf{x}0$ thì $\mathbf{u}^* = \mathbf{x} \leq a^*$ nên $\mathbf{u} \leq \mathbf{a}$ và vì A là một IS nên $\mathbf{u} \in A$. Vậy $\mathbf{x} = \mathbf{u}^* \in A^*$. Hơn nữa $\mathbf{x}0 \in G0$ nên $\mathbf{x} \in G$. Ta đã chứng minh $\Delta A \subset A^* \subset G$ và do đó $\Delta A = A^* = G$.◇

2.3.9 Bổ đề. *Cho A là một IS của $B(n)$, $n \geq 3$ với $A = G0 + H1$. Nếu $G = G_0 0 + G_1 1$ và $H = H_0 0 + H_1 1$ thì*

$$H \subset G \quad \text{và} \quad H_1 \subset H_0 \subset G_1 \subset G_0 \tag{2.10}$$

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.3.8 thì G, H, G_0, G_1, H_0, H_1 đều là IS. Với $\mathbf{x} \in H$ thì $\mathbf{x}1 \in H1 \subset A$ và vì $\mathbf{x}0 < \mathbf{x}1$ nên $\mathbf{x}0 \in A$, tức là $\mathbf{x}0 \in G0$ nên $\mathbf{x} \in G$. Ta đã chứng minh $H \subset G$.

Bây giờ ta chứng minh $H_0 \subset G_1$. Cho $\mathbf{x} \in H_0$ thì $\mathbf{x}0 \in H'$ nên $\mathbf{x}01 \in H1 \subset A$. Vì $\mathbf{x}10 < \mathbf{x}01$ nên

$$\mathbf{x}01 \in A \Rightarrow \mathbf{x}10 \in A \Rightarrow \mathbf{x}1 \in G \Rightarrow \mathbf{x} \in G_1.$$

Theo phần đầu thì $H_1 \subset H_0$ và $G_1 \subset G_0$ nên

$$H_1 \subset H_0 \subset G_1 \subset G_0. \diamond$$

Ví dụ 2.5. Cho $A = B(5)$ thì $A = G0 + H1$ với G_0, G_1, H_0, H_1 như trong bảng sau

G_1	G_0	$G0$	$H1$	H_0	H_1
	00	0000			
	10	1000			
	01	0100			
00		0010			
			0001	00	
	11	1100			
10		1010			
			1001	10	
01		0110			
			0101	01	
			0011		00
11		1110			
			1101	11	
			1011		10
			0111		01
			1111		11

Bảng 2.1

Bảng trên cho ta thấy các véctơ được sắp theo thứ tự $\vee$ của $B(2)$ trong G_0, G_1, H_0, H_1, của $B(3)$ trong G, H và của $B(4)$ trong $G0+H1$. Hơn nữa, Bảng 2.1 cũng cho ta thấy (2.10) đúng với mọi IS trong $B(4)$.

2.3.10 Định lý. *Cho G, H là IS của $B(n)$,$n \geq 2$ với $H \subset G$ và $A = G0 + H1$. Nếu $G = G_0 0 + G_1 1$ và $H = H_0 0 + H_1 1$ thì*

$$\Delta A = \begin{cases} G & \text{nếu } H_0 \subset G_1 \\ G_0 0 + H_0 1 & \text{nếu } G_1 \subset H_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Chứng minh. Vì G, H là những IS của $B(n)$ nên theo Bổ đề 2.3.8 thì $\Delta G = G_0$, $\Delta H = H_0$ và vì $H \subset G$ nên ta có

$$\begin{aligned} \Delta A &= G \cup (\Delta G)0 \cup H \cup (\Delta H)1 \\ &= G \cup G_0 0 \cup H_0 1 \\ &= G_0 0 \cup G_1 1 \cup H_0 1. \end{aligned}$$

Vậy nếu $H_0 \subset G_1$ thì $\Delta A = G_0 0 \cup G_1 1 = G$ và nếu $G_1 \subset H_0$ thì $\Delta A = G_0 0 \cup H_0 1.\Diamond$

2.3.11 Định nghĩa. (i) *Véctơ bù của* $\mathbf{a} \in B(n)$ *được định nghĩa là* $\bar{\mathbf{a}} = \bar{a}_1\bar{a}_2 \dots \bar{a}_n$ *với*

$$\bar{a}_i = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a_i = 0 \\ 0 & \text{nếu } a_i = 1 \end{cases}$$

(ii) *Phần bù của* $A \subset B(n)$ *là* $\bar{A} = \{\bar{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in A\}$.

Hiển nhiên $|\bar{A}| = |A|$ và ta có

$$\Delta(\bar{A}) = \overline{\Delta A}, \ |\Delta(\bar{A})| = |\overline{\Delta A}| \tag{2.12}$$

2.3.12 Định lý. *Nếu hệ thức $\Delta C(X) \subset C(\Delta X)$ đúng với mọi tập con X của $B(n-1)$, $n \geq 2$ thì ta có*

$$|\Delta C_n(A)| \leq |\Delta A|, \ \ \forall A \subset B(n) \tag{2.13}$$

Chứng minh. Với $A = M0 + N1 \in B(n)$ thì $C_n(A) = G0 + H1$ với $G = C(M)$, $H = C(N)$. Theo (2.12) ta có $|\Delta(\bar{A})| = |\overline{\Delta A}| = |\Delta A|$. Bằng cách thay A bởi $\bar{A}$ nếu cần ta có thể giả sử $|N| \leq |M|$ và do đó $H = C(N) \subset G = C(M)$. Theo giả thiết, $\Delta G \subset C(\Delta M)$, $\Delta H \subset C(\Delta N)$ nên ta suy ra

$$|\Delta G| \leq |\Delta M|, \ \ |\Delta H| \leq |\Delta N|.$$

Ngoài ra, $(\Delta M)0 + (\Delta N)1 \subset \Delta A$ nên

$$|\Delta M| + |\Delta N| \leq |\Delta A|.$$

Theo (2.11) thì

$$\Delta C_n(A) = \begin{cases} G & \textit{nếu } H_0 \subset G_1 \\ G_0 0 + H_0 1 & \textit{nếu } G_1 \subset H_0 \end{cases}$$

Vậy nếu $\Delta C_n(A) = G$ thì $|\Delta C_n(A)| = |G| = |M| \leq |\Delta A|$, còn nếu $\Delta C_n(A) = G_0 0 + H_0 1$ thì

$$\begin{aligned} |\Delta C_n(A)| &= |G_0| + |H_0| = |\Delta G| + |\Delta H| \\ &\leq |\Delta M| + |\Delta N| \\ &\leq |\Delta A|. \diamondsuit \end{aligned}$$

2.3.13 Định nghĩa. *Ta bảo $A \subset B(n)$ là* bị nén từng phần *hay PC (part compressed) nếu $C_n(A) = A$, nghĩa là A có dạng $A = G0 + H1$ với G, H là những IS của $B(n-1)$.*

2.3.14 Định nghĩa. *Gọi Γ là tập hợp các véctơ của $B(n)$ có dạng $\mathbf{u}\mathbf{z}_p 1$ với $\mathbf{u} = \emptyset$ hoặc thành phần cuối của $\mathbf{u}$ là 1 và $p \geq 1$. Với $\mathbf{a} = \mathbf{u}\mathbf{z}_p 1 \in \Gamma$ ta đặt $\gamma\mathbf{a} = \mathbf{u}1\mathbf{z}_p$.*

(i) Ánh xạ dồn *ψ từ $A \subset B(n)$ vào $B(n)$ được định nghĩa như sau*

$$\psi(\mathbf{a}) = \begin{cases} \gamma\mathbf{a} & \text{nếu } \mathbf{a} \in \Gamma \text{ và } \gamma\mathbf{a} \notin A \\ \mathbf{a} & \text{nếu ngược lại} \end{cases}$$

(ii) $A \subset B(n)$ gọi là ψ-đóng (ψ-closed) nếu $\psi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a} \in A$

Nhận xét rằng $\psi(\mathbf{a}) \leq \mathbf{a}$ nên ψ "đẩy" A về phía trước (trong thứ tự V), do đó nếu A là một IS thì A là ψ-đóng.

2.3.15 Định lý. *Nếu $A \subset B(n)$ là PC thì*

$$\Delta\psi(A) \subset \psi(\Delta A) \tag{2.14}$$

và do đó

$$|\Delta\psi(A)| \leq |\Delta A| \tag{2.15}$$

Chứng minh. Cần chú ý rằng ψ ở vế trái của (2.14) là ánh xạ từ A vào $B(n)$ còn ψ ở vế phải là ánh xạ từ ΔA vào $B(n-1)$. Hơn nữa, nếu $\mathbf{x} \in \Delta A$ và $\mathbf{x} = \psi\mathbf{x}$ thì $\mathbf{x} \in \psi(\Delta A)$.

Vì A là PC nên ta có thể viết $A = G0 + H1$ với G, H là các IS của $B(n-1)$. Như trong chứng minh của Bổ đề 2.3.12, ta có thể giả sử $H \subset G$.

Cho $\mathbf{x} \in \Delta\psi(A)$ thì có $\mathbf{b} = \psi(\mathbf{a}) \in \psi(A)$, $\mathbf{a} \in A$ sao cho $\mathbf{x} \in \Delta\mathbf{b}$ tức là $\mathbf{x} \in \Delta\psi(\mathbf{a})$. Ta sẽ chứng minh $\mathbf{x} \in \psi(\Delta A)$. Nếu $\mathbf{a} \in G0$ thì $\psi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ nên $\mathbf{x} \in \Delta\mathbf{a}$. Đặt $\mathbf{u} = \mathbf{x}0$ thì $\mathbf{u} \leq \mathbf{a}$. Vì G là IS ta có $\mathbf{u} \in G0$ nên $\mathbf{x} \in G$ và $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ tức là $\mathbf{x} \in \psi(\Delta A)$. Vậy ta chỉ cần xét $\mathbf{a} \in H1$ với 3 trường hợp: $\mathbf{a} \notin \Gamma$, $\mathbf{a} \in \Gamma$ và $\gamma\mathbf{a} \in A$, $\mathbf{a} \in \Gamma$ và $\gamma\mathbf{a} \notin \Gamma$.

Trường hợp 1. $\mathbf{a} \notin \Gamma$.

Trường hợp này $\mathbf{a}$ có dạng $\mathbf{a} = \mathbf{u}\mathbf{z}_p\mathbf{g}_r$ với $p \geq 0$, $\dim \mathbf{g}_r = r \geq 2$ và $\mathbf{b} = \psi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ nên $\mathbf{x} \in \Delta A$. Nếu $r \geq 3$ hay $\mathbf{x} = \delta_j(\mathbf{u}\mathbf{z}_p)\mathbf{g}_r$ thì 2 thành phần cuối của $\mathbf{x}$ là 11 nên $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{x}) \in \psi(\Delta A)$. Giả sử $\mathbf{a} = \mathbf{u}\mathbf{z}_p11$ và $\mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{z}_p1$ với $p \geq 1$. Đặt $\mathbf{c} = \mathbf{u}1\mathbf{z}_p1$ thì $\mathbf{x} \in \Delta\mathbf{c}$. Hiển nhiên $\mathbf{c} < \mathbf{a} \in H1$ và vì A là PC nên $\mathbf{c} \in H1$. Suy ra $\mathbf{x} = \mathbf{u}\mathbf{z}_p1$ và $\mathbf{u}1\mathbf{z}_p$ đều ở trong ΔA và vì vậy $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{x}) \in \psi(\Delta A)$. Trường hợp 1 có thể được tóm tắt như sau

a	x	*Lý do* $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{x})$	*Ghi chú*
$\mathbf{u}\mathbf{z}_p\mathbf{g}_r$	$\mathbf{u}\mathbf{z}_p\mathbf{g}_{r-1}$	*Định nghĩa của* ψ	$r > 2$
$\mathbf{u}\mathbf{z}_p11$	$\mathbf{u}'11$	*Định nghĩa của* ψ	$r = 2,\ \mathbf{u}' \in \Delta(\mathbf{u}\mathbf{z}_p)$
$\mathbf{u}\mathbf{z}_p11$	$\mathbf{u}\mathbf{z}_p1$	$\mathbf{c} < \mathbf{a} \in A \Rightarrow \mathbf{c} \in A$ $\Rightarrow \gamma\mathbf{x} = \mathbf{u}1\mathbf{z}_p \in \Delta A$	$r = 2,\ \mathbf{c} = \mathbf{u}1\mathbf{z}_p1$

Bảng 2.2

Trường hợp 2. $\mathbf{b} = \mathbf{a} = \mathbf{u}\mathbf{z}_p1 \in \Gamma$ và $\gamma\mathbf{a} = \mathbf{u}1\mathbf{z}_p \in A$.

Nhắc lại rằng thành phần cuối của $\mathbf{u}$ là 1 hoặc $\mathbf{u} = \emptyset$ và vì $\psi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ nên $\gamma\mathbf{a} = \mathbf{u}1\mathbf{z}_p \in A$. Trường hợp này ta cũng có $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, $\forall \mathbf{x} \in \Delta A$ như được thể hiện ở Bảng 2.3 mà ở dòng thứ tư ta có $\gamma\mathbf{x} = \mathbf{v}'11\mathbf{z}_p \in \Delta\mathrm{A}$ vì $\mathbf{b} = \mathbf{v}11\mathbf{z}_p \in A$. Còn trong dòng cuối cùng ta có $\mathbf{a} = \mathbf{w}\mathbf{z}_r1\mathbf{z}_p1 \Rightarrow \gamma\mathbf{a} = \mathbf{w}\mathbf{z}_r11\mathbf{z}_p \in A \Rightarrow \mathbf{w}1\mathbf{z}_r1\mathbf{z}_p \in A$ (vì A là PC và $\mathbf{w}1\mathbf{z}_r1\mathbf{z}_p < \gamma\mathbf{a}$) nên $\mathbf{w}1\mathbf{z}_r\mathbf{z}_p \in \Delta A$.

a	x	*Lý do* $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{x})$	*Ghi chú*
$\mathbf{uz}_p\mathbf{1}$	$\mathbf{uz}_p$	*Định nghĩa của* ψ	$p \geq 1$
$\mathbf{u01}$	$\mathbf{u1}$	*Định nghĩa của* ψ	$p = 1$
$\mathbf{uz}_p\mathbf{1}$	$\mathbf{uz}_{p-1}\mathbf{1}$	$\gamma\mathbf{x} = \mathbf{u1z}_{p-1} \in \Delta A$	$p \geq 2,\ \gamma\mathbf{a} = \mathbf{u1z}_p \in A$
$\mathbf{v1z}_p\mathbf{1}$	$\mathbf{v'1z}_p\mathbf{1}$	$\gamma\mathbf{x} = \mathbf{v'11z}_p \in \Delta A$	$\mathbf{u} = \mathbf{v1},\ \mathbf{v'} \in \Delta\mathbf{v}$
$\mathbf{wz}_r\mathbf{1z}_p\mathbf{1}$	$\mathbf{wz}_r\mathbf{z}_p\mathbf{1}$	$\gamma\mathbf{x} = \mathbf{w1z}_r\mathbf{z}_p \in \Delta A$	$\mathbf{u} = \mathbf{wz}_r\mathbf{1},\ r > 0$

Bảng 2.3

Trường hợp 3. $\mathbf{a} = \mathbf{uz}_p\mathbf{1} \in \Gamma$ và $\mathbf{b} = \mathbf{u1z}_p \notin A$.

Trường hợp này ta có $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{y})$ với $\mathbf{y} \in \Delta A$ như được thể hiện trong bảng sau

a	b	x	y	*Ghi chú*
$\mathbf{uz}_p\mathbf{1}$	$\mathbf{u1z}_p$	$\mathbf{u1z}_{p-1}$	$\mathbf{uz}_{p-1}\mathbf{1}$	$p > 1$
$\mathbf{u01}$	$\mathbf{u10}$	$\mathbf{u1}$	$\mathbf{x}$	$\mathbf{x} \in \Delta A,\ p = 1$
$\mathbf{v1z}_p\mathbf{1}$	$\mathbf{v11z}_p$	$\mathbf{v'11z}_p$	$\mathbf{v'1z}_p\mathbf{1}$	$\mathbf{u} = \mathbf{v1},\ \mathbf{v'} \in \Delta\mathbf{v}$
$\mathbf{w01z}_p\mathbf{1}$	$\mathbf{w011z}_p$	$\mathbf{w01z}_p$	$\mathbf{x}$	$\mathbf{x} \in \Delta\mathbf{A},\ \mathbf{u} = \mathbf{w01}$

Bảng 2.4

Trong Bảng 2.4, ở dòng đầu ta có $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{x})$ nếu $\mathbf{x} \in \Delta A$ và $\mathbf{x} = \psi(\mathbf{y})$ nếu $\mathbf{x} \notin \Delta A$.

Phần cuối cùng ta phải chứng minh là (2.15), nhưng hệ thức này là hiển nhiên vì $|\psi(\Delta A)| = |\Delta A|$.

2.3.16 Bổ đề. *Cho* $A = G0 + H1 \subset B(n)$ *với* A *là PC và* $H \subset G$ *thì*

$$\Delta A = A^* = \{\mathbf{a}^* : \mathbf{a} \in A\} \tag{2.16}$$

Chứng minh. Do $A^* \subset \Delta A$ nên ta chứng minh chiều ngược lại. Vì A là PC nên G, H là những IS của $B(n-1)$. Với $\mathbf{x} \in \Delta A$ thì có $\mathbf{a} \in A$ sao cho $\mathbf{x} \in \Delta\mathbf{a}$, tức là $\mathbf{x} = \delta_j\mathbf{a}$ với một j và $\mathbf{x} \leq \mathbf{a}^*$.

Giả sử $\mathbf{a} \in G0$. Đặt $\mathbf{c} = \mathbf{x}0$ thì $\mathbf{c} \leq \mathbf{a}^*0 = \mathbf{a}$ nên $\mathbf{c} \in G0 \subset A$ vì A là PC. Vậy $\mathbf{x} = \mathbf{c}^* \in A^*$.

Xét trường hợp $\mathbf{a} \in H1$, tức là $\mathbf{a} = \mathbf{u}1$ với $\mathbf{u} \in H$. Trước tiên, xét $\mathbf{x} = \delta_n\mathbf{a} = \mathbf{u} \in H \subset G$. Ta có $\mathbf{u}0 \in G0$ nên $\mathbf{x} = (\mathbf{u}0)^* \in A^*$. Giả sử $\mathbf{x} = \mathbf{v}1 = \delta_j\mathbf{a}$ với $j \neq n$. Đặt $\mathbf{b} = \mathbf{v}01$ thì $\mathbf{b}^* = \mathbf{v}1 = \mathbf{x} \leq \mathbf{a}^*$ nên $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}$ suy ra $\mathbf{b} \in A$ (do A là PC). Vậy $\mathbf{x} = \mathbf{b}^* \in A^*$.$\diamondsuit$

Ta đã chứng minh $\Delta A \subset A^*$ và do đó $\Delta A = A^*$.

2.3.17 Bổ đề. *Cho $A = G0 + H1 \subset B(n)$ với $H \subset G$ và A là PC nhưng không là IS. Gọi $\mathbf{e} = e_1e_2\ldots e_n$ là véctơ nhỏ nhất của $B(n)$ không ở trong A và $\mathbf{f} = f_1f_2\ldots f_n$ là véctơ lớn nhất của A. Ta có*

(i) $\Delta\mathbf{e} - \{\mathbf{e}^*\} \subset \Delta A$ và nếu $e_n = 1$ thì $\mathbf{e}^* \in \Delta A$, tức là $\Delta\mathbf{e} \subset \Delta A$.

(ii) $(\Delta\mathbf{f} - \{\mathbf{f}^*\}) \subset \Delta(A - \{\mathbf{f}\})$ và nếu $f_n = 0$ thì $\mathbf{f}^* \notin \Delta(A - \{\mathbf{f}\})$.

Chứng minh. (i) Với $\mathbf{x} \in \Delta\mathbf{e}$, đặt $\mathbf{a} = \mathbf{x}0$ thì ta có $\mathbf{a}^* = \mathbf{x} \leq \mathbf{e}^*$. Nếu $\mathbf{x} \neq \mathbf{e}^*$ hoặc $\mathbf{x} = \mathbf{e}^*$ và $e_n = 1$ thì $\mathbf{a} < \mathbf{e}$ nên $\mathbf{a} \in A$ do định nghĩa của $\mathbf{e}$ và do đó $\mathbf{x} \in \Delta A$. Vậy ta có (i).

(ii) Cho $\mathbf{x} \in \Delta\mathbf{f}$, $\mathbf{x} < \mathbf{f}^*$ thì $\mathbf{x} \in \Delta A - \{\mathbf{f}^*\}$. Vì $\Delta A = A^*$ theo (2.16) nên $\mathbf{x} \in A^* - \{\mathbf{f}^*\} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}^*$. Vì $\mathbf{a}^* = \mathbf{x} < \mathbf{f}^*$ nên $\mathbf{a} < \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{a} \in (A - \{\mathbf{f}\})$. Vậy $\mathbf{x} = \mathbf{a}^* \in \Delta(A - \{\mathbf{f}\})$ và do đó $(\Delta\mathbf{f} - \{\mathbf{f}^*\}) \subset \Delta(A - \{\mathbf{f}\})$. Ngoài ra theo Bổ đề 2.3.5 thì nếu $f_n = 0$ ta có $\mathbf{f}^* \notin \Delta(A - \{\mathbf{f}\})$.$\diamondsuit$

Nhắc lại rằng nếu $\mathbf{y}$ là trội trực tiếp của $\mathbf{x}$ thì ta viết $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$.

