

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC SƯ PHẠM THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

PHẠM HOÀNG QUÂN

**BÀI TOÁN NGƯỢC
TRONG LÝ THUYẾT NHIỆT**

Chuyên ngành : TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số : 62 46 01 01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học :

GS. TS. ĐẶNG ĐÌNH ÁNG

TS. NGUYỄN CAM

Thành Phố Hồ Chí Minh

-2005-

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các số liệu và các kết quả nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ một công trình nào khác.

Tác giả luận án.

LỜI CẢM ƠN

Trước tiên, tác giả xin tri ân vô hạn Thầy, GS.TS. Đặng Đình Áng, Giáo Sư hướng dẫn, người Thầy khả kính đã tận tình chỉ bảo, dạy dỗ, dẫn dắt tác giả từng bước trên con đường học tập và khảo cứu. Luôn theo gương Thầy, tác giả đã, đang và sẽ mãi mãi học tập.

Tôi xin vô cùng biết ơn Thầy hướng dẫn phụ, TS. Nguyễn Cam, đã tận tình chỉ bảo và cho ý kiến trong quá trình thực hiện luận án.

Tôi xin vô cùng biết ơn hai Thầy, PGS.TS. Đinh Ngọc Thanh và PGS.TS. Đặng Đức Trọng đã tận tình hết lòng dìu dắt và chỉ dạy cho tôi trong suốt thời gian làm luận án.

Tôi xin vô cùng biết ơn Thầy, PGS.TS. Lê Hoàn Hóa, đã tận tình chỉ dạy cho tôi trong suốt thời gian học Đại học và Cao học.

Tôi xin vô cùng biết ơn Thầy, GS. TS. Alain Pham Ngoc Dinh đã chỉ bảo những kết quả tính số vô cùng quý báu đối với tôi.

Tôi xin chân thành cảm ơn các Thầy giới thiệu luận án đã đọc và cho nhiều ý kiến sâu sắc.

Tôi xin chân thành cảm ơn những ý kiến đóng góp của các chuyên gia, người nhận xét. Những ý kiến này đã giúp chúng tôi cải thiện luận án tốt hơn.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban Giám Hiệu, Khoa Toán, Phòng Khoa Học Công nghệ và Sau Đại Học của trường Đại học Sư Phạm và Đại học Khoa Học Tự Nhiên, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tôi trong suốt quá trình thực hiện đề tài nghiên cứu.

Trân trọng cảm ơn quý Thầy Cô và các bạn đồng nghiệp đã động viên, giúp đỡ tôi rất nhiều.

Trân trọng biết ơn quý Thầy Cô đã từng dạy dỗ và chỉ bảo cho tôi, xin tri ân gia đình của tôi.

Phạm Hoàng Quân

LỜI NÓI ĐẦU

Cùng với bài toán cho phương trình sóng và phương trình thế vị, các bài toán nhiệt là một trong những bài toán cổ điển có nhiều ứng dụng trong khoa học kỹ thuật. Bài toán liên quan tới vấn đề truyền nhiệt đã được khảo sát từ thời Fourier trong thế kỷ 19. Trong cơ sở dữ liệu của AMS hiện nay, số lượng bài báo có từ khóa “heat equation” lên tới trên năm ngàn bài. Trong số đó, khá nhiều bài toán nhiệt ngược được khảo sát (xem [16, 1, 50, 51] và các tài liệu tham khảo trong đó). Theo sự tổng kết của O. M. Alifanov (xem [1], trang 13), có bốn loại bài toán nhiệt ngược

1. Bài toán nhiệt ngược thời gian (retrospective heat conduction problem hay backward problem): xác định nhiệt độ của thời điểm ban đầu từ phân bố nhiệt độ tại thời điểm cuối,

2. Bài toán biên ngược (boundary inverse problem): xác định sự phân bố nhiệt độ hay thông lượng nhiệt trên biên của vật dẫn nhiệt,

3. Bài toán xác định hệ số (coefficient inverse problem): xác định các hệ số như hệ số dẫn nhiệt, nguồn nhiệt ...,

4. Bài toán hình học: xác định các đặc trưng hình học như hình dạng các lỗ hổng hay các vết nứt trong vật dẫn nhiệt, ...

Luận án này chỉ tập trung khảo sát một số vấn đề trong các bài toán 1, 2, 3. Các bài toán nhiệt ngược còn được chia ra thành hai loại: chỉnh (well-posed) và không chỉnh (ill-posed). Theo Hadamard, bài toán tìm x thỏa $Ax = y$ gọi là chỉnh nếu

- a. nghiệm, nếu có, là duy nhất,
- b. nghiệm tồn tại,
- c. nghiệm có tính ổn định.

Tương ứng với ba tính chất trên, ta có thể khảo sát ba loại bài toán về tính duy nhất (uniqueness), tính tồn tại (solvability) và tính ổn định (stability). Các bài toán không thỏa một trong ba điều a, b, c gọi là bài toán không chỉnh (theo nghĩa Hadamard). Đối với các bài toán có nghiệm không ổn định, người ta cần xây dựng các nghiệm xấp xỉ ổn định nghiệm cần tìm. Bài toán này gọi là

d. bài toán chỉnh hóa (regularization).

Tính chỉnh hay không chỉnh phụ thuộc vào nhiều điều kiện. Ví dụ có nhiều bài toán là không chỉnh khi dữ liệu cho được xét trên các không gian thông dụng nhưng lại chỉnh nếu dữ liệu xét trên không gian thu hẹp hơn. Điều này được minh họa, chẳng hạn, như một dấu hiệu phổ quát để nhận diện phương pháp mollification. Trong [41], tác giả đã viết như sau: “The idea of our method is as follows: if $\varphi \in L^p(\mathbb{R})$ is given inexactly by $\varphi^\varepsilon \in L^p(\mathbb{R})$ then we mollify φ^ε by convolution with the Dirichlet kernel and the de la Vallé Poussin kernel... The mollified data belong to the spaces of entire functions of exponent type... in which *our (mollified) problem is well-posed*”. Tính chỉnh của bài toán còn có thể phụ thuộc vào tính chất của các hệ số trong bài toán. Chẳng hạn trong bài toán xác định nguồn nhiệt (xem [51] trang 222) dạng $\varphi(x,t)f(x)$, Isakov đã phát biểu một kết quả đánh giá ổn định cho trường hợp $\varphi(x,t)$ thỏa

$$(9.1.1) \quad 0 \leq \varphi, 0 \leq \partial_t \varphi \dots$$

và viết: “... Without the conditions (9.1.1), nonuniqueness is possible”, nghĩa là bài toán có thể không chỉnh. Chúng tôi sẽ nói thêm về vấn đề này sau.

Như vậy, phối hợp các loại bài toán a, b, c, d và 1, 2, 3, 4, chúng ta có thể có đến 16 loại bài toán nhiệt ngược mà sự khác nhau có thể rất xa. Vì lý do này, khi so sánh kết quả của các công trình, chúng ta phải xem xét xem các bài toán

đặt ra trong đó là loại nào trong các loại 1, 2, 3, 4 và vấn đề xét tới là a, b, c hay d, chưa kể đến sự khác nhau về việc sử dụng các không gian hàm, về các điều kiện trên dữ liệu hay trên các hệ số. Trong luận án này chúng tôi *tập trung khảo sát vấn đề chỉnh hóa* (tức là vấn đề d) cho một số bài toán loại 1, 2, 3. Tuy nhiên, chúng tôi không khảo sát vấn đề tính toán bằng số nghiệm chỉnh hóa. Trong một số trường hợp, các ví dụ số đưa ra nhằm mục đích minh họa cho các phương pháp.

Thứ tự trình bày của các bài toán được sắp xếp thành hai nhóm: tuyến tính (các chương 1, 2, 3) và phi tuyến (các chương 4, 5, 6, 7). Cụ thể luận án sẽ khảo sát sự chỉnh hóa nghiệm của các bài toán nằm trong bốn dạng đã liệt kê như sau

1. Bài toán nhiệt ngược thời gian

- tuyến tính hai chiều không gian với các dữ kiện nhiệt độ cuối là rời rạc (chương 1)

- phi tuyến một chiều không gian trên một tập hợp bị chặn (chương 6)

- phi tuyến một chiều không gian trên toàn bộ trục số thực (chương 7),

2. Bài toán xác định nhiệt độ biên

- tuyến tính của mô hình chất dẫn nhiệt một chiều có hai lớp từ dữ kiện nhiệt độ đo tại ba vị trí bên trong của vật (chương 3),

- phi tuyến hai chiều không gian xác định nhiệt độ bề mặt khi biết nhiệt độ tại một vị trí bên trong (chương 5),

3. Bài toán hai chiều không gian xác định nguồn nhiệt dạng tách biến không gian và thời gian $\varphi(t)f(x)$ trong đó hàm phụ thuộc biến thời gian $\varphi(t)$ được cho dưới dạng dữ liệu nhiễu không chính xác (chương 4).

Bài toán nhiệt ngược thời gian được khảo sát qua rất nhiều công trình, cho đến gần đây, bài toán trên không gian Banach trừu tượng vẫn còn được công bố (xem [49]). Bắt đầu từ công trình tiên phong của Fritz John [54] vào thập niên 50, các bài toán nhiệt ngược thời gian tuyến tính đã được khảo sát rất nhiều bằng các phương pháp nửa nhóm qua các công trình của Krein [56], phương pháp quasi-reversibility của Lattès-Lions [58], Miller [66], phương pháp pseudo-parabolic của Gajewski and Zacharias [34], phương pháp chỉnh hóa hyperbolic [5]. Tuy nhiên, bài toán khôi phục phân bố nhiệt độ ban đầu từ các dữ liệu nhiệt độ cuối rời rạc chúng tôi chỉ mới tìm thấy trong [13] và bài báo [70] (là nội dung chính của Chương 1 của luận án). Bên cạnh đó, bài toán nhiệt ngược thời gian với nguồn nhiệt phi tuyến cũng chỉ mới được nhóm chúng tôi khảo sát gần đây trong các bài báo [69, 73] đã công bố (nội dung chính của chương 6 và 7) và trong công trình [80] (gửi đăng ở tạp chí ZAA). Trong khuôn khổ các tài liệu tìm được, chúng tôi chưa tìm được các công trình khác về bài toán phi tuyến này.

Bài toán xác định nhiệt độ bề mặt từ các dữ liệu đo bên trong (borehole measurements) là bài toán đã được khảo sát rất nhiều trong trường hợp vật thể dẫn nhiệt chỉ có một lớp (one layer). Bài toán này đã được phát biểu trong [1, 16, 19, ...]. Trường hợp biến không gian x thuộc về nửa trục thực bài toán (với hệ số hằng) đã được khảo sát bởi Carasso [22], Talenti và Vessella [76]. Đinh Nho Hào, H.J. Reinhardt và A. Schneider [45, 46, ...] sử dụng phương pháp mollification đã khảo sát bài toán trong trường hợp hệ số phụ thuộc vào biến x (với giả thiết trụ cột là nhiệt độ ban đầu triệt tiêu) và cho các đánh giá ổn định loại Holder. Gần đây, Chu-Li Fu [33] cũng sử dụng phương pháp chỉnh hóa Fourier (chặt cụt các tần số cao) để khảo sát bài toán. Tuy nhiên bài toán sideways cho trường hợp vật thể có nhiều lớp (multi-layer) vẫn chưa được khảo

sát nhiều mặc dù đã được đề cập rất rõ ràng trong cuốn sách kinh điển của [16]. Có lẽ một trong những lý do là quan điểm cho rằng bài toán đó đã được giải quyết về mặt nguyên tắc vì có thể phân thành nhiều bài toán một lớp và ta có thể lần lượt giải theo từng lớp từ trong ra ngoài. Tuy nhiên, phương pháp này có các tính toán nhiều và khó rút ra các đánh giá về sai số. Chúng tôi đã khảo sát bài toán trên quan điểm tính toán đồng thời phân bố nhiệt độ trong tất cả các lớp như là hệ thống của các phương trình tích chập, nhờ đó có thể tính trực tiếp nhiệt độ bề mặt mà không phải tính theo lối quy nạp. Trong Chương 3, các kết quả cho một vật thể dẫn nhiệt hai lớp đã được trình bày như một minh họa cho ý tưởng của phương pháp. Các kết quả này đã được công bố trong bài [71] trên tạp chí *Applicable Analysis*.

Trường hợp xác định nhiệt độ bề mặt của vật thể thỏa phương trình elliptic phi tuyến được khảo sát trong chương 5. Cũng như các bài toán phi tuyến nhiệt ngược thời gian, chúng tôi cũng chưa tìm ra được các công trình khảo sát bài toán phi tuyến tương tự. Bài toán đặt ra ở đây là xác định phân bố nhiệt độ trên biên (trục Ox) từ nhiệt độ đo ở những điểm có phương trình $y=1$ của nửa mặt phẳng trên. Việc khảo sát này sử dụng ý tưởng thông dụng được nói tới trong [16, 46, ...]: khảo sát bài toán trong phần mặt phẳng $y>1$ (bài toán chỉnh) rồi lấy kết quả làm dữ liệu để khảo sát trong dải $0<y<1$ (bài toán không chỉnh). Các kết quả này chỉ là các kết quả bước đầu cho việc nghiên cứu bài toán phi tuyến này. Nội dung của bài toán được trình bày trong bài báo [72] đã công bố trên tạp chí *Vietnam Journal of Mathematics* và là nội dung của Chương 5.

Trong các bài toán xác định về hệ số, luận án chỉ khảo sát bài toán tìm nguồn nhiệt. Đây là một loại bài toán phi tuyến (xem [51, trang 222]). Một số

dạng đặc biệt của nguồn nhiệt F thường được xem xét. Trong [64], dạng

$$F(x, t) = g_0(x, t) + f_1(x)g(t) + f_2(t)g_2(x)$$

được khảo sát. Các tác giả Isakov [51], D. N. Hao [42] khảo sát dạng nguồn nhiệt

$$F(x, t) = \varphi(x, t)f(x)$$

với $f(x)$ là ẩn hàm và $\varphi(x, t)$ là hàm trọng lượng (weight function) đã cho chính xác. Cannon-Esteva, Đinh Nho Hào, Saitoh-Vũ Kim Tuấn-Yamamoto, Yamamoto [20, 21, 40, 75, 82] đã khảo sát dạng tách biến

$$F(x, t) = \varphi(x)f(t)$$

trong đó một trong hai hàm là ẩn hàm. Hàm $u \equiv u_\varphi$ và $F \equiv F_\varphi$ là hàm phụ thuộc phi tuyến vào φ . Nếu hàm φ đã biết chính xác (exactly given function) thì bài toán trở thành tuyến tính. Để giải được bài toán này một số điều kiện được bổ sung thêm (overdetermination conditions). Trường hợp bổ sung thêm giá trị nhiệt độ đo ở phần trong của vật thể, bài toán khảo sát sự ổn định của nguồn nhiệt được trình bày trong [20, 21, 75, 82]. Bài toán tồn tại và duy nhất cho bài toán hệ số trên miền không gian là đoạn $(0, 1)$ đã được khảo sát trong [40] sử dụng điều kiện Cauchy ở một phần của biên.

Trong luận án này, chúng tôi xét bài toán xác định nguồn nhiệt có dạng hai chiều không gian có dạng $\varphi(t)f(x, y)$ với $\varphi(t)$ là hàm cho biết không chính xác (inexactly given function) và điều kiện bổ sung của chúng tôi cũng là điều kiện cuối (final overdetermination) như trong [51]. Công trình của chúng tôi khác các kết quả được phát biểu bởi Isakov ở những điểm sau:

Thứ nhất, bài toán trong [50, 51] được khảo sát ở khía cạnh ổn định và duy nhất, còn công trình của chúng tôi khảo sát việc chỉnh hóa bài toán. Như chúng tôi đã phân tích ở phần đầu, đó là hai bài toán *khác nhau*.

Thứ hai, trong [51], hàm $\varphi(x, t)$ xem như *biết chính xác*, do đó, như đã lưu ý, kết quả phát biểu trong [51] (Định lý 9.1.1, trang 222) được sử dụng cho bài toán tuyến tính. Trong khi đó, trong bài toán chúng tôi nghiên cứu, hàm $\varphi(t)$ được xem là dữ kiện biết không chính xác, chỉ biết hàm xấp xỉ $\varphi_\varepsilon(t)$ của $\varphi(t)$, do đó bài toán tìm $(u, F) \equiv (u_\varphi, F_\varphi)$ là phi tuyến.

Thứ ba, dạng nguồn nhiệt chúng tôi khảo sát có vẻ đơn giản hơn dạng khảo sát trong [51]. Tuy nhiên đi kèm với dạng nguồn nhiệt là các điều kiện trên đó. Với đặc điểm phức tạp của loại toán này, với các điều kiện khác nhau, phương pháp giải quyết có thể khác nhau hoàn toàn. Do đó dạng tổng quát của nguồn nhiệt như trong [51] nếu chưa xét đến các điều kiện thì chưa thể so sánh thỏa đáng được. Thực tế, Isakov đã chứng minh được rằng nếu có điều kiện

$$(9.1.1) \quad 0 \leq \varphi, 0 \leq \varphi_t \text{ trên } Q \text{ và } \varphi > \varepsilon > 0 \text{ trên } \Omega \times (T)$$

thì bài toán ổn định nghiệm trong không gian các hàm có đạo hàm liên tục với cấp thích hợp. Vậy với điều kiện này, bài toán trở thành chỉnh trong $C^{(2+\lambda)}$ ([51] không xét bài toán trên trong không gian các hàm khả tích L^2 với điều kiện đầu và cuối cũng thuộc L^2). Tuy nhiên, nếu điều kiện (9.1.1) nói trên không thỏa thì như chúng tôi đã trích dẫn, bài toán có thể không duy nhất nghiệm (xem [51], trang 222), nghĩa là bài toán trở thành không chỉnh. Trong công trình [79], các điều kiện trên hàm φ được giảm nhẹ rất nhiều (xem Chương 4 của luận án) và do đó nằm ngoài phạm vi của các kết quả trình bày trong [50, 51].

Thứ tư, để thực hiện chỉnh hóa một cách tường minh, chúng tôi sử dụng các điều kiện dạng Dirichlet trên một phần biên do các ý nghĩa vật lý của bài toán. Việc chỉnh hóa mà không sử dụng thêm các điều kiện Dirichlet đang được nghiên cứu tiếp tục, chúng tôi hy vọng rằng sẽ có tiến triển trong tương lai gần.

Các kết quả của chúng tôi đã được công bố trong bài báo [79] và là nội dung của chương 4.

Cuối cùng, chúng tôi xin thảo luận về các phương pháp chỉnh hóa được sử dụng trong luận án này đồng thời cũng thảo luận về nội dung của Chương 2 của luận án. Để tiện lợi trong các thảo luận về sau, chúng tôi nêu lên định nghĩa của sự chỉnh hóa. Vì trong luận án có sự chỉnh hoá các bài toán phi tuyến nên chúng tôi định nghĩa lấy ý tưởng trong [78, trang 43]

Xét phương trình

$$Au = f, \quad u \in D(A) \subset X, f \in Y$$

trong đó X và Y là các không gian metric với metric d và ρ , A là toán tử từ X vào Y . Giả sử u_{ex} (gọi là *nghiệm chính xác*, exact solution) và f_{ex} (gọi là *dữ liệu chính xác*, exact data) thỏa $Au_{\text{ex}} = f_{\text{ex}}$. Toán tử $R_{\alpha}(f)$ (phụ thuộc vào tham số α và có thể không tuyến tính) gọi là *toán tử chỉnh hóa* cho phương trình $Au=f$ trong một lân cận mở W của f_{ex} nếu

A. tồn tại một số $\delta_1 > 0$ sao cho R_{α} xác định với mọi $\alpha > 0$ và với mọi $f \in W$ trên sao cho $\rho(f_{\text{ex}}, f) \leq \delta \leq \delta_1$

B. với mọi $\varepsilon \in (0, \delta_1)$ ta tìm được $\alpha(\varepsilon)$ và $\omega(\varepsilon)$ thỏa

$$\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ khi } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$\omega(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ khi } \varepsilon \rightarrow 0$$

và nếu $\rho(f_{\text{ex}}, f_{\varepsilon}) \leq \varepsilon$

thì

$$d(u_{\varepsilon}, u_{\text{ex}}) \leq \omega(\varepsilon)$$

với $u_{\varepsilon} = R_{\alpha(\varepsilon)}(f_{\varepsilon})$.

Trường hợp tham số α là số tự nhiên thì trong định nghĩa trên ta thay điều kiện tiến về 0 của $\alpha(\varepsilon)$ bởi điều kiện $\alpha(\varepsilon) \rightarrow \infty$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$.

Số α gọi là *tham số chỉnh hóa*. Hàm u_ε gọi là *nghiệm chỉnh hóa* của bài toán, Dữ liệu f_ε gọi là *dữ liệu không chính xác* (inexact data). Thông thường *dữ liệu đo đạc* (measured data) hay *dữ liệu được cho* (given data) của bài toán không phải là f_ε . Hàm f_ε là kết quả phối hợp của các *dữ liệu được cho* thông qua nhiều phép toán khác nhau nên chỉ có thể gọi là *dữ liệu có được do tính toán* (calculated data) từ các dữ liệu được cho hay gọi là các *dữ liệu thứ cấp* (tạm gọi là processed data). Sai số so với dữ liệu chính xác thường được ngầm định cho *dữ liệu được cho* và có thể gọi là sai số ban đầu. Sai số trên các *dữ liệu thứ cấp* phải được đánh giá từ sai số ban đầu trên dữ liệu được cho.

Như vậy qua định nghĩa của nghiệm chỉnh hóa ta thấy có hai bài toán riêng. Thứ nhất là tìm toán tử chỉnh hóa R_α . Thứ hai là tìm một phương pháp chọn tham số chỉnh hóa $\alpha(\varepsilon)$. Nhiều công trình về chỉnh hóa chỉ giải quyết vấn đề thứ nhất, còn vấn đề thứ hai được phát biểu dưới dạng “tồn tại”. Như đã được phân tích trong [1], các phương pháp giải có thể được chia thành hai loại: phương pháp phổ quát (universal) và phương pháp được định hướng vào bài toán (problem-oriented) hay còn gọi là phương pháp trực tiếp (direct methods). Chẳng hạn phương pháp chỉnh hóa Tikhonov là một phương pháp phổ quát có thể áp dụng cho các lớp bài toán rất rộng. Trong phương pháp trực tiếp, ta xem xét các yêu cầu cụ thể trên các dữ liệu và do đó, phạm vi áp dụng của nó hẹp hơn. Bù lại, các phương pháp chỉnh hóa trực tiếp đơn giản hơn và có thể mang lại sự xấp xỉ tốt trong từng trường hợp. Khi sử dụng phương pháp phổ quát như chỉnh hóa Tikhonov, chúng tôi thường gặp khó khăn khi phải chọn tham số chỉnh hóa $\alpha(\varepsilon)$

nếu không sử dụng một vài điều kiện (rất khó kiểm tra) chẳng hạn như $f \in \text{Range } A^*$ (xem [38]). Theo chúng tôi, một trong những dấu hiệu để phân biệt một phương pháp là trực tiếp hay không có thể dựa trên việc chọn toán tử chỉnh hóa và tham số chỉnh hóa có cụ thể hay không. Còn định nghĩa thế nào là cụ thể thì xin trích một đoạn văn hóm hỉnh của giáo sư Groesch: “... we find ourselves in a position akin to that experienced by Justice Potter Stewart who, in referring to pornography, said he couldn’t define it, but he knew it when he saw it”. Theo cách thao tác xử lý trên các yếu tố của bài toán, chúng ta có thể phân thành ba loại chỉnh hóa. Thứ nhất, ta xấp xỉ dữ kiện hay thu hẹp không gian để bài toán trở thành chỉnh và giải bài toán, phương pháp mollification được sử dụng trong [41, 47, ...] có thể xếp vào loại này. Thứ hai, ta xấp xỉ phương trình để được bài toán chỉnh và giải, các phương pháp quasi-reversibility, quasi-boundary value, ... có thể xếp vào loại này. Thứ ba, chỉnh hóa bằng cách xấp xỉ trực tiếp các nghiệm, phương pháp chỉnh hóa Fourier (xem [33]), phương pháp chặt cụt giá trị kỳ dị (truncated singular value decomposition), phương pháp chặt cụt tần số xấu trong các ảnh Fourier đều thuộc loại này.

Luận án này theo quan điểm sử dụng các phương pháp trực tiếp. Vì vậy, chúng tôi chú ý nhiều vào các phương pháp cho phép biểu diễn nghiệm tường minh và chọn tham số chỉnh hóa cụ thể. Phương pháp được sử dụng nhiều nhất là phương pháp chặt cụt (truncation). Phương pháp chặt cụt bao gồm rất nhiều loại khác nhau, chẳng hạn chặt cụt chuỗi, chặt cụt đa thức, chặt cụt tích phân ... Chặt cụt có ý nghĩa là khử các yếu tố “xấu” trong biểu diễn của một hàm số. Trong lĩnh vực bài toán không chỉnh, các yếu tố “xấu” là các yếu tố làm nghiệm bài toán mất ổn định.

Ta có thể minh họa bằng phương pháp chỉnh hóa chặt cụt giá trị kỳ dị. Nhắc lại rằng nếu X, Y là hai không gian Hilbert và $A : X \rightarrow Y$ là toán tử compact tuyến tính liên tục, giả sử $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ ($\lambda_j \rightarrow 0$ khi $j \rightarrow \infty$) là các giá trị riêng của A^*A tương ứng với các hệ các véctơ riêng trực giao (e_j) trong X . Đặt

$$\sigma_j = \lambda_j^{1/2}; f_j = \sigma_j^{-1} A e_j$$

thì σ_j gọi là giá trị kỳ dị và ta có khai triển sau với mọi $x \in X$

$$x = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \langle x, e_j \rangle, x_0 \in \text{Ker } A$$

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \langle x, e_j \rangle f_j.$$

Các khai triển này gọi là sự phân tích giá trị kỳ dị của A (singular value decomposition of A). Nếu $Ax_0 = y_0$ và A đơn ánh thì

$$x_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j \langle y_0, e_j \rangle e_j.$$

Bây giờ, để xây dựng phép chỉnh hóa, ta có thể sử dụng tổng

$$x_\varepsilon = \sum_{\sigma_j > \varepsilon} \sigma_j \langle y_0, e_j \rangle e_j.$$

Sơ đồ chỉnh hóa này được gọi là chặt cụt các giá trị kỳ dị (truncated singular value decomposition hay TSVD, xem [15], trang 79-80, [38], trang 100).

Trong luận án, chúng tôi có xét tới hai loại chặt cụt: *chặt cụt chuỗi* và *chặt cụt tần số xấu trong các ảnh Fourier*. Phương pháp chặt cụt chuỗi dựa trên các khai triển trực giao trong không gian Hilbert và khử các số hạng sau của chuỗi. Phương pháp này cổ điển nhưng áp dụng để chọn tham số chỉnh hóa thường minh rất tốt. Trong Chương 1 chúng tôi sử dụng khai triển trực giao theo các đa thức shifted-Legendre trong $L^2(0,1)$ và chặt cụt chuỗi để được một xấp xỉ ổn định.

Phương pháp chặt cụt tần số xấu trong các ảnh Fourier là tên gọi chính xác hơn của *phương pháp chặt cụt tích phân* sử dụng trong luận án này. Trước hết, ta cần một giải thích ngắn về từ “tần số xấu”. Về đại thể, một số phương trình vi phân, tích phân có thể viết được dưới dạng bài toán tìm hàm u thỏa

$$K(\xi)\hat{u} = \hat{f}(\xi)$$

với \hat{f} là biến đổi Fourier của hàm f (thường là dữ liệu thứ cấp tính từ *dữ liệu được cho* hay từ các *dữ liệu đo đạc*). Với mọi ξ không nằm trong tập hợp

$$D = \{\xi : K(\xi) = 0\}$$

thì ta có thể viết $\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)K^{-1}(\xi)$. Để có thể ổn định hóa công thức trên ta phải loại bỏ các ξ thuộc D (tạm gọi là *tần số kỳ dị, singular frequency*) và các ξ có $|\xi|$ lớn (tạm gọi là *tần số cao, high frequency*). Hai loại tần số này có thể gọi chung là các *tần số xấu (bad frequency)*. Các phương pháp chặt cụt tích phân Fourier mà chúng tôi biết được đều ở dạng chặt cụt các tần số cao. Trong cuốn sách kinh điển của Tikhonov Arsenin [78] (Chương 4, trang 97) ta thấy phương pháp chặt cụt đã được phát biểu. Hiện tại chúng tôi biết được có hai loại chặt cụt. Loại *chặt cụt tần số cao của ảnh Fourier của dữ liệu* trình bày trong phương pháp mollification và loại *chặt cụt tần số cao của nhân K* trình bày trong phương pháp có tên Fourier regularization hay có tên chặt cụt tích phân (được nhóm chúng tôi sử dụng). Thật ra phương pháp chặt cụt tích phân mà chúng tôi trình bày là phương pháp *chặt cụt các tần số xấu của nhân K* .

Phương pháp mollification do Đinh Nho Hòa phát triển trong các công trình [41, 44, 47, ...] dựa trên sự chặt cụt các *tần số cao của ảnh Fourier của dữ liệu* (xem [41], “... we mollify φ_ε in such a way that its mollification does not have high frequencies ...”). Trong phương pháp mollification, ảnh Fourier được của dữ liệu được nhân với một hàm đặc trưng của khoảng $[-v, v]$ (ảnh ngược chập với

hàm dạng *nhân Dirichlet*) hay nhân với ảnh Fourier của *nhân de la Vallé Poussin* cũng có giá compact (xem [47]). Đánh giá rất cao *the mollification method proposed by Dinh Nho Hao*, giáo sư G. Anger mô tả như sau: “If the data are given inexactly then one tries to find a sequence of “mollification operators” which maps the improper data into well-posedness classes of the problem” và “In classical topology the following (Tikhonov) is well known: If A is compact one-to-one mapping defined on a compact space onto its image $A(K)$, then the inverse A^{-1} is continuous...” khi bình luận về công trình [40, 41]. D. N. Hào đã mở rộng một cách không tầm thường các kết quả của mình sang trường hợp không gian L^p nghĩa là cho không gian Banach, trên đó định lý Plancherel không còn đúng nữa.

Phương pháp chỉnh hóa Fourier (Fourier regularization) hiện đang được áp dụng bởi nhóm của Chu Li Fu ở đại học Lanzhou (Trung Quốc) thuộc loại chặt cắt tần số cao (xem [33]). Việc khảo sát của nhóm nghiên cứu ở Thành phố Hồ Chí Minh do giáo sư Đặng Đình Áng hướng dẫn đã đóng góp nhiều bài cho hướng chặt cắt các tần số cao (xem các bài [18, 77, ...]).

Như vậy chúng ta có thể hình dung được phần nào về sự phong phú của các danh từ dùng để chỉ cho phương pháp này. Do phương pháp này có tính từ *chặt cắt (truncated)* với nội hàm quá rộng như vậy nên đã có người nhầm lẫn, xem phương pháp này là trường hợp đặc biệt của phương pháp chặt cắt giá trị kỳ dị (TSVD). Như đã bàn tới trong phần chặt cắt chuỗi, ta có thể thấy ngay hai phương pháp hoàn toàn khác nhau.

Trong luận án này chúng tôi đề cập đến phương pháp chặt cụt *các tần số xấu của nhân*, trong đó có các tần số kỳ dị. Trong [78], các tác giả đã đưa ra bốn loại nhân $K(\xi)$ trong đó các nhân loại 2, 3, 4 có thể có tần số kỳ dị (xem [78], Chương 3, trang 105). Sử dụng phương pháp chỉnh hóa Tikhonov và phép tính thặng dư, các tác giả đã đưa ra một số đánh giá cho phương pháp chỉnh hóa Tikhonov. Trong [15], chương 10, trang 183-184, tác giả đã khảo sát bài toán phương trình tích chập với hai loại nhân, trong đó, loại nhân $K(\xi)$ thứ nhất có thể có vô hạn đếm được các tần số kỳ dị. Với một số điều kiện phức tạp, Baumeister cũng sử dụng phương pháp Tikhonov để chỉnh hóa bài toán với các đánh giá sai số. Trong chương hai của luận án, chúng tôi sử dụng phương pháp chặt cụt tích phân để chỉnh hóa *hệ n phương trình tích chập*. Chúng tôi chưa tìm được công trình nào nghiên cứu về loại hệ này. Các đánh giá trong trường hợp $n=1$ của luận án cũng đạt kết quả về sai số như Baumeister.

Khi nghiên cứu đề tài này, chúng tôi mới thấy được nhiều cái khó của vấn đề. Vì số lượng các nghiên cứu về lĩnh vực này quá nhiều, các phương pháp cũng đã được sử dụng rất nhiều nên dễ có cảm giác tất cả đều đã được nghiên cứu. Tuy nhiên, như chúng tôi đã phân tích, số lượng các loại bài toán truyền nhiệt ngược khác nhau là rất nhiều. Ngay cả với cùng một loại bài toán, do cách đặt vấn đề, do các điều kiện trên dữ kiện cho trước và do phương pháp sử dụng mà các kết quả thu được cũng khác nhau. Ngoài ra, do định hướng của chúng tôi là nghiên cứu theo phương pháp trực tiếp chứ không phải phương pháp phổ quát nên chúng tôi không đặt ra vấn đề tổng quát hóa các kết quả và cũng không so sánh tính tổng quát của nó với các kết quả đã biết. Các bài toán chúng tôi xét tới luôn có những đặc điểm không trùng với các bài toán nhiệt trong các công trình mà chúng tôi biết nên cũng khó xem xét vấn đề kết quả mạnh hay yếu nếu so

sánh với các kết quả mà chúng tôi biết vì chúng ta chỉ có thể so sánh kết quả của cùng một bài toán với cùng một giả thiết như nhau. Do đó, chúng tôi cho rằng những kết quả của luận án này là những kết quả mới, là bước đầu trong nghiên cứu của chúng tôi. Chúng tôi cũng không có ý định viết tổng quan về bài toán nhiệt ngược vì sự hạn chế về tài liệu và trình độ của chúng tôi. Do yêu cầu của các phản biện, chúng tôi đã thực hiện một số so sánh với các công trình liên quan. Chúng tôi xin cảm ơn những ý kiến đóng góp xác đáng của các chuyên gia, nhờ vậy chúng tôi đã tìm hiểu được thêm nhiều điều về bài toán nhiệt ngược bổ sung cho các hiểu biết ít ỏi của mình.

MỘT SỐ KẾT QUẢ SỬ DỤNG TRONG LUẬN ÁN

1. Định lý ánh xạ co

Cho X là một không gian Banach với chuẩn $\|\cdot\|$, M là một tập hợp đóng trong không gian X , ánh xạ $f : M \rightarrow M$ thỏa

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k \|x_1 - x_2\| \text{ với mọi } x_1, x_2 \text{ trong } M \text{ (với } 0 < k < 1).$$

Thì tồn tại duy nhất một điểm bất động của f , nghĩa là có duy nhất phần tử $x_0 \in M$ sao cho $f(x_0) = x_0$.

2. Công thức Green

2.1 Công thức Green

Cho Ω là một miền bị chặn trong \mathbb{R}^n , $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ thì ta có

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

2.2 Công thức Green mở rộng

Cho Ω là một miền bị chặn trong \mathbb{R}^n với biên $\partial\Omega$ trơn, với $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ thì ta có

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma.$$

3. Tích chập và biến đổi Fourier một chiều

3.1 Định nghĩa tích chập và biến đổi Fourier

Cho $f \in L^1(\mathbb{R})$ và $g \in L^2(\mathbb{R})$, định nghĩa

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{và } \hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixt} dx \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\widehat{g}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N g(x) e^{-ixt} dx \quad (t \in \mathbb{R})$$

3.2 Các tính chất cơ bản

3.2.1 Nếu $f \in L^1(\mathbb{R})$ và $g \in L^1(\mathbb{R})$ thì

$$\widehat{f * g}(t) = \widehat{f}(t) \widehat{g}(t).$$

3.2.2 Nếu $f \in L^1(\mathbb{R})$ và đạo hàm của f là $f' \in L^1(\mathbb{R})$ thì

$$\widehat{f'}(t) = it \widehat{f}(t).$$

3.2.3 Định lý Plancherel

Nếu $f \in L^2(\mathbb{R})$ thì $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

3.2.4 Cho $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ và $g \in L^p(\mathbb{R})$. Ta có :

$$f * g \in L^p(\mathbb{R}) \text{ và } \|f * g\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \|g\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

4. Tích chập và biến đổi Fourier nhiều chiều

Cho $k = 2, 3, 4, \dots$ ta định nghĩa tương tự như trên

$$(f * g)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} f(x-y)g(y)dy \quad (x \in \mathbb{R}^k)$$

$$\text{và } \widehat{f}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \int_{\mathbb{R}^k} f(x) e^{-i(x_1 t_1 + x_2 t_2 + \dots + x_k t_k)} dx_1 dx_2 \dots dx_k$$

trong đó $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ và $t = (t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k$.

Các tính chất trong phần này tương tự như tính chất của tích chập và biến đổi Fourier một chiều.

5. Bất đẳng thức Gronwall

Cho $T > 0$, $\lambda \in L^1(0, T)$, $\lambda \geq 0$ hầu khắp nơi và $C_1, C_2 \geq 0$. Giả sử $\varphi \in L^1(0, T)$, $\varphi \geq 0$ hầu khắp nơi sao cho $\lambda \varphi \in L^1(0, T)$

1) Nếu $\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds$, hầu khắp nơi trong $(0, T)$, thì ta có

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_0^t \lambda(s)ds\right) \text{ hầu khắp nơi trong } (0, T).$$

2) Nếu $\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_t^T \lambda(s)\varphi(s)ds$, hầu khắp nơi trong $(0, T)$, thì ta có

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp\left(C_2 \int_t^T \lambda(s)ds\right) \text{ hầu khắp nơi trong } (0, T).$$

6. Định lý Hadamard [63, trang 18]

6.1 Định nghĩa bậc của hàm nguyên f

Bậc của hàm nguyên f là

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}$$

trong đó

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

6.2 Số mũ hội tụ (convergence exponent)

Cho một dãy số $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, chặn dưới lớn nhất của λ sao

cho $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\lambda}$ hội tụ gọi là số mũ hội tụ.

6.3 Định lý Hamadard

Số mũ hội tụ của các không điểm (các zero) của một hàm nguyên không vượt quá bậc của hàm nguyên đó.

Ghi chú :

Đạo hàm riêng của $f(x,y)$ theo biến x có thể ký hiệu là f_x hoặc $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Chương 1

DẠNG RỜI RẠC CỦA BÀI TOÁN NHIỆT NGƯỢC THỜI GIAN TRÊN MẶT PHẪNG

Chương này đã công bố trong [6] (của danh mục công trình công bố của tác giả).

1.1 MỞ ĐẦU

Gọi $u = u(x, y, t), (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0$ là nhiệt độ của một bản không bị chặn mô hình bởi

$$u_t - \Delta u = 0, (x, y) \in \mathbb{R}^2, t > 0.$$

Chúng ta xét bài toán tìm nhiệt độ đầu $u(x, y, 0)$ từ tập hợp đếm được những giá trị của nhiệt độ cuối $u(x_m, y_n, 1)$. Đây là bài toán của một dạng rời rạc của bài toán nhiệt ngược thời gian cổ điển. Như đã biết bài toán cổ điển này là không chỉnh và tài liệu tương ứng gần đây, trong hai khía cạnh lý thuyết và tính toán (chẳng hạn [4, 17, 67]), rất gây ấn tượng. Mặc dù vậy, trong nhiều trường hợp thực tế, ta chỉ có thể đo nhiệt độ tại một tập điểm rời rạc của mặt phẳng. Do đó, việc xác định nhiệt độ đầu $u(x, y, 0)$ từ dữ liệu cuối rời rạc là cần thiết. Trong [13] Chương 7, bài toán được xem xét với giả thiết $\text{supp } u(x, y, 0)$ nằm trong góc phần tư thứ nhất của mặt phẳng. Trong chương này, chúng tôi xét bài toán trong trường hợp $\text{supp } u(x, y, 0)$ có thể là toàn bộ mặt phẳng. Trước tiên chúng tôi sử dụng tính chất của hàm nguyên để chứng minh một kết quả về tính duy nhất trong trường hợp tập của những điểm (x_m, y_n) đủ trù mật trên mặt phẳng. Sau đó sử dụng đa thức Legendre và nghiệm bài toán moment Hausdorff [12] chúng tôi sẽ xây dựng nghiệm chỉnh hóa cho bài toán tương ứng với tập cụ thể của những điểm. Việc đánh giá sai số tương minh sẽ được thực hiện.

1.2 TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM

Cụ thể, chúng ta xét bài toán xác định một hàm $v_0(x, y) = u(x, y, 0)$, trong đó u thỏa

$$\begin{cases} \Delta u = u_t & (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \\ u(x_m, y_n, 1) = \frac{1}{4\pi} f_{mn}^0 \end{cases}$$

trong đó u, u_x, u_y bị chặn trong $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$.

Sử dụng hàm Green

$$G(x, y, t, \xi, \eta, \tau) = \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right\}$$

ta có thể biến đổi bài toán về phương trình tích phân

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{(x_m - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2}{4}\right] d\xi d\eta = f_{mn}^0, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (1.2.1)$$

Bây giờ chúng ta phát biểu (và chứng minh) kết quả về tính duy nhất nghiệm.

Định lý 1.2.1

Cho $\delta > 0$ và $(x_m), (y_n)$ là hai dãy của những số thực phân biệt đôi một trong $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Giả sử rằng

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|x_m|^{2+\delta}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|y_n|^{2+\delta}} = \infty.$$

Khi đó bài toán (1.2.1) có nhiều nhất một nghiệm $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Ghi chú: Ta chú ý rằng nếu (x_m) và (y_n) có điểm tụ thì điều kiện trên được thỏa.

Chứng minh

Để chứng minh định lý trước tiên ta cần bổ đề sau

Bổ đề 1.2.1 Với $k > 0$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ đặt

$$W(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-k(z-t)^2} dt.$$

Gọi $\delta > 0$ và (α_m) là dãy các số thực phân biệt trong $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_m|^{2+\delta}} = \infty.$$

Nếu $W(\alpha_m) = 0$, $m=1, 2, \dots$ thì $f \equiv 0$ hầu khắp nơi.

Chứng minh Bổ đề 1.2.1

Ta chỉ ra rằng W là hàm nguyên có bậc ≤ 2 . Ta có

$$W(re^{i\theta}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-k(re^{i\theta}-t)^2} dt \quad r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$$

và

$$\begin{aligned} |W(re^{i\theta})| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-k \operatorname{Re}(re^{i\theta}-t)^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-k(r \cos \theta - t)^2 + kr^2 \sin^2 \theta} dt. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} \frac{|W(re^{i\theta})|}{e^{kr^2}} &= e^{-kr^2 \cos^2 \theta} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| e^{-k(r \cos \theta - t)^2} dt \\ &\leq e^{-kr^2 \cos^2 \theta} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 e^{-k(r \cos \theta - t)^2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k(r \cos \theta - t)^2} dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

với $r > 0$.

Do đó, $W(z)$ là hàm nguyên có bậc ≤ 2 . Chúng ta khẳng định rằng $W \equiv 0$.

Giả sử $W \neq 0$, chú ý rằng α_m là không điểm của W . Sử dụng định lý Hadamard

(xem phần một số kết quả sử dụng trong luận án hay [63], trang 18), chặn dưới lớn nhất của λ thỏa mãn

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_m|^\lambda} < \infty,$$

nghĩa là, số mũ hội tụ của (α_m) là ≤ 2 . Điều này mâu thuẫn giả thiết của (α_m) .

Vì thế ta có $W \equiv 0$. Điều này dẫn đến

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-kt^2} e^{2kzt} dt = 0$$

cho mọi $z \in \mathbb{C}$.

Sử dụng biến đổi Fourier ngược ta có $f = 0$ hầu khắp nơi.

Bổ đề 1.2.1 đã được chứng minh. Bây giờ ta chứng minh định lý 1.2.1.

Chứng minh định lý 1.2.1

Với $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, đặt

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, z_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_0(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{(z_1 - \xi)^2 + (z_2 - \eta)^2}{4}\right] d\xi d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} v_0(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{(z_2 - \eta)^2}{4}\right] d\eta \right) e^{-\frac{(z_1 - \xi)^2}{4}} d\xi. \end{aligned}$$

Sử dụng bổ đề 1.2.1 cho

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{(y_n - \eta)^2}{4}\right] d\eta,$$

$$\alpha_m = x_m, W(z) = \Phi(z, y_n)$$

ta nhận được

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_0(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{(y_n - \eta)^2}{4}\right] d\eta = 0$$

cho $n = 1, 2, \dots$ và cho hầu hết $\xi \in \mathbb{R}$.

Sử dụng bổ đề 1.2.1 một lần nữa, ta nhận được $v_0 = 0$ hầu khắp nơi.

Định lý 1.2.1 đã được chứng minh. ■

1.3 NGHIỆM CHÍNH HÓA

Trong những kết quả sau, ta giả sử rằng $x_m = -2(1+m)$ và $y_n = -2(1+n)$. Ta chú ý rằng, trong trường hợp này

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{x_m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_n^2} < \infty$$

nghĩa là dãy $\{(x_m, y_n)\}$ là không đủ trù mật. Do đó, thêm một vài giả thiết trên v_0 là hợp lý.

Đặt

$$D_a = [-\ln a, +\infty) \times [-\ln a, +\infty), \quad a > 0 \tag{1.3.1}$$

và

$$h(a) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_a} |v_0(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \tag{1.3.2}$$

Ta chú ý rằng $h(a)$ là hàm giảm.

Sử dụng những ký hiệu trên, ta có định lý sau trong đó nghiệm chỉnh hóa được xây dựng.

Định lý 1.3.1

Giả sử $\varepsilon > 0$ và dữ liệu đo đạc là $f_{mn} \equiv 4\pi u(x_m, y_n, 1)$ thỏa

$$\sup_{m,n} |f_{mn} - f_{mn}^0| \leq \varepsilon, \tag{1.3.3}$$

trong đó $x_m = -2(1+m)$ và $y_n = -2(1+n)$.

Giả sử phương trình (1.2.1) có nghiệm $v_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ tương ứng dữ liệu chính xác (f_{mn}^0) và $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \ln \frac{1}{h(a)} = \infty$ trong đó $h(a)$ xác định trong (1.3.2).

Khi đó từ (f_{mn}) ta có thể xây dựng nghiệm chỉnh hóa v_ε của v_0 thỏa

$$v_\varepsilon g \in L^2(\mathbb{R}^2)$$

và

$$\|g(v_\varepsilon - v_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \varphi(\varepsilon)$$

trong đó $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$, $g(\xi, \eta) = e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{4} - \frac{\xi + \eta}{2}}$.

Hơn nữa, giả sử thêm $0 < \varepsilon < e^{-16}$ và tồn tại $k > 0$ sao cho $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{a} \ln \frac{1}{h(a)}}{\ln a} = k$

thì

$$\begin{aligned} \|g(v_\varepsilon - v_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq D_1 \exp\left(-2\sqrt{\frac{-1}{2k} \ln \sqrt{\varepsilon}}\right) + \\ &+ D_2 \left(k \ln\left(\frac{-1}{2k} \ln \sqrt{\varepsilon}\right)\right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+ D_3 \exp\left(-\frac{1}{32} \ln^2\left(\frac{-1}{2k} \ln \sqrt{\varepsilon}\right)\right), \end{aligned}$$

trong đó D_1, D_2 và D_3 là các hằng số dương độc lập với ε .

Chứng minh

Chứng minh của định lý được chia thành ba bước. Trong bước 1, chúng ta sẽ biến đổi bài toán về bài toán Hausdorff hai chiều. Trong bước 2, chúng ta sẽ xây dựng một nghiệm chính hóa của bài toán. Cuối cùng, trong bước 3, chúng ta đánh giá sai số.

Bước 1: Biến đổi bài toán về bài toán Hausdorff hai chiều

Chúng ta nhắc lại rằng

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{(x_m - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2}{4}\right] d\xi d\eta = f_{mn}^0.$$

Gọi $N > e$ và đặt $D_N = [-\ln N, +\infty) \times [-\ln N, +\infty)$ như trong (1.3.1), ta có

$$\int_{-\ln N}^{+\infty} \int_{-\ln N}^{+\infty} v_0(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{(x_m - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2}{4}\right] d\xi d\eta =$$

$$= f_{mn}^0 - \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_N} v_0(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{(x_m - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2}{4}\right] d\xi d\eta. \quad (1.3.4)$$

Từ phương trình (1.3.4), ta sẽ xấp xỉ (1.3.4) bởi bài toán tìm hàm $v(x,y)$ thỏa mãn phương trình

$$\int_{-\ln N}^{+\infty} \int_{-\ln N}^{+\infty} v_0(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{(x_m - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2}{4}\right] d\xi d\eta = f_{mn} \quad (1.3.5)$$

trong đó (f_{mn}) xác định trong (1.3.3).

Đặt $\xi = -\ln(Ns)$ và $\eta = -\ln(Nt)$, (1.3.5) trở thành

$$\int_0^1 \int_0^1 w(s, t) s^{\frac{x_m-1}{2}} t^{\frac{y_n-1}{2}} ds dt = f_{mn} e^{\frac{x_m^2+y_n^2}{4}} \cdot N^{\frac{x_m+y_n}{2}} \quad (1.3.6)$$

trong đó

$$w(s, t) = v(-\ln(Ns), -\ln(Nt)) \cdot e^{\frac{\ln^2(Ns)+\ln^2(Nt)}{4}}.$$

Đặt

$$\mu_{mn} = f_{mn} e^{\frac{x_m^2+y_n^2}{4}} \cdot N^{\frac{x_m+y_n}{2}}$$

ta có bài toán Hausdorff hai chiều:

$$\int_0^1 \int_0^1 w(s, t) s^m t^n ds dt = \mu_{mn}, \text{ với } m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.7)$$

Chú ý rằng nếu đặt

$$w_0(s, t) = v_0(-\ln(Ns), -\ln(Nt)) \cdot e^{\frac{\ln^2(Ns)+\ln^2(Nt)}{4}} \quad (1.3.8)$$

thì w_0 là nghiệm chính xác của phương trình

$$\int_0^1 \int_0^1 w_0(s, t) s^m t^n ds dt = \Psi_{mn},$$

trong đó

$$\Psi_{mn} = \mu_{mn}^0 - e^{\frac{x_m^2 + y_n^2}{4}} \cdot N^{\frac{x_m + y_n}{2}} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_N} v_0(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{(x_m - \xi)^2 + (y_n - \eta)^2}{4}\right] d\xi d\eta$$

và
$$\mu_{mn}^0 = f_{mn}^0 e^{\frac{x_m^2 + y_n^2}{4}} \cdot N^{\frac{x_m + y_n}{2}} . \tag{1.3.9}$$

Bước 2: Xây dựng nghiệm chính hóa

Ta xây dựng cơ sở trực chuẩn trong $L^2(I)$, $I = (0,1) \times (0,1)$, bằng cách sử dụng đa thức Legendre trong [12] được xác định bởi

$$L_n^*(x) := \sum_{k=0}^n C_{nk} x^k , \tag{1.3.10}$$

với

$$C_{nk} = \sqrt{1 + 2n} (-1)^{n-k} \frac{(n+k)!}{(n-k)!(k!)^2} . \tag{1.3.11}$$

Bây giờ đặt $L_{mn}^*(s, t) = L_m^*(s)L_n^*(t)$.

Vì (L_m^*) là một cơ sở trực chuẩn trong $L^2(0,1)$, dãy (L_{mn}^*) là họ trực chuẩn đầy đủ trong $L^2(I)$. Ta có

$$L_{mn}^*(s, t) = \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^n C_{ml} C_{nk} s^l t^k .$$

Nếu $\mu = (\mu_{mn})$ là dãy số thực xác định trong (1.3.7), ta định nghĩa

$$\lambda = \lambda(\mu) = (\lambda_{mn}) \quad m, n = 0, 1, \dots$$

như sau

$$\lambda_{mn} = \lambda_{mn}(\mu) = \sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^n C_{ml} C_{nk} \mu_{lk} .$$

Bây giờ, đặt

$$p^r = p^r(\mu) = \sum_{m,n=0}^r \lambda_{mn}(\mu) L_{mn}^* \quad r=1, 2, \dots \tag{1.3.12}$$

ta nhận được chiếu trực chuẩn của w (trong (1.3.7)) trên không gian $\{L_{mn} | 1 \leq m, n \leq r\}$.

Đặt

$$q^r(\xi, \eta) = e^{\frac{\xi^2 + \eta^2}{4}} p^r\left(\frac{e^{-\xi}}{N}, \frac{e^{-\eta}}{N}\right) \quad r=1,2,\dots \quad (1.3.13)$$

Ta sẽ chứng minh rằng q^r là nghiệm xấp xỉ của v_0 .

Bước 3: Đánh giá sai số

Để chứng minh định lý 1.3.1 ta cần hai bổ đề sau đây :

Bổ đề 1.3.1 (xem chứng minh trong [12])

Với $w_0, \Psi = (\Psi_{mn})$ được xác định trong (1.3.8), (1.3.9). Nếu $w_0 \in H^1(I)$ thì

$$\|p^r(\Psi) - w_0\|_{L^2(I)} \leq \frac{1}{r+1} (F(w_0))^{1/2} \quad (r \in \mathbb{N})$$

trong đó

$$F(w_0) = \int_I s(1-s) \left| \frac{\partial w_0}{\partial s} \right|^2 ds + \int_I t(1-t) \left| \frac{\partial w_0}{\partial t} \right|^2 dsdt.$$

Bổ đề 1.3.2 (xem chứng minh trong [12])

Với C_{mk} xác định trong (1.3.11). Ta có

$$\sum_{k=0}^m |C_{mk}| \leq 2 \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{2}}} (3+2\sqrt{2})^m.$$

Bây giờ, ta tiếp tục chứng minh định lý 1.3.1.

