ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

LÊ MINH LƯU

TỐI ƯU HOÁ ĐA TRỊ PHỤ THUỘC THAM SỐ. ĐIỀU KIỆN CẦN TỐI ƯU VÀ BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

Chuyên ngành: Giải tích
Mã số: 1.01.01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. Phan Quốc Khánh, TS. Trần Huệ Nương.

TP. HỒ CHÍ MINH-2002

LỜI CẢM ƠN

Tác giả bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc tới Thầy GS. Phan Quốc Khánh và Cô TS. Trần Huệ Nương đã hết lòng giúp đỡ, hướng dẫn tác giả trong suốt thời gian thực hiện luận án. Tác giả trân trọng cảm ơn các thầy, cô Khoa Toán-Tin học, Ban giám hiệu, Phòng sau đại học và hợp tác quốc tế trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh đã giảng dạy và giúp đỡ tác giả.

Tác giả trân trọng cảm ơn GS. Nguyễn Văn Hiền thuộc Đại học Namur Vương quốc Bỉ và GS. Phan Quốc Khánh thuộc Đại học khoa học tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh phụ trách chương trình "Tối ưu hóa-Toán ứng dụng" trong hợp tác khoa học giữa Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh và hội đồng các trường Đại học dùng tiếng Pháp, Vương quốc Bỉ (C.I.U.F - C.U.D. / C.U.I.) đã khích lệ góp nhiều ý kiến qúy giá về chuyên môn, nhất là trong 3 tháng tác gỉa thực tập trong khuôn khổ chương trình này tại Namur. Sự biết ơn cũng xin được gửi đến GS. Phạm Thế Long, GS. Hoàng Xuân Phú và TS. Tạ Duy Phượng phụ trách Chương trình "Một số vấn đề chọn lọc cuả lý thuyết tối ưu và tính toán khoa học" (Viện Toán học) về những điều kiện thuận lợi hỗ trợ việc hoàn thành luận án của tác gỉa.

Nhân dịp này, tác giả cảm ơn PGS. Nguyễn Hữu Đức Hiệu trưởng, các đồng nghiệp Khoa Toán-Tin học và Phòng sau đại học Đại học Đà lạt đã động viên và tạo điều kiện để luận án được hoàn thành.

LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Phan Quốc Khánh và TS. Trần Huệ Nương.

Các kết quả, số liệu nêu trong luận án là trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ một công trình của tác gỉa nào khác.

TP. Hồ Chí Minh 14/07/2001

Lê Minh Lưu.

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Các hàm đa trị được nghiên cứu nhiều từ thập niên ba mươi thế kỷ 20. Tối ưu hoá có chứa các hàm đa trị, gọi tắt là tối ưu hóa đa trị, bắt đầu được nghiên cứu hệ thống về lý thuyết từ [Corley 1981], đã phát triển rất mạnh, trở thành một lĩnh vực ứng dụng giải tích đa trị nhiều nhất.

Lý thuyết về điều kiện cần tối ưu đóng vai trò nền móng và đã rất phong phú. Điều kiện đủ tối ưu thường chỉ được xuất hiện kèm theo, hoặc gắn với lý thuyết đối ngẫu. Kết quả phổ biến là ở dạng khẳng định rằng điều kiện cần tối ưu sẽ trở thành điều kiện đủ khi có thêm các giả thiết lồi nào đó. Vì vậy ở đây chúng tôi chỉ tập trung xét điều kiện cần.

Điều kiện cần tối ưu cổ điển nhất, nhưng cũng là cơ sở của mọi kết quả hiện đại là định lý Fermat khẳng định rằng cực trị địa phương x_0 của hàm $f : R \to R$ khả vi tại x_0 phải thỏa điều kiện cần tối ưu $\nabla f(x_0) = 0$. Định lý Weierstrass cổ điển mở rộng ra điều kiện cần để $f : R^n \to R$ đạt cực tiểu tại x_0 trên tập E lồi trong R^n là $\langle -\nabla f(x_0), x - x_0\rangle \geq 0$, $\forall x \in E$. Nếu $x_0 \in intE$ thì điều kiện này lại quay về $\nabla f(x_0) = 0$.

Bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển là tìm $x_0 \in E \subset R^n$ (là tập lồi, đóng, khác trống) sao cho $\langle t(x_0), x - x_0\rangle \geq 0$, $\forall x \in E$. Ở đây $t : R^n \to R^n$ là hàm đã cho. Như vậy bất đẳng thức biến phân ứng với $t = -\nabla f$ chính là điều kiện cần tối ưu Weierstrass cho f trên E. Vì vậy tiếp theo Chương 1 và 2 nghiên cứu điều kiện tối ưu dạng Fritz John và Kuhn-Tucker, mở rộng của điều kiện Fermat và Weierstrass ra trường hợp tập E được xác định bằng các ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức, Chương 3 nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân và cả dạng rất tổng quát là giả bất đẳng thức biến phân (quasi-variational inequality).

Đóng góp chính của chương này là các định lý tồn tại khá tổng quát, bao hàm và cải tiến nhiều kết quả của các tác giả nước ngoài mới công bố trong thời gian 1997-1999, nhất là giảm nhẹ được các giả thiết đơn điệu. Đồng thời chúng tôi cũng đưa ra dạng bất đẳng thức biến phân và bài toán bù mới.

Các bài toán phụ thuộc tham số đã được quan tâm từ nhiều thế kỷ. Có hai nguyên nhân chính dẫn đến phải xét bài toán phụ thuộc tham số. Một là bài toán thực tế thường có nhiều biến quan hệ với nhau rất phức tạp mà khi mô hình hoá toán học cần phân biệt biến độc lập chính và biến độc lập là tham số. [Ioffe-Tihomirov 1979] nghiên cứu điều kiện cần tối ưu ở các bài toán tham số như vậy cho tối ưu vô hướng và ứng dụng vào điều khiển hệ động. [Khanh-Nuong 1988, 1989] mở rộng kết quả đó cho tối ưu vectơ. Trong Chương 1 và 2 chúng tôi mở rộng nghiên cứu này ra cho bài toán tối ưu đa trị có tham số.

Điều kiện cần tối ưu kiểu Fritz John cho bài toán tối ưu đa trị (không có tham số) được xét trong [Corley 1981, 1988, 1989]. Giả thiết nặng và cốt yếu trong các nghiên cứu đó là nón thứ tự của các không gian được xét đều có phần trong khác trống. Nhưng với mô hình bài toán tối ưu như vậy không thể áp dụng cho các bài toán điều khiển tối ưu được, vì có các phương trình vi phân hoặc bao hàm thức vi phân. Để cải thiện tình hình đó chúng tôi phải xét bài toán có ràng buộc đẳng thức, khi đó nón thứ tự có phần trong bằng $\emptyset$. Chính điều này gây nên gần như toàn bộ khó khăn và đòi hỏi một cỗ máy kỹ thuật phức tạp mà trung tâm là định lý Lusternik.