2.3.18 Định nghĩa. (i) *Một* đoạn-zero *(0-slice) của $B(n)$ là một dãy véctơ của $B(n)$ liên tiếp nhau $\mathbf{a}_1 \prec \mathbf{a}_2 \cdots \prec \mathbf{a}_s$ sao cho thành phần thứ n của $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_s$ là 0 và nếu $\mathbf{u} = u_1\ldots u_n \prec \mathbf{a}_1$ và $\mathbf{a}_s \prec \mathbf{v} = v_1\ldots v_n$ thì $u_n = v_n = 1$.*

Định nghĩa tương tự cho đoạn-một *(1-slice).*

(ii) Nếu I là đoạn-zero và J là đoạn-một thì ta viết $I \prec J$ hay $J \prec I$ tùy theo I ở ngay trước J hay J ở ngay trước I, tức là

$$\begin{aligned} I \prec J \quad &\text{nếu} \quad \max I \prec \min J, \\ J \prec I \quad &\text{nếu} \quad \max J \prec \min I. \end{aligned}$$

2.3.19 Bổ đề. *Cho I là một đoạn-zero, J là một đoạn-một của $B(n)$, $n \geq 2$ với $\mathbf{a} = \max I$ và $\mathbf{b} = \min J$. Ta có* *(i)* $\mathbf{a} = \mathbf{u}\mathbf{g}_r0$ *với* $r \geq 1$ *và* $\mathbf{u} = \emptyset$ *hay* $\mathbf{u}$ *có dạng* $\mathbf{u} = \mathbf{v}0$. *Hơn nữa*

$$r = 1 \iff |I| \geq 2,$$

$$r \geq 2 \iff |I| = 1.$$

(ii) $\mathbf{b} = \mathbf{e}\mathbf{z}_p1$ *với* $p \geq 1$ *và* $\mathbf{e} = \emptyset$ *hay* $\mathbf{e}$ *có dạng* $\mathbf{e} = \mathbf{f}1$. *Hơn nữa*

$$p = 1 \iff |J| \geq 2,$$

$$p \geq 2 \iff |J| = 1.$$

Ví dụ 2.6. $B(4)$ được phân hoạch thành các đoạn-zero và đoạn-một theo thứ tự tăng dần như sau

	Đoạn-zero	Đoạn-một	
I_1	0000		
	1000		
	0100		
	0010		
		0001	J_1
I_2	1100		
	1010		
		1001	J_2
I_3	0110		
		0101	J_3
		0011	
I_4	1110		
		1101	J_4
		1011	
		0111	
		1111	

Hình 2.1

Ở đây ta có $I_1 \prec J_1 \prec I_2 \prec J_2 \prec I_3 \prec J_3 \prec I_4 \prec J_4$. Hơn nữa

$$|I_s| = 1 \Leftrightarrow |J_s| > 1, \;\; s = 1, \ldots, 4.$$

Chứng minh 2.3.19. Trường hợp $n = 2$ là hiển nhiên nên ta chỉ xét $n > 2$.

(i) Nếu $\mathbf{a} = a_1a_2\ldots a_n$ với $a_{n-1} = a_n = 0$ thì $\mathbf{a}$ có dạng $\mathbf{a} = \mathbf{w}1\mathbf{z}_p$ với $p > 1$. Đặt $\mathbf{c} = \mathbf{w}01\mathbf{z}_{p-1}$ thì $c_n = 0$ và $\mathbf{a} \prec \mathbf{c}$ theo (2.7) nên $\mathbf{c} \in I$ theo định nghĩa của I, điều này mâu thuẫn với tính lớn nhất của $\mathbf{a}$. Vậy $a_{n-1} = 1$ và ta có thể viết $\mathbf{a} = \mathbf{u}\mathbf{g}_r0$ với $r \geq 1$ và $\mathbf{u} = \emptyset$ hay $\mathbf{u}$ có thành phần cuối là 0: $\mathbf{u} = \mathbf{v}0$. Đặt $\mathbf{d} = \mathbf{a}^-$ tức $\mathbf{d} \prec \mathbf{a}$.

Nếu $r = 1$ thì $\mathbf{a} = \mathbf{v}010$ (vì $n \geq 3$) thì $\mathbf{d} = \mathbf{v}100$ nên $\mathbf{d} \in I$ và do đó $|I| \geq 2$.

Giả sử $r \geq 2$. Theo (2.8) thì

$$\mathbf{d} = \begin{cases} 00\mathbf{g}_{r-1} & \text{nếu} \quad \mathbf{u} = \emptyset \\ \mathbf{v}100\mathbf{g}_{r-1} & \text{nếu} \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}0 \end{cases}$$

Trường hợp này thì thành phần cuối của $\mathbf{d}$ là 1 nên

$$\mathbf{d} \notin I \Rightarrow I = \{\mathrm{a}\}$$

tức là $|I| = 1$.

Phần (ii) được chứng minh hoàn toàn tương tự.◇

2.3.20 Bổ đề. *Cho I, J lần lượt là đoạn-zero và đoạn-một của $B(n)$, $n \geq 3$ sao cho $I \prec J$. Ta có*

$$|I| = 1 \Longleftrightarrow |J| \geq 2 \tag{2.17}$$

$$|I| \geq 2 \Longleftrightarrow |J| = 1 \tag{2.18}$$

Chứng minh. Đặt $\mathbf{a} = \max I$ và $\mathbf{b} = \min J$ thì $\mathbf{a} \prec b$.

Giả sử $I = \{\mathrm{a}\}$. Theo Bổ đề 2.3.19 (i), $\mathbf{a}$ có thể viết $\mathbf{a} = \mathbf{u}\mathbf{g}_r0$ với $r \geq 2$ và hơn nữa, $\mathrm{a} \prec \mathbf{u}\mathbf{g}_{r-1}01 \prec \mathbf{u}\mathbf{g}_{r-2}011$ nên $\mathbf{u}\mathbf{g}_{r-1}01$, $\mathbf{u}\mathbf{g}_{r-2}011 \in J$, nghĩa là $|J| \geq 2$.

Đảo lại, cho $|J| \geq 2$. Theo Bổ đề 2.3.19, ta có thể viết $\mathrm{b} = \mathbf{v}101 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{v}110$. Đặt $\mathbf{c} = \mathbf{a}^-$, nghĩa là $\mathbf{c} \prec \mathbf{a}$. Nếu $\mathbf{v}11 = \mathbf{g}_{n-1}$ thì theo Bổ đề 2.3.2, $\mathbf{a}$ là véctơ đầu tiên của $B(n, n-1)$ và $\mathbf{c}$ là véctơ cuối cùng của $B(n, n-2)$ nên $\mathbf{c} = 00\mathbf{g}_{n-2} \Rightarrow \mathbf{c} \notin I$. Ngược lại, ta có thể viết

$\mathbf{a} = \mathbf{wz}_p\mathbf{g}_r0$ với $p \geq 1$, $r \geq 2$ và theo (2.8) thì $\mathbf{c} = \mathbf{wz}_{p-1}100\mathbf{g}_{r-1} \Rightarrow \mathbf{c} \notin I$. Vậy $I = \{\mathbf{a}\}$ tức là $|I| = 1$.

(2.18) là phần đảo của (2.17).◇

2.3.21 Bổ đề. *Gọi $\mathcal{J}$ là tập hợp tất cả các đoạn-một của $B(n)$, $n \geq 3$. Ta có*

$$|J^*| = 1, \ \forall J \in \mathcal{J} \tag{2.19}$$

Chứng minh. Ta chỉ cần xét trường hợp $|J| \geq 2$. Cho $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in J$ với $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ thì $\mathbf{x}^* \leq \mathbf{y}^*$. Giả sử $\mathbf{x}^* < \mathbf{y}^*$. Đặt $\mathbf{w} = \mathbf{y}^*0$ thì $\mathbf{w} \neq \mathbf{y}$ vì $y_n = 1$ và theo (2.4), ta có $\mathbf{w} < \mathbf{y}$. Hơn nữa, $\mathbf{w}^* = \mathbf{y}^* > \mathbf{x}^*$. Vậy $\mathbf{x} < \mathbf{w} < \mathbf{y}$. Điều này không thể xảy ra vì J là đoạn-một mà thành phần cuối của $\mathbf{w}$ là 0.◇

2.3.22 Định lý. *Với mọi $A \subset B(n)$ ta có*

$$\Delta C(A) \subset C(\Delta A) \tag{2.20}$$

hay tương đương

$$|\Delta C(A)| \leq |\Delta A| \tag{2.21}$$

Chứng minh. Chú ý rằng (2.20) và (2.21) tương đương vì $\Delta C(A)$ là một IS theo Bổ đề 2.3.8 và $|\Delta A| = |C(\Delta A)|$

Ta chứng minh định lý bằng qui nạp theo n. Trường hợp $n = 2$ có thể được kiểm chứng một cách dễ dàng. Giả sử $n \geq 3$ và định lý đúng với $n-1$, ta sẽ chứng minh định lý cũng đúng với n.

Nếu A là IS thì hiển nhiên định lý đúng nên ta chỉ xét A không là *IS*. Ta sẽ từng bước chuyển A thành $C(A)$ mà ở mỗi bước, ta chuyển A thành D với $|\Delta D| \leq |\Delta A|$.

Bước 1. Đặt $A^0 = A$, $A^1 = C_n(A)$, $A^2 = \psi(A^1), A^3 = C_n(A^2)$, $A^4 = \psi(A^3)\ldots$, tức là

$$A^{r+1} = \begin{cases} C_n(A^r) & \text{nếu } r \text{ chẵn} \\ \psi(A^r) & \text{nếu } r \text{ lẻ} \end{cases}$$

với $C_n(A^r)$ là phần nén thứ n của A^r và ψ là ánh xạ dồn. Vì A là hữu hạn nên tồn tại q sao cho A^q là PC và ψ-đóng. Do các Định lý 2.3.12 và

2.3.15 ta có $|\Delta A^q| \le |\Delta A^{q-1}| \le \cdots \le |\Delta A|$. Bằng cách xét A^q thay cho A, ta có thể giả sử A là PC và ψ-đóng, tức là $A = G0 + H1$ với G, H là các IS của $B(n-1)$, $H \subset G$ và $\psi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a} \in A$. Hơn nữa, $\Delta A = A^*$ theo Bổ đề 2.3.16.

Bước 2. Nếu $H = \emptyset$ thì $A = G0$. Đặt $F = C(A)$ thì $\Delta F = F^*$ theo Bổ đề 2.3.8 nên

$$|\Delta C(A)| = |F^*| \le |F| = |A| = |G| \le |\Delta A|$$

và do đó định lý được chứng minh. Vậy, ta có thể giả sử $H \neq \emptyset$.

Bước 3. Gọi $\mathbf{e} = e_1 e_2 \ldots e_n$ là véctơ nhỏ nhất của $B(n)$ không ở trong A, $\mathbf{f} = f_1 f_2 \ldots f_n$ là véctơ lớn nhất của A ta có $\mathbf{e} < \mathbf{f}$ vì A không là IS. Hơn nữa, $e_n \neq f_n$ vì nếu ngược lại thì $\mathbf{e} \in A$ do A là PC. Đặt $D = (A - \{\mathbf{f}\}) \cup \{\mathbf{e}\}$ thì hiển nhiên D là PC và ψ-đóng. Ngoài ra, $\Delta D = D^*$.

Nếu $e_n = 1$, $f_n = 0$ thì theo Bổ đề 2.3.17 ta có

$$\Delta \mathbf{e} \subset \Delta A = A^* \text{ và } \mathbf{f}^* \notin \Delta(A - \{\mathbf{f}\}).$$

Do đó

$$\Delta D = D^* = A^* - \{\mathbf{f}^*\} = \Delta A - \{\mathbf{f}^*\} \Rightarrow |\Delta D| = |\Delta A| - 1.$$

Lặp lại quá trình này (với $A := D$) cho đến khi $e_n = 0$, $f_n = 1$.

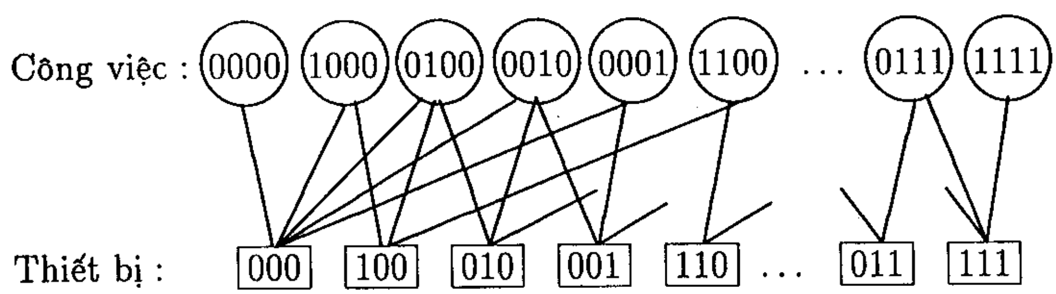
Bước 4. $e_n = 0$, $f_n = 1$. Gọi J là đoạn-một chứa $\mathbf{f}$ và I là đoạn-zero ngay trước J (tức là $I \prec J$) và $\mathbf{a} = \max I$, $\mathbf{b} = \min J$. Theo Bổ đề 2.3.19 thì $\mathbf{b}$ có thể viết $\mathbf{b} = \mathbf{u}\mathbf{z}_p 1$ với $\mathbf{u} = \emptyset$ hoặc $\mathbf{u}$ có dạng $\mathbf{u} = \mathbf{v}1$. Do $\psi(A) = A$ ta có $\gamma\mathbf{b} = \mathbf{u}1\mathbf{z}_p \in A$. Ngoài ra $\gamma\mathbf{b} = \min I$ do (2.8). Nếu $\mathbf{e} \notin I$ thì $\mathbf{e} < \gamma\mathbf{b}$ và vì A là PC nên $\mathbf{e} \in A$ vô lý. Vậy $\mathbf{e} \in I$.

Nếu $p = 1$ tức là $\mathbf{b}$ có dạng $\mathbf{b} = \mathbf{v}101$ và do Bổ đề 2.3.19, ta có $|J| \ge 2$ và theo (2.17) thì $|I| = 1$, nghĩa là $I = \{\mathbf{a}\}$ với $\mathbf{a} = \mathbf{u}110$. Vì $\psi(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ nên $\gamma\mathbf{b} = \mathbf{u}110 \in A$, tức là $\mathbf{a} \in A$. Suy ra, A là một IS, trái giả thiết và do đó $p \ge 2$. Theo (2.18) thì $|J| = 1$ nên $\mathbf{b} = \mathbf{f}$ và $J = \{\mathbf{f}\}$. Vì $D = (A - \{\mathbf{f}\}) \cup \{\mathbf{e}\}$ ta có D là IS nghĩa là $D = C(A)$ và theo Bổ đề 2.3.17 thì $\Delta D = (\Delta A - \{\mathbf{f}^*\}) \cup \{\mathbf{e}^*\} \Rightarrow |\Delta D| = |\Delta A|$. Vậy định lý được chứng minh.◇

Ví dụ sau đây sẽ cho ta thấy một ứng dụng của kết quả trên.

Ví dụ 2.7. Giả sử ta có $r \leq 2^n$ công việc được mã hóa bằng r véctơ đầu tiên của $B(n)$ trong thứ tự $\vee$ (mỗi công việc tương ứng với một véctơ) và những công việc này cần các thiết bị, mỗi thiết bị được mã hóa bằng một véctơ trong $B(n-1)$. Công việc có mã là $\mathbf{a}$ cần các thiết bị có mã là các véctơ trong $\Delta\mathbf{a}$. Với $m \leq r$ cho sẵn, một nhân viên sẽ được xem là hoàn thành nhiệm vụ nếu thực hiện được m trong r công việc đã cho, và sẽ được thưởng nếu thực hiện m công việc này với số thiết bị ít nhất. Hỏi nhân viên này phải chọn m công việc nào để hoàn thành mà được nhận thưởng?

Hình 2.2 dưới đây mô tả trường hợp $n = 4$.



Hình 2.2

Theo Định lý 2.3.22, nhân viên này sẽ được nhận thưởng nếu chọn m công việc có mã là m véctơ đầu tiên của $B(n)$ trong thứ tự $\vee$. ◇

Đối chiếu với Định nghĩa 1.2.4 về K-poset, ta có

2.3.23 Định lý. *Tập hợp $\mathcal{B}$ các véctơ Bool là một K-poset.*

Chứng minh. Ta đã biết $\mathcal{B}$ là một poset có hạng với mức thứ n là $B(n)$. Với $n \geq 1$ thì hiển nhiên $\Delta B(n) = B(n-1)$. Với thứ tự tuyến tính là thứ tự $\vee$ thì theo Bổ đề 2.3.8 ta có ΔA là IS nếu A là IS và hơn nữa, $|\Delta C(A)| \leq |\Delta A|$ theo Định lý 2.3.22. Do đó $\mathcal{B}$ là một K-poset.◇

Chương 3.

CÁC BÀI TOÁN VỀ BIỂU DIỄN VÀ ĐỊNH LÝ KIỂU LOVASZ

Trong Chương 2, ta đã biết rằng với thứ tự tuyến tính là thứ tự $\vee$ thì $\mathcal{B}$ là K-poset. Như trong Định lý Kruskal-Katona, gắn liền với K-poset $\mathcal{B}$ là các bài toán về biểu diễn mà ta sẽ xét trong chương này, đồng thời ta cũng chứng minh định lý kiểu Lovasz. Các kết quả này đã được công bố trong [1], [2], [3], [5] và [8].

3.1 Các bài toán về biểu diễn trên $\mathcal{B}$

Gọi $B(n,k)$ là tập hợp các véctơ của $B(n)$ có trong lượng bằng k. Hiển nhiên ta có $|B(n,k)| = \binom{n}{k}$ và

$$B(n) = B(n,0) + B(n,1) + \cdots + B(n,n).$$

Ngoài ra, như trong chương trước, với $\mathbf{u} \in B(s)$ cho sẵn, thì

$$\mathbf{u}B(n,k) = \{\mathbf{ux} : \mathbf{x} \in B(n,k)\}.$$

Ta biết rằng bài toán về biểu diễn là bài toán tìm vị trí của $\mathbf{a} \in B(n)$ trong thứ tự $\vee$ và đảo lại, tìm $\mathbf{a}$ khi ta biết vị trí của nó.

Trước tiên ta xét Bài toán 1.

Bài toán 1. *Tìm $m = |IS(\mathbf{a})|$ và $\Delta m = |\Delta IS(\mathbf{a})|$ với $\mathbf{a} \in B(n)$ cho sẵn.*

Theo kết quả ở Chương 2, ta có $\Delta IS(\mathbf{a}) = IS(\mathbf{a}^*)$ nên ta viết $IS(\mathbf{a}^*)$ thay cho $\Delta IS(\mathbf{a})$.

Nếu $\mathbf{a} = \mathbf{z}_n$ thì $IS(\mathbf{a}) = \{\mathbf{z}_n\} \Rightarrow IS(\mathbf{a}^*) = \{\mathbf{z}_{n-1}\}$, do đó

$$\begin{aligned} |IS(\mathbf{a})| &= \binom{n}{0}; \\ |IS(\mathbf{a}^*)| &= \binom{n-1}{0}. \end{aligned}$$

Nếu $\mathbf{a} = \mathbf{g}_n$ thì $IS(\mathbf{a}) = B(n) \Rightarrow IS(\mathbf{a}^*) = B(n-1)$ nên

$$\begin{aligned} |IS(\mathbf{a})| &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} &= 2^n; \\ |IS(\mathbf{a}^*)| &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} &= 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Từ đây ta giả sử $\mathbf{a} \neq \mathbf{z}_n$ và $\mathbf{a} \neq \mathbf{g}_n$, tức là $\mathbf{a} \in B(n,k)$ với $0 < k < n$.

Nhận xét rằng mọi véctơ $\mathbf{a} \in B(n,k)$ đều có thể viết

$$\mathbf{a} = \mathbf{z}_{r_1}\mathbf{g}_{s_1}\mathbf{z}_{r_2}\mathbf{g}_{s_2}\dots\mathbf{z}_{r_h}\mathbf{g}_{s_h}\mathbf{z}_{h+1} \qquad (3.1)$$

trong đó

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{h} s_i = k \\ s_i > 0, \quad \forall i = 1,\dots,h \\ r_1,\ r_{h+1} \geq 0, \text{ và } r_i >, \ \forall i = 2,\dots,h \\ \sum_{i=1}^{h+1} r_i + \sum_{i=1}^{h} s_i = n \end{cases}$$

Chẳng hạn $\mathbf{a} = 0111000010011 = \mathbf{z}_1\mathbf{g}_3\mathbf{z}_4\mathbf{g}_1\mathbf{z}_2\mathbf{g}_2\mathbf{z}_0$.

