BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP. HỒ CHÍ MINH

TRẦN ĐÌNH THANH

ỨNG DỤNG LÝ THUYẾT PHƯƠNG TRÌNH TRONG KHÔNG GIAN BANACH CÓ THỨ TỰ VÀO MỘT SỐ LỚP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN.

Chuyên ngành: **TOÁN GIẢI TÍCH**
Mã số: **1.01.01**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS NGUYỄN BÍCH HUY
PGS. TS LÊ HOÀN HÓA

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH - 2004

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi, các số liệu, các kết quả của luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

Tác giả luận án.

LỜI CÁM ƠN

☙✪❧

- Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đến Thầy hướng dẫn, PGS. TS NGUYỄN BÍCH HUY, đã tận tình hướng dẫn, động viên và dìu dắt tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và thực hiện luận án.
- Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc Thầy đồng hướng dẫn, PSG. TS LÊ HOÀN HÓA đã tận tình giúp đỡ động viên tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và thực hiện luận án.
- Tôi xin chân thành cám ơn các thầy giới thiệu luận án, đã đọc và cho ý kiến nhận xét sâu sắc.
- Tôi xin chân thành cám ơn Ban Giám Hiệu, Khoa Toán, Phòng Khoa Học Công nghệ và Sau Đại Học trường Đại Học Sư Phạm thành phố Hồ Chí Minh, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và thực hiện luận án.

Tác giả luận án

MỞ ĐẦU

1. Trong luận án này chúng tôi sẽ áp dụng một số kết quả của lý thuyết phương trình toán tử trong không gian Banach có thứ tự, để nghiên cứu cấu trúc nghiệm của một số lớp phương trình và bất phương trình vi phân.

Lý thuyết phương trình toán tử trong không gian Banach có thứ tự được hình thành trong công trình mở đầu [22] của M. Krein và A. Rutman vào những năm 1940 và được phát triển rực rỡ vào thời kỳ 1950-1980 trong các công trình của M. A. Krasnoselskii và các học trò của ông [19,20,21], của H. Schaffer, H. Amann, N. E. Dancer, R. Nussbaum, ... (xem [3,11,33] và các tài liệu tham khảo trong đó). Các kết quả trừu tượng của lý thuyết này tìm được những ứng dụng rộng rãi trong việc nghiên cứu định tính và định lượng nhiều lớp phương trình và bất phương trình vi phân xuất phát từ cơ học, vật lý, hóa học, y-sinh học, ... vì những ưu điểm sau:

•Chúng cho phép chứng minh sự tồn tại nghiệm với các tính chất đặc biệt như tính dương, tính lồi, ... là những tính chất cần có của nghiệm các phương trình xuất phát từ những mô hình thực tế.

•Chúng cho phép chứng minh sự tồn tại nghiệm của những phương trình chứa các hàm gián đoạn là những phương trình thường gặp trong thực tế.

Đến nay, việc xây dựng lý thuyết phương trình toán tử trong không gian Banach có thứ tự về cơ bản đã hoàn thành và sự chú ý được tập trung vào việc tìm những ứng dụng của lý thuyết vào các lớp bài toán mới. Chính từ việc nghiên cứu các lớp phương trình mới mà gần đây cũng đã nhận được một số kết quả trừu tượng mới [8,9,26,28].

Luận án gồm phần mở đầu, kết luận và hai chương. Trong chương 1 chúng tôi nghiên cứu cấu trúc tập nghiệm của một số lớp phương trình vi phân thường chứa tham số. Trong chương 2 chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm cực trị (nghĩa là nghiệm lớn nhất, nhỏ nhất) cho hai bài toán dạng biến phân.

2. Các bài toán được khảo sát ở chương 1 có dạng tổng quát sau:

Cho X là không gian Banach thực và $P \subset X$ là một nón, $I = (0, \infty)$ hoặc $I = [0, \infty)$, $F : I \times P \to P$ là ánh xạ hoàn toàn liên tục. Xét bài toán tìm cặp $(\lambda, x) \in I \times P \setminus \{\theta\}$ thỏa mãn phương trình:

$$x = F(\lambda, x). \qquad (0.1)$$

Thông thường, nghiệm của (0.1) không tồn tại đơn lẻ, rời rạc và ta quan tâm nhiều về vấn đề, liệu tập nghiệm:

$$\sum = \{(\lambda, x) \in I \times P \setminus \{\theta\} : x = F(\lambda, x)\}$$

có chứa một tập con liên thông hay không và tập các giá trị λ để (0.1) có nghiệm, có lấp đầy một khoảng hay không. Các tác giả H. Amann, E. N. Dancer, R. Nussbaum, Nguyễn Bích Huy, ... đã nhận được các kết quả về sự phân nhánh toàn cục của tập nghiệm $\sum$ của phương trình (0.1) trong không gian có thứ tự, tương tự định lý Rabinowitz. Tuy nhiên, việc nghiên cứu tập nghiệm $\sum$ chỉ thuận lợi khi ánh xạ F khả vi Frechet tại

θ hoặc ∞.

Trong luận án chúng tôi sẽ khảo sát các phương trình với ánh xạ không khả vi tại θ hoặc ∞. Do đó, để nghiên cứu cấu trúc nghiệm của (0.1) chúng tôi áp dụng phương pháp của Krasnoselskii khảo sát riêng rẽ cấu trúc của tập:

$$S = \{x \in P \setminus \{\theta\} \mid \exists \lambda \in I : (\lambda, x) \in \sum \}$$

(tập hình chiếu của $\sum$ lên X) và sau đó tập các giá trị $\lambda \in I$ để (0.1) có nghiệm. Ta có định nghĩa sau của Krasnoselskii [20].

Định nghĩa

Ta nói tập S là nhánh liên tục, không bị chặn xuất phát từ θ nếu với mọi tập mở, bị chặn $G \ni \theta$ thì $S \cap \partial G \neq \phi$.

Khi tập nghiệm S là nhánh liên tục, không bị chặn, Krasnoselskii đã chứng minh một định lý bảo đảm tập các giá trị λ để (0.1) có nghiệm, lấp đầy một khoảng. Tuy nhiên theo chúng tôi, các giả thiết mà Krasnoselskii đưa ra chưa đủ và trong chứng minh của ông còn một khoảng trống. Trong §1 của chương 1 chúng tôi đưa ra và chứng minh một chỉnh lý kết quả trên của Krasnoselskii (định lý 1.1.8). Cũng trong §1 này chúng tôi cũng chứng minh một số kết quả về hàm lõm và nêu một số kết quả đã có về đánh giá bán kính phổ của các toán tử tuyến tính u_0-bị chặn. Các kết quả này được sử dụng nhiều lần ở các mục sau.

Ở §2 của chương 1 chúng tôi nghiên cứu bài toán biên giá trị riêng sau:

$$\begin{aligned} &x'' + \lambda a(t)f(x) = 0, \qquad 0 < t < 1, \\ &x(0) = x(1) = 0, \end{aligned} \tag{0.2}$$

trong đó $a:[0,1] \to \mathbb{R}_+$, $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ là các hàm liên tục, không đồng nhất bằng 0 trên mọi khoảng và tồn tại các giới hạn:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f_0, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = f_\infty.$$

Bài toán (0.2) xuất phát từ nhiều lĩnh vực của khoa học tự nhiên (xem [17] và tài liệu tham khảo ở đó). Nếu f_0, f_∞ là các số hữu hạn, khác 0 thì các toán tử tích phân tương ứng với bài toán biên (0.2) có đạo hàm tại θ hoặc ∞. Trong luận án chúng tôi cho phép f_0, f_∞ có thể bằng 0 hoặc ∞. Khi nghiên cứu bài toán (0.2) trong [17], các tác giả J. Henderson và H. Wang không khảo sát cấu trúc của tập nghiệm S hoặc $\sum$ và dùng một định lý Krasnoselskii về điểm bất động trong nón để chứng minh tồn tại một khoảng các giá trị λ để bài toán (0.2) có nghiệm dương. Chúng tôi dùng phương pháp khác để nghiên cứu (0.2). Đầu tiên chúng tôi dùng lý thuyết bậc tôpô của trường compắc với toán tử dương để chứng minh tập nghiêm S của (0.2) tạo thành nhánh liên tục không bị chặn. Dựa vào kết quả này và định lý 1.1.8, chúng tôi nhận được một khoảng cụ thể các giá trị λ để (0.2) có nghiệm dương, khoảng này rộng hơn khoảng nhận được trong [17]. Kết quả trình bày ở §2 chương 1 đã được công bố trong [I].

Trong §3 chương 1 chúng tôi khảo sát bài toán biên giá trị riêng:

$$\begin{aligned} &\left(\varphi(x')\right)' + \lambda f(t,x,x') = 0, \quad 0 < t < 1, \\ &x(0) = x(1) = 0, \end{aligned} \tag{0.3}$$

trong đó $\left(\varphi(x')\right)' = \left(\left|x'\right|^{p-2}.x'\right)'$ và gọi là toán tử p-Laplace. Bài toán dạng (0.3) mô tả nhiều hiện tượng trong các lĩnh vực khoa học tự nhiên và được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây (xem [1,13,14,15] và các tài liệu tham khảo ở đó). Trong [1], các tác giả R. Agarwal, H. Lü, D. O'Regan nghiên cứu bài toán (0.3) với hàm f không phụ thuộc đạo hàm x' và chứng minh tồn tại khoảng giá trị λ để bài toán có 1 nghiệm dương hoặc 2 nghiệm dương. Chúng tôi vẫn áp dụng phương pháp Krasnoselskii để nghiên cứu (0.3) và đã nhận được các kết quả sau:

- Tập nghiệm S của (0.3) là nhánh liên tục không bị chặn xuất phát từ θ.
- Tập các giá trị λ để (0.3) có nghiệm dương sẽ lấp đầy một khoảng.

Khoảng này rộng hơn khoảng nhận được trong [1]. Hơn nữa, các đầu mút của khoảng trong luận án được tính bằng các công thức gọn và rõ ràng hơn so với các đầu mút của khoảng được tìm trong [1]. Để nhận đuợc kết quả tốt hơn này chúng tôi đã chứng minh một số kết quả phụ có ý nghĩa độc lập về các bất phương trình vi phân và về giá trị riêng chính của toán tử p-Laplace.

Các kết quả nhận được ở §3 của chương 1 đã được công bố trong [V] .

Trong §4 của chương 1 chúng tôi nghiên cứu bài toán biên chứa tham số sau:

$$\begin{aligned} &x'' + \lambda^2 f\left(x, \frac{1}{\lambda}x'\right) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ &x(0) = x(1) = 0. \end{aligned} \tag{0.4}$$

Như được chỉ ra trong [20], bài toán biên (0.4) xuất phát từ bài toán tìm nghiệm tuần hoàn (chu kỳ chưa biết) của phương trình vi phân ôtônôm bậc 2 sau đây thường gặp trong lĩnh vực cơ học thiên thể

$$y'' + f(y, y') = 0.$$

Tuy được đặt ra từ lâu nhưng việc nghiên cứu (0.4) mới đạt được kết quả về tồn tại nhánh liên tục không bị chặn của tập nghiệm. Krasnoselskii chứng minh kết quả này cho trường hợp f không phụ thuộc đạo hàm x', Bakhtin và Nguyễn Bích Huy [25] chứng minh cho trường hợp tổng quát. Vấn đề về tồn tại một khoảng cụ thể các giá trị λ để (0.4) có nghiệm, cho đến nay vẫn chưa được nghiên cứu thỏa đáng. Trong luận án chúng tôi đã nhận được các kết quả sau đây về bài toán (0.4).

- Tập nghiệm S của (0.4) là nhánh liên tục không bị chặn xuất phát từ θ nếu f thỏa điều kiện:

$$g_1(x) \le f(x, x') \le g_2(x) + c.|x'|^q \tag{0.5}$$

với $c > 0$, $q \in (0,1)$ và $g_1, g_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ là các hàm liên tục, không bằng hằng 0 trên mọi khoảng.

Nếu so với giả thiết sau đây được đặt ra trong [25]:

$$ax - b \le f(x, x') \le c(x)\left(1 + |x'|^r\right), \ r \in (0,2)$$

thì chúng tôi đã giảm nhẹ điều kiện về chặn dưới nhưng làm chặt điều kiện về chặn trên của hàm f.

- Với giả thiết (0.5) và giả thiết về tồn tại giới hạn khi $x \to 0$, $x \to \infty$ của các hàm $\frac{g_1(x)}{x}$, $\frac{g_2(x)}{x}$ chúng tôi đã nhận được hai kết quả về khoảng giá trị λ để (0.4) có nghiệm.

Các kết quả của §4 đã được công bố trong [IV].

3. Trong chương 2 của luận án chúng tôi đã sử dụng một định lý về điểm bất động của ánh xạ tăng trong không gian có thứ tự để chứng minh sự tồn tại nghiệm cực trị cho hai bài toán dạng biến phân. Việc áp dụng trực tiếp các định lý điểm bất động vào các bài toán biến phân thường gặp khó khăn. Phương pháp của chúng tôi là sử dụng các kết quả của lý thuyết phương trình đạo hàm riêng để đưa bài toán biến phân về bài toán tìm điểm bất động của một ánh xạ tăng. Sau đó nhờ định lý về tồn tại điểm bất động cực trị của ánh xạ tăng mà chứng minh sự tồn tại nghiệm cực trị của bài toán biến phân ban đầu.

Trong §2 của chương 2 này chúng tôi nghiên cứu bài toán tìm nghiệm yếu cực trị cho phương trình logistic, là một trường hợp đặc biệt của phương trình elliptic sau:

$$-\Delta u = f(x,u) \text{ trong } \Omega\,,\ u = 0 \text{ trên } \partial\Omega\,, \qquad (0.6)$$

với $\Omega \in \mathbb{R}^N$ là miền mở, bị chặn với biên trơn, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm Caratheodory.

Khi f là hàm khả vi, Amann và Crandal [2] đã chứng minh sự tồn tại nghiệm cổ điển (thuộc lớp $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ hoặc $W_0^{2,p}(\Omega)$) lớn nhất và nhỏ nhất của (0.6) giữa một nghiệm dưới và một nghiệm trên đã cho. Sự tồn tại nghiệm yếu lớn nhất, nhỏ nhất của (0.6) giữa nghiệm yếu dưới và nghiệm yếu trên được chứng minh bởi Dancer – Sweers [12] khi f liên tục và Carl-Heikkila [10] khi f có thể gián đoạn. Gần đây tác giả Nguyễn Bích Huy [27] đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm yếu cực trị của (0.6) theo hướng giả thiết tồn tại nghiệm yếu dưới và thay điều kiện tồn tại nghiệm yếu trên bằng điều kiện bị chặn của tập các nghiệm dưới yếu. Trong luận án chúng tôi cũng nghiên cứu theo hướng này.

Xét phương trình logistic mô tả sự tăng trưởng của thú trong môi trường tự nhiên:

$$-\Delta\left(v^n\right) = \lambda m(x)v - v^q \text{ trong } \Omega,\ v = 0 \text{ trên } \partial\Omega\,, \qquad (0.7)$$

trong đó $n \in \mathbb{N}$, $q>1$ và hàm trọng $m(x)$ thuộc một không gian hàm cụ thể. Trường hợp $n = 1$ (mô hình khuếch tán tuyến tính) và $m(x)$ bị chặn sự tồn tại nghiệm cổ điển được nghiên cứu từ những năm 1980. Trường hợp $n = 1$ và $m(x) \in L^s(\Omega)$ với $s < \infty$, sự tồn tại nghiệm yếu của (0.7) được nghiên cứu bởi J. Hernandez, Drabek [13,18] và Nguyễn Bích Huy

[27]. Các nghiên cứu chỉ ra rằng tính chính qui của nghiệm yếu phụ thuộc vào độ lớn của s: khi $s > N$ nghiệm yếu thuộc lớp $C^1(\overline{\Omega})$, khi $s > \dfrac{Nq}{2(q-1)}$ nghiệm yếu thuộc $W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Trường hợp $n>1$ và $s > \dfrac{N}{2}$ cũng được nghiên cứu trong [18].

Trong luận án chúng tôi xét trường hợp $n>1$ và cho phép s có thể nhỏ hơn $\dfrac{N}{2}$.

Bằng phép biến đổi $u = v^n$ bài toán biên (0.7) được đưa về dạng:

$$-\Delta u = \lambda m(x) u^r - u^q \text{ trong } \Omega, \quad u = 0 \text{ trên } \partial\Omega, \tag{0.8}$$

với $r<q$, $r<1$.

Với giả thiết:

$$m(x) \in L^s(\Omega) \ , \ s \geq \frac{2N(q+1)}{2(q+1) + N(q+1-2r)}$$

và giả thiết về chặn dưới của $m(x)$ chúng tôi đã chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu cực trị của (0.8) trên khoảng $[u_0, \infty)$ với u_0 được xây dựng cụ thể qua các dữ kiện của bài toán. Kết quả này đã được công bố trong[III].

Trong §3 của chương 2 chúng tôi xét bài toán tìm nghiệm cực trị của bất đẳng thức biến phân sau:

Tìm hàm v thỏa mãn:

$$\begin{cases} v \in K, \ f(x,v) \in L^1(\Omega) \ , \ vf(x,v) \in L^1(\Omega), \\ \langle Av, v-w \rangle \geq \displaystyle\int_\Omega f(x,v)(v-w)dx, \ \ \forall w \in K \cap L^\infty(\Omega), \end{cases} \tag{0.9}$$

trong đó:

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là miền mở, bị chặn có biên trơn,

$K = \{w \in W_0^{1,p}(\Omega) : \ w \geq \varphi \text{ h.k.n trên } \Omega\}$, $0 \leq \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

$Av = -\text{div}\left(|\nabla v|^{p-2} \nabla v\right)$ là toán tử p-Laplace,

$$\langle Av, v-w \rangle = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v . \nabla(v-w) dx .$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x,u)=F(x,u,u) \text{ với } F:\Omega\times\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R} \text{ tăng theo biến } u, \\ \text{giảm theo biến } v \text{ và thỏa một số điều kiện khác} \end{array}\right\} \quad (0.10)$$

Sự tồn tại nghiệm của bài toán (0.9) được Boccardo, Giachetti, Murat chứng minh trong [5] khi hàm f là hàm Caratheodory và thỏa mãn một số điều kiện trong đó có điều kiện $uf(x,u)\geq 0$.

Vấn đề tồn tại nghiệm cực trị của bất đẳng thức biến phân mới được nghiên cứu gần đây trong các bài báo [31,32] của Lê Khôi Vỹ, sau khi tác giả đưa ra một định nghĩa chỉnh về nghiệm dưới và nghiệm trên cho bất đẳng thức biến phân. Sử dụng khái niệm nghiệm dưới, nghiệm trên này và các kỹ thuật trong lý thuyết của phương trình đạo hàm riêng, Lê Khôi Vỹ đã chứng minh sự tồn tại nghiệm cực trị của một số lớp bất đẳng thức biến phân. Để chứng minh sự tồn tại nghiệm cực trị của (0.9) chúng tôi đã sử dụng phương pháp khác. Đó là sử dụng kết quả của [5] về bài toán (0.9) khi f là hàm tăng theo biến u. Với f thỏa (0.10), bài toán (0.9) được đưa về bài toán điểm bất động của ánh xạ tăng. Điểm bất động cực trị của ánh xạ này chính là nghiệm cực trị của (0.9). Phương pháp tiếp cận này cho phép chúng tôi xét các hàm f có thể gián đoạn theo biến u. Các kết quả của luận án về bài toán (0.9) đã được công bố trong [II].

4. Các kết quả của luận án đã được công bố trong các bài báo [I-V] và được báo cáo trong hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ 5 tại Huế (9/2002), Hội nghị khoa học khoa Toán – Tin học ĐHSPTpHCM lần thứ 2 (12/2002).