Ta có

$$\|p^r(\mu) - w_0\|_{L^2(I)} \leq \|p^r(\mu) - p^r(\Psi)\|_{L^2(I)} + \|p^r(\Psi) - w_0\|_{L^2(I)}. \quad (1.3.14)$$

Từ (1.3.12), ta nhận được

$$p^r(\mu) - p^r(\Psi) = \sum_{m,n=0}^r \left(\sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^n C_{ml} C_{nk} (\mu_{lk} - \Psi_{lk}) \right) L_{mn}^*. \quad (1.3.15)$$

Với $N > 1, \gamma \geq \ln N$ ta có

$$\max_{0 \leq x \leq \gamma} e^{x^2} N^{-x} \leq e^{\gamma^2} N^{-\gamma}.$$

Vì thế ,ta có, với $r > \ln N - 1, 0 \leq l, k \leq r,$

$$e^{\frac{x_l^2}{4}} N^{\frac{x_l}{2}} \leq e^{(r+1)^2} N^{-(r+1)},$$

và

$$e^{\frac{y_k^2}{4}} N^{\frac{y_k}{2}} \leq e^{(r+1)^2} N^{-(r+1)},$$

trong đó nhắc lại rằng $x_l = -2(1+l), y_k = -2(1+k).$

Điều này dẫn đến

$$e^{\frac{x_l^2 + y_k^2}{4}} N^{\frac{x_l + y_k}{2}} \leq e^{2(r+1)^2} N^{-2(r+1)}.$$

Sử dụng bất đẳng thức trên, (1.3.2) và (1.3.9) ta có

$$\begin{aligned} |\mu_{lk} - \Psi_{lk}| &\leq |\mu_{lk} - \mu_{lk}^0| + \left[\int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_N} |v_0(\xi, \eta)| e^{-\frac{(x_l - \xi)^2 + (y_k - \eta)^2}{4}} d\xi d\eta \right] e^{\frac{x_l^2 + y_k^2}{4}} N^{\frac{x_l + y_k}{2}} \\ &\leq [\varepsilon + h(N)] e^{2(r+1)^2} \frac{1}{N^{2(r+1)}}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|p^r(\mu) - p^r(\Psi)\|_{L^2(I)}^2 &= \sum_{m,n=0}^r \left(\sum_{l=0}^m \sum_{k=0}^n C_{ml} C_{nk} (\mu_{lk} - \Psi_{lk}) \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{N^{4(r+1)}} e^{4(r+1)^2} (\varepsilon + h(N))^2 \sum_{m,n=0}^r \left(\sum_{l=0}^m |C_{ml}| \right)^2 \left(\sum_{k=0}^n |C_{nk}| \right)^2. \end{aligned}$$

Do bổ đề 1.3.2, ta có :

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=0}^r \left(\sum_{l=0}^m |C_{ml}| \right)^2 \left(\sum_{k=0}^n |C_{nk}| \right)^2 &\leq \left(\sum_{m=0}^r \left(\sum_{l=0}^m |C_{ml}| \right)^2 \right)^2 \\ &\leq \left(4 \left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{\pi\sqrt{2}} \right) \left(\sum_{m=0}^r (3 + 2\sqrt{2})^{2m} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2} (3 + 2\sqrt{2})^{4(r+1)}.$$

Suy ra

$$\|p^r(\mu) - p^r(\Psi)\|_{L^2(I)}^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} (3 + 2\sqrt{2})^{4(r+1)} e^{4(r+1)^2} \cdot \frac{1}{N^{4(r+1)}} (\varepsilon + h(N))^2 \quad (1.3.16)$$

với $r > \ln N - 1$.

Việc xây dựng nghiệm chính hóa được chia thành hai trường hợp

Trường hợp 1: $h(a) > 0$ với mọi $a > 0$.

Bởi vì $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \ln \frac{1}{h(a)} = \infty$, tồn tại $N_0 \geq 4$ sao cho $\frac{1}{N} \ln \frac{1}{h(N)} \geq 8$ với mọi

$N \geq N_0$.

Khi $0 < \varepsilon < h^2(N_0)$, gọi N_ε là nghiệm dương của phương trình $h(N) = \sqrt{\varepsilon}$.

Từ định nghĩa của N_ε ta có

$$\frac{1}{2N_\varepsilon} \ln \frac{1}{h(N_\varepsilon)} \geq 4.$$

Đặt $P(N_\varepsilon) \equiv \frac{1}{2N_\varepsilon} \ln \frac{1}{h(N_\varepsilon)}$, $r(\varepsilon) = \left[\sqrt{N_\varepsilon \cdot P(N_\varepsilon)} \right] - 1$,

trong đó $\left[\sqrt{N_\varepsilon \cdot P(N_\varepsilon)} \right]$ là số nguyên lớn nhất $\leq \sqrt{N_\varepsilon \cdot P(N_\varepsilon)}$.

Bởi vì $P(N_\varepsilon) \geq 4$, $\ln N_\varepsilon \leq \sqrt{N_\varepsilon}$ và $r(\varepsilon) + 1 \geq \frac{1}{2} \sqrt{N_\varepsilon \cdot P(N_\varepsilon)}$, ta nhận được

$r(\varepsilon) > \ln N_\varepsilon - 1$. Vì thế (1.3.16) thỏa.

Điều này dẫn đến

$$\|p^{r(\varepsilon)}(\mu) - p^{r(\varepsilon)}(\Psi)\|_{L^2(I)} \leq \alpha(N_\varepsilon)$$

trong đó $\alpha(N_\varepsilon) \equiv \frac{1}{2\pi} (3 + 2\sqrt{2})^{2\sqrt{N_\varepsilon P(N_\varepsilon)}} e^{2N_\varepsilon P(N_\varepsilon)} \cdot \frac{1}{N_\varepsilon^{2(\sqrt{N_\varepsilon P(N_\varepsilon)} - 1)}} (\varepsilon + h(N_\varepsilon))$.

Đồng thời do bổ đề 1.3.1, ta có

$$\|p^{r(\varepsilon)}(\Psi) - w_0\|_{L^2(I)} \leq \frac{(F(w_0))^{1/2}}{r(\varepsilon) + 1}.$$

Sử dụng hai bất đẳng thức trên, ta có :

$$\|p^{r(\varepsilon)}(\mu) - w_0\|_{L^2(I)} \leq \frac{(F(w_0))^{1/2}}{r(\varepsilon) + 1} + \alpha(N_\varepsilon). \quad (1.3.17)$$

Ta có

$$\frac{\partial w_0}{\partial s} = - \left(\frac{1}{s} \frac{\partial v_0}{\partial \xi} + v_0 \frac{\ln(N_\varepsilon s)}{2s} \right) e^{-\frac{\ln^2(N_\varepsilon s) + \ln^2(N_\varepsilon t)}{4}},$$

suy ra

$$\begin{aligned} \int_I s(1-s) \left| \frac{\partial w_0}{\partial s} \right|^2 ds dt &\leq \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}^2 \int_I s(1-s) \left| \frac{1}{s} + \frac{|\ln(N_\varepsilon s)|}{2s} \right|^2 e^{-\frac{\ln^2(N_\varepsilon s) + \ln^2(N_\varepsilon t)}{2}} ds dt \\ &\leq \frac{1}{2} \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}^2 \int_0^1 e^{-\frac{\ln^2(N_\varepsilon t)}{2}} dt \int_0^1 \frac{(2 + |\ln(N_\varepsilon s)|)^2}{s} e^{-\frac{\ln^2(N_\varepsilon s)}{2}} ds \\ &\leq \frac{1}{2} \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}^2 \frac{1}{N_\varepsilon} \int_{-\infty}^{\ln N_\varepsilon} e^{-\frac{u^2}{2} + u} du \int_{-\infty}^{\ln N_\varepsilon} (2 + |u|)^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{N_\varepsilon} C^2 \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}^2 \end{aligned}$$

trong đó

$$C = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + u} du \int_{-\infty}^{+\infty} (2 + |u|)^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du}.$$

$$\text{Do đó } (F(w_0))^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{N_\varepsilon}} C \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}.$$

Kết hợp với (1.3.17), ta có

$$\|p^{r(\varepsilon)}(\mu) - w_0\|_{L^2(I)} \leq \alpha(N_\varepsilon) + \frac{C}{\sqrt{N_\varepsilon}} \frac{\|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}}{r(\varepsilon) + 1}.$$

Từ (1.3.8) và (1.3.13), ta có

$$\begin{aligned}
 \left\| p^{r(\varepsilon)}(\mu) - w_0 \right\|_{L^2(I)}^2 &= \int_0^1 \int_0^1 \left| p^{r(\varepsilon)}(s, t) - w_0(s, t) \right|^2 ds dt \\
 &= \frac{1}{N_\varepsilon^2} \int_{-\ln N_\varepsilon}^{+\infty} \int_{-\ln N_\varepsilon}^{+\infty} \left[p^{r(\varepsilon)}\left(\frac{e^{-\xi}}{N_\varepsilon}, \frac{e^{-\eta}}{N_\varepsilon}\right) - w_0\left(\frac{e^{-\xi}}{N_\varepsilon}, \frac{e^{-\eta}}{N_\varepsilon}\right) \right]^2 e^{-(\xi+\eta)} d\xi d\eta \\
 &= \frac{1}{N_\varepsilon^2} \int_{-\ln N_\varepsilon}^{+\infty} \int_{-\ln N_\varepsilon}^{+\infty} \left[q^{r(\varepsilon)}(\xi, \eta) - v_0(\xi, \eta) \right]^2 e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2} - (\xi+\eta)} d\xi d\eta \\
 &= \frac{1}{N_\varepsilon^2} \int_{-\ln N_\varepsilon}^{+\infty} \int_{-\ln N_\varepsilon}^{+\infty} \left[(q^{r(\varepsilon)}(\xi, \eta) - v_0(\xi, \eta)) g(\xi, \eta) \right]^2 d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

Đặt

$$v_\varepsilon(\xi, \eta) = \begin{cases} q^{r(\varepsilon)}(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in D_{N_\varepsilon}, \\ 0, & (\xi, \eta) \notin D_{N_\varepsilon}. \end{cases}$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
 \|(v_\varepsilon - v_0)g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} &\leq N_\varepsilon \left[\alpha(N_\varepsilon) + \frac{C}{\sqrt{N_\varepsilon}} \frac{\|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}}{r(\varepsilon)+1} \right] + \\
 &\quad + \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_{N_\varepsilon}} v_0^2(\xi, \eta) g^2(\xi, \eta) d\xi d\eta}. \tag{1.3.18}
 \end{aligned}$$

Vì $|v_0(\xi, \eta)| \leq \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}$ với mọi $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, nên

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_{N_\varepsilon}} v_0^2(\xi, \eta) g^2(\xi, \eta) d\xi d\eta &\leq \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}^2 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_{N_\varepsilon}} e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2} - (\xi+\eta)} d\xi d\eta \\
 &\leq \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}^2 e \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_{N_\varepsilon}} e^{-\frac{(\xi+1)^2 + (\eta+1)^2}{2}} d\xi d\eta \\
 &\leq \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}^2 e \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B} e^{-\frac{(\xi+1)^2 + (\eta+1)^2}{2}} d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

trong đó B là quả cầu tâm (-1,-1) bán kính $R = \ln N_\varepsilon - 1$.

Vậy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_{N_\varepsilon}} v_0^2(\xi, \eta) g^2(\xi, \eta) d\xi d\eta &\leq 2\pi e \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}^2 \int_{\ln N_\varepsilon - 1}^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr \\ &= 2\pi e \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}^2 e^{-\frac{(\ln N_\varepsilon - 1)^2}{2}}. \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Từ (1.3.18), (1.3.19) ta có :

$$\|(v_\varepsilon - v_0)g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \varphi(\varepsilon)$$

trong đó

$$\varphi(\varepsilon) \equiv N_\varepsilon \left[\alpha(N_\varepsilon) + \frac{C}{\sqrt{N_\varepsilon}} \frac{\|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}}{r(\varepsilon) + 1} \right] + \sqrt{2\pi e} \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)} e^{-\frac{(\ln N_\varepsilon - 1)^2}{4}}.$$

Kết hợp định nghĩa của các hàm $P(N)$ và $h(N)$, ta có

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) &\leq \frac{(3 + 2\sqrt{2})^3}{2\pi} \left(\frac{3 + 2\sqrt{2}}{N_\varepsilon} \right)^{2\sqrt{N_\varepsilon P(N_\varepsilon)} - 3} \frac{1}{h(N_\varepsilon)} (\varepsilon + h(N_\varepsilon)) + \\ &\quad + \frac{C\sqrt{N_\varepsilon} \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}}{\sqrt{N_\varepsilon P(N_\varepsilon)} - 1} + \sqrt{2\pi e} \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)} e^{-\frac{(\ln N_\varepsilon - 1)^2}{4}} \\ &\leq \frac{(3 + 2\sqrt{2})^4}{2\pi} e^{2(1 - \sqrt{N_\varepsilon P(N_\varepsilon)})} (\sqrt{\varepsilon} + 1) + \frac{C\|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}}{\sqrt{P(N_\varepsilon)} - \frac{1}{\sqrt{N_\varepsilon}}} + \\ &\quad + \sqrt{2\pi e} \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)} e^{-\frac{(\ln N_\varepsilon - 1)^2}{4}}. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức trên và chú ý rằng khi $\varepsilon \rightarrow 0$ thì $N_\varepsilon \rightarrow \infty$ và $P(N_\varepsilon) \rightarrow \infty$, ta nhận được $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$.

Cuối cùng, nếu

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{a} \ln \frac{1}{h(a)}}{\ln a} = k$$

thì

$$2k \ln a > \frac{1}{a} \ln \frac{1}{h(a)} \text{ khi } a \text{ đủ lớn}$$

và

$$h(N_\varepsilon) > e^{-2kN_\varepsilon \ln N_\varepsilon}.$$

Từ $h(N_\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$, suy ra

$$N_\varepsilon > \sqrt{-\frac{1}{2k} \ln \sqrt{\varepsilon}}.$$

Đặt $C_2 = C \|v_0\|_{w^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}$ và $C_3 = \sqrt{2\pi e} \|v_0\|_{w^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)}$, đồng thời từ định nghĩa của

φ và hai bất đẳng thức trên cho ta

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) &\leq \frac{(3+2\sqrt{2})^4 e^2}{2\pi} e^{-2\sqrt{-\frac{1}{2k} \ln \sqrt{\varepsilon}}} (1 + \sqrt{\varepsilon}) + \\ &\quad + C_2 \frac{2}{\sqrt{P(N_\varepsilon)}} + C_3 e^{-\frac{1}{32} \ln^2(-\frac{1}{2k} \ln \sqrt{\varepsilon})} \\ &\leq \frac{(3+2\sqrt{2})^4 e^2}{\pi} e^{-2\sqrt{-\frac{1}{2k} \ln \sqrt{\varepsilon}}} + \\ &\quad + C_2 \frac{4}{\sqrt{k \ln N_\varepsilon}} + C_3 e^{-\frac{1}{32} \ln^2(-\frac{1}{2k} \ln \sqrt{\varepsilon})} \\ &\leq \frac{(3+2\sqrt{2})^4 e^2}{\pi} e^{-2\sqrt{-\frac{1}{2k} \ln \sqrt{\varepsilon}}} + \\ &\quad + C_2 \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{k \ln(-\frac{1}{2k} \ln \sqrt{\varepsilon})}} + C_3 e^{-\frac{1}{32} \ln^2(-\frac{1}{2k} \ln \sqrt{\varepsilon})}. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: Tồn tại số dương a_1 sao cho $h(a_1) = 0$.

Trong trường hợp này $h(a) = 0$ với mọi $a \geq a_1$. Vì thế $v_0(\xi, \eta) = 0$ trên $\mathbb{R}^2 \setminus D_a$ với mọi $a \geq a_1$. Chọn $r(\varepsilon)$ là nghiệm dương của

$$(3 + 2\sqrt{2})^{2(r+1)} e^{2(r+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$$N_\varepsilon = r(\varepsilon) + 1$$

và

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} (3 + 2\sqrt{2})^{2(r(\varepsilon)+1)} e^{2(r(\varepsilon)+1)^2} \frac{1}{N^{2r(\varepsilon)+1}} \varepsilon + C \|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2)} \frac{\sqrt{N_\varepsilon}}{r(\varepsilon)+1}.$$

Sử dụng phương pháp tương tự như cuối trường hợp 1, ta nhận được điều phải chứng minh. ■

Từ định lý 1.3.1 ta dễ dàng nhận được hai hệ quả

Hệ quả 1.3.1

Gọi $v_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ là một nghiệm của (1.2.1) tương ứng dữ liệu chính xác (f_{mn}^0) . Giả sử tồn tại $N > 0$ sao cho $v_0 \equiv 0$ trên $\mathbb{R}^2 \setminus D_N$ và dữ liệu đo đạc (f_{mn}) thỏa

$$\sup_{m,n} |f_{mn} - f_{mn}^0| \leq \varepsilon.$$

Khi đó từ (f_{mn}) ta có thể xây dựng một nghiệm chỉnh hóa v_ε của v_0 sao cho $v_\varepsilon g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ và

$$\|g(v_\varepsilon - v_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \varphi(\varepsilon)$$

trong đó $\varphi(\varepsilon) \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$ và $g(\xi, \eta) = e^{-\frac{\xi^2 + \eta^2}{4} - \frac{\xi + \eta}{2}}$.

Hệ quả 1.3.2

Bài toán (1.2.1) có nhiều nhất một nghiệm $v_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$ thỏa mãn

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \ln \frac{1}{h(a)} = \infty.$$

Chương 2

CHỈNH HÓA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH CHẬP NHIỀU CHIỀU KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP CHẶT CỤT TÍCH PHÂN VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Mục 2.3 phần B và phần C đã công bố trong [9] và [5] (của danh mục công trình công bố của tác giả).

2.1 MỞ ĐẦU

Việc chỉnh hóa phương trình dạng tích chập $k * u = f$ đã được khảo sát từ cách đây vài thập kỷ (xem [78], đặc biệt xem [15], trang 183-190) bằng phương pháp Tikhonov. Baumeister có đưa ra hai trường hợp: trường hợp $|\hat{k}(p)| > 0 \forall p$ và trường hợp \hat{k} có không điểm.

Trường hợp $|\hat{k}(p)| > 0 \forall p$ đã được phát triển trong một loạt các bài báo [9, 10, 11, 35, 59]. Trong một loạt các bài báo [41, 44, 47, ...], tác giả Đinh Nho Hòa đã dùng phương pháp chặt cụt tần số cao của dữ liệu để khảo sát các bài toán nhiệt. Trong [13], phương pháp chặt cụt tần số cao của các nhân trong không gian “tần số” của các ảnh Fourier được sử dụng để giải bài toán nhiệt. Sau đó nó đã được trình bày tổng quát hơn trong [60]. Phương pháp này có đặc điểm là việc tính toán tích phân Fourier chuyển thành bài toán tính tích phân trên khoảng hữu hạn và nghiệm chỉnh hóa tìm được trong lớp hàm giải tích có thể xấp xỉ bởi chuỗi Cardinal. Trong khi đó, theo hiểu biết của chúng tôi, trường hợp \hat{k} có không điểm (tần số kỳ dị) chỉ được nói tới trong [78, 15].

Chương 2 khảo sát sự chỉnh hóa của một hệ các phương trình tích chập. Chinh hóa loại hệ này, ta chủ yếu gặp loại “tần số kỳ dị” (xem lời nói đầu).

Ngoài ra chúng tôi cũng chưa tìm được các tài liệu nói về việc khảo sát bài toán chinh hóa cho một hệ phương trình tích chập.

Trong mục 2.2 của chương này ta sẽ xem xét việc giải hệ phương trình tích chập, kết quả này bao gồm cả trường hợp \hat{k} có không điểm đã đề cập ở trên. Phương pháp chặt cụt các tần số xấu của tích phân được sử dụng triệt để và các đánh giá sai số được thực hiện chi tiết. So với phương pháp Tikhonov thì để đạt được cùng mức sai số, các điều kiện cần thiết nhẹ hơn và các tính toán cũng đơn giản hơn. Trong mục 2.3 ta áp dụng các kết quả của mục 2.2 để khảo sát một số trường hợp cụ thể. Mục này chia làm 3 phần.

* Phần A khảo sát bài toán tích chập một chiều xem như một mở rộng kết quả của Baumeister [15], (chương 10, trang 183-190) trong đó ta thống nhất hai trường hợp $|\hat{k}(p)| > 0 \forall p$ và \hat{k} có không điểm vào trong một kết quả.

* Phần B áp dụng kết quả của mục 2.2 cho bài toán thông lượng nhiệt, phần này cho một ví dụ thực tế về trường hợp \hat{k} có không điểm, và một ví dụ về tính toán số.

* Phần C áp dụng vào bài toán tìm nhiệt độ bề mặt của một vật thể hai lớp, phần này ví dụ cho một hệ phương trình tích chập.

2.2 CHINH HÓA HỆ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH CHẬP NHIỀU CHIỀU KHÔNG GIAN

Chúng tôi chia 2.2 thành 2 bước

Bước 1: Giới thiệu bài toán

Bước 2: Xây dựng nghiệm chinh hóa

Bước 1: Giới thiệu bài toán

Nhiều bài toán ngược quan trọng cho phương trình nhiệt như bài toán nhiệt ngược thời gian, bài toán xác định phân bố nhiệt hay thông lượng nhiệt bề mặt lỗ khoan thăm dò từ đo đạc bên trong được quy về việc giải phương trình tích chập

$$\alpha * v = F,$$

hoặc hệ phương trình tích chập (xem [71])

$$\begin{cases} a_{11} * v_1 + a_{12} * v_2 + \dots + a_{1n} * v_n = f_{1,0} \\ a_{21} * v_1 + a_{22} * v_2 + \dots + a_{2n} * v_n = f_{2,0} \\ \dots \\ a_{n1} * v_1 + a_{n2} * v_2 + \dots + a_{nn} * v_n = f_{n,0} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

với $(\alpha * v)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^k} \int_{\mathbb{R}^k} \alpha(x - \xi)v(\xi)d\xi$, $x \in \mathbb{R}^k$, trong đó $v_s \in L^2(\mathbb{R}^k)$, $s = \overline{1, n}$ là

các ẩn hàm cần tìm, $f_{s,0}$ và a_{sj} , $s, j = \overline{1, n}$ là các hàm đã biết với $f_{s,0} \in L^2(\mathbb{R}^k)$, $s = \overline{1, n}$. Bài toán là không chỉnh, xem [60].

Bước 2: Xây dựng nghiệm chỉnh hóa

Trở lại với bài toán (2.2.1), do đẳng thức (2.2.1), nghiệm v của bài toán, nếu tồn tại, thỏa đẳng thức

$$\widehat{A} \widehat{v} = \widehat{f}_0$$

trong đó

$$\widehat{A} \text{ là ma trận } \left(\widehat{a}_{sj} \right)_{s,j=\overline{1,n}},$$

$$\widehat{a}_{sj}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^k} \int_{\mathbb{R}^k} a_{sj}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) e^{-i(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_k\xi_k)} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k,$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_k), \widehat{v} = \begin{pmatrix} \widehat{v}_1 \\ \widehat{v}_2 \\ \dots \\ \widehat{v}_n \end{pmatrix}, \widehat{f}_0 = \begin{pmatrix} \widehat{f}_{1,0} \\ \widehat{f}_{2,0} \\ \dots \\ \widehat{f}_{n,0} \end{pmatrix}.$$

Từ đó nhận được $D\widehat{v}_s = F_{s,0}$ trong đó

$$D = \det(\widehat{a}_{sj}),$$

$$F_{s,0} = \det \begin{pmatrix} \widehat{a}_{11} & \widehat{a}_{12} & \dots & \widehat{f}_{1,0} & \dots & \widehat{a}_{1n} \\ \widehat{a}_{21} & \widehat{a}_{22} & \dots & \widehat{f}_{2,0} & \dots & \widehat{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \widehat{a}_{n1} & \widehat{a}_{n2} & \dots & \widehat{f}_{n,0} & \dots & \widehat{a}_{nm} \end{pmatrix}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\alpha^s}$

Định lý 2.2.1 Cho $e^{-1} > \varepsilon > 0, \alpha > 0$.

Đặt $\mathcal{L}_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^k / |D(x)| < \alpha\}$.

Cho nghiệm chính xác $(v_{1,0}, v_{2,0}, \dots, v_{n,0})$ của (2.2.1) tương ứng với $(F_{1,0}, F_{2,0}, \dots, F_{n,0})$ ở vế phải nằm trong $(L^2(\mathbb{R}^k))^n$. Với mỗi α giả sử tồn tại

$\mathcal{D}_\alpha \supset \mathcal{L}_\alpha$ và

$$\int_{\mathbb{R}^k} |\widehat{v}_{s,0}(x)|^2 \chi_{\mathcal{D}_\alpha}(x) dx \rightarrow 0 \text{ khi } \alpha \rightarrow 0, s=1, 2, \dots, n. \tag{2.2.2}$$

Gọi (F_1, \dots, F_n) là dữ liệu nhận được do đo đạc, $\|F_s - F_{s,0}\|_2 < \varepsilon$, với $\|\cdot\|_2$ chỉ chuẩn trong $L^2(\mathbb{R}^k)$ và $s=1, 2, \dots, n$.

Với mỗi $a \in (0, 2), s = 1, 2, \dots, n$ tồn tại nghiệm chỉnh hóa $u_{s,\varepsilon}$ của (2.2.1) sao cho

$$\|u_{s,\varepsilon} - v_{s,0}\|_2 < \sqrt{\varepsilon^{2-a} + \eta_{a,s}(\varepsilon)}$$

trong đó

$$\eta_{a,s}(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ khi } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Hơn nữa

i/ Nếu tồn tại $m, M, P > 0$ sao cho nghiệm chính xác $v_{s,0}, s = 1, 2, \dots, n$ thỏa mãn

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left| \widehat{v}_{s,0}(x) \right|^2 \chi_{\mathcal{D}_\alpha}(x) dx < M \left(\ln \frac{P}{\alpha} \right)^{-m} \text{ với mọi } \alpha > 0, s = 1, 2, \dots, n \quad (2.2.3)$$

và $\min\{e^{-4}, e^{-m^2}\} > \varepsilon > 0$,

thì tồn tại nghiệm chỉnh hóa $u_{s,\varepsilon} (s = 1, 2, \dots, n)$ của (2.2.1) sao cho

$$\|u_{s,\varepsilon} - v_{s,0}\|_2 < \sqrt{M + \frac{1}{P^2} \left(\ln \left(\frac{1/\varepsilon}{\ln^m(1/\varepsilon)} \right) \right)^{-m/2}}.$$

ii/ Nếu tồn tại $M, \beta > 0$ sao cho nghiệm chính xác $v_{s,0}, s = 1, 2, \dots, n$ thỏa mãn

$$\int_{\mathbb{R}^k} \left| \widehat{v}_{s,0}(x) \right|^2 \chi_{\mathcal{D}_\alpha}(x) dx < \alpha^\beta M \text{ với mọi } \alpha > 0, s = 1, 2, \dots, n \quad (2.2.4)$$

thì tồn tại nghiệm chỉnh hóa $u_{s,\varepsilon}$ của (2.2.1) sao cho

$$\|u_{s,\varepsilon} - v_{s,0}\|_2 < \sqrt{1 + M\varepsilon^{\frac{\beta}{2+\beta}}} \text{ với } s = 1, 2, \dots, n.$$

Ghi chú: Các điều kiện (2.2.3) và (2.2.4) chỉ cần đúng với mọi $\alpha > 0$ đủ nhỏ.

Điều kiện (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) là các điều kiện tổng quát. Trong phần ứng dụng ta sẽ so sánh nó với các điều kiện đặt ra bởi Baumeister. Trong nhiều trường hợp $\mathcal{D}_\alpha = \mathcal{L}_\alpha$. Khi đó ta có thể thay ký hiệu \mathcal{D}_α bởi \mathcal{L}_α .

Chứng minh

Đặt $y = (y_1, y_2, \dots, y_k), \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k),$

$$v_{s,\alpha}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^k} \int_{\mathbb{R}^k} F_s(\xi) (D(\xi))^{-1} \chi_{\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{D}_\alpha}(\xi) e^{i(\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \dots + \xi_k y_k)} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k.$$

Suy ra

$$\widehat{v}_{s,\alpha}(x) = F_s(x) (D(x))^{-1} \chi_{\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{D}_\alpha}(x), \text{ với } x = (x_1, x_2, \dots, x_k). \quad (2.2.5)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \|v_{s,\alpha} - v_{s,0}\|_2^2 &= \|\widehat{v}_{s,\alpha} - \widehat{v}_{s,0}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^k} \left| \frac{F_s(x) - F_{s,0}(x)}{D(x)} \right|^2 \chi_{\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{D}_\alpha}(x) dx + \int_{\mathbb{R}^k} \left| \widehat{v}_{s,0}(x) \right|^2 \chi_{\mathcal{D}_\alpha}(x) dx \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} + \int_{\mathbb{R}^k} \left| \widehat{v}_{s,0}(x) \right|^2 \chi_{\mathcal{D}_\alpha}(x) dx = \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} + \eta_{a,s}(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

trong đó

$$\eta_{a,s}(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^k} \left| \widehat{v}_{s,0}(x) \right|^2 \chi_{\mathcal{D}_\alpha}(x) dx, \quad \alpha = \varepsilon^{a/2} \text{ và } u_{s,\varepsilon} = v_{s,\alpha}.$$

Trường hợp (2.2.3) thỏa: Chọn $\alpha_1 = P \frac{\ln^m(1/\varepsilon)}{1/\varepsilon}$ và $u_{s,\varepsilon} = v_{s,\alpha_1}$. (2.2.7)

Từ (2.2.6), (2.2.7) ta nhận được

$$\begin{aligned} \|u_{s,\varepsilon} - v_{s,0}\|_2^2 &\leq \varepsilon^2 \frac{1/\varepsilon^2}{P^2 \ln^{2m}(1/\varepsilon)} + \frac{M}{\left(\ln \frac{P}{\alpha_1} \right)^m} \\ &\leq \frac{1}{P^2 \ln^{2m}(1/\varepsilon)} + \frac{M}{\left(\ln \frac{P}{\alpha_1} \right)^m} \\ &\leq \frac{M + \frac{1}{P^2}}{\left(\ln \frac{P}{\alpha_1} \right)^m} = \left(M + \frac{1}{P^2} \right) \left(\ln \left(\frac{1/\varepsilon}{\ln^m(1/\varepsilon)} \right) \right)^{-m}. \end{aligned}$$

Trường hợp (2.2.4) thỏa: Chọn $\alpha_2 = \varepsilon^{\frac{2}{2+\beta}}$ và $u_{s,\varepsilon} = v_{s,\alpha_2}$. (2.2.8)

Ta có

$$\|u_{s,\varepsilon} - v_{s,0}\|_2^2 = \|\widehat{v}_{s,\alpha_2} - \widehat{v}_{s,0}\|_2^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{\alpha_2^2} + \alpha_2^\beta M = (1 + M) \varepsilon^{\frac{2\beta}{2+\beta}}.$$

Định lý đã được chứng minh. ■

2.3 ỨNG DỤNG

Phần A: Khảo sát bài toán tích chập một chiều với các điều kiện của Baumeister [15], (chương 10, trang 183-190).

Trong [15], trang 183-190, tác giả Baumeister đã xét phương trình tích chập $k * u = f$ với ẩn hàm u , sau đó phương trình được chuyển về $\hat{k} \cdot \hat{u} = \hat{f}$. Tác giả có nêu hai trường hợp để nhận được các đánh giá sai số. Trước khi đi vào hai trường hợp cụ thể, chú ý rằng $\hat{k} \cdot \hat{u} = \hat{f}$ chính là $D\hat{v}_s = F_{s,0}$, trong mục 2.2, nghĩa là \hat{k} chính là D .

Trường hợp 1: Tác giả yêu cầu tồn tại $\delta > \frac{1}{2}$, $C_0 > 0$, $C_1 > 0$, $a > 0$ sao cho

$$|\hat{k}(p)|^2 \geq C_0 \exp(-a|p|) \tag{2.3.1}$$

và

$$|\hat{u}_0(p)| \leq C_1(1+p^2)^{-\frac{\delta}{2}} \text{ với mọi } p. \tag{2.3.2}$$

Bằng cách dùng phương pháp Tikhonov, ứng với dữ liệu nhận được đo đạc f_ε thỏa $\|f_\varepsilon - f_0\|_2 \leq \varepsilon$, tác giả tìm được nghiệm chỉnh hóa

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{k}(w)|^2}{|\hat{k}(w)|^2 + \alpha(1+w^2)} \frac{\hat{f}(w)}{\hat{k}(w)} e^{iwx} dw, \text{ với } \alpha = \varepsilon^2 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-\delta+1/2}$$

thỏa mãn

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_2 < C \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-\delta+\frac{1}{2}}, \text{ } C \text{ là hằng số dương độc lập với } \varepsilon. \tag{2.3.3}$$

Trong phương pháp chặt cụt tích phân của chúng tôi, từ tính chất (2.3.1) và (2.3.2) sẽ dẫn tới $\hat{k} = D$ thỏa tính chất (2.2.3) và nhận được sai số tương tự

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_2 < C \left(\ln \left(\frac{1/\varepsilon}{\ln(1/\varepsilon)} \right) \right)^{-\delta+\frac{1}{2}}, \text{ } C \text{ là hằng số dương độc lập với } \varepsilon. \tag{2.3.4}$$

Cụ thể là

$$|D(p)| = |\hat{k}(p)| < \alpha \text{ dẫn đến } |p| > -\frac{1}{a} \ln \frac{\alpha^2}{C_0} \equiv p_\alpha, \text{ nghĩa là}$$

$$\mathcal{L}_\alpha = \{p / |\hat{k}(p)| < \alpha\} \subset \{p / |p| > p_\alpha\},$$

khi đó

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}_0(p)|^2 \chi_{\mathcal{L}_\alpha}(p) dp \leq 2C_1^2 \int_{p_\alpha}^{+\infty} p^{-2\delta} dp = \frac{2C_1^2}{2\delta-1} \left(-\frac{1}{a} \ln \frac{\alpha^2}{C_0} \right)^{1-2\delta} = \frac{2C_1^2}{2\delta-1} \left(\frac{2}{a} \ln \frac{\sqrt{C_0}}{\alpha} \right)^{1-2\delta}$$

nghĩa là tính chất (2.2.3) được thỏa và nhận được đánh giá sai số (2.3.4) theo định lý 2.2.1.

Trường hợp 2: Tác giả yêu cầu tồn tại $\delta > \frac{1}{2}$, $C_1 > 0$, $C_2 \geq 0$, $C_3 > 0$, $C_4 > 0$,

$\gamma \geq 0$, $r > \frac{1}{4}$, $a > 0$ sao cho

$$|\widehat{u}_0(p)| \leq C_1(1+p^2)^{\frac{\delta}{2}} \text{ với mọi } p$$

và

$$* |\hat{k}(0)| > 0 \tag{2.3.5}$$

* \hat{k} có nhiều nhất một số đếm được các không điểm p_j , $j \in J$, không có điểm tụ nếu J vô hạn. Nếu $n(M)$ ký hiệu số không điểm của \hat{k} trong $(0, M)$ thì $n(M) \leq C_2 M^\gamma$. (2.3.6)

*Tồn tại những khoảng mở rời nhau $D_j \subset (0, \infty)$ với $p_j \in D_j$, $j \in J$

$$|\hat{k}(p)|^2 \geq C_3 |p - p_j|^{2r} \text{ với } p \in D_j, j \in J \tag{2.3.7}$$

$$* |\hat{k}(p)|^2 \geq C_4(1+p^2)^{-2a} \text{ nếu } p \notin \bigcup_{j \in J} D_j. \tag{2.3.8}$$

Bằng cách dùng phương pháp Tikhonov, ứng với dữ liệu nhận được đo đạc f_ε thỏa $\|f_\varepsilon - f_0\|_2 \leq \varepsilon$, tác giả tìm được nghiệm chinh hóa

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{k}(w)|^2}{|\hat{k}(w)|^2 + \alpha(1+w^2)} \frac{\hat{f}(w)}{\hat{k}(w)} e^{iwx} dw ,$$

với
$$\alpha = \varepsilon^{\frac{2}{2\tau+1}}, \tau = \frac{2\delta-1}{4r(4+2\delta+\gamma+8a)}$$

thỏa mãn

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_2 < C\varepsilon^{\frac{2\tau}{2\tau+1}} .$$

Trong phương pháp chặt cụt tích phân của chúng tôi, từ tính chất (2.3.2) và (2.3.5)- (2.3.8) nhận được sai số tốt hơn

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_2 < C\varepsilon^{\frac{\beta}{2+\beta}} \tag{2.3.9}$$

trong đó

$$\beta = \min \left\{ \frac{2\delta-1}{r(\gamma+2\delta-1)}, \frac{2\delta-1}{2a} \right\} \left(\text{lưu ý rằng vì } r > \frac{1}{4} \text{ nên } \frac{2\tau}{2\tau+1} < \frac{\beta}{\beta+2} \right).$$

Cụ thể như sau:

Với mỗi $0 < \alpha < \min \left\{ \frac{\sqrt{C_4}}{2^a}, 1 \right\}$, xét $M = \alpha^{\frac{1}{r(\gamma+2\delta-1)}}$.

Khi $p \in D_j$ và $|\hat{k}(p)| < \alpha$ ta có

$$\sqrt{C_3} |p - p_j|^r < \alpha$$

nên $p_j - \left(\frac{\alpha}{\sqrt{C_3}} \right)^{\frac{1}{r}} < p < \left(\frac{\alpha}{\sqrt{C_3}} \right)^{\frac{1}{r}} + p_j$.

Đồng thời khi $p \notin \bigcup_{j \in J} D_j$ và $|\hat{k}(p)| < \alpha$ thì $\sqrt{C_4} (1+p^2)^{-a} < \alpha$, nên

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{C_4}}{\alpha} \right)^{1/a}} < \sqrt{\left(\frac{\sqrt{C_4}}{\alpha} \right)^{1/a}} - 1 < |p| .$$

Từ các điều trên ta có

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{u}_0(p) \right|^2 \chi_{\mathcal{L}_\alpha}(p) dp \\
 & \leq \int_{\left(\bigcup_{j \in J} D_j \right) \cap (-M, M)} \left| \widehat{u}_0(p) \right|^2 \chi_{\mathcal{L}_\alpha}(p) dp + \int_{|p| > M} \left| \widehat{u}_0(p) \right|^2 dp + \int_{\mathbb{R} \setminus \bigcup_{j \in J} D_j} \left| \widehat{u}_0(p) \right|^2 \chi_{\mathcal{L}_\alpha}(p) dp \\
 & \leq C_1^2 \sum_{\left\{ D_j \cap (-M, M) \neq \emptyset \right\}_{j \in J}} \int_{D_j} \chi_{\mathcal{L}_\alpha}(p) dp + C_1^2 \int_{|p| > M} |p|^{-2\delta} dp + 2C_1^2 \int_{\frac{1}{\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{C_4}}{\alpha} \right)^{1/a}} }^{+\infty} |p|^{-2\delta} dp \\
 & \leq 2C_1^2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{C_3}} \right)^{\frac{1}{r}} 2(n(M) + 1) + \frac{2C_1^2}{2\delta - 1} M^{1-2\delta} + \frac{2C_1^2}{2\delta - 1} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{C_4}}{\alpha} \right)^{1/a}}^{1-2\delta} \\
 & \leq 8C_1^2 \left(\frac{\alpha}{\sqrt{C_3}} \right)^{\frac{1}{r}} C_2 M^\gamma + \frac{2C_1^2}{2\delta - 1} M^{1-2\delta} + \frac{2C_1^2}{2\delta - 1} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{C_4}}{\alpha} \right)^{1/a}}^{1-2\delta} \\
 & \leq 3C\alpha^\beta
 \end{aligned}$$

trong đó $C = \max \left\{ \frac{8C_1^2 C_2}{C_3^{1/2r}}, \frac{2C_1^2}{2\delta - 1}, \frac{2C_1^2}{2\delta - 1} \left(\frac{C_4^{1/4a}}{\sqrt{2}} \right)^{1-2\delta} \right\}$

và $\beta = \min \left\{ \frac{2\delta - 1}{r(\gamma + 2\delta - 1)}, \frac{2\delta - 1}{2a} \right\}$.

Vậy tính chất (2.2.4) được thỏa và chúng ta nhận được đánh giá sai số

(2.3.9). Lưu ý, trong lập luận của chúng tôi, điều kiện $|\widehat{k}(0)| > 0$ không dùng tới.

Phần B: Áp dụng vào bài toán tìm thông lượng nhiệt

Xét bài toán tìm thông lượng nhiệt

$$u_y(x, 1, t) \equiv w(x, t) \tag{2.3.10}$$

sao cho u thỏa phương trình

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ trong } x \in \mathbf{R}, 1 < y < a, t > 0, (a > 2), \quad (2.3.11)$$

với các điều kiện biên

$$u(x, 2, t) = g(x, t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \quad (2.3.12)$$

$$u(x, 1, t) = f(x, t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \quad (2.3.13)$$

$$u_y(x, 1, t) = w(x, t), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0, \quad (2.3.14)$$

và điều kiện đầu

$$u(x, y, 0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad 1 < y < a \quad (2.3.15)$$

trong đó f, g cho trước. Giả sử u, u_x, u_y bị chặn trên $\mathbf{R} \times (1, a) \times (0, +\infty)$.

Đặt

$$\Gamma(x, y, t, \xi, \eta, \tau) = \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right)$$

$$\text{và} \quad G(x, y, t, \xi, \eta, \tau) = \Gamma(x, y, t, \xi, \eta, \tau) - \Gamma(x, 4-y, t, \xi, \eta, \tau). \quad (2.3.16)$$

Lấy tích phân đẳng thức

$$\operatorname{div}(G\nabla u - u\nabla G) - \frac{\partial}{\partial \tau}(uG) = 0 \text{ trên miền } (-n, n) \times (1, 2) \times (0, t - \varepsilon)$$

và cho $\varepsilon \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$, ta có

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t g(\xi, \tau) G_\eta(x, y, t, \xi, 2, \tau) d\xi d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t G(x, y, t, \xi, 1, \tau) w(\xi, \tau) d\xi d\tau - \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t f(\xi, \tau) G_\eta(x, y, t, \xi, 1, \tau) d\xi d\tau + u(x, y, t) = 0. \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t G(x, y, t, \xi, 1, \tau) w(\xi, \tau) d\xi d\tau = -u(x, y, t) + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t G_\eta(x, y, t, \xi, 1, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t g(\xi, \tau) G_\eta(x, y, t, \xi, 2, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Cho $y \rightarrow 1^+$ trong (2.3.17), ta có :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \left[\frac{1}{2\pi(t-\tau)} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) - \frac{1}{2\pi(t-\tau)} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+4}{4(t-\tau)}\right) \right] w(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= -f(x, t) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+4}{4(t-\tau)}\right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t g(\xi, \tau) \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+1}{4(t-\tau)}\right) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Từ đó ta có :

$$(P-Q) * w(x, t) = -f(x, t) + R_1 * f(x, t) + R_2 * g(x, t) \quad (2.3.19)$$

trong đó $w(x, t) = f(x, t) = g(x, t) = 0$ nếu $(x, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$,

$$P(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \end{cases},$$

$$Q(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{x^2+4}{4t}\right) & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \end{cases},$$

$$R_1(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} \exp\left(-\frac{x^2+4}{4t}\right) & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \end{cases},$$

và
$$R_2(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} \exp\left(-\frac{x^2+1}{4t}\right) & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \end{cases}. \quad (2.3.20)$$

Ta có (xem [31], trang 14, 15, 16, 72, 75)

$$\begin{aligned} \hat{P}(z, r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, t) e^{-i(xz+tr)} dx dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{z^4+r^2}} \left[\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}+z^2} - i \operatorname{sgn}(r) \sqrt{\sqrt{z^4+r^2}-z^2} \right] \end{aligned}$$

và

$$\hat{Q}(z, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x, t) e^{-i(xz+tr)} dx dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{z^4 + r^2}} e^{-2u} [u \cos 2v - v \sin 2v - i \operatorname{sgn}(r)(u \sin 2v + v \cos 2v)]$$

trong đó

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{z^4 + r^2} + z^2}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{z^4 + r^2} - z^2}. \quad (2.3.21)$$

Đặt

$$F(x, t) = -f(x, t) + R_1 * f(x, t) + R_2 * g(x, t).$$

Lấy Fourier hai vế của (2.3.19), ta có

$$(\hat{P}(z, r) - \hat{Q}(z, r)) \hat{w}(z, r) = \hat{F}(z, r).$$

Hệ quả 2.3.1

Cho $a \in (0, 2)$, cho $0 < \varepsilon < 1$.

Giả sử nghiệm chính xác w_0 của (2.3.19) tương ứng dữ liệu chính xác f_0, g_0 ở vế phải nằm trong $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Giả sử dữ liệu đo đạc là f, g thỏa

$$\|f - f_0\|_2 \leq \varepsilon \quad \text{và} \quad \|g - g_0\|_2 \leq \varepsilon,$$

trong đó $\|\cdot\|_2$ là chuẩn trong $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Khi đó tồn tại nghiệm chỉnh hóa w_ε của (2.3.19) sao cho

$$\|w_\varepsilon - w_0\|_2 \leq \sqrt{C\varepsilon^{2-a} + \eta_a(\varepsilon)}$$

trong đó $\eta_a(\varepsilon) \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \downarrow 0$ và C là hằng số dương độc lập với ε .

Giả sử thêm, nếu $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap H^2(\mathbb{R}^2)$ và $\varepsilon \in \left(0, 2^{\frac{-3}{2}}\right)$ thì

$$\|w_\varepsilon - w_0\|_2 < D\varepsilon^{\frac{1}{3}}$$

trong đó D là một hằng số dương độc lập với ε .

Khi đó w_ε được biểu diễn thành

$$w_\varepsilon(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{|m| \leq |n|} a_{mn}(\varepsilon) T\left(m, \pi\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right)(x) T\left(n, \pi\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right)(t)$$

với

$$a_{mn}(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_{\alpha(\varepsilon)}} \frac{\hat{F}(z, r)}{\hat{P}(z, r) - \hat{Q}(z, r)} e^{i\pi\varepsilon^{2/3}(mz+nr)} dzdr,$$

trong đó $\mathcal{D}_{\alpha(\varepsilon)}$ xác định trong chứng minh và

$$T(p, d)(z) = \frac{\sin[\pi(z - pd)/d]}{\pi(z - pd)/d}, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad d > 0. \quad (2.3.22)$$

Chứng minh

Ta có

$$\begin{aligned} \|\hat{F} - \hat{F}_0\|_2 &= \|F - F_0\|_2 \\ &\leq [\|\mathbf{R}_1\|_1 + 1] \|f - f_0\|_2 + \|\mathbf{R}_2\|_1 \|g - g_0\|_2 \\ &\leq (\|\mathbf{R}_1\|_1 + \|\mathbf{R}_2\|_1 + 1) \varepsilon. \end{aligned}$$

Từ (2.3.21), suy ra

$$\left| \hat{P}(z, r) - \hat{Q}(z, r) \right| = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \sqrt{1 - 2e^{-2u} \cos 2v + e^{-4u}}.$$

Chú ý rằng nếu $0 < \alpha < \frac{1 - e^{-\sqrt{2}}}{2}$ và

$$\frac{2\alpha^2}{(1 - e^{-\sqrt{2}})^2} \leq z^4 + r^2 \leq \frac{(1 - e^{-\sqrt{2}})^2}{2\alpha^2}$$

thì

$$\left| \hat{P}(z, r) - \hat{Q}(z, r) \right| = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \sqrt{1 - 2e^{-2u} \cos 2v + e^{-4u}}$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{\sqrt[4]{z^4 + r^2}} \left(1 - e^{-\sqrt{2}\sqrt{z^4 + r^2 + z^2}} \right) \\ &\geq \frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 - e^{-\sqrt{2}}}} \left(1 - e^{-\sqrt{2}\frac{\sqrt[4]{2}\sqrt{\alpha}}{\sqrt{1 - e^{-\sqrt{2}}}}} \right) \geq \alpha. \end{aligned}$$

Vì thế

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha &= \left\{ (z, r) / \left| \widehat{P}(z, r) - \widehat{Q}(z, r) \right| < \alpha \right\} \\ &\subset \left\{ (z, r) \left| 0 \leq z^4 + r^2 < \frac{2\alpha^2}{(1 - e^{-\sqrt{2}})^2} \text{ hay } z^4 + r^2 > \frac{(1 - e^{-\sqrt{2}})^2}{2\alpha^2} \right. \right\} \\ &\subset \left\{ (z, r) / z^2 + r^2 < \frac{2}{1 - e^{-\sqrt{2}}} \alpha \right\} \cup \left\{ (z, r) / z^2 + r^2 > \frac{1 - e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Đặt $\mathcal{D}_\alpha \equiv \mathcal{D}_{1,\alpha} \cup \mathcal{D}_{2,\alpha}$ trong đó

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{1,\alpha} &= \left\{ (z, r) / z^2 + r^2 < \frac{2}{1 - e^{-\sqrt{2}}} \alpha \right\} \\ \mathcal{D}_{2,\alpha} &= \left\{ (z, r) / z^2 + r^2 > \frac{1 - e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}\alpha} \right\}, \end{aligned}$$

thì $\mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{D}_\alpha$.

Suy ra

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \widehat{w}_0(z, r) \right|^2 \chi_{\mathcal{D}_\alpha}(z, r) dz dr \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| \widehat{w}_0(z, r) \right|^2 \chi_{\mathcal{D}_{1,\alpha}}(z, r) dz dr + \int_{\mathbb{R}^2} \left| \widehat{w}_0(z, r) \right|^2 \chi_{\mathcal{D}_{2,\alpha}}(z, r) dz dr.$$

Vì thế

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \widehat{w}_0(z, r) \right|^2 \chi_{\mathcal{D}_\alpha}(z, r) dz dr \rightarrow 0 \text{ khi } \alpha \rightarrow 0.$$

Giả sử thêm, nếu $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap H^2(\mathbb{R}^2)$ và $\varepsilon \in \left(0, 2^{\frac{-3}{2}} \right)$, ta có

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2} \left| \widehat{w}_0(z, r) \right|^2 \chi_{\mathcal{D}_\alpha}(z, r) dz dr \\
 & \leq \left\| \widehat{w}_0(z, r) \right\|_1^2 \frac{2\pi\alpha}{1 - e^{-\sqrt{2}}} + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left| \widehat{w}_0(z, r) \right|^2 (z^2 + r^2)^2}{(z^2 + r^2)^2} \chi_{\mathcal{D}_{2,\alpha}}(z, r) dz dr \\
 & \leq \left\| \widehat{w}_0(z, r) \right\|_1^2 \frac{2\pi\alpha}{1 - e^{-\sqrt{2}}} + E \frac{2\alpha^2}{(1 - e^{-\sqrt{2}})^2} \\
 & \leq C\alpha
 \end{aligned}$$

trong đó $E = \left\| (z^2 + r^2) \widehat{w}_0(z, r) \right\|_2^2$, $C = \left\| \widehat{w}_0(z, r) \right\|_1^2 \frac{2\pi}{1 - e^{-\sqrt{2}}} + \frac{2E}{(1 - e^{-\sqrt{2}})^2}$.

Áp dụng Định lý 2.2.1, ta có các đánh giá sai số $\|w_\varepsilon - w_0\|_2$ trong hệ quả

2.3.1.

Khi $w_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap H^2(\mathbb{R})$ theo chứng minh định lý 2.2.1, ta có $\alpha = \varepsilon^{2/3}$ và

$$w_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_{\alpha(\varepsilon)}} \frac{\widehat{F}(z, r)}{\widehat{P}(z, r) - \widehat{Q}(z, r)} e^{i(xz+tr)} dz dr$$

ta có

$$\text{supp } \widehat{w}_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_{\alpha(\varepsilon)} \subset \left[-\frac{1}{\varepsilon^{2/3}}, \frac{1}{\varepsilon^{2/3}} \right] \times \left[-\frac{1}{\varepsilon^{2/3}}, \frac{1}{\varepsilon^{2/3}} \right].$$

Khi đó theo [13], trang 121, ta có

$$w_\varepsilon(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{|m| \leq |n|} a_{mn}(\varepsilon) T\left(m, \pi\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right)(x) T\left(n, \pi\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right)(t)$$

với

$$a_{mn}(\varepsilon) = w_\varepsilon\left(m\pi\varepsilon^{2/3}, n\pi\varepsilon^{2/3}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}_{\alpha(\varepsilon)}} \frac{\widehat{F}(z, r)}{\widehat{P}(z, r) - \widehat{Q}(z, r)} e^{i\pi\varepsilon^{2/3}(mz+nr)} dz dr.$$

Hệ quả đã được chứng minh. ■

***Bây giờ ta đưa ra ví dụ về tính toán số**

Ta giới thiệu hai kết quả bằng số so sánh giữa nghiệm chỉnh hóa cho bởi công thức (2.3.22) và nghiệm chính xác.

Kết quả 1 (hình 1 và hình 2)

Xét bài toán

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times (1, 3), t > 0$$

$$u(x, 1, t) = \frac{1}{t} e^{\frac{-x^2-1}{4t}};$$

$$u(x, 2, t) = \frac{1}{t} e^{\frac{-x^2-4}{4t}};$$

$$u(x, y, 0) = 0$$

trong đó hàm số cần tìm là

$$w(x, t) = u_y(x, 1, t).$$

Nghiệm chính xác của bài toán là

$$w(x, t) = \frac{-1}{2t^2} e^{\frac{-x^2-1}{4t}}.$$

Nghiệm chỉnh hóa cho bởi công thức (2.3.22) trong đó

$$\hat{F} = \frac{e^{-u}}{u^2 + v^2} [(\alpha u - \beta v) - i(\alpha u + \beta v)] + \frac{\varepsilon}{\pi \sqrt{r^2 + 1} \sqrt{z^2 + 1}}$$

$$\alpha = e^{-2u} \cos 3v - \cos v; \quad \beta = e^{-2u} \sin 3v - \sin v$$

$$\hat{P} - \hat{Q} = a_1 + ib_1$$

trong đó

$$a_1 = u - e^{-2u} (u \cos 2v - v \sin v); \quad b_1 = \operatorname{sgn}(r) [-v + e^{-2u} (v \cos 2v + u \sin 2v)].$$

Khi đó ta có

$$\|\hat{F} - \hat{F}_0\|_2 = \varepsilon.$$

Với $\varepsilon = \frac{1}{50}$, $N = 50$ (kích thước của chuỗi ch bởi công thức (2.3.22)) và với

$(x, t) \in [0, 2] \times [0, 2]$ ta có đồ thị $(x, t) \mapsto w_\varepsilon(x, t)$ trong hình 1.