Nguyên nhân thứ hai dẫn đến bài toán có tham số là dữ kiện của mọi bài toán thực tế chỉ là gần đúng và chịu biến động nên mô hình của bài toán có phụ thuộc tham số. Do đó cách tiếp cận tham số thứ hai là xét sự ổn định của nghiệm theo tham số. Chương 4 của luận án nghiên cứu tham số theo cách tiếp cận này và cụ thể là dành cho tính nửa liên tục trên của tập nghiệm bất đẳng thức biến phân. Đây là một hướng mới về nghiên cứu tính ổn định.

Cũng cần nói thêm rằng bất đẳng thức biến phân, được nghiên cứu hệ thống đầu tiên từ 1969 bởi Stampacchia, đã phát triển rất mạnh thành một lĩnh vực độc lập. Nó có nhiều liên quan và ứng dụng nhất đến hai chuyên ngành tối ưu hóa và phương trình đạo hàm riêng.

Ngoài việc bất đẳng thức biến phân là biểu hiện điều kiện tối ưu như trên đã nói, các mối quan hệ chính với tối ưu hóa là như sau.

1. Bài toán bất đẳng thức biến phân là tương đương với việc tìm cực tiểu không ràng buộc của hàm merit (hoặc gọi khác hàm gap) được định nghĩa phù hợp với bài toán bất đẳng thức biến phân.

2. Trường hợp tập xét là nón, bài toán bất đẳng thức biến phân là tương

đương với bài toán bù (complementarity problem).

3. Nghiệm cân bằng theo nghĩa Wardrop của bài toán mạng giao thông chính là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân được định nghĩa tương ứng với bài toán mạng.

4. Nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân chính là một hình chiếu theo nghĩa chuẩn nhỏ nhất. Cụ thể là x_0 là nghiệm bất đẳng thức biến phân cổ điển

$$\langle t(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0, \ \forall x \in E,$$

khi và chỉ khi $x_0 = P_E(x_0 - \alpha t(x_0))$ với $\alpha > 0$ cố định bất kỳ, ở đây $P_E(z)$ là phép chiếu của z trên tập lồi đóng E.

Trong luận án này các quan hệ 2 và 3 được phân tích khá kỹ trong các mục 3.6, 3.7 và 4.3 khi nghiên cứu các ứng dụng của các định lý đã thu được.

NỘI DUNG

chương 1

ĐIỀU KIỆN CẦN TỐI ƯU CHO TỐI ƯU HÓA ĐA TRỊ PHỤ THUỘC THAM SỐ VỚI RÀNG BUỘC ĐẲNG THỨC ĐƠN TRỊ

1.1 Đặt vấn đề

Mục này và Mục 1.2 nhằm xác định rõ vấn đề được xét và định nghĩa các khái niệm cần thiết ở hai Chương 1 và 2.

Bài toán tối ưu nhiều mục tiêu đa trị, phụ thuộc tham số, tổng quát, được phát biểu như sau. Giả sử X, Y, Z và W là các không gian Banach, trong đó Y và Z được sắp bởi các nón lồi K và M, tương ứng, chứa đỉnh 0 và có phần trong khác rỗng. Giả sử U là tập bất kỳ. Giả sử F, G và P là các ánh xạ đa trị từ $X \times U$ vào Y, Z và W, tương ứng. Chúng ta xét hai bài toán sau

$$\begin{aligned} &min\ F(x,u),\\ &G(x,u) \subset -M, \qquad\qquad (P)\\ &0 \in P(x,u); \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} &min\ F(x,u),\\ &G(x,u) \cap (-M) \neq \emptyset, \qquad\qquad (\tilde{P})\\ &0 \in P(x,u). \end{aligned}$$

Ở đây "min" có nghĩa là chúng ta tìm cực tiểu yếu hoặc cực tiểu (Pareto). Các khái niệm này cuả tối ưu nhiều mục tiêu được định nghĩa như sau.

ĐỊNH NGHĨA 1.1.1. Ánh xạ đa trị $F : X \rightsquigarrow Y$ được gọi là có *cực tiểu (toàn cục)* tại $(x_0; f_0)$, ở đây $f_0 \in \mathcal{F}(x_0)$, trên tập $A \subset X$ nếu

$$\mathcal{F}(A) - f_0 \subset Y \setminus ((-K) \setminus K). \qquad (1.1)$$

nếu (1.1) được thay bởi

$$\mathcal{F}(A) - f_0 \subset Y \setminus (-int\, K), \tag{1.2}$$

thì ta nói $\mathcal{F}$ có cực tiểu (toàn cục) yếu tại $(x_0; f_0)$ trên A. Nếu có một lân cận N của x_0 sao cho (1.1) (hoặc (1.2)) thoả với $\mathcal{F}(A)$ thay bởi $\mathcal{F}(A \cap N)$ thì ta nói $\mathcal{F}$ có cực tiểu địa phương (hoặc cực tiểu yếu địa phương, tương ứng) tại $(x_0; f_0)$.

Vì tập tham số U là tập bất kỳ, không cần có cấu trúc gì (để bài toán có dạng tổng quát) nên khi áp dụng định nghĩa trên cho bài toán (P) và $(\tilde{P})$ ta coi tô pô trên $X \times U$ là tô pô tích với tô pô trên U là tô pô tầm thường chỉ gồm $\emptyset$ và U.

Chú ý rằng nếu G là ánh xạ đơn trị g thì cả hai ràng buộc $G(x,u) \subset -M$ và $G(x,u) \cap (-M) \neq \emptyset$ đều trở thành $g(x,u) \leq 0$. Nếu P là ánh xạ đơn trị p thì ràng buộc $0 \in P(x,u)$ trở thành $p(x,u) = 0$. Vì vậy (P) và $(\tilde{P})$ chính là mở rộng bài toán tối ưu hóa với ràng buộc bất đẳng thức và đẳng thức ra trường hợp đa trị. Cũng chú ý rằng chúng ta dùng ký hiệu $\leq$ chung cho cả thứ tự trong Y và Z để đơn giản, vì ngữ cảnh sẽ chỉ rõ đó là thứ tự nào.

Ioffe và Tihomirov đã xét bài toán (P) và $(\tilde{P})$ trong trường hợp tối ưu một mục tiêu đơn trị, tức là F, G và P có dạng tương ứng $f : X \times U \to R$, $g : X \times U \to Z$, $p : X \times U \to W$ và chứng minh điều kiện cần tối ưu Fritz John và Kuhn-Tucker cho trường hợp lồi địa phương chính quy, là trường hợp p khả vi liên tục theo x, f và g khả vi đều theo mọi hướng và cùng với p thỏa một giả thiết kiểu giống lồi (convexlike). Nhờ các giả thiết nhẹ và thích hợp các điều kiện tối ưu này được áp dụng cho bài toán điều khiển tối ưu có ràng buộc trạng thái để rút ra nguyên lý cực đại Pontryagin. Ở đây tham số u chính là biến điều khiển. Trong [Khanh-Nuong 1988,1989], các kết quả này được mở rộng ra bài toán tối ưu nhiều mục tiêu, tức là bài toán với hàm mục tiêu là $f : X \times U \to Y$.