CHƯƠNG 1

MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

Trong chương này của luận án chúng tôi nghiên cứu cấu trúc nghiệm của các phương trình vi phân chứa tham số sau:

- $x'' + \lambda a(t) f(x) = 0$, $\quad t \in (0, 1)$,
- $-\left(\varphi(x')\right)' = \lambda f(t, x, x')$, $\quad t \in (0, 1)$,

(Ở đây $\varphi(x) = |x|^{p-2} x$, $\ p > 1$)

- $x'' + \lambda^2 f\left(x, \dfrac{1}{\lambda} x'\right) = 0$, $\quad t \in (0, 1)$,

với điều kiện biên:

$$x(0) = x(1) = 0.$$

Chúng tôi sẽ sử dụng một số kết quả của lý thuyết phương trình toán tử trong không gian Banach có thứ tự để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm dương của các bài toán trên. Với một số giả thiết đặt lên hàm f chúng tôi chứng minh được rằng tập nghiệm dương của các bài toán này là nhánh liên tục không bị chặn, và tập các giá trị λ để các bài toán đó có nghiệm dương, lấp đầy một khoảng với các đầu mút có thể xác định được.

Các kết quả của chúng tôi về các bài toán được xét tốt hơn các kết quả liên quan của J. Henderson và H. Wang; của R. Agarwal, H. Lu, D. O'Reagan và của M. Krasnoselskii. Điều đó có được là do:

• Chúng tôi đã chứng minh một số kết quả về hàm lõm, cho phép xét các phương trình vi-tích phân trên không gian $C[0,1]$ thay vì trên không gian $C^1[0,1]$.

• Chúng tôi đã sử dụng một cách hệ thống các kết quả về toán tử tuyến tính u_0-bị chặn để đánh giá dáng điệu tiệm cận của tham số λ.

• Chúng tôi đã chứng minh và sử dụng các kết quả phụ về giá trị riêng chính của toán tử p-laplace một chiều và về bất phương trình vi phân chứa toán tử p-laplace.

Phương pháp của luận án nghiên cứu các bài toán ở chương này có thể áp dụng cho các điều kiện biên khác sao cho hàm Green tương ứng là không âm hoặc cho các phương trình vi phân bậc cao với điều kiện biên nhiều điểm.

§1. CÁC KHÁI NIỆM VÀ KẾT QUẢ ĐƯỢC SỬ DỤNG.

A. <u>Không gian Banach có thứ tự</u>

<u>Định nghĩa1.1.1.</u>

Cho không gian Banach thực X.

- Tập $K \subset X$ gọi là một nón trên X nếu:

  i) K là tập đóng, $K \neq \{\theta\}$.

  ii) $\begin{cases} K + K \subset K \\ tK \subset K \qquad \text{với mọi} \quad t \geq 0. \end{cases}$

  iii) $K \cap (-K) = \{\theta\}$.

- Nếu $K \subset X$ là nón thì thứ tự trong X sinh bởi nón K được định nghĩa như sau:

$$x \leq y \quad \text{khi và chỉ khi} \quad y - x \in K.$$

Chú ý rằng trong lý thuyết phương trình trong không gian có thứ tự, thuật ngữ nón được dùng để chỉ tập K thỏa mãn các điều kiện i)–iii). Trong Giải tích đa trị, Lý thuyết điều khiển, ..., tập K thỏa các điều kiện i)–iii) gọi là nón lồi đóng nhọn.

<u>Định nghĩa1.1.2.</u>

Cho X là không gian Banach với thứ tự sinh bởi nón K. Khi đó ta nói:

- K là nón sinh nếu: $K - K = X$.
- K là nón chuẩn nếu:

$$\exists N > 0, \quad \forall x, y \in K: \quad x \le y \;\Rightarrow\; \|x\| \le N\|y\|.$$

- K là nón chính qui nếu: Mọi dãy đơn điệu tăng bị chặn trên đều hội tụ.
- K là nón hoàn toàn chính qui nếu: Mọi dãy đơn điệu tăng bị chặn theo chuẩn, đều hội tụ.

Ta dễ dàng kiểm tra rằng:

- Nón các hàm không âm trong không gian $C(X)$ các hàm liên tục trên không gian compắc X là nón sinh, nón chuẩn nhưng không là nón chính qui.
- Nón các hàm không âm h. k. n trong $L^p(X,\mu)$, $(1 \le p < \infty)$ là nón sinh, nón hoàn toàn chính qui.

B. <u>Toán tử tuyến tính u_0-bị chặn</u>

<u>Định nghĩa 1.1.3.</u>

Cho X là không gian Banach với thứ tự sinh bởi nón K và $A: X \to X$ là toán tử tuyến tính và $u_0 \in K \setminus \{\theta\}$.

- Toán tử A gọi là dương nếu: $A(K) \subset K$,

nói cách khác:

$$\forall x \in X, \; x \ge 0 \;\Rightarrow\; A(x) \ge 0.$$

- Toán tử A gọi là u_0-bị chặn trên nếu: Với mỗi $x \in K \setminus \{\theta\}$ tồn tại số tự nhiên $n = n(x)$, số $a = a(x) > 0$ sao cho

$$A^n(x) \le a u_0.$$

- Toán tử A gọi là u_0-bị chặn dưới nếu: Với mỗi $x \in K \setminus \{\theta\}$ tồn tại số tự nhiên $n = n(x)$, số $b = b(x) > 0$ sao cho

$$A^n(x) \ge b u_0.$$

◆ Nếu A là u_0-bị chặn dưới và u_0-bị chặn trên thì ta nói A là u_0-bị chặn hay u_0-dương.

Trong các phần sau chúng ta cần các kết quả dưới đây về đánh giá bán kính phổ của toán tử tuyến tính dương (xem trong [20,21]).

<u>Mệnh đề1.1.4.</u>

Giả sử K là nón sinh và $A : X \to X$ là toán tử tuyến tính hoàn toàn liên tục và u_0-bị chặn. Khi đó:

1) A có duy nhất trong K vectơ riêng x_0 , $\|x_0\| = 1$, tương ứng với giá trị riêng $\lambda_0 > 0$.

2) Giá trị riêng λ_0 trùng với bán kính phổ $r(A)$ của A; trong đó $r(A)$ có thể tính bằng công thức $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}$.

<u>Mệnh đề1.1.5.</u>

1) Giả sử A là toán tử tuyến tính dương, hoàn toàn liên tục và tồn tại phần tử $x = u - v \;\; (u, v \in K,\ u \neq \theta)$, số tự nhiên n và số dương α sao cho

$$A^n(x) \geq \alpha x.$$

Khi đó:

$$r(A) \geq \sqrt[n]{\alpha}.$$

2) Cho A là toán tử tuyến tính dương, hoàn toàn liên tục, u_0-bị chặn trên, K là nón sinh và chuẩn. Giả sử tồn tại $x \in K \setminus \{\theta\}$, số tự nhiên n và số dương α sao cho

$$A^n(x) \leq \alpha x.$$

Khi đó:

$$r(A) \leq \sqrt[n]{\alpha},$$

hơn nữa nếu x không là vectơ riêng của A thì bất đẳng thức là nghiêm ngặt.

C. Nhánh liên tục các nghiệm của phương trình chứa tham số

Cho X là không gian Banach và K là nón xác định thứ tự trong X. Cùng với hình nón K, chúng ta xét thêm một nón $P \subset K$. Ta xét bài toán

tìm $\lambda \in I$, $x \in P \setminus \{\theta\}$ thỏa mãn phương trình:

$$x = F(\lambda, x) \tag{1.1}$$

trong đó $I = [0,\infty)$ hoặc $I = (0,\infty)$, $F : I \times P \to P$ là một toán tử hoàn toàn liên tục, nghĩa là F liên tục và $F([a,b] \times P \cap \overline{B}(\theta, r))$ là tập compăc tương đối với mọi $[a,b] \subset I$, mọi $r > 0$.

Ta ký hiệu $\sum$ là tập nghiệm của phương trình (1.1)

$$\sum = \{(\lambda, x) \in I \times P \mid x = F(\lambda, x),\ x \neq 0\},$$

và đặt

$$S = \{x \in P \setminus \{\theta\} \mid \exists \lambda \in I : x = F(\lambda, x)\}. \tag{1.2}$$

Nếu toán tử F là khả vi tại θ hoặc có một chặn dưới đơn điệu theo nghĩa Krasnoselski thì sự tồn tại nhánh nghiệm liên tục không bị chặn trong $\sum$ có thể nghiên cứu bằng cách sử dụng định lý tổng quát của Dancer [11], Amann [3]. Trong các phương trình mà chúng tôi sẽ xét, các toán tử không đòi hỏi tính khả vi tại θ cũng như không có chặn dưới đơn điệu và vì vậy thay thế cho tập nghiệm $\sum$ chúng tôi sẽ xét hình chiếu S của nó trên không gian X. Định nghĩa sau đây được đưa ra bởi Krasnoselski.

Định nghĩa 1.1.6.

Ta nói rằng S là một nhánh liên tục không bị chặn xuất phát từ θ nếu $S \cap \partial G \neq \phi$ với mọi tập mở bị chặn G chứa θ.

Để khảo sát S chúng tôi sử dụng nhiều lần đến các kết quả sau:

Mệnh đề 1.1.7. **[19]**

Cho $F : I \times P \to P$ là một toán tử hoàn toàn liên tục và G là một lân *cận mở bị chặn của θ. Giả sử rằng tồn tại các số λ_1, λ_2 thuộc I và phần tử $x_0 \in P \setminus \{\theta\}$ sao cho*

i) $\mu x \neq F(\lambda_1, x)$ *với* $x \in P \cap \partial G$ *và* $\mu \geq 1$.

ii) $x - \mu x_0 \neq F(\lambda_2, x)$ *với* $x \in P \cap \partial G$ *và* $\mu \geq 0$.

Khi đó: $S \cap \partial G \neq \phi$.

Định lý1.1.8.

Giả sử $F : I \times P \to P$ *là ánh xạ hoàn toàn liên tục thỏa mãn các điều kiện sau:*

1) Tập nghiệm S của (1.1) là nhánh liên tục không bị chặn xuất phát từ θ.

2) Với mỗi $x \in S$ tồn tại duy nhất $\lambda = \lambda(x) \in I$ để (λ, x) thỏa (1.1).

3) Với mỗi đoạn $[r, R] \subset (0, \infty)$ tồn tại đoạn $[\alpha, \beta] \subset (0, \infty)$ sao cho

$$x \in S,\ \|x\| \in [r, R] \Rightarrow \lambda(x) \in [\alpha, \beta].$$

4)

a) $\lim\sup_{\|x\| \to 0} \lambda(x) = \lambda_0 < \lambda_\infty = \lim\inf_{\|x\| \to \infty} \lambda(x)$,

hoặc

b) $\lim\sup_{\|x\| \to \infty} \lambda(x) = \lambda_\infty < \lambda_0 = \lim\inf_{\|x\| \to 0} \lambda(x)$.

Khi đó với mọi $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_\infty)$ (hoặc $\lambda \in (\lambda_\infty, \lambda_0)$) thì phương trình (1.1) có nghiệm $x \in P \setminus \{\theta\}$.

Chứng minh

Ta chứng minh định lý cho trường hợp a), trường hợp b) chứng minh hoàn toàn tương tự.

Giả sử trái lại

$$\exists \bar{\lambda} \in (\lambda_0, \lambda_\infty) : \ x \neq F(\bar{\lambda}, x) \ \ \forall x \in P \setminus \{\theta\}. \qquad (1.3)$$

Ta định nghĩa:

$$S_1 = \{x \in S : \lambda(x) < \bar{\lambda}\},$$

$$S_2 = \{x \in S : \lambda(x) > \bar{\lambda}\}.$$

Từ giả thiết 4) và định nghĩa S_1, S_2 ta có

$$\sup\{\|x\| : x \in S_1\} < \infty, \quad \inf\{\|x\| : x \in S_2\} > 0. \tag{1.4}$$

Từ (1.4) và giả thiết 1) ta phải có $\inf\{\|x\| : x \in S_1\} = 0$. (1.5)

Ta khẳng định:

$$\inf\{\|x - y\| : x \in S_1, y \in S_2\} = \alpha > 0. \tag{1.6}$$

Thật vậy, nếu (1.6) không đúng thì tìm được các dãy $\{x_n\} \subset S_1$, $\{y_n\} \subset S_2$ sao cho

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - y_n\| = 0. \tag{1.7}$$

Từ (1.4) và (1.7) ta thấy tồn tại đoạn $[r, R] \subset (0, \infty)$ sao cho $\{\|x_n\|\}, \{\|y_n\|\} \subset [r, R]$

Do đó theo giả thiết 3) tồn tại $[\alpha, \beta]$ để $\lambda(x_n), \lambda(y_n) \in [\alpha, \beta]$. Từ sự bị chặn của $\{\lambda(x_n)\}$, $\{\lambda(y_n)\}$, từ

$$x_n = F(\lambda(x_n), x_n), \qquad y_n = F(\lambda(y_n), y_n),$$

và tính hoàn toàn liên tục của F, ta có thể chọn dãy con $\{n_k\}$ sao cho

$$x_{n_k} \to x_0, \; y_{n_k} \to x_0, \quad \lambda(x_{n_k}) \to \lambda', \; \lambda(y_{n_k}) \to \lambda'',$$

và ta có

$$x_0 = F(\lambda', x_0), \qquad x_0 = F(\lambda'', x_0), \qquad \lambda' \le \bar{\lambda} \le \lambda''.$$

Nhưng khi đó theo giả thiết 2) ta phải có $\lambda' = \lambda'' = \bar{\lambda}$, điều này mâu thuẩn với (1.3). Như vậy (1.6) đúng.

Bây giờ ta đặt

$$G = \bigcup_{x \in S_1} B\left(x, \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ta có G là tập mở, bị chặn (do (1.4)) và chứa θ (do (1.5)). Theo cách xây dựng G ta có $S_1 \cap \partial G = \phi$, còn theo (1.6) ta có $S_2 \cap \partial G = \phi$, do vậy $S \cap \partial G = \phi$, điều này mâu thuẩn với giả thiết 1). Vậy (1.3) là sai. Định lý được chứng minh.

Định lý 1. 1. 8 là một chỉnh lý của định lý tương tự của Kranoselski trong [20]. Đối với trường hợp riêng $F(\lambda, x) = \lambda F(x)$ các giả thiết 2), 3) được nghiệm đúng, nếu $F(x) \neq \theta$ khi $x \in P \setminus \{\theta\}$.

D. Một số tính chất của hàm lõm

Trong phần này ta ký hiệu $X = C[0,1]$ là không gian Banach các hàm
liên tục trên đoạn $[0,1]$ với chuẩn $\|x\| = \sup\{ |x(t)| : \ t \in [0, 1]\}$.

Giả sử X được sắp thứ tự bởi hình nón K các hàm không âm. Xét P là hình nón tất cả các hàm lõm $x \in K$ sao cho $x(0) = x(1) = 0$.

Định lý 1.1.9.

i) Mọi hàm $x \in P$ có đạo hàm hầu khắp nơi (h.k.n) trên [0,1] và thỏa mãn:

$$x(t) \geq \|x\|.t(1-t) \quad \text{với mọi } t \in [0,1], \tag{1.8}$$

$$|x'(t)| \leq \frac{x(t)}{t(1-t)} \quad \text{h.k.n} \quad \text{trên } [0,1]. \tag{1.9}$$

ii) Nếu dãy $\{x_n\} \subset P$ hội tụ trong $C[0,1]$ đến một hàm x thì tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của nó sao cho $\{x'_{n_k}\}$ hội tụ h.k.n trên [0, 1] đến hàm x'.

Chứng minh

i) Giả sử $\|x\| = x(t_0)$ với $t_0 \in (0,1)$ nào đó. Bởi tính lõm của x ta có

$$x(t) \geq \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)x(0) + \frac{t}{t_0}x(t_0) = \frac{t}{t_0}x(t_0)$$

$$\geq t(1-t)x(t_0) \qquad \text{với } t \in [0, t_0],$$

$$x(t) \geq \frac{1-t}{1-t_0}x(t_0) + \frac{t-t_0}{1-t_0}x(1) = \frac{1-t}{1-t_0}x(t_0)$$

$$\geq t(1-t)x(t_0) \qquad \text{với } \; t \in [t_0, 1].$$

nên (1.8) được thỏa mãn.

Cũng bởi tính hàm lõm của x dễ dàng chứng minh rằng hàm $t \mapsto \dfrac{x(t)-x(s)}{(t-s)}$ là không tăng trên $[0,1] \setminus \{s\}$ với mọi $s \in (0,1)$. Vì vậy hàm x là Lipschitz, và do đó liên tục tuyệt đối trên mỗi đoạn con $[a,b] \subset (0,1)$. Từ đó x khả vi h.k.n trên $[0, 1]$. (Xem [30]).

Nếu x khả vi tại $t \in (0,1)$ nào đó thì bởi tính lõm của x, ta có

$$x(t) \geq x(s) + x'(t)(t-s), \; s \in [0,1].$$

Cho $s = 0$, $s = 1$ ta nhận được

$$x(t) \geq x'(t)t, \quad x(t) \geq x'(t)(t-1),$$

Do đó

$$-\frac{x(t)}{1-t} \leq x'(t) \leq \frac{x(t)}{t},$$

nên
$$-\frac{x(t)}{t(1-t)} \leq x'(t) \leq \frac{x(t)}{t(1-t)}.$$

Điều này chứng minh (1.9).

ii) Từ tính lõm của x_n suy ra rằng x_n' là không tăng trong tập hợp mà nó xác định.

Với $n = 1, 2, \ldots$, $t \in (0, 1)$ ta đặt:

$$y_n(t) = \inf\{x_n'(s) \mid s \in [0,t], \; x_n'(s) \text{ tồn tại}\}.$$

Dãy $\{y_n\}$ các hàm không tăng là bị chặn đều trên mọi đoạn $[a,b] \subset (0,1)$ (theo (1.9)), do vậy theo định lý chọn Helly có một dãy con nào đó của nó hội tụ tại mọi $t \in (a,b)$. Bằng suy luận về dãy đường chéo, ta kết luận được rằng có một dãy con $\{y_{n_k}\}$ hội tụ đến một hàm y tại mọi $t \in (0,1)$.

Vì $y_n(t) = x_n^{/}(t)$ h.k.n trên $[0,1]$ nên ta có $\operatorname{Lim} x_{n_k}^{/}(t) = y(t)$ h.k.n trên $[0, 1]$. Ta còn phải chỉ ra $y(t) = x^{/}(t)$ h.k.n trên $[0, 1]$. Xét tùy ý một đoạn $[s,t] \subset (0,1)$. Theo [30] , vì x_{n_k} liên tục tuyệt đối trên $[s,t]$ nên

$$x_{n_k}(t) - x_{n_k}(s) = \int_s^t x_{n_k}^{/}(u)du.$$

Cho $k \to \infty$ theo định lý hội tụ bị chặn ta có

$$x(t) - x(s) = \int_s^t y(u)du.$$

Từ đó $$x^{/}(t) = y(t) \quad \text{h.k.n trên } (0, 1).$$

Định lý được chứng minh.

§ 2. BÀI TOÁN GIÁ TRỊ RIÊNG CHO MỘT LỚP BÀI TOÁN BIÊN BẬC 2.

A. Ước lượng bán kính phổ của toán tử tích phân tuyến tính

Giả sử $G : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ là hàm Green cho bài toán biên:

$$-x^{//} = y \qquad \text{trong } (0,1), \qquad x(0) = x(1) = 0,$$

tức là:

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s) & \text{nếu } 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t) & \text{nếu } 0 \le s \le t \le 1. \end{cases} \tag{1.10}$$

Giả sử a: $[0,1] \to [0, \infty)$ là một hàm liên tục không đồng nhất bằng 0 trên mọi đoạn $[\alpha,\beta] \subset [0,1]$ và $a_\varepsilon : [0,1] \to [0,\infty)$ là hàm sao cho $a_\varepsilon(t) = a(t)$ trên $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$, $a_\varepsilon(t) = 0$ trên $[0,\varepsilon] \cup [1-\varepsilon, 1]$. Xét các toán tử tích phân tuyến tính.

$$Bx(t) = \int_0^1 G(t,s)a(s)x(s)ds, \tag{1.11}$$

$$B_\varepsilon x(t) = \int_0^1 G(t,s)a_\varepsilon(s)x(s)ds. \qquad (1.12)$$

Ta có B, B_ε là hoàn toàn liên tục từ $C[0,1]$ vào $C[0,1]$.