Ta có đồ thị $(x, t) \mapsto w(x, t)$ trong hình 2.

Kết quả 2 (hình 3 và hình 4)

Sử dụng phương pháp tương tự như trên ta có đồ thị

$(x, t) \in [0, 4] \times [0, 4] \rightarrow w_\varepsilon(x, t)$ trong hình 3, là nghiệm chỉnh hóa của bài toán

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times (1, 3), t > 0$$

$$u(x, 1, t) = 0; \quad u(x, 2, t) = \frac{1}{t} e^{\frac{-x^2-4}{4t}} \left(1 - e^{\frac{-1}{t}} \right); \quad u(x, y, 0) = 0$$

trong đó hàm số cần tìm là

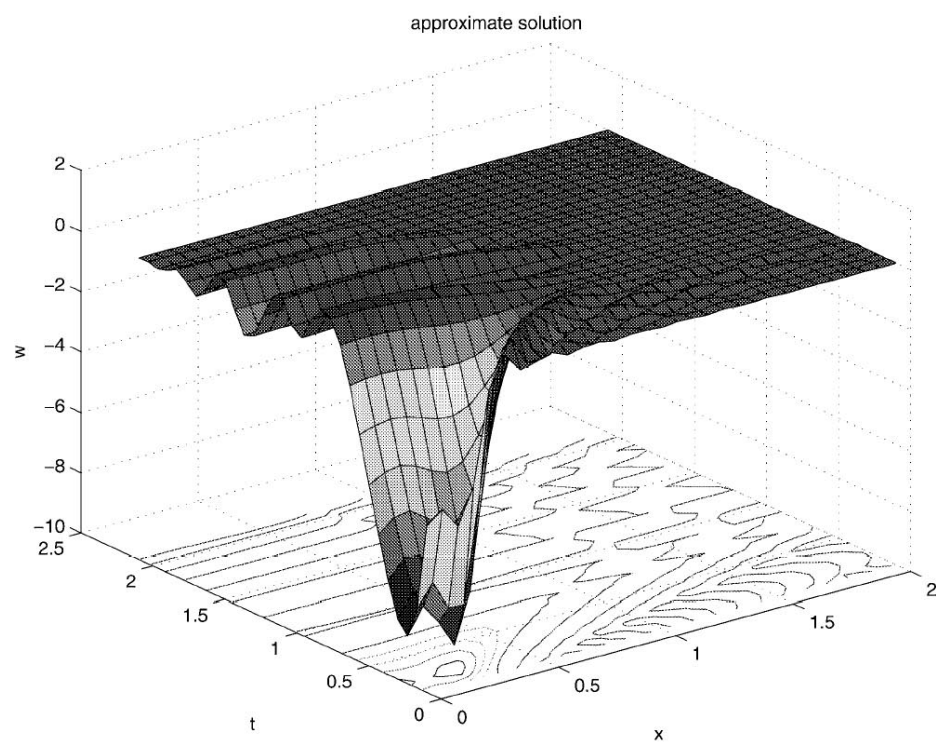
$$w(x, t) = u_y(x, 1, t).$$

Đồ thị nghiệm chính xác

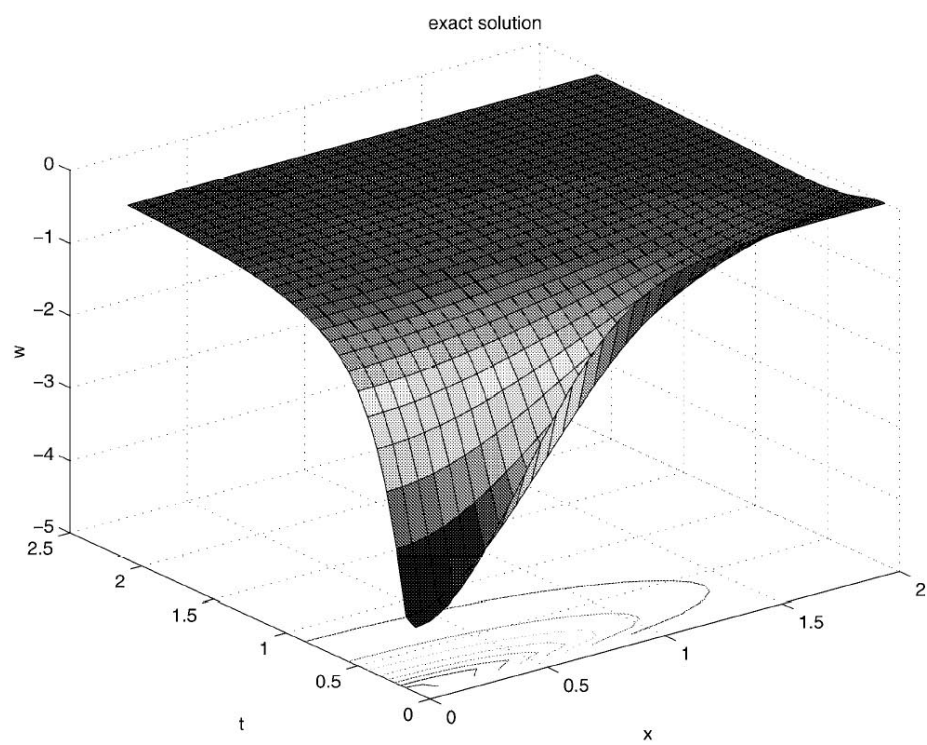
$$w(x, t) = \frac{1}{t^2} e^{\frac{-x^2-1}{4t}}$$

được vẽ trong hình 4.

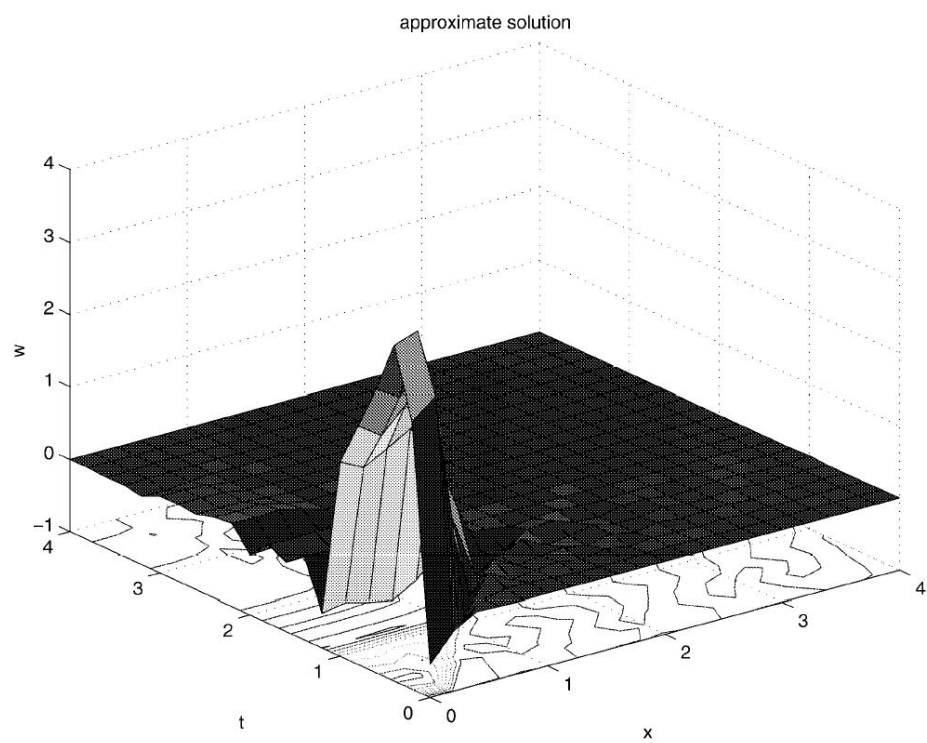
Hình 1



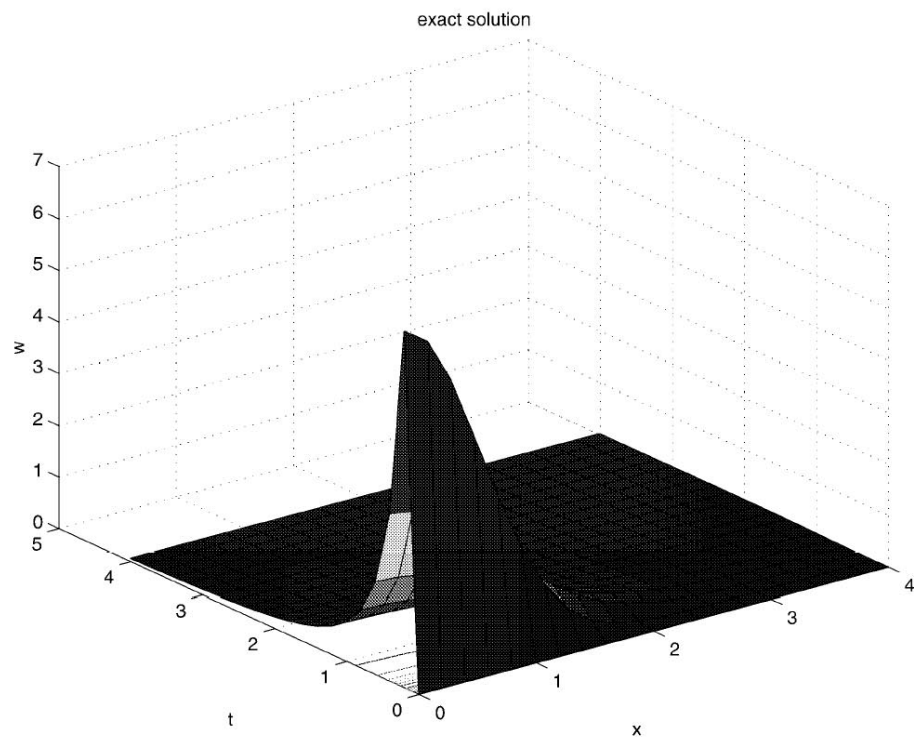
Hình 2



Hình 3



Hình 4



Phần C: Áp dụng vào bài toán tìm nhiệt độ bề mặt của một vật thể hai lớp

Bài này sẽ được trình bày chi tiết trong Chương 3, mục 3.2, còn tại đây chỉ trình bày ý chính để áp dụng chỉnh hóa hệ phương trình tích chập vào bài toán tìm nhiệt độ bề mặt của một vật thể hai lớp .

Chúng ta xét bài toán tìm hàm $u_0(0,t) = v_0(t)$ trong đó u_0 thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} k_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0 & 0 < x < 2, t > 0 \\ k_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0 & 2 < x < b, t > 0 \end{cases} \quad (2.3.23)$$

và các điều kiện

$$\begin{cases} u_0(x, 0) = 0 \\ u_0(1, t) = f_0(t), t > 0 \\ u_0(3, t) = g_0(t), t > 0 \\ u_0(4, t) = h_0(t), t > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} u_0(x, t) = \lim_{x \rightarrow 2^+} u_0(x, t), t > 0. \end{cases} \quad (2.3.24)$$

Giả sử u_0, u_{0x} bị chặn trong $(0, b) \times (0, +\infty)$.

Hệ số truyền nhiệt trong từng lớp là k_1, k_2 là những hằng số dương và những hàm f_0, g_0, h_0 có dữ liệu đo đạc bị nhiễu tương ứng là f, g, h .

Sử dụng công cụ hàm Green, ta nhận được hệ phương trình tích chập

$$\begin{cases} \sqrt{2k_2} g_0(t) + 2F_1 * g_0(t) - F_2 * u_0(2, \cdot)(t) - F_2 * h_0(t) = 0, \\ \sqrt{2k_1} f_0(t) + 2F_3 * f_0(t) - F_4 * v_0(t) - F_4 * u_0(2, \cdot)(t) = 0 \end{cases} \quad (2.3.25)$$

trong đó

$$F_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{k_2 t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

$$F_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4k_2 t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

$$F_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{k_1 t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

$$F_4(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4k_1 t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Các hàm này có biến đổi Fourier tương ứng là (xem [31], trang 16, 75)

$$\begin{aligned} \widehat{F}_1(p) &= \sqrt{\frac{k_2}{2}} e^{-\sqrt{(2|p|)/k_2}} \left(\cos \sqrt{\frac{2|p|}{k_2}} - i \operatorname{sgn}(p) \sin \sqrt{\frac{2|p|}{k_2}} \right), \\ \widehat{F}_2(p) &= \sqrt{2k_2} e^{-\sqrt{|p|/(2k_2)}} \left(\cos \sqrt{\frac{|p|}{2k_2}} - i \operatorname{sgn}(p) \sin \sqrt{\frac{|p|}{2k_2}} \right), \\ \widehat{F}_3(p) &= \sqrt{\frac{k_1}{2}} e^{-\sqrt{(2|p|)/k_1}} \left(\cos \sqrt{\frac{2|p|}{k_1}} - i \operatorname{sgn}(p) \sin \sqrt{\frac{2|p|}{k_1}} \right), \\ \widehat{F}_4(p) &= \sqrt{2k_1} e^{-\sqrt{|p|/(2k_1)}} \left(\cos \sqrt{\frac{|p|}{2k_1}} - i \operatorname{sgn}(p) \sin \sqrt{\frac{|p|}{2k_1}} \right). \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Lấy Fourier đẳng thức (2.3.25), ta nhận được

$$\begin{cases} \sqrt{2k_2} \widehat{g}_0(p) + 2\widehat{F}_1(p)\widehat{g}_0(p) - \widehat{F}_2(p)\widehat{u}_0(2, \cdot)(p) - \widehat{F}_2(p)\widehat{h}_0(p) = 0, \\ \sqrt{2k_1} \widehat{f}_0(p) + 2\widehat{F}_3(p)\widehat{f}_0(p) - \widehat{F}_4(p)\widehat{v}_0(p) - \widehat{F}_4(p)\widehat{u}_0(2, \cdot)(p) = 0. \end{cases}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} D(p) \cdot \widehat{v}_0(p) &= \sqrt{2k_1} \widehat{f}_0(p) \widehat{F}_2(p) + 2\widehat{F}_3(p) \widehat{F}_2(p) \widehat{f}_0(p) \\ &\quad - \sqrt{2k_2} \widehat{g}_0(p) \widehat{F}_4(p) - 2\widehat{F}_1(p) \widehat{F}_4(p) \widehat{g}_0(p) + \widehat{F}_2(p) \widehat{F}_4(p) \widehat{h}_0(p) \equiv G_0(p). \end{aligned}$$

trong đó

$$D(p) = \widehat{F}_2(p)\widehat{F}_4(p).$$

Hệ quả 2.3.2 Giả sử u_0 là nghiệm duy nhất của (2.3.23)-(2.3.24) thỏa $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^+; H^2[(0, b) \setminus \{2\}] \cap H^1(0, b))$, $(\partial u_0 / \partial t) \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(0, b))$. Đặt $v_0(t) = u_0(0, t)$. Cho $\gamma \in (0, 2)$, $\varepsilon \in (0, 1)$ và $f, g, h \in L^2(\mathbb{R}^+)$ là những dữ liệu nhận được do đo đạc tương ứng f_0, g_0, h_0 . Nếu $\|f - f_0\|_2 < \varepsilon$, $\|g - g_0\|_2 < \varepsilon$, $\|h - h_0\|_2 < \varepsilon$ trong đó $\|\cdot\|_2$ là chuẩn trong $L^2(\mathbb{R}^+)$. Khi đó từ f, g, h chúng ta có thể xây dựng một hàm $v_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^+)$ sao cho

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_2 < \frac{1}{4k_1k_2} \varepsilon^{2-\gamma} + \eta_\gamma(\varepsilon)$$

trong đó $\eta_\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \downarrow 0$.

Nếu chúng ta giả sử thêm $v_0 \in H^m(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $m > 0$ và $0 < \varepsilon < \max\{e^{-4m^2}, e^{-e^2}\}$ thì

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_2 < \left(\ln \left(\frac{1/\varepsilon}{\ln^{4m}(1/\varepsilon)} \right) \right)^{-2m} \sqrt{E \frac{(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})^{4m}}{(2k_1k_2)^{2m}} + \frac{1}{4k_1k_2}}$$

trong đó $E = \|\widehat{v}_0(p)p^m\|_2^2$.

Chứng minh

Đặt

$$G(p) = \sqrt{2k_1} \widehat{f}(p) \widehat{F}_2(p) + 2\widehat{F}_3(p) \widehat{F}_2(p) \widehat{f}(p) - \sqrt{2k_2} \widehat{g}(p) \widehat{F}_4(p) - 2\widehat{F}_1(p) \widehat{F}_4(p) \widehat{g}(p) + \widehat{F}_2(p) \widehat{F}_4(p) \widehat{h}(p).$$

Từ (2.3.26), ta có

$$|\widehat{F}_1(p)| \leq \sqrt{\frac{k_2}{2}}, |\widehat{F}_2(p)| \leq \sqrt{2k_2}, |\widehat{F}_3(p)| \leq \sqrt{\frac{k_1}{2}}, |\widehat{F}_4(p)| \leq \sqrt{2k_1} \quad (2.3.27)$$

điều này cho ta

$$\begin{aligned} \|G - G_0\|_2 &\leq \left\| \widehat{F}_2(p) \left[\sqrt{2k_1} (\widehat{f}(p) - \widehat{f}_0(p)) + 2\widehat{F}_3(p) (\widehat{f}(p) - \widehat{f}_0(p)) \right] \right. \\ &\quad \left. + \widehat{F}_4(p) \left[-\sqrt{2k_2} (\widehat{g}(p) - \widehat{g}_0(p)) - 2\widehat{F}_1(p) (\widehat{g}(p) - \widehat{g}_0(p)) + \widehat{F}_2(p) (\widehat{h}(p) - \widehat{h}_0(p)) \right] \right\|_2 \\ &\leq \sqrt{2k_2} \left[\sqrt{2k_1} \varepsilon + 2\sqrt{\frac{k_1}{2}} \varepsilon \right] + \sqrt{2k_1} \left[\sqrt{2k_2} \varepsilon + 2\sqrt{\frac{k_2}{2}} \varepsilon + \sqrt{2k_2} \varepsilon \right] \\ &\leq 10\sqrt{k_1 k_2} \varepsilon. \end{aligned}$$

Ta có

$$|D(p)| < \alpha \quad \text{thì} \quad \frac{2k_1 k_2}{(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})^2} \ln^2 \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{\alpha} < |p|, \quad \text{vì thế nếu đặt}$$

$\mathcal{L}_\alpha = \{p / |D(p)| < \alpha\}$, ta có

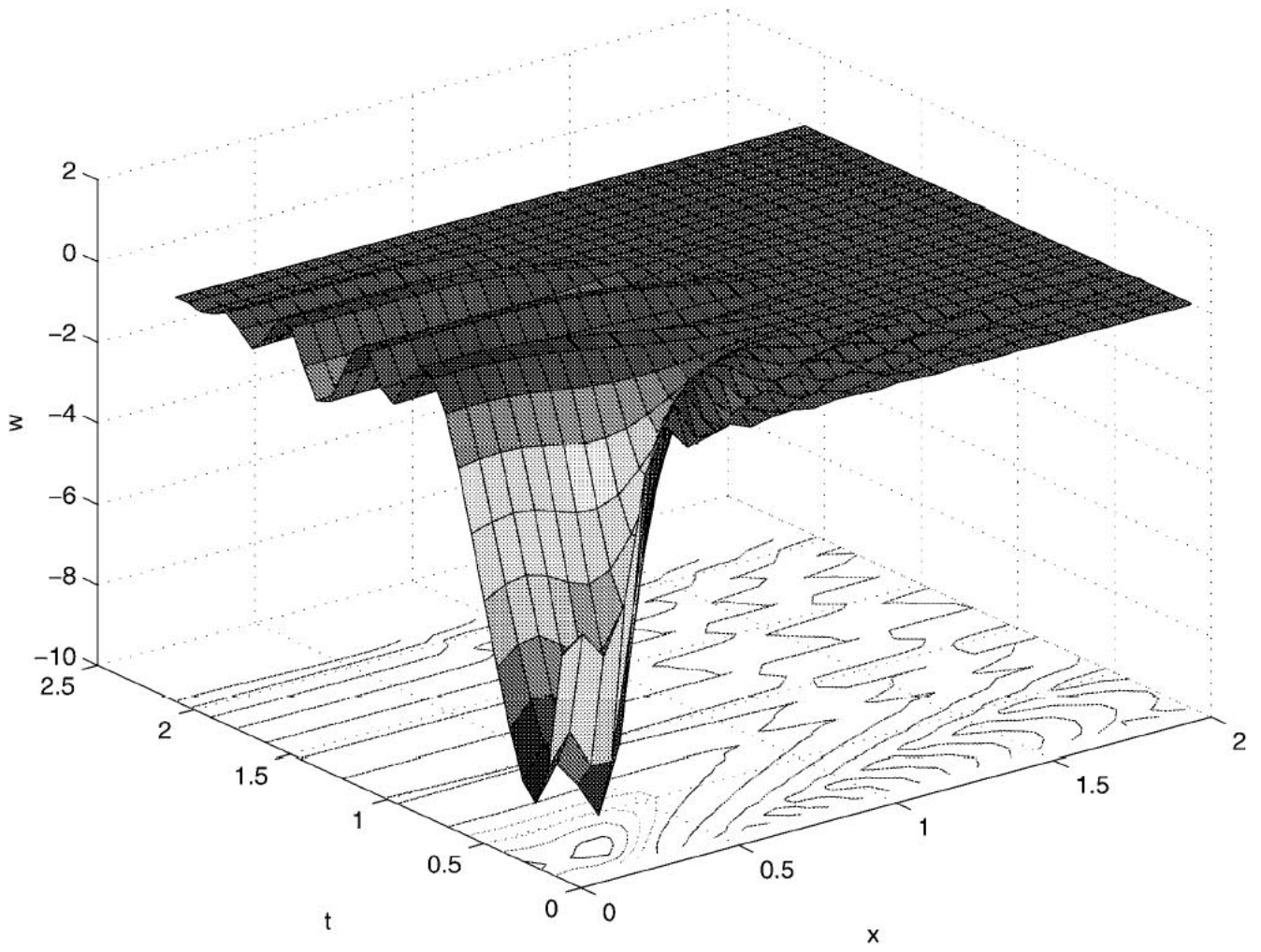
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{v}_0(p) \right|^2 \chi_{\mathcal{L}_\alpha}(p) dp \rightarrow 0 \quad \text{khi} \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Giả sử thêm $v_0 \in H^m(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, $m > 0$ và $0 < \varepsilon < \max\{e^{-4m^2}, e^{-e^2}\}$, ta có

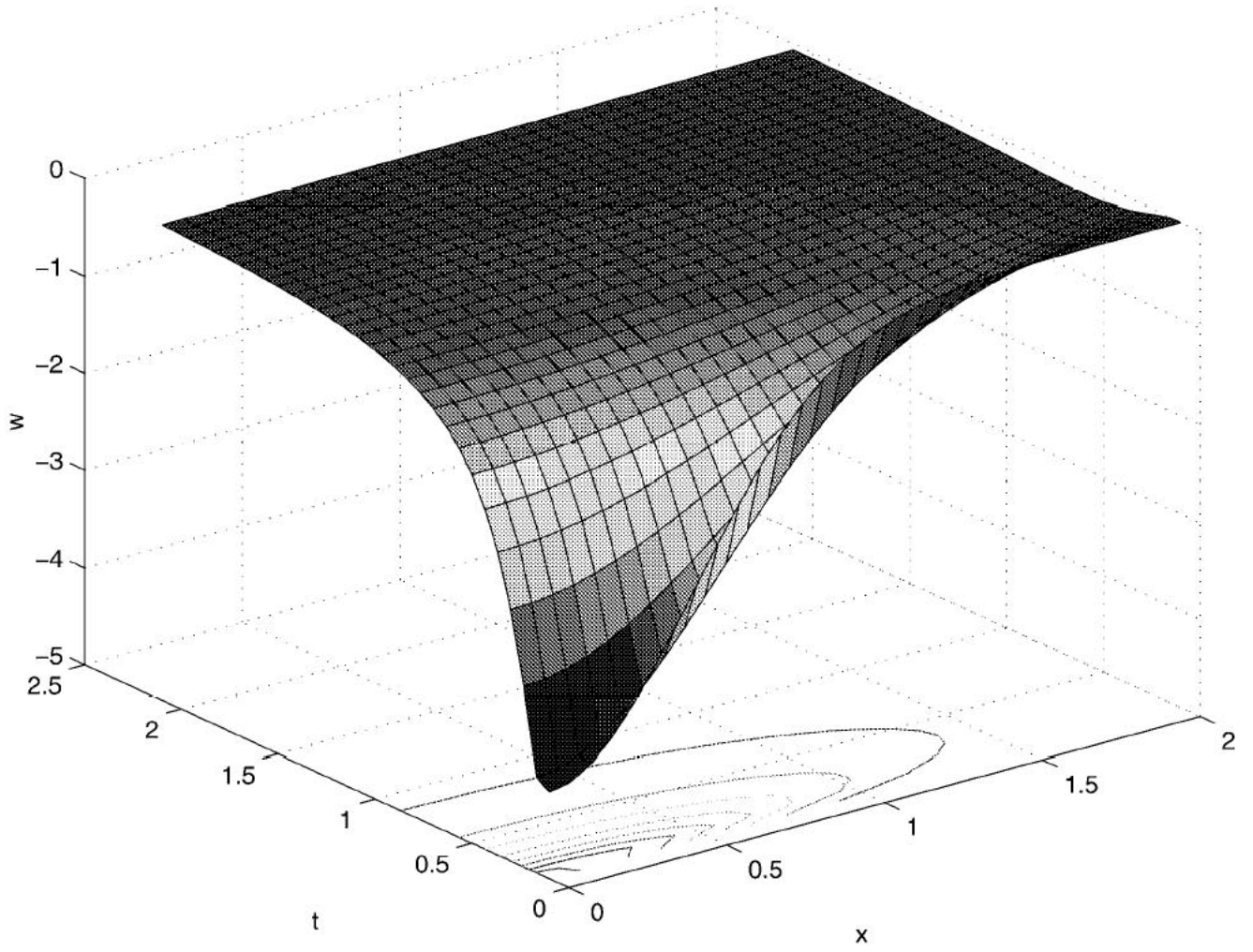
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widehat{v}_0(p) \right|^2 \chi_{\mathcal{L}_\alpha}(p) dp < E \frac{(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})^{4m}}{(2k_1 k_2)^{2m}} \left(\ln \frac{2\sqrt{k_1 k_2}}{\alpha} \right)^{-4m}.$$

Áp dụng Định lý 2.2.1, ta có Hệ quả 2.3.2. ■

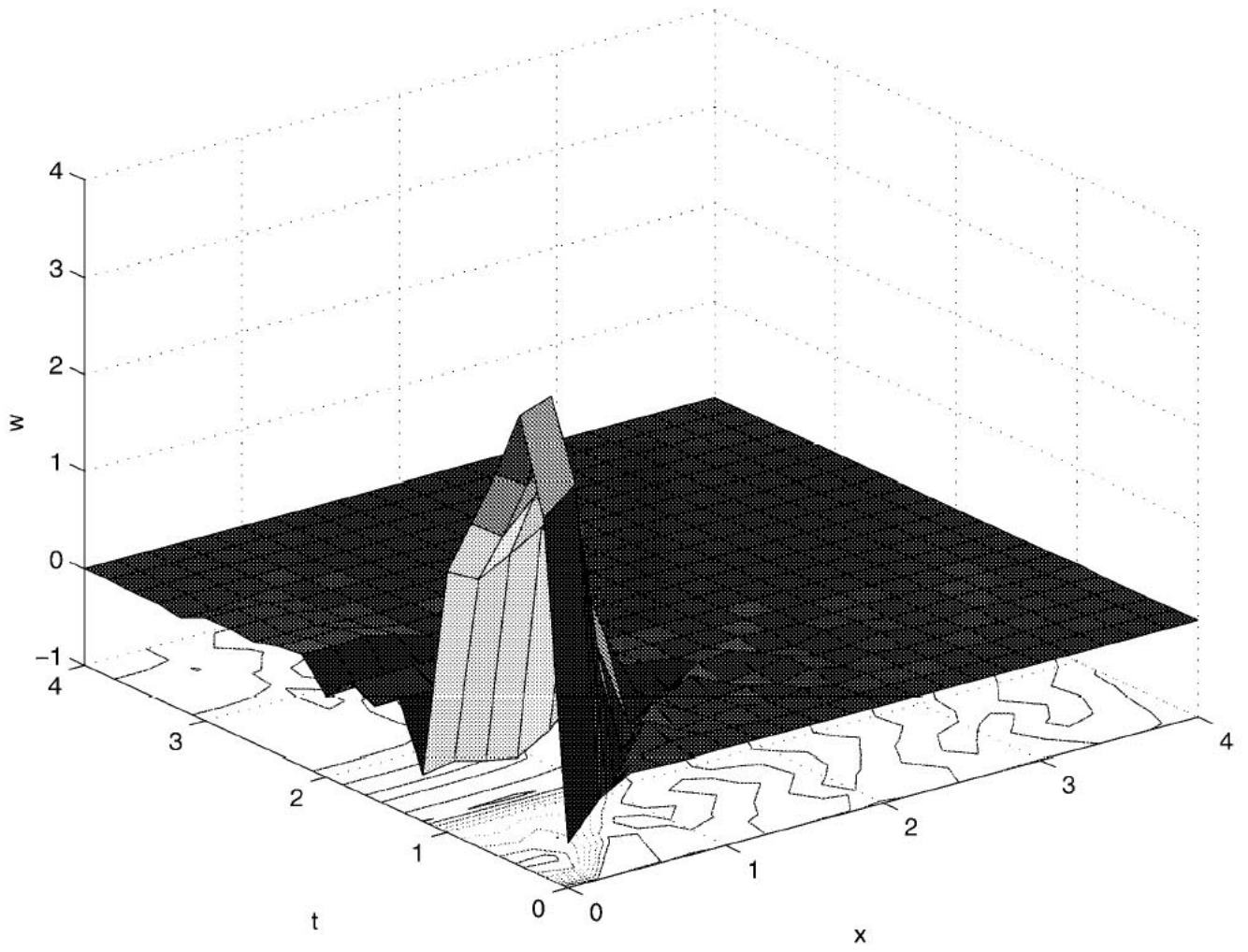
approximate solution



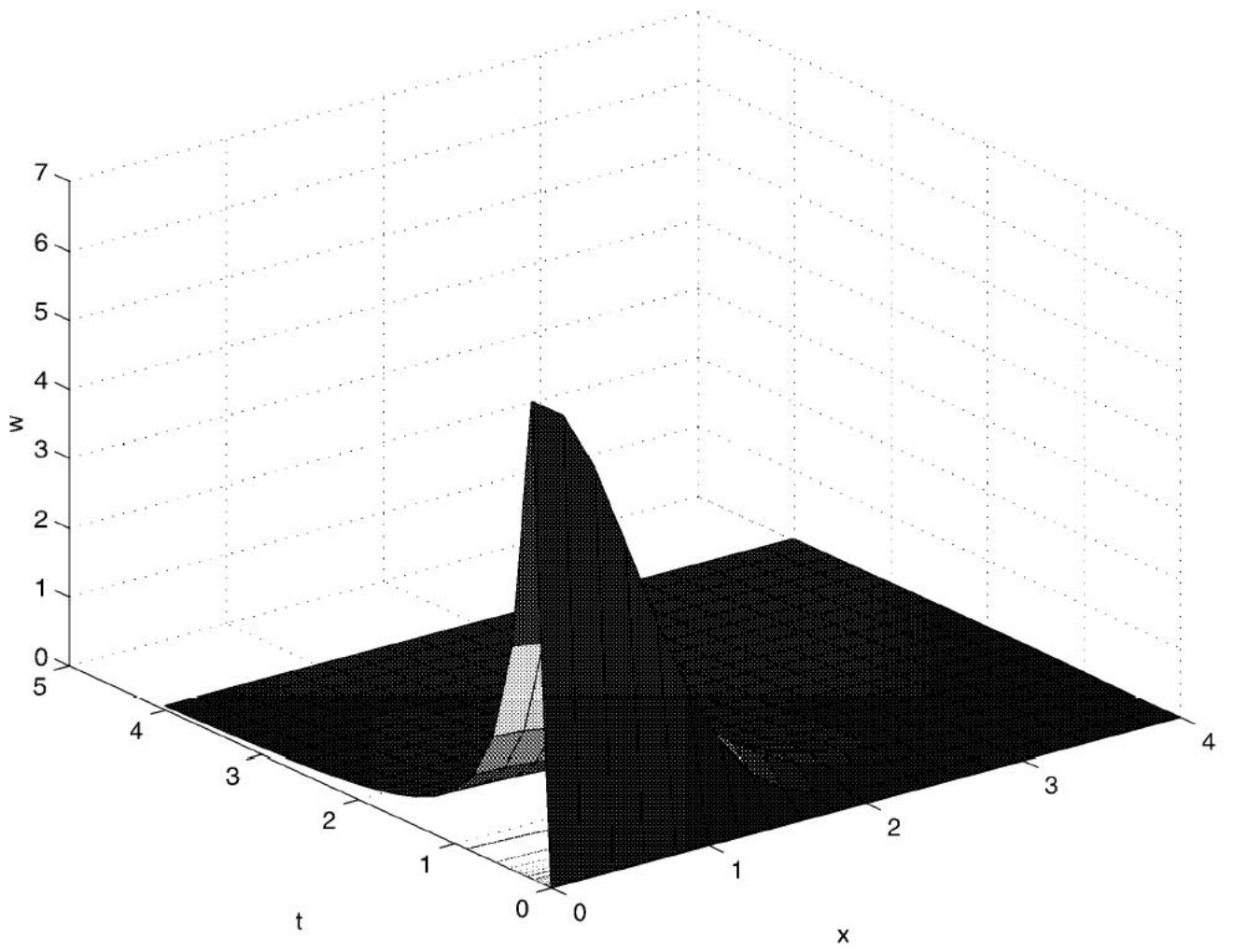
exact solution



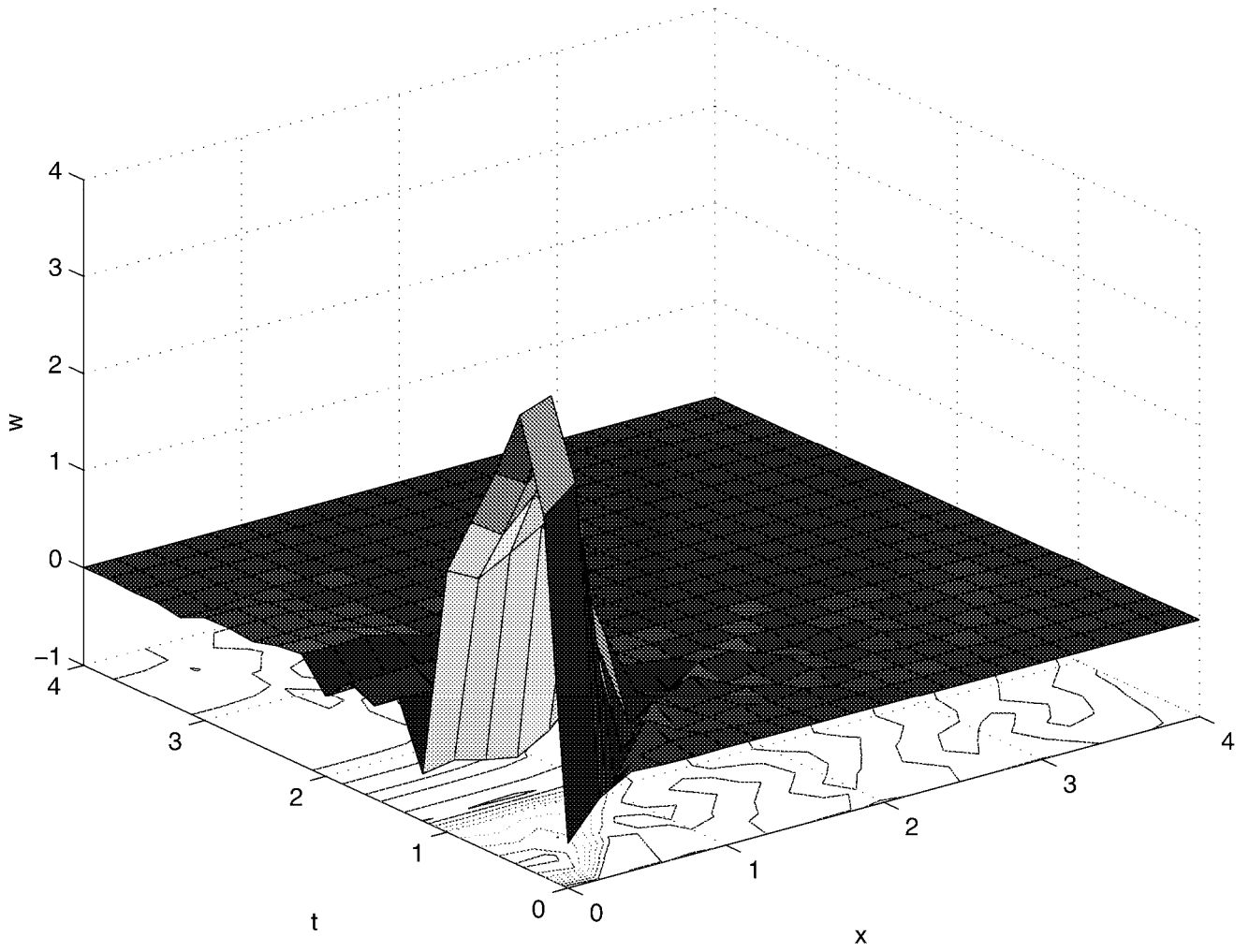
approximate solution



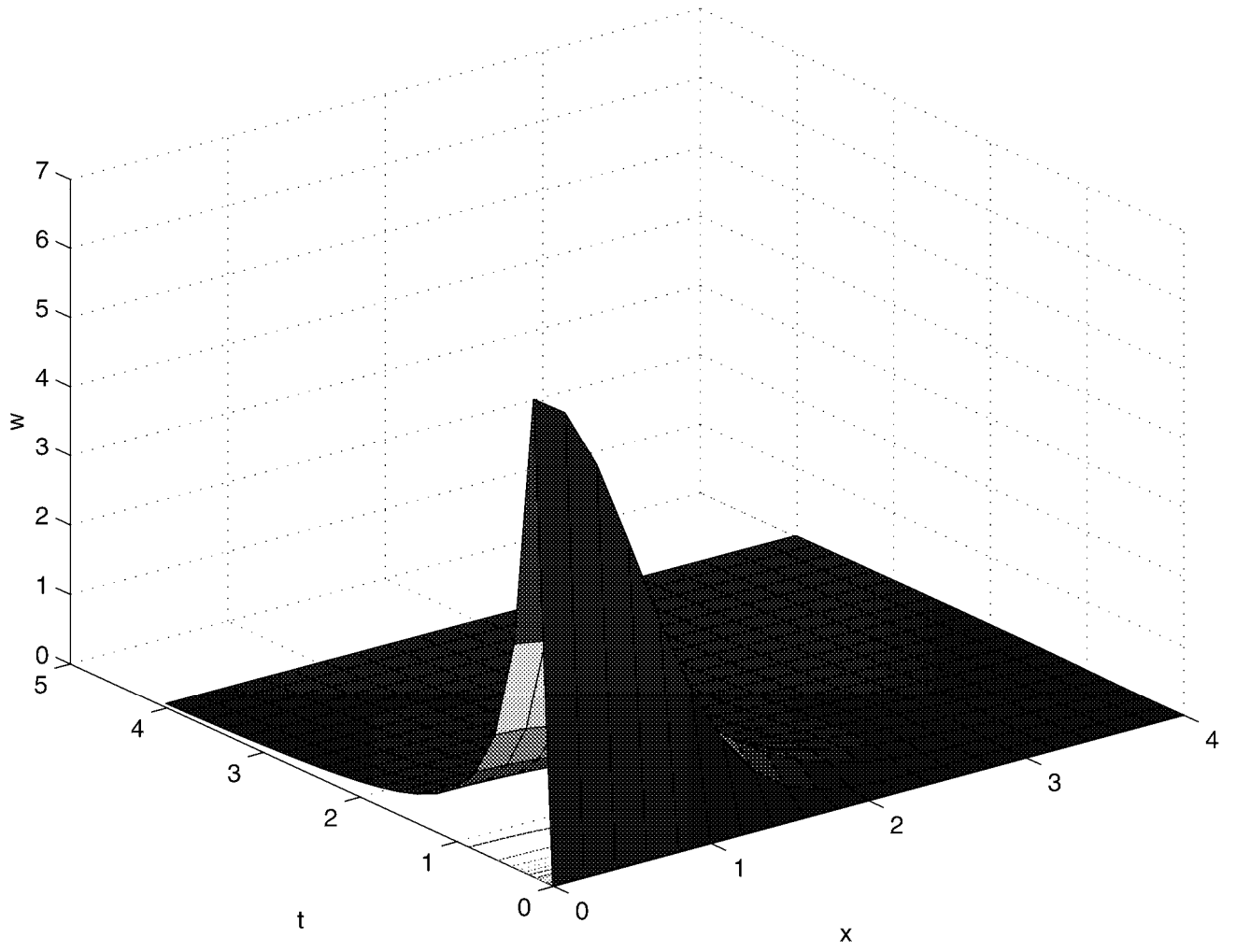
exact solution



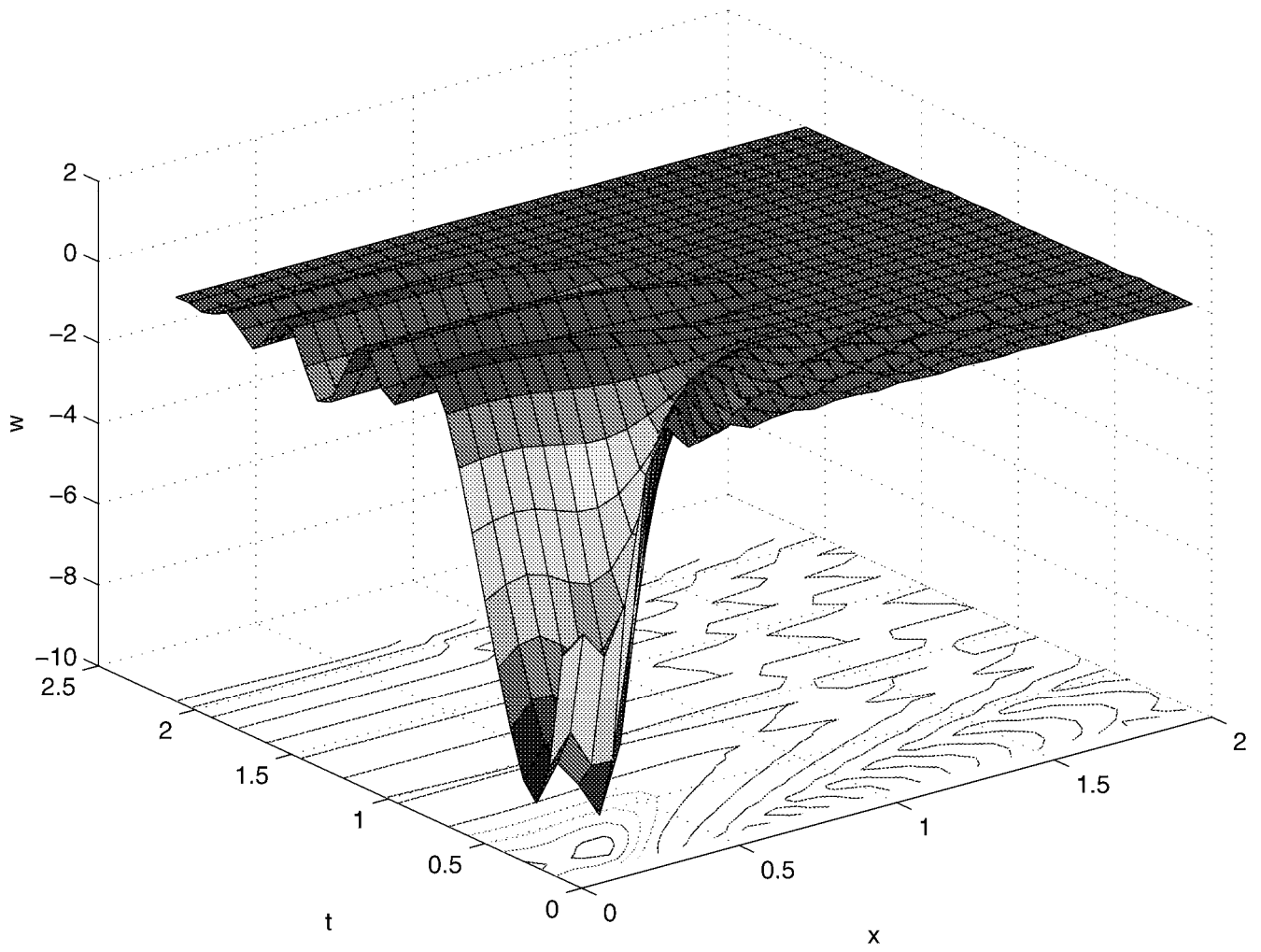
approximate solution



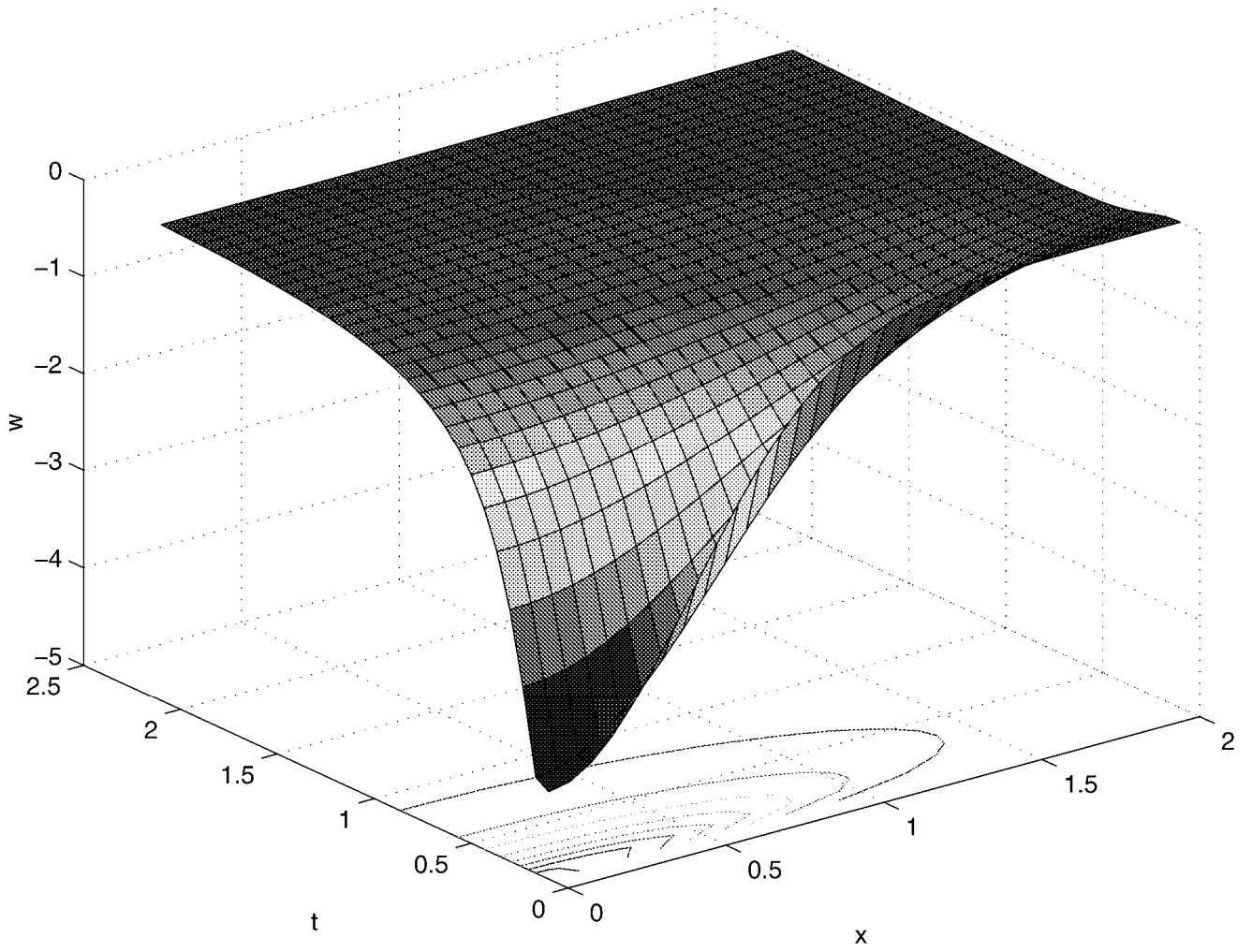
exact solution



approximate solution



exact solution



Chương 3

MỘT SỐ BÀI TOÁN NHIỆT NGƯỢC TRONG LỖ KHOAN THĂM DÒ

Mục 3.2 và mục 3.3 đã công bố trong [5] và [8] (của danh mục công trình công bố của tác giả).

3.1 MỞ ĐẦU

Một trong những bài toán nhiệt ngược quan trọng trong ứng dụng là bài toán xác định phân bố hay thông lượng nhiệt bề mặt trong lỗ khoan thăm dò từ những đo đạc thực hiện bên trong lỗ khoan.

Trong [22, 30, 59, 76], các tác giả khảo sát bài toán một chiều trong đó trái đất được mô hình là nửa trục Ox với phân bố nhiệt $u(x, t)$, tại điểm $x > 0$ vào thời điểm $t > 0$. Khi đó với dữ liệu $f(t) = u(1, t)$ và dáng điệu của u tại $+\infty$, phân bố nhiệt $u(0, t)$ hay thông lượng nhiệt $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$ bề mặt được xác định.

Trường hợp hệ số dẫn nhiệt phụ thuộc vào biến không gian một chiều đã được khảo sát trong [45, 46, ...] bằng phương pháp mollification sử dụng biến đổi Fourier theo biến thời gian.

Trong các mô hình khác [16, 61] (có vẻ sát thực tế hơn) các tác giả coi trái đất cấu tạo bởi nhiều lớp, mỗi lớp có hệ số dẫn nhiệt hằng và do đó, các tác giả khảo sát bài toán nhiệt ngược trên $(0, a)$ thay vì trên $(0, +\infty)$. Khi đó, các tác giả chứng tỏ được rằng phân bố nhiệt $u(0, t)$ được xác định bằng dữ liệu đo tại hai điểm bên trong lỗ khoan, chẳng hạn tại $(1, t)$ và $(2, t)$, với $a > 2$. Để có thể xác định $u(0, t)$, các tác giả [16, 61] khảo sát dữ liệu $w(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t)$ và dữ liệu này được chỉ ra là nghiệm của một phương trình Volterra loại 2 theo các dữ liệu

$u(1,t)$ và $u(2,t)$. Chú ý rằng, phương trình tích phân loại 2 với các điều kiện tổng quát là bài toán chỉnh theo chuẩn sup tính trên khoảng thời gian hữu hạn. Tuy nhiên, do ẩn hàm $u(0,t)$ được quy về một phương trình tích chập với dữ liệu là $u(1,t)$ và $\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)$ và được khảo sát trong không gian $L^2(0,+\infty)$. Bài toán trở thành không chỉnh. Phương pháp này có các tính toán nhiều và khó rút ra các đánh giá về sai số của nghiệm từ sai số đo đạc. Do đó, trong mục 3.3 của chương này, chúng tôi xây dựng nghiệm xấp xỉ ổn định trực tiếp cho $u(x,0,t)$ mà không thông qua phần đánh giá sai số cho $\frac{\partial u}{\partial x}(x,1,t)$, theo chuẩn $L^2(\mathbb{R} \times (0,+\infty))$ với dữ liệu là $u(x,1,t)$ và $u(x,2,t)$.

Tuy nhiên, mô hình nói trên không thích hợp cho trường hợp của một vật composite được xem như một vật thể nhiều lớp, mỗi lớp với một hệ số dẫn nhiệt là hằng. Trong mục 3.2 chúng tôi sẽ xem bài toán tương ứng với vật composite, được mô hình bởi một khoảng $(0,b)$, có một mặt ngoài và hai lớp biểu diễn bởi $x = 0$ và hai khoảng $0 < x < a$ và $a < x < b$ ($0 < a < b$). Trong mục này, đo nhiệt độ tại ba điểm ở trong vật thể là cần thiết để bảo đảm tính duy nhất nghiệm. Mặc dầu vậy bài toán của chúng ta vẫn không chỉnh (xem [16]). Chúng tôi sẽ biến đổi bài toán về hệ phương trình tích chập và sử dụng biến đổi Fourier và phương pháp chặt cụt tích phân để chỉnh hóa bài toán. Sai số trong trường hợp dữ liệu bị nhiễu sẽ được đưa ra.

3.2 TÌM NHIỆT ĐỘ BỀ MẶT CỦA MỘT VẬT THỂ HAI LỚP

Không mất tổng quát, chúng ta giả sử rằng $a=2$, $b>4$ và nhiệt độ được cho (có thể với sai số nhỏ) tại $x=1$, $x=3$, $x=4$. Gọi $u_0(x,t)$ là nhiệt độ của vật composite với $0 < x < b$, $t > 0$. Chúng ta xét bài toán tìm hàm $u_0(0,t) = v_0(t)$ trong đó u_0 thỏa hệ phương trình

$$\begin{cases} k_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0 & 0 < x < 2, t > 0 \\ k_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0 & 2 < x < b, t > 0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

và các điều kiện

$$\begin{cases} u_0(x, 0) = 0 \\ u_0(1, t) = f_0(t), t > 0 \\ u_0(3, t) = g_0(t), t > 0 \\ u_0(4, t) = h_0(t), t > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} u_0(x, t) = \lim_{x \rightarrow 2^+} u_0(x, t), t > 0. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Giả sử u_0, u_{0x} bị chặn trong $(0, b) \times (0, +\infty)$.