Trong Chương 1 và 2 chúng tôi xét bài toán tối ưu đa trị (P) và $(\tilde{P})$. Ở Chương 1 chúng tôi xét riêng bài toán với ánh xạ $P = p$ là đơn trị. Các bài toán này rất thường gặp vì ràng buộc đẳng thức $p(x,u) = 0$ thường là phương trình mô tả trạng thái cuả hệ, các điều kiện đầu và điều kiện biên.

Chương 2 mở rộng kết quả ra trường hợp P là ánh xạ đa trị, tức là bài toán đa trị hoàn toàn. Dạng hay gặp của bài toán này là $0 \in P(x, u)$ có dạng bao hàm thức vi phân. Chúng tôi chứng minh điều kiện cần tối ưu Fritz John và Kuhn-Tucker. Tuy nhiên việc áp dụng vào các bài toán điều khiển tối ưu hệ động còn đang là vấn đề nghiên cứu sắp tới của chúng tôi. Vì sự phức tạp của bài toán đa trị trong trường hợp này, luận án chưa thể bao hàm các nghiên cứu như vậy.

1.2 Các định nghĩa cơ bản

Ký hiệu $Z^\star$ là không gian đối ngẫu tô pô của Z, tức là không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên Z. Gọi $M^\star$ là nón liên hợp của nón M, tức là

$$M^\star := \{\mu \in Z^\star : \langle \mu, z\rangle \geq 0,\ \forall z \in M\}.$$

Cho (x_0, u_0) là một điểm chấp nhận được của (P) và $(\tilde{P})$ và với $g_0 \in G(x_0, u_0) \cap (-M)$ cố định. Khi đó ta định nghĩa

$$M_0 := \{\gamma(z + g_0) : \gamma \in R_+, z \in M\},$$

$$M_0^\star := \{\mu \in M^\star : \langle \mu, g_0\rangle = 0\} = (M_0)^\star.$$

Đồ thị $gr\mathcal{F}$ và miền hiệu quả $dom\mathcal{F}$ của ánh xạ đa trị $\mathcal{F} : X \rightsquigarrow Y$ được định nghĩa như sau

$$gr\mathcal{F} := \{(x, y) \in X \times Y : y \in \mathcal{F}(x)\},$$

$$dom\mathcal{F} := \{x \in X : \mathcal{F}(x) \neq \emptyset\}.$$

Đạo hàm Clarke của $\mathcal{F}$ tại $(x_0; f_0) \in gr\mathcal{F}$, ký hiệu là $D\mathcal{F}(x_0; f_0)$ là một ánh xạ đa trị cũng từ X vào Y có đồ thị là

$gr\ D\mathcal{F}(x_0; f_0) :=$

$$\left\{(v, w) \in X \times Y : \begin{array}{l} \forall (x_n, f_n) \to_F (x_0, f_0), \forall t_n \to 0^+, \exists (v_n, w_n) \to (v, w), \\ \forall n, f_n + t_n w_n \in F(x_n + t_n v_n) \end{array}\right\},$$

ở đây $\to_F$ nghĩa là $(x_n; f_n) \in gr\ \mathcal{F}$ và $(x_n, f_n) \to (x_0, f_0)$. Được biết rằng $D\mathcal{F}(x_0; f_0)$ luôn là một qúa trình lồi đóng, tức là ánh xạ đa trị có đồ thị là nón lồi đóng khác trống. Ta cũng dùng ký hiệu $p_x(x_0, u_0)$ cho đạo hàm Fréchet của ánh xạ đơn trị $p(., u_0)$ tại x_0.

Trong nghiên cứu của chúng tôi chỉ có tính khả vi theo hướng theo x sau đây cần giả thiết cho F và G.

ĐỊNH NGHĨA 1.2.1. Giả sử X và Y là các không gian Banach, Y được sắp bởi nón K. Ánh xạ đa trị $\mathcal{F} : X \rightsquigarrow Y$ được gọi là K - *khả vi đều* theo hướng $\bar{x} \in X$ tại $(x_0, f_0) \in gr\mathcal{F}$ nếu với mọi lân cận V của 0 trong Y, tồn tại lân cận N của $\bar{x}$ và số thực $\gamma_0 > 0$ sao cho $\forall \gamma \in (0, \gamma_0), \forall x \in N, \forall f \in \mathcal{F}(x_0 + \gamma x), \forall f' \in D\mathcal{F}(x_0; f_0)\bar{x}$,

$$\frac{1}{\gamma}(f - f_0) - f' \in V - K.$$

$\mathcal{F}$ được gọi là K -khả vi đều tại (x_0, f_0) nếu tính khả vi này đúng cho mọi hướng x trong $D\mathcal{F}(x_0, f_0)$.

Về sự liên tục theo biến x chúng ta sẽ cần tính nửa liên tục sau đây cho các ánh xạ đa trị.

ĐỊNH NGHĨA 1.2.2. Giả sử X, Y và K như ở Định nghĩa 1.2.1 và $\mathcal{F} : X \rightsquigarrow Y$. Giả sử $x_0 \in dom\mathcal{F}$ và $T \subset \mathcal{F}(x_0) \neq \emptyset$. $\mathcal{F}$ được gọi là K-nửa liên tục dưới mạnh (K-s.l.s.c.) theo T tại x_0 nếu với mọi lân cận V của 0 trong Y, tồn tại lân cận N của x_0 sao cho $\forall x \in N$, $\exists f_x \in \mathcal{F}(x)$,

$$f_x - T \subset V - K.$$

Nếu $\exists f_x \in \mathcal{F}(x)$, được thay bởi $\forall f_x \in \mathcal{F}(x)$ thì ta có định nghĩa của tính K-nửa liên tục dưới đều (K-u.l.s.c.).

Chú ý rằng nếu $x_0 \in intdom\mathcal{F}$, thì K-u.l.s.c. suy ra K-s.l.s.c. và nếu $\mathcal{F}$ là K-s.l.s.c. theo $\mathcal{F}(x_0)$, thì $\mathcal{F}(.) + K$ là nửa liên tục dưới theo nghĩa thông thường của ánh xạ đa trị.

Bây giờ nói về biến u. Tuy tập U không có cấu trúc gì nhưng chúng ta cũng cần có các giả thiết mở rộng (và giảm nhẹ) của tính giống lồi (convexlike) cổ điển của [Fan 1953] như trong ba định nghĩa sau đây.

ĐỊNH NGHĨA 1.2.3. Giả sử U là tập, còn Y và Z là các không gian tuyến tính được sắp bởi các nón lồi K và M, tương ứng.