Ta ký hiệu $r(B), r(B_\varepsilon)$ là bán kính phổ của B và B_ε.

<u>Định lý 1.2.1.</u> *Ký hiệu K là nón các hàm không âm của $C[0,1]$. Ta có:*

i) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} r(B_\varepsilon) = r(B)$.

ii) $r(B)$ là một giá trị riêng của B với một hàm riêng thuộc K.

iii) Nếu $\alpha x \le B_\varepsilon x$ với một $x \in K \setminus \{\theta\}$ thì $\alpha \le r(B_\varepsilon)$

Nếu $B_\varepsilon x \le \beta x$ với một $x \in K \setminus \{\theta\}$ thì $r(B_\varepsilon) \le \beta$.

Các khẳng định tương tự cũng đúng cho toán tử B, với các bất đẳng thức nghiêm ngặt trong kết luận nếu x không là vectơ riêng của B.

<u>Chứng minh</u>

Ta có

$$\|B - B_\varepsilon\| = \sup_{0\le t\le 1} \int_0^1 G(t,s)|a(s) - a_\varepsilon(s)|ds$$

$$\le \int_0^1 |a(s) - a_\varepsilon(s)|ds$$

$$\le 2\varepsilon \sup_{0\le s\le 1} |a(s)|.$$

Do đó $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} B_\varepsilon = B$ trong $L(X)$. Do đó khẳng định i) suy ra từ tính liên tục của toán tử $A \mapsto r(A)$ từ $L(X)$ vào $\mathbb{R}$.

Ta có thể kiểm tra rằng:

$$t(1-t)s(1-s) \le G(t,s) \le t(1-t) \qquad \text{trên } [0,1]\times[0,1].$$

Do đó với $x \in K$

$$t(1-t)\int_0^1 s(1-s)a(s)x(s)ds \le Bx(t) \le t(1-t)\int_0^1 a(s)x(s)ds,$$

$$B_\varepsilon x(t) \le t(1-t)\int_0^1 a_\varepsilon(s)x(s)ds.$$

Từ các bất đẳng thức này dễ dàng kiểm tra toán tử B là u_0–bị chặn và toán tử B_ε là u_0– bị chặn trên, với $u_0(t) = t(1-t)$. Từ đó khẳng định ii) suy từ mệnh đề 1.1.4, khẳng định iii) là hệ quả của mệnh đề 1.1.5.

Định lý được chứng minh.

B. Nhánh liên tục các nghiệm và khoảng giá trị riêng

Trong phần này $X = C[0,1]$ là không gian Banach các hàm liên tục trên đoạn $[0,1]$ với chuẩn $\|x\| = \sup\{\, |x(t)| \;;\; t \in [0, 1]\}$.

Giả sử X được sắp thứ tự bởi nón K các hàm không âm. Xét P là nón tất cả các hàm lõm $x \in K$ sao cho $x(0) = x(1) = 0$.

Chúng ta nghiên cứu bài toán biên

$$\begin{cases} x'' + \lambda a(t)f(x) = 0, & t \in (0,1) \\ x(0) = x(1) = 0. \end{cases} \qquad (1.13)$$

với các giả thiết

(H_1) f: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ liên tục và không đồng nhất triệt tiêu trên mọi đoạn con.

(H_2) a: $[0, 1] \to [0, \infty)$ là liên tục và không bằng hằng 0 trên mọi đoạn.

(H_3) Tồn tại các giới hạn (có thể bằng ∞)

$$f_0 = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \quad \text{và} \quad f_\infty = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

và $f_0 \ne f_\infty$.

So với các nghiên cứu của [17] về bài toán (1.13). Chúng tôi sẽ chứng minh tập nghiệm dương của bài toán (1.13) là nhánh liên tục không bị chặn và chứng minh rằng tập các giá trị λ để bài toán (1.13) có nghiệm dương chứa một đoạn. Đoạn này là lớn hơn đoạn nhận được trong [17].

Bài toán biên (1.13) tương đương với bài toán giá trị riêng sau:

$$x(t) = \lambda \int_0^1 G(t,s)a(s)f[x(s)]ds, \qquad (1.14)$$

ở đây hàm G xác định như trong (1.10). Nếu ta gọi F là toán tử trong vế phải của (1.13) sau thừa số λ thì $F: P \to P$ là hoàn toàn liên tục.

Định lý 1.2.2.

Giả sử rằng các điều kiện (H_1) và (H_2) được thỏa mãn. Khi đó tập S định nghĩa trong (1.2) cho phương trình (1.14) là một nhánh liên tục không bị chặn, xuất phát từ θ.

Chứng minh

Giả sử G là một tập con mở bị chặn chứa θ. Đặt

$$m = \inf\{\|x\| ,\ x \in P \cap \partial G\},$$

$$M = \sup\{\|F(x)\| ,\ x \in P \cap \partial G\}.$$

Nếu $\mu x = \lambda F(x)$ với $\mu > 0, \lambda > 0$ và $x \in P \cap \partial G$ thì $\mu m \le \lambda M$.

Vì vậy điều kiện i) trong mệnh đề 1.1.7 sẽ thỏa mãn nếu λ_1 đủ nhỏ. Bây giờ ta sẽ chứng minh điều kiện ii) trong mệnh đề 1.1.7 thỏa mãn với λ_2 đủ lớn và $x_0(t) = t(1-t)$.

Giả sử trái lại. Khi đó

$$x_n - \mu_n x_0 = \lambda_n F x_n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

với $x_n \in P \cap \partial G$, $\mu_n \ge 0$ và $\lambda_n \to \infty$ khi $n \to \infty$. Theo bất đẳng thức (1.9), dãy $\{x_n^{/}\}$ là bị chặn đều trên mọi đoạn $[a,b]\subset(0,1)$. Do đó với mỗi đoạn $\left[\frac{1}{k}\ ,1-\frac{1}{k}\right]$ $(k=2,3,...)$ $\{x_n\}$ có dãy con hội tụ đều trên $\left[\frac{1}{k}\ ,1-\frac{1}{k}\right]$ theo định lý Ascoli. Từ đó sử dụng kỹ thuật về dãy đường chéo, ta chọn được từ dãy $\{x_n\}$ ra một dãy con, mà ta lại ký hiệu là $\{x_n\}$, hội tụ tại mọi điểm $t\in(0,1)$ đến một hàm x liên tục trên (0, 1) sao cho $x(t)\geq mt(1-t)$ trên $(0, 1)$. Qua giới hạn trong bất đẳng thức:

$$\frac{x_n(t)}{\lambda_n}\geq Fx_n=\int_0^1 G(t,s)a(s)f[x_n(s)]dx\ ,$$

do định lý hội tụ bị chặn, chúng ta có

$$0\geq\int_0^1 G(t,s)a(s)f[x(s)]ds\,.$$

Điều này mâu thuẫn với với điều kiện (H_1).

Vậy các điều kiện của mệnh đề 1.1.7 được thỏa mãn. Do đó phương trình (1.14) có nghiệm trên $P\cap\partial G$.

Định lý được chứng minh.

<u>Định lý 1.2.3.</u>

Giả thiết rằng các điều kiện (H_1) – (H_3) được thỏa mãn và λ_1 là giá trị riêng bé nhất của bài toán biên

$$x^{//}+\lambda a(t)x=0\ \ trong\ \ (0,\,1),$$

$$x(0)=x(1)=0.$$

Khi đó với mọi λ thỏa mãn:

$$min\left\{\frac{\lambda_1}{f_0},\frac{\lambda_1}{f_\infty}\right\}<\lambda<max\left\{\frac{\lambda_1}{f_0},\frac{\lambda_1}{f_\infty}\right\},$$

thì bài toán (1.14) có trong $P \setminus \{\theta\}$ *ít nhất một nghiệm. (Ở đây chúng ta hiểu rằng* $\frac{\lambda_1}{0} = \infty$*,* $\frac{\lambda_1}{\infty} = 0$ *).*

<u>Chứng minh</u>

Chúng ta chỉ chứng minh cho trường hợp $f_0 < f_\infty$. Trường hợp $f_0 > f_\infty$ được chứng minh một cách hoàn toàn tương tự .

Ta sẽ chứng minh rằng:

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{\|x\|\to 0} \lambda(x) \geq \frac{\lambda_1}{f_0}, \tag{1.15}$$

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{\|x\|\to \infty} \lambda(x) \leq \frac{\lambda_1}{f_\infty}. \tag{1.16}$$

Khi đó khẳng định của định lý 1.2.3 suy ra từ định lý 1.1.8.

Vì $f_0 < f_\infty$ nên $f_0 \neq \infty$.

Xét số dương m sao cho $m < \frac{\lambda_1}{f_0}$. Vì:

$$\operatorname*{Lim}_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f_0 < \frac{\lambda_1}{m},$$

nên ta có thể chọn số dương r sao cho

$$f(x) < \frac{\lambda_1}{m} x \quad \text{khi} \quad x < r.$$

Nếu $x \in S,\ x \neq 0,\ \|x\| < r$ ta có

$$\begin{aligned} x &= \lambda(x) Fx \\ &\leq \lambda(x) \int_0^1 G(t,s) a(s) \cdot \frac{\lambda_1}{m} x(s) ds \\ &\leq \frac{\lambda(x).\lambda_1}{m} B(x). \end{aligned}$$

Ở đây B là toán tử tuyến tính xác định trong (1.11). Vì vậy, do định lý 1.2.1, chúng ta có $\frac{m}{\lambda(x)\lambda_1} \le r(B)$. Chú ý rằng $r(B) = \frac{1}{\lambda_1}$ nên ta có $\lambda(x) \ge m$. Từ đó

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{\|x\|\to 0} \lambda(x) \ge m.$$

Vì m có thể chọn gần $\frac{\lambda}{f_0}$ tùy ý nên (1.15) được chứng minh.

Để chứng minh (1.16) ta xét m, k tùy ý sao cho $\frac{\lambda_1}{f_\infty} < m < k$. Do:

$$\operatorname*{Lim}_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = f_\infty > \frac{\lambda_1}{m},$$

nên ta có thể chọn r sao cho

$$f(x) > \frac{\lambda_1}{m} x \quad \text{với } x > r.$$

Theo định lý 1.2.1 ta chọn được số $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$r(B_\varepsilon) > \frac{m}{k} r(B) = \frac{m}{k.\lambda_1}. \tag{1.17}$$

Khi $x \in S, \quad \|x\| > \frac{r}{\varepsilon^2}$ thì do (1.8) ta có

$$\begin{aligned} x(t) &\ge \|x\| t(1-t) \\ &\ge \|x\|\varepsilon^2 > r \qquad \text{với } t \in [\varepsilon,\ 1-\varepsilon]. \end{aligned}$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} x(t) &= \lambda(x)\int_0^1 G(t,s)a(s)f[x(s)]ds \\ &\ge \lambda(x)\int_0^1 G(t,s)a_\varepsilon(s)\frac{\lambda_1}{m} x(s)ds \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda(x)\lambda_1}{m} B_\varepsilon(x).$$

Ở đây hàm a_ε và toán tử B_ε được định nghĩa trong phần A của § 2.

Áp dụng định lý 1.2.1 ta có

$$\frac{m}{\lambda(x)\lambda_1} \geq r(B_\varepsilon). \tag{1.18}$$

Kết hợp (1.17) và (1.18) ta có $\lambda(x) \leq k$. Vì k có thể chọn gần $\frac{\lambda_1}{f_\infty}$ tùy ý ta có (1.16).

Định lý được chứng minh.

<u>Ghi chú 1.2.4.</u>

Ta sẽ chứng minh rằng khoảng các giá trị λ để bài toán (1.13) có nghiệm, trong định lý 1.2.3 là rộng hơn các khoảng tìm được trong [17].

Để làm ví dụ, ta xét trường hợp $f_0 < f_\infty$. Trong trường hợp này khoảng trong định lý 1.2.3 là $\left(\frac{\lambda_1}{f_\infty}, \frac{\lambda_1}{f_0}\right)$.

Đặt
$$b = \underset{0\leq t\leq 1}{\mathrm{Max}} \int_{1/4}^{3/4} G(t,s)a(s)ds,$$

$$c = \int_0^1 s(1-s)a(s)ds,$$

thì trong [17] đã nhận được khoảng giá trị λ để (1.13) có nghiệm là:

$$\left(\frac{4}{bf_\infty}, \frac{1}{cf_0}\right).$$

Ta sẽ chứng minh:

$$\lambda_1 < \frac{4}{b} \text{ và } \frac{1}{c} < \lambda_1.$$

Ta có

$$\int_0^1 G(t,s)a(s)ds \le c,$$

hay ở dạng tương đương $B(1) \le c.1$. Vì hàm $x(t) \equiv 1$ không là vectơ riêng của toán tử B nên theo định lý 1.2.1 ta có $\frac{1}{\lambda_1} = r(B) < c$.

Đặt $u(t) = \min\{t,\ 1-t\}$ và $y(t) = Bu(t)$. Ta có

$$y(t) = \int_0^1 G(t,s)a(s)u(s)ds$$

$$= \int_0^{1/2} G(t,s)a(s)sds + \int_{1/2}^1 G(t,s)a(s)(1-s)ds$$

$$\ge \frac{1}{4}\int_{1/4}^{1/2} G(t,s)a(s)ds + \frac{1}{4}\int_{1/2}^{3/4} G(t,s)a(s)ds$$

$$= \frac{1}{4}\int_{1/4}^{3/4} G(t,s)a(s)ds.$$

Do đó $\|y\| \ge \frac{1}{4}b$. Mặt khác từ chứng minh định lý 1.1.9 ta có $y(t) \ge \|y\|u(t)$ hay

$$Bu(t) \ge \frac{1}{4}bu(t).$$

Do hàm $u(t)$ không là vectơ riêng của toán tử B nên từ bất đẳng thức trên và định lý 1.2.1, ta có $\frac{1}{4}b < \frac{1}{\lambda_1}$

§3. BÀI TOÁN GIÁ TRỊ RIÊNG CHO BÀI TOÁN BIÊN BẬC 2 CHỨA TOÁN TỬ P-LAPLACE.

Trong mục này ta nghiên cứu bài toán biên chứa toán tử p-Laplace sau đây:

$$-\left(\varphi(x')\right)' = \lambda f(t, x, x') \quad \text{trong } (0, 1), \qquad (1.19)$$

$x(0) = x(1) = 0$.

với $\varphi(x')' = \left(x'\left|x'\right|^{p-2}\right)'$, $p > 1$ được gọi là toán tử p-Laplace một chiều.

A. <u>Các kết quả chuẩn bị</u>

- Trước tiên ta nghiên cứu một vài tính chất của toán tử nghịch đảo của toán tử p-Laplace.

Với mỗi hàm không âm $y \in L(0,1)$, trong [1,14] đã chứng minh rằng tồn tại duy nhất hàm $x = A(y) \in C^1[0,1]$, x' liên tục tuyệt đối sao cho

$$\left(\varphi(x')\right)' = y \quad \text{h.k.n trong } (0,1),$$

$$x(0) = x(1) = 0.$$

Hàm $A(y)$ được xác định bởi:

$$Ay(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \varphi^{-1}\left(\int_s^c y(r)dr\right)ds, & 0 \le t \le c, \\ \displaystyle\int_t^1 \varphi^{-1}\left(\int_c^s y(r)dr\right)ds, & c \le t \le 1. \end{cases} \qquad (1.20)$$

Ở đây số c được chọn sao cho

$$\int_0^c \varphi^{-1}\left(\int_s^c y(r)dr\right)ds = \int_c^1 \varphi^{-1}\left(\int_c^s y(r)dr\right)ds.$$

Rõ ràng rằng $Ay(c)$ là giá trị cực đại của Ay trên $[0,1]$.

Các tính chất sau đây của A đã được thiết lập trong [1,14,15].

<u>Mệnh đề 1.3.1.</u>

i) Toán tử A là hoàn toàn liên tục từ

$L_+(0,1) = \{x \in L(0,1) : x(t) \ge 0$ h.k.n trên $(0,1)\}$ vào $C[0,1]$.

ii) Với mỗi hàm dương $y \in L(0,1)$ hàm $A(y)$ thuộc P.

Toán tử A là dương, thuần nhất bậc $\frac{1}{p-1}$ và đơn điệu tăng theo nghĩa $0 \le y \le z$ kéo theo $A(y) \le A(z)$.

- Bây giờ ta xét vấn đề tìm số dương λ và tìm hàm x sao cho

$$\left.\begin{aligned} -\left(\varphi(x')\right)' = \lambda c(t)\varphi(x)\ ,\ x > 0 \quad \text{trong } (0,1) \\ x(0) = x(1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Pc)}$$

Ở đây $c \in L^\infty(0,1)$, $c(t) \ge 0$ h.k.n trên $(0,1)$, $c \ne 0$.

Ta biết rằng tồn tại duy nhất số $\lambda = \lambda_c > 0$, duy nhất hàm $x = x_c$ chính xác tới một hằng số nhân, thỏa mãn (Pc).

Số λ_c gọi là giá trị riêng chính cho bài toán (Pc) và đặc trưng bởi:

$$\lambda_c = \inf\left\{ \frac{\int_0^1 |x'(t)|^p dt}{\int_0^1 c(t)|x(t)|^p dt} : x \in W_0^{1,p}(0,1)\ ,\ x \ne 0 \right\}. \qquad (1.21)$$

Để nhận được khoảng giá trị riêng của bài toán (1.19) ta cần chứng minh hai kết quả sau.

<u>Định lý1.3.2.</u>

Giả sử $x \in C^1[0,1]$ sao cho x' liên tục tuyệt đối, $x \ge 0$, $x \ne 0$, $x \ne \mu x_c$, $x(0) = x(1) = 0$.

Khi đó:

i) $-\left(\varphi(x')\right)' \le \lambda c(t)\varphi(x)$ *trên* $(0, 1)$ (1.22)

kéo theo $\lambda > \lambda_c$,

ii) $-\left(\varphi(x')\right)' \ge \lambda c(t)\varphi(x)$ *trên* $(0, 1)$ (1.23)

kéo theo $\lambda < \lambda_c$.

Chứng minh

Trong [34] đã chứng minh rằng bài toán biên:

$$-\left(\varphi(x')\right)' = \lambda_c c(t)\varphi(x) \ + \ h(t) \quad \text{trong} \ (0, 1),$$
$$x(0) = x(1) = 0,$$

không có nghiệm dương nếu hàm $h \in L^\infty(0,1)$ không đổi dấu và không đồng nhất bằng không. Vì vậy $\lambda \neq \lambda_c$ trong (1.22), (1.23).

Nếu (1.22) được nghiệm đúng thì bằng cách nhân với x và tích phân

từng phần ta được

$$\int_0^1 \left|x'(t)\right|^p dt \leq \lambda \int_0^1 c(t) x^p(t) dt,$$

điều này kéo theo $\lambda_c \leq \lambda$ bởi (1.21)

Nếu (1.23) được nghiệm đúng thì có

$$-\left(\varphi(x')\right)' = \lambda_c c(t)\varphi(x) + (\lambda - \lambda_c) c(t)\varphi(x) + k(t),$$

với một hàm $k \in L^\infty(0,1)$, $k \geq 0$. Do đó theo kết quả đã đề cập ở trên của [34] ta kết luận được $\lambda - \lambda_c < 0$.

Định lý được chứng minh.

Nhận xét 1.3.3 .

Chúng ta dễ thấy rằng bài toán giá trị riêng (Pc) là tương đương với phương trình toán tử sau:

$$x = A\left(\lambda c(t)\varphi(x)\right).$$

Ta có dạng yếu của khẳng định ii) trong định lý 1.3.2 như sau:

ii$'$) Nếu $x \geq A\left(\lambda c(t)\varphi(x)\right)$ với $x \in C[0,1]$ nào đó, $x \geq 0$, $x \neq 0$ và $\lambda > 0$ thì $\lambda \leq \lambda_c$.