Điều kiện sau cùng là nhiệt độ liên tục trong vật thể composite. Ở đây chú ý rằng thông lượng nhiệt có thể không liên tục tại bề mặt tiếp xúc $x=2$. Hệ số truyền nhiệt trong từng lớp là k_1, k_2 là những hằng số dương và những hàm f_0, g_0, h_0 có dữ liệu đo đạc bị nhiễu tương ứng là f, g, h . Từ đây chúng ta kí hiệu \mathbb{R}^+ là tập những số thực dương, mỗi hàm φ xác định trên \mathbb{R}^+ có thể xem như một hàm xác định trên \mathbb{R} bằng cách đặt $\varphi(t)=0$ cho $t \leq 0$. Trong (3.2.2), để tính toán đơn giản, điều kiện đầu tiên là $u_0(x, 0)$ triệt tiêu. Tuy nhiên, điều kiện này không phải là điều kiện trụ cột. Trong thực tế, phương pháp của bài này có thể được áp dụng cho bài toán với $u_0(x, 0)$ là không tầm thường.

Trước khi phát biểu kết quả chính, chúng ta cần đề cập về phương pháp chỉnh hóa. Trong phương pháp đề nghị bởi [16], tác giả trước tiên sử dụng dữ liệu $u(3, t), u(4, t)$ trong lớp thứ hai để tính nhiệt độ $u(2, t)$ tại bề mặt tiếp xúc. Tiếp theo, từ $u(2, t)$ và $u(1, t)$, các tác giả có thể tìm ẩn hàm $u(0, t)$. Do đó, trong phương pháp, Bài toán (3.2.1)-(3.2.2) được chia thành hai bài toán một lớp. Bây giờ, trong phương pháp của chúng ta, ẩn hàm $u(0, t)$ được tìm trực tiếp từ các dữ

kiện mà không cần tính $u(2,t)$. Điều này có nghĩa sẽ có một xấp xỉ tốt hơn cho $u(0,t)$. Hơn nữa, chúng ta cũng chú ý phương pháp này có thể áp dụng cho bài toán của vật thể composite n -lớp ($n \geq 3$).

Ta có kết quả sau đây

Định lý 3.2.1 *Giả sử u_0 là nghiệm duy nhất của (3.2.1)-(3.2.2) thỏa $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^+; H^2[(0,b) \setminus \{2\}] \cap H^1(0,b))$, $(\partial u_0 / \partial t) \in L^2(\mathbb{R}^+; L^2(0,b))$. Đặt $v_0(t) = u_0(0,t)$. Cho $\gamma \in (0,2)$, $\varepsilon \in (0,1)$ và $f, g, h \in L^2(\mathbb{R}^+)$ là những dữ liệu nhận được do đo đặc tương ứng f_0, g_0, h_0 . Nếu $\|f - f_0\|_2 < \varepsilon$, $\|g - g_0\|_2 < \varepsilon$, $\|h - h_0\|_2 < \varepsilon$ trong đó $\|\cdot\|_2$ là chuẩn trong $L^2(\mathbb{R}^+)$. Khi đó từ f, g, h chúng ta có thể xây dựng một hàm $v_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^+)$ sao cho*

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_2 < \frac{1}{4k_1 k_2} \varepsilon^{2-\gamma} + \eta_\gamma(\varepsilon)$$

trong đó $\eta_\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \downarrow 0$.

Nếu chúng ta giả sử thêm

$$v_0 \in H^m(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}), \quad m > 0 \quad \text{và} \quad 0 < \varepsilon < \max\{e^{-4m^2}, e^{-e^2}\}$$

thì

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_2 < D \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-m}$$

trong đó D là hằng số dương độc lập với ε .

Hơn nữa, trong hai trường hợp trên, chúng ta có biểu diễn

$$v_\varepsilon(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(\varepsilon) \frac{\sin(ta_\varepsilon - n\pi)}{ta_\varepsilon - n\pi} \tag{3.2.3}$$

trong đó a_ε được xác định trong (3.2.13) hoặc (3.2.14) và $C_n(\varepsilon)$ xác định trong (3.2.15).

Chứng minh

Chứng minh được chia thành 2 bước. Trong bước 1, sử dụng hàm Green và biến đổi Fourier chúng ta sẽ biến đổi hệ (3.2.1)-(3.2.2) thành hệ 2 phương trình tích chập. Trong bước 2, chúng ta sẽ xây dựng hàm v_ε xấp xỉ của v_0 .

Bước 1: Biến đổi hệ (3.2.1)-(3.2.2) thành hệ phương trình tích chập

Đặt

$$\Gamma(x, t, \xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4k_2(t-\tau)}\right)$$

và

$$G(x, t, \xi, \tau) = \Gamma(x, t, \xi, \tau) - \Gamma(x, t, 8-\xi, \tau).$$

Tích phân đẳng thức

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(u_0 G_\xi - u_{0\xi} G) + \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{1}{k_2} u_0 G\right) = 0$$

trên miền $(3,4) \times (0, t-\varepsilon)$, chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} -\int_0^{t-\varepsilon} [u_0(3, \tau) G_\xi(x, t, 3, \tau) - u_{0\xi}(3, \tau) G(x, t, 3, \tau)] d\tau + \int_0^{t-\varepsilon} u_0(4, \tau) G_\xi(x, t, 4, \tau) d\tau \\ + \frac{1}{k_2} \int_3^4 u_0(\xi, t-\varepsilon) G(x, t, \xi, t-\varepsilon) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Cho $\varepsilon \rightarrow 0$, ta có

$$\begin{aligned} -\int_0^t [u_0(3, \tau) G_\xi(x, t, 3, \tau) - u_{0\xi}(3, \tau) G(x, t, 3, \tau)] d\tau + \int_0^t u_0(4, \tau) G_\xi(x, t, 4, \tau) d\tau \\ + \frac{1}{\sqrt{k_2}} u_0(x, t) = 0. \end{aligned}$$

Cho $x \rightarrow 3^+$ và chú ý rằng

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \int_0^t u_0(3, \tau) \frac{x-3}{4k_2(t-\tau)^{3/2}\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-3)^2}{4k_2(t-\tau)}\right) d\tau = \frac{1}{2\sqrt{k_2}} u_0(3, t),$$

chúng ta có

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3^+} \int_0^t G(x, t, 3, \tau) u_{0\xi}(3, \tau) d\tau &= -\frac{1}{2\sqrt{k_2}} u_0(3, t) \\
 &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u_0(3, \tau)}{k_2(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{k_2(t-\tau)}\right) d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u_0(4, \tau)}{k_2(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4k_2(t-\tau)}\right) d\tau \\
 &= -\frac{1}{2\sqrt{k_2}} g_0(t) \\
 &\quad - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g_0(\tau)}{k_2(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{k_2(t-\tau)}\right) d\tau \\
 &\quad + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h_0(\tau)}{k_2(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4k_2(t-\tau)}\right) d\tau. \quad (3.2.4)
 \end{aligned}$$

Tiếp theo, đặt :

$$N(x, t, \xi, \tau) = \Gamma(x, t, \xi, \tau) - \Gamma(x, t, 4 - \xi, \tau),$$

tích phân đẳng thức

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (u_0 N_\xi - u_{0\xi} N) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{k_2} u_0 N \right) = 0$$

trên miền $(2, 3) \times (0, t - \varepsilon)$ và cho $\varepsilon \rightarrow 0$, ta có

$$\begin{aligned}
 \int_0^t u_{0\xi}(3, \tau) N(x, t, 3, \tau) d\tau &= - \int_0^t u_0(2, \tau) N_\xi(x, t, 2, \tau) d\tau \\
 &\quad + \int_0^t u_0(3, \tau) N_\xi(x, t, 3, \tau) d\tau + \frac{1}{\sqrt{k_2}} u_0(x, t).
 \end{aligned}$$

Cho $x \rightarrow 3^-$ và chú ý rằng

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \int_0^t u_0(3, \tau) \frac{x-3}{4k_2(t-\tau)^{3/2} \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-3)^2}{4k_2(t-\tau)}\right) d\tau = -\frac{1}{2\sqrt{k_2}} u_0(3, t),$$

ta có

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3^-} \int_0^t u_{0\xi}(3, \tau) N(x, t, 3, \tau) d\tau &= \frac{1}{2\sqrt{k_2}} u_0(3, t) \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u_0(3, \tau)}{k_2(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{k_2(t-\tau)}\right) d\tau \\
 &- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u_0(2, \tau)}{k_2(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4k_2(t-\tau)}\right) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{k_2}} g_0(t) \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g_0(\tau)}{k_2(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{k_2(t-\tau)}\right) d\tau \\
 &- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u_0(2, \tau)}{k_2(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4k_2(t-\tau)}\right) d\tau. \quad (3.2.5)
 \end{aligned}$$

Sử dụng đẳng thức

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \int_0^t G(x, t, 3, \tau) u_{0\xi}(3, \tau) d\tau = \lim_{x \rightarrow 3^-} \int_0^t N(x, t, 3, \tau) u_{0\xi}(3, \tau) d\tau,$$

và từ (3.2.4), (3.2.5) ta có

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{k_2}} g_0(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g_0(\tau)}{k_2(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{k_2(t-\tau)}\right) d\tau \\
 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u_0(2, \tau)}{k_2(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4k_2(t-\tau)}\right) d\tau \\
 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{h_0(t)}{k_2(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4k_2(t-\tau)}\right) d\tau = 0. \quad (3.2.6)
 \end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{k_1}} f_0(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_0(\tau)}{k_1(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{k_1(t-\tau)}\right) d\tau$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v_0(\tau)}{k_1(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4k_1(t-\tau)}\right) d\tau \\ & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{u_0(2,\tau)}{k_1(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4k_1(t-\tau)}\right) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Đặt

$$F_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{k_2 t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

$$F_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4k_2 t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

$$F_3(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{k_1 t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

$$F_4(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4k_1 t}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Nhắc lại rằng biến đổi Fourier của một hàm Φ là

$$\widehat{\Phi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) e^{-ipt} dt.$$

Chúng ta có ([31], trang 16, 75)

$$\widehat{F}_1(p) = \sqrt{\frac{k_2}{2}} e^{-\sqrt{(2|p|)/k_2}} \left(\cos \sqrt{\frac{2|p|}{k_2}} - i \operatorname{sgn}(p) \sin \sqrt{\frac{2|p|}{k_2}} \right),$$

$$\widehat{F}_2(p) = \sqrt{2k_2} e^{-\sqrt{|p|/(2k_2)}} \left(\cos \sqrt{\frac{|p|}{2k_2}} - i \operatorname{sgn}(p) \sin \sqrt{\frac{|p|}{2k_2}} \right),$$

$$\widehat{F}_3(p) = \sqrt{\frac{k_1}{2}} e^{-\sqrt{(2|p|)/k_1}} \left(\cos \sqrt{\frac{2|p|}{k_1}} - i \operatorname{sgn}(p) \sin \sqrt{\frac{2|p|}{k_1}} \right),$$

$$\widehat{F}_4(p) = \sqrt{2k_1} e^{-\sqrt{|p|/(2k_1)}} \left(\cos \sqrt{\frac{|p|}{2k_1}} - i \operatorname{sgn}(p) \sin \sqrt{\frac{|p|}{2k_1}} \right). \quad (3.2.8)$$

Từ (3.2.6), (3.2.7) ta nhận được hệ phương trình tích chập

$$\begin{cases} \sqrt{2k_2} g_0(t) + 2F_1 * g_0(t) - F_2 * u_0(2, \cdot)(t) - F_2 * h_0(t) = 0, \\ \sqrt{2k_1} f_0(t) + 2F_3 * f_0(t) - F_4 * v_0(t) - F_4 * u_0(2, \cdot)(t) = 0. \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Bước 2: Xây dựng v_ε

Lấy Fourier đẳng thức (3.2.9), ta nhận được

$$\begin{cases} \sqrt{2k_2} \widehat{g}_0(p) + 2\widehat{F}_1(p) \widehat{g}_0(p) - \widehat{F}_2(p) \widehat{u}_0(2, \cdot)(p) - \widehat{F}_2(p) \widehat{h}_0(p) = 0, \\ \sqrt{2k_1} \widehat{f}_0(p) + 2\widehat{F}_3(p) \widehat{f}_0(p) - \widehat{F}_4(p) \widehat{v}_0(p) - \widehat{F}_4(p) \widehat{u}_0(2, \cdot)(p) = 0. \end{cases}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} \widehat{F}_2(p) \widehat{F}_4(p) \widehat{v}_0(p) &= \sqrt{2k_1} \widehat{f}_0(p) \widehat{F}_2(p) + 2\widehat{F}_3(p) \widehat{F}_2(p) \widehat{f}_0(p) \\ &\quad - \sqrt{2k_2} \widehat{g}_0(p) \widehat{F}_4(p) - 2\widehat{F}_1(p) \widehat{F}_4(p) \widehat{g}_0(p) + \widehat{F}_2(p) \widehat{F}_4(p) \widehat{h}_0(p) \equiv G_0(p). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Đặt

$$\begin{aligned} G(p) &= \sqrt{2k_1} \widehat{f}(p) \widehat{F}_2(p) + 2\widehat{F}_3(p) \widehat{F}_2(p) \widehat{f}(p) \\ &\quad - \sqrt{2k_2} \widehat{g}(p) \widehat{F}_4(p) - 2\widehat{F}_1(p) \widehat{F}_4(p) \widehat{g}(p) + \widehat{F}_2(p) \widehat{F}_4(p) \widehat{h}(p). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Từ (3.2.8), ta có

$$\left| \widehat{F}_1(p) \right| \leq \sqrt{\frac{k_2}{2}}, \quad \left| \widehat{F}_2(p) \right| \leq \sqrt{2k_2}, \quad \left| \widehat{F}_3(p) \right| \leq \sqrt{\frac{k_1}{2}}, \quad \left| \widehat{F}_4(p) \right| \leq \sqrt{2k_1} \quad (3.2.12)$$

điều này cho ta

$$\begin{aligned} \|G - G_0\|_2 &\leq \left\| \widehat{F}_2(p) \left[\sqrt{2k_1} (\widehat{f}(p) - \widehat{f}_0(p)) + 2\widehat{F}_3(p) (\widehat{f}(p) - \widehat{f}_0(p)) \right] \right. \\ &\quad \left. + \widehat{F}_4(p) \left[-\sqrt{2k_2} (\widehat{g}(p) - \widehat{g}_0(p)) - 2\widehat{F}_1(p) (\widehat{g}(p) - \widehat{g}_0(p)) + \widehat{F}_2(p) (\widehat{h}(p) - \widehat{h}_0(p)) \right] \right\|_2 \\ &\leq \sqrt{2k_2} \left[\sqrt{2k_1} \varepsilon + 2\sqrt{\frac{k_1}{2}} \varepsilon \right] + \sqrt{2k_1} \left[\sqrt{2k_2} \varepsilon + 2\sqrt{\frac{k_2}{2}} \varepsilon + \sqrt{2k_2} \varepsilon \right] \end{aligned}$$

$$\leq 10\sqrt{k_1 k_2} \varepsilon.$$

Ta có :

$$v_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_0(p)}{\widehat{F}_2(p)\widehat{F}_4(p)} e^{ipt} dp.$$

Đặt

$$v_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} \frac{G(p)}{\widehat{F}_2(p)\widehat{F}_4(p)} e^{ipt} dp$$

trong đó

$$a_\varepsilon = \frac{k_1 k_2 \gamma^2}{2(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})^2} \ln^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (3.2.13)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon - v_0\|_2^2 &= \|\widehat{v}_\varepsilon - \widehat{v}_0\|_2^2 \leq \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} \frac{|G(p) - G_0(p)|^2}{|\widehat{F}_2(p)\widehat{F}_4(p)|^2} dp + \int_{|p| \geq a_\varepsilon} |\widehat{v}_0(p)|^2 dp \\ &< \frac{\varepsilon^2}{4k_1 k_2} e^{(1/\sqrt{k_1} + 1/\sqrt{k_2})\sqrt{2a_\varepsilon}} + \int_{|p| \geq a_\varepsilon} |\widehat{v}_0(p)|^2 dp \\ &< \frac{1}{4k_1 k_2} \varepsilon^{2-\gamma} + \eta_\gamma(\varepsilon) \end{aligned}$$

trong đó

$$\eta_\gamma(\varepsilon) = \int_{|p| \geq a_\varepsilon} |\widehat{v}_0(p)|^2 dp \rightarrow 0 \text{ khi } \varepsilon \downarrow 0.$$

Bây giờ, nếu $v_0 \in H^m(\mathbb{R})$, $m > 0$, ta đặt

$$E = \|\widehat{v}_0(p) \cdot p^m\|_2,$$

$$a_\varepsilon = \frac{2k_1 k_2}{(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})^2} \ln^2 \left(\frac{1/\varepsilon}{\ln^m(1/\varepsilon)} \right) \quad (3.2.14)$$

và

$$v_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} \frac{G(p)}{\widehat{F}_2(p)\widehat{F}_4(p)} e^{ipt} dp.$$

Ta đặt

$$C_1 = \max \left\{ \frac{1}{2\sqrt{k_1 k_2}}, E \frac{(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})^{2m}}{2^m k_1^m k_2^m} \right\}$$

và

$$D = C_1 \sqrt{1 + \frac{1}{m^{4m}}}.$$

Từ bất đẳng thức $u > 2m \ln u$ với mọi $u > \max\{e^2, 4m^2\}$, ta có

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon - v_0\|_2^2 &< \frac{\varepsilon^2}{4k_1 k_2} e^{(1/\sqrt{k_1} + 1/\sqrt{k_2})\sqrt{2a_\varepsilon}} + E^2 \frac{1}{a_\varepsilon^{2m}} \\ &< C_1^2 \left(\varepsilon^2 e^{(1/\sqrt{k_1} + 1/\sqrt{k_2})\sqrt{2a_\varepsilon}} + \frac{1}{a_\varepsilon^{2m}} \frac{4^m k_1^{2m} k_2^{2m}}{(\sqrt{k_1} + \sqrt{k_2})^{4m}} \right) \\ &< C_1^2 \left(\varepsilon^2 e^{2 \ln((1/\varepsilon)/\ln^m(1/\varepsilon))} + \frac{1}{\ln^{4m}((1/\varepsilon)/\ln^m(1/\varepsilon))} \right) \\ &< C_1^2 \left(\frac{1}{\ln^{2m}(1/\varepsilon)} + \frac{1}{\ln^{4m}((1/\varepsilon)/\ln^m(1/\varepsilon))} \right) \\ &< C_1^2 \left(\frac{1}{\ln^{2m}(1/\varepsilon)} + \frac{1}{m^{4m} \ln^{2m}(1/\varepsilon)} \right) = D^2 \frac{1}{\ln^{2m}(1/\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Cuối cùng để nhận được biểu diễn sinc của v_ε , chú ý rằng

$\text{supp } \widehat{v}_\varepsilon \subset [-a_\varepsilon, a_\varepsilon]$. Ta có

$$\widehat{v}_\varepsilon(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a_\varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(\varepsilon) e^{-(in\pi s)/a_\varepsilon}$$

trong đó

$$C_n(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} \widehat{v}_\varepsilon(s) e^{(in\pi s)/a_\varepsilon} ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} \frac{G(s)}{\widehat{F}_2(s)\widehat{F}_4(s)} e^{(in\pi s)/a_\varepsilon} ds. \quad (3.2.15)$$

Vậy

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} \widehat{v}_\varepsilon(s) e^{its} ds \\ &= \frac{1}{2a_\varepsilon} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(\varepsilon) \int_{-a_\varepsilon}^{a_\varepsilon} e^{is(t-(n\pi)/a_\varepsilon)} ds \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(\varepsilon) \frac{\sin(ta_\varepsilon - n\pi)}{ta_\varepsilon - n\pi}. \end{aligned}$$

Định lý đã được chứng minh. ■

3.3 TÌM PHÂN BỐ NHIỆT BỀ MẶT CỦA BÀI TOÁN HAI CHIỀU

Xét bài toán tìm phân bố nhiệt

$$u(x, 0, t) = v(x, t) \quad (3.3.1)$$

trong đó u thỏa

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, 0 < y < 2, t > 0, \quad (3.3.2)$$

và các điều kiện

$$u(x, 2, t) = g(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (3.3.3)$$

$$u(x, 1, t) = f(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (3.3.4)$$

$$u(x, y, 0) = 0, x \in \mathbb{R}, 0 < y < 2. \quad (3.3.5)$$

Giả sử u, u_x, u_y bị chặn trên $\mathbb{R} \times (0, 2) \times (0, +\infty)$.

Trong bài toán f, g cho trước. Chúng ta biến đổi (3.3.1)-(3.3.5) về phương trình tích chập.

Đặt

$$\Gamma(x, y, t, \xi, \eta, \tau) = \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) \quad (3.3.6)$$

và

$$G(x, y, t, \xi, \eta, \tau) = \Gamma(x, y, t, \xi, \eta, \tau) - \Gamma(x, 4 - y, t, \xi, \eta, \tau). \quad (3.3.7)$$

Chúng ta có

$$G_{\xi\xi} + G_{\eta\eta} + G_{\tau} = 0.$$

Tích phân đẳng thức

$$\operatorname{div}(G\nabla u - u\nabla G) - \frac{\partial}{\partial \tau}(uG) = 0$$

trên miền $\mathbb{R} \times (1, 2) \times (0, t - \varepsilon)$ và cho $\varepsilon \rightarrow 0$, ta có

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t g(\xi, \tau) G_{\eta}(x, y, t, \xi, 2, \tau) d\xi d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t G(x, y, t, \xi, 1, \tau) u_y(\xi, 1, \tau) d\xi d\tau \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t f(\xi, \tau) G_{\eta}(x, y, t, \xi, 1, \tau) d\xi d\tau + u(x, y, t) = 0. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t G(x, y, t, \xi, 1, \tau) u_y(\xi, 1, \tau) d\xi d\tau = -u(x, y, t) + \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t G_{\eta}(x, y, t, \xi, 1, \tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t g(\xi, \tau) G_{\eta}(x, y, t, \xi, 2, \tau) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Cho $y \rightarrow 1^+$ trong (3.3.8), ta có

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \left[\frac{1}{2\pi(t-\tau)} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) - \frac{1}{2\pi(t-\tau)} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+4}{4(t-\tau)}\right) \right] u_y(\xi, 1, \tau) d\xi d\tau \\ & = -f(x, t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+4}{4(t-\tau)}\right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau - \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t g(\xi, \tau) \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+1}{4(t-\tau)}\right) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Ta đặt $N(x, y, t, \xi, \eta, \tau) = \Gamma(x, y, t, \xi, \eta, \tau) - \Gamma(x, -y, t, \xi, \eta, \tau)$.

Tích phân đẳng thức

$$\operatorname{div}(N\nabla u - u\nabla N) - \frac{\partial}{\partial \tau}(uN) = 0$$

trên miền $(-n, n) \times (0, 1) \times (0, t - \varepsilon)$ và cho $n \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$, ta nhận được

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t N(x, y, t, \xi, 1, \tau) u_y(\xi, 1, \tau) d\xi d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t f(\xi, \tau) N_\eta(x, y, t, \xi, 1, \tau) d\xi d\tau \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t v(\xi, \tau) N_\eta(x, y, t, \xi, 0, \tau) d\xi d\tau - u(x, y, t) = 0. \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Cho $y \rightarrow 1^-$, đẳng thức (3.3.10) trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) - \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+4}{4(t-\tau)}\right) \right] u_y(\xi, 1, \tau) d\xi d\tau \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t f(\xi, \tau) \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+4}{4(t-\tau)}\right) d\xi d\tau \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+1}{4(t-\tau)}\right) v(\xi, \tau) d\xi d\tau - 3f(x, t) = 0. \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Từ (3.3.9) và (3.3.11), chúng ta nhận được phương trình tích chập

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+4}{4(t-\tau)}\right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t g(\xi, \tau) \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+1}{4(t-\tau)}\right) d\xi d\tau \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2+1}{4(t-\tau)}\right) v(\xi, \tau) d\xi d\tau - 4f(x, t) = 0 \end{aligned}$$

có thể viết lại là

$$S * v(x, t) = 2R * f(x, t) - S * g(x, t) + 4f(x, t) \quad (3.3.12)$$

trong đó chúng ta định nghĩa rằng $v(x, t) = f(x, t) = g(x, t) = 0$ khi $t < 0$,

$$R(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} \exp\left(-\frac{x^2+4}{4t}\right) & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \end{cases}$$

và

$$S(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} \exp\left(-\frac{x^2 + 1}{4t}\right) & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ 0 & (x, t) \in \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \end{cases}.$$

Đặt

$$F(x, t) = 2R * f(x, t) - S * g(x, t) + 4f(x, t).$$

Lấy biến đổi Fourier của (3.3.12), ta được

$$\hat{S}(z, r) \hat{v}(z, r) = \hat{F}(z, r)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \hat{S}(z, r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(z, r) e^{-i(xz+tr)} dx dt \\ &= 2e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}+z^2}} \left[\cos \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{z^4+r^2}-z^2} - i \operatorname{sgn}(r) \sin \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{z^4+r^2}-z^2} \right] \end{aligned}$$

và

$$|\hat{S}(z, r)| = 2e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{z^4+r^2}+z^2}}.$$

Ta có kết quả sau:

Định lý 3.3.1

Cho $\gamma \in (0, 2)$ và $\varepsilon \in (0, e^{-3/\gamma})$.

Giả sử $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ là nghiệm duy nhất của (3.3.12) tương ứng dữ liệu chính xác $f_0, g_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ và $f, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ là dữ liệu đo đạc thỏa mãn $\|f - f_0\|_2 \leq \varepsilon$ và $\|g - g_0\|_2 \leq \varepsilon$ trong đó $\|\cdot\|_2$ là chuẩn trong $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Khi đó chúng ta có thể xây dựng từ g, f một hàm $v_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^2)$ sao cho

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_2 \leq \sqrt{C\varepsilon^{2-\alpha} + \eta_\alpha(\varepsilon)}$$

trong đó C là hằng số dương độc lập với ε và $\eta_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \downarrow 0$.

Hơn nữa nếu ta giả sử thêm $v_0 \in H^m(\mathbb{R}^2) \cap L^1(\mathbb{R}^2)$, $m > 0$ và

$0 < \varepsilon < \min \{e^{-e^2}, e^{-4m^2}\}$ thì

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_2 < D \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-m}$$

trong đó D là hằng số dương độc lập với ε .

Trong cả hai trường hợp trên, v_ε được biểu diễn thành

$$v_\varepsilon(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{|m| \leq |n|} C_{mn}(\varepsilon) T(m, \pi a_\varepsilon)(x) T(n, \pi a_\varepsilon)(t) \quad (3.3.13)$$

trong đó a_ε được xác định trong (3.3.14) và (3.3.16), $C_{mn}(\varepsilon)$ được xác định trong (3.3.15).

$$T(p, d)(z) = \frac{\sin[\pi(z - pd)/d]}{\pi(z - pd)/d}, p \in \mathbb{Z}, d > 0.$$

Chứng minh

Ta đặt

$$F(x, t) = 2R * f(x, t) - S * g(x, t) + 4f(x, t)$$

và

$$F_0(x, t) = 2R * f_0(x, t) - S * g_0(x, t) + 4f_0(x, t)$$

thì

$$\begin{aligned} \|\hat{F} - \hat{F}_0\|_2 &= \|F - F_0\|_2 \\ &\leq (4 + 2\|R\|_1) \|f - f_0\|_2 + \|S\|_1 \|g - g_0\|_2 \\ &\leq (4 + 2\|R\|_1 + \|S\|_1) \varepsilon. \end{aligned}$$

Đặt

$$v_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{D_\varepsilon} \frac{\hat{F}(z, r)}{\hat{S}(z, r)} e^{i(xz+tr)} dz dr$$

trong đó $D_\varepsilon = \{(z, r) / |z| \leq b_\varepsilon \text{ và } |r| \leq b_\varepsilon^2\}$ với $b_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}} \ln \frac{4}{\varepsilon^\alpha}$.

Ta có

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon - v_0\|_2^2 &= \|\widehat{v}_\varepsilon - \widehat{v}_0\|_2^2 = \int_{D_\varepsilon} \left| \frac{\widehat{F}(z, r) - \widehat{F}_0(z, r)}{\widehat{S}(z, r)} \right|^2 dzdr + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_\varepsilon} |\widehat{v}_0(z, r)|^2 dzdr \\ &\leq \varepsilon^{2-\alpha} (4 + 2\|R\|_1 + \|S\|_1)^2 + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_\varepsilon} |\widehat{v}_0(z, r)|^2 dzdr. \end{aligned}$$

Nếu đặt $\eta_\alpha(\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_\varepsilon} |\widehat{v}_0(z, r)|^2 dzdr$ thì $\eta_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \downarrow 0$.

$$\text{Nếu đặt } a_\varepsilon = b_\varepsilon^2 = \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)} \ln^2 \left(\frac{4}{\varepsilon^\alpha} \right) \quad (3.3.14)$$

thì

$$\text{supp } \widehat{v}_\varepsilon \subset D_\varepsilon \subset [-a_\varepsilon, a_\varepsilon] \times [-a_\varepsilon, a_\varepsilon].$$

Vì thế, theo [13], trang 121, ta có

$$v_\varepsilon(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{|m| \leq |n|} C_{mn}(\varepsilon) T(m, \pi a_\varepsilon)(x) T(n, \pi a_\varepsilon)(t)$$

$$\text{trong đó } C_{mn}(\varepsilon) = v_\varepsilon \left(\frac{m\pi}{a_\varepsilon}, \frac{n\pi}{a_\varepsilon} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{D_\varepsilon} \frac{\widehat{F}(z, r)}{\widehat{S}(z, r)} e^{i\frac{\pi}{a_\varepsilon}(mz+nr)} dzdr. \quad (3.3.15)$$

Bây giờ, ta giả sử $v_0 \in H^m(\mathbb{R}^2)$, $m > 0$, đặt

$$a_\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}} \ln \left(\frac{1/\varepsilon}{\ln^m(1/\varepsilon)} \right) > 1, \quad (3.3.16)$$

$$Q_\varepsilon = [-a_\varepsilon, a_\varepsilon] \times [-a_\varepsilon, a_\varepsilon]$$

và

$$v_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{Q_\varepsilon} \frac{\widehat{F}(z, r)}{\widehat{S}(z, r)} e^{i(xz+tr)} dzdr.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon - v_0\|_2^2 &= \int_{Q_\varepsilon} \frac{|\widehat{F}(z, r) - \widehat{F}_0(z, r)|^2}{|\widehat{S}(z, r)|^2} dzdr + \int_{R^2 \setminus Q_\varepsilon} |\widehat{v}_0(z, r)|^2 dzdr \\ &\leq \frac{1}{4} \varepsilon^2 (4 + 2\|R\|_1 + \|S\|_1)^2 e^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}a_\varepsilon} + \int_{R^2 \setminus Q_\varepsilon} \frac{(z^2 + r^2)^m |\widehat{v}_0(z, r)|^2}{(z^2 + r^2)^m} dzdr \\ &\leq C_1 \left(\varepsilon^2 e^{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{2}+1}a_\varepsilon} + \frac{1}{(2a_\varepsilon^2)^m} \right) \end{aligned}$$

trong đó

$$C_1 = \max \left\{ \frac{1}{4} (4 + 2\|R\|_1 + \|S\|_1)^2, 2^m \left\| (z^2 + r^2)^{m/2} \widehat{v}_0(z, r) \right\|_2^2 \right\}.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon - v_0\|_2^2 &\leq C_1 \left[\varepsilon^2 \left(\frac{1/\varepsilon}{\ln^m(1/\varepsilon)} \right)^2 + \frac{1}{\ln^{2m} \left(\frac{1/\varepsilon}{\ln^m(1/\varepsilon)} \right)} \right] \\ &\leq C_1 \left[\frac{1}{\ln^{2m}(1/\varepsilon)} + \frac{1}{\ln^{2m} \left(\frac{1/\varepsilon}{\ln^m(1/\varepsilon)} \right)} \right] \\ &\leq C_1 \left[\frac{1}{\ln^{2m}(1/\varepsilon)} + \frac{2^{2m}}{\ln^{2m}(1/\varepsilon)} \right] = D^2 \frac{1}{\ln^{2m}(1/\varepsilon)} \end{aligned}$$

trong đó $D = \sqrt{C_1(1 + 2^{2m})}$.

Định lý đã được chứng minh. ■

***Bây giờ chúng ta cho một ví dụ về tính toán số**

Ta giới thiệu một vài kết quả so sánh giữa nghiệm chính hóa cho bởi công thức (3.3.13)-(3.3.16) và nghiệm chính xác.

Trường hợp 1: (hình 1 và hình 2)

Xét bài toán

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 2), \quad t > 0$$

$$u(x, 1, t) = \frac{1}{t} e^{\frac{-x^2-1}{4t}};$$

$$u(x, 2, t) = \frac{1}{t} e^{\frac{-x^2-4}{4t}};$$

$$u(x, y, 0) = 0$$

trong đó hàm số cần tìm là

$$v(x, t) = u(x, 0, t).$$

Nghiệm chính xác của bài toán là

$$v(x, t) = \frac{1}{t} e^{\frac{-x^2}{4t}}.$$

Nghiệm chính hóa cho bởi công thức (3.3.13) trong đó

$$\hat{F} = 4 \frac{e^{-\sqrt{r^2+z^4}}}{\sqrt{r^2+z^4}},$$

và

$$\hat{S} = 2e^{-\sqrt{r^2+z^4}}.$$

Khi đó ta có

$$\|\hat{F} - \hat{F}_0\|_2 = \varepsilon.$$

Với $\varepsilon = \frac{1}{50}$, $N = 50$ (kích thước của chuỗi cho bởi công thức (3.3.13)-

(3.3.16)) và với $(x, t) \in [0.25, 1.3] \times [0, 4]$ ta có đồ thị $(x, t) \mapsto v_\varepsilon(x, t)$ trong hình 1.

Ta có đồ thị $(x, t) \mapsto v(x, t)$ trong hình 2.

Trường hợp 2: (hình 3 và hình 4)

Sử dụng phương pháp tương tự như trên ta có đồ thị

$(x, t) \in [0, 1] \times [0, 4] \mapsto v_{\varepsilon}(x, t)$ trong hình 3, là nghiệm chỉnh hóa của bài toán

$$\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, 2), \quad t > 0$$

$$u(x, 1, t) = 0,$$

$$u(x, 2, t) = \frac{1}{t} e^{\frac{-x^2-4}{4t}},$$

$$u(x, y, 0) = 0$$

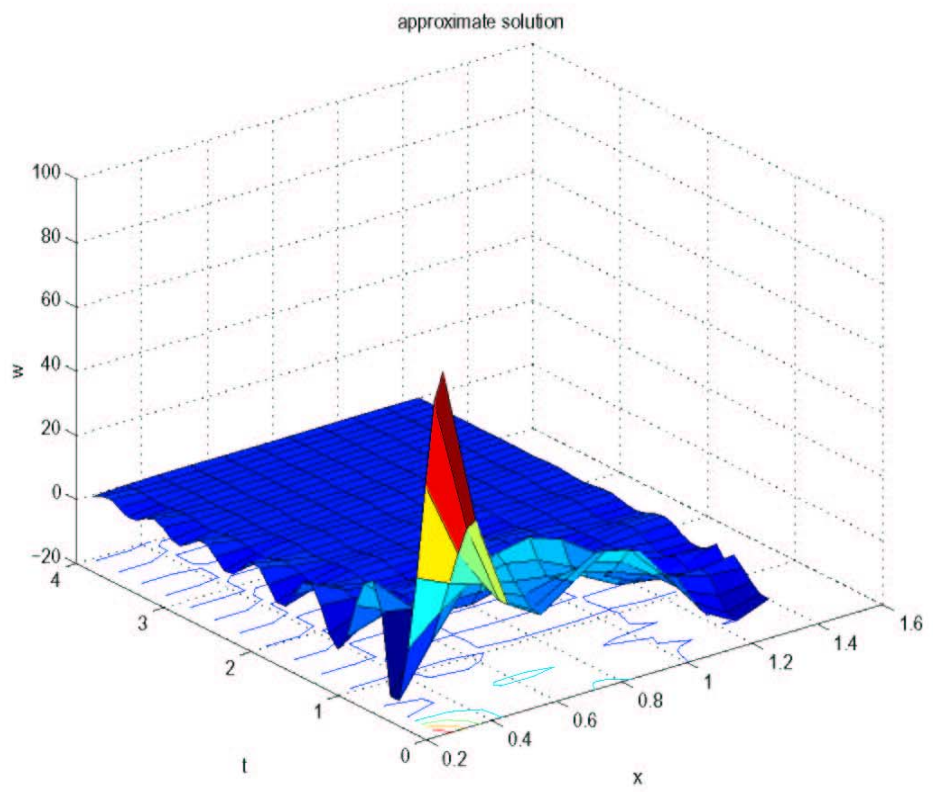
trong đó hàm số cần tìm là $v(x, t) = u(x, 0, t)$.

Đồ thị nghiệm chính xác

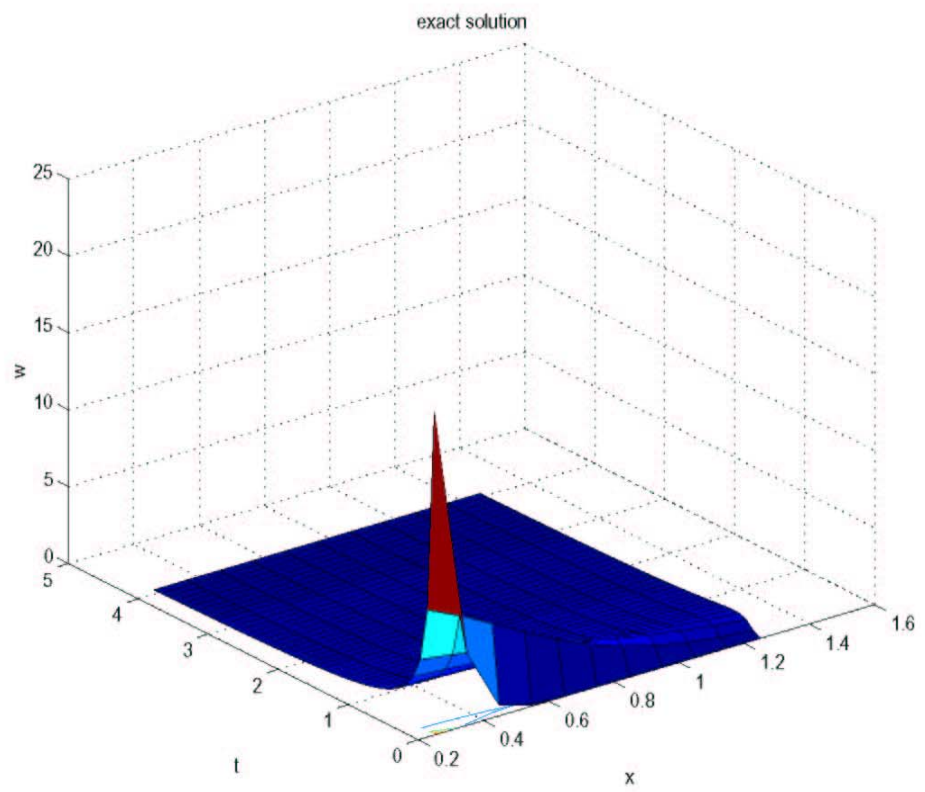
$$v(x, t) = -\frac{1}{t} e^{\frac{-x^2-4}{4t}}$$

được vẽ trong hình 4.