(i) $\mathcal{F} : X \rightsquigarrow Y$ được gọi là K-giống lồi trong (U_1, U_2) nếu $\forall u_i \in U_i, U_i \subset U, \forall f_i \in \mathcal{F}(u_i), i = 1, 2, \forall \gamma \in [0, 1], \exists u \in U, \exists f_u \in \mathcal{F}(u)$,

$$(1-\gamma)f_1 + \gamma f_2 - f_u \in K.$$

(ii) $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) : U \rightsquigarrow Y \times Z$ được gọi là $K \times M$ giống lồi mạnh đối với $\mathcal{G}$ nếu $\forall u_i \in U, \forall f_i \in \mathcal{F}(u_i), \forall g_i \in \mathcal{G}(u_i), i = 1, 2, \forall \gamma \in [0, 1], \exists u \in U, \forall g_u \in \mathcal{G}(u), \exists f_u \in \mathcal{F}(u)$,

$$(1-\gamma)f_1 + \gamma f_2 - f_u \in K,$$
$$(1-\gamma)g_1 + \gamma g_2 - g_u \in M.$$

Chú ý rằng, giống như trường hợp lồi, từ các tính chất trên đây cho $i = 1, 2$ suy ra chúng cũng đúng cho $i = 1, ...m$ với mọi số tự nhiên m.

Từ nay ta sẽ định nghĩa đơn hình $\Sigma^m \subset R^m$ như sau

$$\Sigma^m := \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) : \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \leq 1, \alpha_i \geq 0\}.$$

ĐỊNH NGHĨA 1.2.4. Ánh xạ đa trị $(\mathcal{F}, \mathcal{P}) : X \times U \rightsquigarrow Y \times W$ được gọi là $K \times \{0\}$ -giống lồi yếu trong $(U, \{u_0\})$ tại x_0, mạnh đối với $\mathcal{P}$, nếu với mọi tập hữu hạn $\{u_1, ..., u_m\} \subset U$, tồn tại lân cận N của x_0 sao cho $\forall x \in N, \forall(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \Sigma^m, \exists f_x^{u_i} \in F(x, u_i), \forall p_x^{u_i} \in P(x, u_i), i = 0, ..., m, \exists u \in U, \exists f_x^u \in F(x, u), \exists p_x^u \in P(x, u)$,

$$f_x^{u_0} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(f_x^{u_i} - f_x^{u_0}) - f_x^u \in K,$$

$$p_x^{u_0} + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(p_x^{u_i} - p_x^{u_0}) - p_x^u = 0.$$

Mở rộng sau đây của tính giống lồi cũng liên quan đến cả biến x và u như Định nghĩa 1.2.4. Nó có dạng khá phức tạp nhưng là một tính chất khá nhẹ và không khó kiểm tra như Thí dụ 1.3.2 dưới đây chỉ rõ.

ĐỊNH NGHĨA 1.2.5. Bài toán (P) với ánh xạ $P := p$ đơn trị được gọi là giống lồi xấp xỉ tại (x_0, u_0) nếu với mọi tập hữu hạn $\{u_1, ..., u_s\} \subset U$, với mọi

$\delta > 0$, tồn tại $\epsilon > 0$, tồn tại lân cận V của x_0 và ánh xạ $v : V \times \epsilon \sum^s \longrightarrow U$, tồn tại $e \in K$ và $q \in M$ sao cho $\forall x, x' \in V$, $\exists f_x^{u_j} \in F(x, u_j)$, $g_x^{u_j} \in G(x, u_j)$, $j = 0, 1, ..., s$, $\forall \alpha, \alpha' \in \epsilon \sum^s$, $\forall g_x \in G(x, v(x, \alpha))$, $\exists f_x \in F(x, v(x, \alpha))$ thoả

$$v(x, 0) = u_0,$$

$$f_x^{u_0} + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j (f_x^{u_j} - f_x^{u_0}) + \delta(\|x - x_0\| + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j) e - f_x \in K,$$

$$g_x^{u_0} + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j (g_x^{u_j} - g_x^{u_0}) + \delta(\|x - x_0\| + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j) q - g_x \in M,$$

$$\|p(x, v(x, \alpha)) - p(x', v(x', \alpha')) - p_x(x_0, u_0)(x - x') - \sum_{j=1}^{s} (\alpha_j - \alpha_j') p(x_0, u_j)\|$$

$$\leq \delta(\|x - x'\| + \sum_{j=1}^{s} |\alpha_j - \alpha_j'|).$$

Ở đây đạo hàm $p_x(x_0, u_0)$ được giả thiết là tồn tại.

Chú ý rằng nếu $p(x, u) \equiv 0, F$ và G là đơn trị và định nghĩa chỉ đòi hỏi thoả với $\delta = 0$, thì định nghĩa trên chính là tính $K \times M$-giống lồi của ánh xạ đơn trị $F \times G$ theo nghĩa của [Fan 1953].

Để làm việc với bao hàm thức $0 \in P(x, u)$ ở Chương 2, ta cần định nghĩa sau.

ĐỊNH NGHĨA 1.2.6. Giả sử $\mathcal{F} : X \rightsquigarrow Y$, $x_0 \in dom\mathcal{F}$, $f_0 \in \mathcal{F}(x_0)$. Ánh xạ đơn trị $f : X \to Y$ xác định trong lân cận N của x_0 được gọi là *lát cắt địa phương chính quy* của $\mathcal{F}$ tại (x_0, f_0) nếu $f(x_0) = f_0$, $f(x) \in \mathcal{F}(x)$ với mọi $x \in N \bigcap dom\mathcal{F}$ và $f_x'(x_0)X = Y$. f được gọi là *lát cắt địa phương dưới chính quy* nếu $f_x'(x_0)X = Y$ được thay bởi $f_x'(x_0)X = D_x\mathcal{F}(x_0)X$ và có đối chiều hữu hạn.

1.3 Điều kiện cần cực trị cho bài toán với ràng buộc đẳng thức đơn trị

Trong mục này ta xét trường hợp hai bài toán (P) và $(\tilde{P})$ có ràng buộc $0 \in P(x, u)$ ở dạng $0 = p(x, u)$, tức là $P = p$ là ánh xạ đơn trị. Trước tiên ta xét bài toán $(\tilde{P})$.

ĐỊNH LÝ 1.3.1 *(Điều kiện cần Fritz John cho $(\tilde{P})$). Giả sử rằng*

(i) với mỗi $u \in U$, $p(.,u)$ khả vi liên tục tại x_0 và $p_x(x_0,u_0)$ là ánh xạ lên, ở đây (x_0,u_0) là điểm chấp nhận được của $(\tilde{P})$;

(ii) $F(.,u_0)$ và $G(.,u_0)$ là K-khả vi đều tại $(x_0,u_0;f_0)$ và M-khả vi đều tại $(x_0,u_0;g_0)$, tương ứng, ở đây $f_0 \in F(x_0,u_0), g_0 \in G(x_0,u_0) \cap (-M)$;

(iii) với mỗi $u \neq u_0, F(.,u)$ $(G(.,u)$, tương ứng) là K-s.l.s.c. theo $F(x_0,u)$ (M-s.l.s.c. theo $G(x_0,u)$) tại x_0. Hơn nữa, $F(.,u_0)$ $(G(.,u_0))$ là $-K$-s.l.s.c. theo f_0 ($-M$-s.l.s.c. theo g_0, tương ứng) tại x_0;

(iv) với mọi x trong một lân cận V của $x_0, (F,G,p)(x,.)$ là $K \times M \times \{0\}$-giống lồi trong $(U,\{u_0\})$. Hơn nữa, $(F,G,p)(x_0,.)$ là $K \times M \times \{0\}$-giống lồi trong (U,U).