Nếu $\mathbf{x} \in B(n)$ và $w\mathbf{x} < k$ thì $\mathbf{x} < \mathbf{a}$ nên $A_0 \subset IS(\mathbf{a})$ với

$$\begin{aligned} A_0 &= \{\mathbf{x} \in B(n) : \ w\mathbf{x} \leq k-1\} \\ &= B(n,0) + B(n,1) + \cdots + B(n,k-1). \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} A_0^* &= \{\mathbf{x} \in B(n-1) : \ w\mathbf{x} \leq k-1\} \\ &= B(n-1,0) + B(n-1,1) + \cdots + B(n-1,k-1). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} |A_0| &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} \\ |A_0^*| &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n-1}{j} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nếu $r_1 > 0$ thì với $0 \le j < r_1$, ta đặt

$$\begin{aligned} A_1(j) &= \mathbf{z}_j 1 B(n-j-1, k-1) \\ A_1 &= A_1(0) + \cdots + A_1(r_1 - 1). \end{aligned}$$

Nếu $0 \le j < r_1$ và $\mathbf{x} = \mathbf{z}_j 1\mathbf{u}$ với $\mathbf{u} \in B(n-j-1, k-1)$ thì hiển nhiên $\mathbf{x} < \mathbf{a}$ nên $A_1(j) \subset IS(\mathbf{a})$. Hơn nữa $A_1(j)^* = \mathbf{z}_j 1 B(n-j-2, k-1)$. Do đó, nếu đặt $n_1 = n$, $k_1 = k$ thì

$$\begin{aligned} |A_1| &= \sum_{j=0}^{r_1-1} \binom{n_1-j-1}{k_1-1} \\ |A_1^*| &= \sum_{j=0}^{r_1-1} \binom{n_1-j-2}{k_1-1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ta qui ước $A_1 = \emptyset$ nếu $r_1 = 0$.

Những véctơ tiếp theo của $IS(\mathbf{a})$ có dạng $\mathbf{u}_1\mathbf{z}_j 1\mathbf{u}$ với $\mathbf{u}$ là véctơ tùy ý của $B(n_2 - j - 1, k_2 - 1)$ và

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{z}_{r_1}\mathbf{g}_{s_1} \\ n_2 &= n_1 - r_1 - s_1 \\ k_2 &= k_1 - s_1 \end{cases}$$

Ta đặt

$$\begin{aligned} A_2(j) &= \mathbf{u}_1\mathbf{z}_j 1 B(n_2 - j - 1, k_2 - 1) \\ A_2 &= A_2(0) + \cdots + A_2(r_2 - 1). \end{aligned}$$

Với $0 \le j < r_2$ ta có $A_2(j) \subset IS(\mathbf{a})$ và $|A_2(j)| = \binom{n_1-j-1}{k_2-1}$. Hơn nữa,

$$\begin{aligned} A_2(j)^* &= \{\mathbf{u}_1\mathbf{z}_j 1\mathbf{u}^* : \mathbf{u} \in B(n_2 - j - 1, k_2 - 1)\} \\ &= \mathbf{u}_1\mathbf{z}_j 1 B(n_2 - j - 2, k_2 - 1). \end{aligned}$$

Do đó $A_2 \subset IS(\mathbf{a})$ và

$$\begin{aligned} |A_2| &= \sum_{j=0}^{r_2-1} \binom{n_2-j-1}{k_2-1} \\ |A_2^*| &= \sum_{j=0}^{r_2-1} \binom{n_2-j-2}{k_2-1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Một cách tổng quát, với $1 \le i \le h$ và $0 \le j < r_i$, ta đặt

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \mathbf{u}_{i-1}\mathbf{z}_{r_i}\mathbf{g}_{s_i} = \mathbf{z}_{r_1}\mathbf{g}_{s_1}\dots\mathbf{z}_{r_i}\mathbf{g}_{s_i} \\ n_i &= n_{i-1} - r_{i-1} - s_{i-1} \\ k_i &= k_{i-1} - s_{i-1} \\ A_i(j) &= \mathbf{u}_{i-1}\mathbf{z}_j 1B(n_i - j - 1, k_i - 1) \\ A_i &= \sum_{j=0}^{r_i-1} A_i(j),\ i = 1, \dots, h-1. \end{aligned}$$

Hiển nhiên ta có $A_i \subset IS(\mathbf{a})$, $A_i^* = \sum_{j=0}^{r_i-1} A_i(j)^*$ và

$$\begin{aligned} |A_i| &= \sum_{j=0}^{r_i-1} \binom{n_i-j-1}{k_i-1} \\ |A_i^*| &= \sum_{j=0}^{r_i-1} \binom{n_i-j-2}{k_i-1} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Cuối cùng, đặt $A_h(r_h) = \{\mathbf{a}\}$ và

$$A_h = A_h(0) + A_h(1) + \dots + A_h(r_h)$$

Như thế

$$IS(\mathbf{a}) = A_0 + A_1 + \dots + A_h.$$

Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. $r_{h+1} = 0$

Để ý rằng $n_h - r_h = s_h = k_h$ và ta có

$$\begin{aligned} A_h(r_h) &= \{\mathbf{u}_{h-1}\mathbf{z}_{r_h}\mathbf{g}_{s_h}\} \\ &= \mathbf{u}_{h-1}\mathbf{z}_{r_h} 1B(n_h - r_h - 1, k_h - 1) \\ \Rightarrow |A_h(r_h)| &= \binom{s_h-1}{s_h-1}. \end{aligned}$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned} A_h(r_h)^* &= \{\mathbf{u}_{h-1}\mathbf{z}_{r_h-1}\mathbf{g}_{s_h}\} \subset A_h(r_h-1)^* \\ \Rightarrow A_h* &= A_h(0)^* + A_h(1)^* + \cdots + A_h(r_h-1)^*. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} |A_h| &= \sum_{j=0}^{r_h-1}\binom{n_h-j-1}{k_h-1} + \binom{s_h-1}{s_h-1} \\ |A_h^*| &= \sum_{j=0}^{r_h-1}\binom{n_h-j-2}{k_h-1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Các hệ thức từ (3.2) đến (3.6) cho ta

$$\begin{aligned} |IS(\mathbf{a})| &= |A_0| + |A_1| + \cdots + |A_h| \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=0}^{r_i-1}\binom{n_i-j-1}{k_i-1} + \binom{s_h-1}{s_h-1}; \\ |IS(\mathbf{a}^*)| &= |A_0^*| + |A_1^*| + \cdots + |A_h^*| \\ &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{n-1}{j} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=0}^{r_i-1}\binom{n_1-j-2}{k_i-1}. \end{aligned}$$

Trường hợp 2. $r_{h+1} > 0$

Đặt $t = r_{h+1}$ thì $\mathbf{a} = \mathbf{u}_h\mathbf{z}_t \Rightarrow \mathbf{a}^* = \mathbf{u}_h\mathbf{z}_{t-1}$ và theo (2.4) (Chương 2) thì $\mathbf{a}^* \notin (A_h(r_h-1))^*$. Hơn nữa

$$\begin{aligned} |A_h(r_h)| &= \binom{t}{0}; \\ |A_h(r_h)^*| &= \binom{t-1}{0}. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} |A_h| &= \sum_{j=0}^{r_h}|A_h(j)| &= \sum_{j=0}^{r_h-1}\binom{n_h-j-1}{k_h-1} + \binom{t}{0} \\ |A_h^*| &= \sum_{j=0}^{r_h}|A_h(j)^*| &= \sum_{j=0}^{r_h-1}\binom{n_h-j-2}{k_h-1} + \binom{t-1}{0} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Các hệ thức từ (3.2) đến (3.5) cùng với (3.7) cho ta

$$\begin{aligned}
|IS(\mathbf{a})| &= |A_0| + |A_1| + \cdots + |A_h| \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{r_i-1} \binom{n_i - j - 1}{k_i - 1} + \binom{t}{0}; \\
|IS(\mathbf{a}^*)| &= |A_0^*| + |A_1^*| + \cdots + |A_h^*| \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n-1}{j} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{r_i-1} \binom{n_1 - j - 2}{k_i - 1} + \binom{t-1}{0}.
\end{aligned}$$

Nếu đặt

$$\begin{aligned}
q &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{r_i-1} \binom{n_i - j - 1}{k_i - 1}; \\
q^* &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n-1}{j} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{r_i-1} \binom{n_i - j - 2}{k_i - 1}.
\end{aligned}$$

và chú ý rằng $\binom{n}{k} = 0$ nếu $n < 0$ thì trong cả hai trường hợp ta có

$$|IS(\mathbf{a})| = q + \binom{s}{r};$$

$$|\Delta IS(\mathbf{a})| = q^* + \binom{s-1}{r}.$$

với $s = r = s_h - 1$ nếu $r_{h+1} = 0$ và $s = t = r_{h+1}$, $r = 0$ nếu $r_{h+1} > 0$.

Tóm lại, ta đã chứng minh:

3.1.1 Định lý. *Cho* **a** *là một véctơ của* $B(n)$ *với* $w\mathbf{a} = k$

$$\mathbf{a} = \mathbf{z}_{r_1}\mathbf{g}_{s_1}\mathbf{z}_{r_2}\mathbf{g}_{s_2} \ldots \mathbf{z}_{r_h}\mathbf{g}_{s_h}\mathbf{z}_{r_{h+1}}$$

với $s_i > 0\ \forall i$, $r_i > 0\ \forall i = 2, \ldots, h$ *và* r_1, $r_{h+1} \geq 0$.

Đặt $n_1 = n$, $k_1 = k$ *và với* $i \geq 2$

$$\begin{cases} n_i = n_{i-1} - (r_{i-1} + s_{i-1}) \\ k_i = k_{i-1} - s_{i-1} \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} |IS(\mathbf{a})| &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=0}^{r_i-1}\binom{n_1-j-1}{k_i-1} + \binom{s}{r} \\ |IS(\mathbf{a}^*)| &= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{n-1}{j} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=0}^{r_i-1}\binom{n_1-j-2}{k_i-1} + \binom{s-1}{r} \end{aligned} \tag{3.8}$$

trong đó

$$\begin{cases} s = r = s_h - 1 & \text{nếu } r_{h+1} = 0 \\ s = r_{h+1},\ r = 0 & \text{nếu } r_{h+1} \neq 0 \end{cases}$$

Ví dụ 3.1. Tìm $m = |IS(\mathbf{a})|$ và $\Delta m = |IS(\mathbf{a}^*)|$ với $\mathbf{a} = 010011010$.

Ở đây $n = 9$, $k = w\mathbf{a} = 4$ và ta có $\mathbf{a} = \mathbf{z}_1\mathbf{g}_1\mathbf{z}_2\mathbf{g}_2\mathbf{z}_1\mathbf{g}_1\mathbf{z}_1$. Vậy

$$h = 3,\quad r_1 = r_3 = r_4 = 1,\ r_2 = 2,\quad s_1 = s_3 = 1,\ s_2 = 2.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} n_1 = 9,\ n_2 &= n_1 - (r_1 + s_1) = 7, & n_3 &= n_2 - (r_2 + s_2) = 3 \\ k_1 = 4,\ k_2 &= k_1 - s_1 = 3, & k_3 &= k_2 - s_2 = 1 \end{aligned}$$

Áp dụng (3.8) ta có

$$\begin{aligned} |IS(\mathbf{a})| &= \sum_{j=0}^{3}\binom{9}{j} + \binom{8}{3} + \sum_{j=0}^{1}\binom{7-j-1}{2} + \binom{2}{0} + \binom{1}{0} \\ &= \sum_{j=0}^{3}\binom{9}{j} + \binom{8}{3} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{2}{0} + \binom{1}{0} \\ &= 213; \\ |IS(\mathbf{a}^*)| &= \sum_{j=0}^{3}\binom{8}{j} + \binom{7}{3} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2} + \binom{1}{0} + \binom{0}{0} \\ &= 146. \end{aligned}$$

Vậy $\mathbf{a}$ là véctơ thứ 213 của $B(9)$ còn $\mathbf{a}^*$ là véctơ thứ 146 của $B(8)$.

Ví dụ 3.2. Tìm $m = |IS(\mathbf{a})|$ và $\Delta m = |IS(\mathbf{a}^*)|$ với $\mathbf{a} = 00100011$.

Ở đây $\mathbf{a} \in B(8)$. Ta có $k = w\mathbf{a} = 3$ và $\mathbf{a} = \mathbf{z}_2\mathbf{g}_1\mathbf{z}_3\mathbf{g}_2\mathbf{z}_0$. Vậy

$$h = 2,\quad r_1 = 2,\ r_2 = 3,\ r_3 = 0,\quad s_1 = 1,\ s_2 = 2.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} n_1 = 8,\ n_2 &= n_1 - (r_1 + s_1) = 5; \\ k_1 = 3,\ k_2 &= k_1 - s_1 = 2. \end{aligned}$$

Theo (3.8) thì

$$\begin{aligned} |IS(\mathbf{a})| &= \sum_{j=0}^{2} \binom{8}{j} + \sum_{j=0}^{1} \binom{8-j-1}{2} + \sum_{j=0}^{2} \binom{5-j-1}{1} + \binom{1}{1} \\ &= \sum_{j=0}^{2} \binom{8}{j} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{4}{1} + \binom{3}{1} + \binom{2}{1} + \binom{1}{1} \\ &= 83; \\ |IS(\mathbf{a}^*)| &= \sum_{j=0}^{2} \binom{7}{j} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{1} + \binom{2}{1} + \binom{1}{1} \\ &= 60. \end{aligned}$$

Chú ý rằng với $s > t$ ta có

$$\binom{s}{t} + \binom{s-1}{t} + \cdots + \binom{t}{t} = \binom{s+1}{t+1}.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \binom{4}{1} + \binom{3}{1} + \binom{2}{1} + \binom{1}{1} &= \binom{5}{2} \\ \binom{3}{1} + \binom{2}{1} + \binom{1}{1} &= \binom{4}{2}. \end{aligned}$$

Vậy ta có thể viết

$$\begin{aligned} |IS(\mathbf{a})| &= \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2}; \\ |IS(\mathbf{a}^*)| &= \binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{4}{2}. \end{aligned}$$

Ta sắp xếp các phần tử của tam giác Pascal dưới dạng

$$
\begin{array}{cccccccccc}
\cdots & \binom{8}{0} & \binom{7}{0} & \binom{6}{0} & \binom{5}{0} & \binom{4}{0} & \binom{3}{0} & \binom{2}{0} & \binom{1}{0} & \binom{0}{0} \\
\cdots & \binom{9}{1} & \binom{8}{1} & \binom{7}{1} & \binom{6}{1} & \binom{5}{1} & \binom{4}{1} & \binom{3}{1} & \binom{2}{1} & \binom{1}{1} \\
\cdots & \binom{10}{2} & \binom{9}{2} & \binom{8}{2} & \binom{7}{2} & \binom{6}{2} & \binom{5}{2} & \binom{4}{2} & \binom{3}{2} & \binom{2}{2} \\
\cdots & \binom{11}{3} & \binom{10}{3} & \binom{9}{3} & \binom{8}{3} & \binom{7}{3} & \binom{6}{3} & \binom{5}{3} & \binom{4}{3} & \binom{3}{3} \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Hình 3.1. *Tam giác Pascal*

Xét $m = |IS(\mathbf{a})|$ của Ví dụ 2. Đặt

$$p = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} \qquad ;$$

$$q = \binom{8}{3} + \binom{6}{2} + \binom{5}{2} + \binom{2}{0} + \binom{1}{0}.$$

Nếu ta nối các số hạng của p trong tam giác Pascal với nhau ta sẽ được một đoạn thẳng có độ dốc là 1(góc 45^o) mà ta có thể tưởng tượng như phía bên trái của một thung lũng (valley), còn phía bên phải của thung lũng ấy có được bằng cách nối các số hạng của q, q chính là một cascade. Ta cũng có kết quả này cho trường hợp tổng quát với công thức (3.8)

$$p = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}, \quad q = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{r_i - 1} \binom{n_1 - j - 1}{k_i - 1} + \binom{s}{r}.$$

Vì vậy (3.8) được gọi là một n-valley. Hơn nữa, để có $\Delta m = |\Delta IS(\mathbf{a})|$, ta chỉ cần thực hiện phép biến đổi sau đây cho mỗi số hạng của p và q:

$\binom{s}{t} \longrightarrow \binom{s-1}{t}$, tức là "dời" mỗi số hạng sang bên phải một cột trong tam giác Pascal ở Hình 3.1.

Trong Hình 3.1, m được thể hiện bằng nét liền còn Δm được vẽ bằng các dấu chấm: ....

Bây giờ ta xét Bài toán 2.

Bài toán 2. *Tìm* $\mathbf{a} \in B(n)$ *sao cho* $|IS(\mathbf{a})| = m$ *với* m *cho sẵn và* $1 \leq m \leq 2^n$.

Hiển nhiên ta có

$$\mathbf{a} = \begin{cases} \mathbf{z}_n & \text{nếu } m = 1 \\ \mathbf{g}_n & \text{nếu } m = 2^n \end{cases}$$

Vậy có thể giả sử $1 < m < 2^n$ và $\mathbf{a} \neq \mathbf{z}_n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{g}_n$. Gọi t là số nguyên lớn nhất sao cho

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{t} \leq m.$$

Ta đặt $m' = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{t}$.

Nếu $m = m'$ thì

$$m = |B(n,0)| + |B(n,1)| + \cdots + |B(n,t)|.$$

Vậy $\mathbf{a}$ là véctơ cuối cùng của $B(n,t)$ nên $\mathbf{a} = \mathbf{z}_{n-t}\mathbf{g}_t$ theo Bổ đề 2.3.2.

Giả sử $m > m'$ thì $m_1 = m - m' > 0$ và $\mathbf{a} \in B(n,k)$ với $k = t+1$. Đặt

$$F_{n,k}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in B(n,k) : \mathbf{x} \leq \mathbf{a}\}.$$

Ta cần tìm $\mathbf{a} \in B(n,k)$ sao cho $|F_{n,k}(\mathbf{a})| = m_1$. Vậy Bài toán 2 trở thành

Tìm véctơ $\mathbf{a} \in B(n,k)$ *sao cho* $|F_{n,k}(\mathbf{a})| = m$ *với* m *cho sẵn và* $1 \leq m \leq \binom{n}{k}$.

Ta tìm a bằng qui nạp như sau.

Trường hợp $n = 2$ có thể được kiểm chứng một cách dễ dàng. Xét $n \geq 3$ và giả sử bài toán đã được giải quyết với mọi $l < n$.

Nếu $k = 1$ thì hiển nhiên $\mathbf{a} = \mathbf{z}_r 1 \mathbf{z}_s$ với $r = m - 1$ và $s = n - m$. Vậy xét $k > 1$ với các trường hợp sau

Trường hợp 1. $\binom{n-1}{k-1} < m$.

Gọi p là số nguyên lớn nhất sao cho

$$\begin{cases} 1 \leq p \leq k \\ m' = \binom{n-1}{k-1} + \cdots + \binom{n-p}{k-1} \leq m \end{cases} \tag{3.9}$$

Hiển nhiên ta có

$$\begin{aligned} |1B(n-1,k-1)| &= \binom{n-1}{k-1} \\ |01B(n-2,k-1)| &= \binom{n-2}{k-1} \\ \cdots\cdots\cdots & \quad \cdots \\ |\mathbf{z}_{p-1}1B(n-1,k-1)| &= \binom{n-p}{k-1} \end{aligned}$$

Do đó (3.9) cho thấy

$$\mathbf{z}_r 1B(n-r-1,k-1) \subset F_{n,k}(\mathbf{a}), \quad r = 0,\ldots,p-1.$$

Ta biết các phần tử của $\mathbf{z}_r 1B(n-r-1,k-1)$ đứng trước các phần tử của $\mathbf{z}_s 1B(n-s-1,k-1)$ trong thứ tự $\vee$ nếu $r < s$ và phần tử cuối cùng của $\mathbf{z}_{p-1}1B(n-p-1,k-1)$ là $\mathbf{b} = \mathbf{z}_{p-1}1\mathbf{z}_d\mathbf{g}_{k-1}$ với $d = n-p-k+1$. Hơn nữa nếu $\mathbf{b} \prec \mathbf{c}$ thì $\mathbf{c} = \mathbf{z}_p 1\mathbf{g}_{k-1}\mathbf{z}_q$ với $q = n-p-k$.

Nếu $m = m'$ thì $\mathbf{a}$ chính là véctơ $\mathbf{b} = \mathbf{z}_{p-1}1\mathbf{z}_d\mathbf{g}_{k-1}$ với d như trên. Nếu $m > m'$ thì $\mathbf{a} \geq \mathbf{c}$ nên $\mathbf{a} \in \mathbf{z}_p 1 B(n-p-1, k-1)$, tức là $\mathbf{a}$ có dạng

$$\mathbf{a} = \mathbf{z}_p 1\mathbf{u}, \ \mathbf{u} \in B(n-p-1, k-1).$$

Trường hợp 2. $m \leq \binom{n-1}{k-1}$
Gọi r là số nguyên lớn nhất sao cho

$$\begin{cases} 1 \leq r \leq k \\ m'' = \binom{n-r}{k-r} \leq m \end{cases} \tag{3.10}$$

Vì $|B(n-r, k-r)| = \binom{n-r}{k-r}$ nên (3.10) cho thấy

$$\mathbf{g}_r B(n-r, k-r) \subset F_{n,k}(\mathbf{a})$$

Ngoài ra, phần tử lớn nhất của $\mathbf{g}_r B(n-r, k-r)$ là $\mathbf{e} = g_r\mathbf{z}_{n-k}\mathbf{g}_{k-r}$.