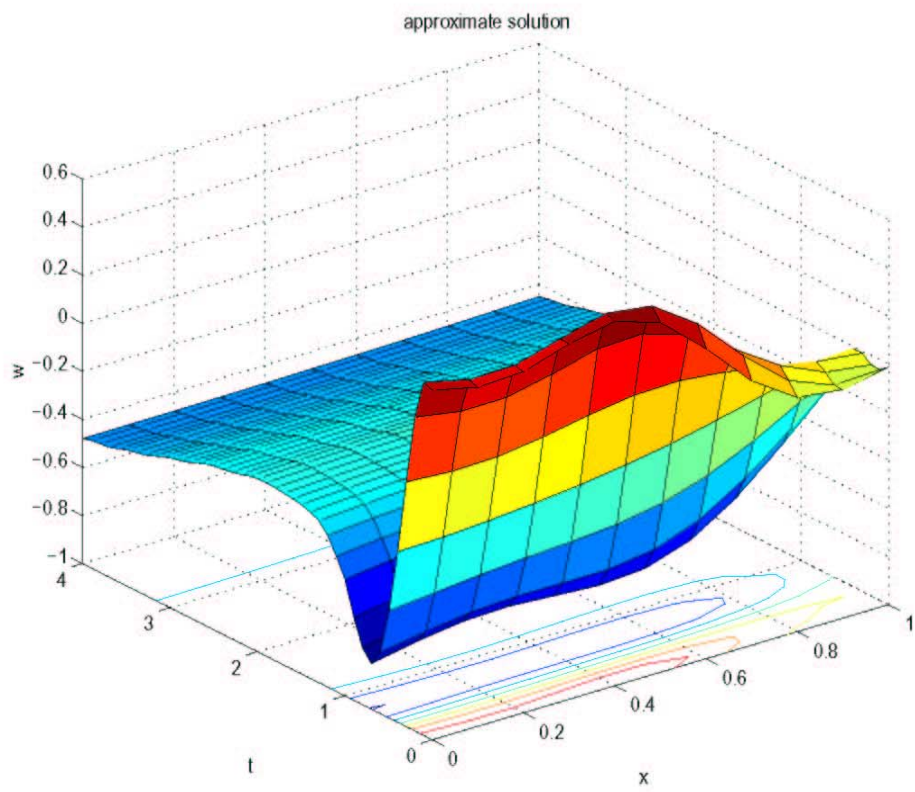
Hình 1



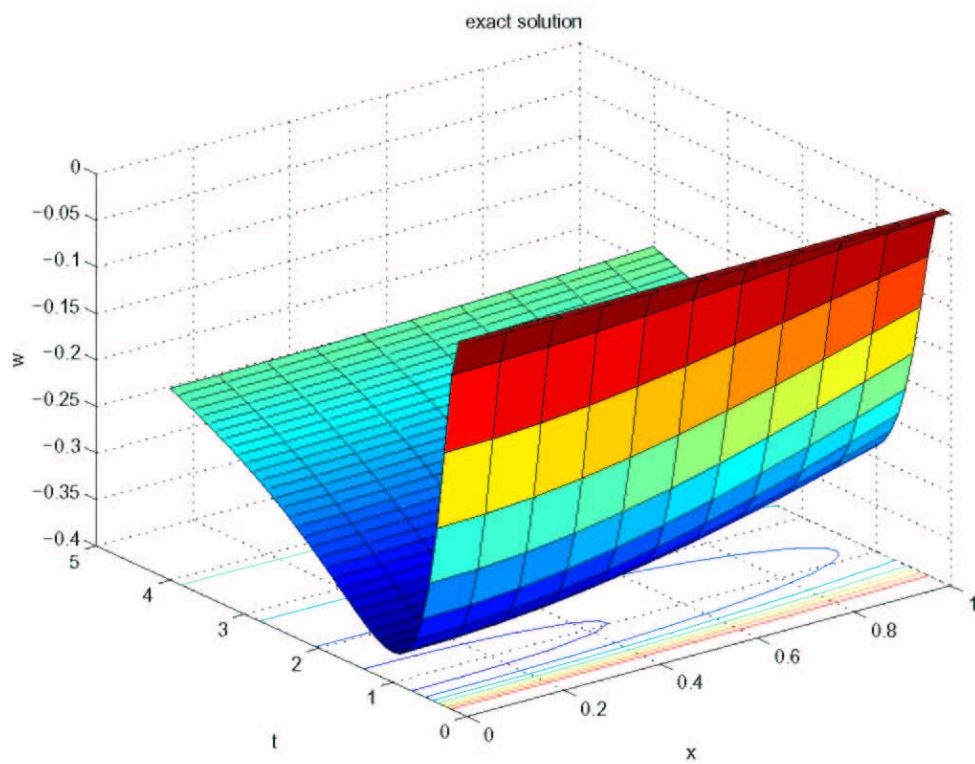
Hình 2



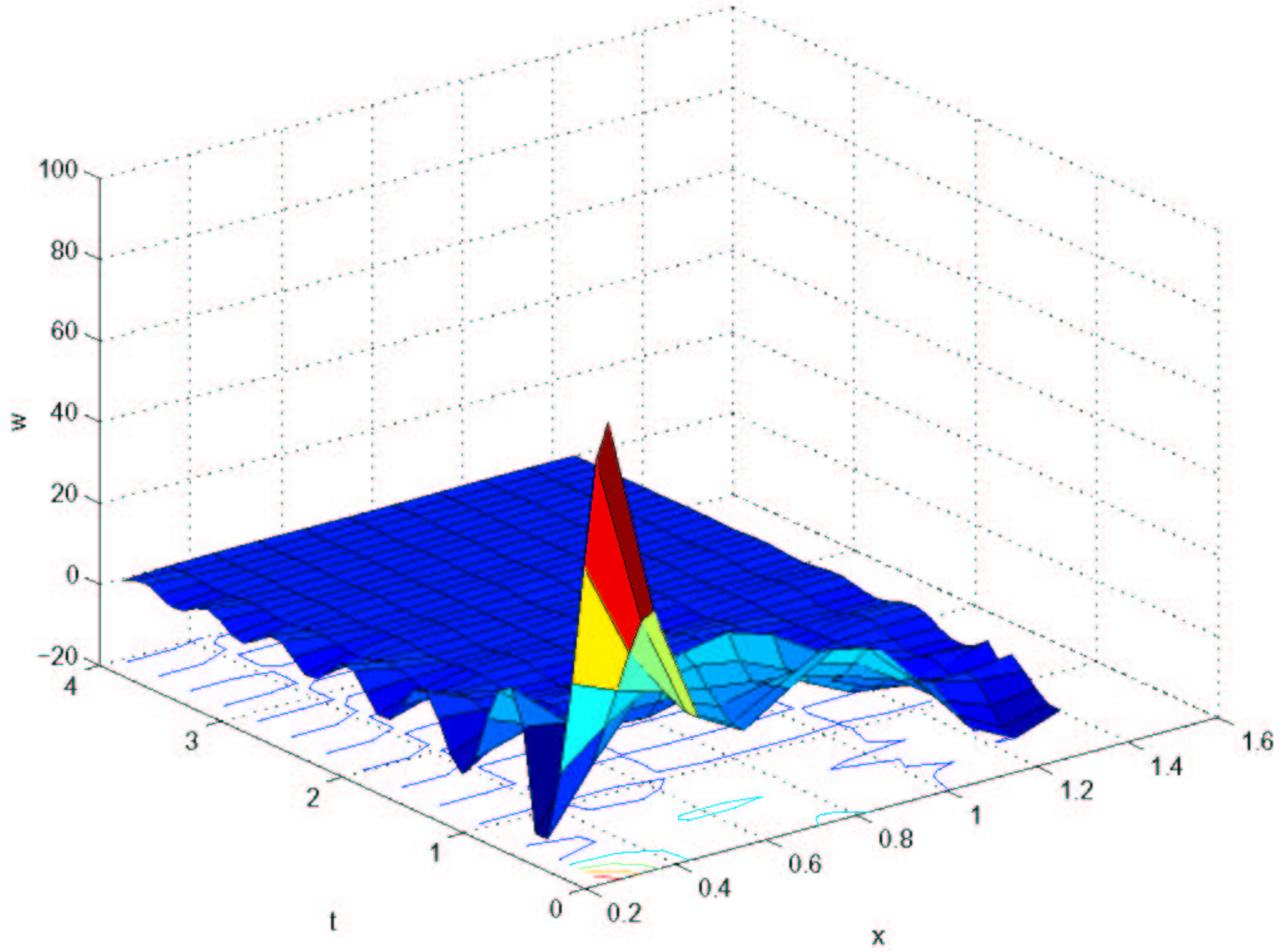
Hình 3



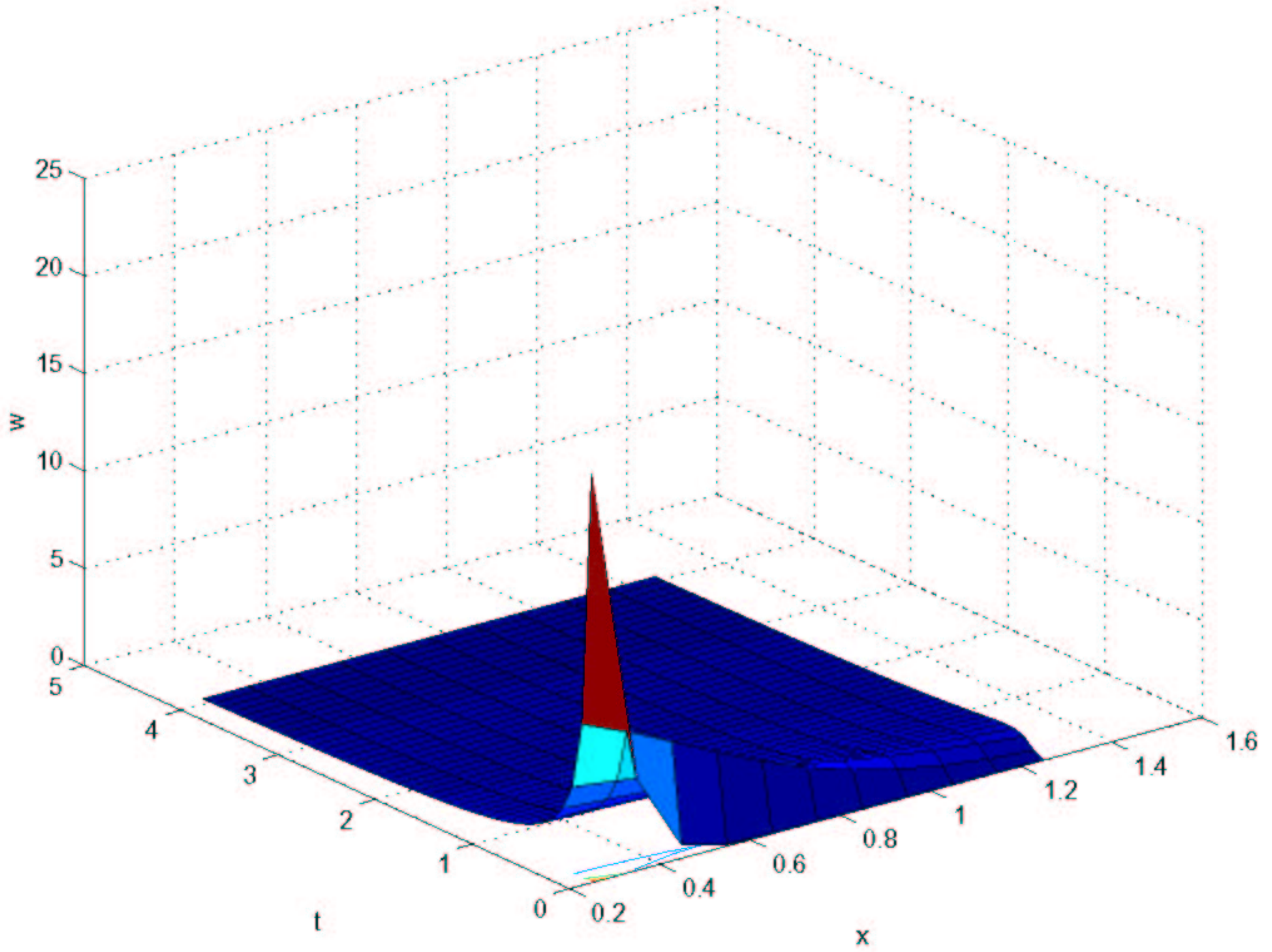
Hình 4



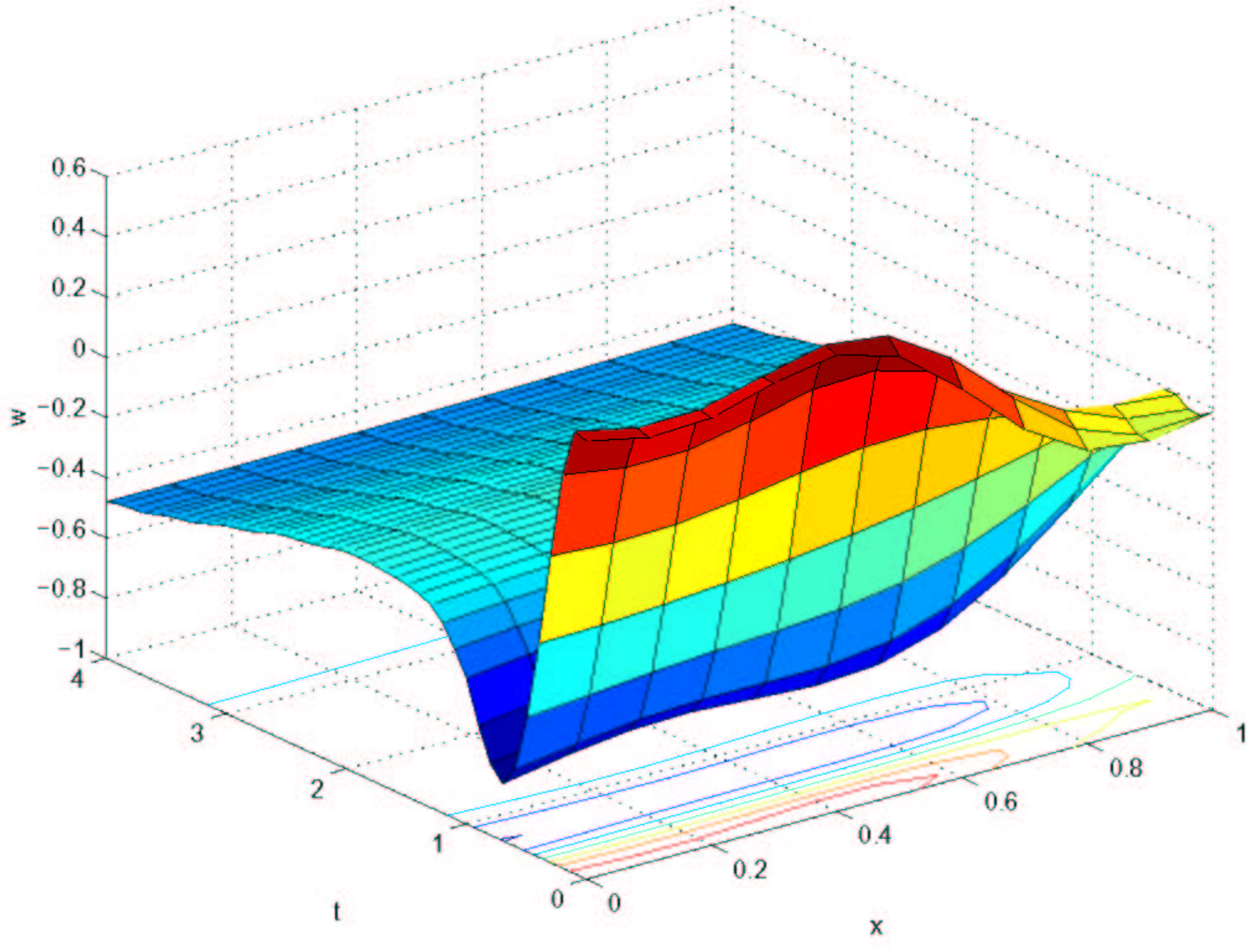
approximate solution



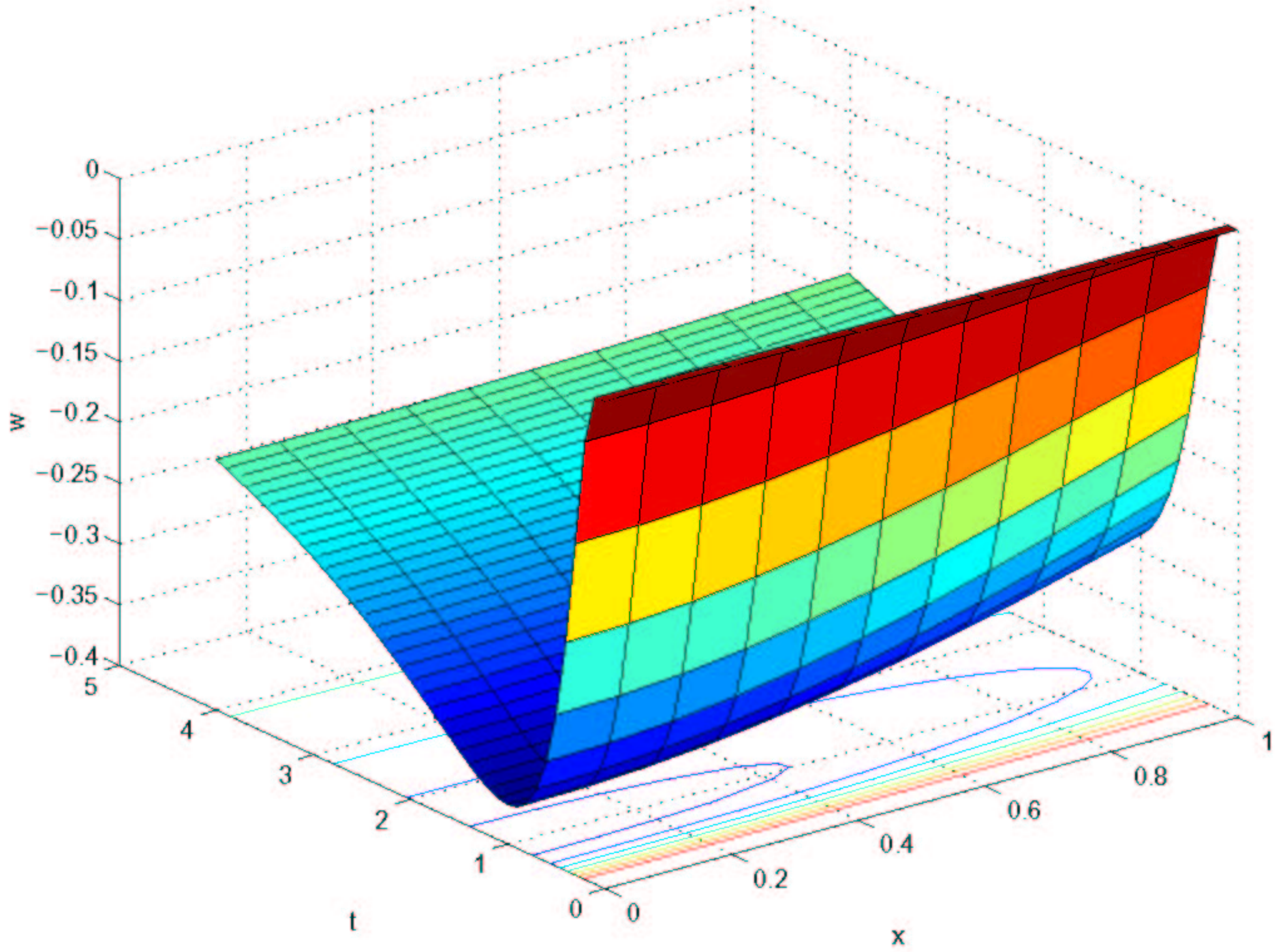
exact solution



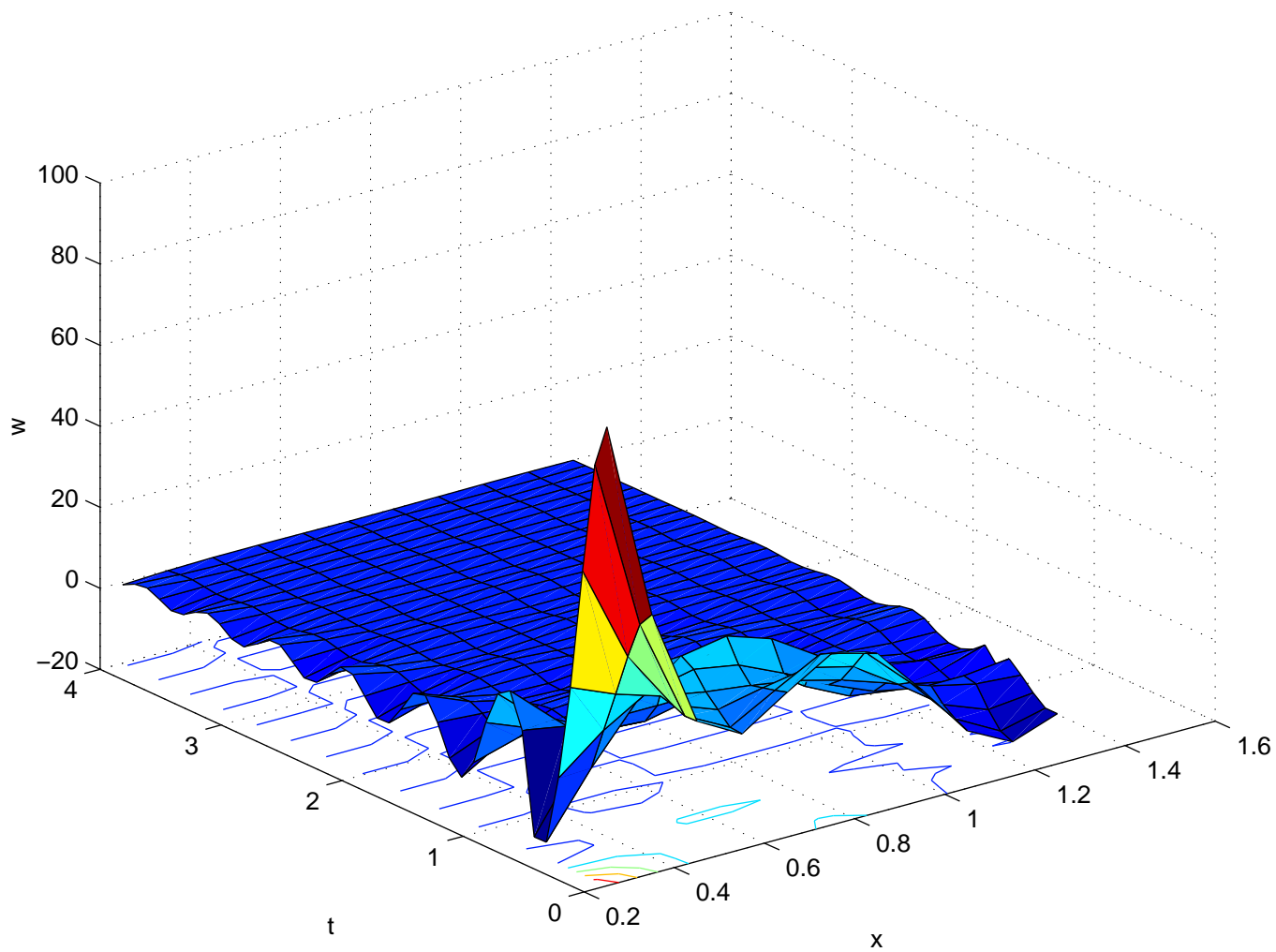
approximate solution



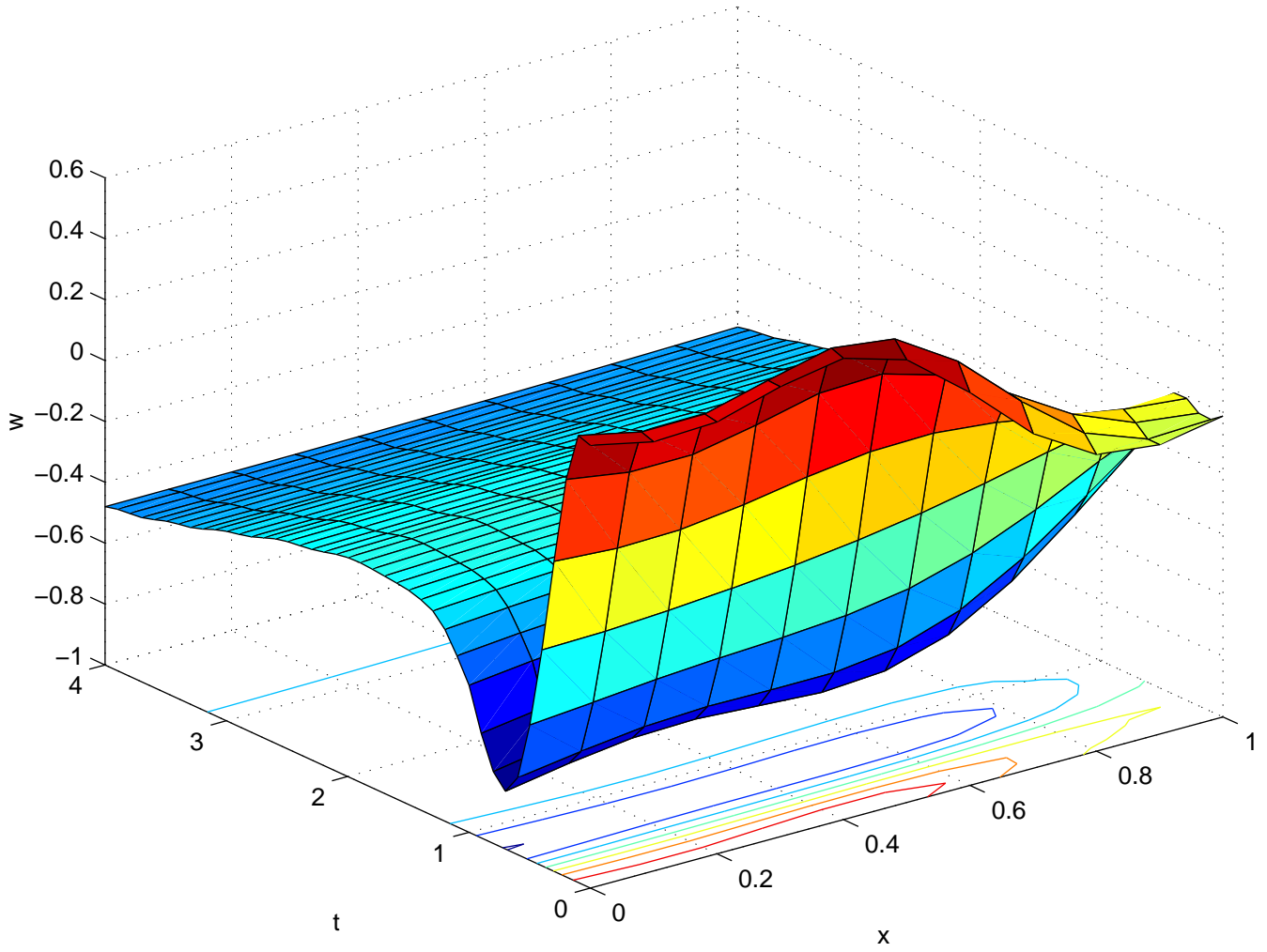
exact solution



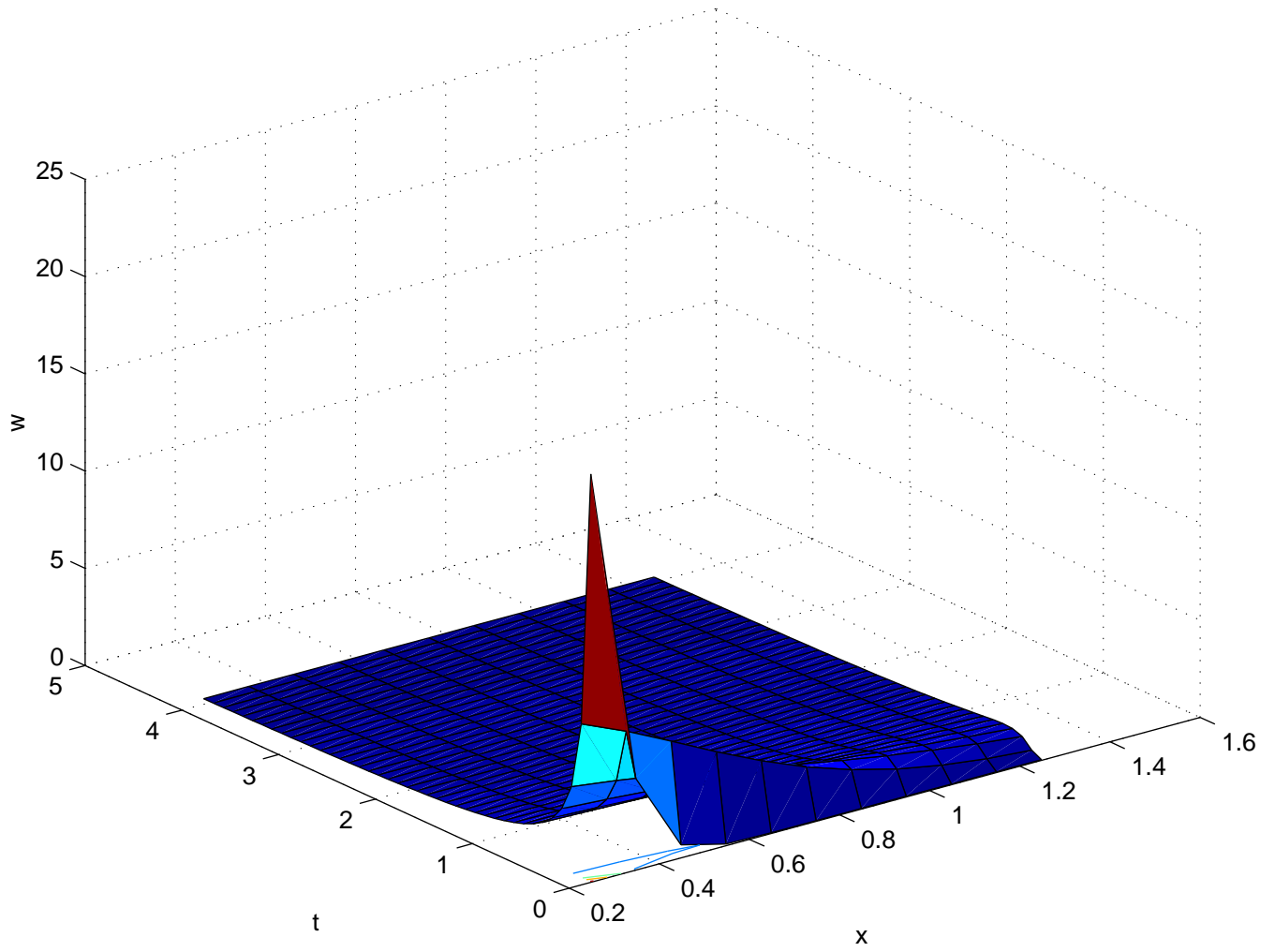
approximate solution



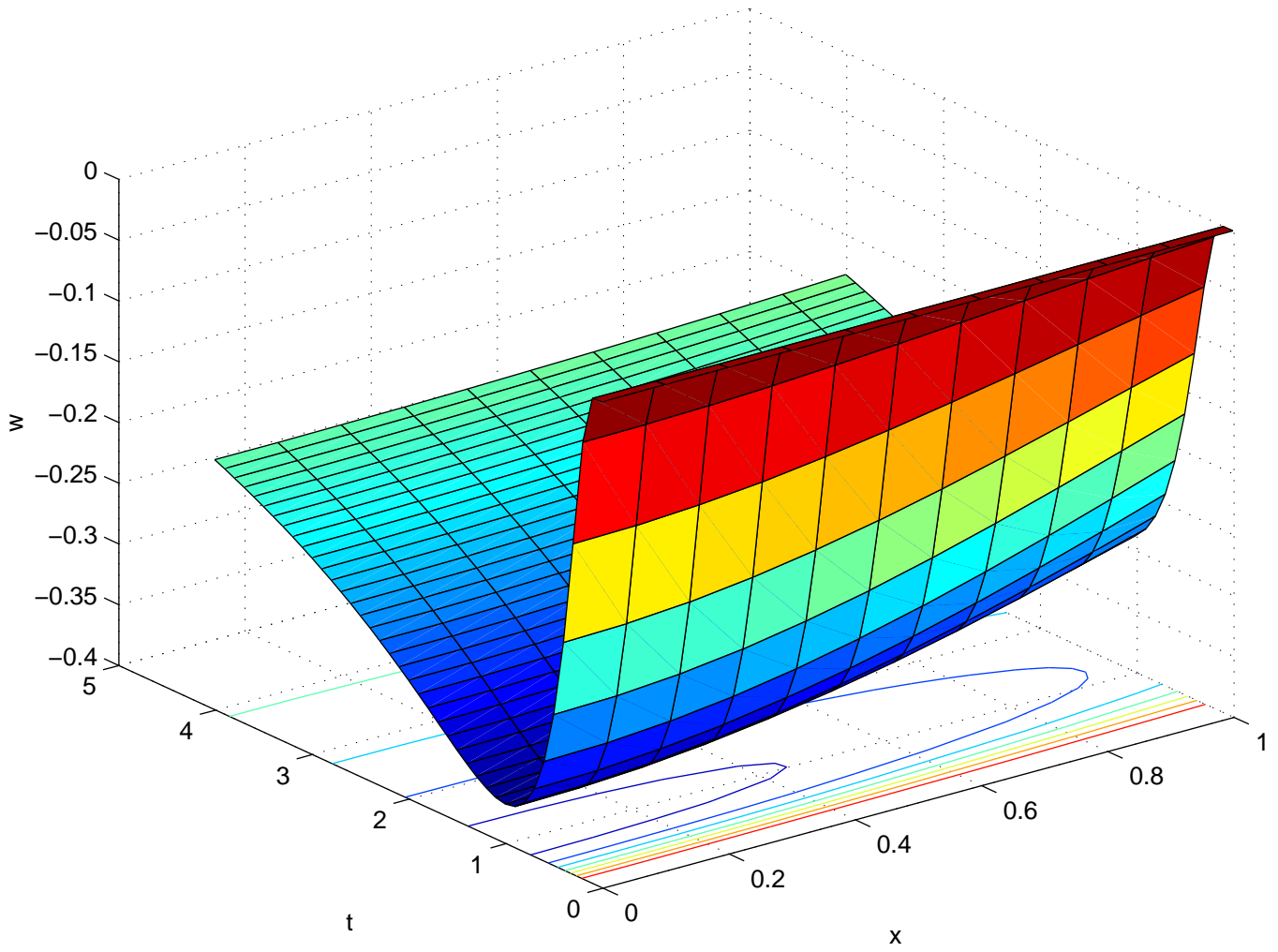
approximate solution



exact solution



exact solution



Chương 4

BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH NGUỒN NHIỆT :

TÍNH DUY NHẤT, CHỈNH HÓA VÀ ĐÁNH GIÁ SAI SỐ

Chương 4 đã công bố trong [4] (của danh mục công trình công bố của tác giả).

4.1 MỞ ĐẦU

Gọi M là một vật dẫn nhiệt có hệ số dẫn nhiệt là hằng, giả sử bằng 1, và có biên cô lập. Trong chương này, chúng ta xét bài toán xác định nguồn nhiệt phía trong của M từ nhiệt độ cho trước trên ∂M và phân bố nhiệt độ trong M ở thời điểm $t = 0$ và $t = 1$. Nói cách khác bài toán có dữ liệu Cauchy trên một phần của biên. Bài toán được nghiên cứu gần đây trong ba thập kỷ (chẳng hạn [28, 52, 53, 64, 75, 81]). Với u là nhiệt độ trong M và $F = F(x, t, u)$ là nguồn nhiệt, ta có phương trình

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = F(x, t, u).$$

Bài toán là không chỉnh. Thực tế, vì những sai số đo đạc, bài toán xác định nguồn nhiệt thường khó khăn (xem [16]). Dữ liệu đo đạc thường là kết quả của đo đạc thực nghiệm rời rạc và dĩ nhiên là có sai số. Do đó một nghiệm tương ứng với dữ liệu đó không luôn tồn tại và hơn nữa nếu tồn tại thì không phụ thuộc liên tục theo dữ liệu. Vì thế ta phải sử dụng một phép chỉnh hóa.

Để đơn giản bài toán, nhiều giả thiết trước đây cho dạng của nguồn nhiệt. Nói chung, ta có thể xấp xỉ hàm $F(x, t, u)$ bởi một hàm có dạng

$$\sum_{n=0}^M \psi_n(u) \varphi_n(t) f_n(x).$$

Số hạng thứ nhất của dạng trên có thể viết là

$$F = \psi_0(u) + \varphi_0(t) + f_0(x) + \varphi_1(t)f_1(x) + \dots$$

Trong [52, 53], tác giả xét hàm F có dạng

$$F(x, t, u) = g_0(x, t) + f_1(x)g_1(t) + f_2(x)g_2(t),$$

trong đó f_1, f_2 chưa biết. Trong [64],

$$F(x, t, u) = f(u) + r(x, t),$$

trong đó f chưa biết (xem [55]) với dạng tương tự của nguồn nhiệt. Trong [50, 51] có tổng quan một số kết quả ổn định với

$$F(x, t, u) = \sigma(t, x)f(x)$$

trong đó σ là hàm biết chính xác. Một số phân tích sự khác biệt của chương này với tài liệu [50, 51] đã được thực hiện ở lời nói đầu của luận án.

Trong [20, 21, 40, 75, 82], ta có dạng tích

$$F(x, t, u) = \sigma(t)f(x)$$

trong đó một trong hai hàm σ, f chưa biết, hàm còn lại biết chính xác (không có nhiễu).

Để đơn giản chúng ta xét mô hình trong đó nguồn nhiệt có dạng $\varphi(t)f(x, y)$ trong đó f là hàm chưa biết. Như chúng ta sẽ thấy, với giả thiết trên khá ít, bài toán có duy nhất nghiệm, mặc dù vậy bài toán vẫn không chỉnh.

Chúng ta giả sử rằng $M = (0, 1) \times (0, 1)$.

Tìm u và f thỏa phương trình sau

$$-\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = \varphi(t)f(x, y), \quad (x, y, t) \in M \times (0, 1) \quad (4.1.1)$$

và các điều kiện cách nhiệt

$$u_x(0, y, t) = u_x(1, y, t) = 0, \quad (4.1.2)$$

$$u_y(x, 0, t) = u_y(x, 1, t) = 0, \quad (4.1.3)$$

điều kiện nhiệt độ biên theo thời gian

$$u(1, y, t) = 0 \quad (4.1.4)$$

$$u(x, 1, t) = 0, \quad (4.1.5)$$

điều kiện ban đầu

$$u(x, y, 0) = 0, \quad (4.1.6)$$

và điều kiện thêm

$$u(x, y, 1) = g(x, y), \quad (4.1.7)$$

với mọi $(x, y, t) \in M \times (0, 1)$, trong đó φ, g là hai hàm cho trước.

Trong (4.1.4)-(4.1.6), để đơn giản ta giả sử $u(1, y, t), u(x, 1, t), u(x, y, 0)$ bằng không. Trong thực tế, phương pháp trong chương này có thể áp dụng cho bài toán với những dữ liệu khác không. Tuy nhiên, để tính toán đơn giản và làm rõ ràng ý chính của phương pháp, ta chỉ xem điều kiện đơn giản như trên.

Bài toán với một số điều kiện thích hợp tương đương việc tìm hàm f thỏa phương trình tích phân Volterra loại 1 (xem [32])

$$K_\varphi f(x, y) = -g(x, y)$$

trong đó

$$K_\varphi f(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 N(x, y, 1, \xi, \eta, \tau) \varphi(\tau) f(\xi, \eta) d\xi d\eta d\tau$$

$$N(x, y, t, \xi, \eta, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) + \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right) \right).$$

Ta chú ý rằng sự tồn tại nghiệm của bài toán không được xem xét trong chương này. Tập hợp của cặp (φ, g) sao cho (4.1.1)-(4.1.7) vô nghiệm thì trù mật trong $L^2(0, 1) \times L^2(M)$. Thật vậy, từ phương trình $K_\varphi f(x, y) = -g(x, y)$ ta có thể chỉ ra rằng g là trơn nếu $f \in L^2(M)$ và $\varphi \in L^2(0, 1)$. Mặc dù vậy, trong thực tế, g và φ là những dữ liệu đo đạc và do đó g thường không trơn. Với những dữ liệu đo đạc, (4.1.1)-(4.1.7) thường không có nghiệm và do đó chúng ta sẽ phải sử dụng một phép chỉnh hóa. Nếu ta ký hiệu (g_0, φ_0) (có thể chưa biết) là dữ liệu chính

xác tương ứng nghiệm chính xác (u_0, f_0) của (4.1.1)-(4.1.7) thì từ dữ liệu đo đạc (g, φ) xấp xỉ với (g_0, φ_0) , ta sẽ xây dựng nghiệm chỉnh hóa của (4.1.1)-(4.1.7).

Như đã nói trong phương trình $K_\varphi f = -g$ ở trên, toán tử tích phân K_φ phụ thuộc vào dữ liệu đo đạc φ , điều này dẫn tới K_φ cũng không chính xác. Do đó, bài toán phi tuyến và nó tạo ra khó khăn trong việc nhận được đánh giá sai số của phương pháp chỉnh hóa. Trong trường hợp của bài toán một chiều, phương trình tích phân tuyến tính được chỉnh hóa khá nhiều trong vài thập kỷ gần đây (xem [9, 15, 40, 78, 28]), tuy nhiên trường hợp hai chiều ít được xem xét. Trong chương này, chúng ta sẽ biến đổi (4.1.1)-(4.1.7) về bài toán tìm f từ biến đổi Fourier của nó tính từ dữ liệu cho trước (g, φ) (xem bổ đề 4.2.1). Giả sử sai số giữa dữ liệu chính xác (g_0, φ_0) và dữ liệu đo đạc (g, φ) có bậc $\varepsilon > 0$, ta sẽ sử dụng phương pháp chặt cụt các tần số kỳ dị của tích phân để xây dựng (từ dữ liệu đo đạc (g, φ)) một nghiệm chỉnh hóa f_ε . Hơn nữa, sai số giữa f_ε và nghiệm chính xác f_0 phụ thuộc vào tính chất của φ_0 và tính trơn của f_0 sẽ được đưa ra một cách tường minh. Phần còn lại của chương này sẽ được chia thành hai mục 4.2 và 4.3. Trong mục 4.2, chúng tôi trình bày tính duy nhất nghiệm của bài toán (4.1.1)-(4.1.7). Trong mục 4.3, chúng tôi tìm nghiệm chỉnh hóa và đánh giá sai số.

4.2 TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM

Chúng ta nhắc lại rằng $M = (0,1) \times (0,1)$. Từ đây, chúng ta giả sử $g \in L^2(M)$ và $\varphi \in L^2(0,1)$. Từ (4.1.1)-(4.1.7) ta có (u, f) thỏa

$$-\frac{d}{dt} \langle u, \psi \rangle - \langle u_x, \psi_x \rangle - \langle u_y, \psi_y \rangle = \varphi \langle f, \psi \rangle \quad \forall \psi \in H^1(M) \quad (4.2.1)$$

và $(4.1.2)-(4.1.7) \quad (4.2.2)$

trong đó \langle, \rangle là tích vô hướng trong $L^2(M)$.

Từ (4.2.1)-(4.2.2), đầu tiên ta có bổ đề sau

Bổ đề 4.2.1

Nếu $u \in C^1([0,1];L^2(M)) \cap C([0,1];H^1(M)), f \in L^2(M)$ thỏa (4.2.1), (4.2.2) thì

$$e^{\alpha^2+\beta^2} \int_0^1 \int_0^1 g(x,y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy = - \int_0^1 e^{(\alpha^2+\beta^2)t} \varphi(t) dt \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad (4.2.3)$$

trong đó C là trường số phức.

Chứng minh

Chọn $\psi(x,y) = \cos \alpha x \cos \beta y$, ta có

$$-\frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 u(x,y,t) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy + \alpha \int_0^1 \int_0^1 u_x(x,y,t) \sin \alpha x \cos \beta y dx dy + \beta \int_0^1 \int_0^1 u_y(x,y,t) \cos \alpha x \sin \beta y dx dy = \varphi(t) \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy. \quad (4.2.4)$$

Từ $u(1,y,t) = 0$, ta nhận được

$$\int_0^1 \int_0^1 u_x(x,y,t) \sin \alpha x \cos \beta y dx dy = -\alpha \int_0^1 \int_0^1 u(x,y,t) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy. \quad (4.2.5)$$

Tương tự

$$\int_0^1 \int_0^1 u_y(x,y,t) \cos \alpha x \sin \beta y dx dy = -\beta \int_0^1 \int_0^1 u(x,y,t) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy. \quad (4.2.6)$$

Từ (4.2.4)-(4.2.6), ta có

$$-\frac{d}{dt} \int_0^1 \int_0^1 u(x,y,t) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy - (\alpha^2 + \beta^2) \int_0^1 \int_0^1 u(x,y,t) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy = \varphi(t) \int_0^1 \int_0^1 f(x,y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy. \quad (4.2.7)$$

Xét

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \int_0^1 \int_0^1 u(x, y, t) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy \right) \\ &= -\varphi(t) e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Lấy tích phân hai vế (4.2.8) trên $[0, 1]$, ta suy ra

$$e^{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy = - \int_0^1 \varphi(t) e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} dt \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy.$$

Bổ đề 4.2.1 đã được chứng minh. ■

Bây giờ, chúng ta có kết quả về duy nhất

Định lý 4.2.1

Cho $u_1, u_2 \in C^1([0, 1]; L^2(M)) \cap C([0, 1]; H^1(M))$ và $f_1, f_2 \in L^2(M)$.

Nếu u_i, f_i thỏa (4.2.1), (4.2.2) ($i = 1, 2$) và $\varphi \neq 0$, thì

$$(u_1, f_1) = (u_2, f_2).$$

Chứng minh

Đặt $v = u_1 - u_2$ và $f = f_1 - f_2$, thì v và f thỏa (4.2.1) và (4.2.2) đặc biệt là

$$v(x, y, 1) = 0. \quad (4.2.9)$$

Đặt

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{4} \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ f(-x, -y) & (x, y) \in (-1, 0) \times (-1, 0) \\ f(-x, y) & (x, y) \in (-1, 0) \times (0, 1) \\ f(x, -y) & (x, y) \in (0, 1) \times (-1, 0) \\ 0 & (x, y) \notin (-1, 1) \times (-1, 1) \end{cases}$$

Khi đó

$$\hat{f}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(x, y) e^{-i(x\alpha + y\beta)} dx dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy. \quad (4.2.10)$$

Từ (4.2.3), (4.2.9) và (4.2.10) ta có

$$\left[\int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \varphi(t) dt \right] \hat{f}(\alpha, \beta) = 0. \quad (4.2.11)$$

Đặt

$$h(\alpha, \beta) \equiv \int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \varphi(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^n}{n!} \int_0^1 \varphi(t) t^n dt.$$

Nếu $h \equiv 0$, dùng định lý Weierstrass, ta có $\varphi \equiv 0$ (vô lý), do đó $h \neq 0$, cho nên $\exists(\alpha_0, \beta_0) \in C \times C$ và $r > 0$ sao cho $|h(\alpha, \beta)| > 0$ với mọi (α, β) thuộc quả cầu mở $B \equiv B((\alpha_0, \beta_0), r)$ tâm (α_0, β_0) bán kính r .

Suy ra

$$\hat{f}(\alpha, \beta) = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in B.$$

Đồng thời \hat{f} là hàm giải tích, nên

$$\hat{f}(\alpha, \beta) = 0 \quad \forall (\alpha, \beta) \in C \times C.$$

Suy ra $\tilde{f} = 0$ hầu khắp nơi trên $R \times R$.

Điều này dẫn tới $f = 0$ hầu khắp nơi trên M .

Định lý đã được chứng minh. ■

4.3 TÌM NGHIỆM CHỈNH HÓA VÀ ĐÁNH GIÁ SAI SỐ

Trong phần này, ta xét bài toán chỉnh hóa trong hai trường hợp. Trường hợp thứ nhất là $\varphi_0(t) \geq C_0 > 0$. Bài toán ổn định trong không gian $C^{2+\lambda}$ của trường hợp tổng quát hơn trường hợp này đã được khảo sát trong [50, 51]. Trường hợp thứ hai, φ_0 có thể bằng không tại một số vô hạn điểm, do đó không nằm trong khuôn khổ đã được tổng kết bởi Isakov.

Trước khi phát biểu và chứng minh hai định lý về chỉnh hóa, chúng ta phát biểu và chứng minh hai bổ đề

Bổ đề 4.3.1 :

Đặt $D_r = \{(\alpha, \beta) / \alpha^2 + \beta^2 \leq r^2\}$ với $r > \sqrt{2}$.

Nếu $f_0 \in H^2(M)$ thì

$$\int_{R^2 \setminus D_r} \left[\int_M f_0(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy \right]^2 d\alpha d\beta \leq 512\sqrt{2} \|f_0\|_{H^2(M)}^2 r^{-1}.$$

Chứng minh

Từ tính trừ mật của $C^\infty(\bar{M})$ trong $H^2(M)$, chúng ta chỉ xét trường hợp $f_0 \in C^\infty(\bar{M})$.

Ta có

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 f_0(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dy dx = \\ & = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \cos \beta y dx dy + \int_0^1 \left[f_0(x, y) \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \right]_{x=0}^{x=1} \cos \beta y dy \\ & = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) \frac{\sin \alpha x}{\alpha} \cos \beta y dx dy + \int_0^1 f_0(1, y) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \beta y dy \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y}(x, y) \frac{\sin \beta y}{\beta} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} dx dy - \int_0^1 \left[\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) \frac{\sin \beta y}{\beta} \right]_{y=0}^{y=1} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} dx \\ & \quad - \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial y}(1, y) \frac{\sin \beta y}{\beta} \frac{\sin \alpha}{\alpha} dy + \left[f_0(1, y) \frac{\sin \beta y}{\beta} \right]_{y=0}^{y=1} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \\ & = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y}(x, y) \frac{\sin \beta y}{\beta} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} dx dy - \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, 1) \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} dx \\ & \quad - \int_0^1 \frac{\partial f_0}{\partial y}(1, y) \frac{\sin \beta y}{\beta} \frac{\sin \alpha}{\alpha} dy + f_0(1, 1) \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Ta có

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y}(x, y) \frac{\sin \beta y}{\beta} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} dx dy \right| \leq k(\beta)k(\alpha) \left\| \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} \right\|_{L^2(M)}$$

trong đó $k(\theta) = \begin{cases} 1 & |\theta| \leq 1 \\ \frac{1}{|\theta|} & |\theta| > 1 \end{cases}$.

Ta có

$$\begin{aligned} f_0(1,1) &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2 (xyf_0)}{\partial x \partial y} dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(f_0(x, y) + y \frac{\partial f_0}{\partial y}(x, y) + x \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) + xy \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y}(x, y) \right) dx dy. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\left| f_0(1,1) \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right| \leq \left(\|f_0\|_{L^2(M)} + \left\| \frac{\partial f_0}{\partial y} \right\|_{L^2(M)} + \left\| \frac{\partial f_0}{\partial x} \right\|_{L^2(M)} + \left\| \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} \right\|_{L^2(M)} \right) k(\alpha)k(\beta).$$

Đồng thời, ta có

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{\partial f_0}{\partial x}(x,1) \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} dx \right| &\leq \\ &\leq k(\alpha)k(\beta) \int_0^1 \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial f_0}{\partial x}(x, y) \right) dy \right| dx \\ &\leq k(\alpha)k(\beta) \left[\left\| \frac{\partial f_0}{\partial x} \right\|_{L^2(M)} + \left\| \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} \right\|_{L^2(M)} \right]. \end{aligned}$$

Tương tự

$$\int_0^1 \left| \frac{\partial f_0}{\partial y}(1, y) \frac{\sin \beta y}{\beta} \frac{\sin \alpha}{\alpha} dy \right| \leq k(\alpha)k(\beta) \left[\left\| \frac{\partial f_0}{\partial y} \right\|_{L^2(M)} + \left\| \frac{\partial^2 f_0}{\partial x \partial y} \right\|_{L^2(M)} \right].$$

Vậy

$$\left| \int_M f_0(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy \right| \leq 4k(\alpha)k(\beta) \|f_0\|_{H^2(M)}.$$

Vì thế

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_r} \left[\int_M f_0(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy \right]^2 d\alpha d\beta \leq \\
 & \leq 16 \|f_0\|_{H^2(M)}^2 \left\{ 2 \int_{|\alpha| \leq \frac{r}{\sqrt{2}}} \int_{|\beta| \geq \frac{r}{\sqrt{2}}} (k(\alpha))^2 (k(\beta))^2 d\alpha d\beta + 2 \int_{|\alpha| \geq \frac{r}{\sqrt{2}}} \int_{|\beta| \geq \frac{r}{\sqrt{2}}} (k(\alpha))^2 (k(\beta))^2 d\alpha d\beta \right\} \\
 & \leq 32 \|f_0\|_{H^2(M)}^2 \|k\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \int_{|\beta| \geq \frac{r}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\beta^2} d\beta \\
 & \leq 512\sqrt{2} \|f_0\|_{H^2(M)}^2 \frac{1}{r}.
 \end{aligned}$$

Bổ đề đã được chứng minh. ■

Định lý 4.3.1

Cho $C_0 > 0$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $\varphi_0 \in L^2(0, 1)$, $g_0 \in L^2(M)$ và gọi (u_0, f_0) là nghiệm chính xác của (4.1.1)-(4.1.7) tương ứng dữ liệu chính xác (φ_0, g_0) .

Gọi φ, g là dữ liệu đo đạc,

$$\|\varphi - \varphi_0\|_{L^2(0,1)} < \varepsilon, \quad \|g - g_0\|_{L^2(M)} < \varepsilon \quad (4.3.1)$$

và $\varphi(t) > C_0$, $\varphi_0(t) > C_0$ hầu khắp nơi trên $(0, 1)$.

Khi đó tồn tại nghiệm chỉnh hóa f_ε sao cho

$$\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(M)} \leq 4 \sqrt{\frac{e^3}{4\pi C_0^4} (C_0 + \|g\|_{L^2(M)})^2 \varepsilon^{2/9} + \eta(\varepsilon)} \quad (4.3.2)$$

trong đó $\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nếu giả sử thêm $f_0 \in H^2(M)$ thì tồn tại D_1 hằng số dương độc lập với ε sao cho

$$\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(M)} \leq 2\varepsilon^{1/9} \sqrt{\frac{e^3}{4\pi C_0^4} (C_0 + \|g\|_{L^2(M)})^2 + D_1 \|f_0\|_{H^2(M)}^2}.$$

Chứng minh

Chọn

$$r = \frac{1}{\sqrt[9]{\varepsilon^2}} > 1 \text{ và } D_\varepsilon = \{(\alpha, \beta) / \alpha^2 + \beta^2 \leq r^2\}.$$

Từ (4.2.3) và (4.2.10), ta có

$$\widehat{f}_0(\alpha, \beta) = -e^{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\int_0^1 \int_0^1 g_0(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy}{2\pi \int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \varphi_0(t) dt}. \quad (4.3.3)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \tilde{f}_0(\xi, \zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}_0(\alpha, \beta) e^{i(\alpha\xi + \beta\zeta)} d\alpha d\beta \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\int_0^1 \int_0^1 g_0(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy}{\int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \varphi_0(t) dt} e^{i(\alpha\xi + \beta\zeta)} d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Đặt

$$\tilde{f}_\varepsilon(\xi, \zeta) \equiv -\frac{1}{4\pi^2} \int_{D_\varepsilon} e^{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy}{\int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \varphi(t) dt} e^{i(\alpha\xi + \beta\zeta)} d\alpha d\beta \quad (4.3.5)$$

suy ra

$$\widehat{f}_\varepsilon(\alpha, \beta) = \begin{cases} -e^{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy}{2\pi \int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \varphi(t) dt} & , (\alpha, \beta) \in D_\varepsilon \\ 0 & , (\alpha, \beta) \notin D_\varepsilon \end{cases}$$

Ta ký hiệu $\|\cdot\|_2$ là chuẩn trong $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Ta có

$$\|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}_0\|_2^2 = \|\widehat{f}_\varepsilon - \widehat{f}_0\|_2^2 = \int_{D_\varepsilon} |\widehat{f}_\varepsilon(\alpha, \beta) - \widehat{f}_0(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_\varepsilon} |\widehat{f}_0(\alpha, \beta)|^2 d\alpha d\beta. \quad (4.3.6)$$

Với $(\alpha, \beta) \in D_\varepsilon$, ta có

$$\begin{aligned}
 & \left| \widehat{f}_\varepsilon(\alpha, \beta) - \widehat{f}_0(\alpha, \beta) \right| = \\
 & \left| \frac{e^{\alpha^2 + \beta^2}}{2\pi} \left[\frac{\int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy}{\int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \varphi(t) dt} - \frac{\int_0^1 \int_0^1 g_0(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy}{\int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \varphi_0(t) dt} \right] \right| \\
 & = \frac{e^{\alpha^2 + \beta^2}}{2\pi} \left[\frac{\int_0^1 \int_0^1 [g_0(x, y) - g(x, y)] \cos \alpha x \cos \beta y dx dy}{\int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \varphi_0(t) dt} + \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy \left(\frac{1}{\int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \varphi_0(t) dt} - \frac{1}{\int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \varphi(t) dt} \right) \right] \\
 & \leq \frac{e^{\alpha^2 + \beta^2}}{2\pi} \left[\frac{\|g - g_0\|_{L^2(M)}}{C_0(e^{\alpha^2 + \beta^2} - 1)} (\alpha^2 + \beta^2) + \|g\|_{L^2(M)} \frac{\int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} (\varphi(t) - \varphi_0(t)) dt}{\int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \varphi_0(t) dt \int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} \varphi(t) dt} \right] \\
 & \leq \frac{e^{\alpha^2 + \beta^2}}{2\pi} \left[\frac{\varepsilon}{C_0(e^{\alpha^2 + \beta^2} - 1)} (\alpha^2 + \beta^2) + \|g\|_{L^2(M)} \frac{\sqrt{\frac{1}{2(\alpha^2 + \beta^2)} [e^{2(\alpha^2 + \beta^2)} - 1]} \varepsilon}{C_0^2(e^{\alpha^2 + \beta^2} - 1)^2 \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}} \right] \\
 & \leq \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\varepsilon(\alpha^2 + \beta^2)}{C_0(1 - e^{-(\alpha^2 + \beta^2)})} + \|g\|_{L^2(M)} \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^3} \sqrt{1 - e^{-2(\alpha^2 + \beta^2)}}}{\sqrt{2} C_0^2 (1 - e^{-(\alpha^2 + \beta^2)})^2} \varepsilon \right].
 \end{aligned}$$

Vì $r > 1$, với $u \equiv \alpha^2 + \beta^2 \leq r^2$, sử dụng các bất đẳng thức

$$\begin{cases} \frac{u}{1 - e^{-u}} \leq 2u \leq eu \leq er^2, & \forall u \geq 1 \\ \frac{u}{1 - e^{-u}} \leq e \leq er^2, & \forall u \in [0, 1) \end{cases},$$

ta có

$$\frac{\varepsilon(\alpha^2 + \beta^2)}{C_0(1 - e^{-(\alpha^2 + \beta^2)})} \leq \frac{\varepsilon r^2}{C_0} \leq \frac{\varepsilon e^{3/2} r^3}{C_0}$$

và

$$\|g\|_{L^2(M)} \frac{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)^3} \sqrt{1 - e^{-2(\alpha^2 + \beta^2)}}}{C_0^2 \sqrt{2} \sqrt{(1 - e^{-(\alpha^2 + \beta^2)})^3}} \varepsilon \leq \frac{\|g\|_{L^2(M)} e^{3/2} r^3 \varepsilon}{C_0^2}.$$

Nên

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} \left| \widehat{f}_\varepsilon(\alpha, \beta) - \widehat{f}_0(\alpha, \beta) \right|^2 d\alpha d\beta &\leq \frac{\varepsilon^2 e^3 r^6}{4\pi^2 C_0^4} \left[C_0 + \|g\|_{L^2(M)} \right]^2 \int_{D_\varepsilon} d\alpha d\beta \\ &\leq \frac{\varepsilon^2 e^3 r^8}{4\pi C_0^4} \left[C_0 + \|g\|_{L^2(M)} \right]^2. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Đặt

$$\eta(\varepsilon) \equiv \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_\varepsilon} \left| \widehat{f}_0(\alpha, \beta) \right|^2 d\alpha d\beta, \text{ thì } \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ khi } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.3.8)$$

Từ (4.3.6)-(4.3.8), ta nhận được

$$\|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}_0\|_2^2 \leq \frac{e^3}{4\pi C_0^4} \left[C_0 + \|g\|_{L^2(M)} \right]^2 \varepsilon^{2/9} + \eta(\varepsilon),$$

nghĩa là

$$\|4\tilde{f}_\varepsilon - f_0\|_{L^2(M)} \leq 4 \sqrt{\frac{e^3}{4\pi C_0^4} \left[C_0 + \|g\|_{L^2(M)} \right]^2 \varepsilon^{2/9} + \eta(\varepsilon)}. \quad (4.3.9)$$

Đặt $f_\varepsilon = 4\tilde{f}_\varepsilon$, ta nhận được bất đẳng thức (4.3.2).

Ta có

$$\widehat{f}_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 f_0(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy.$$

Sử dụng bổ đề 4.3.1, nếu $f_0 \in H^2(M)$, ta có $\eta(\varepsilon) \leq \frac{128\sqrt{2}}{\pi^2} \|f_0\|_{H^2(M)}^2 \varepsilon^{2/9}$, suy ra

$$\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(M)} \leq 2\varepsilon^{1/9} \sqrt{\frac{e^3}{4\pi C_0^4} [C_0 + \|g\|_{L^2(M)}]^2 + \frac{128\sqrt{2}}{\pi^2} \|f_0\|_{H^2(M)}^2}.$$

Định lý đã được chứng minh. ■

Định lý 4.3.2

$$\text{Đặt } v_0(t) = \int_1^t \varphi_0(s) ds.$$

Giả sử $\exists \delta \in (0,1)$ sao cho v_0 không đổi dấu và $v_0 \neq 0$ trên $(1-\delta,1)$.

Cho $\varepsilon > 0$, $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\varphi_0 \in L^2(0,1)$, $g_0 \in L^2(M)$ và gọi (u_0, f_0) là nghiệm

chính xác.

Giả sử dữ liệu đo đạc là φ, g thỏa

$$\|g - g_0\|_{L^2(M)} < \varepsilon \text{ và } \|\varphi - \varphi_0\|_{L^2(0,1)} < \varepsilon.$$

Ta có với mỗi $b \in \left(0, \min\left\{a, \frac{1-2a}{2}\right\}\right)$ và nếu $0 < \varepsilon < e^{-1/2b}$, thì tồn tại nghiệm

chỉnh hóa f_ε , các hằng số $C_b > 0$, $\gamma_b > 0$ độc lập với ε và một hàm $\eta_b(\varepsilon)$,

$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \eta_b(\varepsilon) = 0$ sao cho

$$\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(M)} \leq \sqrt{C_b \varepsilon^{\gamma_b} + \eta_b(\varepsilon)}.$$

Nếu giả sử thêm $f_0 \in H^2(M)$, thì tồn tại D_2 là hằng số dương độc lập với ε sao cho

$$\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(M)} \leq \sqrt{C_b \varepsilon^{\gamma_b} + D_2 \|f_0\|_{H^2(M)}^2 \left(b \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2}}.$$

Lưu ý : Tập hợp những hàm φ_0 thỏa mãn điều kiện của định lý khá rộng chẳng hạn như $\varphi_0(t) = (1-t)^m(a + (1-t)\psi(t))$ với $a \neq 0$ và $\psi \in L^2(0,1)$ và $v_0(t) = \int_1^t \varphi_0(s)ds$ thì v_0 thỏa mãn điều kiện $\exists \delta \in (0,1)$ sao cho v_0 không đổi dấu và $v_0 \neq 0$ trên $(1-\delta,1)$.

Để chứng minh định lý 4.3.2, ta chứng minh bổ đề sau đây

Bổ đề 4.3.2

Đặt $v_0(t) \equiv \int_1^t \varphi_0(s)ds,$

$$\Phi_0(\mu) \equiv \int_0^1 e^{\mu^2 t} \varphi_0(t)dt,$$

và $B_R \equiv \left\{ (\alpha, \beta) : \left| \Phi_0(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \right| < R \right\}$ với $R > 0$.

Giả sử tồn tại $\delta \in (0,1)$ sao cho v_0 không đổi dấu và $v_0 \neq 0$ trên $(1-\delta,1)$, thì tồn tại $\gamma, R_0 \in (0,1)$ và $C_0 > 0$ sao cho khi $R \leq R_0$ ta có

$$m(B_R) \leq C_0 R^\gamma,$$

trong đó $m(B_R)$ là độ đo Lebesgue của B_R .

Chứng minh

Ta chứng minh $|\Phi_0(\mu)| \rightarrow +\infty$ khi $\mu \rightarrow \pm\infty$.

Ta có

$$\Phi_0(\mu) = \int_0^1 e^{\mu^2 t} \varphi_0(t)dt = \int_0^1 e^{\mu^2 t} v'_0(t)dt = -v_0(0) - \mu^2 \int_0^1 v_0(t)e^{\mu^2 t} dt.$$

Do các giả thiết trên v_0 , không mất tổng quát, giả sử tồn tại t_0 và $\varepsilon_1 > 0$ sao cho

$$1 - \delta < t_0 - \varepsilon_1 < t_0 < t_0 + \varepsilon_1 < 1,$$

và $v_0(t) < 0 \quad \forall t \in [t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1].$

Đặt

$$C_1 \equiv \min_{[0, t_0 - \varepsilon_1]} (-v_0(t)), \quad C_2 \equiv \min_{[t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1]} (-v_0(t)), \quad C_2 > 0$$

ta có

$$\begin{aligned} \Phi_0(\mu) &= -v_0(0) + \left[- \int_0^{t_0 - \varepsilon_1} v_0(t) e^{t\mu^2} dt - \int_{t_0 - \varepsilon_1}^{t_0 + \varepsilon_1} v_0(t) e^{t\mu^2} dt - \int_{t_0 + \varepsilon_1}^1 v_0(t) e^{t\mu^2} dt \right] \mu^2 \\ &\geq -v_0(0) + \left[C_1 \int_0^{t_0 - \varepsilon_1} e^{t\mu^2} dt + C_2 \int_{t_0 - \varepsilon_1}^{t_0 + \varepsilon_1} e^{t\mu^2} dt \right] \mu^2 \\ &\geq -v_0(0) + \left[C_1 \left(e^{(t_0 - \varepsilon_1)\mu^2} - 1 \right) + C_2 \left(e^{(t_0 + \varepsilon_1)\mu^2} - e^{(t_0 - \varepsilon_1)\mu^2} \right) \right] \\ &\geq -v_0(0) + e^{(t_0 + \varepsilon_1)\mu^2} \left[C_1 \left(e^{-2\varepsilon_1\mu^2} - e^{-(t_0 + \varepsilon_1)\mu^2} \right) + C_2 \left(1 - e^{-2\varepsilon_1\mu^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Vậy $|\Phi_0(\mu)| \rightarrow +\infty$ khi $\mu \rightarrow \pm\infty$.

Suy ra $\Phi_0(\mu)$ có hữu hạn không điểm trên trục thực, do đó ta có thể viết

$$\Phi_0(\mu) = \Phi_1(\mu) \prod_{j=1}^p (\mu - \mu_j)^{m_j}$$

trong đó $m_j = 1, 2, \dots \quad \forall j = \overline{1, p}$, $|\Phi_1(\mu)| \rightarrow +\infty$ khi $\mu \rightarrow \pm\infty$ và $\Phi_1(\mu) \neq 0$ với mọi μ .

Từ $|\Phi_1(\mu)| \rightarrow +\infty$ khi $\mu \rightarrow \pm\infty$ và $\Phi_1(\mu) \neq 0$ với mọi μ , tồn tại $C_3 > 0$ sao cho $|\Phi_1(\mu)| \geq C_3$ với mọi μ .

$$\text{Vậy } \left| \Phi_0(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \right| \geq C_3 \prod_{j=1}^p \left| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \mu_j \right|^{m_j}.$$

Không mất tổng quát, giả sử

$$0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p \quad (\text{vì nếu } \mu_i < 0 \text{ thì } \left| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \mu_i \right| \geq |\mu_i|).$$

Ta xét $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_p$ (trường hợp $\mu_1 = 0$ tương tự).

$$\text{Đặt } d \equiv \min_{1 \leq s \leq p-1} (\mu_{s+1} - \mu_s), \quad M \equiv \sum_{s=1}^p m_s,$$

$$R_0 \equiv \min \left\{ C_3 d^M, \frac{1}{2}, C_3 \left(\frac{\mu_1}{2} \right)^{2m_1} d^{M-2m_1} \right\} \quad \text{và} \quad \delta_s \equiv \frac{R^{1/2m_s}}{C_3^{1/2m_s} d^{(M-2m_s)/2m_s}},$$

$1 \leq s \leq p$ (chú ý rằng $0 < \mu_1 - \delta_1$).