Nếu $(x_0,u_0;f_0)$ là cực tiểu yếu địa phương của $(\tilde{P})$, thì tồn tại $(\lambda_0,\mu_0,\nu_0) \in K^* \times M_0^* \times W^* \setminus \{0,0,0\}$ sao cho, với mọi $(x,u) \in X \times U$,

$$\begin{aligned}&\langle \lambda_0, D_xF(x_0,u_0;f_0)x + F(x_0,u) - f_0\rangle\\&+\langle \mu_0, D_xG(x_0,u_0;g_0)x + G(x_0,u) - g_0\rangle\\&+\langle \nu_o, p_x(x_0,u_0)x + p(x_0,u) - p(x_0,u_0)\rangle \subset R_+.\end{aligned} \tag{1.3}$$

Chứng minh: Nếu

$$x \notin domD_xF(x_0,u_0;f_0) \bigcap domD_xG(x_0,u_0;g_0),$$

thì vế trái của (1.3) là trống và rõ ràng (1.3) đúng. Vậy ta có thể giả thiết rằng x là thuộc phần giao này. Tuy nhiên, để đơn giản các kí hiệu ta vẫn viết $x \in X$.

Giả sử C là tập bao gồm tất cả các $(y,z,w) \in Y \times Z \times W$ sao cho $\exists (x,u) \in X \times U, \exists f_x^l \in D_xF(x_0,u_0;f_0)x, \exists f_{x_0}^u \in F(x_0,u)$, $\exists g_x^l \in D_xG(x_0,u_0;g_0)x, \exists g_{x_0}^u \in G(x_0,u)$,

$$f_x^l + f_{x_0}^u - f_0 - y \in -intK, \tag{1.4}$$

$$g_x^l + g_{x_0}^u - g_0 - z \in -intM, \tag{1.5}$$

$$p_x(x_0,u_0)x + p(x_0,u) = w. \tag{1.6}$$

Ta sẽ chỉ ra C là tập lồi. Thực vậy, nếu $(y_i, z_i, w_i) \in C$, $i = 1, 2$, thì, với cách kí hiệu tương tự trong (1.4)-(1.6), ta có, từ mỗi $\gamma \in [0, 1]$,

$$\gamma f'_{x_1} + (1-\gamma) f'_{x_2} + \gamma f^{u_1}_{x_0} + (1-\gamma) f^{u_2}_{x_0} - f_0 \le \gamma y_1 + (1-\gamma) y_2, \quad (1.7)$$

$$\gamma g'_{x_1} + (1-\gamma) g'_{x_2} + \gamma g^{u_1}_{x_0} + (1-\gamma) g^{u_2}_{x_0} - g_0 \le \gamma z_1 + (1-\gamma) z_2, \quad (1.8)$$

$$p_x(x_0, u_0)(\gamma x_1 + (1-\gamma)x_2) + \gamma p(x_0, u_1) + (1-\gamma) p(x_0, u_2) = \gamma w_1 + (1-\gamma) w_2. \quad (1.9)$$

Bởi tính lồi cuả đạo hàm Clarke, đặt $\overline{x} := \gamma x_1 + (1-\gamma)x_2$ ta thấy rằng

$$f'_{\overline{x}} := \gamma f'_{x_1} + (1-\gamma) f'_{x_2} \in D_x F(x_0, u_0; f_0)\overline{x},$$
$$g'_{\overline{x}} := \gamma g'_{x_1} + (1-\gamma) g'_{x_2} \in D_x G(x_0, u_0; g_0)\overline{x}.$$

Do tính $K \times M \times \{0\}$-giống lồi của $(F, G, p)(x_0, .)$ trong (U, U) ta có $\overline{u} \in U, f^{\overline{u}}_{x_0} \in F(x_0, \overline{u})$ và $g^{\overline{u}}_{x_0} \in G(x_0, \overline{u})$ sao cho

$$f^{\overline{u}}_{x_0} \le \gamma f^{u_1}_{x_0} + (1-\gamma) f^{u_2}_{x_0},$$
$$g^{\overline{u}}_{x_0} \le \gamma g^{u_1}_{x_0} + (1-\gamma) g^{u_2}_{x_0},$$
$$p(x_0, \overline{u}) = \gamma p(x_0, u_1) + (1-\gamma) p(x_0, u_2).$$

Bởi vậy, (1.7)-(1.9) đồng thời chỉ ra là
$(\overline{y}, \overline{z}, \overline{w}) := \gamma(y_1, z_1, w_1) + (1-\gamma)(y_2, z_2, w_2)$ thuộc C, tức là C lồi.

Tiếp theo ta chứng minh rằng $intC \neq \emptyset$. giả sử là $(\overline{y}, \overline{z}, \overline{w}) \in C$. Thì với $\epsilon > 0$ đủ bé và cố định

$$f'_{\overline{x}} + f^{u}_{x_0} - f_0 - \overline{y} + \epsilon B_Y \subset -intK, \quad (1.10)$$

$$g'_{\overline{x}} + g^{u}_{x_0} - g_0 - \overline{z} + \epsilon B_Z \subset -intM, \quad (1.11)$$

$$p_x(x_0, u_0)\overline{x} + p(x_0, u) = \overline{w}, \quad (1.12)$$

ở đây B_X, B_Y và B_Z là các quả cầu đơn vị mở trong X, Y và Z, tương ứng.

Bởi tính K-khả vi đều cuả $F(., u_0)$ trong giả thiết (ii), $\exists \delta > 0, \exists \gamma_0 > 0, \forall x \in \overline{x} + \delta B_X, \forall \gamma \in (0, \gamma_0), \forall f \in F(x_0 + \gamma x, u_0)$,

$$\frac{1}{\gamma}(f - f_0) - f'_{\overline{x}} \in \frac{\epsilon}{4} B_Y - K. \quad (1.13)$$

Bây giờ từ mỗi $x \in \overline{x} + \frac{\delta}{2}B_X$ và mỗi $f'_x \in D_xF(x_0, u_0; f_0)x$ suy ra rằng, $\forall\epsilon, \exists\gamma \in (0, \gamma_0), \exists x' \in x + \frac{\delta}{2}B_X, \exists f \in F(x_0 + \gamma x', u_0)$,

$$f'_x - \frac{1}{\gamma}(f - f_0) \in \frac{\epsilon}{4}B_Y. \tag{1.14}$$

(1.13) và (1.14) đồng thời chỉ ra rằng $\forall x \in \hat{x} + \frac{\delta}{2}B_X$,
$\forall f'_x \in D_xF(x_0, u_0; f_0)x, \exists\gamma \in (0, \gamma_0), \exists x' \in x + \frac{\delta}{2}B_X, \exists f \in F(x_0 + \gamma x', u_0)$,

$$f'_x - f'_{\overline{x}} = f'_x - \frac{1}{\gamma}(f - f_0) + \frac{1}{\gamma}(f - f_0) - f'_{\overline{x}} \in \frac{\epsilon}{2}B_Y - K. \tag{1.15}$$