Thật vậy, giả sử x_c là một vectơ riêng ứng với giá trị riêng chính λ_c của bài toán (Pc). Sử dụng biểu diễn của A trong (1.20) và qui tắc L/Hospital ta thấy rằng cả hai giới hạn

$$\lim_{t\to 0}\frac{x_c(t)}{t}, \qquad \lim_{t\to 1}\frac{x_c(t)}{(1-t)}$$

là hữu hạn. Như vậy: $x_c(t)\le \alpha t(1-t)$ với $\alpha>0$ nào đó.

Vì $x(t)\ge A\big(\lambda c(t)\varphi(x)\big)\ge \beta t(1-t)$ với $\beta>0$ nào đó nên $x(t)\ge \beta' x_c(t)$ với

$\beta'>0$. Do đo tồn tại một số lớn nhất $\gamma>0$ sao cho $x(t)\ge \gamma x_c(t)$. Bởi tính đơn điệu của A ta có

$$x\ge A\big(\lambda c(t)\varphi(\gamma x_c)\big)=\gamma\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{\frac{1}{p-1}}x_c.$$

Do tính cực đại của γ, ta phải có

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^{\frac{1}{p-1}}\le 1$$

hay $\lambda\le\lambda_c$.

<u>Định lý 1.3.4.</u>

Giả sử c_n, c là các hàm dương trong $L^\infty(0,1)$ và $\lim c_n = c$ trong $L(0,1)$. Giả sử λ_n là giá trị riêng chính của bài toán (P_{C_n}). Khi đó $\lim\lambda_n=\lambda_c$.

<u>Chứng minh</u>

Chỉ cần chứng minh rằng mọi dãy con của dãy $\{\lambda_n\}$ chứa một dãy con hội tụ đến λ_c. Để đơn giản ký hiệu, giả thiết dãy con được xét là $\{\lambda_n\}$. Giả sử x_n là một hàm riêng tương ứng với λ_n đã được chuẩn hóa bởi điều kiện $\|x_n\|=1$.

Vì $x_n(t) \ge \|x_n\| x_0(t) \quad (x_0(t) = t(1-t))$, ta có

$$x_n = A(\lambda_n c_n(t)\varphi(x_n)) \qquad (1.24)$$

$$\ge A(\lambda_n c_n(t)\varphi(x_0)),$$

và vì vậy

$$x_n \lambda_n^{\frac{1}{1-p}} \ge A(c_n(t)\varphi(x_0)).$$

Từ đó, dãy $\{\lambda_n\}$ bị chặn và do đó có một dãy con $\{\lambda_{n_k}\}$ của nó hội tụ đến λ_0 nào đó. Từ (1.24) và tính compact của toán tử A, ta có thể giả thiết dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ trong $C[0,1]$ đến hàm $x \ne 0$.

Ta có dãy $\{\lambda_{n_k} c_{n_k} \varphi(x_n)\}$ hội tụ đến $\lambda_0 c(t)\varphi(x)$ trong $L(0,1)$.

Do đó qua giới hạn trong đẳng thức:

$$x_{n_k} = A(\lambda_{n_k} c_{n_k}(t)\varphi(x_{n_k}))$$

ta được

$$x = A(\lambda_0 c(t)\varphi(x)).$$

Vì vậy $\lambda_0 = \lambda_c$ do tính duy nhất của giá trị riêng chính của bài toán (P_C).

Định lý được chứng minh.

B. <u>Nhánh liên tục không bị chặn các nghiệm dương và khoảng giá trị riêng</u>

- **<u>Các giả thiết - Đưa về phương trình toán tử</u>**

Để khảo sát bài toán (1.19) chúng ta đưa ra các giả thiết sau:

(H_1) Hàm $f:[0,1]\times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là liên tục, ở đây $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$,

(H_2) Tồn tại các hàm dương a, b trong $L^\infty(0,1)$, các số $\beta > 0$ $0 < q < \min\{1, p-1\}$ và hàm liên tục $g:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ không đồng nhất bằng không trên mọi khoảng, thỏa mãn:

$$a(t)g(x) \le f(t,x,x') \le b(t)g(x) + \beta.|x'|^q, \qquad (1.25)$$

với $(t,x,x') \in [0,1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

(H_3) Tồn tại các giới hạn

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x^{p-1}} = g_0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x^{p-1}} = g_\infty,$$

(có thể bằng 0 hoặc ∞).

• Ta chuyển bài toán biên (1.19) về một phương trình toán tử dạng (1.1) như sau:

Với mỗi $x \in P$ (nhắc lại rằng P là nón của tất cả các hàm lõm không âm, liên tục trên $[0, 1]$ triệt tiêu tại 0 và 1) ta có $x'(t)$ tồn tại h.k.n và theo i) của định lý 1.1.9 và giả thiết (H_2), ta có

$$0 \le f(t, x(t), x'(t)) \le b(t)g(x(t)) + \beta \frac{x^q(t)}{t^q(1-t)^q}. \qquad (1.26)$$

Từ đây ta thấy toán tử $Fx(t) = f(t, x(t), x'(t))$ là tác động từ P vào L(0,1) và chuyển mỗi tập bị chặn vào một tập bị chặn.

Ta chứng minh F liên tục. Giả sử dãy $\{x_n\} \subset P$ hội tụ trong C[0,1] về $x \in P$. Để chứng minh $\{F(x_n)\}$ hội tụ về F(x) trong L(0,1) ta chỉ cần chỉ ra rằng mọi dãy con của $\{F(x_n)\}$ chứa một dãy con hội tụ về F(x). Để đơn giản ký hiệu ta coi dãy con được xét là $\{F(x_n)\}$. Do khẳng định ii) của định lý 1.1.9 tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}$ sao cho $\lim x'_{n_k}(t) = x'(t)$ h.k.n. Do đó $\lim Fx_{n_k}(t) = Fx(t)$ h.k.n.

Từ (1.25), (1.26) và tính bị chặn đều của dãy $\{x_n\}$ ta có

$$0 \le f(t, x_{n_k}(t), x'_{n_k}(t)) \le b_1 + \frac{\beta_1}{t^q(1-t)^q}.$$

Áp dụng định lý hội tụ chặn, ta có $\lim Fx_{n_k} = Fx$ trong $L^1(0,1)$.

Từ đó toán tử $A \circ F$ là hoàn toàn liên tục từ P vào P. Bây giờ, bài toán (1.19) là tương đương với phương trình giá trị riêng sau:

$$x = A\big(\lambda F(x)\big) = \lambda^{\frac{1}{p-1}} A \circ F(x). \qquad (1.27)$$

Ta sẽ xét phương trình (1.27) với $X = C[0,1]$ và tìm các nghiệm trong nón P.

Định lý 1.3.5.

Giả sử rằng giả thiết (H_1) và (H_2) được thỏa mãn. Khi đó tập nghiệm S của phương trình (1.27) là một nhánh liên tục không bị chặn xuất phát từ θ.

Chứng minh

Giả sử G là một lân cận mở bị chặn của θ. Ta sẽ chứng minh $S \cap \partial G \neq \phi$ bằng cách sử dụng mệnh đề 1.1.7.

Rõ ràng điều kiện i) của mệnh đề 1.1.7 đúng với $\lambda_1 = 0$.

Ta sẽ kiểm tra rằng điều kiện ii) đúng với $x_0(t) = t(1-t)$ và với λ_2 đủ lớn. Thật vậy, giả sử trái lại rằng

$$x_n - \mu_n x_0 = A\big(\lambda_n F(x_n)\big),$$

với các dãy $\{x_n\} \subset P \cap \partial G$, $\{\mu_n\} \subset [0,\infty)$ và $\lambda_n \to \infty$ khi $n \to \infty$. Vì $\{x_n\} \subset \partial G$ nên tồn tại m, M thỏa $0 < m \le \|x_n\| \le M$ với mọi $n \in N$. Với mọi đoạn $[c,d] \subset (0,1)$, theo định lý giá trị trung bình và định lý 1.1.9

ta có

$$\left|\frac{x_n(t) - x_n(s)}{t-s}\right| = \left|x_n'(u)\right|$$

$$\le \frac{x_n(u)}{u(1-u)} \le \frac{M}{c(1-d)} \quad \text{với} \quad t,s \in [c,d].$$

Như vậy, dãy $\{x_n\}$ đồng liên tục trên $[c,d]$. Sử dụng định lý Ascoli và kỹ thuật dãy đường chéo, ta kết luận rằng tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ và một hàm x sao cho $\{x_{n_k}\}$ hội tụ đến x đều trên mọi khoảng $[c,d] \subset (0,1)$.

Rõ ràng rằng x là liên tục trên $(0,1)$ và $M \geq x(t) \geq mt(1-t)$. Từ

$$x_n \geq A(\lambda_n F(x_n)) \geq A(\lambda_n a(t)g(x_n)),$$

ta suy ra

$$x_n \lambda_n^{\frac{1}{1-p}} \geq A(a(t)g(x_n)).$$

Qua giới hạn khi $n \to \infty$ trong bất đẳng thức trên ta đi đến một mâu thuẫn là

$$0 \geq A(a(t)g(x)).$$

Vậy tất cả các điều kiện của mệnh đề 1.1.7 được thỏa mãn.

Định lý được chứng minh.

Định lý 1.3.6.

Giả sử các giả thiết (H_1) – (H_3) được thỏa mãn. Giả sử thêm rằng:

$$\frac{\lambda_a}{g_0} < \frac{\lambda_b}{g_\infty},$$

ở đây λ_a, λ_b là các giá trị riêng chính của các bài toán (P_a), (P_b) tương ứng.

Khi đó với mọi $\lambda \in \left(\frac{\lambda_a}{g_0}, \frac{\lambda_b}{g_\infty}\right)$ bài toán biên (1.19) có ít nhất một nghiệm dương.

(Ở đây chúng ta coi $\frac{\lambda_a}{g_0} = 0$ nếu $g_0 = \infty$, $\frac{\lambda_b}{g_\infty} = \infty$ nếu $g_\infty = 0$)

Chứng minh

Chúng ta sẽ chứng minh rằng:

$$\operatorname{Lim\,sup}_{\|x\| \to 0} \lambda(x) \leq \frac{\lambda_a}{g_0}, \tag{1.28}$$

$$\operatorname{Lim\,inf}_{\|x\| \to \infty} \lambda(x) \geq \frac{\lambda_b}{g_\infty}, \tag{1.29}$$

và áp dụng định lý 1.1.8 để đi đến khẳng định của định lý.

Để chứng minh (1.28) ta sẽ xét số m tùy ý thỏa $0 < m < g_0$.

Do $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{\varphi(x)} > m$ ta có thể chọn r sao cho

$$g(x) \geq m\varphi(x) \text{ với } 0 < x \leq r.$$

Nếu $x \in S$ với $\|x\| \leq r$ thì ta có

$$-\left(\varphi(x')\right)' = \lambda(x) f(t, x, x')$$

$$\geq \lambda(x) a(t) g(x) \geq \lambda(x) m a(t) \varphi(x),$$

và vì vậy $\lambda(x) m \leq \lambda_a$ do định lý 1.3.2.

Từ đó

$$\limsup_{\|x\|\to 0} \lambda(x) \leq \frac{\lambda_a}{m}.$$

Vì m có thể chọn tùy ý gần g_0 nên (1.28) đúng.

Bây giờ ta chứng minh (1.29). Cố định $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ và một số $m_1 > g_\infty$.

Do $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^{p-1}} < m_1$ nên có số R sao cho

$$g(x) < m_1 . x^{p-1} \text{ với } x \geq R.$$

Nếu $x \in S$ với $\|x\| \geq \dfrac{R}{\varepsilon^2}$ thì

$$x(t) \geq \|x\| t(1-t) \geq R \text{ với } t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon].$$

Do đó

$$g(x(t)) < m_1 [x(t)]^{p-1} \text{ với } t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon].$$

Nhân (1.19) với x và lấy tích phân từng phần ta đi đến

$$\int_0^1 |x'(t)|^p dt = \lambda \int_0^1 f(t, x(t), x'(t)) x(t) dt$$

$$\leq \lambda \int_0^1 \left[b(t) g(x(t)) + \beta |x'(t)|^q \right] x(t) dt$$

$$\le \lambda\left[m_1\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} b(t)x^p(t)dt + \int_E b(t)g(x(t))x(t)dt + \beta\int_0^1 \frac{x^{q+1}(t)}{t^q(1-t)^q}dt\right], \qquad (1.30)$$

ở đây $E = [0,\varepsilon] \cup [1-\varepsilon,1]$. Đặt $M = \sup\{g(x) : 0 \le x \le R\}$.

Ta có

$$g(x) \le M + m_1 x^{p-1} \text{ với mọi } x \in [0,\infty)$$

và vì vậy

$$\int_E b(t)g(x(t))x(t)dt \le \|b\|_\infty \left(M.\|x\| + m_1\|x\|^p\right)2\varepsilon . \qquad (1.31)$$

Đặt

$$h(x) = \int_0^1 b(t)x^p(t)dt, \quad k = \int_0^1 b(t)t^p(1-t)^p dt .$$

Ta có theo định lý 1.1.9 $h(x) \ge k\|x\|^p$. Từ (1.21), (1.30 và (1.31) suy ra

$$\lambda_b \le \frac{\int_0^1 \left|x^{/}(t)\right|^p dt}{h(x)}$$

$$\le \lambda\left[m_1 + \frac{2\varepsilon\|b\|_\infty}{k}\left(M.\|x\|^{1-p} + m_1\right) + \beta\frac{\|x\|^{q+1-p}}{k}\int_0^1 \frac{dt}{t^q(1-t)^q}\right].$$

Vì $1-p<0$, $q+1-p<0$, ta suy ra

$$\lambda_b \le \operatorname*{Lim\,inf}_{\|x\|\to\infty} \lambda(x).m_1\left(1 + \frac{2\varepsilon\|b\|_\infty}{k}\right).$$

Bằng cách cho $\varepsilon \to 0$ và sau đó $m_1 \to g_\infty$, ta có (1.29).

Định lý được chứng minh.

Định lý 1.3.7.

Giả sử các giả thiết (H_1) – (H_3) được thỏa mãn với $\beta = 0$ trong (1.25), tức là:

$$\alpha(t)g(x) \le f(t,x,x') \le b(t)g(x), \tag{1.32}$$

với $(t,x,x') \in [0,1] \times IR_+ \times IR$. *Giả thiết thêm rằng:*

$$\frac{\lambda_a}{g_\infty} < \frac{\lambda_b}{g_0}.$$

Khi đó bài toán biên (1.19) có ít nhất một nghiệm dương với mọi

$$\lambda \in \left(\frac{\lambda_a}{g_\infty}, \frac{\lambda_b}{g_0}\right).$$

<u>Chứng minh</u>

Trước tiên ta chứng minh

$$\liminf_{\|x\| \to 0} \lambda(x) \ge \frac{\lambda_b}{g_0}. \tag{1.33}$$

Xét số $m > g_0$ và chọn $r > 0$ sao cho

$$\frac{g(x)}{\varphi(x)} < m \quad \text{khi} \quad x \in (0,r).$$

Với $x \in S$, $\|x\| < r$ ta có

$$-(\varphi(x'))' = \lambda(x)f(t,x,x') \le \lambda(x)b(t)g(x)$$

$$\le \lambda(x)b(t)m\varphi(x).$$

Do đó $\lambda_b < \lambda(x)m$ theo định lý 1.3.2.

Từ đây ta có

$$\liminf_{\|x\| \to \infty} \ge \frac{\lambda_b}{m}.$$

Cho $m \to g_0$ ta có (1.33).

Tiếp theo ta sẽ chứng minh

$$\limsup_{\|x\| \to \infty} \lambda(x) \le \frac{\lambda_a}{g_\infty}. \tag{1.34}$$

Cố định $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ và $m_1 < g_\infty$. Chọn R lớn sao cho

$$g(x) > m_1\varphi(x) \quad \text{với} \quad x \geq R.$$

Nếu $x \in S$ và $\|x\| \geq \dfrac{R}{\varepsilon^2}$ ta có $x(t) \geq R$ với $t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Từ đó

$$-\left(\varphi(x')\right)' = \lambda(x)f(t,x,x') \geq \lambda(x)a(t)g(x)$$

$$\geq \lambda(x)m_1 a_\varepsilon(t)\varphi(x) \quad \text{trong} \quad (0,1). \qquad (1.35)$$

ở đây $a_\varepsilon(t) = a(t)$ nếu $t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ và $a_\varepsilon(t) = 0$ nếu $t \in [0,\varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1]$.

Rõ ràng $a_\varepsilon \to a$ trong $L(0,1)$ khi $\varepsilon \to 0$. Giả sử λ_ε là giá trị riêng chính của bài toán $\left(P_{a_\varepsilon}\right)$.

Khi đó từ (1.35) và định lý 1.3.2 ta có $\lambda(x)m_1 < \lambda_\varepsilon$.

Vì vậy

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{\|x\| \to \infty} \lambda(x) \leq \frac{\lambda_\varepsilon}{m_1}.$$

Bằng cách cho $\varepsilon \to 0$ và $m_1 \to g_\infty$ ta nhận được (1.34) vì theo định lý 1.3.4 ta có $\lambda_\varepsilon \to \lambda_a$. Bây giờ khẳng định của định lý được suy ra từ (1.33), (1.34) và định lý 1.1.8.

Nhận xét 1.3.8.

1. Trong trường f không phụ thuộc x' và thỏa mãn các giả thiết tương tự (H_1) – (H_3), các tác giả của bài báo [1] đã nhận được khoảng giá trị riêng sau đây

$$\left(\frac{1}{g_\infty \varphi(\gamma A_2)}, \frac{1}{g_0 \varphi(A_1)}\right),$$

ở đây:

$$A_1 = \max\left\{\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi^{-1}\left(\int_s^{\frac{1}{2}} b(r)dr\right)ds,\ \int_{\frac{1}{2}}^{1} \varphi^{-1}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{s} b(r)dr\right)ds\right\}$$

và γ, A_2 là các số được xác định thích hợp. Ta chứng tỏ $\dfrac{1}{g_0\varphi(A_1)} \le \dfrac{\lambda_b}{g_0}$.

Thật vậy, từ sự định nghĩa của A_1 và (1.20) ta thấy rằng $A\big(b(t)\varphi(1)\big) \le A_1.1$ hoặc một cách tương đương:

$$A\left(\frac{1}{\varphi(A_1)}b(t)\varphi(1)\right) \le 1.$$

Như vậy: $\dfrac{1}{\varphi(A_1)} \le \lambda_b$ theo nhận xét 1.3.3.

2. Phương pháp của chúng tôi có thể áp dụng để nghiên cứu kết quả về tồn tại 2 nghiệm. Chẳng hạn nếu $g_0 = g_\infty = \infty$ thì từ (1.28) và (1.34) ta có

$$\operatorname*{Lim}_{\|x\|\to 0} \lambda(x) = \operatorname*{Lim}_{\|x\|\to\infty} \lambda(x) = 0.$$

Nếu ta tìm được một số r_0 sao cho

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{\|x\|\to r_0} \lambda(x) = \lambda_0 > 0$$

thì do một kết quả tương tự định lý 1.1.8 ta kết luận được với mọi $\lambda \in (0, \lambda_0)$ bài toán biên (1.19) có ít nhất hai nghiệm dương x_1, x_2 thỏa mãn $\|x_1\| < r_0 < \|x_2\|$.

§4. NGHIỆM TUẦN HOÀN CỦA MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH ÔTÔNÔM CẤP 2.

Trong mục này của luận án chúng tôi sẽ khảo sát bài toán biên phụ thuộc tham số sau:

$$x'' + \lambda^2 f\left[x, \frac{1}{\lambda}x'\right] = 0, \qquad \text{trong} \quad (0,1), \tag{1.36}$$

$$x(0) = x(1) = 0.$$

Chúng tôi sẽ chứng minh sự tồn tại nhánh liên tục không bị chặn các nghiệm dương của (1.36) và sự tồn tại khoảng các giá trị λ để (1.36) có nghiệm.