Nếu $\mu_s + \delta_s \leq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \leq \mu_{s+1} - \delta_{s+1}, s=1, p-1$, ta có

$$\left| \Phi_0(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \right| \geq C_3 \prod_{j=1}^p \left| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \mu_j \right|^{m_j} \geq C_3 \delta_s^{m_s} \delta_{s+1}^{m_{s+1}} d^{M_s} = R,$$

trong đó $M_s = M - m_s - m_{s+1}$.

Nếu $\mu_p + \delta_p < \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, ta có $\left| \Phi_0(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \right| \geq \sqrt{C_3} \sqrt{d^M} \sqrt{R} \geq R$.

Nếu $\mu_1 - \delta_1 > \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, ta có $\left| \Phi_0(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \right| \geq R$.

Điều này có nghĩa là

$$B_R \subset \bigcup_{s=1}^p \{(\alpha, \beta) / \mu_s - \delta_s < \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} < \mu_s + \delta_s\}.$$

Do đó

$$m(B_R) \leq \sum_{s=1}^p 4\pi \mu_s \delta_s \leq 4\pi \max_{s=1,p} \mu_s \sum_{s=1}^p \delta_s = 4\pi d \max_{s=1,p} \mu_s \sum_{s=1}^p \frac{R^{1/2m_s}}{C_3^{1/2m_s} d^{M/2m_s}}.$$

Chọn $\gamma = \min_{1 \leq s \leq p} \left\{ \frac{1}{2m_s} \right\}$, ta đã chứng minh được bổ đề. ■

Bây giờ chúng ta chứng minh định lý 4.3.2.

Chứng minh

Chúng ta đặt

$$r(\varepsilon) \equiv \sqrt{b \ln \frac{1}{\varepsilon}}, \quad \Phi(\mu) \equiv \int_0^1 e^{t\mu^2} \varphi(t) dt,$$

$$\mathcal{D}_\varepsilon \equiv \left\{ (\alpha, \beta) / \left| \Phi\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) \right| \geq \varepsilon^a \text{ và } \alpha^2 + \beta^2 < r^2(\varepsilon) \right\},$$

$$F_\varepsilon(\alpha, \beta) \equiv \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \frac{-e^{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy}{\Phi\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)} & , (\alpha, \beta) \in \mathcal{D}_\varepsilon, \\ 0 & , (\alpha, \beta) \notin \mathcal{D}_\varepsilon \end{cases}$$

$$f_\varepsilon(x, y) \equiv \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} F_\varepsilon(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad \tilde{f}_\varepsilon \equiv \frac{1}{4} f_\varepsilon,$$

và $D_{1,\varepsilon} \equiv \left\{ (\alpha, \beta) / \alpha^2 + \beta^2 < r^2(\varepsilon) \right\}, \quad D_{2,\varepsilon} \equiv \left\{ (\alpha, \beta) / \left| \Phi\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) \right| < \varepsilon^a \right\}.$

Ta có

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}_0\|_2^2 &= \|\hat{f}_\varepsilon - \hat{f}_0\|_2^2 = \\ &= \int_{\mathcal{D}_\varepsilon} \left| F_\varepsilon(\alpha, \beta) - \hat{f}_0(\alpha, \beta) \right|^2 d\alpha d\beta + \int_{D_{1,\varepsilon} \cap D_{2,\varepsilon}} \left| \hat{f}_0(\alpha, \beta) \right|^2 d\alpha d\beta + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus D_{1,\varepsilon}} \left| \hat{f}_0(\alpha, \beta) \right|^2 d\alpha d\beta \\ &\equiv I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Đầu tiên ta ước lượng I_2 , ta có

$$\begin{aligned} \left| \Phi\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) - \Phi_0\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) \right| &\leq \int_0^1 e^{(\alpha^2 + \beta^2)t} |\varphi(t) - \varphi_0(t)| dt \\ &\leq \|\varphi - \varphi_0\|_{L^2(0,1)} \sqrt{\int_0^1 e^{2(\alpha^2 + \beta^2)t} dt} \\ &\leq \varepsilon \sqrt{\frac{e^{2(\alpha^2 + \beta^2)} - 1}{2(\alpha^2 + \beta^2)}}. \end{aligned}$$

Nếu $(\alpha, \beta) \in D_{1,\varepsilon} \cap D_{2,\varepsilon}$, ta có

$$\left| \Phi_0\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) \right| < \varepsilon^a + \varepsilon \sqrt{\frac{e^{2(\alpha^2 + \beta^2)} - 1}{2(\alpha^2 + \beta^2)}} < \varepsilon^a + \varepsilon^{1-b}$$

suy ra

$$D_{1,\varepsilon} \cap D_{2,\varepsilon} \subset B_{(\varepsilon^a + \varepsilon^{1-b})} = \left\{ (\alpha, \beta) / \left| \Phi_0 \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) \right| < \varepsilon^a + \varepsilon^{1-b} \right\}. \quad (4.3.16)$$

Ta có

$$\left| \widehat{f}_0(\alpha, \beta) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^1 \int_0^1 f_0(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy \right| \leq \frac{1}{2\pi} \|f_0\|_{L^2(M)}. \quad (4.3.17)$$

Từ (4.3.16), (4.3.17) và bổ đề 4.3.2, với ε khá nhỏ thì tồn tại $C_0 > 0$, $\gamma > 0$

sao cho

$$I_2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \|f_0\|_{L^2(M)}^2 m(B_{(\varepsilon^a + \varepsilon^{1-b})}) \leq \frac{1}{4\pi^2} \|f_0\|_{L^2(M)}^2 C_0 (\varepsilon^a + \varepsilon^{1-b})^\gamma. \quad (4.3.18)$$

Tiếp theo, ta ước lượng I_1 , vì $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}_\varepsilon$, ta có

$$\left| \Phi \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) \right| \geq \varepsilon^a \quad \text{và} \quad \alpha^2 + \beta^2 < r^2(\varepsilon) = b \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

suy ra

$$\left| \Phi_0 \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right) \right| \geq \varepsilon^a - \varepsilon \sqrt{\frac{e^{2(\alpha^2 + \beta^2)} - 1}{2(\alpha^2 + \beta^2)}} \geq \varepsilon^a - \varepsilon^{1-b} > 0.$$

Khi $(\alpha, \beta) \in \mathcal{D}_\varepsilon$, ta có

$$\begin{aligned} & \left| F_\varepsilon(\alpha, \beta) - \widehat{f}_0(\alpha, \beta) \right| = \\ & = \frac{1}{2\pi} \left| -e^{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy}{\Phi \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right)} - \int_0^1 \int_0^1 f_0(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy \right| \\ & = \frac{1}{2\pi} \left| e^{\alpha^2 + \beta^2} \left[\frac{\int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy}{\Phi \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right)} - \frac{\int_0^1 \int_0^1 g_0(x, y) \cos \alpha x \cos \beta y dx dy}{\Phi_0 \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right)} \right] \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{1}{2\pi} e^{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \frac{\|g_0\|_{L^2(M)} \left| \Phi_0(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) - \Phi(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \right|}{\left| \Phi(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \right| \left| \Phi_0(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \right|} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\|\Phi_0\|_{L^2(0,1)} \sqrt{\frac{e^{2(\alpha^2 + \beta^2)} - 1}{2(\alpha^2 + \beta^2)}} \left| \int_0^1 \int_0^1 [g(x, y) - g_0(x, y)] \cos \alpha x \cos \beta y dx dy \right|}{\left| \Phi(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \right| \left| \Phi_0(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) \right|} \right\} \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} e^{\alpha^2 + \beta^2} \frac{\varepsilon \sqrt{\frac{e^{2(\alpha^2 + \beta^2)} - 1}{2(\alpha^2 + \beta^2)}} (\|g_0\|_{L^2(M)} + \|\Phi_0\|_{L^2(0,1)})}{\varepsilon^a \left(\varepsilon^a - \varepsilon \sqrt{\frac{e^{2(\alpha^2 + \beta^2)} - 1}{2(\alpha^2 + \beta^2)}} \right)} \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} e^{\alpha^2 + \beta^2} \varepsilon^{1-2a} \frac{\sqrt{\frac{e^{2(\alpha^2 + \beta^2)} - 1}{2(\alpha^2 + \beta^2)}} (\|g_0\|_{L^2(M)} + \|\Phi_0\|_{L^2(0,1)})}{1 - \varepsilon^{1-a} \sqrt{\frac{e^{2(\alpha^2 + \beta^2)} - 1}{2(\alpha^2 + \beta^2)}}} \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} e^{(r(\varepsilon))^2} \varepsilon^{1-2a} \frac{\sqrt{\frac{e^{2(r(\varepsilon))^2} - 1}{2(r(\varepsilon))^2}} (\|g_0\|_{L^2(M)} + \|\Phi_0\|_{L^2(0,1)})}{1 - \varepsilon^{1-a} \sqrt{\frac{e^{2(r(\varepsilon))^2} - 1}{2(r(\varepsilon))^2}}}.
 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq \frac{1}{4\pi} e^{2(r(\varepsilon))^2} \varepsilon^{2-4a} \frac{e^{2(r(\varepsilon))^2} (\|g_0\|_{L^2(M)} + \|\Phi_0\|_{L^2(0,1)})^2}{2 (1 - \varepsilon^{1-a} e^{(r(\varepsilon))^2})^2} \\
 &\leq \frac{1}{8\pi} \varepsilon^{2-4a-4b} \frac{(\|g_0\|_{L^2(M)} + \|\Phi_0\|_{L^2(0,1)})^2}{(1 - \varepsilon^{1-a-b})^2}.
 \end{aligned}$$

Vậy

$$\|\tilde{f}_\varepsilon - \tilde{f}_0\|_2 \leq \sqrt{\frac{1}{8\pi} \varepsilon^{2-4a-4b} \frac{(\|g_0\|_{L^2(M)} + \|\Phi_0\|_{L^2(0,1)})^2}{(1 - \varepsilon^{1-a-b})^2} + \frac{1}{4\pi^2} \|f_0\|_{L^2(M)}^2 C_0 (\varepsilon + \varepsilon^{1-b})^\gamma + \eta_b(\varepsilon)}$$

trong đó $I_3 = \eta_b(\varepsilon) \rightarrow 0$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$.

Suy ra

$$\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(M)} \leq 4 \sqrt{\frac{1}{8\pi} \varepsilon^{2-4a-4b} \frac{(\|g_0\|_{L^2(Q)} + \|\varphi_0\|_{L^2(0,1)})^2}{(1 - \varepsilon^{1-a-b})^2} + \frac{1}{4\pi^2} \|f_0\|_{L^2(M)}^2 C_0 (\varepsilon + \varepsilon^{1-b})^\gamma + \eta_b(\varepsilon)}.$$

Sử dụng bổ đề 4.3.1, nếu $f_0 \in H^2(M)$ thì ta có

$$\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(M)} \leq \sqrt{C_b \varepsilon^{\gamma_b} + \frac{2048\sqrt{2}}{\pi^2} \|f_0\|_{H^2(M)}^2 \left(\mathbf{b} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2}}.$$

Định lý đã được chứng minh. ■

Chương 5

XÁC ĐỊNH NHIỆT ĐỘ TỪ LỖ KHOAN THĂM DÒ: TRƯỜNG HỢP CỦA NHIỆT PHỤ THUỘC PHI TUYẾN VÀO NGUỒN NHIỆT

Nội dung chính của chương này đã công bố trong [2] (của danh mục công trình công bố của tác giả). Ngoài ra chúng tôi có cải tiến và đưa thêm một kết quả mới về nghiệm chính hóa (định lý 5.3.2).

5.1 MỞ ĐẦU

Trong chương này chúng tôi xét bài toán xác định phân bố nhiệt độ $u(x,y)$ trong một vật biểu diễn bởi nửa mặt phẳng $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ từ nhiệt độ đo được trên một đường thẳng bên trong vật thể. Ta cần tìm hàm nhiệt độ $u(x,y)$ thỏa phương trình

$$\Delta u = f(x, y, u(x, y)) \quad , x \in \mathbb{R}, y > 0$$

với điều kiện

$$u(x, 1) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

trong đó f là hàm phi tuyến cho trước thỏa

$$f(\xi, \eta, 0) = 0, \tag{5.1.1}$$

và

$$|f(\xi, \eta, \zeta_1) - f(\xi, \eta, \zeta_2)| \leq |p(\xi, \eta)| |\zeta_1 - \zeta_2| \quad \text{với mọi } (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}. \tag{5.1.2}$$

Ngoài ra, hàm $u(x,y)$ là hàm có các đạo hàm riêng bị chặn, $u_y(x, 1) \in L^2(\mathbb{R})$

và $u(x, y) \rightarrow 0$ khi $|x|, y \rightarrow \infty$.

Như đã nói trong lời nói đầu, bài toán được chia thành hai bài toán nhỏ tương ứng với phần $y \geq 1$ và phần $0 \leq y < 1$ (xem [16, 47]).

Trong mục 5.2, chúng tôi sử dụng nguyên lý ánh xạ co để xác định $u(x,y)$ trong nửa mặt phẳng $x \in \mathbb{R}, y \geq 1$ và tính xấp xỉ $u_y(x, 1)$. Bài toán này là bài toán

chỉnh trong không gian các hàm bị chặn theo chuẩn sup, tuy nhiên việc tính xấp xỉ $u_y(x,1)$ từ hàm φ đòi hỏi một số điều kiện chi tiết. Trong mục 5.3, chúng tôi xác định $u(x,y)$ trong dải $x \in \mathbb{R}, 0 \leq y < 1$ từ các dữ liệu $\varphi = u(x,1)$ và dữ liệu $\psi = u_y(x,1)$ được tính gần đúng từ trong mục 5.2. Bài toán này là bài toán không chỉnh. Các kết quả chỉnh hóa bài toán này được phát biểu và chứng minh trong Định lý 5.3.1 và Định lý 5.3.2.

5.2 XÁC ĐỊNH PHÂN BỐ NHIỆT TRONG $\mathbb{R} \times (1, +\infty)$.

Ta xét bài toán sau

$$\Delta u = f(x, y, u(x, y)) \quad , x \in \mathbb{R}, y > 1 \quad (5.2.1)$$

với các điều kiện

$$u(x,1) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.2.2)$$

và

$$u(x, y) \rightarrow 0$$

khi

$$|x| \rightarrow \infty \text{ hay } y \rightarrow \infty. \quad (5.2.3)$$

Đặt

$$\Gamma(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \ln \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right]$$

$$\text{và} \quad N(x, y; \xi, \eta) = \Gamma(x, y; \xi, \eta) - \Gamma(x, 2 - y; \xi, \eta). \quad (5.2.4)$$

Đầu tiên chúng tôi xét miền $y > 1, x \in \mathbb{R}$. Cho $y > 1, x \in \mathbb{R}$, tích phân đẳng thức

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (uN_\xi - Nu_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (uN_\eta - Nu_\eta) = -Nf \quad (5.2.5)$$

trên miền $(-m, m) \times (1, n) \setminus B((x, y), \varepsilon)$ (trong đó $B((x, y), \varepsilon)$ là quả cầu tâm (x, y) bán kính ε) và cho $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ chúng ta nhận được

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\eta}(x, y; \xi, 1)\varphi(\xi)d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_1^{+\infty} N(x, y; \xi, \eta)f(\xi, \eta, u(\xi, \eta))d\xi d\eta. \quad (5.2.6)$$

Đặt

$$J = \left\{ u \in B(\mathbb{R} \times (1, +\infty)) \mid u(x, y) \rightarrow 0 \text{ khi } |x| \rightarrow \infty \text{ hay } y \rightarrow +\infty \right\}, \text{ trong đó}$$

$B(\mathbb{R} \times (1, +\infty))$ là không gian những hàm bị chặn trên $\mathbb{R} \times (1, +\infty)$.

Dễ dàng nhận thấy J là không gian Banach với chuẩn sup, với

$$\|u\|_{\infty} = \sup_{(x, y) \in \mathbb{R} \times (1, +\infty)} |u(x, y)|.$$

Phương trình (5.2.6) có thể được viết dưới dạng toán tử như sau

$$u = Au \quad (5.2.7)$$

trong đó $A : J \rightarrow J$ xác định bởi

$$Au(x, y) = h(x, y, \varphi) - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_1^{+\infty} N(x, y; \xi, \eta)f(\xi, \eta, u(\xi, \eta))d\xi d\eta \quad (5.2.8)$$

với

$$h(x, y, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\eta}(x, y; \xi, 1)\varphi(\xi)d\xi. \quad (5.2.9)$$

Định lý 5.2.1

Cho $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$.

Giả sử hàm f thỏa điều kiện (5.1.1) và (5.1.2), với hàm $p \in L^1(\mathbb{R} \times (1, +\infty))$ có tính chất

$$K \equiv \sup_{(x, y) \in \mathbb{R} \times (1, +\infty)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_1^{+\infty} N(x, y; \xi, \eta)|p(\xi, \eta)|d\xi d\eta < 1$$

và $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_1^{+\infty} N(x, y; \xi, \eta)|p(\xi, \eta)|d\xi d\eta \rightarrow 0$ khi $|x| \rightarrow \infty$ hay $y \rightarrow +\infty$.

Khi đó $A : J \rightarrow J$ là ánh xạ co.

Lưu ý : Điều kiện trên được thỏa, chẳng hạn, với $f(\xi, \eta, \zeta) = \alpha q(\xi)r(\eta) \sin \zeta$ với $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ trong đó $\alpha > 0$ đủ nhỏ, $\text{supp } q \subset [-\beta, \beta]$ với $\beta > 0$, $\text{supp } r \subset [\gamma, \delta] \cup [0, 1)$ với $1 < \gamma < \delta$ và q liên tục trên $[-\beta, \beta]$, r liên tục trên $[\gamma, \delta]$ và $[0, 1)$.

Chứng minh

Ta có

$$|Au(x, y) - Av(x, y)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_1^{+\infty} N(x, y; \xi, \eta) |p(\xi, \eta)| |u(\xi, \eta) - v(\xi, \eta)| d\xi d\eta$$

với mọi $u, v \in J$.

Vì thế

$$\|Au - Av\|_{\infty} \leq K \|u - v\|_{\infty}.$$

Định lý đã được chứng minh. ■

Bởi nguyên lý ánh xạ co, tồn tại duy nhất $u \in J$ sao cho

$$Au = u$$

nghĩa là

$$u(x, y) = h(x, y, \varphi) - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_1^{+\infty} N(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\xi d\eta \tag{5.2.10}$$

với mọi $x \in \mathbb{R}, y > 1$.

Đặt $\psi(x) = u_y(x, 1)$ với u là nghiệm chính xác của (5.2.1)- (5.2.2). Từ dữ liệu đo đạc φ_ε của $\varphi(x) = u(x, 1)$, ta xây dựng ψ_ε xấp xỉ ψ và đánh giá sai số $\|\psi_\varepsilon - \psi\|_{L^2(\mathbb{R})}$ bằng bổ đề sau

Bổ đề 5.2.1

Cho $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Cho u là nghiệm (5.2.6).

Giả sử hàm f thỏa điều kiện (5.1.1) và (5.1.2), với hàm $p \in L^1(\mathbb{R} \times (1, +\infty))$ có tính chất

$$K \equiv \sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times (1, +\infty)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_1^{+\infty} N(x, y; \xi, \eta) |p(\xi, \eta)| d\xi d\eta < 1$$

và

$$L = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_1^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta-1}{(x-\xi)^2 + (1-\eta)^2} |p(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right]^2} dx < +\infty.$$

Giả sử thêm $\widehat{\varphi}(\zeta)e^{|\zeta|} \in L^2(\mathbb{R})$.

Với mỗi $0 < \varepsilon < 1$, gọi $\varphi_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ là dữ liệu đo đạc sao cho

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Ta có thể xây dựng ψ_ε sao cho

$$\|\psi_\varepsilon - \psi\|_{L^2(\mathbb{R})} < C\varepsilon^{1/2}$$

trong đó C là hằng số dương độc lập với ε .

Chứng minh

Đặt $k(x, y, u) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_1^{+\infty} N(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\xi d\eta$.

Từ (5.2.9), (5.2.10) ta có $u(x, y) = h(x, y, \varphi) + k(x, y, u)$. (5.2.11)

Đặt $\widetilde{\varphi}_\varepsilon$ được xác định như sau

$$\widehat{\widetilde{\varphi}_\varepsilon}(\zeta) = \begin{cases} \widehat{\varphi}_\varepsilon(\zeta) & |\zeta| < \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \\ 0 & |\zeta| \geq \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \end{cases}$$

và

$$\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\zeta| < \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}} \widehat{\varphi}_\varepsilon(\zeta) e^{i\zeta x} d\zeta.$$

Gọi u_ε là nghiệm của (5.2.6) với φ thay bằng $\widetilde{\varphi}_\varepsilon$, nghĩa là

$$u_\varepsilon = h(x, y, \widetilde{\varphi}_\varepsilon) + k(x, y, u_\varepsilon). \quad (5.2.12)$$

Ta ký hiệu $h(x, y, \varphi) = h(x, y)$, $h(x, y, \varphi_\varepsilon) = h_\varepsilon(x, y)$, $k(x, y, u) = k(x, y)$ và

$$k(x, y, u_\varepsilon) = k_\varepsilon(x, y). \quad (5.2.13)$$

Đặt $\psi_\varepsilon(x) = h_{\varepsilon y}(x, 1) + k_{\varepsilon y}(x, 1)$, ta chứng minh ψ_ε là hàm cần tìm. (5.2.14)

Ta có

$$h(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_\eta(x, y; \xi, 1) \varphi(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y-1}{(x-\xi)^2 + (y-1)^2} \varphi(\xi) d\xi \quad (5.2.15)$$

Nếu đặt $F_{(y)}(x) \equiv \frac{y}{x^2 + y^2}$, $y > 0$, ta có

$$\widehat{F}_{(y)}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{(y)}(x) e^{-ix\zeta} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-y|\zeta|}.$$

Lấy biến đổi Fourier theo biến x đẳng thức (5.2.15), ta có

$$\widehat{h}(\zeta, y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \widehat{F_{(y-1)}} * \widehat{\varphi}(\zeta) = \widehat{\varphi}(\zeta) e^{-(y-1)|\zeta|}$$

và

$$\widehat{h}_y(\zeta, y) = -|\zeta| \widehat{\varphi}(\zeta) e^{-(y-1)|\zeta|}.$$

Tương tự

$$\widehat{h}_\varepsilon(\zeta, y) = \widehat{\varphi}(\zeta) e^{-(y-1)|\zeta|}.$$

Ta tìm đánh giá $\|h_{\varepsilon y}(\cdot, 1) - h_y(\cdot, 1)\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Sử dụng bất đẳng thức $u^4 < e^{2u} \forall u > 1$, ta có

$$\begin{aligned} \|h_{\varepsilon y}(\cdot, 1) - h_y(\cdot, 1)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\zeta|^2 \left| \widehat{\varphi}(\zeta) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\zeta) \right|^2 d\zeta \\ &\leq \int_{|\zeta| < \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}} |\zeta|^2 \left| \widehat{\varphi}(\zeta) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\zeta) \right|^2 d\zeta + \int_{|\zeta| > \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}} \frac{e^{2|\zeta|}}{|\zeta|^2} \left| \widehat{\varphi}(\zeta) \right|^2 d\zeta. \end{aligned}$$

Vậy

$$\|h_{\varepsilon y}(\cdot, 1) - h_y(\cdot, 1)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \varepsilon + \varepsilon \|e^{|\zeta|} \hat{\varphi}(\zeta)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = C_1^2 \varepsilon$$

với $C_1 = \sqrt{1 + \|e^{|\zeta|} \hat{\varphi}(\zeta)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}$.

Vậy $\|h_{\varepsilon y}(\cdot, 1) - h_y(\cdot, 1)\|_{L^2(\mathbb{R})} < C_1 \sqrt{\varepsilon}$. (5.2.16)

Ta có

$$k(x, y) = - \int_1^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\xi d\eta$$

suy ra

$$k_y(x, 1) = \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\eta}{(x-\xi)^2 + (1-\eta)^2} f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) d\xi d\eta.$$

Tương tự

$$k_{\varepsilon y}(x, 1) = \frac{1}{\pi} \int_1^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\eta}{(x-\xi)^2 + (1-\eta)^2} f(\xi, \eta, u_\varepsilon(\xi, \eta)) d\xi d\eta$$

Ta có

$$\begin{aligned} & \|k_{\varepsilon y}(\cdot, 1) - k_y(\cdot, 1)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_1^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\eta}{(x-\xi)^2 + (1-\eta)^2} (f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) - f(\xi, \eta, u_\varepsilon(\xi, \eta))) d\xi d\eta \right)^2 dx} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_1^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta-1}{(x-\xi)^2 + (1-\eta)^2} |p(\xi, \eta)| |u - u_\varepsilon| d\xi d\eta \right]^2 dx} \\ &\leq \frac{1}{\pi} \|u - u_\varepsilon\|_\infty L \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

với

$$L = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_1^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta-1}{(x-\xi)^2 + (1-\eta)^2} |p(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right]^2 dx} < +\infty.$$

Đồng thời, ta có

$$\begin{aligned}
 \|u - u_\varepsilon\|_\infty &\leq \sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times (1, +\infty)} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} N_\eta(x, y, \xi, 1) [\varphi(\xi) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)] d\xi \right. \\
 &\quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_1^{+\infty} N(x, y, \xi, \eta) (f(\xi, \eta, u(\xi, \eta)) - f(\xi, \eta, u_\varepsilon(\xi, \eta))) d\xi d\eta \right| \\
 &\leq \sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times (1, +\infty)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y-1}{(x-\xi)^2 + (y-1)^2} |\varphi(\xi) - \widetilde{\varphi}_\varepsilon(\xi)| d\xi \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_1^{+\infty} N(x, y, \xi, \eta) |p(\xi, \eta)| |u(\xi, \eta) - u_\varepsilon(\xi, \eta)| d\xi d\eta \right] \\
 &\leq \|\varphi - \widetilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + K \|u - u_\varepsilon\|_\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{với } K = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times (1, +\infty)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_1^{+\infty} N(x, y, \xi, \eta) |p(\xi, \eta)| d\xi d\eta \in (0, 1). \quad (5.2.18)$$

$$\text{Vậy } \|u - u_\varepsilon\|_\infty \leq \frac{1}{1-K} \|\varphi - \widetilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \quad (5.2.19)$$

Ta có

$$\begin{aligned}
 \|\varphi - \widetilde{\varphi}_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |\widetilde{\varphi}_\varepsilon(x) - \varphi(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{|\zeta| < \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}} \widehat{\varphi}_\varepsilon(\zeta) e^{i\zeta x} d\zeta - \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\zeta) e^{i\zeta x} d\zeta \right| \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{|\zeta| < \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\zeta) - \widehat{\varphi}(\zeta)| d\zeta + \int_{|\zeta| > \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}} |\widehat{\varphi}(\zeta)| d\zeta \right] \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sqrt{\int_{-\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}}^{\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}} d\zeta \int_{-\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}}^{\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}} |\widehat{\varphi}_\varepsilon(\zeta) - \widehat{\varphi}(\zeta)|^2 d\zeta} + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{\int_{|\zeta| > \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}} e^{2|\zeta|} |\widehat{\varphi}(\zeta)|^2 d\zeta} \cdot \int_{|\zeta| > \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}} e^{-2|\zeta|} d\zeta \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon^{1/4}} \|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} + \sqrt{\frac{2}{3}} \|e^{|\zeta|} \hat{\varphi}(\zeta)\|_{L^2(\mathbb{R})} \varepsilon^{3/4} \right] \\ &< C_2 \varepsilon^{3/4} \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

trong đó

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\sqrt{2} + \sqrt{\frac{2}{3}} \|e^{|\zeta|} \hat{\varphi}(\zeta)\|_{L^2(\mathbb{R})} \right].$$

Từ (5.2.17)-(5.2.20), ta có

$$\|k_{\varepsilon_y}(\cdot, 1) - k_y(\cdot, 1)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{L}{\pi(1-K)} \|\varphi - \tilde{\varphi}_\varepsilon\|_\infty < \frac{LC_2}{\pi(1-K)} \varepsilon^{3/4}. \quad (5.2.21)$$

Kết hợp (5.2.11)- (5.2.14), (5.2.16) và (5.2.21), suy ra

$$\begin{aligned} \|\psi_\varepsilon - \psi\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|u_{\varepsilon_y}(\cdot, 1) - u_y(\cdot, 1)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \|h_{\varepsilon_y}(\cdot, 1) + k_{\varepsilon_y}(\cdot, 1) - h_y(\cdot, 1) - k_y(\cdot, 1)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|h_{\varepsilon_y}(\cdot, 1) - h_y(\cdot, 1)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|k_{\varepsilon_y}(\cdot, 1) - k_y(\cdot, 1)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &< \frac{LC_2}{\pi(1-K)} \varepsilon^{3/4} + C_1 \varepsilon^{1/2} \leq \left(\frac{LC_2}{\pi(1-K)} + C_1 \right) \varepsilon^{1/2}. \end{aligned}$$

Bổ đề đã được chứng minh. ■

5.3 XÁC ĐỊNH PHÂN BỐ NHIỆT TRONG $\mathbb{R} \times [0, 1)$.

Nhắc lại rằng $\psi(x) = u_y(x, 1)$ với u là nghiệm chính xác trong mục 5.2. Chú ý rằng ta chỉ xem φ là dữ liệu, còn ψ là dữ liệu thứ cấp. Trong bổ đề 5.2.1 ta đã tính xấp xỉ ψ_ε của ψ .

Xem phương trình

$$\Delta u = f(x, y, u(x, y)), \quad x \in \mathbb{R}, y \in (0, 1)$$

với các điều kiện biên

$$u(x, 1) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Để tìm nghiệm chỉnh hóa của (5.3.1), giả sử thêm nghiệm chính xác u thỏa $\hat{\varphi}(\zeta)e^{|\zeta|}, \hat{\psi}(\zeta)e^{|\zeta|} \in L^2(\mathbb{R})$, ta chia bài toán thành 2 bước

Bước 1 : Xét bài toán

$$\Delta v = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in (0,1), \quad (5.3.2)$$

$$v(x,1) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.3.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,1) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.3.4)$$

Ta chứng minh bài toán có nghiệm duy nhất v_0 , tìm nghiệm chỉnh hóa v_ε .

Bước 2 : Gọi u_0 là nghiệm chính xác của (5.3.1). Đặt $w_0 = u_0 - v_0$ thì w_0 là nghiệm của bài toán

$$\Delta w = g(x, y, w), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in (0,1) \quad (5.3.5)$$

$$w(x,1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.3.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,1) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.3.7)$$

trong đó $g(x,y,w) = f(x,y,w+v_0)$ với v_0 là nghiệm chính xác của bài toán (5.3.2)-(5.3.4). Ta tìm w_ε xấp xỉ của w_0 và đánh giá sai số $\|w_\varepsilon - w_0\|_2$, trong đó $\|\cdot\|_2$ là chuẩn trong $L^2(\mathbb{R} \times (0,1))$. Đặt $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$, ta đánh giá sai số $\|u_\varepsilon - u_0\|_2$.

Bước 1: Chứng minh bài toán (5.3.2)-(5.3.4) có nghiệm duy nhất v_0 và tìm nghiệm chỉnh hóa v_ε của bài toán (5.3.2)-(5.3.4)

Xét bài toán (5.3.2)-(5.3.4).

$$\text{Đặt } \Gamma(x, y, \xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \ln \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right]$$

$$\text{và } G(x, y, \xi, \eta) = \Gamma(x, y, \xi, \eta) - \Gamma(x, -y, \xi, \eta).$$

Với $x \in \mathbf{R}$, $0 < y < 1$, tích phân đẳng thức

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(-vG_{\xi} + Gv_{\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta}(-vG_{\eta} + Gv_{\eta}) = 0$$

trên miền $(-n, n) \times (0, 1) \setminus B((x, y), \varepsilon)$ và cho $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, sau khi hoán chuyển, ta có:

$$v(x, y) = - \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(\xi)G_{\eta}(x, y, \xi, 1) - G(x, y, \xi, 1)\psi(\xi)] d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\eta}(x, y, \xi, 0)v(\xi, 0)d\xi. \quad (5.3.8)$$

Cho $y \rightarrow 1$ trong đẳng thức (5.3.8), ta có :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x - \xi)^2 + 1} v(\xi, 0) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} [-\varphi(\xi)G_{\eta}(x, 1, \xi, 1) + G(x, 1, \xi, 1)\psi(\xi)] d\xi = \varphi(x) \quad (5.3.9)$$

nên phương trình này có thể viết dưới dạng sau :

$$F_{(1)} * v_{(0)}(x) = \pi K_{(1)}(x) + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \varphi(x) \quad (5.3.10)$$

trong đó

$$K_{(y)}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [-\varphi(\xi)G_{\eta}(x, y, \xi, 1) + G(x, y, \xi, 1)\psi(\xi)] d\xi, \quad (5.3.11)$$

$$F_{(y)}(x) \equiv \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v_{(y)}(x) = v(x, y).$$

Nếu đặt

$$M_{(y,1)}(x) = \frac{1-y}{x^2 + (y-1)^2} - \frac{1+y}{x^2 + (y+1)^2}$$

và $L_{(\eta,y)}(x) \equiv \ln \frac{x^2 + (y-\eta)^2}{x^2 + (y+\eta)^2} \quad (0 < y, \eta < 1, x \in \mathbf{R})$

thì ta có biến đổi Fourier theo biến x của M, L, F là

$$\begin{aligned}\hat{F}_{(y)}(\zeta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{(y)}(x) e^{-ix\zeta} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-y|\zeta|}, \\ \hat{L}_{(n,y)}(\zeta) &= \sqrt{2\pi} \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{-(y+n)|\zeta|} - e^{-|y-n||\zeta|} \right], \\ \hat{M}_{(y,1)}(\zeta) &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \left[e^{(y-1)|\zeta|} - e^{-(y+1)|\zeta|} \right].\end{aligned}\quad (5.3.12)$$

Từ (5.3.11), (5.3.12), ta có :

$$K_{(y)}(x) = -\frac{1}{4\pi} \left[2\varphi * M_{(y,1)}(x) - \psi * L_{(1,y)}(x) \right]. \quad (5.3.13)$$

Từ (5.3.10), (5.3.11), ta có :

$$\hat{v}_{(0)}(\zeta) = e^{|\zeta|} \left(\sqrt{2\pi} \hat{K}_{(1)}(\zeta) + \hat{\varphi}(\zeta) \right). \quad (5.3.14)$$

Lấy Fourier theo biến x trong đẳng thức (5.3.8) và từ (5.3.14), ta nhận được:

$$\begin{aligned}\hat{v}_{(y)}(\zeta) &= e^{|\zeta|} \hat{F}_{(y)}(\zeta) \left(2\hat{K}_{(1)}(\zeta) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \hat{\varphi}(\zeta) \right) - \sqrt{2\pi} \hat{K}_{(y)}(\zeta) \\ &= \frac{1}{2} \hat{\varphi}(\zeta) \left[e^{(1-y)|\zeta|} + e^{(y-1)|\zeta|} \right] - \frac{1}{2|\zeta|} \hat{\psi}(\zeta) \left[e^{(1-y)|\zeta|} - e^{(y-1)|\zeta|} \right] \equiv \aleph(\zeta, y).\end{aligned}\quad (5.3.15)$$

Chúng ta nhận được kết quả sau :

Mệnh đề 5.3.1

Cho $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$.

Giả sử $\hat{\varphi}(\zeta)e^{|\zeta|} \in L^2(\mathbb{R})$, $\hat{\psi}(\zeta)e^{|\zeta|} \in L^2(\mathbb{R})$ thì bài toán (5.3.2)-(5.3.4) có nghiệm duy nhất $v_0 \in L^2(\mathbb{R} \times (0,1))$.

Giả sử hàm f thỏa điều kiện (5.1.1) và (5.1.2), với hàm $p \in L^1(\mathbb{R} \times (1,+\infty))$ có tính chất

$$K \equiv \sup_{(x,y) \in \mathbb{R} \times (1,+\infty)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_1^{+\infty} N(x,y;\xi,\eta) |p(\xi,\eta)| d\xi d\eta < 1$$

và

$$L = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_1^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta-1}{(x-\xi)^2 + (1-\eta)^2} |p(\xi,\eta)| d\xi d\eta \right]^2 dx} < +\infty.$$

Giả sử thêm $|\zeta| \widehat{\varphi}(\zeta) e^{|\zeta|} \in L^2(\mathbb{R})$, $|\zeta| \widehat{\psi}(\zeta) e^{|\zeta|} \in L^2(\mathbb{R})$.

Với mỗi $0 < \varepsilon < e^{-3}$, gọi $\varphi_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ là dữ liệu đo đạc sao cho

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon.$$

Khi đó tồn tại nghiệm chỉnh hóa v_ε sao cho

$$\|v_0 - v_\varepsilon\|_2 < D \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1}, \text{ trong đó } \|\cdot\|_2 \text{ là chuẩn trong } L^2(\mathbb{R} \times (0,1)) \text{ và } D$$

là hằng số dương độc lập với ε .

Chứng minh

Từ (5.3.15) sử dụng bất đẳng thức $\frac{e^{|\zeta|}-1}{|\zeta|} \leq e^{|\zeta|}$ ta có, với mọi $0 \leq y \leq 1$

$$|\mathfrak{N}(\zeta, y)| \leq e^{|\zeta|} |\widehat{\varphi}(\zeta)| + e^{|\zeta|} |\widehat{\psi}(\zeta)| \in L^2(\mathbb{R}).$$

Suy ra bài toán (5.3.2)-(5.3.4) có nghiệm duy nhất $v_0 \in L^2(\mathbb{R} \times (0,1))$.

Đặt $\widetilde{\varphi}_\varepsilon$ trong bổ đề 5.2.1, ta có

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\varphi}_\varepsilon - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{|\zeta| < \varepsilon^{-1/2}} \left| \widehat{\varphi}_\varepsilon(\zeta) - \widehat{\varphi}(\zeta) \right|^2 d\zeta + \int_{|\zeta| > \varepsilon^{-1/2}} \left| \widehat{\varphi}(\zeta) \right|^2 d\zeta \\ &< \varepsilon^2 + \int_{|\zeta| > \varepsilon^{-1/2}} \frac{|\widehat{\varphi}(\zeta)|^2 e^{2|\zeta|}}{|\zeta|^4} d\zeta \\ &< \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \left\| \widehat{\varphi}(\zeta) e^{|\zeta|} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \varepsilon^2 C_3^2 \end{aligned}$$

trong đó $C_3 = \sqrt{1 + \left\| \widehat{\varphi}(\zeta) e^{|\zeta|} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}$.

Suy ra $\|\widetilde{\varphi}_\varepsilon - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} < C_3\varepsilon$.

Đặt ϕ_ε xác định như sau

$$\widehat{\phi}_\varepsilon(\zeta) = \begin{cases} \widehat{\varphi}_\varepsilon(\zeta) & |\zeta| < \frac{1}{6} \ln \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & |\zeta| \geq \frac{1}{6} \ln \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

và $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{6} \ln \frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{6} \ln \frac{1}{\varepsilon}} \widehat{\phi}_\varepsilon(\zeta) e^{i\zeta x} d\zeta$.

Ta có

$$\begin{aligned} \left\| \left(\widehat{\phi}_\varepsilon(\zeta) - \widehat{\varphi}(\zeta) \right) e^{|\zeta|} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \int_{-\frac{1}{6} \ln \frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{6} \ln \frac{1}{\varepsilon}} \left| \widehat{\varphi}_\varepsilon(\zeta) - \widehat{\varphi}(\zeta) \right|^2 e^{2|\zeta|} d\zeta + \int_{|\zeta| > \frac{1}{6} \ln \frac{1}{\varepsilon}} \left| \widehat{\varphi}(\zeta) \right|^2 e^{2|\zeta|} d\zeta \\ &\leq e^{\frac{1}{3} \ln \frac{1}{\varepsilon}} \left\| \widetilde{\varphi}_\varepsilon - \varphi \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{6} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^2} \left\| \zeta \widehat{\varphi}(\zeta) e^{|\zeta|} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &< C_3^2 e^{\frac{1}{3} \ln \frac{1}{\varepsilon}} \varepsilon^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{6} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^2} \left\| \zeta \widehat{\varphi}(\zeta) e^{|\zeta|} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &< C_3^2 \varepsilon^{5/3} + \frac{36}{\ln^2 \frac{1}{\varepsilon}} \left\| \zeta \widehat{\varphi}(\zeta) e^{|\zeta|} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức $\varepsilon^{5/3} < \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{\varepsilon}}$ khi $\varepsilon < e^{-3}$, ta có

$$\left\| \left(\widehat{\phi}_\varepsilon(\zeta) - \widehat{\varphi}(\zeta) \right) e^{|\zeta|} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < C_4^2 \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{\varepsilon}},$$

trong đó $C_4 = \sqrt{C_3^2 + 36 \left\| \zeta \widehat{\varphi}(\zeta) e^{|\zeta|} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}$. (5.3.16)

Theo bổ đề 5.2.1, tồn tại $\psi_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ sao cho

$$\|\psi_\varepsilon - \psi\|_{L^2(\mathbb{R})} < C\varepsilon^{1/2}.$$

Bây giờ ta đặt Ψ_ε như sau

$$\widehat{\Psi}_\varepsilon(\zeta) = \begin{cases} \widehat{\psi}_\varepsilon(\zeta) & |\zeta| < \frac{1}{6} \ln \frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & |\zeta| \geq \frac{1}{6} \ln \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$$

$$\text{và } \Psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{6} \ln \frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{6} \ln \frac{1}{\varepsilon}} \widehat{\Psi}_\varepsilon(\zeta) e^{i\zeta x} d\zeta.$$

Tương tự như cách làm phía trên, sử dụng bất đẳng thức $\varepsilon^{2/3} < \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{\varepsilon}}$ khi

$\varepsilon < e^{-3}$, ta cũng có

$$\left\| \left(\widehat{\Psi}_\varepsilon(\zeta) - \widehat{\psi}(\zeta) \right) e^{|\zeta|} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < C_5^2 \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{\varepsilon}},$$

$$\text{trong đó } C_5 = \sqrt{C^2 + 36 \left\| \zeta \widehat{\psi}(\zeta) e^{|\zeta|} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}. \quad (5.3.17)$$

$$\text{Đặt } \aleph_\varepsilon(\zeta, y) = \frac{1}{2} \widehat{\phi}_\varepsilon(\zeta) \left[e^{(1-y)|\zeta|} + e^{(y-1)|\zeta|} \right] - \frac{1}{2|\zeta|} \widehat{\Psi}_\varepsilon(\zeta) \left[e^{(1-y)|\zeta|} - e^{(y-1)|\zeta|} \right]$$

và

$$v_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \aleph_\varepsilon(\zeta, y) e^{i\zeta x} d\zeta.$$

Từ (5.3.15)-(5.3.17), ta có

$$\|v_\varepsilon - v_0\|_2 = \|\aleph_\varepsilon - \aleph\|_2$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\left\| \left(\widehat{\phi}(\zeta) - \widehat{\phi}_\varepsilon(\zeta) \right) \left[e^{(1-y)|\zeta|} + e^{(y-1)|\zeta|} \right] \right\|_2 + \left\| \frac{\left(\widehat{\psi}(\zeta) - \widehat{\Psi}_\varepsilon(\zeta) \right)}{|\zeta|} \left[e^{(1-y)|\zeta|} - e^{(y-1)|\zeta|} \right] \right\|_2 \right)$$

$$\leq \left\| (\widehat{\varphi}(\zeta) - \widehat{\varphi}_\varepsilon(\zeta))e^{|\zeta|} \right\|_2 + \left\| (\widehat{\psi}(\zeta) - \widehat{\psi}_\varepsilon(\zeta))e^{|\zeta|} \right\|_2$$

$$< (C_4 + C_5) \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1}.$$

$$\text{Suy ra } \|v_0 - v_\varepsilon\|_2 < D \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1}.$$

Mệnh đề đã được chứng minh. ■

Bước 2 : Tìm w_ε và đánh giá sai số $\|w_\varepsilon - w_0\|_2$. Đặt $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$, ta đánh giá sai số $\|u_\varepsilon - u_0\|_2$.

Nhắc lại w_0 là nghiệm chính xác của (5.3.5)-(5.3.7).

Gọi $v_0 \in L^2(\mathbb{R} \times (0,1))$ là nghiệm chính xác của (5.3.2)-(5.3.4) và $v_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R} \times (0,1))$ là nghiệm chỉnh hóa.

Ta viết

$$w_{(y)}(x) = w(x, y) \text{ và } f_{(\eta, w_0, v_0)}(\xi) = f(\xi, \eta, v_0(\xi, \eta) + w_0(\xi, \eta)).$$

Với $x \in \mathbb{R}$, $0 < y < 1$, với G xác định trong (5.3.8), tích phân đẳng thức

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (-w_0 G_\xi + G w_{0\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (-w_0 G_\eta + G w_{0\eta}) = G f_{(\eta, w_0, v_0)}(\xi) \quad (5.3.18)$$

trên miền $(-n, n) \times (0,1) \setminus B((x, y), \varepsilon)$ ($B((x, y), \varepsilon)$ là quả cầu tâm (x, y) bán kính ε) và cho $n \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, sau khi hoán chuyển, ta có :

$$w_0(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_0(\xi, 0) G_\eta(x, y, \xi, 0) d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 G(x, y, \xi, \eta) f_{(\eta, w_0, v_0)}(\xi) d\xi d\eta \quad (5.3.19)$$

Giả sử rằng f thỏa mãn các điều kiện sau

$$f(\xi, \eta, 0) = 0, \quad (5.3.20)$$

$$|f(\xi, \eta, \zeta_1) - f(\xi, \eta, \zeta_2)| \leq |p(\xi, \eta)| |\zeta_1 - \zeta_2| \quad (5.3.21)$$

với mọi $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R} \times [0,1) \times \mathbb{R}$, trong đó $p \in L^2(\mathbb{R} \times (0,1))$.

Dưới những điều kiện phía trên của f , ta khẳng định (và chứng minh) bổ đề 5.3.1, được sử dụng trong chứng minh định lý 5.3.1.

Bổ đề 5.3.1

Giả sử rằng f thỏa những điều kiện (5.3.20)-(5.3.21) và một hàm số $v_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R} \times (0,1))$.

Gọi $T_{(v_\varepsilon)} : L^2(\mathbb{R} \times (0,1)) \rightarrow L^2(\mathbb{R} \times (0,1))$

xác định bởi

$$T_{(v_\varepsilon)} w(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{-|y-\eta||\zeta|} \right] f_{(\eta, w, v_\varepsilon)}(\xi) e^{-i\xi\zeta} e^{i\zeta x} d\xi d\eta d\zeta \quad (5.3.22)$$

trong đó

$$f_{(\eta, w, v_\varepsilon)}(\xi) \equiv f(\xi, \eta, v_\varepsilon(\xi, \eta) + w(\xi, \eta))$$

và b là số dương cố định sao cho

$$\alpha \equiv \frac{4}{\pi} b e^{2b} \|p\|_2^2 < 1.$$

Khi đó $T_{(v_\varepsilon)}$ là một ánh xạ co.

Chứng minh

Đặt

$$Q_{(y)}(\zeta) = Q(y, \zeta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{-|y-\eta||\zeta|} \right] f_{(\eta, w, v_\varepsilon)}(\xi) e^{-i\xi\zeta} d\xi d\eta,$$

$$\zeta \in [-b, b], y \in [0,1)$$

và

$$Q_{(y)}(\zeta) = 0, \zeta \notin [-b, b], y \in [0,1).$$

Sử dụng các bất đẳng thức

$$\frac{1}{|\zeta|} \left| e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{-|y-\eta||\zeta|} \right| \leq 4e^b \quad \forall \eta, y \in [0,1), \zeta \in [-b, b]$$

và

$$|f_{(\eta, w, v_\varepsilon)}(\xi)| \leq |p(\xi, \eta)| (|v_\varepsilon(\xi, \eta)| + |w(\xi, \eta)|) \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times [0, 1), \quad w \in L^2(\mathbb{R} \times [0, 1))$$

ta nhận được

$$Q_{(y)}(\zeta) \in L^2(\mathbb{R} \times (0, 1)) \quad \text{và} \quad \widehat{T_{(v_\varepsilon)} w}_{(y)}(\zeta) = Q_{(y)}(\zeta).$$

Điều này dẫn đến

$$T_{(v_\varepsilon)} w \in L^2(\mathbb{R} \times (0, 1)).$$

Hơn nữa

$$\begin{aligned} \|T_{(v_\varepsilon)} w_1 - T_{(v_\varepsilon)} w_2\|_2^2 &= \left\| \widehat{T_{(v_\varepsilon)} w_{1(\cdot)}}(\cdot) - \widehat{T_{(v_\varepsilon)} w_{2(\cdot)}}(\cdot) \right\|_2^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{8\pi} \int_{-b}^b \int_0^1 \int_0^{+\infty} \frac{1}{|\zeta|^2} \left[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{-|y-\eta||\zeta|} \right]^2 p^2(\xi, \eta) d\xi d\eta dy d\zeta \|w_1 - w_2\|_2^2 \\ &\leq \frac{4}{\pi} b e^{2b} \|p\|_2^2 \|w_1 - w_2\|_2^2 = \alpha \|w_1 - w_2\|_2^2. \end{aligned}$$

Do đó $T_{(v_\varepsilon)}$ là một ánh xạ co.

Bổ đề đã được chứng minh. ■

Định lý 5.3.1

Dưới những giả thiết trong mệnh đề 5.3.1.

Gọi $v_0 \in L^2(\mathbb{R} \times (0, 1))$ là nghiệm chính xác của (5.3.2)-(5.3.4) và gọi $v_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R} \times (0, 1))$ là nghiệm chỉnh hóa của (5.3.2)-(5.3.4) đã xác định trong mệnh đề 5.3.1.

Giả sử rằng f thỏa mãn các điều kiện (5.3.20)-(5.3.21).

Giả sử thêm nghiệm chính xác $w_0 \in L^2(\mathbb{R} \times (0, 1))$ của (5.3.5)-(5.3.7) thỏa mãn

$$\widehat{w_{0(\eta)}}(\zeta) e^{|\zeta|} \sqrt{|\zeta|} \in L^2(\mathbb{R} \times (0, 1)). \tag{5.3.23}$$

Khi đó tồn tại một hàm w_ε và $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$ sao cho

$$\|w_\varepsilon - w_0\|_2 \leq \sqrt{\frac{36E^2 \|p\|_2^2}{\pi} + 2\|v_\varepsilon - v_0\|_2^2}$$

và

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_2 < D \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1} + \sqrt{\frac{36E^2 \|p\|_2^2}{\pi} + 2D^2 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-2}}$$

trong đó

$$E = \left\| \widehat{w}_{0(\eta)}(\zeta) e^{|\zeta|} \sqrt{|\zeta|} \right\|_2 \quad (5.3.24)$$

và D là hằng số dương độc lập với ε xác định trong mệnh đề 5.3.1.

Chứng minh

Gọi b là nghiệm dương của phương trình

$$\frac{4}{\pi} b e^{2b} \|p\|_2^2 = \frac{1}{3}. \quad (5.3.25)$$

Gọi $T_{(v_\varepsilon)} : L^2(\mathbb{R} \times (0,1)) \rightarrow L^2(\mathbb{R} \times (0,1))$ được xác định bởi

$$T_{(v_\varepsilon)} w(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_0^{1+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{-|y-\eta||\zeta|} \right] f_{(\eta, w, v_\varepsilon)}(\xi) e^{-i\xi\zeta} e^{i\xi x} d\xi d\eta d\zeta. \quad (5.3.26)$$

Từ $T_{(v_\varepsilon)}$ là ánh xạ co, tồn tại duy nhất $w_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R} \times (0,1))$ sao cho

$$T_{(v_\varepsilon)} w_\varepsilon = w_\varepsilon$$

và w_ε có thể nhận được bởi phép xấp xỉ.