Dùng (1.10),(1.15) ta thấy là, với mỗi $x \in \overline{x} + \frac{\delta}{2}B_X$ và $f'_x \in D_xF(x_0, u_0; f_0)x$,

$$f'_x + f^u_{x_0} - f_0 - \overline{y} + \frac{\epsilon}{2}B_Y \subset -K - intK \subset -intK.$$

Tương tự, với mỗi $x \in \overline{x} + \frac{\delta}{2}B_X$ và $g'_x \in D_xG(x_0, u_0; g_0)x$,

$$g'_x + g^u_{x_0} - g_0 - \overline{z} + \frac{\epsilon}{2}B_Y \subset -intM.$$

Bởi (1.12), ta thấy từ giả thiết (i) rằng $p_x(x_0, u_0)(\overline{x} + \frac{\delta}{2}B_X) + p(x_0, u)$ chứa lân cận mở $\overline{w} + \epsilon_1 B_W$ của $\overline{w}$. Bây giờ dễ kiểm tra rằng

$$(\overline{y} + \frac{\epsilon}{2}B_Y) \times (\overline{z} + \frac{\epsilon}{2}B_Z) \times (\overline{w} + \epsilon_1 B_W) \subset C,$$

tức là $intC \neq \emptyset$. Nếu

$$C \cap \{(-intK) \times (-intM_0^{**}) \times \{0\})\} = \emptyset, \tag{1.16}$$

thì bởi định lý tách ta thu được (1.3).

Để chứng minh (1.16), ta giả sử ngược lại là tồn tại $(\hat{x}, \hat{u}) \in X \times U$, $f'_{\hat{x}} \in D_xF(x_0, u_0; f_0)\hat{x}$, $g'_{\hat{x}} \in D_xG(x_0, u_0; g_0)\hat{x}$, $f^{\hat{u}}_{x_0} \in F(x_0, \hat{u})$ và $g^{\hat{u}}_{x_0} \in G(x_0, \hat{u})$ sao cho

$$f'_{\hat{x}} + f^{\hat{u}}_{x_0} - f_0 \in -int\ K, \tag{1.17}$$

$$g'_{\hat{x}} + g^{\hat{u}}_{x_0} - g_0 \in -int\ M_0^{**}, \tag{1.18}$$

$$p_x(x_0, u_0)\hat{x} + p(x_0, \hat{u}) = 0. \tag{1.19}$$

Ta định nghĩa ánh xạ $\mathcal{P} : X \times R \to W$ bởi

$$\mathcal{P}(x, \alpha) := \alpha p(x_0 + x, \hat{u}) + (1 - \alpha)p(x_0 + x, u_0). \tag{1.20}$$

Ta thấy rằng $\mathcal{P}(0,0) = 0, \mathcal{P}'(0,0)(x,\alpha) = p_x(x_0, u_0)x + \alpha p(x_0, \hat{u})$ và $\mathcal{P}'(0,0)(\hat{x}, 1) = 0$. Hơn nữa, bởi định lý Lusternik, tồn tại $t^0 > 0$ và ánh xạ $t \to \hat{x}(t), t \to \hat{\alpha}(t)$ cuả $[0, t^0]$ vào X và R, tương ứng, sao cho $\hat{x}(t) \to 0$ và $\hat{\alpha}(t) \to 0$ khi t tiến tới 0 và, từ mỗi $t \in [0, t^0]$,

$$\mathcal{P}(t(\hat{x} + \hat{x}(t), t(1 + \hat{\alpha}(t))) = 0. \tag{1.21}$$

Đặt $x(t) := x_0 + t(\hat{x} + \hat{x}(t))$, từ (1.20) và (1.21) ta thu được

$$t(1 + \hat{\alpha}(t))p(x(t), \hat{u}) + (1 - t(1 + \hat{\alpha}(t)))p(x(t), u_0) = 0.$$

Vì vậy, bởi (iv), từ mỗi t đủ bé, tồn tại $u(t) \in U$ sao cho

$$p(x(t), u(t)) = 0.$$

Nếu ta chỉ ra rằng với t đủ bé, tồn tại $f_t \in F(x(t), u(t))$ sao cho

$$\begin{gathered} G(x(t), u(t)) \cap (-M) \neq \emptyset, \\ f_t - f_0 \in -int\, K, \end{gathered}$$

thì điều này sẽ mâu thuẫn với tính cực tiểu cuả $(x_0, u_0; f_0)$.

Bởi giả thiết (iii), với t đủ bé và với ϵ, tồn tại $g^{\hat{u}}_{x(t)} \in G(x(t), \hat{u})$ và $g^{u_0}_{x(t)} \in G(x(t), u_0)$ thoả

$$g^{\hat{u}}_{x(t)} - g^{\hat{u}}_{x_0} \in \epsilon B_Z - M, \tag{1.22}$$
$$-g^{u_0}_{x(t)} + g_0 \in \epsilon B_Z - M. \tag{1.23}$$

Bởi tính M-khả vi đều cuả $G(., u_0)$ giả thiết trong (ii), với mọi δ và t đủ bé,

$$g^{u_0}_{x(t)} \in g_0 + tg'_{\hat{x}} + \frac{t\delta}{2}B_Z - M. \tag{1.24}$$

Kết hợp với (1.18) chọn δ bé để

$$g'_{\bar{x}} + g^{\hat{u}}_{\bar{x}_0} - g_0 + \delta B_Z - M \subset -int\ M_0^{**}. \tag{1.25}$$

Bây giờ ước lượng $g^{u_0}_{x(t)} + t(1+\hat{\alpha}(t))(g^{\hat{u}}_{x(t)} - g^{u_0}_{x(t)})$ ta có, bởi (1.22), (1.23) và $\hat{\alpha}(t) \to 0$,

$$\begin{aligned}
&t(1+\hat{\alpha}(t))(g^{\hat{u}}_{x(t)} - g^{u_0}_{x(t)}) \\
&= t(1+\hat{\alpha}(t))(g^{\hat{u}}_{x(t)} - g^{\hat{u}}_{\bar{x}_0} - g^{u_0}_{x(t)} + g_0) + t(g^{\hat{u}}_{\bar{x}_0} - g_0) + t\hat{\alpha}(t)(g^{\hat{u}}_{\bar{x}_0} - g_0) \\
&\in t(1+\hat{\alpha}(t))(2\epsilon B_Z - M) + t(g^{\hat{u}}_{\bar{x}_0} - g_0) + t\epsilon B_Z \subset t(g^{\hat{u}}_{\bar{x}_0} - g_0 + \tfrac{\delta}{2}B_Z - M)
\end{aligned}$$

với mọi $\epsilon > 0$ đủ bé. Điều này cùng với (1.24) cho ta $b^t_\delta \in \delta B_Z$ và $m^t \in M$ sao cho

$$g^{u_0}_{x(t)} + t(1+\hat{\alpha}(t))(g^{\hat{u}}_{x(t)} - g^{u_0}_{x(t)}) = g_0 + t(g'_{\bar{x}} + g^{\hat{u}}_{\bar{x}_0} - g_0 + b^t_\delta - m^t). \tag{1.26}$$