Việc nghiên cứu bài toán biên (1.36) xuất phát từ việc tìm nghiệm tuần hoàn (chu kỳ chưa biết) của phương trình ôtônôm cấp 2:

$$y'' + f(y, y') = 0. \qquad (1.37)$$

Thật vậy, giả sử hàm $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là hàm lẻ đối với biến thứ nhất.

Khi đó từ nghiệm (λ, x) của bài toán (1.36) ta có thể xây dựng nghiệm y với chu kỳ 2λ của bài toán (1.37) như sau:

Trước hết ta mở rộng hàm $x(t)$ lên đoạn $[-1, 0]$ bằng cách đặt $x(t) = -x(-t)$, thì do tính lẻ của f hàm nhận được sẽ thỏa phương trình (1.36) trên $[-1, 1]$ và $x(1) = x(-1) = 0$. Tiếp theo ta mở rộng hàm nhận được lên $\mathbb{R}$ để có hàm chu kỳ 2. Khi đó hàm $y(t) = x\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ sẽ là nghiệm của (1.37) với chu kỳ 2λ.

Bài toán biên (1.36) được đưa về phương trình toán tử:

$$x(t) = \lambda^2 \int_0^1 G(t,s) f\left[x(s)\,,\ \frac{1}{\lambda}x'(s)\right]ds := F(\lambda, x), \qquad (1.38)$$

với

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s) & \text{nếu } 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t) & \text{nếu } 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$$

Cùng với bài toán phi tuyến $F(\lambda, x)$ ta xét các toán tử tuyến tính

$$\begin{aligned} Bx(t) &= \int_0^1 G(t,s)\,x(s)ds, \\ B_\varepsilon x(t) &= \int_0^1 G(t,s)\,a_\varepsilon(s)x(s)ds, \end{aligned} \qquad (1.39)$$

trong đó $a_\varepsilon(t) = 1$ nếu $t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $a_\varepsilon(t) = 0$ trên $[0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1]$.

Ta biết B có giá trị riêng lớn nhất là $\lambda_1 = \frac{1}{\pi^2}$, giá trị này có tính chất đặc biệt. Nó trùng với bán kính phổ $r(B)$ của toán tử B và

$$\frac{1}{\lambda_1} = \pi^2 = \inf\left\{\frac{\int_0^1 \left(x'(t)\right)^2 dt}{\int_0^1 x^2(t)dt} : x \in W_0^{1,2}(0,\ 1),\ x \neq 0\right\}. \qquad (1.40)$$

Chú ý rằng các toán tử B, B_ε được xét ở mục này là trường hợp riêng của các toán tử B, B_ε xét ở §2, do đó định lý 1.2.1 đúng cho B, B_ε ở (1.39).

Chúng ta vẫn xét (1.38) trong $C[0,1]$ với thứ tự sinh bởi nón K các hàm không âm và tìm nghiệm trong nón P các hàm lõm, không âm, bằng 0 tại $t = 0, t = 1$.

Ta đặt các giả thiết sau lên hàm f.

(H_1) $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ liên tục, $f(0, x') = 0\ \forall x' \in R$ và tồn tại các hàm liên tục $g_1, g_2: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ không bằng 0 trên mọi khoảng và các số $c > 0,\ q \in (0, 1)$ sao cho

$$g_1(x) \le f(x, x') \le g_2(x) + c.|x'|^q.$$

(H_2) Nếu $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, \infty),\ \lambda_1 \neq \lambda_2$ thì không tồn tại hàm $x \in P \setminus \{\theta\}$ sao cho (λ_1, x) và (λ_2, x) cùng là nghiệm của (1.36).

Dùng các lý luận khi đưa bài toán (1.19) về (1.27), từ giả thiết (H_1) ta có thể chứng minh rằng ánh xạ $F(\lambda, x)$ trong (1.38) tác động từ $(0,\infty) \times P$ vào P và hoàn toàn liên tục.

<u>Nhận xét 1.4.1.</u>

Điều kiện (H_2) không phải là quá ngặt. Chẳng hạn nó được thỏa mãn nếu hàm f có đạo hàm riêng theo biến thứ 2 và

$$2f(x, x') - x'\frac{\partial}{\partial x'}f(x, x') > 0\ ,\ \ \forall x > 0\ ,\ \forall x' \in \mathbb{R}.$$

Thật vậy, khi đó ta có

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\lambda^2 f\left(x,\frac{1}{\lambda}x'\right)\right)=2\lambda f\left(x,\frac{1}{\lambda}x'\right)-x'\frac{\partial}{\partial x'}f\left(x,\frac{1}{\lambda}x'\right)>0.$$

Do đó hàm $\lambda\mapsto\lambda^2 f\left(x,\frac{1}{\lambda}x'\right)$ là hàm tăng và điều kiện (H_2) được nghiệm đúng.

Định lý 1.4.2.

Giả sử điều kiện (H_1) được thỏa mãn. Khi đó tập S các nghiệm dương của phương trình (1.38) là một nhánh liên tục không bị chặn xuất phát từ θ.

Chứng minh

Xét tùy ý tập mở, bị chặn $G\ni\theta$. Để chứng minh $S\cap\partial G\neq\phi$ ta cũng sử dụng mệnh đề 1.1.7. Lý luận tương tự như ở chứng minh định lý 1.3.5 ta có thể chỉ ra rằng điều kiện ii) trong mệnh đề 1.1.7

$$\left(x-\mu x_0=F(\lambda_2,x),\quad x\in P\cap\partial G\right)\quad\Rightarrow\mu<0$$

sẽ được thỏa mãn với λ_2 đủ lớn.

Tiếp theo ta kiểm tra rằng điều kiện i) của mệnh đề 1.1.7

$$\left(\mu x=F(\lambda_1,x),\ x\in P\cap\partial G\right)\quad\Rightarrow\mu<1$$

đúng với λ_1 đủ nhỏ. Thật vậy, giả sử m, M là các số dương thỏa:

$$0<m\le\|x\|\le M\ ,\ \forall x\in P\cap\partial G.$$

Nếu

$$\mu x=F(\lambda,x)\ ,\ x\in P\cap\partial G$$

thì theo điều kiện (H_1) và định lý 1.1.9

$$\mu\|x\|\le\lambda^2\int_0^1 G(t,s)\left[g_2(x(s))+c\frac{|x'(s)|^q}{\lambda^q}\right]ds$$

$$\le\lambda^2\int_0^1\left[g_2(x(s))+c\frac{x^q(s)}{\lambda^q s^q(1-s)^q}\right]ds$$

hay $$\mu m \le \lambda^2 \int_0^1 \left[c_1 + \frac{cM^q}{\lambda^q s^q (1-s)^q} \right] ds,$$

trong đó $c_1 = \sup\{g(u):\ 0 \le u \le M\}$.

Từ đây ta có $\mu < 1$ khi λ đủ nhỏ.

Định lý được chứng minh.

Định lý 1.4.3.

Giả sử các giả thiết (H_1), (H_2) được thỏa mãn và hơn nữa ta có

(H_3) $$\lim_{x\to 0} \frac{g_1(x)}{x} = a_0 > a_\infty = \lim_{x\to\infty} \frac{g_2(x)}{x}.$$

Khi đó bài toán (1.38) có nghiệm trong $P \setminus \{\theta\}$ với mỗi giá trị λ thỏa mãn

$$\lambda \in \left(\frac{\pi}{\sqrt{a_0}}, \frac{\pi}{\sqrt{a_\infty}} \right).$$

Chứng minh

Ta sẽ chứng minh rằng tất cả các điều kiện của định lý 1.1.8 được nghiệm đúng cho bài toán (1.38). Điều kiện 1) được chứng minh trong định lý 1.4.2. Điều kiện 2) được suy từ giả thiết (H_2). Tiếp theo ta kiểm tra điều kiện 3) của định lý 1.1.8.

Giả sử: $x = F(\lambda, x)$, $\|x\| \in [r, R]$. Ta có

$$x(t) \le \lambda^2 \int_0^1 G(t,s) \left[g_2(x(s)) + \frac{c}{\lambda^q} \cdot \frac{\|x\|^q}{s^q (1-s)^q} \right] ds$$

$$\Rightarrow \quad r \le \int_0^1 \left(\lambda^2 c_1 + \lambda^{2-q} c. \frac{R^q}{s^q (1-s)^q} \right) ds,$$

với $c_1 = \sup\{g_2(x) \mid x \in [0, R]\}$.

Từ đây ta thấy tập $A = \{\lambda(x) : x \in S,\ \|x\| \in [r, R]\}$ bị chặn dưới bởi số dương. Nếu A không bị chặn trên thì ta tìm được các dãy $\{x_n\} \subset S$, $\lambda_n \to \infty$ sao cho

$$x_n = F(\lambda_n, x_n), \quad \|x_n\| \in [r, R], \qquad n=1,2,...$$

Lặp lại lý luận dùng để chứng minh định lý 1.2.2 và 1.3.5 ta tìm được dãy con $\{x_{n_k}\}$ hội tụ tại mọi điểm của (0, 1) về hàm x liên tục trên $(0,1)$ và thỏa $x(t) \geq rt(1-t)$. Khi đó qua giới hạn trong bất đẳng thức:

$$\frac{x_{n_k}(t)}{\lambda_{n_k}^2} \geq \int_0^1 G(t,s) g_1\left(x_{n_k}(s)\right) ds ,$$

ta gặp điều vô lý

$$0 \geq \int_0^1 G(t,s) g_1\left(x(s)\right) ds \qquad \forall t \in [0,1].$$

Vậy điều kiện 3) trong định lý 1.1.8 được nghiệm đúng.

Cuối cùng để kiểm tra điều kiện 4) trong định lý 1.1.8 được thỏa mãn ta sẽ chỉ ra rằng:

$$\operatorname{Lim}_{\|x\|\to 0} \sup \lambda(x) \leq \frac{\pi}{\sqrt{a_0}}, \tag{1.41}$$

$$\operatorname{Lim}_{\|x\|\to \infty} \inf \lambda(x) \geq \frac{\pi}{\sqrt{a_\infty}}. \tag{1.42}$$

Trước hết ta chứng minh (1.41). Xét số dương $m < \sqrt{a_0}$. Do $\operatorname{Lim}_{x\to 0} \frac{g_1(x)}{x} = a_0 > m^2$ nên tồn tại số $r > 0$ thỏa mãn

$$g_1(x) \geq m^2 x, \quad \forall x \in [0, r].$$

Với $x \in S$, $\|x\| \leq r$ ta có

$$x(t) \geq \lambda^2(x) \int_0^1 G(t,s) g_1\left(x(s)\right) ds$$

$$\geq \lambda^2(x) m^2 \int_0^1 G(t,s) x(s) ds.$$

Do đó $\lambda^2(x)m^2 \le \pi^2$ theo kết quả của định lý 1.2.1 áp dụng cho ánh xạ B trong (1.39). Từ đây ta có

$$\operatorname{Lim\,sup}_{\|x\|\to 0} \lambda(x) \le \frac{\pi}{m}.$$

Cho $m \to \sqrt{a_0}$ ta có (1.41).

Để chứng minh (1.42) ta xét số $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ và số $m_1 > \sqrt{a_\infty}$. Do $\operatorname{Lim}_{x\to\infty} \frac{g_2(x)}{x} = a_\infty < m_1^2$ nên tồn tại số $r > 0$ sao cho

$$g_2(x) < m_1^2 x \quad , \quad \forall x \ge r.$$

Đặt $M = \sup\{g_2(x) : 0 \le x \le r\}$ ta có

$$g_2(x) < M + m_1^2 x \quad , \quad \forall x \in [0, \infty).$$

Xét $x \in S, \|x\| \ge \frac{r}{\varepsilon^2} > r$. Nhân hai vế của (1.36) với $x(t)$ và lấy tích phân từng phần ta có

$$\int_0^1 (x'(t))^2 dt = \lambda^2 \int_0^1 f\left[x(t), \frac{1}{\lambda} x'(t)\right] x(t)dt$$

$$\le \lambda^2 \int_0^1 \left[g_2(x(t)) + \frac{c(x(t))^q}{\lambda^q t^q (1-t)^q} \right] x(t)dt.$$

Ta có $\quad x(t) \ge \|x\| t(1-t) \ge \frac{r}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 = r$ khi $t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ nên

$$\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} g_2(x(t)) x(t)dt < \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} m_1^2 x^2(t)dt \le \int_0^1 m_1^2 x^2(t)dt.$$

Đặt $E = [0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1]$ thì ta có

$$\int_E g_2(x(t)) x(t)dt \le 2\varepsilon \|x\| (M + m_1^2.\|x\|).$$

Do đó ta có

$$\int_0^1 \left(x'(t)\right)^2 dt \le \lambda^2\left[m_1^2\int_0^1 x^2(t)dt + 2\varepsilon\|x\|\left(M + m_1^2\|x\|\right)\right] + c_1\lambda^{2-q}\|x\|^{q+1}. \quad (1.43)$$

Đặt

$$h(x) = \int_0^1 x^2(t)dt\ , \qquad k = \int_0^1 t^2(1-t)^2 dt\,.$$

Chú ý rằng $h(x) \ge k.\|x\|^2$, từ (1.40), (1.43) ta có

$$\pi^2 \le \frac{1}{h(x)}\int_0^1 \left(x'(t)\right)^2 dt$$

$$\le \lambda^2\left[m_1^2 + \frac{2\varepsilon}{k}\left(m_1^2 + \frac{M}{\|x\|}\right)\right] + c_1\frac{\lambda^{2-q}}{k}\|x\|^{q-1}. \qquad (1.44)$$

Nếu $\operatorname*{Lim\,inf}_{\|x\|\to\infty} \lambda(x) = \infty$ thì hiển nhiên (1.42) đúng. Trường hợp ngược lại thì từ (1.44) ta có

$$\pi^2 \le \operatorname*{Lim\,inf}_{\|x\|\to\infty} \lambda^2(x).m_1^2.\left(1 + \frac{2\varepsilon}{k}\right). \qquad (1.45)$$

Cho $\varepsilon \to 0$ rồi $m_1 \to \sqrt{a_\infty}$, từ (1.45) ta được (1.42).

Định lý được chứng minh.

<u>Định lý 1.4.4.</u>

Giả sử các giả thiết (H_1), (H_2) được thỏa mãn với c = 0 trong điều kiện (H_1) và hơn nữa ta có

(H_4) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{g_2(x)}{x} = a_0 < a_\infty = \lim_{x\to\infty}\frac{g_1(x)}{x}.$

Khi đó bài toán (1.38) có nghiệm trong $P \setminus \{\theta\}$ với mọi λ thỏa mãn

$$\lambda \in \left(\frac{\pi}{\sqrt{a_\infty}},\ \frac{\pi}{\sqrt{a_0}}\right).$$

<u>Chứng minh</u>

Lý luận tượng tự trong chứng minh định lý 1.4.3 ta thấy các giả thiết 1), 2), 3) của định lý 1.1.8 được nghiệm đúng. Ta sẽ chứng minh giả thiết 4) trong định lý 1.1.8 được thỏa mãn ở dạng:

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{\|x\|\to 0} \lambda(x) \geq \frac{\pi}{\sqrt{a_0}}, \tag{1.46}$$

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{\|x\|\to \infty} \lambda(x) \leq \frac{\pi}{\sqrt{a_\infty}}. \tag{1.47}$$

Để chứng minh (1.46) ta xét số $m > \sqrt{a_0}$. Ta có

$$\operatorname*{Lim}_{x\to 0} \frac{g_2(x)}{x} < m^2$$

nên có số $r > 0$ sao cho

$$g_2(x) \leq m^2 x, \qquad \forall x \in [0, r].$$

Với $x \in S$, $\|x\| \leq r$ ta có

$$x(t) \leq \lambda^2(x) \int_0^1 G(t,s) g_2(x(s)) ds$$

$$\leq \lambda^2(x) m^2 \int_0^1 G(t,s) x(s) ds = \lambda^2(x) m^2 B(x).$$

Do đó

$$\frac{1}{\lambda^2(x) m^2} \leq r(B) = \frac{1}{\pi^2}$$

theo định lý 1.2.1. Từ đây ta có

$$\operatorname*{Lim\,inf}_{\|x\|\to 0} \lambda(x) \geq \frac{\pi}{m}.$$

Cho $m \to \sqrt{a_0}$ ta có (1.46).

Bây giờ ta chứng minh (1.47). Xét số $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ và số $k < \sqrt{a_\infty}$. Ta chọn r đủ lớn sao cho

$$g_1(x) > k^2 x \qquad \forall x \geq r.$$

Với $x \in S$, $\|x\| \geq \dfrac{r}{\varepsilon^2}$ ta có

$$x(t) \geq \|x\| t(1-t)$$

$$\geq \frac{r}{\varepsilon^2}.\varepsilon.\varepsilon = r \qquad \text{khi } t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon].$$

Do đó

$$g_1(x(t)) \geq k^2 x(t) \qquad \text{khi } t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$$

$$g_1(x(t)) \geq k^2 a_\varepsilon(t) x(t) \qquad \forall t \in [0,1],$$

trong đó $a_\varepsilon(t) = 1$ nếu $t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $a_\varepsilon(t) = 0$ nếu $t \in [0, \varepsilon) \cup (1-\varepsilon, 1]$.

Từ đây ta có

$$x(t) \geq \lambda^2(x) \int_0^1 G(t,s) g_1(x(s)) ds$$

$$\geq \lambda^2(x) k^2 \int_0^1 G(t,s) a_\varepsilon(s) x(s) ds = \lambda^2(x) k^2 B_\varepsilon(x)$$

và do đó, theo định lý 1.2.1 ta có

$$\frac{1}{\lambda^2(x) k^2} \geq r(B_\varepsilon).$$

Do vậy

$$\operatorname*{Lim\,sup}_{\|x\| \to \infty} \lambda(x) \leq \frac{1}{k\sqrt{r(B_\varepsilon)}}.$$

Cho $\varepsilon \to 0$, $k \to \sqrt{a_\infty}$ và chú ý rằng

$$\lim_{\varepsilon \to 0} r\left(B_{\varepsilon}\right) = r(B) = \frac{1}{\pi^2},$$

ta có (1.47) được chứng minh.

CHƯƠNG 2

NGHIỆM CỰC TRỊ CỦA MỘT SỐ BÀI TOÁN BIẾN PHÂN

§1. CÁC KHÁI NIỆM VÀ KẾT QUẢ ĐƯỢC SỬ DỤNG.

A. Điểm bất động của ánh xạ tăng

Giả sử X là không gian Banach trên trường số thực có thứ tự được sinh bởi một nón. Ta sẽ ký hiệu $[u,\infty)$ là tập $\{x \in X : x \geq u\}$.

- Ta nói tập $M \subset X$ là có hướng nếu

$$\forall x_1, x_2 \in M\ \exists x \in M : x_1 \leq x,\ x_2 \leq x.$$

- Ánh xạ $T : M \subset X \to X$ được gọi là ánh xạ tăng nếu

$$\forall x, y \in M,\ x \leq y \Rightarrow T(x) \leq T(y).$$

Trong chương này chúng tôi sẽ áp dụng một định lý điểm bất động của ánh xạ tăng để chứng minh sự tồn tại nghiệm cực trị cho một bài toán tìm nghiệm yếu của phương trình elliptic và cho một lớp bất đẳng thức biến phân.

Mệnh đề sau đây là sự kết hợp của hai kết quả trong [8] và trong [27].

Mệnh đề 2.1.1.

Giả sử X là không gian Banach có thứ tự sinh bởi một nón, $M \subset X$

là tập đóng và $T : M \to M$ là ánh xạ tăng thỏa mãn các điều kiện sau:

i) Tập $M_0 = \{u \in M :\ u \leq Tu\}$ khác trống và có hướng.

ii) Với mọi dãy tăng $\{u_n\} \subset M_0$ thì dãy $\{Tu_n\}$ hội tụ.