Nếu $m = m''$ thì $\mathbf{a}$ là véctơ cuối cùng của $\mathbf{g}_r B(n-r, k-r)$ nên theo Bổ đề 2.3.2, ta có $\mathbf{a} = \mathbf{e} = \mathbf{g}_r\mathbf{z}_{n-k}\mathbf{g}_{k-r}$.

Giả sử $m > m''$. Gọi $\mathbf{f}$ là véctơ kế tiếp của $\mathbf{e}$, tức là $\mathbf{e} \prec \mathbf{f}$, thì theo Bổ đề 2.3.7 (Chương 2) ta có $\mathbf{f} = \mathbf{g}_{r-1}01\mathbf{g}_{k-r}\mathbf{z}_{n-k-1}$. Suy ra $\mathbf{a}$ là một véctơ của $\mathbf{g}_{r-1}01B(n-r-1, k-r)$, tức là $\mathbf{a}$ có dạng

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}_{r-1}01\mathbf{u}, \ \mathbf{u} \in B(n-r-1, k-r).$$

Trong cả hai trường hợp $\mathbf{a}$ đều có dạng $\mathbf{xu}$ với $\mathbf{x}$ là một véctơ đã biết, $\mathbf{u} \in B(n_1, k_1)$ với $n_1 < n$ và ta phải tìm $\mathbf{v} \in B(n_1, k_1)$ sao cho $|F_{n_1,k_1}(\mathbf{v})| = m_1$ (với $m_1 = m - m'$ hay $m_1 = m - m''$). Theo giả thiết qui nạp, ta có thể tìm được véctơ $\mathbf{v}$ như thế nên ta tìm được $\mathbf{a} = \mathbf{xv}$.

Tóm lại, ta đã chứng minh

3.1.2 Định lý. *Cho m, n là số nguyên dương với $1 \leq m \leq 2^n$. Ta có thể tìm được $\mathbf{a} \in B(n)$ sao cho $|IS(\mathbf{a})| = m$.*

Kết quả của các Định lý 3.1.1 và 3.1.2 cho ta các thuật toán sau đây.

3.1.3 Thuật toán 1. *Tìm* $m = |IS(\mathbf{a})|$ *và* $\Delta m = |IS(\mathbf{a}^*)|$ *với* $\mathbf{a}$ *là một véctơ của* $B(n)$ *cho trước.*

Theo (3.8) thì từ công thức tính m ta có thể suy ra Δm một cách dễ dàng nên ta chỉ cần tính m.

Bước 1. *Xác định* $k = w\mathbf{a}$ *và các* r_i, s_i *sao cho*

$$\mathbf{a} = \mathbf{z}_{r_1}\mathbf{g}_{s_1}\mathbf{z}_{r_2}\mathbf{g}_{s_2}\ldots\mathbf{z}_{r_h}\mathbf{g}_{s_h}\mathbf{z}_{r_{h+1}}.$$

Với $n_1 = n$, $k_1 = k$, $2 \le i \le h$, *tính*

$$n_i = n_{i-1} - (r_{i-1} + s_{i-1}), \quad k_i = k_{i-1} - s_{i-1}.$$

Bước 2. $m := \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k-1}$.

$i = 1$.

Bước 3. *Xác định* m_i.

$$m_i = \sum_{j=0}^{r_i-1} \binom{n_i - j - 1}{k_i - 1} \text{ với } i < h;$$

$$m_h = \sum_{j=0}^{r_h-1} \binom{n_h - j - 1}{s_h - 1} + \binom{p}{t}.$$

trong đó

$$\begin{cases} p = t = s_h - 1 & \text{nếu } r_{h+1} = 0; \\ p = r_{h+1},\ t = 0 & \text{nếu } r_{h+1} \neq 0. \end{cases}$$

Bước 4. $m := m + m_i$, $i := i + 1$.
Nếu $i > h$ *thì dừng. Nếu* $i \le h$ *thì trở lại Bước 3.*

Ví dụ 3.3. Tìm $m = |IS(\mathbf{a})|$ với $\mathbf{a} = 00101100010$.

Bước 1. Ở đây $\mathbf{a} = \mathbf{z}_2\mathbf{g}_1\mathbf{z}_1\mathbf{g}_2\mathbf{z}_3\mathbf{g}_1\mathbf{z}_1$, $h = 3$ và $k = w\mathbf{a} = 4$.

$$\begin{array}{llll} r_1 = 2, & s_1 = 1, & n_1 = 11, & k_1 = 4 \\ r_2 = 1, & s_2 = 2, & n_2 = 8, & k_2 = 3 \\ r_3 = 3, & s_3 = 1, & n_3 = 5, & k_3 = 1 \\ r_4 = 1. & & & \end{array}$$

Bước 2. $m := \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \binom{11}{2} + \binom{11}{3} = 1 + 11 + 55 + 165 = 232.$

Bước 3. Xác định m_i.

$$\begin{aligned} m_1 &= \binom{10}{3} + \binom{9}{3} = 120 + 84 = 204 \\ m_2 &= \binom{7}{2} = 21 \\ m_3 &= \binom{4}{0} + \binom{3}{0} + \binom{2}{0} + \binom{1}{0} = 4. \end{aligned}$$

Bước 4. $m = m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = 232 + 204 + 21 + 4 = 461.$

Vậy **a** là véctơ thứ 461 của $B(11)$.

3.1.4 Thuật toán 2. *Tìm* $\mathbf{a} \in B(n)$ *sao cho* $|IS(\mathbf{a})| = m$ *với* m, n *cho sẵn.*

Bước 1. *Tìm* t *lớn nhất sao cho*

$$m_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{t} \leq m.$$

$$m := m - m_0.$$

Nếu $m = 0$ *thì* $\mathbf{a} = \mathbf{z}_{n-t}\mathbf{g}_t$. *Dừng.*

Nếu $m > 0$ *thì đặt* $k = t + 1$ *và đến Bước 2 với* $\mathbf{a} := \emptyset$.

Bước 2. *Tính* $m_1 = \binom{n-1}{k-1}$.

Nếu $m_1 < m$ *thì đến Bước 3. Nếu* $m_1 \geq m$ *thì đến Bước 4.*

Bước 3. *Tìm* p *lớn nhất sao cho*

$$\begin{cases} 1 \leq p \leq k \\ m_2 = \binom{n-1}{k-1} + \cdots + \binom{n-p}{k-1} \leq m \end{cases}$$

Nếu $m = m_2$ *thì* $\mathbf{a} := \mathbf{ae}$ *với* $\mathbf{e} = \mathbf{z}_{p-1}1\mathbf{z}_d\mathbf{g}_{k-1}$, $d = n - k - p + 1$. *Dừng.*

Nếu $m > m_2$ *thì* $\mathbf{a} := \mathbf{ae}$ *với* $\mathbf{e} = \mathbf{z}_p 1$. *Trở lại Bước 2 với*

$$n := n - p - 1; \ k := k - 1; \ m := m - m_2.$$

Bước 4. *Tìm t nhỏ nhất sao cho*

$$\begin{cases} 1 \le t \le k \\ m_3 = \binom{n-t}{k-t} \le m \end{cases}$$

Nếu $m = m_3$ *thì* $\mathbf{a} := \mathbf{ae}$ *với* $\mathbf{e} := \mathbf{g}_t \mathbf{z}_{n-k} \mathbf{g}_{k-t}$. *Dừng.*

Nếu $m > m_3$ *thì* $\mathbf{a} := \mathbf{ae}$ *với* $\mathbf{e} = \mathbf{g}_{t-1} 01$. *Trở về Bước 2 với*

$$n := n - t - 1, \ k := k - t, \ m := m - m_3.$$

Ví dụ 3.4. Tìm **a** là véctơ thứ 101 của $B(9)$.

Bước 1. $\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} = 46 < 101 < \binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3}$.

Suy ra $k = w\mathbf{a} = 3$.

$m := m - 46 = 55$; $\mathbf{a} := \emptyset$. Đến Bước 2.

Bước 2. $m_1 = \binom{8}{2} = 28 < m$. Đến Bước 3.

Bước 3. Giá trị lớn nhất của p sao cho $\binom{8-1}{3-1} + \cdots + \binom{8-p}{3-1} \le m$ là $p = 2$ và ta có $m_2 = \binom{8}{2} + \binom{7}{2} = 28 + 21 = 49$.

Vì $m > m_2$ nên $\mathbf{a} := \mathbf{ae} = \mathbf{e} = \mathbf{z}_p 1 = 001$. Trở về Bước 2 với

$$n := n - p - 1 = 6, \ k := k - 1 = 2, \ m := m - m_2 = 6.$$

Bước 2. $m_1 = \binom{6-1}{2-1} = \binom{5}{1} = 5 < m$ nên đến Bước 3.

Bước 3. Số nguyên p lớn nhất thỏa $m_2 = \binom{5}{1} + \cdots + \binom{5-p}{1}$ là $p = 1 \Rightarrow m_2 = 5$. Do đó $\mathbf{a} := \mathbf{ae}$ với $\mathbf{e} = 01$, tức là $\mathbf{a} = 00101$. Trở về

Bước 2 với

$$n := n - 1 - 1 = 4,\ k := k - 1 = 1,\ m := m - m_2 = 1.$$

Bước 2. $m_1 = \binom{n-1}{k-1} = \binom{3}{0} = m$. Suy ra $\mathbf{e} = \mathbf{g}_1\mathbf{z}_3 = 1000$ và $\mathbf{a} := \mathbf{ae} = 001011000$. Dừng.

Vậy véctơ thứ 101 của $B(9)$ là $\mathbf{a} = 001011000$.

Ví dụ 3.5. Tìm $\mathbf{a}$ là véctơ thứ 888 của $B(11)$.

Bước 1. Số nguyên t lớn nhất sao cho

$$m_0 = \binom{11}{0} + \binom{11}{1} + \cdots + \binom{11}{t} \le m = 888.$$

là $t = 4$ và $m_0 = 562$.

Suy ra $k = w\mathbf{a} = 5$.

$m := m - 46 = 326$; $\mathbf{a} := \emptyset$. Đến Bước 2.

Bước 2. $m_1 = \binom{10}{4} = 210 < m$. Đến Bước 3.

Bước 3. Số nguyên p lớn nhất sao cho

$$m_2 = \binom{11-1}{4} + \cdots + \binom{11-p}{4} \le m.$$

là $p = 1$ và ta có $m_2 = \binom{10}{4} = 210 < m$.

Vậy $\mathbf{a} = \mathbf{ae} = \mathbf{e} = \mathbf{z}_p1 = 01$. Trở về Bước 2 với

$$n := n - p - 1 = 9,\ k := k - 1 = 4,\ m := m - m_2 = 116.$$

Bước 2. $m_1 = \binom{8}{3} = 56 < m = 116$ nên đến Bước 3.

Bước 3. Số nguyên p lớn nhất thỏa

$$m_2 = \binom{9-1}{3} + \cdots + \binom{9-p}{3} \le m.$$

là $p = 3$ và ta có $m_2 = 111 < m$. Do đó $\mathbf{a} := \mathbf{ae} = 010001$ vì trong trường hợp này thì $\mathrm{e} = \mathbf{z}_p 1 = 0001$. Trở về Bước 2 với

$$n := n - p - 1 = 5,\ k := k - 1 = 3,\ m := m - m_2 = 5.$$

Bước 2. $m_1 = \binom{5-1}{3-1} = 6 > m$. Đến Bước 4.

Bước 4. Số nguyên t nhỏ nhất thỏa $m_3 = \binom{5-t}{3-t} \leq m$ là $t = 2$ và ta có $m_2 = 3 < m$. Vậy $\mathbf{e} = \mathbf{g}_{p-1}01 = 101$ và $\mathbf{a} := \mathbf{ae} = 010001101$. Trở về Bước 2 với

$$n := n - t - 1 = 2,\ k := k - t = 1,\ m := m - m_3 = 2.$$

Bước 2. $m_1 = \binom{2-1}{1-1} = 1 < m$. Đến Bước 3.

Bước 3. Số nguyên p lớn nhất thỏa

$$m_2 = \binom{2-1}{0} + \cdots + \binom{2-p}{0} \leq m.$$

là $p = 2$ và ta có $m_2 = 2 = m$. Do đó $\mathbf{a} := \mathrm{ae}$ với $\mathrm{e} = \mathbf{z}_{p-1} 1 \mathbf{z}_d \mathbf{g}_{k-1} = 01$, trong đó $d = n - p - k + 1 = 0$, $k - 1 = 0$, tức là $\mathbf{a} = 01000110101$. Dừng.

Vậy véctơ thứ 888 của $B(11)$ là $\mathbf{a} = 01000110101$.

3.2 Định lý kiểu Lovasz

Trong Chương 1, ta đã biết Định lý Lovasz nhanh chóng cho ta một chặn dưới của $|\Delta A|$ với $A \subset P_k(S)$, trong đó $S = \{1, \ldots, n\}$. Trong phần này, ta sẽ chứng minh một kết quả tương tự cho các véctơ Bool.

Cho $A \subset B(n)$ với $|A| > 1$ thì tồn tại $1 \leq k \leq n$ sao cho

$$|A| > \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k-1}.$$

nên có số thực $x \geq k$ thỏa

$$|A| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k-1} + \binom{x}{k} \tag{3.11}$$

Ta muốn chứng minh định lý kiểu Lovasz, tức là

$$|\Delta A| \geq \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1} + \binom{x-1}{k} \qquad (3.12)$$

Ta đã biết $|\Delta A| \geq |\Delta C(A)|$ nên ta có thể giả sử A là một IS. Đặt $D = B(n,0) + B(n,1) + \cdots + B(n,k-1)$ và $E = A \cap B(n,k)$ thì $A = D + E$ với E là một đoạn đầu của $B(n,k)$. Ta có $\Delta A = D^* + E^*$ với

$$D^* = B(n-1,0) + B(n-1,1) + \cdots + B(n-1,k-1)$$

$$\Rightarrow |D^*| = \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1}.$$

Vậy để chứng minh (3.12) ta chỉ cần chứng minh

$$|E^*| \geq \binom{x-1}{k} \qquad (3.13)$$

Để ý rằng

$$E^* = \{\delta_i \mathbf{a} : \ \mathbf{a} = a_1a_2\ldots a_n \in E \text{ và } a_i = 0\} \qquad (3.14)$$

Với các yếu tố trên, bài toán trở thành:

Cho $A \subset B(n,k)$ *với* $|A| = \binom{x}{k}$, $x \geq k$. *Chứng minh rằng*

$$|\Delta' A| \geq \binom{x-1}{k}.$$

Do (3.14), ở đây $\Delta'\mathbf{a}$ được định nghĩa như sau:

3.2.1 Định nghĩa. *Với* $\mathbf{a} = a_1a_2\ldots a_n \in B(n,k)$ *ta định nghĩa*

$$\Delta'\mathbf{a} = \{\delta_i \mathbf{a} : \ a_i = 0\}$$

và với $A \subset B(n,k)$ *thì*

$$\Delta' A = \bigcup_{\mathbf{a} \in A} \Delta'\mathbf{a}.$$

Như trong Chương 2, một IS của $B(n,k)$ là một tập con gồm những véctơ đầu tiên của $B(n,k)$ trong thứ tự $\vee$.

3.2.2 Bổ đề. *Nếu A là một IS của $B(n,k)$ thì $\Delta' A$ cũng là một IS của $B(n-1,k)$. Hơn nữa, nếu $A = G0 + H1$ thì $\Delta' A = G$.*

Chứng minh. Tương tự như trong 2.3.8.◇

3.2.3 Bổ đề. *Cho $A \subset B(n,k)$ với $|A| = m$ và gọi $F(A)$ là tập hợp m véctơ đầu tiên của $B(n,k)$ trong thứ tự $\vee$. Ta có $|\Delta' F(A)| \leq |\Delta' A|$.*

Chứng minh. Đặt $D = B(n,0) + \cdots + B(n,k-1)$ và $E = D + A$. Trên $B(n)$ ta có $C(E) = D + F(A)$.

Với $\mathbf{x} = \delta_i \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in A$ thì $\mathbf{x} \in D^*$ nếu $a_i = 1$ và $\mathbf{x} \in \Delta' A$ nếu $a_i = 0$. Ngoài ra, $\Delta D = D^*$ và $D^* \cap \Delta' A = \emptyset$ vì trọng lượng của các véctơ trong D^* và trong $\Delta' A$ là khác nhau. Vì vậy $\Delta E = D^* \cup \Delta A = D^* + \Delta' A$. Ta biết rằng $\Delta C(E) = (C(E))^* = D^* \cup F(A)^* = D^* + \Delta' F(A)$. Mà ta có $|\Delta C(E)| \leq |\Delta E|$ nên suy ra

$$|D^*| + |\Delta' F(A)| \leq |D^*| + |\Delta' A| \Rightarrow |\Delta' F(A)| \leq |\Delta' A|$$

và Bổ đề được chứng minh.◇

Đến đây ta có thể phát biểu và chứng minh định lý kiểu Lovasz như sau

3.2.4 Định lý. *Cho A là một tập con khác rỗng của $B(n,k)$. Nếu $|A| = \binom{x}{k}$, $x \geq k$ thì $|\Delta' A| \geq \binom{x-1}{k}$.*

Chứng minh. Ta chứng minh bằng qui nạp trên n. Trường hợp $n = 2$ là hiển nhiên nên ta xét $n \geq 3$ và giả sử định lý đúng cho $n - 1$.

Cho $A = G0 + H1 \subset B(n.k)$. Do Bổ đề 3.2.3, bằng cách thay A bởi $F(A)$, ta có thể xem A là một IS của $B(n,k)$.

Trước hết xét $k = 1$. Khi ấy $|A| = \binom{x}{1}$ với $x = |A|$. Gọi $\mathbf{b}$ là phần tử lớn nhất của A. Để ý rằng phần tử duy nhất trong $B(n,1)$ có thành phần thứ n bằng 1 là $\mathbf{z}_{n-1}1 = \max B(n,1)$ nên nếu $\mathbf{b} \in G0$ thì $H = \emptyset$

và vì vậy $|\Delta' A| = |A| = x \geq \binom{x-1}{1} = x - 1$, còn nếu $\mathbf{b} \in H1$ thì $A = B(n,1)$ nên $x = n$ và $\Delta' A = B(n-1,1) \Rightarrow |\Delta' A| = \binom{x-1}{1}$. Vậy định lý đúng với $k = 1$.

Từ đây giả sử $k > 1$.

Gọi y, z là những số thực sao cho $|G| = \binom{y}{k}$, $|H| = \binom{z}{k-1}$. Vì $|A| = |G| + |H|$ nên

$$\binom{x}{k} = \binom{y}{k} + \binom{z}{k-1} \tag{3.15}$$

Theo Bổ đề 3.2.2 thì $\Delta' A = G$ nên

$$|\Delta' A| = \binom{y}{k} \tag{3.16}$$

Nếu $y \geq x - 1$ thì $\binom{y}{k} \geq \binom{x-1}{k}$ nên theo (3.16) ta có

$$|\Delta' A| \geq \binom{x-1}{k}.$$

Giả sử $y < x - 1$. Theo giả thiết qui nạp ta có

$$|\Delta' G| \geq \binom{y-1}{k}, \ |\Delta' H| \geq \binom{z-1}{k-1} \tag{3.17}$$

Mặt khác, hiển nhiên $(\Delta' G)0 + (\Delta' H)1 \subset \Delta' A$ nên

$$|\Delta' A| \geq |\Delta' G| + |\Delta' H| \geq \binom{y-1}{k} + \binom{z-1}{k-1} \tag{3.18}$$

Từ (3.16) và (3.18) ta suy ra

$$\binom{y}{k} \geq \binom{y-1}{k} + \binom{z-1}{k-1}.$$

Sử dụng hệ thức $\binom{y}{k} = \binom{y-1}{k} + \binom{y-1}{k-1}$ ta có

$$\begin{aligned}
&\binom{y-1}{k} + \binom{y-1}{k-1} \geq \binom{y-1}{k} + \binom{z-1}{k-1}\\
\Leftrightarrow\ &\binom{y-1}{k-1} \geq \binom{z-1}{k-1}\\
\Leftrightarrow\ & y \geq z.
\end{aligned}$$

Vậy $z \leq y < x-1$ và do đó

$$\binom{x-1}{k-1} > \binom{y}{k-1},$$

$$\binom{y-1}{k-1} + \binom{z-1}{k-2} \leq \binom{y-1}{k-1} + \binom{y-1}{k-2} = \binom{y}{k-1}.$$

Vì vậy

$$\binom{x-1}{k-1} - \binom{y-1}{k-1} - \binom{z-1}{k-2} > \binom{y}{k-1} - \binom{y}{k-1} = 0 \qquad (3.19)$$

Theo (3.18) thì

$$\begin{aligned}
|\Delta' A| &\geq \binom{y-1}{k} + \binom{z-1}{k-1}\\
&= \binom{y}{k} - \binom{y-1}{k-1} + \binom{z}{k-1} - \binom{z-1}{k-2}\\
&= \binom{y}{k} + \binom{z}{k-1} - \binom{y-1}{k-1} - \binom{z-1}{k-2}.
\end{aligned}$$

Kết hợp với (3.15) và (3.19) ta được

$$\begin{aligned}
|\Delta' A| &\geq \binom{x}{k} - \binom{y-1}{k-1} - \binom{z-1}{k-2}\\
&= \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1} - \binom{y-1}{k-1} - \binom{z-1}{k-2}\\
&> \binom{x-1}{k}.
\end{aligned}$$

Vậy định lý được chứng minh.$\diamondsuit$

Với những kết quả trên đây ta có

3.2.5 Định lý. *Cho* $A \subset B(n)$ *với*

$$|A| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k-1} + \binom{x}{k}$$

trong đó x *là một số thực,* $x \geq k$. *Ta có*

$$|\Delta A| \geq \binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \cdots + \binom{n-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}.$$

Chương 4.