Từ (5.3.19), ta có

$$\begin{aligned} w_0(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} w_0(\xi, 0) \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{1+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} f_{(\eta, w_0, v_0)}(\xi) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (5.3.27)$$

Cho $y \rightarrow 1$, ta có :

$$\frac{1}{4} \int_0^{1+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{(x-\xi)^2 + (1-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (1+\eta)^2} f_{(\eta, w_0, v_0)}(\xi) d\xi d\eta +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} w_0(\xi, 0) \frac{1}{(x - \xi)^2 + 1} d\xi = 0. \quad (5.3.28)$$

Nhắc lại rằng trong (5.3.12), ta có

$$F_{(y)}(x) \equiv \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad L_{(\eta, y)}(x) \equiv \ln \frac{x^2 + (y - \eta)^2}{x^2 + (y + \eta)^2} \quad (0 < y, \eta < 1, x \in \mathbb{R}),$$

$$\hat{F}_{(y)}(\zeta) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-y|\zeta|}, \quad \hat{L}_{(\eta, y)}(\zeta) = \sqrt{2\pi} \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{-(y+\eta)|\zeta|} - e^{-|y-\eta||\zeta|} \right]. \quad (5.3.29)$$

Ta viết

$$w_{0(y)}(x) \equiv w_0(x, y).$$

Từ (5.3.28), (5.3.29) ta có thể viết thành :

$$w_{0(0)} * F_{(1)}(x) + \frac{1}{4} \int_0^1 L_{(\eta, 1)} * f_{(\eta, w_0, v_0)}(x) d\eta = 0.$$

Lấy Fourier hai vế của đẳng thức trên ta nhận được

$$\widehat{w}_{0(0)}(\zeta) \cdot \hat{F}_{(1)}(\zeta) + \frac{1}{4} \int_0^1 \hat{L}_{(\eta, 1)}(\zeta) \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) d\eta = 0$$

và do (5.3.29) nên

$$\widehat{w}_{0(0)}(\zeta) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{-\eta|\zeta|} - e^{\eta|\zeta|} \right] \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) d\eta. \quad (5.3.30)$$

Từ (5.3.27), ta có :

$$w_{0(y)}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} w_{0(0)} * F_{(y)}(x) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^1 L_{(\eta, y)} * f_{(\eta, w_0, v_0)}(x) d\eta = 0. \quad (5.3.31)$$

Biến đổi Fourier theo biến x của đẳng thức (5.3.31), ta có

$$\widehat{w}_{0(y)}(\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \widehat{w}_{0(0)}(\zeta) \cdot \hat{F}_{(y)}(\zeta) + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \hat{L}_{(\eta, y)}(\zeta) \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) d\eta. \quad (5.3.32)$$

Từ (5.3.29) và (5.3.30), phương trình (5.3.32) trở thành :

$$\widehat{w}_{0(y)}(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{-|y-\eta||\zeta|} \right] \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) d\eta \quad (5.3.33)$$

với mọi ζ . Ta có

$$\widehat{w}_{0(y)}(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{-|y-\eta||\zeta|} \right] f_{(\eta, w_0, v_0)}(\xi) e^{-i\xi\zeta} d\xi d\eta. \quad (5.3.34)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \|w_0 - w_\varepsilon\|_2^2 &= \left\| \widehat{w}_{0(\cdot)} - \widehat{w}_{\varepsilon(\cdot)} \right\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 \left| \widehat{w}_{0(y)}(\zeta) - \widehat{T}_{(v_\varepsilon)} \widehat{w}_{\varepsilon(y)}(\zeta) \right|^2 dy d\zeta \\ &= \int_{|\zeta|>b} \int_0^1 \left| \widehat{w}_{0(y)}(\zeta) \right|^2 dy d\zeta \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int_{-b}^b \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{-|y-\eta||\zeta|} \right] \left[f_{(\eta, w_0, v_0)}(\xi) - f_{(\eta, w_\varepsilon, v_\varepsilon)}(\xi) \right] e^{-i\xi\zeta} d\xi d\eta \Bigg|^2 dy d\zeta \\ &\leq \int_{|\zeta|>b} \int_0^1 \frac{\left| \widehat{w}_{0(y)}(\zeta) \sqrt{|\zeta|} e^{|\zeta|} \right|^2}{be^{2b}} dy d\zeta \\ &+ \frac{1}{8\pi} \int_{-b}^b \int_0^1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{-|y-\eta||\zeta|} \right] \left[f_{(\eta, w_0, v_0)}(\xi) - f_{(\eta, w_\varepsilon, v_\varepsilon)}(\xi) \right] e^{-i\xi\zeta} d\xi d\eta \Bigg|^2 dy d\zeta \\ &\leq \frac{E^2}{be^{2b}} + \frac{1}{3} \|w_0 - w_\varepsilon + v_0 - v_\varepsilon\|_2^2. \end{aligned}$$

Vì thế

$$\|w_0 - w_\varepsilon\|_2 \leq \sqrt{\frac{36E^2 \|p\|_2^2}{\pi} + 2\|v_0 - v_\varepsilon\|_2^2}$$

và $\|u_0 - u_\varepsilon\|_2 \leq \|v_0 - v_\varepsilon\|_2 + \|w_0 - w_\varepsilon\|_2$

cho nên

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_2 < D \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1} + \sqrt{\frac{36E^2 \|p\|_2^2}{\pi} + 2D^2 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-2}}.$$

Định lý đã được chứng minh. ■

Từ định lý 5.3.1 ta dễ dàng nhận được hệ quả sau

Hệ quả 5.3.1

Dưới những giả thiết của định lý 5.3.1 và giả sử thêm

$$p(\xi, \eta) = 0 \text{ trong } \mathbb{R} \times (0,1).$$

Khi đó tồn tại nghiệm chỉnh hóa $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$ của (5.3.1) sao cho

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_2 \leq D(\sqrt{2} + 1) \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1}$$

trong đó D là hằng số dương độc lập với ε xác định trong mệnh đề 5.3.1.

Như vậy trong trường hợp hàm p xác định trên $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ có tính chất $p(\xi, \eta) = 0$ trong $\mathbb{R} \times (0,1)$ ta đã tìm được nghiệm chỉnh hóa u_ε , còn trong trường hợp tổng quát ta có kết quả sau đây

Định lý 5.3.2

Dưới những giả thiết của mệnh đề 5.3.1.

Gọi $v_0 \in L^2(\mathbb{R} \times (0,1))$ là nghiệm chính xác của (5.3.2)- (5.3.4) và gọi $v_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R} \times (0,1))$ là nghiệm chỉnh hóa của (5.3.2)- (5.3.4).

Giả sử rằng f thỏa mãn các điều kiện (5.3.20)-(5.3.21) và tồn tại hằng số k sao cho

$$|p(\xi, \eta)| \leq k \quad \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times (0,1).$$

Giả sử thêm nghiệm chính xác $u_0 = v_0 + w_0 \in L^2(\mathbb{R} \times (0,1))$ của (5.3.1) thỏa mãn

$$e^{3|\zeta|} \left| \hat{f}_{(\eta, v_0, w_0)}(\zeta) \right| \in L^2(\mathbb{R} \times (0,1)).$$

Khi đó tồn tại nghiệm chỉnh hóa w_ε và $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$ của (5.3.1) sao cho

$$\|w_\varepsilon - w_0\|_2 < C \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1/2}$$

và

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_2 < E \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1/2}$$

trong đó C và E là hằng số dương độc lập với ε .

Chứng minh

Từ (5.3.33), ta có

$$\begin{aligned} \widehat{w}_{0(y)}(\zeta) &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{-|y-\eta||\zeta|} \right] \widehat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) d\eta \\ &= \frac{1}{2} \int_y^1 \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{(y-\eta)|\zeta|} \right] \widehat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) d\eta. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } T(w^{(\alpha)}(x, y)) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{y-\alpha}^y \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{(y-\eta)|\zeta|} \right] \widehat{f}_{(\eta, w^{(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) e^{i\zeta x} d\zeta d\eta.$$

Ta khẳng định với mỗi $\alpha > 0$, $y \in (0, 1)$, $m \geq 1$ và

$w^{(\alpha)}, w^{1(\alpha)} \in C([0, 1]; L^2(\mathbb{R}))$, ta có

$$\|T^m(w^{(\alpha)}(., y)) - T^m(w^{1(\alpha)}(., y))\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq (k^2 e^{2\alpha})^m \frac{(1-y)^m}{m!} \|w^{(\alpha)} - w^{1(\alpha)}\|^2 \quad (5.3.35)$$

trong đó $\|\cdot\|$ là chuẩn sup trong $C([0, 1]; L^2(\mathbb{R}))$.

Ta chứng minh bất đẳng thức (5.3.35) bằng quy nạp.

Khi $m = 1$, chú ý rằng

$$\widehat{Tw^{(\alpha)}}(\zeta, y) = \frac{1}{2} \chi_{[-\alpha, \alpha]}(\zeta) \int_y^1 \frac{1}{|\zeta|} \left[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{(y-\eta)|\zeta|} \right] \widehat{f}_{(\eta, w^{(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) d\eta,$$

ta có

$$\begin{aligned} &\|Tw^{(\alpha)}(., y) - Tw^{1(\alpha)}(., y)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= \|\widehat{Tw^{(\alpha)}}(., y) - \widehat{Tw^{1(\alpha)}}(., y)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\| \int_y^1 \chi_{[-\alpha, \alpha]}(\zeta) \frac{e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{(y-\eta)|\zeta|}}{|\zeta|} \left(\widehat{f}_{(\eta, w^{(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) - \widehat{f}_{(\eta, w^{1(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) \right) d\eta \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_y^1 \chi_{[-\alpha, \alpha]}(\zeta) e^{(\eta-y)|\zeta|} \left| \hat{f}_{(\eta, w^{(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) - \hat{f}_{(\eta, w^{1(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) \right| d\eta \right|^2 d\zeta \\
 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_y^1 e^{(\eta-y)\alpha} \left| \hat{f}_{(\eta, w^{(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) - \hat{f}_{(\eta, w^{1(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) \right| d\eta \right|^2 d\zeta \\
 &\leq e^{2\alpha} (1-y) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_y^1 \left| \hat{f}_{(\eta, w^{(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) - \hat{f}_{(\eta, w^{1(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) \right|^2 d\eta d\zeta \\
 &\leq k^2 e^{2\alpha} (1-y) \int_y^{1+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| w^{(\alpha)}(x, \eta) - w^{1(\alpha)}(x, \eta) \right|^2 dx d\eta \\
 &\leq e^{2\alpha} (1-y) k^2 \int_y^1 \left\| w^{(\alpha)}(\cdot, \eta) - w^{1(\alpha)}(\cdot, \eta) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\eta \\
 &\leq e^{2\alpha} (1-y) k^2 \left\| w^{(\alpha)} - w^{1(\alpha)} \right\|^2.
 \end{aligned}$$

Giả sử (5.3.35) thỏa với $m = j$. Ta chứng minh (5.3.35) đúng khi $m = j+1$.

Ta có

$$\begin{aligned}
 &\left\| T^{j+1} \left(w^{(\alpha)}(\cdot, y) \right) - T^{j+1} \left(w^{1(\alpha)}(\cdot, y) \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
 &= \left\| \hat{T} \left(T^j \left(w^{(\alpha)}(\cdot, y) \right) \right) - \hat{T} \left(T^j \left(w^{1(\alpha)}(\cdot, y) \right) \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
 &\leq k^2 e^{2\alpha} (1-y) \int_y^1 \left\| T^j \left(w^{(\alpha)}(\cdot, \eta) \right) - T^j \left(w^{1(\alpha)}(\cdot, \eta) \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\eta \\
 &\leq k^2 e^{2\alpha} (1-y) \int_y^1 \left(k^2 e^{2\alpha} \right)^j \frac{(1-\eta)^j}{j!} \left\| w^{(\alpha)} - w^{1(\alpha)} \right\|^2 d\eta \\
 &\leq \left(k^2 e^{2\alpha} \right)^{j+1} \frac{(1-y)^{j+1}}{(j+1)!} \left\| w^{(\alpha)} - w^{1(\alpha)} \right\|^2.
 \end{aligned}$$

Vậy ta có (5.3.35), suy ra

$$\left\| T^m \left(w^{(\alpha)} \right) - T^m \left(w^{1(\alpha)} \right) \right\|^2 \leq \left(k^2 e^{2\alpha} \right)^m \frac{1}{m!} \left\| w^{(\alpha)} - w^{1(\alpha)} \right\|^2.$$

Từ $\lim_{m \rightarrow \infty} (k^2 e^{2\alpha})^m \frac{1}{m!} = 0$, tồn tại số nguyên dương m_0 sao cho

$$(k^2 e^{2\alpha})^{m_0} \frac{1}{m_0!} < 1.$$

Vậy T^{m_0} là ánh xạ co từ $C([0,1];L^2(\mathbb{R}))$ vào $C([0,1];L^2(\mathbb{R}))$. Suy ra phương trình $T^{m_0}(w^{(\alpha)}) = w^{(\alpha)}$ có nghiệm duy nhất $w^{(\alpha)} \in C([0,1];L^2(\mathbb{R}))$.

Ta chứng minh $T(w^{(\alpha)}) = w^{(\alpha)}$. Thật vậy, ta có $T(T^{m_0}(w^{(\alpha)})) = T(w^{(\alpha)})$. Do đó $T^{m_0}(T(w^{(\alpha)})) = T(w^{(\alpha)})$. Do tính duy nhất của điểm bất động của T^{m_0} , ta có $T(w^{(\alpha)}) = w^{(\alpha)}$, nghĩa là, phương trình $T(w^{(\alpha)}) = w^{(\alpha)}$ có nghiệm duy nhất $w^{(\alpha)} \in C([0,1];L^2(\mathbb{R}))$.

Ta có

$$\begin{aligned} & 4 \left\| w_{0(y)} - w^{(\alpha)}(\cdot, y) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \left| \int_y^1 \frac{[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{(y-\eta)|\zeta|}]}{|\zeta|} \left[\hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) - \hat{f}_{(\eta, w^{(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) \right] d\eta \right|^2 d\zeta \\ & \quad + \int_{|\zeta| > \alpha} \left| \int_y^1 \frac{[e^{(\eta-y)|\zeta|} - e^{(y-\eta)|\zeta|}]}{|\zeta|} \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) d\eta \right|^2 d\zeta \\ &\leq 4 \int_{-\alpha}^{\alpha} \left| \int_y^1 e^{(\eta-y)|\zeta|} \left| \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) - \hat{f}_{(\eta, w^{(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) \right| d\eta \right|^2 d\zeta \\ & \quad + 4 \int_{|\zeta| > \alpha} \left| \int_y^1 e^{(\eta-y)|\zeta|} \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) d\eta \right|^2 d\zeta \\ &\leq 4 \int_{-\alpha}^{\alpha} \left| \int_y^1 e^{(\eta-y)\alpha} \left| \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) - \hat{f}_{(\eta, w^{(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) \right| d\eta \right|^2 d\zeta \\ & \quad + 4e^{-2y\alpha} \int_{|\zeta| > \alpha} \left| \int_y^1 e^{(\eta-y)|\zeta| + y\alpha} \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) d\eta \right|^2 d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 4e^{-2y\alpha} \left\{ \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_y^1 e^{2\eta\alpha} \left| \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) - \hat{f}_{(\eta, w^{(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\zeta) \right|^2 d\eta d\zeta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{|\zeta|>\alpha} \left| \int_y^1 e^{(\eta-y)|\zeta|+y\alpha} \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) d\eta \right|^2 d\zeta \right\} \\
 &\leq 4e^{-2y\alpha} \left\{ \int_y^1 e^{2\eta\alpha} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f_{(\eta, w_0, v_0)}(\xi) - f_{(\eta, w^{(\alpha)}, v_\varepsilon)}(\xi) \right|^2 d\xi \right) d\eta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{|\zeta|>\alpha} \left| \int_y^1 e^{|\zeta|+\alpha} \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) d\eta \right|^2 d\zeta \right\} \\
 &\leq 4e^{-2y\alpha} \left\{ \int_y^1 e^{2\eta\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 \left| v_0(\xi, \eta) - v_\varepsilon(\xi, \eta) + w_0(\xi, \eta) - w^{(\alpha)}(\xi, \eta) \right|^2 d\xi d\eta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{|\zeta|>\alpha} e^{2(|\zeta|+\alpha)} \int_y^1 \left| \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) \right|^2 d\eta d\zeta \right\} \\
 &\leq 4e^{-2y\alpha} \left\{ 2k^2 \int_y^1 e^{2\eta\alpha} \left\| w_0(\cdot, \eta) - w^{(\alpha)}(\cdot, \eta) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\eta \right. \\
 &\quad \left. + 2 \int_0^{1+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\alpha} k^2 \left| v_0(\xi, \eta) - v_\varepsilon(\xi, \eta) \right|^2 d\xi d\eta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{|\zeta|>\alpha} e^{2(|\zeta|+\alpha)} \int_y^1 \left| \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) \right|^2 d\eta d\zeta \right\} \\
 &\leq 4e^{-2y\alpha} \left\{ 2k^2 \int_y^1 e^{2\eta\alpha} \left\| w_0(\cdot, \eta) - w^{(\alpha)}(\cdot, \eta) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\eta \right. \\
 &\quad \left. + 2k^2 e^{2\alpha} \left\| v_0 - v_\varepsilon \right\|_2^2 \right. \\
 &\quad \left. + \int_{|\zeta|>\alpha} e^{2(|\zeta|+\alpha)} \int_y^1 \left| \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) \right|^2 d\eta d\zeta \right\}
 \end{aligned}$$

Đặt

$$M_1 = 2k^2 e^{2\alpha} \|v_0 - v_\varepsilon\|_2^2$$

và

$$M_2 = \int_{|\zeta| > \alpha} e^{2(|\zeta| + \alpha)} \int_y^1 \left| \hat{f}_{(\eta, w_0, v_0)}(\zeta) \right|^2 d\eta d\zeta.$$

Suy ra

$$e^{2y\alpha} \|w_{o(y)} - w^{(\alpha)}(\cdot, y)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq 2k^2 \int_y^1 e^{2\eta\alpha} \|w_o(\cdot, \eta) - w^{(\alpha)}(\cdot, \eta)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 d\eta + M_1 + M_2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$e^{2y\alpha} \|w_o(\cdot, y) - w^{(\alpha)}(\cdot, y)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq (M_1 + M_2) e^{2k^2(1-y)},$$

suy ra

$$\|w_o(\cdot, y) - w^{(\alpha)}(\cdot, y)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq e^{-2\alpha y} (M_1 + M_2) e^{2k^2(1-y)}. \quad (5.3.36)$$

Đồng thời sử dụng mệnh đề 5.3.1, ta có

$$\begin{aligned} e^{-2\alpha y} M_1 &= 2e^{2(1-y)\alpha} k^2 \|v_0 - v_\varepsilon\|_2^2 \\ &< 2D^2 e^{2(1-y)\alpha} k^2 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-2}. \end{aligned} \quad (5.3.37)$$

Ngoài ra, ta có

$$\begin{aligned} e^{-2\alpha y} M_2 &= e^{-2\alpha y} \int_{|\zeta| > \alpha} e^{2(|\zeta| + \alpha)} \int_y^1 \left| \hat{f}_{(\eta, v_0, w_0)}(\zeta) \right|^2 d\eta d\zeta \\ &\leq e^{-2\alpha y} \int_{|\zeta| > \alpha} \int_0^1 \frac{e^{6|\zeta|}}{e^{2\alpha}} \left| \hat{f}_{(\eta, v_0, w_0)}(\zeta) \right|^2 d\eta d\zeta \\ &\leq e^{-2\alpha(y+1)} \left\| e^{3|\zeta|} \hat{f}_{(\eta, v_0, w_0)}(\zeta) \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (5.3.38)$$

Kết hợp (5.3.36)-(5.3.38) và chọn $\alpha = \frac{1}{2(1-y)} \ln \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)$, ta nhận được

$$\begin{aligned} \left\| w_0(\cdot, y) - w^{(\alpha)}(\cdot, y) \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &< e^{2k^2} \left[2k^2 D^2 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1} + \left\| e^{3|\zeta|} \hat{f}_{(\eta, v_0, w_0)}(\zeta) \right\|_2^2 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1} \right] \\ &< C^2 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Cho nên

$$\left\| w_0 - w^{(\alpha)} \right\|_2 < C \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1/2}.$$

Đặt $w_\varepsilon = w^{(\alpha)}$ và $u_\varepsilon = v_\varepsilon + w_\varepsilon$, ta có

$$\begin{aligned} \left\| u_0 - u_\varepsilon \right\|_2 &= \left\| w_0 + v_0 - v_\varepsilon - w_\varepsilon \right\|_2 \\ &\leq \left\| w_0 - w^{(\alpha)} \right\|_2 + \left\| v_0 - v_\varepsilon \right\|_2 \\ &\leq C \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1/2} + D \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1} \\ &\leq (C + D) \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Định lý đã được chứng minh. ■

Chương 6

BÀI TOÁN NHIỆT NGƯỢC THỜI GIAN PHI TUYẾN TRÊN MIỀN BỊ CHẶN

Chương này đã công bố trong [3] (của danh mục công trình công bố của tác giả).

6.1 MỞ ĐẦU

Như đã biết, nếu cho phân bố nhiệt độ tại thời điểm đầu trong một vật thể dẫn nhiệt được cho thì phân bố nhiệt độ tại thời điểm sau có thể được xác định và đây là bài toán chính. Trong Địa Vật Lý, chúng ta thường gặp phải bài toán xác định phân bố nhiệt độ trong trái đất hoặc một phần trái đất tại thời điểm $t_0 > 0$ từ nhiệt độ đo được tại thời điểm $t_1 > t_0$. Đây là bài toán nhiệt ngược thời gian. Bài toán này là không chính theo nghĩa không luôn có nghiệm hoặc ngay cả khi bài toán có nghiệm thì nghiệm cũng không phụ thuộc liên tục theo nhiệt độ cuối (tại $t = t_1$). Như đã nói ở trên, bài toán được phát triển trong Địa Vật Lý. Đồng thời bài toán cũng phát triển trong các tình huống khác như: phun núi lửa, nổ hạt nhân, ..., trong đó nhiệt độ tại thời điểm đầu t_0 (nghĩa là nhiệt độ tại thời điểm phun hoặc nổ) quá cao cho nên chỉ thuận lợi khi đo nhiệt độ tại thời điểm sau đó $t_1 > t_0$. Chúng ta xem một thí dụ về bài toán nhiệt ngược thời gian, bài toán điều khiển nhiệt độ, bài toán xác định nhiệt độ u_1 của một phòng tại thời điểm $t_1 > 0$ để có nhiệt độ u_0 tại thời điểm $t_0 < t_1$.

Trong phần tiếp theo, chúng ta xét bài toán nhiệt ngược thời gian với nguồn nhiệt phụ thuộc phi tuyến vào nhiệt độ. Cụ thể chúng ta xét bài toán ngược thời gian cho phương trình phi tuyến sau

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + \lambda f(x,u(x,t)) = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < t < 1 \quad (6.1.1)$$

với điều kiện biên

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (6.1.2)$$

trong đó $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ với $f(0,0) = 0$.

Cho

$$u(x,1) = g(x) \quad (6.1.3)$$

ta xét bài toán tìm

$$u(x,0) = \zeta(x). \quad (6.1.4)$$

Trong (6.1.1), hàm f là hàm phi tuyến. Trường hợp $f \equiv 0$ đã được xử lý một cách tổng quát (trong [8, 58, 78]). Lattes – Lions [58] đã áp dụng phương pháp tựa khả nghịch để giải bài toán ngược thời gian cho phương trình parabolic phi tuyến, nhưng không khảo sát về sai số của sự hội tụ, các phương pháp khác đã được đề cập trong phần lời nói đầu của luận án. Trong chương này, ta sẽ xét bài toán với λ (trong (6.1.1)) tùy ý. Với λ nhỏ, nghiệm tương ứng vẫn giữ lại những đặc điểm của trường hợp tuyến tính, do đó sai số của sự hội tụ sẽ được khảo sát trong trường hợp này.

Trong phần còn lại, chúng tôi sẽ trình bày như sau :

Mục 6.2 - 6.3, xử lý tổng quát về tính duy nhất nghiệm của bài toán ngược thời gian, sự hội tụ về nghiệm chính xác của dãy nghiệm chỉnh hóa.

Mục 6.4 - 6.5, cho xấp xỉ hữu hạn chiều và đánh giá sai số trong trường hợp đặc biệt.

6.2 TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM

Cho E là một số dương cố định.

Chúng ta tìm nghiệm của (6.1.1)-(6.1.3) trong tập

$$B = \left\{ \zeta \in H_0^1(0,1) : \|\zeta\|_2^2 + \|\zeta_x\|_2^2 \leq E^2 \right\} \quad (6.2.1)$$

trong đó $\|\cdot\|_2$ là ký hiệu chuẩn trong $L^2(0,1)$. Ta có

Định lý 6.2.1

Nếu f có tính chất $\frac{\partial f}{\partial y}$ bị chặn trên $[0,1] \times \mathbb{R}$ thì bài toán (6.1.1)-(6.1.3) có

nhều nhất một nghiệm trong B .

Chứng minh

Gọi $\zeta_1, \zeta_2 \in B$ là 2 nghiệm của (6.1.1)-(6.1.3).

Đặt

$$w(x, t) = u(x, t; \zeta_1) - u(x, t; \zeta_2).$$

Khi đó w thỏa

$$w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) = -\lambda [f(x, u(x, t; \zeta_1)) - f(x, u(x, t; \zeta_2))]$$

nên theo định lý Lagrange, ta có

$$w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) = -\lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x, \bar{u}(x, t))w(x, t). \tag{6.2.2}$$

Vì $\frac{\partial f}{\partial y}$ bị chặn trên $[0,1] \times \mathbb{R}$, nên tồn tại $M > 0$ sao cho

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq M \text{ với mọi } (x, y) \in [0,1] \times \mathbb{R}. \tag{6.2.3}$$

$$\text{Vậy } (w_t - w_{xx})^2 \leq \lambda^2 M^2 w^2. \tag{6.2.4}$$

Mặt khác $w(0, t) = w(1, t) = 0$ và $w(x, 1) = 0$, nên theo định lý Lees-Protter [62], ta có

$$w(x, t) = 0 \text{ với mọi } x \in [0,1] \text{ và } t \in [0,1].$$

Suy ra

$$u(x, t, \zeta_1) = u(x, t, \zeta_2) \text{ với mọi } x \in [0,1] \text{ và } t \in [0,1].$$

Vậy $\zeta_1 = \zeta_2$.

Định lý đã được chứng minh. ■

Lưu ý, ta có thể dùng lập luận như ở trong chương 7 để có kết quả như vừa chứng minh.

6.3 PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN VỚI DỮ LIỆU XẤP XỈ

Dữ liệu g tổng quát là kết quả của đo thực nghiệm và vì thế thường có sai số. Với dữ liệu đo này bài toán tương ứng có thể không có nghiệm và với sai số nhỏ theo g dẫn tới sai số lớn theo nghiệm. Tính không ổn định được chỉ ra ngay trong trường hợp phương trình tuyến tính (xem [7, 38]). Vì thế bài toán là không chính. Đặc điểm của tính không chính này được xem là khác nghiệt trong trường hợp phi tuyến.

Đặt

$$G(x, t, \xi, \tau) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 \pi^2 (t-\tau)} \sin n\pi x \sin n\pi \xi .$$

Tích phân đẳng thức

$$\operatorname{div}(uG_\xi - Gu_\xi, uG) = -\lambda Gf(\xi, u(\xi, \tau))$$

trên miền $(0,1) \times (0, t - \varepsilon)$ và cho $\varepsilon \rightarrow 0$, ta có

$$u(x, t) = \int_0^1 G(x, t, \xi, 0) \zeta(\xi) d\xi - \lambda \int_0^t \int_0^1 G(x, t, \xi, \tau) f(\xi, u(\xi, \tau)) d\xi d\tau$$

Đặt $S(t) : L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$ là họ toán tử tuyến tính phụ thuộc t xác định bởi

$$S(t)\zeta(x) \equiv \int_0^1 G(x, t, \xi, 0) \zeta(\xi) d\xi ,$$

ta có

$$\begin{aligned} S(t)\zeta(x) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \int_0^1 \zeta(\xi) \sin n\pi \xi d\xi \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \sin n\pi x \langle \zeta, \sin n\pi \xi \rangle \end{aligned}$$

trong đó \langle, \rangle là tích vô hướng trong $L^2(0,1)$.

Vậy

$$\begin{aligned} \|S(t)\zeta\|_2^2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 4e^{-2n^2\pi^2 t} \langle \zeta, \sin n\pi\xi \rangle^2 \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \langle \zeta, \sin n\pi\xi \rangle^2 \\ &\leq \|\zeta\|_2^2. \end{aligned}$$

Cho nên

$$\|S(t)\zeta\|_2 \leq \|\zeta\|_2 \text{ với mọi } t \in [0,1] \text{ và } \zeta \in L^2(0,1).$$

Vậy nghiệm của bài toán (6.1.1)-(6.1.3) là

$$u(., t) = S(t)\zeta(.) - \lambda \int_0^t S(t-\tau)f(., u(., \tau))d\tau. \quad (6.3.1)$$

Ghi chú : Chú ý rằng nếu ta gọi $S(t)$ là nửa nhóm sinh bởi Laplacian, xem [7, 23, 48, 57], ta cũng có công thức (6.3.1) với tính chất

$$\|S(t)\zeta\|_2 \leq \|\zeta\|_2.$$

Chú ý rằng nếu giả sử $\frac{\partial f}{\partial y}$ bị chặn trong $[0,1] \times \mathbb{R}$, sử dụng phương pháp lặp của phương trình tích phân Volterra và dùng nguyên lý ánh xạ co thì phương trình (6.3.1) có nghiệm $u \in C([0,1] \times \mathbb{R})$ với mọi $\zeta \in C([0,1] \times \mathbb{R})$.

Định lý 6.3.1

Giả sử f có tính chất $\frac{\partial f}{\partial y}$ bị chặn trong $[0,1] \times \mathbb{R}$.

Gọi g là dữ liệu chính xác của bài toán (6.1.1)-(6.1.3) và g_ε là dữ liệu đo đạc, sao cho $g_\varepsilon \rightarrow g$ trong $L^2(0,1)$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$.

Gọi ζ_{ex} là nghiệm chính xác của bài toán (6.1.1)-(6.1.3).

Khi đó tồn tại nghiệm chỉnh hóa ζ_ε của (6.1.1)-(6.1.3) tương ứng với g_ε và $\zeta_\varepsilon \rightarrow \zeta_{\text{ex}}$ trong $L^2(0,1)$.

Chứng minh

Đặt K là ánh xạ từ B vào $L^2(0,1)$, xác định bởi

$$K(\zeta)(\cdot) \equiv u(\cdot, 1; \zeta). \tag{6.3.2}$$

Để chứng minh định lý ta chia thành hai bước. Trong bước 1, ta chứng minh K là đơn ánh và liên tục từ B vào $L^2(0,1)$. Trong bước 2, ta chứng minh $\zeta_\varepsilon \rightarrow \zeta_{ex}$ trong $L^2(0,1)$.

Bước 1 : Ta chứng minh K là đơn ánh và liên tục từ B vào $L^2(0,1)$. (6.3.3)

Đặt

$$\varphi(t) = \|u(\cdot, t; \zeta_1) - u(\cdot, t; \zeta_2)\|_2 \tag{6.3.4}$$

thì với mọi $t \in [0,1]$, ta có :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \left\| S(t)(\zeta_1 - \zeta_2)(\cdot) - \lambda \int_0^t S(t-\tau) [f(\cdot, u(\cdot, \tau; \zeta_1)) - f(\cdot, u(\cdot, \tau; \zeta_2))] d\tau \right\|_2 \\ &\leq \|\zeta_1 - \zeta_2\|_2 + |\lambda| \sqrt{\int_0^t \|f(\cdot, u(\cdot, \tau; \zeta_1)) - f(\cdot, u(\cdot, \tau; \zeta_2))\|_2^2 d\tau} \\ &\leq \|\zeta_1 - \zeta_2\|_2 + |\lambda| \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(\cdot, \bar{u}(\cdot, \tau))(u(\cdot, \tau; \zeta_1) - u(\cdot, \tau; \zeta_2)) \right\|_2^2 d\tau} \\ &\leq \|\zeta_1 - \zeta_2\|_2 + |\lambda| M \sqrt{\int_0^t (\varphi(\tau))^2 d\tau}. \end{aligned} \tag{6.3.5}$$

Suy ra

$$(\varphi(t))^2 \leq 2\|\zeta_1 - \zeta_2\|_2^2 + 2|\lambda|^2 M^2 \int_0^t (\varphi(\tau))^2 d\tau.$$

Từ bất đẳng thức Gronwall, suy ra

$$\varphi(t) \leq \sqrt{2} \|\zeta_1 - \zeta_2\|_2 e^{|\lambda|^2 M^2 t} \text{ với mọi } t \in [0,1]. \tag{6.3.6}$$

Thay $t=1$, ta nhận được

$$\|K(\zeta_1) - K(\zeta_2)\|_2 \leq \sqrt{2} e^{\lambda^2 M^2} \|\zeta_1 - \zeta_2\|_2. \tag{6.3.7}$$

Vậy K là đơn ánh và liên tục từ B vào $L^2(0,1)$.

Bước 2 : ta chứng minh $\zeta_\varepsilon \rightarrow \zeta_{\text{ex}}$ trong $L^2(0,1)$.

Gọi Φ là ánh xạ từ B vào $[0, +\infty)$ xác định bởi

$$\Phi(\zeta) \equiv \|K\zeta - g_\varepsilon\|_2. \quad (6.3.8)$$

Do K liên tục nên Φ liên tục trên B , đồng thời B compact, suy ra tồn tại $\zeta_\varepsilon \in B$ sao cho

$$\min_B \Phi = \Phi(\zeta_\varepsilon). \quad (6.3.9)$$

Vậy

$$\|K\zeta_\varepsilon - g_\varepsilon\|_2 \leq \|K\zeta_{\text{ex}} - g_\varepsilon\|_2 = \|g - g_\varepsilon\|_2. \quad (6.3.10)$$

Vì thế

$$\|K\zeta_\varepsilon - K\zeta_{\text{ex}}\|_2 \leq \|K\zeta_\varepsilon - g_\varepsilon\|_2 + \|g_\varepsilon - K\zeta_{\text{ex}}\|_2 \leq 2\|g - g_\varepsilon\|_2. \quad (6.3.11)$$

Vậy nếu $g_\varepsilon \rightarrow g$ trong $L^2(0,1)$ khi $\varepsilon \rightarrow 0$, thì

$$K\zeta_\varepsilon \rightarrow K\zeta_{\text{ex}}. \quad (6.3.12)$$

Đồng thời K^{-1} liên tục trên $K(B)$, ta có

$$\zeta_\varepsilon \rightarrow \zeta_{\text{ex}} \text{ trong } L^2(0,1). \quad (6.3.13)$$

Vậy định lý đã được chứng minh. ■

6.4 XẤP XỈ HỮU HẠN CHIỀU

Trong phần này chúng tôi tìm nghiệm trong tập B định nghĩa như trong (6.2.1), chúng tôi xây dựng một dãy xấp xỉ hữu hạn chiều hội tụ về nghiệm chính xác khi $g_\varepsilon \rightarrow g$. Bài toán đánh giá tốc độ hội tụ được thảo luận trong phần sau.

Có thể xem tập hợp B định nghĩa trong (6.2.1) dưới dạng

$$B = \left\{ \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x \mid \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 \pi^2 + 1) C_n^2 \leq 2E^2 \right\}.$$

Ta sẽ tìm nghiệm trong B.

Định lý 6.4.1

Gọi $\zeta_{ex} \in B$ là nghiệm chính xác của phương trình $K\zeta = g$ ứng với dữ liệu chính xác g .

Gọi g_ε là dữ liệu đo đạc thỏa

$$\|g_\varepsilon - g\|_2 \leq \varepsilon.$$

Giả sử f có tính chất $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq M$ với mọi $(x, y) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$.

Đặt $k = k(\varepsilon)$ là một số nguyên dương sao cho

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2e^{2\lambda^2 M^2} E^2}.$$

Gọi F_k là không gian tuyến tính sinh bởi

$$\{\sin n\pi x / n = 1, \dots, k\} \text{ và } B_k = B \cap F_k.$$

Gọi $\zeta_\varepsilon \in B_k$ sao cho $\min_{B_k} \|K\zeta - g_\varepsilon\|_2 = \|K\zeta_\varepsilon - g_\varepsilon\|_2$.

Khi đó

$$\|K\zeta_\varepsilon - K\zeta_{ex}\|_2 \leq 3\varepsilon.$$

Chứng minh

Từ $\zeta_{ex} \in B$, đặt

$$\zeta_{ex} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x.$$

Chọn $\zeta_k = \sum_{n=1}^k C_n \sin n\pi x \in B_k$.

Ta có

$$\begin{aligned} \|\zeta_{\text{ex}} - \zeta_k\|_2^2 &= \left\| \sum_{n=k+1}^{+\infty} C_n \sin n\pi x \right\|_2^2 = \sum_{k+1}^{+\infty} C_n^2 \int_0^1 \sin^2(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k+1}^{+\infty} C_n^2 \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k+1}^{+\infty} (n^2 \pi^2 + 1) C_n^2 \right) \left(\sum_{k+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right) \leq \frac{\varepsilon^2}{2e^{2\lambda^2 M^2}}. \end{aligned}$$

Do đó tồn tại $\zeta_k \in B_k$ sao cho

$$\|\zeta_{\text{ex}} - \zeta_k\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}e^{\lambda^2 M^2}}.$$

Vậy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}\zeta_{\text{ex}} - \mathbf{K}\zeta_\varepsilon\|_2 &\leq \|\mathbf{K}\zeta_{\text{ex}} - \mathbf{g}_\varepsilon\|_2 + \|\mathbf{g}_\varepsilon - \mathbf{K}\zeta_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon + \|\mathbf{g}_\varepsilon - \mathbf{K}\zeta_k\|_2 \\ &\leq \varepsilon + \|\mathbf{g}_\varepsilon - \mathbf{K}\zeta_{\text{ex}}\|_2 + \|\mathbf{K}\zeta_{\text{ex}} - \mathbf{K}\zeta_k\|_2 \leq 2\varepsilon + \|\mathbf{K}\zeta_{\text{ex}} - \mathbf{K}\zeta_k\|_2. \end{aligned}$$

Từ (6.3.7), ta có $\|\mathbf{K}\zeta_{\text{ex}} - \mathbf{K}\zeta_\varepsilon\|_2 \leq 3\varepsilon$.

Định lý đã được chứng minh. ■

Vì \mathbf{K}^{-1} liên tục trên $\mathbf{K}(B)$, ta có hệ quả sau :

Hệ quả 6.4.1

Với các giả thiết trong định lý 6.4.1, trong đó

$$\mathbf{g}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{g} \text{ trong } L^2(0,1) \text{ khi } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ta có

$$\zeta_\varepsilon \rightarrow \zeta_{\text{ex}} \text{ trong } L^2(0,1) \text{ khi } \varepsilon \rightarrow 0.$$

6.5 ƯỚC LƯỢNG SAI SỐ

Với điều kiện trên nghiệm chính xác ζ_{ex} và $|\lambda|$ đủ nhỏ, chúng tôi ước lượng sai số giữa nghiệm chỉnh hóa ζ_ε và nghiệm chính xác ζ_{ex} dựa trên sai số giữa \mathbf{g}_ε và \mathbf{g} .

Định lý 6.5.1

Gọi ζ_{ex} là nghiệm chính xác của phương trình $K\zeta = g$ ứng với dữ liệu chính xác g .

Giả sử $\zeta_{\text{ex}} \in B \cap V$ trong đó V là không gian hữu hạn chiều của $H_0^1(0,1)$.

Đặt

$$\beta = \min \left\{ \|S(1)\zeta\|_2 / \zeta \in V, \|\zeta\|_2 = 1 \right\}, \text{ hiển nhiên } \beta > 0. \quad (6.5.1)$$

Giả sử

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq M \text{ với mọi } x \in (0,1), y \in \mathbb{R} \quad (6.5.2)$$

và
$$\sqrt{2}|\lambda|Me^{\lambda^2 M^2} < \beta. \quad (6.5.3)$$

Gọi g_ε là dữ liệu đo đạc sao cho

$$\|g_\varepsilon - g\|_2 \leq \varepsilon. \quad (6.5.4)$$

Khi đó tồn tại nghiệm chỉnh hóa ζ_ε sao cho

$$\|\zeta_\varepsilon - \zeta_{\text{ex}}\|_2 \leq 2\varepsilon \left(\beta - \sqrt{2}|\lambda|Me^{\lambda^2 M^2} \right)^{-1}. \quad (6.5.5)$$

Chứng minh

Gọi ζ_ε là điểm sao cho

$$\min_{V \cap B} \|K\zeta - g_\varepsilon\|_2 = \|K\zeta_\varepsilon - g_\varepsilon\|_2. \quad (6.5.6)$$

Ta có

$$\|K\zeta_\varepsilon - K\zeta_{\text{ex}}\|_2 \leq \|K\zeta_\varepsilon - g_\varepsilon\|_2 + \|g_\varepsilon - g\|_2 \leq 2\varepsilon. \quad (6.5.7)$$

Đồng thời

$$\begin{aligned} \|K\zeta_\varepsilon - K\zeta_{\text{ex}}\|_2 &\geq \|S(1)(\zeta_\varepsilon - \zeta_{\text{ex}})\|_2 - |\lambda| \left\| \int_0^1 S(1-\tau) [f(., u(., \tau; \zeta_\varepsilon)) - f(., u(., \tau; \zeta_{\text{ex}}))] d\tau \right\|_2 \\ &\geq \|S(1)(\zeta_\varepsilon - \zeta_{\text{ex}})\|_2 - |\lambda| \sqrt{\int_0^1 \|S(1-\tau) [f(., u(., \tau; \zeta_\varepsilon)) - f(., u(., \tau; \zeta_{\text{ex}}))] \|_2^2 d\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \beta \|\zeta_\varepsilon - \zeta_{\text{ex}}\|_2 - |\lambda| \sqrt{\int_0^1 \|f(\cdot, u(\cdot, \tau; \zeta_\varepsilon)) - f(\cdot, u(\cdot, \tau; \zeta_{\text{ex}}))\|_2^2 d\tau} \\
 &\geq \beta \|\zeta_\varepsilon - \zeta_{\text{ex}}\|_2 - |\lambda| M \sqrt{\int_0^1 \|u(\cdot, \tau; \zeta_\varepsilon) - u(\cdot, \tau; \zeta_{\text{ex}})\|_2^2 d\tau} \\
 &\geq \beta \|\zeta_\varepsilon - \zeta_{\text{ex}}\|_2 - |\lambda| M \sqrt{2} e^{\lambda^2 M^2} \|\zeta_\varepsilon - \zeta_{\text{ex}}\|_2
 \end{aligned} \tag{6.5.8}$$

Từ (6.5.8) ta có

$$\|\mathbf{K}\zeta_\varepsilon - \mathbf{K}\zeta_{\text{ex}}\|_2 \geq (\beta - |\lambda| M \sqrt{2} e^{\lambda^2 M^2}) \|\zeta_\varepsilon - \zeta_{\text{ex}}\|_2. \tag{6.5.9}$$

Từ (6.5.3), (6.5.7), (6.5.9) ta có

$$\|\zeta_\varepsilon - \zeta_{\text{ex}}\|_2 \leq 2\varepsilon (\beta - |\lambda| M \sqrt{2} e^{\lambda^2 M^2})^{-1}.$$

Định lý đã được chứng minh. ■

Chương 7

BÀI TOÁN NHIỆT NGƯỢC THỜI GIAN PHI TUYẾN TRÊN MIỀN KHÔNG BỊ CHẶN

Chương này đã công bố trong [11](của danh mục công trình công bố của tác giả).

7.1 MỞ ĐẦU

Cho $T > 0$, ta xét bài toán tìm nhiệt độ $u(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ sao cho

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t, u(x, t)), & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T), \\ u(x, T) = \varphi(x), \end{cases} \quad (7.1.1)$$

trong đó $\varphi(x), f(x, t, z)$ cho trước. Bài toán được gọi là bài toán nhiệt ngược thời gian phi tuyến. Sử dụng biến đổi Fourier ta có thể viết hệ trên dưới dạng sau

$$\hat{u}(p, t) = e^{Tp^2 - tp^2} \hat{\varphi}(p) - \int_t^T e^{-(t-s)p^2} \hat{f}(p, s, u) ds \quad (7.1.2)$$

trong đó $\hat{g}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, t) e^{-i\xi p} d\xi$.

Như đã biết, bài toán là không chỉnh, nghĩa là nghiệm thì không luôn tồn tại và trong trường hợp tồn tại, thì nghiệm không phụ thuộc liên tục theo dữ liệu. Do đó, cần đưa ra một phép chỉnh hóa. Trong bốn thập kỷ qua, nhiều tác giả nghiên cứu trường hợp tuyến tính của bài toán. Lattes Lions [58], Miller [66] đã cho phương pháp chỉnh hóa gọi là phương pháp tựa khả nghịch bằng cách nhiễu phương trình chính. Clark và Oppenheimer [24] đã cho một phép chỉnh hóa khác bằng cách nhiễu giá trị cuối gọi là phương pháp tựa biên. Ngoài ra, nhiều bài báo tập trung vào sự ổn định của bài toán tuyến tính [3].

Mặc dù có rất nhiều sự nghiên cứu trong trường hợp tuyến tính của bài toán ngược thời gian, nhưng về bài toán phi tuyến thì không nhiều. Một kết quả cho sự ổn định đối với phương trình Ginzburg-Landau được cho trong Ames [2].

Trong chương 6, chúng tôi đã khảo sát bài toán trên miền không gian là khoảng mở $(0,1)$.

Trong chương này, chúng tôi xấp xỉ Bài toán (7.1.2) bởi bài toán sau

$$\widehat{u^\varepsilon}(p, t) = \frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon + e^{-Tp^2}} \widehat{\varphi}(p) - \int_t^T \frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon^{s/T} + e^{-sp^2}} \widehat{f}(p, s, u^\varepsilon) ds \quad (7.1.3)$$

hoặc

$$u^\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon + e^{-Tp^2}} \widehat{\varphi}(p) e^{ipx} dp - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon^{s/T} + e^{-sp^2}} \widehat{f}(p, s, u^\varepsilon) e^{ipx} ds dp. \quad (7.1.4)$$

Phần còn lại của chương được chia thành 3 mục. Trong mục 7.2, chúng tôi trình bày tính chỉnh của bài toán (7.1.3). Trong mục 7.3, chúng tôi trình bày sự duy nhất nghiệm và chỉnh hóa của bài toán (7.1.1). Trong mục 7.4, chúng tôi đưa ra một ví dụ về tính toán số.

7.2 TÍNH CHỈNH CỦA BÀI TOÁN (7.1.3)

Trong phần này, chúng tôi sẽ trình bày sự tồn tại, sự duy nhất, sự ổn định của bài toán (7.1.3). Ta có

Định lý 7.2.1

Cho $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ và cho $f \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T] \times \mathbb{R})$ thỏa mãn $f(x, y, 0) = 0$ và

$$|f(x, y, w) - f(x, y, v)| \leq k |w - v|$$

với $k > 0$ độc lập với x, y, v, w .

Khi đó bài toán (7.1.3) có nghiệm duy nhất $u^\varepsilon \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$. Nghiệm này phụ thuộc liên tục theo φ trong $C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$.

Chứng minh

Chứng minh được chia thành hai bước. Trong bước 1, ta chứng minh sự tồn tại và sự duy nhất của bài toán (7.1.3). Cuối cùng trong bước 2, ta đưa ra tính ổn định của nghiệm.

Bước 1. Sự tồn tại và sự duy nhất nghiệm của (7.1.3)

Đặt

$$G(w)(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Psi(x, t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_t^T \frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon^{s/T} + e^{-sp^2}} \hat{f}(p, s, w) e^{ipx} ds dp$$

với $w \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$, và $\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon + e^{-Tp^2}} \hat{\varphi}(p) e^{ipx} dp$.

Từ điều kiện $f(x, y, 0) = 0$ và tính Lipschit của $f(x, y, w)$ tương ứng với w , điều này dẫn tới $G(w) \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$ với mọi $w \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$.

Ta khẳng định, với mọi $w, v \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$, $m \geq 1$, ta có

$$\|G^m(w)(., t) - G^m(v)(., t)\|^2 \leq \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^{2m} \frac{(T-t)^m C^m}{m!} \| \| w - v \| \|^2 \tag{7.2.1}$$

trong đó $C = \max\{T, 1\}$, $\|.\|$ là chuẩn trong $L^2(\mathbb{R})$ và $\| \|.\|$ là chuẩn sup trong $C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$.

Ta chứng minh bất đẳng thức (7.2.1) bằng quy nạp

Khi $m = 1$, ta có

$$\begin{aligned} \|G(w)(., t) - G(v)(., t)\|^2 &= \|\hat{G}(w)(., t) - \hat{G}(v)(., t)\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_t^T \frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon^{s/T} + e^{-sp^2}} (\hat{f}(p, s, w) - \hat{f}(p, s, v)) ds \right|^2 dp \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_t^T \left(\frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon^{s/T} + e^{-sp^2}} \right)^2 ds \int_t^T |\hat{f}(p, s, w) - \hat{f}(p, s, v)|^2 ds \right) dp \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} (T-t) \int_t^T \|\hat{f}(., s, w(., s)) - \hat{f}(., s, v(., s))\|^2 ds = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} (T-t) \int_t^T \|f(., s, w(., s)) - f(., s, v(., s))\|^2 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} (T-t) \int_t^T k^2 \|w(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|^2 ds \\ &= C \frac{k^2}{\varepsilon^2} (T-t) \| \| w - v \| \|^2. \end{aligned}$$

Vì thế (7.2.1) thỏa.

Giả sử (7.2.1) thỏa khi $m = j$. Ta chứng minh (7.2.1) đúng khi $m = j+1$. Ta có

$$\begin{aligned} &\|G^{j+1}(w)(\cdot, t) - G^{j+1}(v)(\cdot, t)\|^2 = \|\widehat{G}(G^j(w))(\cdot, t) - \widehat{G}(G^j(v))(\cdot, t)\|^2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_t^T \frac{e^{-tp^2}}{e^{s/T} + e^{-sp^2}} (\widehat{f}(p, s, G^j(w)) - \widehat{f}(p, s, G^j(v))) ds \right|^2 dp \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} (T-t) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_t^T |\widehat{f}(p, s, G^j(w)) - \widehat{f}(p, s, G^j(v))|^2 ds dp \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} (T-t) \int_t^T \|f(\cdot, s, G^j(w)(\cdot, s)) - f(\cdot, s, G^j(v)(\cdot, s))\|^2 ds \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} (T-t) k^2 \int_t^T \|G^j(w)(\cdot, s) - G^j(v)(\cdot, s)\|^2 ds \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} (T-t) k^2 \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^{2j} \int_t^T \frac{(T-s)^j C^j}{j!} \| \| w - v \| \|^2 ds \\ &\leq \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^{2(j+1)} \frac{(T-t)^{j+1}}{(j+1)!} C^{j+1} \| \| w - v \| \|^2. \end{aligned}$$

Vì thế, bởi nguyên lý quy nạp, với mọi m ta có

$$\| \| G^m(w) - G^m(v) \| \| \leq \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^m \frac{T^{m/2}}{\sqrt{m!}} \sqrt{C^m} \| \| w - v \| \|$$

với mọi $w, v \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$.

Xét $G : C([0, T]; L^2(\mathbb{R})) \rightarrow C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$.

Từ $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^m \frac{T^{m/2} \sqrt{C^m}}{\sqrt{m!}} = 0$, tồn tại số nguyên dương m_0 sao cho G^{m_0} là ánh xạ co. Suy ra phương trình

$$G^{m_0}(w) = w$$

có nghiệm duy nhất $u_\varepsilon \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$.

Ta chứng minh $G(u_\varepsilon) = u_\varepsilon$. Thật vậy, ta có $G(G^{m_0}(u^\varepsilon)) = G(u^\varepsilon)$. Do đó $G^{m_0}(G(u^\varepsilon)) = G(u^\varepsilon)$. Do tính duy nhất của điểm bất động của G^{m_0} , ta có $G(u^\varepsilon) = u^\varepsilon$, nghĩa là, phương trình $G(w) = w$ có nghiệm duy nhất $u^\varepsilon \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$. Ta đã chứng minh được bước 1.

Bước 2: Nghiệm của bài toán (7.1.4) phụ thuộc liên tục theo $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$

Gọi u và v là hai nghiệm của (7.1.4) tương ứng các giá trị cuối φ và Φ .

Từ (7.1.3)-(7.1.4) ta có

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|^2 &\leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon + e^{-Tp^2}} (\hat{\varphi}(p) - \hat{\Phi}(p)) \right|^2 dp \\ &+ 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_t^T \frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon^{s/T} + e^{-sp^2}} (\hat{f}(p, s, u) - \hat{f}(p, s, v)) ds \right|^2 dp. \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

Ta có $s > t$ và $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} \frac{e^{-tp^2}}{\alpha + e^{-sp^2}} &= \frac{e^{-tp^2}}{(\alpha + e^{-sp^2})^{t/s} (\alpha + e^{-sp^2})^{1-t/s}} \\ &= \frac{1}{(\alpha e^{sp^2} + 1)^{t/s} (\alpha + e^{-sp^2})^{1-t/s}} \\ &\leq \alpha^{t/s-1}. \end{aligned}$$

Chọn $\alpha = \varepsilon, s = T$, ta nhận được

$$\frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon + e^{-Tp^2}} \leq \varepsilon^{t/T-1}. \tag{7.2.3}$$

Đặt $\alpha = \varepsilon^{s/T}$, ta có

$$\frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon^{s/T} + e^{-sp^2}} \leq \varepsilon^{t/T-s/T}. \tag{7.2.4}$$

Do đó, từ (7.2.2) dẫn đến

$$\begin{aligned} & \|u(.,t) - v(.,t)\|^2 \\ & \leq 2\varepsilon^{2(t/T-1)} \|\hat{\varphi} - \hat{\Phi}\|^2 + 2(T-t)\varepsilon^{2t/T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_t^T \varepsilon^{-2s/T} \left| \hat{f}(x,s,u) - \hat{f}(x,s,v) \right|^2 ds \\ & \leq 2\varepsilon^{2(t/T-1)} \|\hat{\varphi} - \hat{\Phi}\|^2 + 2(T-t)\varepsilon^{2t/T} k^2 \int_t^T \varepsilon^{-2s/T} \|u(.,s) - v(.,s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Vì thế, ta có

$$\varepsilon^{-2(t/T)} \|u(.,t) - v(.,t)\|^2 \leq 2\varepsilon^{-2} \|\varphi - \Phi\|^2 + 2k^2(T-t) \int_t^T \varepsilon^{-2(s/T)} \|u(.,s) - v(.,s)\|^2 ds.$$

Sử dụng bất đẳng thức Gronwall ta có

$$\|u(.,t) - v(.,t)\| \leq \sqrt{2}\varepsilon^{t/T-1} \exp(k^2T(T-t)) \|\varphi - \Phi\|.$$

Định lý 7.2.1 đã được chứng minh. ■

7.3 SỰ DUY NHẤT VÀ CHỈNH HÓA CỦA BÀI TOÁN (7.1.1)

Trong phần này chúng tôi trình bày tính duy nhất nghiệm của bài toán (7.1.1) (định lý 7.3.1) và đưa hai kết quả chỉnh hóa (định lý 7.3.2 và 7.3.3) cho trường hợp dữ liệu chính xác, cuối cùng là đưa kết quả chỉnh hóa (định lý 7.3.4) cho trường hợp dữ liệu nhận được do đo đạc.

Trước tiên ta có một kết quả về tính duy nhất

Định lý 7.3.1

Cho φ, f như trong định lý 7.2.1 và $f(x, t, z)$ có đạo hàm riêng theo biến z bị chặn trên $\mathbb{R} \times (0, T) \times \mathbb{R}$ thì bài toán (7.1.1) có nhiều nhất một nghiệm

$$u \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbb{R})) \cap C^1((0, T); H^1(\mathbb{R})).$$

Chứng minh

Chứng minh được đưa ra với kỹ thuật tương tự trong [32], trang 173-176.

Gọi $M > 0$ thỏa

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(x, t, z) \right| < M$$

với mọi $(x, t, z) \in \mathbb{R} \times (0, T) \times \mathbb{R}$.

Gọi u_1 và u_2 là hai nghiệm của bài toán (7.1.1) sao cho

$$u_1, u_2 \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbb{R})) \cap C^1((0, T); H^1(\mathbb{R})).$$

Đặt $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$. Thì w thỏa phương trình

$$w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) = f(x, t, u_1(x, t)) - f(x, t, u_2(x, t)).$$

Vậy

$$w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, t, \bar{u}(x, t))w(x, t),$$

với $\bar{u}(x, t)$ nào đó.