Khi đó, với mỗi $u \in M_0$ *thì ánh xạ* T *có trong* $M \cap [u,\infty)$ *điểm bất động lớn nhất* u^* *và điểm bất động nhỏ nhất* u_*, *nghĩa là, nếu* $v \in M \cap [u,\infty)$ *là một điểm bất động của* T *thì* $u_* \le v \le u^*$.

<u>Ghi chú 2.1.2.</u>

Chúng tôi sẽ áp dụng mệnh đề 2.1.1 cho ánh xạ T tác động trong các không gian $X = L^p(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, với thứ tự sinh bởi nón các hàm không âm hầu khắp nơi. Với thứ tự này thì để chứng minh dãy tăng $\{Tu_n\}$ hội tụ, ta chỉ cần chứng minh nó bị chặn theo chuẩn.

<u>B. Không gian Sobolev</u>

Giả sử $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là một miền. Với $1 \le p < \infty$ và $m = 0, 1, 2, \ldots$ ta định nghĩa:

- $W^{m,p}(\Omega)$ là không gian các hàm $u \in L^p(\Omega)$ có đạo hàm suy rộng đến bậc m và $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ với mọi α mà $|\alpha| \le m$, Với m = 0, ta đặt $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Trong $W^{m,p}(\Omega)$ ta xét chuẩn:

$$\|u\|_{m,p} = \sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u\|_p ,$$

trong đó $\|\cdot\|_p$ là chuẩn trong $L^p(\Omega)$.

- $W_0^{m,p}(\Omega)$ là bao đóng của $C_c^\infty(\Omega)$ trong $W^{m,p}(\Omega)$. Ở đây $C_c^\infty(\Omega)$ là không gian các hàm có giá compắc trong Ω và có đạo hàm mọi hạng liên tục trên Ω.

Ta thường xét không gian $W_0^{1,p}(\Omega)$, trong $W_0^{1,p}(\Omega)$ ta sẽ xét chuẩn:

$$\|u\|_{1,p} = \|\nabla u\|_p .$$

Chuẩn này tương đương với chuẩn:

$$\|u\|_p + \|\nabla u\|_p .$$

Không gian $W^{1,2}(\Omega)$ còn được ký hiệu là $H^1(\Omega)$.

- Không gian liên hợp của $W^{1,p}(\Omega)$ là $W^{-1,p'}(\Omega)$ với $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ và $W^{-1,p'}(\Omega)$ được định nghĩa trong [16].

<u>Mệnh đề 2.1.3.</u> [9,16]

1) Khi $1<p<N$ *phép nhúng* $W^{1,p}(\Omega)\to L^{p^*}(\Omega)$ *là liên tục, với* $p^*=\frac{Np}{N-p}$ *và ta có*

$$L^{(p^*)'}(\Omega)\subset W^{-1,p'}(\Omega),$$

trong đó s' *là chỉ số liên hợp với* s *theo nghĩa* $\frac{1}{s}+\frac{1}{s'}=1$.

2) Nếu $u,v\in W^{1,p}(\Omega)$ *thì* $max(u,v)$, $min(u,v)$ *thuộc* $W^{1,p}(\Omega)$ *và*

$$D_i\big(max(u,v)\big)(x)=\begin{cases}D_iu(x), & \text{nếu } u(x)\geq v(x)\\ D_iv(x), & \text{nếu } v(x)\geq u(x),\end{cases}$$

$$D_i\big(min(u,v)\big)(x)=\begin{cases}D_iu(x), & \text{nếu } u(x)\leq v(x)\\ D_iv(x), & \text{nếu } v(x)\leq u(x).\end{cases}$$

Ở đây D_iu *là đạo hàm riêng suy rộng theo biến* x_i *của hàm* u.

Nói riêng ta có

$$D_iu^+(x)=\begin{cases}D_iu(x), & \text{nếu } u(x)>0\\ 0 & , \text{ nếu } u(x)\leq 0,\end{cases}$$

$$D_iu^-(x)=\begin{cases}0 & , \text{ nếu } u(x)\geq 0\\ D_iu(x) & , \text{ nếu } u(x)<0.\end{cases}$$

➲ **<u>Bất đẳng thức Gagliardo – Nirenberg</u>**

- Với $u\in W^{m,p}(\Omega)\cap L^q(\Omega)$ và $0\leq|\beta|\leq m-1$, ta có

$$\left\|D^\beta u\right\|_r\leq C.\|u\|_{m,p}^{\theta}.\|u\|_q^{1-\theta}$$

trong đó θ định bởi:

$$\frac{1}{r}=\frac{|\beta|}{N}+\theta\left(\frac{1}{p}-\frac{m}{N}\right)+(1-\theta).\frac{1}{q}.$$

- Với $\beta = 0,\ m = 1$, ta có

$$\|u\|_r \le C\|u\|_{1,p}^{\theta}.\|u\|_q^{1-\theta}.$$

§2. NGHIỆM YẾU CỰC TRỊ CỦA PHƯƠNG TRÌNH LOGISTIC.

Trong mục này chúng tôi xét phương trình logistic với sự khuếch tán phi tuyến:

$$-\Delta\left(v^n\right) = \lambda m(x)v - v^p \quad \text{trong } \Omega, \qquad (2.1)$$

$$v = 0 \quad \text{trên } \partial\Omega,$$

với $n > 1,\ p > 1$.

Bằng phép đổi biến $u = v^n$, phương trình (2.1) được đưa về phương trình:

$$-\Delta u = \lambda m(x)u^r - u^q \quad \text{trong } \Omega, \qquad (2.2)$$

$$u = 0 \quad \text{trên } \partial\Omega.$$

Ta xét sự tồn tại nghiệm yếu cực trị của (2.2) với các giả thiết:

$$\begin{cases} \Omega \subset |R^N\ (N \ge 3) \text{ là miền mở, bị chặn với biên trơn,} \\ \lambda \text{ là tham số dương, } \quad m(x) \in L^s(\Omega), \\ r < 1, \quad r < q. \end{cases}$$

Định nghĩa 2.2.1.

Xét phương trình:

$$-\Delta u = f(x,u) \quad \text{trong } \Omega, \qquad (2.3)$$

$$u = 0 \quad \text{trên } \partial\Omega,$$

với:

$\Omega \in |R^N$ là tập mở, bị chặn có biên trơn,

$f : \Omega \times |R \to |R$ là một hàm thỏa điều kiện Caratheodory.

1) Ta nói hàm $u \in H^1(\Omega)$ là một nghiệm yếu của (2.3) nếu

$$f(x,u) \in L^{\frac{2N}{(N+2)}}(\Omega),$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f(x,u)\varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

2) Ta nói hàm $u \in H^1(\Omega)$ là một nghiệm dưới của (2.3) nếu

$$f(x,u) \in L^{\frac{2N}{(N+2)}}(\Omega), \quad u \le 0 \text{ trên } \partial\Omega,$$

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx \le \int_\Omega f(x,u)\varphi dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \ge 0 \text{ h.k.n trên } \Omega.$$

<u>Mệnh đề 2.2.2.</u> [6]

Giả sử hàm $g : \Omega \times IR \to IR$ thỏa mãn điều kiện Caratheodory và các điều kiện sau:

i) Với mọi $x \in \Omega$ thì $g(x,0) = 0$ và hàm $u \mapsto g(x,u)$ là tăng.

ii) Với mọi $t > 0$ tồn tại hàm $h_t \in L^1(\Omega)$ sao cho

$$sup\{|g(x,u)| : |u| \le t\} \le h_t(x).$$

Thế thì với mọi $h \in H^{-1}(\Omega)$ bài toán biên

$$-\Delta u + g(x,u) = h \quad \text{trong } \Omega,$$

$$u = 0 \quad \text{trên } \partial\Omega,$$

có duy nhất nghiệm yếu u thỏa mãn điều kiện $ug(x,u) \in L^1(\Omega)$.

- Giả sử các dữ kiện trong bài toán (2.2) thỏa mãn các điều kiện sau:

(H_1) $m(x) \in L^s(\Omega)$ với $s \ge \dfrac{2N(q+1)}{2(q+1) + N(q+1-2r)}$, $r < q$, $r < 1$.

(H_2) $m(x) \ge 0$ h.k.n trong Ω và tồn tại số $m_0 > 0$, tập Ω' có biên trơn sao cho

$$\overline{\Omega'} \subset \Omega; \quad m(x) \ge m_0, \ \forall x \in \Omega'.$$

Gọi u_1 là hàm riêng ứng với giá trị riêng thứ nhất của bài toán biên

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{trong } \Omega', \qquad (2.4)$$

$$u = 0 \quad \text{trên } \partial\Omega'$$

và u_0 là hàm bằng 0 trên $\Omega \setminus \Omega'$, bằng cu_1 trên Ω' với $c > 0$ đủ nhỏ.

Định lý 2.2.3.

Giả sử các điều kiện (H_1), (H_2) được thỏa mãn và hàm u_0 được định nghĩa như trên. Khi đó phương trình (2.2) có nghiệm lớn nhất và nhỏ nhất trong $[u_0, \infty)$.

Chứng minh

Bước 1: Ta sẽ chứng minh rằng hàm u_0 nói trong phát biểu định lý sẽ

là một nghiệm dưới của (2.2).

Gọi λ_1 là giá trị riêng đầu của bài toán biên (2.4) và đặt

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u_1(x)\,, & x \in \Omega' \\ 0\,, & x \in \Omega \setminus \Omega', \end{cases}$$

thì theo [4] ta có $-\Delta\bar{u} \le \lambda_1 \bar{u}$, theo nghĩa yếu, nghĩa là:

$$\int_\Omega \nabla\bar{u}\nabla\varphi dx \le \lambda_1 \int_\Omega \bar{u}\varphi dx\,,\ \ \forall \varphi \in H^1(\Omega),\ \ \varphi \ge 0\,.$$

Do đó để $u_0 = c\bar{u}$ là nghiệm dưới của (2.2) ta chỉ cần chọn c sao cho

$$\lambda_1 \int_\Omega c\bar{u}\varphi dx \le \int_\Omega \left[\lambda m(x)\left(c\bar{u}(x)\right)^r - \left(c\bar{u}(x)\right)^q\right]\varphi dx,\ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \ge 0\,, \quad (2.5)$$

hay

$$\lambda_1 \int_{\Omega'} cu_1\varphi dx \le \int_{\Omega'} \left[\lambda m(x)\left(cu_1(x)\right)^r - \left(cu_1(x)\right)^q\right]\varphi dx,\ \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \varphi \ge 0.$$

Ta có

$$\lambda m(x)\left(cu_1(x)\right)^r - \left(cu_1(x)\right)^q - \lambda_1 cu_1(x) \ge$$

$$\left(cu_1(x)\right)^r\left[\lambda m_0 - \left(cu_1(x)\right)^{q-r} - \lambda_1\left(cu_1(x)\right)^{1-r}\right] \ge 0,\ \ \forall x \in \Omega',$$

khi $c > 0$ đủ nhỏ vì $q - r > 0,\ 1 - r > 0$ và $u_1(x)$ bị chặn trên Ω'. Như vậy ta có thể chọn c đủ nhỏ để (2.5) đúng hay $u_0 = c\bar{u}$ là nghiệm dưới của (2.2).

Bước 2: Đưa về bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ tăng.

Với mỗi $u \in L^{q+1}(\Omega)$ ta xét bài toán tìm nghiệm yếu của bài toán:

$$-\Delta z + z^q = \lambda m(x)u^r \qquad \text{trong } \Omega, \qquad (2.6)$$

$$z = 0 \qquad \text{trên } \partial\Omega.$$

Ta sẽ áp dụng mệnh đề 2.2.2 cho bài toán (2.6). Hiển nhiên hàm $g(x,z) = z^q$ thỏa mãn các điều kiện i), ii) của mệnh đề 2.2.2.

Vì $u \in L^{q+1}(\Omega)$, $m \in L^s(\Omega)$ ta dễ dàng suy ra

$$m(x).u^r \in L^t(\Omega), \quad \text{với } t = \frac{s(q+1)}{rs+q+1}.$$

Từ điều kiện (H_1) của định lý ta có $t \geq \frac{2N}{N+2}$, do đó

$$m(x)u^r \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega).$$

Như vậy, tất cả các điều kiện của mệnh đề 2.2.2 được thỏa mãn và bài toán (2.6) có duy nhất nghiệm yếu $z \in H_0^1(\Omega)$ sao cho $z^{q+1} \in L^1(\Omega)$.

Xét ánh xạ T đặt tương ứng mỗi $u \in L^{q+1}$ với nghiệm duy nhất z của (2.6) thì ta có T là một ánh xạ từ L^{q+1} vào L^{q+1} và u là nghiệm yếu của (2.2) khi và chỉ khi u là điểm bất động của ánh xạ T.

- Ta sẽ chứng minh T là ánh xạ tăng.

Giả sử $u, v \in L^{q+1}(\Omega)$ và $u \leq v$. Với $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, theo định nghĩa của T và khái niệm nghiệm yếu ta có

$$\int_\Omega \nabla Tu \nabla \varphi dx = \int_\Omega \left[\lambda m(x)u^r - (Tu)^q\right]\varphi dx,$$

$$\int_\Omega \nabla Tv \nabla \varphi dx = \int_\Omega \left[\lambda m(x)v^r - (Tu)^q\right]\varphi dx,$$

và do đó

$$\int_\Omega \nabla(Tu-Tv)\nabla\varphi dx = \int_\Omega \left[\lambda m(x)\left(u^r - v^r\right) - \left((Tu)^q - (Tv)^q\right)\right]\varphi dx. \quad (2.7)$$

Theo mệnh đề 2.1.3 ta có $(Tu-Tv)^+ \in H_0^1(\Omega)$ và dễ dàng kiểm tra:

$$\left[(Tu)^q - (Tv)^q \right](Tu-Tv)^+ \geq 0 \text{ trong } \Omega.$$

Do đó, cho $\varphi = (Tu-Tv)^+$ trong (2.7) ta suy ra

$$\int_\Omega \nabla(Tu-Tv)\nabla(Tu-Tv)^+ dx \leq 0. \quad (2.8)$$

Mặt khác, với mọi $w \in H_0^1(\Omega)$ ta có theo mệnh đề 2.1.3

$$\int_\Omega \nabla w^+ \nabla w^- dx = 0. \quad (2.9)$$

Do vậy, từ (2.8) ta có

$$\int_\Omega \left|\nabla(Tu-Tv)^+\right|^2 dx = 0.$$

Từ đây, ta suy ra $\nabla(Tu-Tv)^+ = 0$ hay $(Tu-Tv)^+ = 0$ h.k.n trên Ω.

Điều này có nghĩa $Tu \leq Tv$ h.k.n trong Ω. Như vậy, $u \leq v$ kéo theo $Tu \leq Tv$.

- <u>Tiếp theo ta chứng minh</u>

$$u_0 \leq Tu_0. \quad (2.10)$$

Vì u_0 là nghiệm dưới của (2.2) nên ta có

$$\int_\Omega \nabla u_0 \nabla\varphi dx \leq \int_\Omega \left[\lambda m(x)u_0^r - u_0^q\right]\varphi dx, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega), \ \varphi \geq 0.$$

Kết hợp với

$$\int_\Omega \nabla Tu_0 \nabla\varphi dx = \int_\Omega \left[\lambda m(x)u_0^r - (Tu_0)^q\right]\varphi dx, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega),$$

ta được

$$\int_\Omega \nabla(u_0 - Tu_0)\nabla\varphi dx \leq -\int_\Omega \left[u_0^q - (Tu_0)^q\right]\varphi dx, \ \forall\varphi \in H_0^1(\Omega), \ \varphi \geq 0. \quad (2.11)$$

Cho $\varphi = (u_0 - Tu_0)^+$ trong (2.11) và chú ý rằng:

$$\left[u_0^q - (Tu_0)^q\right](u_0 - Tu_0)^+ \geq 0$$

ta được

$$\int_\Omega \nabla(u_0 - Tu_0)\nabla(u_0 - Tu_0)^+ dx \leq 0.$$

Lại sử dụng (2.9) ta được

$$\int_\Omega \left|\nabla(u_0 - Tu_0)^+\right|^2 dx = 0.$$

Từ đây ta suy ra $(u_0 - Tu_0)^+ = 0$ h.k.n hay $u_0 \leq Tu_0$.

Từ (2.10) và T là ánh xạ tăng ta thấy T biến tập đóng $[u_0, \infty)$ vào chính nó. Nghiệm yếu cực trị của (2.2) trên $[u_0, \infty)$ chính là các điểm bất động lớn nhất và nhỏ nhất của T trên $[u_0, \infty)$.

<u>Bước 3:</u> Chứng minh T có điểm bất động lớn nhất, nhỏ nhất trên $[u_0, \infty)$.

Ta sẽ kiểm tra rằng tất cả các điều kiện của mệnh đề 2.1.1 được thỏa mãn. Với $u_1, u_2 \in M_0 = \{u \in [u_0, \infty) : u \leq Tu\}$ ta đặt $u_3 = \max(u_1, u_2)$

thì ta có do tính tăng của T:

$$u_1 \leq Tu_1 \leq Tu_3 \quad , \quad u_2 \leq Tu_2 \leq Tu_3.$$

Từ đây ta có $u_3 \leq Tu_3$ hay $u_3 \in M_0$. Vậy M_0 là tập có hướng.

Để chỉ ra rằng ánh xạ T thỏa mãn điều kiện ii) của mệnh đề 2.1.1 ta chỉ cần chỉ ra rằng tập $T(M_0)$ bị chặn theo chuẩn trong $L^{q+1}(\Omega)$.

Với mỗi $u \in M_0$, ta có

$$\int_\Omega \nabla Tu \nabla\varphi dx = \int_\Omega \left[\lambda m(x)u^r - (Tu)^q\right]\varphi dx$$

$$\leq \int_\Omega \left[\lambda m(x)(Tu)^r - (Tu)^q\right]\varphi dx, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \ \varphi \geq 0.$$

Cho $\varphi = Tu$ ta được

$$\int_\Omega \left[|\nabla Tu|^2 + (Tu)^{q+1}\right]dx \le \int_\Omega \lambda m(x)(Tu)^{r+1}dx.$$

Dưới đây ta sẽ thấy $Tu \in L^{(r+1)s'}(\Omega)$, do đó áp dụng bất đẳng thức Holder cho vế phải ta có

$$\|Tu\|_H^2 + \|Tu\|_{q+1}^{q+1} \le \lambda \|m\|_s . \|Tu\|_{(r+1)s'}^{r+1}. \qquad (2.12)$$

trong đó $\|\cdot\|_t$ là chuẩn trong $L^t(\Omega)$, $\|u\|_H = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

- <u>Trường hợp $(r+1)s' \le q+1$</u>

  Do $Tu \in L^{q+1}(\Omega)$ ta có $Tu \in L^{(r+1)s'}(\Omega)$. Từ (2.12), ta có

$$\|Tu\|_{q+1}^{q+1} \le c\|Tu\|_{q+1}^{r+1}$$

với c là một hằng số dương. Từ đây và chú ý rằng $r<q$ ta suy ra $T(M_0)$ là tập bị chặn trong $L^{q+1}(\Omega)$.