CẤU TRÚC CỦA THỨ TỰ $\vee$ VÀ CÁC BÀI TOÁN MỞ

Trong chương này, ta sẽ xem xét cấu trúc của thứ tự $\vee$ trong poset các véctơ nguyên không âm. Ta sẽ tìm một dạng dễ áp dụng hơn của $\vee$-véctơ, nhất là trong việc xác định $|IS(\mathbf{a})|$. Cuối cùng, ta sẽ nêu lên một số bài toán mở (open problems) liên quan. Các kết quả của chương này đã được công bố trong [2], [3], [4], [5].

4.1 Cấu trúc của thứ tự $\vee$

Như trong các chương trước, với $\mathbf{a} = a_1a_2\ldots a_n \in V(n)$ thì ta đặt $\mu\mathbf{a} = \max\{a_i : 1 \leq i \leq n\}$ và $\nu\mathbf{a}$ là số các i thỏa $a_i = \mu\mathbf{a}$. Ngoài ra, $\vee\mathbf{a}$ là số nguyên được định nghĩa như sau

$$\vee\mathbf{a} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } a_1 \leq \cdots \leq a_n \\ n & \text{nếu } a_{n-1} > a_n \\ h & \text{nếu } a_{h-1} > a_h \text{ và } a_h \leq \cdots \leq a_n \end{cases}$$

và ta đặt $\mathbf{a}^* = \delta_h\mathbf{a}$.

Hơn nữa, hàm ω xác định như sau: với $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(n)$ và $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ thì $\omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max\{j : a_j \neq b_j\}$.

Nhận xét rằng với $r \in I\!N$ và $\mathbf{a} \in V(n)$, ta có

$$(r\mathbf{a})^* = \begin{cases} r\mathbf{a}^* & \text{nếu } a_1 \leq r \text{ hay } \vee\mathbf{a} > 1 \\ \mathbf{a} & \text{nếu } r < a_1 \text{ và } \vee\mathbf{a} = 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

$$(\mathbf{a}r)^* = \begin{cases} \mathbf{a}^*r & \text{nếu } a_n \leq r \\ \mathbf{a} & \text{nếu } a_n > r \end{cases} \tag{4.2}$$

4.1.1 Định nghĩa. *Cho* $\mathbf{a} \in V(n)$ *và* $k \in I\!N$ *thì* $\mathbf{a}^k$ *được định nghĩa như sau*

$$\mathbf{a}^0 = \mathbf{a},\ \mathbf{a}^1 = \mathbf{a}^*,\ \mathbf{a}^2 = (\mathbf{a}^*)^*, \ldots,\ \mathbf{a}^k = (\mathbf{a}^{k-1})^*.$$

Hiển nhiên $(\mathbf{a}^s)^* = (\mathbf{a}^*)^s$.

Ví dụ 4.1. Với $\mathbf{a} = 422361$ thì

$$\mathbf{a}^1 = 42236,\ \mathbf{a}^2 = 4236,\ \mathbf{a}^3 = 436,\ \mathbf{a}^4 = 46.$$

4.1.2 Định nghĩa. (Thứ tự $\vee$). *Ta sắp thứ tự $V(1)$, $V(2), \ldots$ bằng qui nạp như sau:*

$V(1)$ chính là $I\!N$ và được sắp một cách tự nhiên:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < 10 < \ldots$$

Giả sử trên $V(n-1)$ đã có thứ tự. Với $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(n)$, ta viết $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ nếu

(i) $\mathbf{a}^* < \mathbf{b}^*$ *trong $V(n-1)$, hoặc*

(ii) $\mathbf{a}^* = \mathbf{b}^*$ *và $a_i < b_i$ với $i = \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.*

Thứ tự này gọi là thứ tự $\vee$ và khi ấy, mỗi véctơ của $V(n)$ được gọi một $\vee$-véctơ.

Ví dụ 4.2. Những véctơ đầu tiên của $V(2), V(3)$ theo thứ tự $\vee$ tăng dần được thể hiện trong bảng sau:

$V(2)$: $00, 10, 01, 11, 20, 21, 02, 12, 22, 30, 31, 32, 03, 13, 23, 33, 40, 41 \ldots$

$V(3)$: $000, 100, 010, 001, 110, 101, 011, 111, 200, 210, 201, 211, 020, 021$

$002, 120, 121, 102, 012, 112, 220, 221, 202, 212, 022, 122, 222 \ldots$

Ta kiểm chứng dễ dàng rằng với $r \in I\!N$ và $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V(1)$ ta có

$$r\mathbf{x} < r\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x}r < \mathbf{y}r \Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y} \tag{4.3}$$

4.1.3 Bổ đề. *Cho $\mathbf{a} \in V(n)$ và $r \in I\!N$ với $\mu\mathbf{a} \le r$. Nếu tồn tại j, $1 \le j \le n$ sao cho $a_j \ne r$ thì ta có*

$$r\mathbf{a} < \mathbf{a}r \tag{4.4}$$

Chứng minh. Trường hợp $n = 1$ là hiển nhiên nên ta xét $n \ge 2$ và giả sử rằng (4.4) đúng với $\mathbf{a} \in V(n-1)$. Vì $\mu\mathbf{a} \le r$ nên $a_1, a_n \le r$. Theo

(4.1) thì $(r\mathbf{a})^* = r\mathbf{a}^*$ và theo (4.2) thì $(\mathbf{a}r)^* = \mathbf{a}^*r$. Nếu $\mathbf{a}^* \neq r\ldots r$ thì theo giả thiết qui nạp, ta có

$$r\mathbf{a}^* < \mathbf{a}^*r \Rightarrow (r\mathbf{a})^* < (\mathbf{a}r)^* \Rightarrow r\mathbf{a} < \mathbf{a}r.$$

Nếu $\mathbf{a}^* = r\ldots r$ thì $\mathbf{r}a^* = \mathbf{a}^*r$ và $r\mathbf{a} < \mathbf{a}r$ do hàm ω.◇

4.1.3 Bổ đề. *Cho* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. *Ta có* $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ *nếu*

$$\mu\mathbf{a} < \mu\mathbf{b},\ \textit{hoặc}\ \mu\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}\ \textit{và}\ \nu\mathbf{a} < \nu\mathbf{b} \tag{4.5}$$

Chứng minh. Trường hợp $n = 2$ có thể được kiểm chứng một cách dễ dàng. Xét $n \geq 3$ và giả sử bổ đề đúng với $n-1$. Hiển nhiên $\mu\mathbf{a}^* = \mu\mathbf{a}$, $\mu\mathbf{b}^* = \mu\mathbf{b}$.

(i) Nếu $\mu\mathbf{a} < \mu\mathbf{b}$ thì $\mu a^* < \mu b^*$ nên theo giả thiết qui nạp $\mathbf{a}^* < \mathbf{b}^*$ và do đó $\mathbf{a} < \mathbf{b}$.

(ii) Giả sử $\mu\mathbf{a} = \mu\mathbf{b}$ và $\nu\mathbf{a} < \nu\mathbf{b}$. Ta có $\mu\mathbf{a}^* = \mu\mathbf{b}^*$ và $\nu\mathbf{a}^* \leq \nu\mathbf{b}^*$.

Nếu $\nu\mathbf{a}^* < \nu\mathbf{b}^*$ thì $\mathbf{a}^* < \mathbf{b}^*$ theo giả thiết qui nạp nên $\mathbf{a} < \mathbf{b}$. Nếu $\nu\mathbf{a}^* = \nu\mathbf{b}^*$ thì $\nu\mathbf{a} = n-1$, $\nu\mathbf{b} = n$. Trường hợp này ta có $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ do $a_i < b_i$ với $i = \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.◇

4.1.4 Bổ đề. *Nếu* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V(n)$ *với* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ *và* $\mu\mathbf{x}, \mu\mathbf{y} < p$. *Ta có*

$$\mathbf{x}p < \mathbf{y}p \Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y} \tag{4.6}$$

$$p\mathbf{x} < p\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y} \tag{4.7}$$

Chứng minh. Trường hợp $n = 1$ là hiển nhiên nên ta xét $n \geq 2$ và giả sử (4.6) và (4.7) đúng với $n-1$.

Trước tiên ta xét (4.6). Đặt $\mathbf{a} = \mathbf{x}p$, $b = \mathbf{y}p$ thì vì $\mu\mathbf{x}, \mu\mathbf{y} < p$ nên $\mathbf{a}^* = \mathbf{x}^*p$, $\mathbf{b}^* = \mathbf{y}^*p$. Bằng cách xét hàm ω khi $\mathbf{a}^* = \mathbf{b}^*$ ta có

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} < \mathbf{b} &\Leftrightarrow \mathbf{a}^* \leq \mathbf{b}^* \ \text{(định nghĩa)}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{x}^* \leq \mathbf{y}^* \ \text{(giả thiết qui nạp)}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad \text{(định nghĩa)}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y} \quad (\text{vì } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Ta chứng minh tương tự cho (4.7)◇

Mọi véctơ $\mathbf{a}$ với $p = \mu\mathbf{a}$ đều có thể viết $\mathbf{a} = \mathbf{u}p\mathbf{x}$ với $\mathbf{x} = \emptyset$ hay $\mu\mathbf{x} < p$.

4.1.5 Bổ đề. *Với $n \geq 1$, xét $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ là hai véctơ khác nhau của $V(n)$ sao cho $\mu\mathbf{x}$, $\mu\mathbf{y} < p$ và $\mathbf{u}$ là một véctơ của $V(r)$ với $r \geq 0$ và $\mu\mathbf{u} \leq p$. Ta có*

$$\mathbf{u}p\mathbf{x} < \mathbf{u}p\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{x}p\mathbf{u} < \mathbf{y}p\mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y} \tag{4.9}$$

Chứng minh. Đặt $\mathbf{a} = \mathbf{u}p\mathbf{x}, \mathbf{b} = \mathbf{u}p\mathbf{y}$ và $i = \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Với $n = 1$ thì (4.8), (4.9) là hiển nhiên. Với $n > 1$, ta có $\mathbf{a}^* = \mathbf{u}p\mathbf{x}^*$, $\mathbf{b}^* = \mathbf{u}p\mathbf{y}^*$.

Ta chứng minh (4.8). Nếu $t = \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ thì $a_i < b_i \Longleftrightarrow x_t < y_t$, do đó

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} < \mathbf{b} &\Leftrightarrow \mathbf{a}^* \leq \mathbf{b}^* \text{ (định nghĩa)}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{x}^* \leq \mathbf{y}^* \text{ (giả thiết qui nạp)}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \quad \text{(định nghĩa)}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y} \quad \text{(vì } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}). \diamondsuit
\end{aligned}$$

(4.9) được chứng minh tương tự.◇

4.1.6 Bổ đề. *Cho $n \geq 2$ và $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ là hai véctơ khác nhau của $V(n)$ với $\mu\mathbf{a} = \mu\mathbf{b} = p$, $\nu\mathbf{a} = \nu\mathbf{b}$. Giả sử $\mathbf{a} = \mathbf{x}p\mathbf{u}$, $\mathbf{b} = \mathbf{y}p\mathbf{v}$ sao cho $\mu\mathbf{x} < p$, $\mu\mathbf{y} < p$ và $s = \dim\mathbf{y} - \dim\mathbf{x} \geq 1$ ($\mathbf{v}$ có thể là $\emptyset$). Ta có*

$$\mathbf{a} < \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^s \tag{4.10}$$

Chứng minh. Trường hợp $n = 2$ có thể được kiểm chứng dễ dàng. Xét $n \geq 3$ và giả sử bổ đề đúng với n-1.

Vì $\dim\mathbf{x} < \dim\mathbf{y}$ nên $\dim\mathbf{u} > \dim\mathbf{v}$. Hơn nữa, vì $\nu\mathbf{a} = \nu\mathbf{b}$ nên có j sao cho $u_j < p$ và do đó $\mathbf{a}^* = \mathbf{x}p\mathbf{u}^*$. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp 1. $\mathbf{v} = \emptyset$.
Khi ấy $\mathbf{a} = \mathbf{x}p\mathbf{u}$ và $\mathbf{b} = \mathbf{y}p$ nên ta suy ra $\mathbf{a}^* = \mathbf{x}p\mathbf{u}^*$, $\mathbf{b}^* = \mathbf{y}^*p$ và $a_i < b_i$ với $i = \omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Do đó

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} < \mathbf{b} &\Leftrightarrow \mathbf{a}^* \leq \mathbf{b}^* \quad \text{(định nghĩa)}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{x} \leq (\mathbf{y}^*)^{s-1} \text{ (giả thiết qui nạp)}\\
&\Leftrightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^s \quad \text{(định nghĩa)}.
\end{aligned}$$

Trường hợp 2. $\mathbf{v} \neq \emptyset$.
Nếu $\mathbf{v} = p\ldots p$ thì ta có kết quả như trong Trường hợp 1. Nếu $\mathbf{v} \neq p\ldots p$ thì $\mathbf{b}^* = \mathbf{y}p\mathbf{v}^*$. Ta có $\mathbf{a}^* \neq \mathbf{b}^*$ vì $\dim \mathbf{x} \neq \dim \mathbf{y}$. Vậy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} < \mathbf{b} &\Leftrightarrow \mathbf{a}^* < \mathbf{b}^* && \text{(định nghĩa)} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{y}^s && \text{(giả thiết qui nạp)} \end{aligned}$$

4.1.7 Định lý. *Với* $\mathbf{a} \in V(n)$ *ta có*

$$\mathbf{a}^* = \max\{\Delta\mathbf{a}\} \tag{4.11}$$

Chứng minh. Với $n = 2$ thì (4.11) có thể được kiểm chứng một cách dễ dàng. Giả sử $n \geq 3$ và định lý đúng với mọi $l < n$.

Đặt $p = \mu\mathbf{a}$. Nếu $\nu\mathbf{a} = n$ thì $\mathbf{a} = pp\ldots p$ nên $\mathbf{a}^* = p\ldots p \in V(n-1)$ và $\Delta\mathbf{a} = \{\mathbf{a}^*\}$ nên $\mathbf{a}^* = \max\{\Delta\mathbf{a}\}$. Vậy giả sử $\nu\mathbf{a} < n$ và ta có $\nu\mathbf{a}^* = \nu\mathbf{a}$.

Đặt $k = \max\{i : a_i = p\}$. Ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1. $k = n$.
Khi ấy $\mathbf{a} = \mathbf{x}p \Rightarrow \mathbf{a}^* = \mathbf{x}^*p$. Hơn nữa nếu đặt $B = \{\mathbf{y}p : \mathbf{y} \in \Delta\mathbf{x}\}$ thì $\Delta\mathbf{a} = \{\mathbf{x}\} \cup B$ và $\max\{\Delta\mathbf{a}\} = \max\{\mathbf{x}, \mathbf{b}\}$ với $\mathbf{b} = \max B$.

Vì $\nu\mathbf{x} = \nu\mathbf{a} - 1 < \nu\mathbf{a}^*$ nên $\mathbf{x} < \mathbf{a}^*$. Với $\mathbf{y} \in \Delta\mathbf{x}$ thì theo giả thiết qui nạp, $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}^*$. Theo (4.6) thì $\mathbf{y}p \leq \mathbf{x}^*p$ nên $\mathbf{b} \leq \mathbf{a}^*$. Suy ra $\mathbf{a}^* = \max\{\Delta\mathbf{a}\}$.

Trường hợp 2. $k < n$.
Ta có thể viết $\mathbf{a} = \mathbf{u}p\mathbf{x}$ với $\mu\mathbf{x} < p$ và $\dim \mathbf{x} \geq 1$, do đó $\mathbf{a}^* = \mathbf{u}p\mathbf{x}^*$. Ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{y} \in \Delta\mathbf{x} &\Rightarrow \mathbf{y} \leq \mathbf{x}^* && \text{(giả thiết qui nạp)} \\ &\Rightarrow \mathbf{u}p\mathbf{y} \leq \mathbf{u}p\mathbf{x}^* && \text{(do (4.8))} \\ &\Rightarrow \mathbf{u}p\mathbf{y} \leq \mathbf{a}^*. \end{aligned}$$

Bây giờ xét $\mathbf{v}p\mathbf{x}$ với $\mathbf{v} \in \Delta\mathbf{u}$. Ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in \Delta\mathbf{u} &\Rightarrow \mathbf{v} \leq \mathbf{u}^* && \text{(giả thiết qui nạp)} \\ &\Rightarrow \mathbf{v}p\mathbf{x} \leq \mathbf{u}^*p\mathbf{x} && \text{(do (4.9))} \\ &\Rightarrow \mathbf{v}p\mathbf{x} \leq \mathbf{u}p\mathbf{x}^* && \text{(do (4.10))} \\ &\Rightarrow \mathbf{v}p\mathbf{x} \leq \mathbf{a}^*. \end{aligned}$$

Ngoài ra, hiển nhiên $\mathbf{ux} < \mathbf{a}^*$.

Vậy $\mathbf{a}^* = \max\{\Delta\mathbf{a}\}$.◇

4.1.8 Bổ đề. *Với* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V(n)$ *với* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ *và* $\mathbf{a} \in V(k)$ *thì*

$$\mathbf{ax} < \mathbf{ay} \Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y} \tag{4.12}$$

$$\mathbf{xa} < \mathbf{ya} \Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y} \tag{4.13}$$

Chứng minh. Cách chứng minh cho (4.12) và (4.13) tương tự nhau nên chỉ cần chứng minh (4.12).

Trước tiên xét trường hợp $k = 1$. Khi ấy $\mathbf{a} = r \in \mathbb{N}$. Nếu $n = 1$ thì(4.12), (4.13) chính là (4.3) nên ta giả sử $n > 1$ và bổ đề đúng với $n - 1$.

Đặt $\mathbf{u} = r\mathbf{x}$, $\mathbf{v} = r\mathbf{y}$, ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\mathbf{u}^* = r\mathbf{x}^*$, $\mathbf{v}^* = r\mathbf{y}^*$.
Để ý rằng $\omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + 1$ nên

$$\mathbf{u} < \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u}^* \leq \mathbf{v}^* \Leftrightarrow r\mathbf{x}^* \leq r\mathbf{y}^* \Leftrightarrow \mathbf{x}^* \leq \mathbf{y}^* \Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y}.$$

Dấu tương đương thứ ba là do giả thiết qui nạp.

Trường hợp 2. $\mathbf{u}^* = \mathbf{x}$ và $\mathbf{v}^* = \mathbf{y}$.
Khi ấy $\mathbf{u} < \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{u}^* \leq \mathbf{v}^* \Leftrightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y}$.

Trường hợp 3. $\mathbf{u}^* = \mathbf{x}$ và $\mathbf{v}^* = r\mathbf{y}^*$.
Ta có $r\mathbf{x}^* \leq \mathbf{x} = \mathbf{u}^*$, $\mathbf{y} \leq \mathbf{v}^* = r\mathbf{y}^*$. Nếu cả hai dấu bằng xảy ra thì ta lại có Trường hợp 1 hoặc Trường hợp 2 nên ta có thể giả sử $\mathbf{y} < \mathbf{v}^* = r\mathbf{y}^*$.