Hơn nữa, từ (iv), tồn tại $g_t \in G(x(t), u(t))$ sao cho

$$g_0 + t(g'_{\bar{x}} + g^{\hat{u}}_{\bar{x}_0} - g_0 + b^t_\delta - m^t) \in g_t + M. \tag{1.27}$$

Tới việc kiểm tra $G(x(t), u(t)) \cap (-M) \neq \emptyset$ với mọi $t > 0$ đủ bé , ta giả sử ngược lại rằng $\exists t_n \to 0^+, \exists \mu_n \in M^*, \|\mu_n\| = 1$ (giả sử rằng μ_n hội tụ *-yếu tới $\overline{\mu} \in M^*$), $\langle \mu_n, g_{t_n} \rangle \geq 0$. $\overline{\mu}$ là thuộc M_0^*. Thực vậy, Nếu $\overline{\mu} \notin M_0^*$, tồn tại $\beta > 0$ sao cho $\langle \overline{\mu}, g_0 \rangle < -\beta$. Mặt khác từ (1.27) suy ra

$$\langle \mu_n, g_{t_n} \rangle \leq \langle \mu_n, g_0 \rangle + t_n \langle \mu_n, g'_{\bar{x}} + g^{\hat{u}}_{\bar{x}_0} - g_0 + b^{t_n}_\delta - m^{t_n} \rangle. \tag{1.28}$$

Vậy, với t_n đủ bé, $\langle \mu_n, g_{t_n} \rangle < 0$, là mâu thuẫn.

Bây giờ từ $\overline{\mu} \in M_0^*$, và (1.25) suy ra, với n đủ lớn,

$$t_n \langle \mu_n, g'_{\bar{x}} + g^{\hat{u}}_{\bar{x}_0} - g_0 + b^{t_n}_\delta - m^{t_n} \rangle < 0.$$

Vậy (1.28) mâu thuẫn với $\langle \mu_n, g_{t_n} \rangle \geq 0$.

Sử dụng chứng minh ở trên cho F thay thế cho G ta có $f_t \in F(x(t), u(t))$ sao cho (tương tự như (1.27), (1.25))

$$\begin{aligned}
f_t - f_0 &\in -K + t(f'_{\bar{x}} + f^{\hat{u}}_{\bar{x}_0} - f_0 + b^t_\delta - k^t) \\
&\subset -K - int\ K = -int\ K.
\end{aligned}$$

Vậy, (1.16) là đúng và chứng minh kết thúc.□

CHÚ Ý 1.3.1. Điều kiện cần tối ưu (1.3) có dạng quy tắc nhân tử cổ điển. Một dạng khác đã được dùng trong [Ioffe-Tihomirov 1979],[Khanh $1995_a, 1995_b$], [Khanh-Nuong 1988,1989] cho trường hợp F, G và P là các ánh xạ đơn trị. Với bài toán $(\tilde{P})$ dạng tương đương đó của (1.3) là

$$(a) \qquad \langle \lambda_0, D_x F(x_0, u_0; f_0)x\rangle + \langle \mu_0, D_x G(x_0, u_0; g_0)x\rangle + \langle \nu_o, p_x(x_0, u_0)x\rangle \subset R_+ \quad \forall\, x \in X;$$

$$(b) \qquad \langle \lambda_0, f_0\rangle + \langle \mu_0, g_0\rangle + \langle \nu_o, p_0\rangle = min_{u\in U}\{f(\lambda_0, x_0, u) + g(\mu_0, x_0, u) + p(\nu_0, x_0, u)\},$$

Ở đây $p_0 = p(x_0, u_0) = 0$, $f(\lambda_0, x_0, u) = min\{\langle \lambda_0, y\rangle;\ y \in F(x_0, u)\}$, $g(\mu_0, x_0, u) = min\{\langle \mu_0, z\rangle;\ z \in G(x_0, u)\}$ và $p(\nu_0, x_0, u) = \langle \nu_0, p(x_0, u)\rangle$.

Bây giờ ta chuyển sang điều kiện cần tối ưu Kuhn-Tucker. Cũng như trường hợp cổ điển, bổ sung thêm định tính ràng buộc kiểu Slater ta được

ĐỊNH LÝ 1.3.2 *(Điều kiện cần Kuhn-Tucker cho $(\tilde{P})$). Với các giả thiết của Định lý 1.3.1, giả sử rằng $p_x(x_0, u_0)X + p(x_0, U)$ chứa lân cận gốc toạ độ và tồn tại $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in X \times U$, $g'_{\tilde{x}} \in D_x G(x_0, u_0; g_0)\tilde{x}$ và $\tilde{g} \in G(x_0, \tilde{u})$ sao cho*

$$g'_{\tilde{x}} + \tilde{g} - g_0 \in -int\, M_0^{**},$$
$$p_x(x_0, u_0)\tilde{x} + p(x_0, \tilde{u}) = 0.$$

Khi đó λ_0 khác 0.

Chứng minh: Giả sử $\lambda_0 = 0$. Nếu $\mu_0 = 0$, thì $\nu_0 \neq 0$. Từ $p_x(x_0, u_0)X + p(x_0, U)$ chứa lân cận của gốc toạ độ, ta có thể chọn $(x_1, u_1) \in X \times U$ sao cho

$$\langle \nu_0, p_x(x_0, u_0)x_1 + p(x_0, u_1)\rangle < 0,$$

là mâu thuẫn với (1.3). Do đó $\mu_0 \neq 0$. Nhưng khi đó $(\tilde{x}, \tilde{u})$ không thoả (1.3). Bởi vậy, $\lambda_0 \neq 0$. □

Tiếp theo hãy xét bài toán (P). Thay tính giống lồi trong $(U, \{u_0\})$ ở giả thiết (iv) của Định lý 1.3.1 và 1.3.2 bởi tính giống lồi trong $(U, \{u_0\})$ mạnh đối với G được định nghĩa dưới đây ta dễ dàng chứng minh tương tự trên đây để được điều kiện cần tối ưu đúng như ở Định lý 1.3.1 và 1.3.2.