- <u>Trường hợp $(r+1)s' > q+1$</u>

  Từ bất đẳng thức đặt lên chỉ số s trong điều kiện (H_1) của định lý ta suy ra

$$\frac{2N}{N+2} \le \frac{s(q+1)}{rs+q+1}. \qquad (2.13)$$

  Vì hàm $t \mapsto \dfrac{st}{(rs+t)}$ tăng nên từ (2.13) ta có

$$\frac{2N}{N+2} < \frac{s(r+1)s'}{rs+(r+1)s'} = \frac{(r+1)s'}{(r+1)s'-1},$$

$$\Rightarrow \frac{2N}{N-2} > (r+1)s'.$$

Như vậy ta có

$$q+1 < (r+1)s' < \frac{2N}{N-2}$$

và do đó ta có thể áp dụng bất đẳng thức Gagliardo – Nirenberg để có:

$$\|Tu\|_{(r+1)s'} \le C.\|Tu\|_H^t.\|Tu\|_{q+1}^{1-t}, \qquad (2.14)$$

trong đó số t được xác định từ điều kiện:

$$\frac{1}{1+q} - \frac{1}{(1+r)s'} = t\left(\frac{1}{1+q} - \frac{N-2}{2N}\right).$$

Như vậy ta cũng có $Tu \in L^{(r+1)s'}(\Omega)$. Từ (2.12) ta có

$$\|Tu\|_H \le C_1 \|Tu\|_{(r+1)s'}^{\frac{r+1}{2}}, \qquad (2.15)$$

$$\|Tu\|_{q+1} \le C_1 \|Tu\|_{(r+1)s'}^{\frac{r+1}{q+1}}.$$

Kết hợp (2.14) và (2.15) ta được

$$\|Tu\|_{(r+1)s'} \le C_2 \|Tu\|_{(r+1)s'}^{\frac{t(r+1)}{2} + \frac{(1-t)(r+1)}{q+1}}.$$

Chú ý rằng:

$$\frac{t(r+1)}{2} + \frac{(1-t)(r+1)}{q+1} < t + 1 - t = 1,$$

ta suy ra tập $T(M_0)$ bị chặn trong $L^{(r+1)s'}(\Omega)$ và do đó cũng bị chặn trong $L^{q+1}(\Omega)$.

Như vậy, ánh xạ T thỏa mãn tất cả các điều kiện của mệnh đề 2.1.1 và do đó nó có điểm bất động lớn nhất và nhỏ nhất trên $[u_0, \infty)$, chính là nghiệm yếu lớn nhất và nhỏ nhất của bài toán (2.2).

Định lý được chứng minh.

Định lý 2.2.4.

Giả sử các giả thiết của định lý 2.2.3 được thỏa mãn và u_0 là hàm được định nghĩa trong phát biểu của định lý 2.2.3. Gọi u_n là nghiệm yếu (duy nhất) của bài toán:

$$-\Delta u_n + u_n^q = \lambda m(x) u_{n-1}^r \text{ trên } \Omega,\ u_n = 0 \text{ trên } \partial\Omega \ (n \in IN).$$

Khi đó dãy $\{u_n\}$ hội tụ trong $H_o^1(\Omega)$ về nghiệm yếu nhỏ nhất của bài toán (2.2) trên $[u_0, \infty)$.

Chứng minh

Áp dụng mệnh đề 2.2.2 và lý luận ở phần đầu bước 2 trong chứng minh định lý 2.2.3 ta thấy hàm u_n được xác định duy nhất theo u_{n-1}.

Từ định nghĩa của ánh xạ T trong chứng minh định lý 2.2.3 và định nghĩa của u_n, ta suy ra $u_n = T(u_{n-1})$. Do $u_0 \le Tu_0$ nên dễ dàng chứng minh được $\{u_n\}$ là dãy tăng. Cũng theo chứng minh định lý 2.2.3 ta có $\{u_n\}$ bị chặn trong $L^{q+1}(\Omega)$. Do đó tồn tại giới hạn $y = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ h.k.n trong Ω và trong $L^{q+1}(\Omega)$.

Vì T là ánh xạ tăng, ta có $u_n \le Tu_n \le Ty \quad (n \in \mathbb{N})$. Theo định nghĩa nghiệm yếu ta có

$$\int_\Omega \nabla(Ty - u_n)\nabla\varphi dx = -\int_\Omega \left[(Ty)^q - u_n^q\right]\varphi dx + \lambda\int_\Omega m(x)\left(y^r - u_{n-1}^r\right)\varphi dx,$$

$$\forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Cho $\varphi = Ty - u_n$ và áp dụng bất đẳng thức Poincare ta có

$$c\int_\Omega (Ty - u_n)^2 dx \le \int_\Omega |\nabla(Ty - u_n)|^2 dx =$$

$$= -\int_\Omega \left[(Ty)^q - u_n^q\right](Ty - u_n)dx + \lambda\int_\Omega m(x)\left(y^r - u_{n-1}^r\right)(Ty - u_n)dx$$
$$\le \lambda\int_\Omega m(x)\left(y^r - u_{n-1}^r\right)(Ty - u_n)dx$$

Cho $n \to \infty$ và áp dụng định lý Beppo-Levi ta có $Ty=y$. Vậy y là một điểm bất động của T. Cũng từ bất đẳng thức trên ta suy ra $\lim u_n = y$ trong $H_0^1(\Omega)$.

Ta còn phải chứng minh y là điểm bất động nhỏ nhất của T trên $[u_0, \infty)$. Thật vậy, nếu $y_1 \in [u_0, \infty)$ là một điểm bất động của T thì dùng qui nạp ta chứng minh được $u_n \le y_1 \quad (n \in \mathbb{N})$ và do đó $y \le y_1$.

Định lý được chứng minh.

§3. NGHIỆM CỰC TRỊ CỦA MỘT LỚP BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN.

Trong mục này chúng tôi sẽ nghiên cứu sự tồn tại nghiệm lớn nhất, nhỏ nhất của bài toán sau.

Tìm hàm v sao cho

$$\begin{cases} v \in K,\ f(x,v) \in L^1(\Omega),\ vf(x,v) \in L^1(\Omega), \\ \langle Av, w-v \rangle \geq \int\limits_{\Omega} f(x,v)(w-v)dx, \quad \forall w \in K \cap L^{\infty}(\Omega), \end{cases} \tag{2.16}$$

trong đó:

Ω là tập mở bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, với biên trơn,

$$K = \{w \in W_0^{1,p}(\Omega) : w \geq \varphi \text{ h.k.n trong } \Omega\}, \tag{2.17}$$

$0 \leq \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$ là hàm cố định,

$Av = -\operatorname{div}\left(|\nabla v|^{p-2} \nabla v\right)$ là toán tử p-Laplace, $p \geq 2$,

$\langle Av, w-v \rangle = \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^{p-2} \nabla v . \nabla(w-v)dx$.

Chúng tôi sẽ đặt các điều kiện sau lên hàm f.

$f(x,u) = F(x,u,u)$ với $F : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ thỏa mãn:

(H_1) $\begin{cases} (x,u) \mapsto F(x,u,v) \text{ là hàm đo được với mọi } v \in \mathbb{R}_+ \text{ cố định}, \\ v \to F(x,u,v) \text{ là hàm liên tục với mọi } (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$

(H_2) $\begin{cases} F(x,0,0) = 0 \text{ với h.k.n } x \in \Omega, \\ u \mapsto F(x,u,v) \text{ là hàm không giảm với mọi } (x,v) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v \mapsto F(x,u,v) \text{ là hàm không tăng với mọi } (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$

(H_3) $F(x,0,v) \in L^1(\Omega)$ với mọi $v > 0$ và tồn tại các số $a > 0$ và các chỉ số $q, r > 0$ và hàm $m \in L^s(\Omega)$ sao cho

$$F(x,u,0) - F(x,u,v) \geq av^q, \tag{2.18}$$

$$F(x,u,0) \;\le\; m(x)u^r, \tag{2.19}$$

$r < q$.

(H_4) Ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau được thỏa:

$$(p^*)' \le \frac{sp^*}{sr + p^*}\ , \tag{2.20}$$

$$(p^*)' \le \frac{s(q+1)}{sr + q + 1}. \tag{2.21}$$

A. <u>Đưa về bài toán điểm bất động của ánh xạ tăng</u>

Trong phần này chúng tôi sẽ đưa việc tìm nghiệm bài toán (2.16) về bài toán tìm điểm bất động của một ánh xạ tăng, tác động trong không gian $L^{p_0}(\Omega)$, với $p_0 = p^*$ nếu có điều kiện (2.20) và $p_0 = q+1$ nếu có (2.21). Chúng ta sẽ sử dụng hai kết quả sau đây.

<u>Mệnh đề 2.3.1.</u> [5]

Giả sử $\Omega \subset IR^N$ là một tập mở, bị chặn, $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $z \in W^{-1,p'}(\Omega)$, K là tập hợp ở (2.17) và $g : \Omega \times IR \to IR$ là hàm thỏa điều kiện Caratheodory sao cho

$g(x, u)$ là hàm không giảm theo biến u và $g(x, 0) = 0$,

$\sup\{|g(x,u)| : |u| \le t\} = h_t(x) \in L^1(\Omega)$ với mọi $t > 0$.

Khi đó bài toán tìm v thỏa:

$$\begin{cases} v \in K\ ,\ g(x,v) \in L^1(\Omega)\ ,\ vg(x,v) \in L^1(\Omega), \\ \langle Av - z, w - v\rangle + \int\limits_\Omega g(x,v)(w-v)dx \ge 0\,, \quad \forall w \in K \cap L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

có duy nhất nghiệm, thỏa mãn đẳng thức:

$$\langle Av - z, \varphi - v\rangle + \int\limits_\Omega g(x,v)(\varphi - v)dx = 0\,.$$

Ở đây $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ là tác dụng của cặp đối ngẫu $W_0^{1,p}(\Omega)$ và $W^{-1,p'}(\Omega)$.

<u>Mệnh đề 2.3.2.</u> [5]

Giả sử $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $z \in W^{-1,p'}(\Omega)$ *sao cho* $u \geq 0$ *h. k. n trong* Ω, $z = \mu + h$, *với* $h \in L^1(\Omega)$ *và* $\mu \in \mathcal{M}^*(\Omega)$ *(tập các độ do Radon dương). Giả thiết thêm rằng* $hu \geq v$ *h. k. n trong* Ω *với một hàm*
$v \in L^1(\Omega)$ *nào đó.*

Khi đó $hu \in L^1(\Omega)$, $u \in L^1(\Omega, d\mu)$ *và ta có hệ thức*

$$\langle \mu + h, u \rangle = \int_\Omega u d\mu + \int_\Omega hu dx \geq \int_\Omega hu dx .$$

Ở đây $L^1(\Omega)$ là không gian các hàm khả tích trên Ω đối với độ đo Lebesgue, còn $L^1(\Omega, d\mu)$ là không gian các hàm khả tích trên Ω đối với độ đo μ.

Bổ đề 2.3.3.

Giả sử các giả thiết (H_1) – (H_4) được thỏa và $p_0 = p^*$ *hoặc* $p_0 = q + 1$ *tương ứng khi (2.20) hoặc (2.21) đúng. Khi đó với mỗi hàm* $u \in [\varphi, \infty) \subset L^{p_0}(\Omega)$ *bài toán tìm* v *thỏa:*

$$\begin{cases} v \in K, \ F(x,u,v) \in L^1(\Omega), \ vF(x,u,v) \in L^1(\Omega), \\ \langle Av, w - v \rangle \geq \int_\Omega F(x,u,v)(w - v) dx \ , \ \forall w \in K \cap L^\infty(\Omega), \end{cases} \tag{2.22}$$

có nghiệm duy nhất v *sao cho*

$$\langle Av, \varphi - v \rangle = \int_\Omega F(x,u,v)(\varphi - v) dx . \tag{2.23}$$

Chứng minh

Từ $u \in L^{p_0}(\Omega)$ và $m \in L^s(\Omega)$ ta suy ra

$$m(x)u^r \in L^t(\Omega) \quad \text{với} \quad t = \frac{sp_0}{sr + p_0} . \tag{2.24}$$

Do giả thiết (H_4) ta có $(p^*)' \leq t$, nên từ (2.19) và (2.24) ta có

$$F(x,u,0) \in L^t(\Omega) \subset L^{(p^*)'}(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) . \tag{2.25}$$

Do đó bất đẳng thức (2.22) có thể viết ở dạng tương đương

$$\langle Av - F(x,u,0), w - v\rangle + \int_\Omega [F(x,u,0) - F(x,u,v)](w - v)dx \geq 0, \qquad (2.26)$$

$$\forall w \in K \cap L^\infty(\Omega).$$

Hàm $g(x,v) = \begin{cases} F(x,u(x),0) - F(x,u(x),v), & v \in [0,\infty) \\ -g(x,-v), & v \in (-\infty,0) \end{cases}$

là không giảm theo biến v và thỏa mãn

$$\begin{aligned} \text{Sup}\{\, |g(x,v)| : |v| \leq t\} &\leq F(x,u,0) - F(x,u,t) \\ &\leq F(x,u,0) - F(x,0,t) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Ở đây ta đã sử dụng các giả thiết (H_2), (H_3) và (2.25).

Do giả thiết (H_1) và điều kiện hàm $u \mapsto F(x,u,v)$ không giảm, trong [23] đã chứng minh rằng hàm $F(x,u(x),0)$ đo được, hàm $(x,v) \mapsto F(x,u(x),v)$ là hàm Caratheodory. Do đó hàm g là hàm thỏa điều kiện Caratheodory.

Áp dụng mệnh đề 2.3.1 thì bài toán (2.26) có duy nhất nghiệm $v \in K$ thỏa mãn (2.23) và

$$\left.\begin{array}{l} F(x,u,0) - F(x,u,v), \\ v(F(x,u,0) - F(x,u,v)) \end{array}\right\} \in L^1(\Omega). \qquad (2.27)$$

vì $\quad v \in W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega), \quad F(x,u,0) \in L^{(p^*)'}(\Omega),$

nên từ (2.27) ta suy ra

$$F(x,u,v) \in L^1(\Omega),\ vF(x,u,v) \in L^1(\Omega).$$

Vậy v là nghiệm của bài toán (2.22). Bổ đề được chứng minh.

<u>Bổ đề 2.3.4.</u>

Đặt T là ánh xạ gán mỗi $u \in [\varphi,\infty) \subset L^{p0}(\Omega)$ vào nghiệm duy nhất v của bài toán (2.22). Khi đó T là ánh xạ từ $[\varphi,\infty) \subset L^{p0}(\Omega)$ vào chính nó và có các tính chất sau:

1) T là ánh xạ tăng.

2) Tập $M_0 = \{u \in [\varphi, \infty) : u \le Tu\}$ *là tập có hướng.*

Chứng minh

Theo định nghĩa của T ta có $\varphi \le Tu \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Nếu $p_0 = p^*$ thì do phép nhúng $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ ta có $Tu \in L^{p0}(\Omega)$. Trong trường hợp $p_0 = q+1$, ta có từ (2.27) và (2.18)

$$a(Tu)^q.Tu \le [F(x,u,0) - F(x,u,Tu)]\ Tu \in L^1(\Omega)$$

hay $Tu \in L^{q+1}(\Omega) = L^{p0}(\Omega)$. Vậy T tác động từ $[\varphi, \infty) \subset L^{p0}(\Omega)$ vào chính nó.

1) Xét $u_1, u_2 \in [\varphi, \infty)$, $u_1 \le u_2$, ta sẽ chứng minh $Tu_1 \le Tu_2$.

Đặt $v_1 = Tu_1, \quad v_2 = Tu_2$

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : v_1(x) \le v_2(x)\}, \quad \Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1.$$

Trước tiên ta sẽ chứng minh:

$$\langle Av_1, v_1 - (v_1 - v_2)^+ - \varphi \rangle \ge \int_\Omega F(x,u_1,v_1)\big(v_1 - (v_1 - v_2)^+ - \varphi\big)dx, \quad (2.28)$$

$$\langle Av_2, v_2 + (v_1 - v_2)^+ - \varphi \rangle \ge \int_\Omega F(x,u_2,v_2)\big(v_2 + (v_1 - v_2)^+ - \varphi\big)dx. \quad (2.29)$$

Để kiểm tra (2.28) ta sẽ áp dụng mệnh đề 2.3.2 với

$$u = v_1 - (v_1 - v_2)^+ - \varphi,$$

$$\mu = Av_1 - F(x,u_1,v_1),$$

$$h = F(x,u_1,v_1).$$

Ta có

- $u \ge 0$ vì có thể viết $u = \min(v_1, v_2) - \varphi$ và $v_1, v_2 \ge \varphi$.
- μ là độ đo Radon dương vì từ (2.22) ta có

$$\langle \mu, u \rangle \ge 0, \ \forall u \in C_c(\Omega), \ u \ge 0.$$

- $hu = F(x,u_1,v_1)\big(\min(v_1,v_2) - \varphi\big)$

$$\ge -|F(x,u_1,v_1)|(v_1 - \varphi) \in L^1(\Omega).$$

Do đó các điều kiện của mệnh đề 2.3.2 được thỏa mãn và ta có

$$\langle \mu + h, u \rangle \geq \int_{\Omega} hu dx .$$

Đây chính là (2.28).

Tương tự, để chứng minh (2.29) ta sẽ áp dụng mệnh đề 2.3.2 cho

$$u = v_2 + (v_1 - v_2)^+ - \varphi,$$

$$\mu = Av_2 - F(x, u_2, v_2),$$

$$h = F(x, u_2, v_2).$$

Trong trường hợp này, bởi tính đơn điệu của hàm F, ta có

$$hu = \begin{cases} F(x, u_2, v_2)(v_2 - \varphi) & \text{trong } \Omega_1, \\ F(x, u_2, v_2)(v_1 - \varphi) \geq F(x, u_1, v_1)(v_1 - \varphi) & \text{trong } \Omega_2. \end{cases}$$

Vì vậy hàm hu lớn hơn một hàm thuộc $L^1(\Omega)$.

Cho $u = u_1, v = v_1$ trong (2.23) và cộng đẳng thức nhận được với (2.28)

ta được

$$\left\langle Av_1, (v_1 - v_2)^+ \right\rangle \leq \int_{\Omega} F(x, u_1, v_1)(v_1 - v_2)^+ dx . \tag{2.30}$$

Cho $u = u_2$, $v = v_2$ trong (2.23) rồi cộng với (2.29) ta được

$$\left\langle Av_2, (v_1 - v_2)^+ \right\rangle \geq \int_{\Omega} F(x, u_2, v_2)(v_1 - v_2)^+ dx . \tag{2.31}$$

Từ (2.30), (2.31) ta có

$$\left\langle Av_1 - Av_2, (v_1 - v_2)^+ \right\rangle \leq \int_{\Omega} \big(F(x, u_1, v_1) - F(x, u_2, v_2)\big)(v_1 - v_2)^+ dx . \tag{2.32}$$

Chú ý rằng hàm dưới dấu tích phân trong vế phải của (2.32) là bằng 0

trên Ω_1 và không dương trên Ω_2 (theo tính đơn điệu của F) ta sẽ có

$$0 \geq \left\langle Av_1 - Av_2, (v_1 - v_2)^+ \right\rangle$$

$$= \int_{\Omega} \left(|\nabla v_1|^{p-2} \nabla v_1 - |\nabla v_2|^{p-2} \nabla v_2 \right) \nabla (v_1 - v_2)^+ dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(|\nabla v_1|^{p-2} + |\nabla v_2|^{p-2} \right) \left| \nabla (v_1 - v_2)^+ \right|^2 dx \; +$$

$$+ \; \frac{1}{2} \int_{\Omega_2} \left(|\nabla v_2|^{p-2} - |\nabla v_1|^{p-2} \right) \left(|\nabla v_2|^2 - |\nabla v_1|^2 \right) dx .$$

Từ đây ta suy ra $\nabla (v_1 - v_2)^+ = 0$ h.k.n và do đó $(v_1 - v_2)^+ = 0$ h.k.n trên Ω. Điều này cho ta $v_1 = Tu_1 \le v_2 = Tu_2$ h.k.n trên Ω.

2) Giả sử $u_1, u_2 \in M_0$, ta sẽ chứng minh $u = \max(u_1, u_2) \in M_0$. Thật vậy, theo tính tăng của T ta có

$$u_1 \le Tu_1 \le Tu , \qquad u_2 \le Tu_2 \le Tu$$

Do đó $u \le Tu$ hay $u \in M_0$.

Bổ đề được chứng minh.

B. <u>Sự tồn tại nghiệm cực trị</u>

Từ định nghĩa ánh xạ T ta thấy v là nghiệm bài toán (2.16) khi và chỉ khi nó là điểm bất động của ánh xạ T trên $[\varphi, \infty)$. Do đó để chứng minh (2.16) có nghiệm lớn nhất, nhỏ nhất ta chỉ cần chứng minh T có điểm bất động lớn nhất, nhỏ nhất trên $[\varphi, \infty)$.