Nếu $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ thì

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{x} < \mathbf{y} < \mathbf{v}^* \Rightarrow \mathbf{u} < \mathbf{v}.$$

Đảo lại, cho $\mathbf{u} < \mathbf{v}$. Nếu $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^*$ thì $\mathbf{y} < r\mathbf{y}^* = \mathbf{x}$ và theo kết quả vừa chứng minh thì $\mathbf{v} = r\mathbf{y} < \mathbf{u} = r\mathbf{x}$, vô lý. Vậy $\mathbf{u}^* < \mathbf{v}^*$ nên

$$\begin{aligned} r\mathbf{x}^* &\leq \mathbf{u}^* < \mathbf{v}^* = r\mathbf{y}^* \\ &\Rightarrow \mathbf{x}^* < \mathbf{y}^* \text{ (do giả thiết qui nạp)} \\ &\Rightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Trường hợp 4. $\mathbf{u}^* = r\mathbf{x}^*$, $\mathbf{v}^* = \mathbf{y}$.
Như trên, ta có thể giả sử $\mathbf{x} < r\mathbf{x}^*$, $r\mathbf{y}^* < \mathbf{y}$. Nếu $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ thì $\mathbf{x}^* \leq \mathbf{y}^*$ nên theo giả thiết qui nạp ta có

$$r\mathbf{x}^* \leq r\mathbf{y}^* < \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{u}^* < \mathbf{v}^* \Rightarrow \mathbf{u} < \mathbf{v}.$$

Đảo lại, nếu $\mathbf{u} < \mathbf{v}$ thì

$$\mathbf{u}^* \leq \mathbf{v}^* \Rightarrow r\mathbf{x}^* \leq \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{x} < r\mathbf{x}^* \leq \mathbf{y}.$$

Bây giờ xét $k > 1$. Ta có thể viết $\mathbf{a} = r\mathbf{b}$ với $r = a_1$ và ta có

$$\begin{aligned} \mathbf{ax} < \mathbf{ay} &\Leftrightarrow r\mathbf{bx} < r\mathbf{by} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{bx} < \mathbf{by} \quad \text{(do trường hợp } k = 1) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y} \quad \text{(do giả thiết qui nạp).} \end{aligned}$$

Vậy bổ đề được chứng minh.$\diamondsuit$

Từ (4.12) và (4.13) ta suy ra

4.1.9 Định lý. *Cho* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V(n)$ *với* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ *và* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(k)$, $k \geq 0$ *thì*

$$\mathbf{axb} < \mathbf{ayb} \Leftrightarrow \mathbf{x} < \mathbf{y} \tag{4.14}$$

4.1.10 Định lý. *Cho* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(n)$, $n \geq 2$ *với* $\mathbf{a} = \mathbf{x}p\mathbf{u}$, $\mathbf{b} = \mathbf{y}p\mathbf{v}$, *trong đó* $\mu\mathbf{a} = \mu\mathbf{b} = p$, $\nu\mathbf{a} = \nu\mathbf{b}$ *và* $\mu\mathbf{x}$, $\mu\mathbf{y} < p$ *(*$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *có thể là* $\emptyset$*). Ta có* $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ *nếu và chỉ nếu*

(i) $\dim \mathbf{x} = \dim \mathbf{y}$ *và* $\mathbf{x} < \mathbf{y}$, *hay* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *và* $\mathbf{u} < \mathbf{v}$; *hoặc*

(ii) $\dim \mathbf{x} < \dim \mathbf{y}$ *và* $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}^s$ *với* $s = \dim \mathbf{y} - \dim \mathbf{x}$; *hoặc*

(iii) $\dim \mathbf{x} > \dim \mathbf{y} > 0$ *và* $\mathbf{x}^t < \mathbf{y}$ *với* $t = \dim \mathbf{x} - \dim \mathbf{y}$.

Chứng minh. Trường hợp $n = 2$ kiểm chứng một cách dễ dàng. Giả sử $n \geq 3$ và định lý đúng với $n - 1$.

Do các Bổ đề 4.1.5, 4.1.6 và 4.1.8, ta chỉ cần chứng minh trường hợp $\dim \mathbf{x} > \dim \mathbf{y} > 0$. Khi ấy $\dim \mathbf{u} < \dim \mathbf{v}$ và vì $\nu\mathbf{a} = \nu\mathbf{b}$ nên có j sao cho $\mathbf{v}_j < p$, do đó $\mathbf{b}^* = \mathbf{y}p\mathbf{v}^*$. Ta phân biệt 2 trường hợp:

Trường hợp 1. $\mathbf{u} = \emptyset$ tức là $\mathbf{a} = \mathbf{x}p$.
Trường hợp này ta có $\mathbf{a}^* = \mathbf{x}^*p$. Vậy

$$\begin{aligned}\mathbf{a} < \mathbf{b} &\Leftrightarrow \mathbf{a}^* < \mathbf{b}^* \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x}^*p < \mathbf{y}p\mathbf{v}^* \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{x}^*)^{t-1} < \mathbf{y} \quad \text{(do giả thiết qui nạp)} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x}^t < \mathbf{y}.\end{aligned}$$

Trường hợp 2. $\mathbf{u} \neq \emptyset$.
Nếu $\mathbf{u} = p \ldots p$ thì $\mathbf{a}^* = \mathbf{x}^*\mathbf{u}$. Lý luận như Trường hợp 1, ta có kết quả.
Xét $\mathbf{u} \neq p \ldots p$. Khi ấy $\mathbf{a}^* = \mathbf{x}p\mathbf{u}^*$ và vì $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ nên $\mathbf{a}^* \neq \mathbf{b}^*$. Suy ra

$$\begin{aligned}\mathbf{a} < \mathbf{b} &\Leftrightarrow \mathbf{a}^* < \mathbf{b}^* \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x}p\mathbf{u}^* < \mathbf{y}p\mathbf{v}^* \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x}^t < \mathbf{y} \qquad \text{(do giả thiết qui nạp).}\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh.◇

4.1.11 Định nghĩa. *Cho* $\mathbf{a} \in V(n)$ *với* $\mu\mathbf{a} = p$, $\nu\mathbf{a} = k$ *thì* $\mathbf{a}$ *có thể viết dưới dạng*

$$\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 p \mathbf{x}_2 p \ldots \mathbf{x}_k p \mathbf{x}_{k+1} \tag{4.15}$$

trong đó các véctơ $\mathbf{x}_i$ *thỏa:* $\mu\mathbf{x}_i < p$ *hay* $\mathbf{x}_i = \emptyset$.

Dạng (4.15) gọi là dạng chính tắc *của* $\vee$*-véctơ.*

Kết hợp các Bổ đề 4.1.3 và các Định lý 4.1.9, 4.1.10, ta có kết quả sau đây, gọi là dạng chính tắc của thứ tự $\vee$.

4.1.12 Định lý. *Cho* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(n)$ *với* $\mu\mathbf{a} = p$, $\mu\mathbf{b} = q$ *và* $\nu\mathbf{a} = h$, $\nu\mathbf{b} = k$ *với* $\mathbf{a}$ *và* $\mathbf{b}$ *viết dưới dạng chính tắc*

$$\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 p \mathbf{x}_2 p \ldots \mathbf{x}_h p \mathbf{x}_{h+1}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{y}_1 q \mathbf{y}_2 q \ldots \mathbf{y}_k q \mathbf{y}_{k+1}.$$

Đặt $i = \min\{j : \mathbf{x}_j \neq \mathbf{y}_j\}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_i$, *ta có* $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ *khi và chỉ khi*

(i) $p < q$; *hoặc*

(ii) $p = q$ *và* $h < k$; *hoặc*

(iii) $p = q$, $h = k$ *và* $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}^s$ *nếu* $s = \dim \mathbf{y} - \dim \mathbf{x} \geq 0$; *hoặc*

(iv) $p = q$, $h = k$ *và* $\mathbf{x}^t < \mathbf{y}$ *nếu* $t = \dim \mathbf{x} - \dim \mathbf{y} > 0$ *và* $\dim \mathbf{y} > 0$.

Trường hợp $\mathbf{a} \in B(n)$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{z}_n$ thì $\mu\mathbf{a} = 1$ và $\nu\mathbf{a} = w\mathbf{a}$ và trong công thức (4.15), mỗi $\mathbf{x}_j$ là một véctơ zero, tức là $\mathbf{x}_j = \mathbf{z}_{r_j}$ với $r_j \geq 0$. Vậy, với $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B(n)$ và $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{z}_n$ thì $\mu\mathbf{a} = \mu\mathbf{b} = 1$ và dạng chính tắc của chúng là

$$\mathbf{a} = \mathbf{z}_{r_1} 1 \mathbf{x}_{r_2} 1 \ldots \mathbf{z}_{r_h} 1 \mathbf{z}_{r_{h+1}}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{z}_{s_1} 1 \mathbf{z}_{s_2} 1 \ldots \mathbf{z}_{s_k} 1 \mathbf{z}_{s_{k+1}}.$$

Với $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ như trong Định lý 4.1.12 thì vì chúng đều là véctơ zero nên ta không thể có $\mathbf{x}^t < \mathbf{y}$, $t = \dim \mathbf{x} - \dim \mathbf{y}$, còn điều kiện $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}^s$ có nghĩa là $a_i = 1 > b_i = 0$ với $i = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Vậy Định lý 4.1.12 áp dụng cho $B(n)$ sẽ có dạng

$$\mathbf{a} < \mathbf{b} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} w\mathbf{a} < w\mathbf{b}, \text{ hoặc} \\ w\mathbf{a} = w\mathbf{b} \text{ và } a_i = 1 > b_i = 0, \text{ với } i = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{array} \right.$$

Đây chính là định nghĩa của thứ tự $\vee$ trên $B(n)$ của chúng ta trong Chương 2.

4.1.13 Định lý. *Cho A là một IS của $V(n)$. Ta có ΔA cũng là một IS của $V(n-1)$. Hơn nữa, nếu $A = G_0 0 + G_1 1 + \cdots + G_p p$ thì*

$$\Delta A = A^* = G_0 \tag{4.16}$$

Suy ra,nếu $A = IS(\mathbf{a})$ thì $\Delta A = IS(\mathbf{a}^*)$.

Chứng minh. Cho A là một IS và $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ với $\mathbf{y} \in \Delta A$. Ta sẽ chứng minh $\mathbf{x} \in \Delta A$. Thật vậy

$$\mathbf{y} \in \Delta A \Rightarrow \exists \mathbf{b} \in A : \ \mathbf{y} \in \Delta \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{y} \leq \mathbf{b}^*.$$

Đặt $\mathbf{a} = \mathbf{x}0$, ta có

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{x} < \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{a}^* < \mathbf{b}^* \Rightarrow \mathbf{a} < \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \in A.$$

Dấu $\Rightarrow$ cuối cùng do A là IS và $\mathbf{b} \in A$.

Với $\mathbf{x} \in \Delta A$ thì có $\mathbf{v} \in A$ sao cho $\mathbf{x} \in \Delta \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{v}^*$. Như trên, đặt $\mathbf{u} = \mathbf{x}0$ thì $\mathbf{u}^* = \mathbf{x} \leq \mathbf{v}^* \Rightarrow \mathbf{u} \leq \mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{u} \in A$ vì A là IS. Vậy $\mathbf{x} = \mathbf{u}^* \in A^*$. Ngoài ra, vì $\mathbf{u} = \mathbf{x}0 \in G_0 0$ nên $\mathbf{x} \in G_0$. Do đó $\Delta A = A^* = G_0$.$\Diamond$

Do (4.16), nếu $A = IS(\mathbf{a})$ thì $\Delta A = IS(\mathbf{a}^*)$ nên ta có thể viết $IS(\mathbf{a}^*)$ thay cho $\Delta IS(\mathbf{a})$.$\diamondsuit$

4.1.14 Định nghĩa. *Cho* $\mathbf{a} \in V(n)$ *với* $\vee\mathbf{a} = h$.
(i) Ta định nghĩa $\mathbf{a}^{-*}$ *là véctơ* $\mathbf{b} = b_1b_2\ldots b_{n+1} \in V(n+1)$ *xác định như sau*

$$b_i = \begin{cases} a_i & \text{nếu } i < h+1 \\ a_{i-1} & \text{nếu } i > h+1 \text{ và } h < n \\ a_h & \text{nếu } i = h+1 \end{cases}$$

(ii) Với $k \in I\!N$ *ta định nghĩa*

$$\mathbf{a}^0 = \mathbf{a},\ \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{a}^{-*},\ \mathbf{a}^{-2} = (\mathbf{a}^{-1})^{-*}, \ldots, \mathbf{a}^{-k} = (\mathbf{a}^{-(k-1)})^{-*}.$$

Như vậy $\mathbf{a}^{-*}$ có được từ $\mathbf{a}$ bằng cách lặp lại thành phần thứ h của $\mathbf{a}$ một lần nữa ở vị trí thứ $h+1$. Chẳng hạn như với $\mathbf{a} = 4236$ thì $\mathbf{a}^{-*} = 42236$, $\mathbf{a}^{-2} = 422236$, $\mathbf{a}^{-3} = 4222236, \ldots$

Nhận xét rằng ta có $(\mathbf{a}^{-s})^s = \mathbf{a}$.

4.1.15 Định nghĩa. Bóng trên *(shade, upper shadow) của* $\mathbf{a} \in V(n)$ *được định nghĩa là*

$$\nabla\mathbf{a} = \{\mathbf{x} \in V(n+1) : \mathbf{x}^* = \mathbf{a}\}.$$

4.1.16 Định lý. *Với* $\mathbf{a} \in V(n)$ *ta có*

$$\nabla\mathbf{a} = \{\mathbf{x} \in V(n+1) : \mathbf{a}0 \le \mathbf{x} \le \mathbf{a}^{-*}\} \tag{4.17}$$

Chứng minh. Gọi B là vế phải của (4.17), ta sẽ chứng minh $B = \nabla\mathbf{a}$. Hiển nhiên $B \subset \nabla\mathbf{a}$. Đảo lại, cho $\mathbf{x} \in V(n+1)$ với $\mathbf{x}^* = \mathbf{a}$, ta chứng minh $\mathbf{x} \in B$.

Nếu $\mathbf{x} = \mathbf{u}0$ thì $\mathbf{u} = \mathbf{x}^* = \mathbf{a}$ nên $\mathbf{a}0$ là véctơ duy nhất của $\nabla\mathbf{a}$ tận cùng bằng 0. Hơn nữa, nếu $x_{n+1} > 0$ thì $\mathbf{a}0 < \mathbf{x}$ nên $\mathbf{a}0 = \min\nabla\mathbf{a}$.

Đặt $k = \vee\mathbf{x}$ thì $\mathbf{a} = \mathbf{x}^* = \delta_k\mathbf{x}$. Nếu $k = 1$ thì

$$\mathbf{a} = \mathbf{x}^* = x_2\ldots x_nx_{n+1} \Rightarrow \mathbf{a}^{-*} = x_2x_2\ldots x_{n+1}.$$

Vì $x_1 \leq x_2$ nên $\mathbf{x} \leq \mathbf{a}^{-*}$. Với $k > 1$ ta có

$$\begin{aligned} x_{k-1} &> x_k, \quad x_k \leq \cdots \leq x_{n+1}; \\ \mathbf{a} = \mathbf{x}^* &= x_1 \ldots x_{k-1}x_{k+1} \ldots x_{n+1}. \end{aligned}$$

Nếu $x_{k-1} \leq x_{k+1}$ và $h = \vee\mathbf{a}$ thì $1 \leq h \leq k-1$ và $\omega(\mathbf{x}, \mathbf{a}^{-*}) = k$ với $a_k^{-*} = x_{k-1} > x_k$ nên $\mathbf{x} < \mathbf{a}^{-*}$.

Nếu $x_{k-1} > x_{k+1}$ thì $h = \vee\mathbf{a} = k$ và $\mathbf{a}^{-*} = x_1 \ldots x_{k-1}x_{k+1}x_{k+1} \ldots x_{n+1}$. Vì $x_k \leq x_{k+1}$ nên $\mathbf{x} \leq \mathbf{a}^{-*}$.

Định lý được chứng minh.$\diamond$

4.1.17 Bổ đề. *Với* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V(n)$ *ta có*

$$\mathbf{a} \prec \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a}^{-*} \prec \mathbf{b}0 \tag{4.18}$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh nếu $\mathbf{a}^{-*} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{b}0$ thì $\mathbf{c} = \mathbf{a}^{-*}$ hay $\mathbf{c} = \mathbf{b}0$.

Vì $\mathbf{a}^{-*} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{b}0$ nên $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}^* \leq \mathbf{b}$. Do $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ nên ta có $\mathbf{c}^* = \mathbf{a}$ hay $\mathbf{c}^* = \mathbf{b}$. Nếu $\mathbf{c}^* = \mathbf{a}$ thì $\mathbf{c} \in \nabla\mathbf{a}$ và theo (4.17) thì $\mathbf{c} \leq \mathbf{a}^{-*}$ nên $\mathbf{c} = \mathbf{a}^{-*}$. Nếu $\mathbf{c}^* = \mathbf{b}$ thì $\mathbf{c} \in \nabla\mathbf{b}$ nên $\mathbf{c} \geq \mathbf{b}0$ và do đó $\mathbf{c} = \mathbf{b}0$.

Vậy (4.18) được chứng minh.$\diamond$

4.1.18 Định nghĩa. *Cho* $\mathbf{a} = a_1a_2 \ldots a_n \in V(n)$ *với* $\vee\mathbf{a} = h$. *Ta định nghĩa*

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{a}) &= \begin{cases} \emptyset & \textit{nếu}\ 1 \leq h \leq 2 \\ a_1 \ldots a_{h-2} & \textit{nếu}\ h > 2 \end{cases} \\ s(\mathbf{a}) &= max\{j : a_{h+j} = a_h\} \\ \tau(\mathbf{a}) &= a_r \ldots a_n\mathbf{z}_s \ \textit{trong đó}\ r = h + s + 1,\ \textit{và}\ s = s(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

với qui ước $a_r \ldots a_n = \emptyset$ *nếu* $s = n - h$.

Chú ý rằng $s(\mathbf{a}) = 0$ nếu $a_h < a_{h+1}$ và khi ấy $\mathbf{z}_s = \emptyset$.

Một số ví dụ về $\sigma(\mathbf{a})$, $s(\mathbf{a})$, $\tau(\mathbf{a})$ được thể hiện trong Bảng 4.1.

Để tránh nhầm lẫn, trong một số trường hợp của Định lý 4.1.19 dưới đây (trừ trong Bảng 1), véctơ $x_1x_2 \ldots x_n$ sẽ được viết là $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

4.1.19 Định lý. *Với* $\mathbf{a} \in V(n)$, *ta đặt* $\mathbf{u} = \sigma(\mathbf{a})$, $s = s(\mathbf{a})$, $\mathbf{v} = \tau(\mathbf{a})$. *Nếu* $\vee\mathbf{a} = h$ *và* $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$ *thì với qui ước* $(\mathbf{u}, a_{h-1}) = \emptyset$ *nếu* $h = 1$ *ta có*

$$\mathbf{b} = \begin{cases} (\mathbf{u}, a_{h-1}, 1 + a_h, \mathbf{v}) & \text{nếu } h = 1 \text{ hoặc } a_{h-1} > 1 + a_h \\ (\mathbf{u}, 0, a_{h-1}, \mathbf{v}) & \text{nếu } a_{h-1} = 1 + a_h \end{cases} \tag{4.19}$$

Bảng 4.1 sau đây giới thiệu một số ví dụ để làm rõ định lý trên.

$\mathbf{a}$	$h = \vee\mathbf{a}$	$s = s(\mathbf{a})$	$\mathbf{u} = \sigma(\mathbf{a})$	$\mathbf{v} = \tau(\mathbf{a})$	$\mathbf{b}$
1223	1	0	$\emptyset$	223	2223
2222	1	3	$\emptyset$	000	3000
123025	4	0	12	25	123125
2341116	4	2	23	600	2342600
5421032	7	0	54210	$\emptyset$	5421003
01432256	5	1	014	560	01403560

Bảng 4.1

Chứng minh. Vì $\vee\mathbf{a} = h$ nên $\mathbf{a}^* = \delta_h\mathbf{a}$

$$a_h \le a_{h+1} \le \cdots \le a_n \text{ và } a_{h-1} > a_h \text{ nếu } h > 1 \tag{4.20}$$

Vì $\mathbf{a}^* = \delta_h\mathbf{a}$ nên

$$a_j^* = \begin{cases} a_{j+1} & \text{nếu } h \le j \le n-1 \\ a_j & \text{nếu } 1 \le j \le h-1 \end{cases} \tag{4.21}$$

Suy ra $a_j = a_{j-1}^*$ nếu $j > h$.

Để ý rằng, trong (4.19) ta luôn luôn có $b_h = 1 + a_h$.

Ta sẽ chứng minh rằng nếu $\mathbf{a} \le \mathbf{c} \le \mathbf{b}$ thì ta có $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ hay $\mathbf{c} = \mathbf{b}$. Với $\mathbf{c}$ như thế thì $\mathbf{a}^* \le \mathbf{c}^* \le \mathbf{b}^*$. Ngoài ra, nếu $k = \vee\mathbf{c}$ thì

$$c_k \le \cdots \le c_n \text{ và } c_{k-1} > c_k \text{ nếu } k > 1 \tag{4.22}$$

và ta có

$$c_j^* = \begin{cases} c_{j+1} & \text{nếu } k \le j \le n-1 \\ c_j & \text{nếu } 1 \le j \le k-1 \end{cases} \tag{4.23}$$

Vậy $c_j = c_{j-1}^*$ nếu $j > k$.

Ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1. $s = 0$, nghĩa là $a_h < a_{h+1}$.
Khi ấy ta có $\mathbf{v} = \tau(\mathbf{a}) = (a_{h+1}, \ldots, a_n)$. Hơn nữa, $\mathbf{b}^* = \mathbf{a}^*$ và vì $\mathbf{a}^* \leq \mathbf{c}^* \leq \mathbf{b}^*$ nên $\mathbf{a}^* = \mathbf{b}^* = \mathbf{c}^*$ và do đó

$$a_j^* = b_j^* = c_j^*, \ j = 1, \ldots, n-1 \tag{4.24}$$

Nếu $h < k \leq n$ thì từ (4.21), (4.22), (4.23), (4.24) ta có

$$\begin{cases} a_j = a_{j-1}^* = c_{j-1}^* = c_j \text{ nếu } j > k \\ a_k = a_{k-1}^* = c_{k-1}^* = c_{k-1} > c_k \end{cases}$$

Vậy $k = \omega(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ với $a_k > c_k$ nên $\mathbf{a} > \mathbf{c}$, vô lý. Vậy $k \leq h$.