Từ đó suy ra

$$(w_t - w_{xx})^2 \leq M^2 w^2.$$

Ta ký hiệu P_T là tập tất cả các hàm trong

$C([0, T]; H^1(\mathbb{R})) \cap L^2(0, T; H^2(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T]; H^1(\mathbb{R}))$, triệt tiêu trên $\mathbb{R} \times \{t = T\}$, $\mathbb{R} \times \{t = 0\}$.

Đặt $\lambda(t) = t - T - \eta$. Với mỗi $v \in P_T$ và số nguyên dương m , ta đặt $z = \lambda^{-m}v$.

Nếu ta ký hiệu $\|\cdot\|_2$ là chuẩn và (\cdot, \cdot) là tích vô hướng trong $L^2(I)$, $I = \mathbb{R} \times (0, T)$, ta nhận được

$$\begin{aligned} \|\lambda^{-m}(v_{xx} - v_t)\|_2^2 &= \|z_{xx} - m\lambda^{-1}z - z_t\|_2^2 \\ &\geq -2(z_t, z_{xx}) + 2m\left(z_t, \frac{z}{\lambda}\right) = \\ &= 2\iint_I z_x z_{tx} dxdt + m\iint_I \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{z^2}{\lambda}\right) dxdt + m\|\lambda^{-1}z\|_2^2 \\ &\geq m\|\lambda^{-m-1}v\|_2^2. \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

Từ $|\lambda(t)| \leq T + \eta$ và (7.3.1), ta có

$$\begin{aligned} -(\lambda^{-2m}v, v_{xx} - v_t) &= (\lambda^{-2m}v, v_t) - (\lambda^{-2m}v, v_{xx}) \\ &= \iint_I \lambda^{-2m} (v_x)^2 dxdt + \frac{1}{2} \iint_I \frac{\partial}{\partial t} (\lambda^{-2m}v^2) dxdt \\ &\quad + m \iint_I (\lambda^{-2m-1}v^2) dxdt \\ &\geq \|\lambda^{-m}v_x\|_2^2 - m(T + \eta)\|\lambda^{-m-1}v\|_2^2 \\ &\geq \|\lambda^{-m}v_x\|_2^2 - (T + \eta)\|\lambda^{-m}(v_{xx} - v_t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Vì thế

$$\begin{aligned} -(T + \eta)\|\lambda^{-m}(v_{xx} - v_t)\|_2^2 + \|\lambda^{-m}v_x\|_2^2 \\ \leq \frac{1}{2}\|\lambda^{-m-1}v\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\lambda^{-m+1}(v_{xx} - v_t)\|_2^2 \\ \leq \frac{1}{2m}\|\lambda^{-m}(v_{xx} - v_t)\|_2^2 + \frac{1}{2}(T + \eta)^2\|\lambda^{-m}(v_{xx} - v_t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Do đó

$$\left(\frac{1}{2m} + \frac{1}{2}(T + \eta)^2 + (T + \eta) \right) \left\| \lambda^{-m}(v_{xx} - v_t) \right\|_2^2 \geq \left\| \lambda^{-m}v_x \right\|_2^2. \quad (7.3.2)$$

Kết hợp (7.3.1), (7.3.2), cho ta

$$\left(\frac{3}{2m} + \frac{1}{2}(T + \eta)^2 + (T + \eta) \right) \left\| \lambda^{-m}(v_{xx} - v_t) \right\|_2^2 \geq \left\| \lambda^{-m}v_x \right\|_2^2 + \left\| \lambda^{-m-1}v \right\|_2^2.$$

Ta chọn μ và η_0 sao cho $\eta \leq \eta_0$ và $(\mu + \eta_0)^2 KM^2 \leq \frac{1}{2}$ trong đó

$$K = \frac{3}{2m} + \frac{1}{2}(\mu + \eta_0)^2 + \mu + \eta_0.$$

Ta chia bài toán thành hai trường hợp.

Trường hợp 1: $T \leq \mu$

Gọi $0 < t_1 < t_2 < T$ và $\zeta \in C^2(\mathbb{R})$ thỏa $\zeta(t) = 0$ khi $0 \leq t < t_1$, $\zeta(t) = 1$ khi $t_2 < t \leq T$.

Hàm $v = \zeta w$ thuộc vào P_T và vì thế, bởi (7.3.2)

$$\begin{aligned} & K \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda^{-m}(v_{xx} - v_t))^2 dx dt + K \int_{t_2}^{T} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda^{-m}(w_{xx} - w_t))^2 dx dt \\ &= K \left\| \lambda^{-m}(v_{xx} - v_t) \right\|_2^2 \\ &\geq \left\| \lambda^{-m}v_x \right\|_2^2 + \left\| \lambda^{-m-1}v \right\|_2^2 \\ &\geq \int_{t_2}^{T} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda^{-m-1}w)^2 dx dt + \int_{t_2}^{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-2m}(v_x)^2 dx dt. \end{aligned}$$

Kết hợp với $(w_t - w_{xx})^2 \leq M^2 w^2$, ta có

$$\begin{aligned} & K \int_{t_2}^{T} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda^{-m}(w_{xx} - w_t))^2 dx dt \\ &\leq KM^2 \int_{t_2}^{T} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda^{-m}w)^2 dx dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq KM^2 \int_{t_2}^{T+\infty} \int (\lambda^{-m-1} w)^2 dx dt \\ &\leq KM^2 (\mu + \eta)^2 \int_{t_2}^{T+\infty} \int (\lambda^{-m-1} w)^2 dx dt \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{t_2}^{T+\infty} \int (\lambda^{-m-1} w)^2 dx dt. \end{aligned}$$

Ta có

$$K \int_{t_1}^{t_2+\infty} \int (\lambda^{-m} (v_{xx} - v_t))^2 dx dt \geq \frac{1}{2} \int_{t_2}^{T+\infty} \int (\lambda^{-m-1} w)^2 dx dt.$$

Bất đẳng thức này dẫn đến với mỗi $t_2 < t_3 < T$

$$K \int_{t_1}^{t_2+\infty} \int (T + \eta - t_2)^{-2m} (v_{xx} - v_t)^2 dx dt \geq \frac{1}{2} (T + \eta - t_3)^{-2m-2} \int_{t_3}^{T+\infty} \int w^2 dx dt.$$

Do $\left(\frac{T + \eta - t_2}{T + \eta - t_3}\right)^{-2m} \rightarrow 0$ khi $m \rightarrow \infty$, vì thế $w \equiv 0$ khi $x \in \mathbb{R}, t_3 < t < T$.

Ta có thể chọn t_3 nhỏ tùy ý nên $w \equiv 0$ trong $\mathbb{R} \times [0, T]$.

Trường hợp 2: $\mu < T$

Ta có thể chứng minh $w \equiv 0$ trong $\mathbb{R} \times [T - \mu, T]$, rồi tiếp tục trong $\mathbb{R} \times [T - 2\mu, T - \mu]$, v.v. ... Định lý 7.3.1 đã được chứng minh. ■

Bây giờ chúng tôi sẽ khẳng định một vài kết quả chính hóa dựa trên các giả thiết trên nghiệm chính xác của bài toán (7.1.1).

Định lý 7.3.2

Với φ, f như trong định lý 7.2.1 và $e^{Tp^2} \hat{\varphi}(p) \in L^2(\mathbb{R})$. Giả sử rằng bài toán (7.1.2) có một nghiệm

$$u \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$$

thỏa mãn

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{tp^2} \hat{u}(p, t) \right) \right|^2 dp dt < \infty.$$

Khi đó

$$\|u(\cdot, t) - u^\varepsilon(\cdot, t)\| \leq \sqrt{M} \exp\left(\frac{3k^2 T(T-t)}{2}\right) \varepsilon^{t/T}$$

với mọi $t \in [0, T]$ trong đó $M = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{Tp^2} \hat{\varphi}(p) \right|^2 dp + 3T \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{sp^2} \hat{u}(p, s) \right) \right|^2 dp ds$ và u^ε

là nghiệm duy nhất của bài toán (7.1.4).

Chứng minh

Ta có

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t) - u^\varepsilon(\cdot, t)\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{u}(p, t) - \hat{u}^\varepsilon(p, t) \right|^2 dp \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{Tp^2 - tp^2} - \frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon + e^{-Tp^2}} \right) \hat{\varphi}(p) - \int_t^T e^{-(t-s)p^2} \hat{f}(p, s, u) ds \\ &\quad + \int_t^T \frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon^{s/T} + e^{-sp^2}} \hat{f}(p, s, u^\varepsilon) ds \Big|^2 dp \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\varepsilon e^{-tp^2}}{e^{-Tp^2} (\varepsilon + e^{-Tp^2})} \hat{\varphi}(p) + \int_t^T \frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon^{s/T} + e^{-sp^2}} \left(\hat{f}(p, s, u^\varepsilon) - \hat{f}(p, s, u) \right) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_t^T \frac{e^{-tp^2} \varepsilon^{s/T}}{\varepsilon^{-sp^2} (\varepsilon^{s/T} + e^{-sp^2})} \hat{f}(p, s, u) ds \right|^2 dp \\ &\leq 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\varepsilon e^{-tp^2}}{e^{-Tp^2} (\varepsilon + e^{-Tp^2})} \hat{\varphi}(p) \right|^2 dp \\ &\quad + 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_t^T \frac{e^{-tp^2}}{\varepsilon^{s/T} + e^{-sp^2}} \left| \hat{f}(p, s, u^\varepsilon) - \hat{f}(p, s, u) \right| ds \right|^2 dp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \int_t^T \frac{e^{-tp^2} \varepsilon^{s/T}}{e^{-sp^2} (\varepsilon^{s/T} + e^{-sp^2})} \hat{f}(p, s, u) ds \right|^2 dp \\
 & \leq 3\varepsilon^{2t/T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{Tp^2} \hat{\varphi}(p) \right|^2 dp \\
 & +3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_t^T \varepsilon^{t/T-s/T} \left| \hat{f}(p, s, u^\varepsilon) - \hat{f}(p, s, u) \right| ds \right)^2 dp \\
 & +3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_t^T \varepsilon^{t/T} \left| e^{sp^2} \hat{f}(p, s, u) \right| ds \right)^2 dp \\
 & \leq 3\varepsilon^{2t/T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{Tp^2} \hat{\varphi}(p) \right|^2 dp \\
 & +3\varepsilon^{2t/T} (T-t) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_t^T \varepsilon^{-2s/T} \left| \hat{f}(p, s, u^\varepsilon) - \hat{f}(p, s, u) \right|^2 ds dp \\
 & +3\varepsilon^{2t/T} (T-t) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_t^T \left| \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{sp^2} \hat{u}(p, s) \right) \right|^2 ds dp \\
 & \leq 3\varepsilon^{2t/T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{Tp^2} \hat{\varphi}(p) \right|^2 dp + 3\varepsilon^{2t/T} (T-t) \int_t^T \varepsilon^{-2s/T} \left\| f(., s, u^\varepsilon(., s)) - f(., s, u(., s)) \right\|^2 ds \\
 & +3\varepsilon^{2t/T} T \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{sp^2} \hat{u}(p, s) \right) \right|^2 dp ds \\
 & \leq 3\varepsilon^{2t/T} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{Tp^2} \hat{\varphi}(p) \right|^2 dp + 3k^2 \varepsilon^{2t/T} T \int_t^T \varepsilon^{-2s/T} \left\| u^\varepsilon(., s) - u(., s) \right\|^2 ds \\
 & +3\varepsilon^{2t/T} T \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{sp^2} \hat{u}(p, s) \right) \right|^2 dp ds .
 \end{aligned}$$

Vì thế

$$\varepsilon^{-2t/T} \left\| u^\varepsilon(., t) - u(., t) \right\|^2 \leq M + 3k^2 T \int_t^T \varepsilon^{-2s/T} \left\| u^\varepsilon(., s) - u(., s) \right\|^2 ds$$

trong đó
$$M = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{Tp^2} \hat{\varphi}(p) \right|^2 dp + 3T \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{sp^2} \hat{u}(p, s) \right) \right|^2 dp ds.$$

Sử dụng bất đẳng thức Gronwall, ta được

$$\varepsilon^{-2t/T} \left\| u(., t) - u^\varepsilon(., t) \right\|^2 \leq M e^{3k^2T(T-t)}.$$

Suy ra

$$\left\| u(., t) - u^\varepsilon(., t) \right\| \leq \varepsilon^{t/T} \sqrt{M} e^{3k^2T(T-t)/2}.$$

Định lý 7.3.2 đã được chứng minh. ■

Định lý 7.3.3

Với φ, f như trong định lý 7.2.1 và $e^{Tp^2} \hat{\varphi}(p) \in L^2(\mathbb{R})$. Giả sử rằng Bài toán (7.1.2) có một nghiệm

$$u \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$$

thỏa mãn

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{tp^2} \hat{u}(p, t) \right) \right|^2 dp dt < \infty$$

và $u_t \in L^2((0, T); L^2(\mathbb{R}))$. Khi đó với mọi $\varepsilon \in (0, 1)$ tồn tại $t_\varepsilon > 0$ sao cho

$$\left\| u(., 0) - u^\varepsilon(., t_\varepsilon) \right\| \leq \sqrt[4]{8C^4 T} \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-1/4}$$

trong đó

$$N = \sqrt{\int_0^T \left\| u_t(., s) \right\|^2 ds} \tag{7.3.3}$$

và

$$C = \max \left\{ \exp \left(\frac{3k^2 T^2}{2} \right) \sqrt{3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{Tp^2} \hat{\varphi}(p) \right|^2 dp + 3T \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{sp^2} \hat{u}(p, s) \right) \right|^2 dp ds}, N \right\}. \tag{7.3.4}$$

Chứng minh

Ta có

$$u(x, t) - u(x, 0) = \int_0^t u_t(x, s) ds.$$

Điều này dẫn đến

$$\|u(., 0) - u(., t)\|^2 \leq t \int_0^t \|u_t(., s)\|^2 ds = N^2 t.$$

Sử dụng định lý 7.3.2 và (7.3.3)-(7.3.4), ta có

$$\begin{aligned} \|u(., 0) - u^\varepsilon(., t)\| &\leq \|u(., 0) - u(., t)\| + \|u(., t) - u^\varepsilon(., t)\| \\ &\leq C(\sqrt{t} + \varepsilon^{t/T}). \end{aligned}$$

Với mỗi $\varepsilon \in (0, 1)$, tồn tại duy nhất $t_\varepsilon > 0$ sao cho $\sqrt{t_\varepsilon} = \varepsilon^{t_\varepsilon/T}$, nghĩa là

$$\frac{\ln t_\varepsilon}{t_\varepsilon} = \frac{2 \ln \varepsilon}{T}.$$

Sử dụng bất đẳng thức $\ln t > -\frac{1}{t}$ với mọi $t > 0$, ta nhận được

$$\|u(., 0) - u^\varepsilon(., t_\varepsilon)\| \leq \sqrt[4]{8C^4 T} \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-1/4}.$$

Định lý 7.3.3 đã được chứng minh. ■

Trong trường hợp dữ liệu không chính xác, ta có

Định lý 7.3.4

Với φ, f như trong định lý 7.2.1 và $e^{Tp^2} \hat{\varphi}(p) \in L^2(\mathbb{R})$. Giả sử rằng Bài toán (7.1.2) có một nghiệm

$$u \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R}))$$

thỏa mãn

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{tp^2} \hat{u}(p, t) \right) \right|^2 dp dt < \infty$$

và $u_t \in L^2((0, T); L^2(\mathbb{R}))$.

Với $\varepsilon \in (0, 1)$ và $\varphi_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ là dữ liệu nhận được do đo đạc sao cho

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\| \leq \varepsilon.$$

Khi đó từ φ_ε ta có thể xây dựng một hàm u^ε thỏa mãn

$$\|u^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \leq (2 + \sqrt{M}) \exp\left(\frac{3k^2 T(T-t)}{2}\right) \varepsilon^{t/T},$$

với mọi $t \in (0, T)$ và

$$\|u^\varepsilon(\cdot, 0) - u(\cdot, 0)\| \leq \sqrt[4]{8} \sqrt[4]{T} \left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right)^{-1/4} (\exp(k^2 T^2) + C)$$

trong đó C được định nghĩa trong (7.3.3) và (7.3.4) và

$$M = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{Tp^2} \hat{\varphi}(p) \right|^2 dp + 3T \int_0^{T+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial s} \left(e^{sp^2} \hat{u}(p, s) \right) \right|^2 dp ds.$$

Chứng minh

Gọi v^ε và w^ε là nghiệm của bài toán (7.1.4) tương ứng với φ và φ_ε với φ , φ_ε trong vế phải của (7.1.4). Gọi $t_\varepsilon > 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình

$$\sqrt{t_\varepsilon} = \varepsilon^{t_\varepsilon/T}. \tag{7.3.5}$$

Sử dụng định lý 7.3.3, ta có

$$\|v^\varepsilon(\cdot, t_\varepsilon) - u(\cdot, 0)\| \leq \sqrt[4]{8} C \sqrt[4]{T} \left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right)^{-1/4}. \tag{7.3.6}$$

Đặt

$$u^\varepsilon(\cdot, t) = \begin{cases} w^\varepsilon(\cdot, t), & 0 < t < T, \\ w^\varepsilon(\cdot, t_\varepsilon), & t = 0 \end{cases}.$$

Từ định lý 7.3.2 và Bước 2 của định lý 7.2.1, ta được

$$\|u^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t)\| \leq \|w^\varepsilon(\cdot, t) - v^\varepsilon(\cdot, t)\| + \|v^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|$$

$$\leq (\sqrt{2} + \sqrt{M}) \exp\left(\frac{3k^2 T(T-t)}{2}\right) \varepsilon^{t/T},$$

với mọi $t \in (0, T)$.

Từ (7.3.5)-(7.3.6) và bước 2 trong định lý 7.2.1, ta có

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon(., 0) - u(., 0)\| &\leq \|w^\varepsilon(., t_\varepsilon) - v^\varepsilon(., t_\varepsilon)\| + \|v^\varepsilon(., t_\varepsilon) - u(., 0)\| \\ &\leq \sqrt{2} \varepsilon^{t_\varepsilon/T} \exp(k^2 T^2) + \sqrt[4]{8} C \sqrt[4]{T} \left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{-1/4} \\ &\leq \sqrt[4]{8} \sqrt[4]{T} \left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{-1/4} (\exp(k^2 T^2) + C) \end{aligned}$$

trong đó C xác định trong (7.3.3)-(7.3.4).

Định lý 7.3.4 đã được chứng minh. ■

7.4 VÍ DỤ VỀ TÍNH TOÁN SỐ

Xét phương trình

$$-u_{xx} + u_t = f(x, t, u(x, t))$$

trong đó

$$f(x, t, u(x, t)) = \frac{1}{2} u + e^{-\frac{x^2}{4}} \left(1 - \frac{tx^2}{4}\right)$$

và

$$u(x, 1) = \varphi_0(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Nghiệm chính xác của phương trình là

$$u(x, t) = te^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Đặt

$$u_0(x) \equiv u\left(x, \frac{99}{100}\right) = \frac{99}{100} e^{-\frac{x^2}{4}}.$$

Với $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon(x) = (\varepsilon + 1)e^{-\frac{x^2}{4}}$. Ta có

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\|_2 = \varepsilon \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx} = \varepsilon\sqrt{2\pi}.$$

Biến đổi Fourier của $u_0(x)$ là $\widehat{u}_0(p) = \frac{99\sqrt{2}}{100}e^{-p^2}$. Từ dữ liệu đo đạc φ_ε , ta

xấp xỉ $\widehat{u}_0(p)$ bởi hàm $\widehat{u}_{\varepsilon,4000}(p)$ được tính bởi công thức sau

$$\widehat{u}_{\varepsilon,0}(p) = \widehat{\varphi}_\varepsilon(p) = (\varepsilon + 1)\sqrt{2}e^{-p^2},$$

$$a = \frac{1}{40000}$$

$$t_m = 1 - a.m, \quad m = 1, 2, \dots, 4000$$

$$\widehat{u}_{\varepsilon,m+1} = \frac{e^{-t_{m+1}p^2}}{\varepsilon + e^{-t_m p^2}} \widehat{u}_{\varepsilon,m} - \int_{t_{m+1}}^{t_m} \frac{e^{-t_m+1p^2}}{\varepsilon^{s/t_m} + e^{-sp^2}} \cdot \widehat{f}(p, s, u_{\varepsilon,m}) ds,$$

$$\widehat{f}(p, s, u_{\varepsilon,m}) = \frac{1}{2} \widehat{u}_{\varepsilon,m} + \sqrt{2}e^{-p^2} - s \left(-\sqrt{2}p^2 e^{-p^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-p^2} \right).$$

Với ε lần lượt là $\varepsilon_1 = 10^{-30}$, $\varepsilon_2 = 10^{-5}$, $\varepsilon_3 = 10^{-4}$.

Đặt $a_{\varepsilon_i} = \max_{p \in P} \left| \widehat{v}_{\varepsilon_i}(p) - \widehat{u}_0(p) \right|$, $P = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, \dots, 20 \right\}$, $i = 1, 2, 3$, ta nhận

được các bảng sau

$$\varepsilon_1 = 10^{-30}$$

p	$\widehat{u}_0(p)$	$\widehat{v}_{\varepsilon_1}(p)$	$ \widehat{v}_{\varepsilon_1}(p) - \widehat{u}_0(p) $
$\frac{1}{3}$	1.252838959	1.252838867	0.92×10^{-7}
$\frac{1}{2}$	1.090376724	1.090376578	0.146×10^{-6}
1	0.5150574940	0.5150574720	2.2×10^{-8}
$\frac{3}{2}$	0.1475664428	0.1475664994	0.566×10^{-7}
2	$0.2564320266 \times 10^{-1}$	0.02564322404	2.138×10^{-8}
3	$0.1727825404 \times 10^{-3}$	0.0001727829157	3.753×10^{-10}
4	$0.1575572826 \times 10^{-6}$	$1.575579395 \times 10^{-7}$	6.569×10^{-13}
5	$0.1944411337 \times 10^{-10}$	$1.944424791 \times 10^{-11}$	1.3454×10^{-16}
6	$0.3247497638 \times 10^{-15}$	$3.247532153 \times 10^{-16}$	3.4515×10^{-21}
7	$0.7340414409 \times 10^{-21}$	$7.340523377 \times 10^{-22}$	1.08968×10^{-26}
8	$0.2245449802 \times 10^{-27}$	$-2.461971438 \times 10^{-29}$	$2.491646946 \times 10^{-28}$
9	$0.9296022329 \times 10^{-35}$	$-2.830540629 \times 10^{-43}$	$9.296022612 \times 10^{-36}$
10	$0.5208372078 \times 10^{-43}$	$-1.325560604 \times 10^{-59}$	$5.208372078 \times 10^{-44}$
11	$0.3949279601 \times 10^{-52}$	$-1.137270718 \times 10^{-77}$	$3.949279601 \times 10^{-53}$
12	$0.4052703190 \times 10^{-62}$	$-1.793663436 \times 10^{-97}$	$4.052703190 \times 10^{-63}$
13	$0.5628371441 \times 10^{-73}$	$-5.213859057 \times 10^{-119}$	$5.628371441 \times 10^{-74}$
14	$0.1057868631 \times 10^{-84}$	$-2.798976259 \times 10^{-142}$	$1.057868631 \times 10^{-85}$
15	$0.2690864097 \times 10^{-97}$	$-2.779461384 \times 10^{-167}$	$2.690864097 \times 10^{-98}$
16	$0.9263238056 \times 10^{-111}$	$-5.112214920 \times 10^{-194}$	$9.263238056 \times 10^{-112}$
17	$0.4315637144 \times 10^{-125}$	$-1.743444057 \times 10^{-222}$	$4.315637144 \times 10^{-126}$
18	$0.2721059608 \times 10^{-140}$	$-1.103422553 \times 10^{-252}$	$2.721059608 \times 10^{-141}$
19	$0.2321893123 \times 10^{-156}$	$-1.296979439 \times 10^{-284}$	$2.321893123 \times 10^{-157}$
20	$0.2681374230 \times 10^{-173}$	$2.274940969 \times 10^{-57311}$	$2.681374230 \times 10^{-174}$

Trong trường hợp này $a_{\varepsilon_1} = 0.146 \times 10^{-6}$.

$$\varepsilon_2 = 10^{-5}$$

p	$\widehat{u}_0(p)$	$\widehat{v}_{\varepsilon_2}(p)$	$ \widehat{v}_{\varepsilon_2}(p) - \widehat{u}_0(p) $
$\frac{1}{3}$	1.252838959	1.247249429	0.5589530×10^{-2}
$\frac{1}{2}$	1.090376724	1.084787503	0.5589221×10^{-2}
1	0.5150574940	0.5094786485	$0.55788455 \times 10^{-2}$
$\frac{3}{2}$	0.1475664428	0.1420580040	$0.55084388 \times 10^{-2}$
2	$0.2564320266 \times 10^{-1}$	$0.2059349933 \times 10^{-1}$	$0.504970333 \times 10^{-2}$
3	$0.1727825404 \times 10^{-3}$	$-0.5548338928 \times 10^{-6}$	$0.1733373743 \times 10^{-3}$
4	$0.1575572826 \times 10^{-6}$	$-0.8590309729 \times 10^{-12}$	$0.1575581416 \times 10^{-6}$
5	$0.1944411337 \times 10^{-10}$	$-0.2212355644 \times 10^{-19}$	$0.1944411339 \times 10^{-10}$
6	$0.3247497638 \times 10^{-15}$	$-0.9862089868 \times 10^{-29}$	$0.3247497638 \times 10^{-15}$
7	$0.7340414409 \times 10^{-21}$	$-0.7783816564 \times 10^{-40}$	$0.7340414409 \times 10^{-21}$
8	$0.2245449802 \times 10^{-27}$	$-0.1103059786 \times 10^{-52}$	$0.2245449802 \times 10^{-27}$
9	$0.9296022329 \times 10^{-35}$	$-0.2832598336 \times 10^{-67}$	$0.9296022329 \times 10^{-35}$
10	$0.5208372078 \times 10^{-43}$	$-0.1326524239 \times 10^{-83}$	$0.5208372078 \times 10^{-43}$
11	$0.3949279601 \times 10^{-52}$	$-0.1138097472 \times 10^{-101}$	$0.3949279601 \times 10^{-52}$
12	$0.4052703190 \times 10^{-62}$	$-0.1794967365 \times 10^{-121}$	$0.4052703190 \times 10^{-62}$
13	$0.5628371441 \times 10^{-73}$	$-0.5217649344 \times 10^{-143}$	$0.5628371441 \times 10^{-73}$
14	$0.1057868631 \times 10^{-84}$	$-0.2801011014 \times 10^{-166}$	$0.1057868631 \times 10^{-84}$
15	$0.2690864097 \times 10^{-97}$	$-0.2781481952 \times 10^{-191}$	$0.2690864097 \times 10^{-97}$
16	$0.9263238056 \times 10^{-111}$	$-0.5115931316 \times 10^{-218}$	$0.9263238056 \times 10^{-111}$
17	$0.4315637144 \times 10^{-125}$	$-0.1744711478 \times 10^{-246}$	$0.4315637144 \times 10^{-125}$
18	$0.2721059608 \times 10^{-140}$	$-0.1104224701 \times 10^{-276}$	$0.2721059608 \times 10^{-140}$
19	$0.2321893123 \times 10^{-156}$	$0.1443261738 \times 10^{-60552}$	$0.2321893123 \times 10^{-156}$
20	$0.2681374230 \times 10^{-173}$	$0.2274963720 \times 10^{-67310}$	$0.2681374230 \times 10^{-173}$

Trong trường hợp này $a_{\varepsilon_2} = 0.5589530 \times 10^{-2}$.

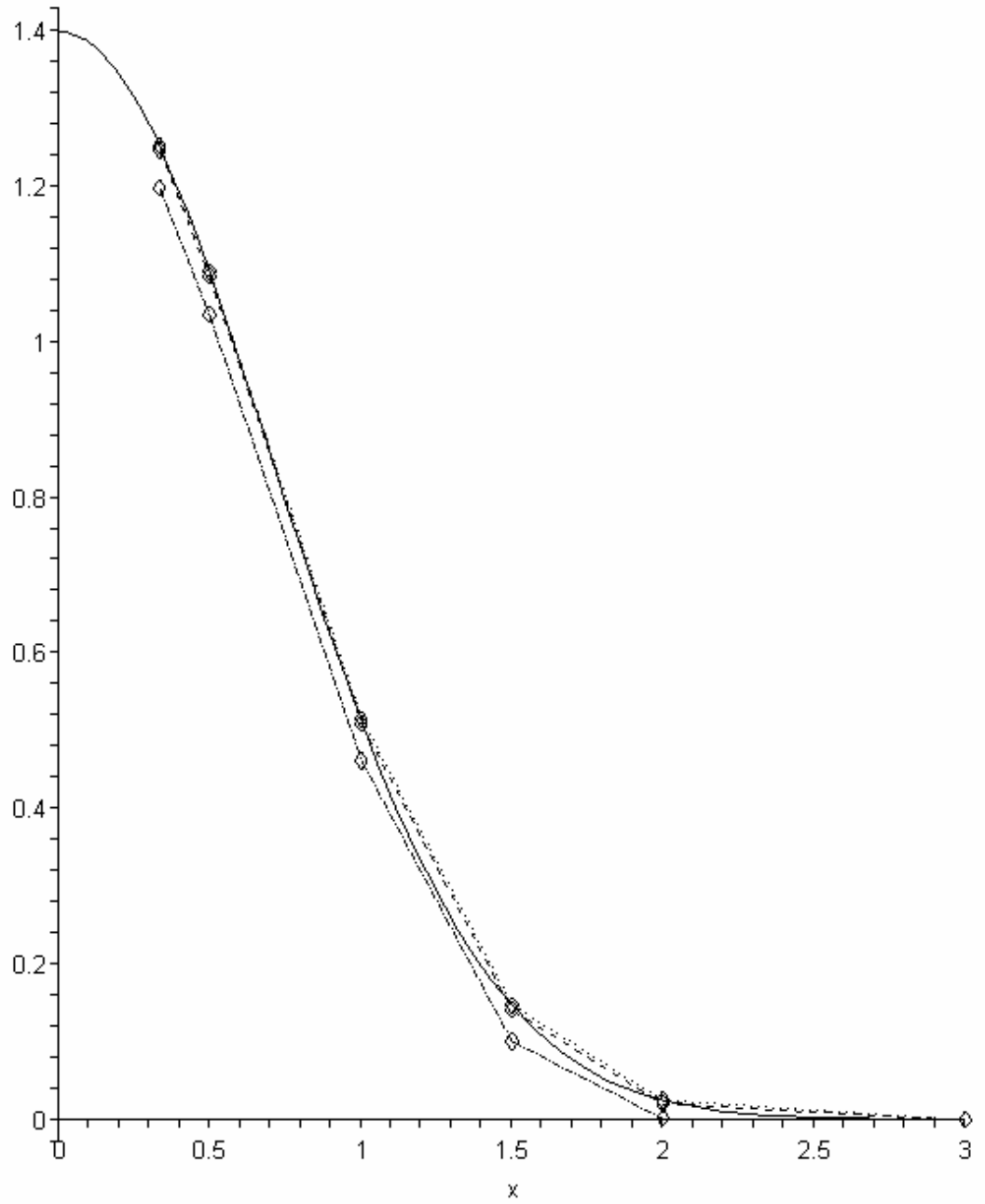
$$\varepsilon_3 = 10^{-4}$$

p	$\widehat{u}_0(p)$	$\widehat{v}_{\varepsilon_3}(p)$	$ \widehat{v}_{\varepsilon_3}(p) - \widehat{u}_0(p) $
$\frac{1}{3}$	1.252838959	1.198054717	$0.54784242 \times 10^{-1}$
$\frac{1}{2}$	1.090376724	1.035757392	$0.54619332 \times 10^{-1}$
1	0.5150574940	0.4619043100	$0.531531840 \times 10^{-1}$
$\frac{3}{2}$	0.1475664428	0.1008199937	$0.467464491 \times 10^{-1}$
2	$0.2564320266 \times 10^{-1}$	$0.2685699321 \times 10^{-2}$	$0.2295750334 \times 10^{-1}$
3	$0.1727825404 \times 10^{-3}$	$-0.5547666205 \times 10^{-7}$	$0.1728380171 \times 10^{-3}$
4	$0.1575572826 \times 10^{-6}$	$-0.8590563491 \times 10^{-13}$	$0.1575573685 \times 10^{-6}$
5	$0.1944411337 \times 10^{-10}$	$-0.2212419963 \times 10^{-20}$	$0.1944411337 \times 10^{-10}$
6	$0.3247497638 \times 10^{-15}$	$-0.9862376579 \times 10^{-30}$	$0.3247497638 \times 10^{-15}$
7	$0.7340414409 \times 10^{-21}$	$-0.7784042855 \times 10^{-41}$	$0.7340414409 \times 10^{-21}$
8	$0.2245449802 \times 10^{-27}$	$-0.1103091854 \times 10^{-53}$	$0.2245449802 \times 10^{-27}$
9	$0.9296022329 \times 10^{-35}$	$-0.2832680685 \times 10^{-68}$	$0.9296022329 \times 10^{-35}$
10	$0.5208372078 \times 10^{-43}$	$-0.1326562804 \times 10^{-84}$	$0.5208372078 \times 10^{-43}$
11	$0.3949279601 \times 10^{-52}$	$-0.1138130559 \times 10^{-102}$	$0.3949279601 \times 10^{-52}$
12	$0.4052703190 \times 10^{-62}$	$-0.1795019548 \times 10^{-122}$	$0.4052703190 \times 10^{-62}$
13	$0.5628371441 \times 10^{-73}$	$-0.5217801032 \times 10^{-144}$	$0.5628371441 \times 10^{-73}$
14	$0.1057868631 \times 10^{-84}$	$-0.2801092445 \times 10^{-167}$	$0.1057868631 \times 10^{-84}$
15	$0.2690864097 \times 10^{-97}$	$-0.2781562816 \times 10^{-192}$	$0.2690864097 \times 10^{-97}$
16	$0.9263238056 \times 10^{-111}$	$-0.5116080047 \times 10^{-219}$	$0.9263238056 \times 10^{-111}$
17	$0.4315637144 \times 10^{-125}$	$-0.1744762201 \times 10^{-247}$	$0.4315637144 \times 10^{-125}$
18	$0.2721059608 \times 10^{-140}$	$-0.1104256804 \times 10^{-277}$	$0.2721059608 \times 10^{-140}$
19	$0.2321893123 \times 10^{-156}$	$0.1443391628 \times 10^{-60952}$	$0.2321893123 \times 10^{-156}$
20	$0.2681374230 \times 10^{-173}$	$0.2275168467 \times 10^{-67710}$	$0.2681374230 \times 10^{-173}$

Trong trường hợp này $a_{\varepsilon_3} = 0.54784242 \times 10^{-1}$.

Ta có đồ thị của $\widehat{u}_0(p)$ và của những điểm đã tính

$$\widehat{u}_{\varepsilon_1}(p), \widehat{u}_{\varepsilon_2}(p), \widehat{u}_{\varepsilon_3}(p), p \in P.$$



..... $v^0(\epsilon_1), \epsilon_1=10^{-30}$
 ----- $v^0(\epsilon_2), \epsilon_2=10^{-5}$
 - . - . $v^0(\epsilon_3), \epsilon_3=10^{-4}$
 _____ u^0

KẾT LUẬN

Trong luận án chúng tôi đã đạt được các kết quả sau đây:

1/ Chính hóa bài toán ngược thời gian (từ các dữ liệu rời rạc) cho phương trình nhiệt dạng tuyến tính bằng cách dùng đa thức Legendre và bài toán moment khi dữ liệu đo nhận được tại một dãy đếm được phân bố nhiệt u tại thời điểm $t = 1$, sau đó xác định phân bố nhiệt u tại thời điểm $t = 0$.

2/ Chính hóa hệ phương trình tích chập xuất phát từ phương trình nhiệt bằng phương pháp chặt cụt các tần số xấu của tích phân trong không gian tần số và từ đó đưa ra ba áp dụng:

Thứ nhất: Khảo sát bài toán tích chập một chiều xem như một mở rộng kết quả của Baumeister [15], (chương 10, trang 183-190) trong đó ta thống nhất hai trường hợp $|\hat{k}(p)| > 0$ với mọi p và \hat{k} có không điểm (tần số kỳ dị) vào trong một kết quả.

Thứ hai: bài toán tìm thông lượng nhiệt từ lỗ khoan thăm dò, phần này cho một ví dụ thực tế về trường hợp \hat{k} có không điểm.

Thứ ba: Bài toán tìm nhiệt độ bề mặt của một vật thể hai lớp, phần này ví dụ cho một hệ phương trình tích chập.

3/ Chính hóa bài toán tìm nhiệt độ bề mặt của một vật thể hai lớp (một chiều không gian) và của một vật thể một lớp (hai chiều không gian) từ việc đo nhiệt độ phía trong của vật thể.

4/ Chính hóa bài toán phi tuyến xác định nguồn nhiệt từ giá trị biên và giá trị của nhiệt độ tại các thời điểm $t = 0$ và $t = 1$.

5/ Chúng tôi đã chính hóa bài toán lỗ khoan thăm dò phi tuyến (chương 5).

6/ Chính hóa bài toán nhiệt ngược thời gian phi tuyến trên miền bị chặn bằng cách dùng hàm Green, phương pháp chặt cụt chuỗi. Nghiệm xấp xỉ ổn định được xây dựng trong một số trường hợp đặc biệt.

7/ Chính hóa bài toán nhiệt ngược thời gian phi tuyến trên miền không bị chặn bằng cách xấp xỉ phương trình ban đầu bằng phương trình có nghiệm ổn định. Nghiệm xấp xỉ ổn định được xây dựng.

KIẾN NGHỊ NHỮNG NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

Trong thời gian tới chúng tôi sẽ giải bài toán lỗ khoan thăm dò (được trình bày trong chương 3) với điều kiện biên hỗn hợp và sẽ cố gắng tìm nghiệm chính hóa tốt hơn cho bài toán lỗ khoan thăm dò phi tuyến (được trình bày trong chương 5). Kính mong sự giúp đỡ của quý thầy cô, quý đồng nghiệp.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] O.M.Alifanov, *Inverse heat transfer problem*, Springer-Verlag, 1998.
- [2] K.A.Ames, Continuous dependence on modelling and non-existence results for a Ginzburg-Landau equation, *Math. Meth. Appl. Sci.*, Vol. **23**, 1537-1550, 2000.
- [3] K.A.Ames and R.J.Hughes, Structural stability for ill-posed problems in Banach space, *Semigroup Forum*, Vol. **70**, 127-145, 2005.
- [4] K.A.Ames, L.E.Payne, Stabilizing the backward heat equation against errors in the initial time geometry. Inequalities and applications, *World Sci. Ser. Appl. Anal.*, **3**, World Sci. Publishing, River Edge, NJ., 47-52, 1994.
- [5] K.A.Ames and L.E.Payne, Asymptotic behavior for two regularizations of the Cauchy problem for the backward heat equation, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **8**, no 1, 187-202, 1998.
- [6] K.A.Ames and B.Straughan: *Non-standard and Improperly Posed Problems*, Academic Press, San Diego, 1997.
- [7] D.D.Ang, On the backward parabolic equation: a critical survey of some current methods in numerical analysis and mathematical modelling, *Banach Center Publications*, **24**, Warsaw, 1990.
- [8] D.D.Ang, Stabilized approximate solutions of the inverse time problem for a parabolic evolution equation, *J. Math. Anal. and Appl.*, Vol. **111**, 148-155, 1985.
- [9] D.D.Ang, A.P.N.Dinh and D.N.Thanh, An inverse Stefan problem: identification of boundary value, *J. of Comp. and Appl. Math.* **66**, pp 75-84, 1996.

- [10] D.D.Ang, A.P.N.Dinh and D.N.Thanh, Regularization of an inverse Stefan problem, *J. of Diff. and Integ. Eqs.*, **9**, 371-380, 1996.
- [11] D.D.Ang, A.P.N.Dinh and D.N.Thanh, A bidimensional inverse Stefan problem: identification of boundary value, *J. of Comp. and Appl. Math.*, **80**, 227-240, 1997.
- [12] D.D.Ang, R.Gorenflo and D.D.Trong, A multidimensional Hausdorff moment problem: regularization by finite moments, *Zeitschrift für Anal. und ihre Anwendungen* **18**, N^o 1, 13-25, 1999.
- [13] D.D.Ang, R.Gorenflo, L.K.Vy and D.D.Trong, 2002. *Moment theory and some Inverse Problems in Potential Theory and Heat Conduction*, Lecture Notes in Mathematics 1792, Springer, 2002.
- [14] D.D.Ang and D.D.Hai, On the backward heat equation, *Annales Polonici Mathematici* LII, 1990.
- [15] J. Baumeister, *Stable solutions of Inverse Problems*, Vieweg, 1987.
- [16] J.V.Beck, B.Blackwell and C.R.St.Clair, *Inverse Heat Conduction, Ill-posed Problem*, Wiley, New York, 1985.
- [17] G.Bluman, V.Shtelen, Nonlocal transformations of Kolmogorov equations into the backward heat equation, *J. Math. Anal. Appl.* **291**, No. 2, 419-437, 2004.
- [18] N.Cam, N.V.Nhan, A.P.N.Dinh, The backward heat equation: regularization by cardinal series, *Arch. Inequal. Appl.* **2**, 355-363, 2004.
- [19] J.R.Cannon, *The one-dimensional heat equation*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, **23**, Addison-Wesley, 1984.

- [20] J.R.Cannon, S.Pérez Esteva, Uniqueness and stability of 3D heat sources, *Inverse problems* **7**, No. 1, 57-62, 1991.
- [21] J.R.Cannon, S.Pérez Esteva, Some stability estimates for a heat source in terms of over specified data in the 3-D heat equation, *J. Math. Anal. Appl.*, **147**, No. 2, 363-371, 1990.
- [22] A.Carasso, Determining surface temperatures from interior observations, *SIAM J. Appl. Math.* **42**, pp. 558-547, 1981.
- [23] T.Cazenave and A.Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [24] G.Clark and C.Oppenheimer, Quasireversibility Methods for Non-Well-Posed Problem, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. **8**, pp. 1-9, 1994.
- [25] D.Colton, The inverse Stefan problem, *Ber. Gesellsch. Math. Datenverarb.*, **77**, 29-41, 1973.
- [26] D.Colton, The inverse Stefan problem for the heat equation in two space variables. *Mathematika*, **21**, 282-286, 1974.
- [27] D.Colton, *Partial differential equations*, Random House, New York, 1988.
- [28] P.N.Dinh, D.D.Trong and N.T.Long, Non homogeneous Heat Equation: Identification and Regularization for the Inhomogeneous Term, *J. Math. Anal. Appl.* **312**, No 1, 93-104, 2005.
- [29] H.Engl, K.Kunisch and A.Neubauer, Convergence rates for Tikhonov regularisation of non-linear ill-posed problems, *Inverse Problem*, **5**, 523-540, 1989.

- [30] H.Engl and P.Manselli, Stability estimates and regularization for an inverse heat conduction problem, *Numer. Funct. Anal. and Optim.*, **10**, pp. 517-540, 1989.
- [31] A.Erdelyi et al. *Tables of Integral Transforms*, Vol. 1, Mc Graw-Hill, New York, 1954.
- [32] A.Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Englewood Cliff., N. J., 1964.
- [33] C.L.Fu, Simplified Tikhonov and Fourier regularization methods on a general sideways parabolic equation, *J. Comput. Appl. Math.* **167**, no 4, 449-463, 2004.
- [34] H.Gajewski and K.Zacharias, Zur Regularisierung einer Klassenichtkorrekter Probleme bei Evolutionsgleichungen, *J. Math. Anal. Appl.* **38**, 784-789, 1972.
- [35] R.Gorenflo, D.D.Ang and D.N.Thanh, Regularization of a two dimensional inverse Stefan problem, *Proceedings*, International Workshop on Inverse Problems, HoChiMinh City, Jan. **17-19**, 45-54, 1995.
- [36] R.Gorenflo and S.Vessella, *Abel Integral Equations*, Lecture Notes in Mathematics 1461, Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [37] C.W.Groetsch, *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*, Pitman, London, 1984.
- [38] C.W.Groetsch, *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg, 1993.
- [39] C.W.Groetsch, On the Asymptotic Order of Accuracy of Tikhonov Regularization, *J. Optim. in the Appl.* **41**, 293-298, 1983.

- [40] D.N.Hao, A non-characteristic Cauchy problem for linear parabolic equations and related inverse problems: I. Solvability, *Inverse Problems* **10**, 295-315, 1994.
- [41] D.N.Hao, A mollification method for a noncharacteristic Cauchy problem for a parabolic, *J. Math. Anal. Appl.* **199**, 873-909, 1996.
- [42] D.N.Hao, Methods for inverse heat conduction problems, *Habilitationsschrift, University of Siegen, Siegen*, 1996.
- [43] D.N.Hao, A mollification method for ill-posed problems, *Numer. Math.* **68**, 469-506, 1994.
- [44] D.N.Hao and P.M.Hien, Stability results for the Cauchy problem for the Laplace equation in a strip, *Inverse Problems*, **19**, 833-844, 2003.
- [45] D.N.Hao, H.-J.Reinhardt, On a sideways parabolic equation, *Inverse Problem* **13**, no.2, 297-309, 1997.
- [46] D.N.Hao, H.J.Reinhardt and A.Schneider, Numerical solution to a side ways parabolic equation, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, **50**, 1253-1267, 2001.
- [47] D.N.Hao and H.Sahli, On a class of Severely Ill-Posed Problems, *Vietnam Journal of Mathematics* Vol.**32**, 143-152, 2004.
- [48] D.Henry, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, Springer - Verlag, 1981.
- [49] Y.Huang, Q.Zheng, Regularization for a class of ill-posed Cauchy problems, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133**, 3005-3012, 2005.
- [50] V.Isakov, *Inverse source problems*, AMS, 1990.
- [51] V.Isakov, *Inverse problems for partial differential equations*, Springer, 1998.

- [52] M.I.Ivanchov, The inverse problem of determining the heat source power for a parabolic equation under arbitrary boundary conditions, *J. Math. Sci (New York)*, **88**, No. 3, pp. 432-436, 1998.
- [53] M.I.Ivanchov, Inverse problem for a multidimensional heat equation with an unknown source function, *Mat. Stud.*, **16**, No. 1, 93-98, 2001.
- [54] F.John, Numerical of the heat equation for the preceding time, *Ann. Math. Pura Appl.* **40**, 129-142, 1955.
- [55] D.U.Kim, Construction of the solution of a certain system of heat equations with heat sources that depend on the temperature, *Izv. Akad. Nauk. Kazak. SSR Ser. Fiz-Mat*, **1**, 49-53, 1971.
- [56] S.G.Krein, *Linear differential equations in Banach space*. Trans. Math. Monogr. **29**, AMS, 1971.
- [57] S.G.Krein and O.I.Prozorovskaja, Analytic semi-groups and incorrect problems for evolutionary equations, *Soviet Math. Dokl.* Vol. **1**, pp. 841-844, 1960.
- [58] R.Lattès et J.L.Lions, *Méthode de Quasi-reversibilité et Applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [59] T.T.Le and M.P.Navarro, More on surface temperature determination from borehole measurements: Regularization and error estimates, *Int. J. of Math. and Math. Sci.*, 1995.
- [60] T.T.Le, P.H.Quan, D.N.Thanh, P.H.Uyen, Regularization of a class of convolutional equations by the method of truncated integration, *Journal Science and Technology Development*, Vol. **6**, 19-26, 2003.

- [61] T.T.Le, D.N.Thanh and P.H.Tri, Surface temperature determination from borehole measurements: a finite slab model, *Acta Mathematica Vietnamica*, Vol. **20**, No 2, pp 193-206, 1995.
- [62] M.Lees and M.H.Protter, Unique continuation for parabolic differential equations and inequalities. *Duke Math. J.*, **28**, 369-382, 1961.
- [63] B.Ya.Levin, *Lectures on Entire Functions*, AMS, Providence, Rhode Island, 1996.
- [64] G.S.Li, L.Z.Zhang, Existence of a nonlinear heat source in inverse heat conduction problems, *Hunan Ann. Math.*, **17**, No. 2, 19-24, 1997.
- [65] T.Matsuura, S.Saitoh, D.D.Trong, Approximate and analytical inversion formulas in heat conduction on multidimensional spaces , accepted for publication in *J. Inverse and Ill-posed Problems*, 2005.
- [66] K.Miller, Stabilized quasi-reversibility and other nearly-best-possible methods for non-well-posed problems, *Symposium on Non-Well-Posed Problems and Logarithmic Convexity (Heriot- Watt Univ., Edinburgh, 1972)*, pp. 161-176. Lecture Notes in Math., Vol. **316**, Springer, Berlin, 1973.
- [67] W.B.Muniz, F.M.Ramos, de Campos Velho, Entropy- and Tikhonov-based regularization techniques applied to the backwards heat equation. *Comput. Math. Appl.* **40**, No. 8-9, 1071-1084, 000.
- [68] L.E.Payne: *Improperly Posed Problems in Partial Differential Equations*, SIAM, 1975.
- [69] P.H.Quan and N.Dung, A backward nonlinear heat equation: regularization with error estimates, *Applicable Analysis*, Vol. **4**, No.4, 343-355, 2005.

- [70] P.H.Quan, T.N.Lien and D.D.Trong, A discrete form of the backward heat problem on the plane, accepted for Publication in *International Journal of Evolution Equations*, 2005.
- [71] P.H.Quan, D.N.Thanh and D.D.Trong, Recovering the surface temperature history of a two layer composite body, *Applicable Analysis*, Vol. **84**, No. **8**, 833-842, 2005.
- [72] P.H.Quan and D.D.Trong, Temperature determination from interior measurements: the case of temperature nonlinearly dependent heat source, *Vietnam Journal of Mathematics*, Vol.**32**, 131-142, 2004.
- [73] P.H.Quan, D.D.Trong, A nonlinearly backward heat problem: Uniqueness, Regularization and Error estimate, accepted for Publication in *Applicable Analysis*.
- [74] L.Rubinstein, The Stefan problem: Comments on its present state, *J. Inst. Math. Appl.*, Vol. **24**, 259-277, 1979.
- [75] S.Saitoh, V.K.Tuan, M.Yamamoto, Reverse convolution inequalities and applications to inverse heat source problems, *JIPAM J.Inequal. Pure Appl. Math.*, **3**, No. 5, Article 80, 11pp, (electronic) 2002.
- [76] G.Talenti and S.Vessella, Note on an ill-posed problem for the heat equation, *J. Austral. Math. Soc.*, **32**, pp. 358-368, 1981.
- [77] D.N.Thanh, N.V.Nhan, P.N.Dinh, T.T.Le, Surface temperature determination from borehole measurements: regularization by cardinal series, *Nonlinear Analysis* **50**, 1055-1063, 2002.

- [78] A.Tikhonov and V.Arsénine, *Méthodes de résolution de problèmes mal posés*, Editions Mir-Moscou, 1976.
- [79] D.D.Trong, P.H.Quan, P.N.Dinh Alain, Determination of a two-dimensional heat source: Uniqueness, regularization and error estimate, accepted for Publication in *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2005.
- [80] D.D.Trong, P.H.Quan, T.V.Khanh, and N.H.Tuan, A nonlinear case of the 1-D backward heat problem: Regularization and error estimate, submitted to ZAA, 2005.
- [81] P.Wang, K.Zheng, Reconstruction of heat sources in heat conduction equations, *Comput. Appl. Math.* ,**19**, No. 2, 231-238, 2000.
- [82] M.Yamamoto, Conditional stability in determination of densities of heat sources in a bounded domain in control and estimation of distributed parameter systems: nonlinear phenomena (Vorau, 1993), *International Series of Numerical Mathematics*, **118**, Birkhauser, Basel, 359-370, 1994.

DANH MỤC CÔNG TRÌNH CÔNG BỐ CỦA TÁC GIẢ

- [1] Tran Thi Le, Pham Hoang Quan, Dinh Ngoc Thanh, Pham Hoang Uyen, Regularization of a class of convolutional equations by the method of truncated integration, *Journal Science and Technology Development*, Vol. **6**, 19-26, 2003.
- [2] Pham Hoang Quan and Dang Duc Trong, Temperature determination from interior measurements: the case of temperature nonlinearly dependent heat source, *Vietnam Journal of Mathematics*, Vol. **32**, 131-142, 2004.
- [3] P. H. Quan and N. Dung, A backward nonlinear heat equation: regularization with error estimates, *Applicable Analysis*, Vol. **84**, No. **4**, 343-355, 2005.
- [4] D. D. Trong, P. H. Quan, P. N. Dinh Alain, Determination of a two-dimensional heat source: Uniqueness, regularization and error estimate, accepted for Publication in *Journal of Computational and Applied Mathematics*.
- [5] P. H. Quan, D. N. Thanh and D. D. Trong, Recovering the surface temperature history of a two layer composite body, *Applicable Analysis*, Vol. **84**, No. **8**, 833-842, 2005.
- [6] P. H. Quan, T. N. Lien and D. D. Trong, A discrete form of the backward heat problem on the plane, accepted for Publication in *International Journal of Evolution Equations*.
- [7] N. Dung, N.V. Huy, P. H. Quan, D. D. Trong, A Hausdorff-like moment problem and the inversion of the Laplace transform, accepted for Publication in *Mathematische Nachrichten*.

- [8] P. N. Dinh Alain, P. H. Quan and D. D. Trong, Sinc approximation of the heat distribution on the boundary of a two-dimensional finite slab, *online*, <https://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00012311>.
- [9] P. H. Quan, D. D. Trong and P. N. Dinh Alain, Sinc approximation of the heat flux on the boundary of a two-dimensional finite slab, *online*, <https://hal.ccsd.cnrs.fr/ccsd-00008986>.
- [10] D.D.Trong, P.H.Quan, T.V.Khanh, and N.H.Tuan, A nonlinear case of the 1-D backward heat problem: Regularization and error estimate, submitted to ZAA, 2005.
- [11] P. H. Quan, D. D. Trong, A nonlinearly backward heat problem: Uniqueness, Regularization and Error estimate, accepted for Publication in *Applicable Analysis*.