<u>Định lý 2.3.5.</u>

Giả sử hàm f thỏa mãn các điều kiện (H_1)–(H_3). Giả thiết thêm rằng:

(H_5) $\qquad (p^*)' \le \dfrac{sp^*}{rs + p^*} \qquad$ *và* $\quad r + 1 < p.$

Khi đó bài toán (2.16) có một nghiệm lớn nhất và một nghiệm nhỏ nhất.

<u>Chứng minh</u>

Do điều kiện thứ nhất trong (H_5) và bổ đề 2.3.4 ta có T là ánh xạ tăng tác động từ tập đóng $[\varphi, \infty)$ vào chính nó trong không gian $L^{p^*}(\Omega)$ và tập $M_0 = \{u \in [\varphi, \infty) : u \le Tu\}$ là có hướng. Do ghi chú 2.1.2 để chứng minh T có điểm bất động lớn nhất và nhỏ nhất trên $[\varphi,\infty)$ ta chỉ cần chỉ ra rằng $T(M_0)$ là tập bị chặn. Trong các lý luận dưới đây ta sẽ dùng ký hiệu C_i để chỉ những hằng số dương khác nhau.

Với $v = Tu \in T(M_0)$ ta có theo (2.23)

$$\langle Av, v\rangle + \int_\Omega \big(F(x,u,0) - F(x,u,v)\big)(v-\varphi)dx$$

$$= \int_\Omega F(x,u,0)(v-\varphi)dx + \langle Av, \varphi\rangle. \tag{2.33}$$

Ký hiệu A là vế trái của (2.33). Từ (2.18) trong giả thiết (H_3) ta có

$$A \geq \int_\Omega |\nabla v|^p dx + a\int_\Omega v^q (v-\varphi)dx.$$

Từ (2.19) và (2.27) ta có $v \in L^{q+1}(\Omega)$. Từ đây và $\varphi \in L^\infty(\Omega)$, ta có thể áp dụng bất đẳng thức Holder:

$$\int_\Omega v^q \varphi dx \leq \left(\int_\Omega v^{q+1}dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \cdot \left(\int_\Omega \varphi^{q+1}dx\right)^{\frac{1}{q+1}} = C\|v\|_{q+1}^q.$$

Vậy ta có

$$A \geq C\left(\|v\|_{1,p}^p + \|v\|_{1+q}^{1+q} - \|v\|_{q+1}^q\right)$$

$$\geq C_1\left(\|v\|_{1,p}^p + \|v\|_{1+q}^{1+q} - C_2\right). \tag{2.34}$$

Tiếp theo ta đi đánh giá vế phải của (2.33). Do (2.19) ta có

$$\int_\Omega F(x,u,0)(v-\varphi)dx \leq \int_\Omega m(x)u^r(v-\varphi)dx$$

$$\leq \int_\Omega m(x)v^r(v-\varphi)dx$$

$$\leq \int_\Omega m(x)v^{r+1}dx. \tag{2.35}$$

Dễ dàng kiểm tra rằng:

$$(p^*)' \le \frac{sp^*}{rs+p^*} \Leftrightarrow (1+r)s' \le p^*.$$

Do đó, vì $v \in L^{p^*}(\Omega)$ ta suy ra $v^{r+1} \in L^{s'}(\Omega)$. Từ (2.35) và bất đẳng thức Holder ta có

$$\int_\Omega F(x,u,0)(v-\varphi)dx \le \|m\|_s . \|v\|_{(r+1)s'}^{r+1}$$

$$\le C_3 \|v\|_{p^*}^{r+1}. \qquad (2.36)$$

Để đánh giá $\langle Av, \varphi \rangle$ ta sử dụng bất đẳng thức Young

$$ab \le \varepsilon a^{p'} + c(\varepsilon) b^p, \qquad a \ge 0,\ b \ge 0,\ \varepsilon > 0.$$

Ta có

$$\langle Av, \varphi \rangle = \int_\Omega |\nabla v|^{p-2} \nabla v \nabla \varphi dx$$

$$\le \int_\Omega |\nabla v|^{p-1} |\nabla \varphi| dx$$

$$\le \int_\Omega \left(\varepsilon |\nabla v|^{(p-1)p'} + C |\nabla \varphi|^p \right) dx$$

$$\le \varepsilon \|v\|_{1,p}^p + C_4. \qquad (2.37)$$

Từ (2.33), (2.34), (2.36), (2.37) ta đi đến

$$C_1 \|v\|_{1,p}^p - C_2 \le C_3 \|v\|_{p^*}^{r+1} + \varepsilon \|v\|_{1,p}^p + C_4.$$

Chọn ε đủ nhỏ ta có

$$\|v\|_{1,p}^p \le C_5 \left(\|v\|_{p^*}^{r+1} + 1 \right).$$

Cuối cùng do tính liên tục của phép nhúng $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ ta có

$$\|v\|_{p^*}^p \le C_6 \left(\|v\|_{p^*}^{r+1} + 1 \right).$$

Sử dụng giả thiết $r+1<p$, từ đây ta suy ra tập $T(M_0)$ bị chặn trong $L^{p^*}(\Omega)$.

Định lý được chứng minh.

<u>Định lý 2.3.6.</u>

Giả sử các giả thiết (H_1)–(H_3) và (H_6) sau đây được thỏa mãn:

(H_6) $\qquad (p^*)' \le \dfrac{s(q+1)}{rs+q+1}$ *và* $r+1 \le p$.

Khi đó bất đẳng thức biến phân (2.16) có nghiệm lớn nhất, nhỏ nhất.

<u>Chứng minh</u>

Với các giả thiết (H_1)–(H_3) và (H_6) ta biết ánh xạ T định nghĩa trong bổ đề 2.3.4 sẽ tác động từ $[\varphi,\infty)$ vào $[\varphi,\infty)$ trong không gian $L^{q+1}(\Omega)$ và là ánh xạ tăng. Để áp dụng mệnh đề 2.1.1 về điểm bất động ta sẽ chứng minh tập $M_0=\{u\in[\varphi,\infty): u\le Tu\}$ là bị chặn trong $L^{q+1}(\Omega)$.

Với $v=Tu\in T(M_0)$ ta vẫn có đẳng thức (2.33) và vế trái A của nó thỏa mãn bất đẳng thức (2.34). Tiếp theo ta chia chứng minh làm hai trường hợp.

- <u>Trường hợp $(1+r)s' \le 1+q$</u>

Do $v\in L^{q+1}(\Omega)$, nên ta cũng có $v\in L^{(1+r)s'}(\Omega)$. Do đó từ (2.35) và bất đẳng thức Holder ta được

$$\int_\Omega F(x,u,0)(v-\varphi)dx \le \|m\|_s.\|v\|_{(r+1)s'}^{r+1}$$

$$\le C_3\|v\|_{q+1}^{r+1}. \qquad (2.38)$$

Từ (2.33), (2.34), (2.37), (2.38) ta đi tới

$$C_1\left(\|v\|_{1,p}^p+\|v\|_{q+1}^{q+1}\right)-C_2 \le C_3\|v\|_{q+1}^{r+1}+\varepsilon\|v\|_{1,p}^p+C_4.$$

Chọn $\varepsilon<C_1$ ta có

$$\|v\|_{q+1}^{q+1}\le C_5\left(1+\|v\|_{q+1}^{r+1}\right).$$

Do $r < q$ (điều kiện (H_3)) nên từ đây ta suy ra tập $T(M_0)$ bị chặn trong $L^{q+1}(\Omega)$.

- Trường hợp $(1+r)s' > 1+q$

Bất đẳng thức thứ nhất trong điều kiện (H_6) có thể viết lại ở dạng tương đương

$$s' \le \frac{p^*(q+1)}{p^*r+q+1}. \tag{2.39}$$

Hàm $t \mapsto \dfrac{p^*t}{(p^*r+t)}$ đơn điệu tăng nên từ (2.39) và trường hợp đang xét ta được

$$s' < \frac{p^*(r+1)s'}{p^*r+(1+r)s'},$$

và do đó $(1+r)s' < p^*$. Như vậy ta có

$$1+q < (1+r)s' < p^*.$$

Do vậy ta có thể áp dụng bất đẳng thức Gagliardo – Nirenberg:

$$\|v\|_{(1+r)s'} \le C\|v\|_{1,p}^{\theta}.\|v\|_{1+p}^{1-\theta}, \tag{2.40}$$

trong đó số θ xác định bởi:

$$\frac{1}{q+1} - \frac{1}{(1+r)s'} = \theta\left(\frac{1}{1+q} - \frac{1}{p^*}\right).$$

Vì $v \in L^{p^*}(\Omega)$ và $(1+r)s' < p^*$ nên $v \in L^{(1+r)s'}(\Omega)$ và áp dụng bất đẳng thức Holder ta có từ (2.35)

$$\int_\Omega F(x,u,0)(v-\varphi)dx \le \|m\|_s.\|v\|_{(r+1)s'}^{r+1}. \tag{2.41}$$

Từ (2.33), (2.34), (2.37), (2.41) ta đi tới

$$C_1\left(\|v\|_{1,p}^p + \|v\|_{q+1}^{q+1}\right) - C_2 \le C_3\|v\|_{(r+1)s'}^{r+1} + \varepsilon\|v\|_{1,p}^p + C_4.$$

Chọn ε đủ nhỏ ta có

$$\|v\|_{1,p}^{p} + \|v\|_{q+1}^{q+1} \le C_5\left(1 + \|v\|_{(r+1)s'}^{r+1}\right). \qquad (2.42)$$

Từ (2.40) và (2.42) ta đi đến

$$\|v\|_{(1+r)s'} \le C_6\left(1 + \|v\|_{(1+r)s'}^{1+r}\right)^{\frac{\theta}{p}+\frac{1-\theta}{1+q}}. \qquad (2.43)$$

Vì

$$(r+1)\left(\frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q+1}\right) = \frac{r+1}{p}\theta + \frac{r+1}{q+1}(1-\theta)$$

$$< \theta + (1-\theta) = 1,$$

nên từ (2.43) ta suy ra tập $T(M_0)$ bị chặn trong $L^{(1+r)s'}(\Omega)$ và do đó bị chặn trong $L^{q+1}(\Omega)$ vì ta đang có trường hợp $q+1 < (1+r)s'$.

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 2.3.7.

Xét bài toán (2.16) với $f(x,u) = m(x)u^r - u^q$ và

$$r < q, \qquad m \in L^s(\Omega).$$

Hàm số dạng này xuất hiện trong phương trình logistic xét ở §2.

Các giả thiết (H_1) – (H_3) được thỏa mãn với $F(x,u,v) = m(x)u^r - v^q$.

- Theo định lý 2.3.5 bài toán (2.16) trong trường hợp này có nghiệm nếu

$$(p^*)' \le \frac{sp^*}{rs + p^*} \qquad \text{và} \qquad r+1 < p.$$

Điều này tương đương với:

$$s \ge \frac{p^*}{p^* - 1 - r} \qquad , \qquad r+1 < p.$$

- Theo định lý 2.3.6, bài toán (2.16) có nghiệm nếu

$$(p^*)' \le \frac{s(q+1)}{sr+q+1} \qquad \text{và} \qquad r+1 \le p\,.$$

Điều này tương đương với:

$$s \ge \frac{(q+1)p^*}{(q+1)(p^*-1)-rp^*} \quad , \quad r < \frac{(q+1)(p^*-1)}{p^*} \quad , \quad r \le p-1\,.$$

KẾT LUẬN

Trong luận án chúng tôi đã ứng dụng một số kết quả của lý thuyết phương trình toán tử trong không gian Banach có thứ tự để nghiên cứu hai lớp bài toán đang được quan tâm nghiên cứu gần đây. Đó là nghiên cứu cấu trúc nghiệm của các bài toán biên phi tuyến phụ thuộc tham số và nghiên cứu sự tồn tại nghiệm cực trị của các phương trình và bất phương trình biến phân.

Các kết quả chính của luận án bao gồm:

1. Chứng minh sự tồn tại một khoảng giá trị của tham số để phương trình toán tử tổng quát chứa tham số có nghiệm.

2. Đối với một lớp bài toán giá trị riêng chứa toán tử p-Laplace một chiều đã chứng minh được:

- Một số tính chất của giá trị riêng chính của toán tử p-Laplace.
- Tập nghiệm dương của bài toán là nhánh liên tục không bị chặn.
- Tập các giá trị riêng lấp đầy một khoảng với các đầu mút được tính bằng các công thức đơn giản qua các dữ kiện của bài toán.

3. Chứng minh sự tồn tại nhánh liên tục không bị chặn của tập nghiệm và tập các giá trị tham số tương ứng lấp đầy một khoảng, đối với một lớp bài toán biên phi tuyến chứa tham số xuất phát từ bài toán tìm nghiệm tuần hoàn của phương trình vi phân ôtônôm cấp hai.

4. Chứng minh tồn tại nghiệm yếu cực trị của phương trình logistic với sự khuếch tán phi tuyến.

5. Chứng minh tồn tại nghiệm cực trị cho một lớp bất đẳng thức biến phân elliptic. Phương pháp nghiên cứu của luận án về bài toán này cho phép khảo sát các bất đẳng thức chứa các hàm gián đoạn.

Các kết quả và phương pháp nghiên cứu của luận án có thể phát triển theo hướng:

1. Nghiên cứu cấu trúc của tập nghiệm yếu của bài toán biến phân chứa tham số.

2. Nghiên cứu bài toán về điểm tới hạn của các phiếm hàm trên các không gian có thứ tự.

DANH MỤC TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Anh:

1. Agarwal. R.P., Lü. H., O'Regan. D, (2002), *Eigenvalues and the one-dimensional p-Laplacian,* J. Math. Anal. Appl., 266, 383-400.

2. Amann H, Crandall M. G, (1978), *On some existence theorems for semi-linear elliptic equations,* Indiana University Math. J., 27, 779-790.

3. Amann. H, (1976), *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces,* SIAM Rev., 18, 620-709.

4. Boccardo L., Orsina L, (1994), *Sublinear elliptic equations in* L^s, Houston Math. J., 20, 99-114.

5. Boccardo L., Giachetti D., Murat F, (1989), *A generalization of a theorem of H. Brezis and F. Browder and applications to some unilateral problems*, Publ. du Lab. d'Anal. Num., Univ. Pierre et Marie Curie R 89014.

6. Brezis H., Browder F, (1982), *Some properties of higher order Sobolev spaces,* J. Math. Pures Appl., 61, 245-259.

7. Brezis H., Browder F, (1976), *A general ordering principle in nonlinear functional analysis,* Adv. Math., 21, 355-364.

8. Carl S., Heikkila S, (1999), *Operator and differential equations in ordered spaces.* J. Math. Anal. Appl., 234, 31-54.

9. Carl S., Heikkila S, (2000), *Nonlinear Differential Equations in Ordered spaces,* Chapman & Hall/CRC.

10. Carl S., Heikkila S, (1992), *On extremal solutions of an elliptic boundary value problem involving discontinuous nonlinearities,* Diff. Int. Equations, 5, 581-589.

11. Dancer E. N, (1973), *Global solution branches for positive mapping,* Arch. Rat. Mech. Anal., 52, 181 – 192.

12. Dancer E. N., Sweers G, (1989), *On the existence of a maximal weak solution for a semilinear elliptic equation,* Diff. Int. Equations, 2, 533-540.

13. Drabek P., Hernandez J, (2001), *Existence and uniqueness of positive solutions for some quasilinear elliptic problems,* Nonlinear. Anal., 44, 189-204.

14. Garcia-Huidobro M., Manasevich R., Zanolin F, (1996), *Strongly nonlinear second-order ODEs with rapidly growing terms*, J. Math. Anal. Appl., 202, 1-26.

15. Garcia M., Sabinade Lis, (1998), *Maximum and comparison principles of operator involving the p-Laplacian,* J. Math. Anal. Appl., 218, 49-64.

16. Gilbarg D., Trudinger N. S. 1983, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin.

17. Henderson J., Wang H, (1997), *Positive solutions for nonlinear eigenvalue problems,* J. Math Anal. Appl., 208, 252-259.

18. Hernandez J, (1998), *Positive solutions for the logistic equation with unbounded weights,* in: G. Caristi, E. Mitidieri (Eds), Reaction-Diffusion Systems, Marcel-Dekker, New York, 183-197.

19. Krasnoselskii M. A., Zabreiko P, (1984), *Geomtrical Methods of Nonlinear Analysis,* Springer-Verlag, Berlin.

20. Krasnoselskii M. A, (1964), *Positive Solutions of Operator Equations,* Noordhoff P, Groningen.

21. Krein S. G (Editor), (1972), *Functional Analysis,* Nauka.

22. Krein M. G., Rutman M. A, (1962), *Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space,* Amer. Math. Soc. Trasl., 10, 199-325.

23. Mitidieri E., Sweers G, (1994), *Existence of a maximal solution for quasimonotone elliptic systems,* Diff. Int. Equations 7, 1495-1510.

24. Nguyen Bich Huy, (1996). *On the applications of a global bipurcation theorem to the raction-diffusion systems,* Nonlinear Anal., 27, 1199-1206.

25. Nguyen Bich Huy, (1999), *Global continua of positive solutions for equations with nondifferentiable operators,* J. Math. Anal. Appl., 239, 449-456.

26. Nguyen Bich Huy, Nguyen Huu Khanh, (2000), *Fixed point for multivalued increasing operators,* J. Math. Anal. Appl., 250, 368-371.

27. Nguyen Bich Huy, (2002), *Positive weak solutions for some semilinear elliptic equations,* Nonlinear. Anal., 48, 939-945.

28. Nguyen Bich Huy, (2002), *Fixed points of increasing multivalued operators and an applications to discontinuous elliptic equations,* Nonlinear Anal., 51, 673-678.

29. O'Regan D, (1993), *Some existence principles and results for* $\left(\phi(y')\right)' = qf(t,y,y')$*, 0 < t < 1*, SIAM J. Math. Anal., 24, 648-668.

30. Rudin W, (1987), *Real and Complex Analysis,* Mc. Grall-Hill.

31. Vy Khoi Le, (2000), *Existence of positive solutions of variational inequalities by a subsolution-supersolution approach,* J. Math. Anal. Appl., 252, 65-90.

32. Vy Khoi Le, (2001), *Subsolution-supersolution method in variational inequalities,* Nonlinear. Anal., 45, 775-800.

33. Zeidler E., (1984), *Nonlinear Functional Analysis and its Applications* 1, Springer-Verlag.

Tiếng Pháp:

34. Fleckinger J., Jacqueline J. P. Gossez, Takăc P, De Thelin F, (1995), *Existence, nonexistence et principe de l'antimaximum pour le p-Laplacien,* C. R. Acad. Sci. Paris 321, 731-734.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CÔNG BỐ
CỦA TÁC GIẢ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN.

I. Nguyen Bich Huy, Tran Dinh Thanh, (2002), *Global continua of possitive solutions for some boundary value problems,* Demonst. Math., 35, 303–309.

II. N. B. Huy, N. D. Thanh, T. D. Thanh (2002), *Extremal solutions for a class of unilateral problems*, Z. Anal. Anwendungen, 21, 371 – 380.

III. Trần Đình Thanh, (2002), *Nghiệm yếu dương của một lớp phương trình Elliptic,* Tạp chí Khoa học Đại Học Sư Phạm TPHCM, số 28, 39-42.

IV. Nguyễn Bích Huy, Trần Đình Thanh, (2003), *Nghiệm tuần hoàn của một lớp phương trình vi phân ôtônôm cấp 2.* Tạp chí Khoa học Đại Học Sư Phạm TPHCM, số 34, 7-12.

V. Nguyen Bich Huy, Tran Dinh Thanh (2004), *On an eigenvalue problem invoLoving the one-dimesional p-Laplacian,* J. Math. Anal. Appl.290, 123-131.