Trường hợp 1.1. $h = 1$ hay $a_{h-1} > 1 + a_h$.

Ở đây $\mathbf{b} = (\mathbf{u}, a_{h-1}, 1 + a_h, \mathbf{v})$. Nếu $h = 1$ thì vì $k \leq h$ ta có $k = h = 1$. Xét trường hợp $a_{h-1} > 1 + a_h$. Nếu $k < h$ thì theo (4.21), (4.23), (4.24) ta có

$$\begin{aligned} c_j &= c_{j-1}^* = a_{j-1}^* = a_j = b_j \text{ với } j > h \text{ (nếu có)} \\ c_h &= c_{h-1}^* = a_{h-1}^* = a_{h-1} > 1 + a_h = b_h. \end{aligned}$$

Suy ra $h = \omega(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ với $c_h > b_h$ nên $\mathbf{c} > \mathbf{b}$, mâu thuẫn.

Vậy $k = h$.

Từ (4.21) và (4.23) ta có $a_j = c_j$, $\forall j \neq h$. Hơn nữa vì $\mathbf{a} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{b}$ nên

$$a_h \leq c_h \leq b_h = 1 + a_h \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c_h = a_h \\ c_h = 1 + a_h \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathbf{c} = \mathbf{a} \\ \mathbf{c} = \mathbf{b} \end{array} \right.$$

Trường hợp 1.2. $a_{h-1} = 1 + a_h$.

Trường hợp này ta có $\mathbf{b} = (\mathbf{u}, 0, 1 + a_h, \mathbf{v})$ nghĩa là $b_j = a_j$ với $j \neq h-1, h$ và $b_{h-1} = 0$, $b_h = 1 + a_h$. Hơn nữa, vì $a_h < a_{h+1}$ nên $b_h = 1 + a_h \leq a_{h+1} = b_{h+1}$. Vậy có thể giả sử $\vee\mathbf{b} = h - 1$ và do đó $\mathbf{b}^* = \delta_{h-1}\mathbf{b}$.

Nếu $k = h$ thì

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^* = \mathbf{b}^* = \mathbf{a}^* \;&\Rightarrow\; \delta_h\mathbf{c} = \delta_{h-1}\mathbf{b} = \delta_h\mathbf{a} \\ &\Rightarrow\; c_j = \begin{cases} a_j & \text{với } j \neq h \\ b_j & \text{với } j \neq h, h-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì $\mathbf{a} \leq \mathbf{c} \leq \mathbf{b}$ nên

$$a_h \leq c_h \leq b_h = 1 + a_h \Rightarrow c_h = a_h \text{ hay } c_h = 1 + a_h.$$

Nếu $c_h = 1 + a_h = b_h$ thì vì $c_{h-1} = a_{h-1}$ và $c_j = b_j$, $\forall j > h$ nên

$$\mathbf{c} \leq \mathbf{b} \Rightarrow c_{h-1} \leq b_{h-1} = 0 \Rightarrow c_{h-1} = 0 \Rightarrow a_{h-1} = 0$$

trái giả thiết (vì $a_{h-1} = 1 + a_h > 0$).

Vậy $c_h = a_h$ và do đó $\mathbf{c} = \mathbf{a}$.

Xét $1 \leq k \leq h-1$. Ta có $\mathbf{c}^* = \mathbf{b}^* \Rightarrow \delta_k\mathbf{c} = \delta_{h-1}\mathbf{b}$ nên

$$c_j = c^*_{j-1} = b^*_{j-1} = b_j \text{ với } j \geq h.$$

Hơn nữa

$$\mathbf{c} \leq \mathbf{b} \Rightarrow c_{h-1} \leq b_{h-1} = 0 \Rightarrow c_{h-1} = 0.$$

Vì $k = \vee\mathbf{c}$ nên

$$c_k = \cdots = c_{h-1} = 0 \Rightarrow \mathbf{c}^* = \delta_{h-1}\mathbf{c}.$$

Ngoài ra, $c_{h-1} = b_{h-1} = 0$ nên

$$\mathbf{c}^* = \mathbf{b}^* \Rightarrow \delta_{h-1}\mathbf{c} = \delta_{h-1}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{b}.$$

Trường hợp 2. $s > 0$ nghĩa là $a_h = a_{h+1} = \cdots = a_{h+s}$.
Ta có $a_h < a_{h+s+1}$, $\mathbf{v} = \tau(\mathbf{a}) = (a_{h+s+1}, \ldots, a_n, \mathbf{z}_s)$ nếu $s + h < n$ và $\mathbf{v} = \tau(\mathbf{a}) = \mathbf{z}_s$ nếu $s + h = n$.

Đặt $\mathbf{x} = \mathbf{a}^{s*}$, $\mathbf{y} = \mathbf{b}^{s*}$ thì $\mathbf{x}^{-s*} = \mathbf{a}$, $\mathbf{y}^{-s*} = \mathbf{b}$ và $\mathbf{b} = \mathbf{y}\mathbf{z}_s$. Theo Trường hợp 1 thì $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ và theo Bổ đề 4.1.16 ta có

$$\mathbf{x}^{-*} \prec \mathbf{y}0 \Rightarrow \mathbf{x}^{-2*} \prec \mathbf{y}00 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \mathbf{x}^{-s*} \prec \mathbf{y}00\ldots0 = \mathbf{y}\mathbf{z}_s \Rightarrow \mathbf{a} \prec \mathbf{b}.$$

Định lý được chứng minh.◇

Đến đây ta đã chứng minh được nhiều tính chất quan trọng của thứ tự V. Bây giờ ta xét các bài toán về biểu diễn.

4.2 Các bài toán về biểu diễn

Ta viết $\mathbf{p}_r$ để chỉ véctơ của $V(r)$ có tất cả các thành phần bằng p.

Ta kiểm chứng dễ dàng kết quả sau đây

4.2.1 Bổ đề. *Cho* $A = \{\mathbf{x} \in V(n) : \mu\mathbf{x} = p, \nu\mathbf{x} = k\}$ *với* $k > 0$. *Đặt* $\mathbf{a} = minA$, $\mathbf{b} = maxA$, *ta có*

$$\begin{aligned} &(\mathrm{i}) \quad |A| = \binom{n}{k} p^{n-k}, \quad |A^*| = \binom{n-1}{k} p^{n-1-k} \\ &(\mathrm{ii}) \quad \mathbf{a} = \mathbf{p}_k \mathbf{z}_{n-k} \qquad \mathbf{b} = (\mathbf{p}-\mathbf{1})_{n-k}\mathbf{p}_k. \end{aligned} \tag{4.25}$$

4.2.2 Định nghĩa. *Cho* n, k, $p \in I\!N$ *với* $0 \le k \le n$. *Giả sử có* $h \ge 1$ *và có* $n_i \ge k_i$, $1 \le i \le h$ *sao cho*

$$n = n_1 > n_2 > \cdots > n_h \ge 1 \text{ và } k = k_1 > k_2 > \cdots > k_h \ge 1.$$

Ta định nghĩa

$$\mathcal{T}(n,k,p) = \begin{cases} (p+1)^n & \text{nếu } k = n \\ p^n & \text{nếu } k = 0 \end{cases}$$

và với α_{ij} *cho sẵn,* $0 < k < n$ *thì*

$$\mathcal{T}(n,k,p) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} p^{n-j} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{n_i-k_i} \alpha_{ij} \binom{n_i - j - 1}{k_i - 1} p^{n_i-k_i-j}.$$

Dĩ nhiên hàm $\mathcal{T}$ phụ thuộc vào h và các số nguyên α_{ij}, nhưng để đơn giản ký hiệu, ta viết như trên.

4.2.3 Định lý. *Cho* $\mathbf{a} \in V(n)$ *với* $\mu\mathbf{a} = p$ *và* $\nu\mathbf{a} = k > 0$. *Tồn tại những số nguyên* s, n_i, k_i, p_i *sao cho* $n = n_1 > \cdots > n_s \ge 1$, $k_i \le n_i$, $p_1 > \cdots > p_s \ge 0$ và

$$\begin{aligned} |IS(\mathbf{a})| &= \sum_{i=1}^{s} \mathcal{T}(n_i, k_i, p_i) \\ |IS(\mathbf{a}^*)| &= \sum_{i=1}^{s} \mathcal{T}(n_i - 1, k_i, p_i) \end{aligned} \tag{4.26}$$

Chứng minh. Trường hợp $n = 1$ là hiển nhiên nên ta giả sử $n > 1$ và định lý đúng với mọi $l < n$.

Trường hợp 1. $k = n$.
Ở đây ta có

$$IS(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in V(n) : \mu\mathbf{x} \leq p\} \text{ và } IS(\mathbf{a}^*) = \{\mathbf{x} \in V(n-1) : \mu\mathbf{x} \leq p\}.$$

Do đó

$$|IS(\mathbf{a})| = (p+1)^n \text{ và } |IS(\mathbf{a}^*)| = p^n.$$

Trường hợp 2. $k < n$.
Đặt $F_0 = \{\mathbf{x} \in V(n) : \mu\mathbf{x} = p,\ 0 \leq \nu\mathbf{x} < k\}$. Theo Định lý 4.1.12 thì $F_0 \subset IS(\mathbf{a})$ và Bổ đề 4.2.1 thì

$$\begin{aligned} |F_0| &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} p^{n-j} \\ |F_0^*| &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n-1}{j} p^{n-1-j} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Những véctơ $\mathbf{v}$ còn lại của $IS(\mathbf{a})$ có $\mu\mathbf{v} = p$, $\nu\mathbf{v} = k$, tức là có dạng chính tắc

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}_1 p \mathbf{x}_2 p \ldots \mathbf{x}_k p \mathbf{x}_{k+1}.$$

Bằng cách loại bỏ $\mathbf{x}_i$ nếu $2 \leq i \leq k$ và $\mathbf{x}_i = \emptyset$ đồng thời đánh số lại các $\mathbf{x}_i$ nếu cần, ta có viết $\mathbf{v}$ dưới dạng

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{e}_2 \ldots \mathbf{x}_h \mathbf{e}_h x_{h+1}$$

trong đó $h \leq k$, $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_{h+1}$ có thể là $\emptyset$ và

$$\begin{aligned} \mu\mathbf{x}_i < p,\ \dim \mathbf{x}_i &= r_i \geq 1 \text{ với } 2 \leq i \leq h \\ \mu\mathbf{e}_i = p,\ \dim \mathbf{e}_i &= s_i = \nu\mathbf{e}_i \geq 1,\ 1 \leq i \leq h \end{aligned}$$

Như vậy $s_1 + \cdots + s_h = k$.

Đặt $\mathbf{u}_0 = \emptyset, \mathbf{u}_i = (\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{e}_i)$, $d_0 = t_0 = 0$ và $d_i = r_1 + \cdots + r_i$, $t_i = s_1 + \cdots + s_i$ thì ta có

$$\mathbf{u}_0 = \emptyset,\ \mathbf{u}_i = (\mathbf{x}_1, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{x}_i, \mathbf{e}_i) \Rightarrow \begin{cases} \dim \mathbf{u}_0 = 0 \\ \dim \mathbf{u}_i = d_i + t_i \end{cases}$$

Hơn nữa $\nu \mathbf{u}_i = s_1 + \cdots + s_i = t_i$.

Với $1 \leq i \leq h$, đặt

$$\begin{array}{rclcl} m_1 & = & n,\ m_i = m_{i-1} - (r_{i-1} + s_{i-1}) & = & n - (d_{i-1} + t_{i-1}) \\ l_1 & = & k,\ l_i = l_{i-1} - s_{i-1} & = & k - t_{i-1}. \end{array}$$

Với $i \geq 1$ coi $\mathbf{u} = (u_{i-1}, \mathbf{x}, p, \mathbf{y})$ với $\mu\mathbf{x} < p$, $\mu\mathbf{u} = p$ và $\nu\mathbf{u} = k$. Nếu $\dim \mathbf{x} = j$ thì

$$\begin{array}{rcl} \dim \mathbf{y} & = & n - \dim \mathbf{u}_{i-1} - j - 1 = n - (d_{i-1} + t_{i-1}) - j - 1 \\ & = & m_i - j - 1 \\ \nu\mathbf{y} & = & k - \nu\mathbf{u}_{i-1} - 1 = k - t_{i-1} - 1 = l_i - 1. \end{array}$$

Ngoài ra

$$j = \dim \mathbf{x} \leq n - k - d_{i-1} = n - (d_{i-1} + t_{i-1}) - (k - t_{i-1}) = m_i - l_i.$$

Với $1 \leq i \leq h$ và $0 \leq j \leq m_i - l_i$, trừ trường hợp $\mathbf{x}_{h+1} = \emptyset$ và $i = h$, ta đặt

$$A_i(j) = \begin{cases} \{\mathbf{x} \in V(j) : \mathbf{x}^{j-r_i} < \mathbf{x}_i\} & \text{nếu } j \geq r_i \\ \{\mathbf{x} \in V(j) : \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_i^{r_i - j}\} & \text{nếu } j < r_i \end{cases}$$

Nếu $\mathbf{x}_1 = \emptyset$ thì $A_1(j) = \emptyset$, $\forall j$

Trong trường hợp $\mathbf{x}_{h+1} = \emptyset$ thì ta đặt

$$A_h(j) = \{\mathbf{x} \in V(j) : \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_h^{r_h - j}\} \text{ nếu } j \leq r_h.$$

Nhận xét rằng với $1 \leq r_i \leq h$ và $r_i > 0$ thì $A_i(0) = \{\emptyset\}$.

Mỗi $A_i(j)$ là một IS với $\dim A_i(j) < n$ nên ta có thể tìm được $\alpha_{ij} = |A_i(j)|$.

Ngoài ra, đặt

$$G_i(j) = \{\mathbf{y} \in V(m_i - j - 1) : \mu\mathbf{y} = p, \nu\mathbf{y} = l_i - 1\};$$

$$H_i(j) = \{\mathbf{u}_{i-1}\mathbf{x}p\mathbf{y} : \mathbf{x} \in A_i(j), \mathbf{y} \in G_i(j)\}.$$

Theo Định lý 4.1.12 thì $H_i(j) \subset IS(\mathbf{a})$. Hơn nữa

$$|H_i(j)| = |A_i(j)||G_i(j)| = \alpha_{ij}\binom{m_i - j - 1}{l_i - 1}.$$

và $H_i(j) \cap H_i(j') = \emptyset$ nếu $j \neq j'$.

Giả sử $j = m_i - l_i$. Với $\mathbf{y} \in G_i(j)$ thì $m_i - j - 1 = l_i - 1 = \nu\mathbf{y}$ nên

$$\begin{aligned} H_i(j) &= \{\mathbf{u}_{i-1}\mathbf{x}p\ldots p : \mathbf{x} \in A_i(j)\} \\ \Rightarrow (H_i(j))^* &= \{\mathbf{u}_{i-1}\mathbf{x}^*p\ldots p : \mathbf{x} \in A_i(j)\} \\ \Rightarrow (H_i(j))^* &\subset (H_i(j-1))^*. \end{aligned}$$

Với $j < m_i - l_i$ thì $m_i - j - 1 > l_i - 1 = \nu\mathbf{y}$, $\mathbf{y} \in G_i(j)$ nên nếu $\mathbf{u} = u_{i-1}\mathbf{x}p\mathbf{y} \in H_i(j)$ thì $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_{i-1}\mathbf{x}p\mathbf{y}^*$. Vậy

$$|\,(H_i(j))^*\,| = |\,(G_i(j))^*\,| = \alpha_{ij}\binom{m_i - 1 - j - 1}{l_i - 1}p^{m_i - 1 - l_i - j}.$$

Hiển nhiên $(H_i(j))^* \cap (H_i(j'))^* = \emptyset$ nếu $j < j' < m_i - l_i$.

Đặt $F_i = \bigcup_{j=0}^{m_i - l_i} H_i(j)$ thì với qui ước $\binom{l}{q} = 0$ nếu $l < 0$ ta có

$$\begin{aligned} |F_i| &= \sum_{j=0}^{m_i-l_i} |H_i(j)| &&= \sum_{j=0}^{m_i-l_i} \alpha_{ij}\binom{m_i - j - 1}{l_i - 1}; \\ |F_i^*| &= \sum_{j=0}^{m_i-l_i} |\,(H_i(j))^*\,| &&= \sum_{j=0}^{m_i-l_i} \alpha_{ij}\binom{m_i - 1 - j - 1}{l_i - 1} \end{aligned} \tag{4.28}$$

Bây giờ đặt $F = \bigcup_{i=0}^{h} F_i$ thì $F \subset IS(\mathbf{a})$ và $|F| = \sum_{i=0}^{h} |F_i|$. Hơn nữa $|F^*| = \sum_{i=0}^{h} |F_i^*|$ nên theo (4.27) và (4.28) ta có

$$\begin{aligned} |F| &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} p^{n-j} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{m_i - l_i} \alpha_{ij} \binom{m_i - j - 1}{l_i - 1} p^{m_i - l_i - j} \\ &= \mathcal{T}(n_1, k_1, p_1); \\ |F^*| &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n-1}{j} p^{n-1-j} + \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=0}^{m_i - l_i} \alpha_{ij} \binom{m_i - 1 - j - 1}{l_i - 1} p^{m_i - 1 - l_i - j} \\ &= \mathcal{T}(n_1 - 1, k_1, p_1) \end{aligned} \tag{4.29}$$

trong đó $n_1 = n$, $k_1 = k$, $p_1 = p$.

Nếu $\mathbf{x}_{h+1} = \emptyset$ thì định lý được chứng minh. Giả sử rằng $\mathbf{x}_{h+1} \neq \emptyset$. Đặt $B = IS(\mathbf{a}) - F$ thì những phần tử còn lại của $IS(\mathbf{a})$ có dạng $\mathbf{u}_h\mathbf{x}$ với $\mathbf{x} \in V(r_{h+1})$ và $\mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{h+1}$.

Đặt $\mathbf{c} = \mathbf{x}_{h+1}$, $n_2 = r_{h+1}$, $p_2 = \mu\mathbf{c}$, $k_2 = \nu\mathbf{c}$ và

$$B = \{\mathbf{x} \in V(n_2) : \mathbf{x} \leq \mathbf{c}\} = IS(\mathbf{c}).$$

Theo giả thiết qui nạp, tồn tai những số nguyên s, n_i, k_i, p_i với $k_i \leq n_i$ và $n_2 > \cdots > n_s \geq 1$, $p_2 > \cdots > p_s \geq 0$ sao cho

$$\begin{aligned} |B| &= \sum_{i=2}^{s} \mathcal{T}(n_i, k_i, p_i) \\ |B^*| &= \sum_{i=2}^{s} \mathcal{T}(n_i - 1, k_i, p_i) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Nếu đặt $F_{h+1} = \{\mathbf{u}_h\mathbf{x} : \mathbf{x} \in B\}$ thì $IS(\mathbf{a}) = F + F_{h+1}$ và hiển nhiên $IS(\mathbf{a}^*) = F^* + F^*_{h+1}$. Từ (4.29), (4.30) ta có

$$\begin{aligned} |IS(\mathbf{a})| &= \sum_{i=1}^{s} \mathcal{T}(n_i, k_i, p_i); \\ |IS(\mathbf{a}^*)| &= \sum_{i=1}^{s} \mathcal{T}(n_i - 1, k_i, p_i). \end{aligned}$$

Vì $n = n_1 > n_2 = r_{h+1}$ và $p = \mu\mathbf{a} > \mu\mathbf{x}_{h+1}$ nên

$$n = n_1 > n_2 > \cdots > n_s \geq 1,\ k_i \leq n_i,\ p_1 > p_2 > \cdots > p_s \geq 0.$$

Vậy định lý được chứng minh.$\diamondsuit$

Ví dụ 4.3. Tìm $|IS(\mathbf{a})|$ với $\mathbf{a} = 123 \in V(3)$.

Ta có $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1 p \mathbf{x}_2$ với $\mu\mathbf{a} = 3 = p$, $\nu\mathbf{a} = 1 = k$ và $\mathbf{x}_1 = 12$, $\mathbf{x}_2 = \emptyset$.

(i) Đặt $F_0 = \{\mathbf{x} \in V(3) : \mu\mathbf{x} \leq 2\}$ thì $F_0 \subset IS(\mathbf{a})$ ta có

$$|F_0| = \binom{3}{0} 3^3 \text{ và } |F_0^*| = \binom{2}{0} 3^2.$$

(ii) Ta tìm $A_1(j)$ và $|A_1(j)|$ với $0 \leq j \leq m_1 - l_1 = n - k = 2$.

Ta có $A_1(0) = \{\emptyset\}$, $A_1(1) = \{\mathbf{x} \in V(1) : \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_1^* = 2\}$ và vì $\mathbf{x}_2 = \emptyset$ nên $A_1(2) = \{\mathbf{x} \in V(2) : \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_2\}$. Vậy $\alpha_{10} = 1$, $\alpha_{11} = 3$, $\alpha_{12} = 8$.

Với $0 \leq j \leq 2$, đặt $G_1(j) = \{\mathbf{y} \in V(2-j) : \mu\mathbf{y} \leq 2\}$ và

$$H_1(j) = \{\mathbf{x}3\mathbf{y} : \mathbf{x} \in A_1(j), \mathbf{y} \in G_1(j)\}$$
$$\Rightarrow |H_1(j)| = \alpha_{1j}\binom{2-j}{0}3^{2-j}.$$

Đặt $F_1 = \bigcup_{j=0}^{2} H_1(j)$ thì

$$|F_1| = \sum_{j=0}^{2}|H_1(j)| = \binom{2}{0}3^2 + 3\binom{1}{0}3^1 + 8\binom{0}{0}3^0.$$

Cuối cùng ta có $IS(\mathbf{a}) = F_0 + F_1 \Rightarrow |IS(\mathbf{a})| = |F_0| + |F_1|$ và

$$\begin{aligned} |IS(\mathbf{a})| &= \binom{3}{0}3^3 + \binom{2}{0}3^2 + 3\binom{1}{0}3^1 + 8\binom{0}{0}3^0 = 53; \\ |IS(\mathbf{a}^*)| &= \binom{2}{0}3^2 + \binom{1}{0}3^1 + 3\binom{0}{0}3^0 = 15. \end{aligned}$$

Ví dụ 4.4. Tìm $|IS(\mathbf{a})|$ với $\mathbf{a} = 214434123 \in V(9)$.

Trường hợp này ta có $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1\mathbf{e}_1\mathbf{x}_2\mathbf{e}_2\mathbf{x}_3$ trong đó $\mathbf{x}_1 = 12$, $\mathbf{x}_2 = 3$, $\mathbf{x}_3 = 123$, $\mathbf{e}_1 = 44$, $\mathbf{e}_2 = 4$. Vậy $h = 2$, $p = \mu\mathbf{a} = 4$, $k = \nu\mathbf{a} = 3$ và với $r_i = \dim \mathbf{x}_i$, $s_i = \dim e_i$ thì ta có

$$r_1 = 2,\ r_2 = 1,\ r_3 = 3,\ s_1 = 2,\ s_2 = 1.$$

(i) Đặt $F_0 = \{\mathbf{x} \in V(9) : \mu\mathbf{x} = 4, \nu\mathbf{x} \leq 2\}$ thì $F_0 \subset IS(\mathbf{a})$ và

$$|F_0| = \sum_{j=0}^{2}\binom{9}{j}4^{9-j} \tag{4.31}$$

(ii) Ta đặt

$$\begin{aligned} m_1 &= n = 9,\ m_2 = m_1 - (r_1 + s_1) = 5 \\ l_1 &= k = 3,\ l_2 = l_1 - s_1 = 1. \end{aligned}$$

Ngoài ra $\mathbf{u}_0 = \emptyset$, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_1\mathbf{e}_1 = 2144$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_1\mathbf{x}_2\mathbf{e}_2 = 214434$.

Ta tìm những véctơ của $IS(\mathbf{a})$ có dạng $\mathbf{x}4\mathbf{y}$ với $j = \dim \mathbf{x}$ sao cho

$$\mathbf{x}^{j-2} < \mathbf{x}_1 \text{ nếu } j \geq r_1 = 2 \text{ và } \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_1^{2-j} \text{ nếu } j < 2 = r_1.$$

Ta đặt

$$A_1(0) = \{\emptyset\},\ A_1(1) = \{\mathbf{x} \in V(1) : \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_1^* = 2\}$$

và với $2 \leq j \leq m_1 - l_1 = 6$ thì

$$A_1(j) = \{\mathbf{x} \in V(j) : \mathbf{x}^{j-2} < \mathbf{x}_1 = 21\}.$$

Áp dụng (4.18) ta có

$$A_1(j) = \{\mathbf{x} \in V(j) : \mathbf{x} \leq 2\mathbf{z}_{j-1}\}$$

trong đó $\mathbf{z}_{j-1}$ là véctơ zero của $V(j-1)$. Suy ra

$$\alpha_{10} = 1, \alpha_{1j} = 1 + 2^j,\ 1 \leq j \leq 6.$$

Với $0 \leq j \leq 6$, ta đặt

$$\begin{aligned} G_1(j) &= \{\mathbf{y} \in V(8-j) : \mu\mathbf{y} = 4, \nu\mathbf{y} = 2\}; \\ H_1(j) &= \{\mathbf{x}4\mathbf{y} : \mathbf{x} \in A_1(j), \mathbf{y} \in G_1(j)\}; \\ F_1 &= \bigcup_{j=0}^{6} H_1(j). \end{aligned}$$

Theo Định lý 4.1.12 thì $F_1 \subset IS(\mathbf{a})$ và theo Bổ đề 4.2.1 thì

$$|G_1(j)| = \binom{8-j}{2} 4^{6-j} \Rightarrow |H_1(j)| = \alpha_{1j}\binom{8-j}{2} 4^{6-j}$$

và do đó

$$\begin{aligned} |F_1| &= \sum_{j=0}^{6} \alpha_{1j}\binom{8-j}{2} 4^{6-j} \\ &= \binom{8}{2} 4^6 + \sum_{j=1}^{6} (1+2^j)\binom{8-j}{2} 4^{6-j} \end{aligned} \tag{4.32}$$

(iii) Tiếp theo, ta tìm những véctơ của $IS(\mathbf{a})$ có dạng $2144\mathbf{x}4\mathbf{y}$ với $\dim \mathbf{x} \leq m_2 - k_2 = 4$. Ta đặt $A_2(0) = \{\emptyset\}$ và với $1 \leq j \leq 4$ thì $A_2(j) = \{\mathbf{x} \in V(j) : \mathbf{x}^* < \mathbf{x}_2 = 3\}$. Cụ thể hơn, bằng cách áp dụng (4.17) ta có

$$\begin{aligned} A_2(1) &= \{\mathbf{x} \in V(1) : \mathbf{x} \leq 2\}; \quad & A_2(2) &= \{\mathbf{x} \in V(2) : \mathbf{x} \leq 22\} \\ A_2(3) &= \{\mathbf{x} \in V(3) : \mathbf{x} \leq 222\}; \quad & A_2(4) &= \{\mathbf{x} \in V(2) : \mathbf{x} \leq 2222\}. \end{aligned}$$

Vậy $\alpha_{2j} = 3^j$, $0 \leq j \leq 4$.

Với $0 \leq j \leq 4$, ta đặt

$$\begin{aligned} G_2(j) &= \{\mathbf{y} \in V(4-j) : \mu\mathbf{y} = 4, \nu\mathbf{y} = 0\} \\ &= \{\mathbf{y} \in V(4-j) : \mu\mathbf{y} < 4\}; \\ H_2(j) &= \{2144\mathbf{x}4\mathbf{y} : \mathbf{x} \in A_2(j), \mathbf{y} \in G_2(j)\}; \\ F_2 &= \bigcup_{j=0}^{4} H_2(j). \end{aligned}$$

Như trên ta có $F_2 \subset IS(\mathbf{a})$ và

$$|G_2(j)| = \binom{4-j}{0} 4^{4-j} \Rightarrow |H_2(j)| = \alpha_{2j} \binom{4-j}{0} 4^{4-j}$$

và do đó

$$|F_2| = \sum_{j=0}^{4} \alpha_{2j} \binom{4-j}{0} 4^{4-j} = \sum_{j=0}^{4} 3^j \binom{4-j}{0} 4^{4-j} \tag{4.33}$$

(iv) Cuối cùng, đặt $F_3 = \{214434\mathbf{x} : \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_3 = 123\}$ thì theo Ví dụ 4.3, ta có

$$|F_3| = \binom{3}{0}3^3 + \binom{2}{0}3^2 + 3\binom{1}{0}3^1 + 8\binom{0}{0}3^0 = \mathcal{T}(3,1,3) \tag{4.34}$$

Hiển nhiên $IS(\mathbf{a}) = \sum_{i=0}^{3} F_i$ nên do các hệ thức từ (4.31) đến (4.34) ta có

$$\begin{aligned} |IS(\mathbf{a})| &= \sum_{j=0}^{2} \binom{9}{j} 4^{9-j} + \binom{8}{2} 4^6 + \sum_{j=1}^{6} (1+2^j) \binom{8-j}{2} 4^{6-j} \\ &\quad + \sum_{j=0}^{4} 3^j \binom{4-j}{0} 4^{4-j} + \binom{3}{0}3^3 + \binom{2}{0}3^2 + 3\binom{1}{0}3^1 + 8\binom{0}{0}3^0 \\ &= \mathcal{T}(9,3,4) + \mathcal{T}(3,1,3). \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}|IS(\mathbf{a}^*)| &= \sum_{j=0}^{2}\binom{8}{j}4^{8-j} + \binom{7}{2}4^5 + \sum_{j=1}^{5}(1+2^j)\binom{7-j}{2}4^{5-j}\\ &+ \sum_{j=0}^{3}3^j\binom{3-j}{0}4^{3-j} + \binom{2}{0}3^2 + \binom{1}{0}3^1 + 3\binom{0}{0}3^0\\ &= \mathcal{T}(8,3,4) + \mathcal{T}(2,1,3).\end{aligned}$$

Nhận xét rằng với $\mathbf{z}_n \neq \mathbf{a} \in B(n)$ thì $\mu\mathbf{a} = 1,\ \nu\mathbf{a} = w\mathbf{a}$ thì các $\mathbf{x}_i$ trong Định lý 4.2.3 là các véctơ zero $\mathbf{z}_{r_i}$ và do đó

$$A_i(j) = \begin{cases} \emptyset & \text{nếu } \ j \geq r_i \\ \{\mathbf{z}_{r_i - j}\} & \text{nếu } \ j < r_i \end{cases}$$

Như vậy $\alpha_{ij} = 0$ hay $\alpha_{ij} = 1$ tùy theo $j \geq r_i$ hay $j < r_i$. Ngoài ra chú ý rằng nếu $r_1 = 0$ thì $\alpha_{1j} = 0\ \forall j$ và nếu $r_{h+1} = 0$ thì

$$m_h - l_h = r_h = \dim \mathbf{z}_{r_{h+1}}$$

và do đó công thức (4.27) trở thành công thức (3.8) (Chương 3).$\diamond$

Việc tìm $|IS(\mathbf{a})|$ bằng qui nạp theo Định lý 4.2.3 rất phức tạp, đặc biệt là khi n và p lớn. Do đó, dưới đây ta sẽ đưa ra các thuật toán về biểu diễn đơn giản hơn.

Nhắc lại rằng với $\mathbf{a} \in V(n)$ thì $\mathbf{a}^+$ suy từ $\mathbf{a}$ bằng Định lý 4.1.19. và $\mathbf{p}_r$ là véctơ của $V(r)$ có tất cả các thành phần bằng p.

4.2.4 Thuật toán 1. *Tìm $m = |IS(\mathbf{a})|$ với $\mathbf{a} \in V(n)$ cho sẵn*

Bước 1. *Tìm $p = \mu\mathbf{a}$, $k = \nu\mathbf{a}$ và $m := \sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}p^{n-j}$.*

Đặt $\mathbf{b} := \mathbf{p}_k\mathbf{z}_{n-k}$.

Bước 2. $m := m + 1$. *Nếu $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ thì dừng.*

Nếu $\mathbf{b} \neq \mathbf{a}$ thì đến Bước 3.

Bước 3. $\mathbf{b} := \mathbf{a}^+$. *Trở lại Bước 2.*

4.2.5 Thuật toán 2. *Tìm $\mathbf{a} = a_1a_2\ldots a_n \in V(n)$ sao cho $|IS(\mathbf{a})| = m$ với m cho sẵn.*

Bước 1. *Tìm p lớn nhất sao cho* $p^n \leq m$.

Nếu $p^n = m$ *thì* $a_i = p - 1$, $\forall i$. *Dừng.*

Ngược lại đến Bước 2 với $m := m - p^n$.

Bước 2. *Tìm k lớn nhất sao cho* $R = \sum_{j=1}^{k} \binom{n}{j} p^{n-j} \leq m$.

Nếu $R = m$ *thì* $\mathbf{a} = (\mathbf{p} - \mathbf{1})_{n-k}\mathbf{p}_k$.

Nếu $R \neq m$ *thì* $m := m - R$. *Đặt* $\mathbf{c} = \mathbf{p}_{k+1}\mathbf{z}_{n-k-1}$. *Đến Bước 3 với* $m := m - 1$.

Bước 3. . *Tìm* $\mathbf{b} := \mathbf{c}^+$.

Bước 4. $m := m - 1$.

Nếu $m = 0$ *thì* $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. *Dừng. Nếu* $m > 0$ *thì trở lại Bước 3 với* $\mathbf{c} := \mathbf{b}$.

Ví dụ 4.5. Tìm $\mathbf{a}$ là véctơ thứ 115 của $V(3)$ trong $\vee$ thứ tự.

Bước 1. Số nguyên p lớn nhất sao cho $p^3 \leq 115$ là $p = 4$.

$m := 115 - 64 = 51$.

Bước 2. Số nguyên k lớn nhất sao cho $R = \sum_{j=1}^{k} \binom{3}{j} 4^{3-j} \leq 21$ là $k = 1$.
$m := m - R = 51 - 48 = 3$.

Đến Bước 3 với $\mathbf{c} = 440$, $m := m - 1 = 2$.

Bước 3 và Bước 4. $\mathbf{b} = \mathbf{c}^+ = 441$; $m := m - 1 = 1$.

$\mathbf{c} := \mathbf{b} = 441 \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{c}^+ = 442$; $m := m - 1 = 0$. Dừng.

Vậy véctơ phải tìm là $\mathbf{a} = 442$.

4.3 Các bài toán mở

Sau đây là một số bài toán mở (open problems) liên quan đến đề tài luận án, đó là K-poset. Điều khó khăn nhất trong việc chứng minh một poset P là một K-poset là tìm $A \subset P$ sao cho $|A| = m$ và

$$|\Delta A| = min\{|\Delta B| : B \subset P \text{ và } |B| = m\}.$$

1/ Chứng minh rằng thứ tự $\vee$ là thích hợp trên tập hợp các véctơ nguyên không âm.

2/ Cho $\mathcal{M}_{m\times n}$ là tập hợp các ma trận với hệ số trong $\mathbb{N}$. Với $a \in \mathcal{M}_{m\times n}$, gọi $\delta_j a$ là ma trận có được từ a bằng cách bỏ cột thứ j của a. Bóng của ma trận a được định nghĩa là

$$\Delta a = \{\delta_1 a, \delta_2 a, \ldots, \delta_n a\}$$

Với m cho sẵn, tìm $A \subset \mathcal{M}_{m\times n}$ sao cho $|A| = m$ và

$$|\Delta A| = min\{|\Delta B| : B \subset \mathcal{M}_{m\times n} \text{ và } |B| = m\}.$$

3/ Cho $\mathcal{M}_{m\times n}$ như trong 2/. Với $a \in \mathcal{M}_{m\times n}$, gọi $\delta_{ij} a$ là ma trận có được từ a bằng cách bỏ dòng thứ i và cột thứ j của a. Bóng của ma trận a được định nghĩa là

$$\Delta a = \{\delta_{ij} a : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Với m cho sẵn, tìm $A \subset \mathcal{M}_{m\times n}$ sao cho $|A| = m$ và

$$|\Delta A| = min\{|\Delta B| : B \subset \mathcal{M}_{m\times n} \text{ và } |B| = m\}.$$

Trong 1/ và 2/ có thể bước đầu ta chỉ xét ma trận Bool.

4/ Tìm $A \subset B(n)$ sao cho $|A| = m$ và

$$|\Delta A| = max\{|\Delta B| : B \subset B(n) \text{ và } |B| = m\}.$$

5/ *Tìm $A \subset B(n)$ sao cho*

$$|A| = \min\{|X| : X \subset B(n) \text{ và } \Delta X = B(n-1)\}$$

KẾT LUẬN

Trong luận án này, chúng tôi đã giới thiệu tổng quan về K-poset và các bài toán liên quan trong Chương 1. Các chương còn lại trình bày những kết quả mà chúng tôi đã đạt được, là những kết quả sau:

1/ Chứng minh rằng thứ tự BG không thích hợp và chỉ ra một thứ tự tuyến tính thích hợp trên tập hợp $\mathcal{B}$ các véctơ Bool và chứng minh được rằng với thứ tự tuyến tính ấy, $\mathcal{B}$ là một K-poset, nghĩa là chúng tôi đã xây dựng được một K-poset mới.

2/ Giải quyết được những bài toán về biểu diễn trên K-poset $\mathcal{B}$ như trong Định lí KK.

3/ Chứng minh được rằng với thứ tự tuyến tính là thứ tự $\vee$, ta cũng có Định lí kiểu Lovasz.

4/ Đưa ra một thứ tự tuyến tính (là thứ tự $\vee$) trên tập hợp V các véctơ nguyên không âm và chứng minh một số tính chất quan trọng của thứ tự này. Chúng tôi nghĩ rằng thứ tự $\vee$ là thích hợp và những tính chất ấy cần thiết để chứng minh V là một K-poset, đồng thời cũng giải quyết một phần các bài toán về biểu diễn.

Một lớp các bài toán mở được nêu ra như là một hướng phát triển tiếp theo của luận án. Đó cũng là một "mỏ vàng" cho chúng ta tiếp tục khai thác.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ

[1] (1995), *"Set cascades and vector valleys in Pascal's triangle"*, Report on work in progress in Combinatorial extremal theory, shadows, AZ-Identities, matching Universitat Bielefeld, pp 1-6.

[2] (1995), *"Valley representations of integers"*, Bulletin of University of Ho Chi Minh City (1), pp 23-33.

[3] (1995), *"The sizes of initial sections of V-order"*, Bulletin of University of Ho Chi Minh City (2), pp 1-12.

[4] (1996), *"The structure of V-order for integer vectors"*, Congressus numeratium (113), Winipeg Canada, pp 43-53.

[5] (1997), *"Ordering integer vectors for coordinate deletions"*, J. London. math. Soc. (255), pp 417-426.

[6] (1997), *"Bezrukov-Gronau order is not optimal"*, Rostock Math. Kollog. (50), pp 45-46.

[7] (1997), *"Sets of 0,1 vectors with minimal sets of subvectors"*, Rostock Math,. Kollog. (50), pp 47-52.

[8] (1998), *"A Lovasz type theorem"*, Tạp chí phát triển khoa học và công nghệ, Đại học Quốc gia Thành Phố Hồ Chí Minh, chuyên đề Khoa hoc tự nhiên (1), pp 5-8.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[9] Anderson, I. (1989), *"Combinatorics of finite sets"*, Clarendon Press, Oxford.

[10] Ahlswede, R. và Cai, N. (1995), *"Sets of n-length 0,1-sequences with minimal shadow in (n-1)-length subsequences"*, Report on work in progress in Combinatorial extremal theory, shadows, AZ-Identities, matching Universitat Bielfielfeld, pp 1-2.

[11] Ahlswede, R. and Cai, N. (1997), *"Shadows and isoperimetry under the sequence-subsequence relation"*, Combinatica (17), pp 11-29.

[12] Bezrukov, S.L. và Gronau, H., D.O.F (1992), *"A Kruskal-Katona type theorem"*, Rostock Math. Kollog. (46), pp 71-80.

[13] Bollobas, B. (1986), *"Combinatorics"*, Cambridge University Press.

[14] Clements, G.F. và Lindström, B. (1969), *"A generalization of a Combinatorial theory of Macaulay"*, J. Combinat. Theory (7), pp 230-238.

[15] Daykin, D.E. (1974), *"A simple proof of the Kruskal-Katona theorem"*, J. Combinat. Theory A (17), pp 252-253.

[16] Daykin, D.E. (1975), *"An algorithm for cascades giving Katona type in equalities"*, Nanta Math. (8), pp 78-83.

[17] Daykin, D.E. (1984), *"Ordered ranked posets, representations of integers and inequalities from extremal poset problems"*, Proceedings of a conference in Banff., Canada, Ed. I. Rival, pp 395-412.

[18] Daykin, D.E. (1996), *"To find all suitable orders of 0,1 vectors"*, Congressus numerantium (113), pp 55-60.

[19] Daykin, D.E. (1997), *"A cascade proof of a finite vectors theorem"*, Southeastern Asian Bulletin of Mathematics (21), pp 167-172.

[20] Daykin, D.E. (1999), *"On deleting co-ordinates from integer vectors"*, (to appear)

[21] Frankl, P.(1984), *"A new short proof for the Kruskal-Katona theorem"*, Discrete Math. (8), pp 327-329.

[22] Engel, K. và Leck, U. (1996), *"Optimal antichains and ideals in Macaulay posets"*, preprint (96/21), Universitat Rostock.

[23] Katona, G.O.H. (1966), *"A theorem on finite sets"*, in Theory of graphs, Proc. Collog Tihany, pp 187-207. Akedemiai Kiado. Academic Press, New York.

[24] Kruskal, J.B. (1963), *"The number of simplices in a complex"*, Math. Optimization techniques, University of California Press, Berkeley, pp 251-278.