ĐỊNH NGHĨA 1.3.1. Giả sử F, G và p xác định như trong bài toán (P). Ta nói $(F, G, p)(x, .)$ là $K \times M \times \{0\}$-giống lồi trong $(U, \{u_0\})$ mạnh theo G nếu $\forall u_1 \in U, \forall (f^1, g^1) \in F(x, u_1) \times G(x, u_1), \forall (f^0, g^0) \in F(x, u_0) \times G(x, u_0), \forall \gamma \in [0, 1], \exists u \in U, \forall g^u \in G(x, u), \exists f^u \in F(x, u)$,

$$\gamma f^1 + (1-\gamma) f^0 - f^u \in K,$$
$$\gamma g^1 + (1-\gamma) g^0 - g^u \in M,$$
$$\gamma p(x, u_1) + (1-\gamma) p(x, u_0) = p(x, u).$$

CHÚ Ý 1.3.2. Vì diễn đạt của các giả thiết ở hai định lý trên khá phức tạp ta hãy phân tích thêm. Giả thiết (i) là chặt nhất nhưng là không tránh khỏi với cách tiếp cận và sử lý ràng buộc đẳng thức bằng cách áp dụng Định lý Lusternik. Tính khả vi đều ở (ii) là mở rộng cho ánh xạ đa trị của các khái niệm tương ứng của [Ioffe-Tihomirov 1979]. Thí dụ dưới đây cho ta ánh xạ đa trị thoả đồng thời (ii) và (iii). Tính $K \times M \times \{0\}$-giống lồi trong (iv) là yếu hơn $K \times M \times \{0\}$-lồi thường gặp trong các trường hợp lồi.

THÍ DỤ 1.3.1. Giả sử $X = R, U = R$ và $x_0 \in X$. Giả sử $G : X \times U \rightsquigarrow R$ xác định theo

$$G(x, u) := (x - x_0)^2(|u|[0, 1] - 1).$$

Ta kiểm tra (ii) và (iii) với $(x_0, u_0) := (x_0, -1)$.

(ii) Cho $\epsilon > 0$ và $\overline{x} \in X$ ta xác định $\delta > 0$ sao cho, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \forall g' \in D_x G(x_0, u_0; g_0)\overline{x}, \forall \gamma > 0$,

$$G(x_0 + \gamma x, u_0) - g_0 - \gamma g' \subset \gamma(-\epsilon, \epsilon) - R_+, \tag{1.29}$$

ở đây $g_0 \in G(x_0, u_0) = \{0\}$. Đầu tiên ta chỉ ra là $D_x G(x_0, u_0; 0)\overline{x} = \{0\}$ $\forall \overline{x} \in X$. Bởi định nghĩa , $g' \in D_x G(x_0, u_0; 0)\overline{x}$ nghĩa là $\forall g_n \to 0, \forall x_n \to x_0, \forall t_n \to 0^+, \exists \overline{x}_n \to \overline{x}, \exists g'_n \to g', \forall n$,

$$g_n + t_n g'_n \in G(x_n + t_n \overline{x}_n, u_0) \equiv [-(x_n + t_n \overline{x}_n - x_0)^2, 0].$$

Chọn $g_n \equiv 0, x_n \equiv x_0$ ta được $g'_n \in [-t_n \overline{x}_n^2, 0]$ $\forall n$. Vì thế, từ $g'_n \to g', t_n \to 0^+$ và $\overline{x}_n \to \overline{x}, g' = 0$. Do đó, (1.29) là

$$[-\gamma^2 x^2, 0] \subset \gamma(-\epsilon, \epsilon) - R_+,$$

luôn luôn đúng (từ mỗi $\delta > 0$ và $\gamma > 0$).

(iii) Với mỗi $u \neq u_0$ và $\epsilon > 0$ ta tìm được $\delta > 0$ sao cho , $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$G(x,u) - G(x_0,u) \equiv [0, (x-x_0)^2|u|] - (x-x_0)^2 \subset (-\epsilon, \epsilon) - R_+.$$

(Tính chất này là mạnh hơn R_+-s.l.s.c. với $G(x_o, u)$.) δ có thể lấy là $\sqrt{\dfrac{\epsilon}{|u|}}$.

Bây giờ ta kiểm tra lại tính chất mạnh hơn - R-s.l.s.c. với $g_0 = 0$ của $G(., u_0)$. Với mỗi $\epsilon > 0$, ta xác định $\delta > 0$ sao cho , $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$G(x, u_0) - g_0 \equiv [-(x-x_0)^2, 0] \subset (-\epsilon, \epsilon) + R_+.$$

Bởi vậy có thể chọn $\delta = \sqrt{\epsilon}$.

Nhận xét rằng Định lý 1.3.1 và 1.3.2 chứa các kết quả tương ứng trong [Ioffe-Tihomirow 1979] cho bài toán (P) và $(\tilde{P})$ đơn trị với giả thiết $p_x(x_0, u_0)X = W$ như trường hợp riêng. Giả thiết này khá nặng, hạn chế khả năng áp dụng rõ rệt. Chẳng hạn khi áp dụng vào điều khiển tối ưu đòi hỏi giảm nhẹ giả thiết này thành $p_x(x_0, u_0)X$ có đối chiều hữu hạn. Đồng thời giả thiết (iv) về giống lồi cũng là một trở ngại cần giảm nhẹ xuống yêu cầu về giống lồi xấp xỉ theo Định nghĩa 1.2.5. Đi theo hướng này ta cần bổ đề sau.

BỔ ĐỀ 1.3.3. *Giả sử X và Y là các không gian Banach, Y được sắp bởi nón lồi K và $\mathcal{F} : X \rightsquigarrow Y$ là K-khả vi đều tại $(x_0, f_0) \in gr\mathcal{F}$. Khi đó* $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x' \in x + \delta B_X, \forall f'_x \in D\mathcal{F}(x_0; f_0)x$,

$$D\mathcal{F}(x_0; f_0)x' \subset f'_x + \epsilon B_Y - K,$$

ở đây B_X là quả cầu đơn vị mở trong X.

Chứng minh: Bởi $\mathcal{F}$ là K-khả vi đều tại (x_0, f_0), $\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \exists \gamma_0 > 0, \forall \gamma \in (0, \gamma_0), \forall x_1 \in x + 2\delta B_X, \forall f \in \mathcal{F}(x_0 + \gamma x_1), \forall f'_x \in D\mathcal{F}(x_0; f_0)x$,

$$\frac{f - f_0}{\gamma} - f'_x \in \frac{\epsilon}{2} B_Y - K. \tag{1.30}$$

Mặt khác, nếu $f'_{x'} \in D\mathcal{F}(x_0; f_0)x'$, thì

$$\liminf_{\gamma \to 0^+, x'' \to x'} d(f'_{x'}, \frac{\mathcal{F}(x_0 + \gamma x'') - f_0}{\gamma}) = 0,$$

Từ đó $\exists x_n \to x', \exists \gamma_n \to 0^+, \exists f_n \in \mathcal{F}(x_0 + \gamma_n x_n)$, $\frac{f_n - f_0}{\gamma_n} \to f'_{x'}$,
và do đó $\exists N_0, \forall n > N_0$,

$$f'_{x'} - \frac{f_n - f_0}{\gamma_n} \in \frac{\epsilon}{2} B_Y, \tag{1.31}$$

$$x_n \in x' + \delta B_X, \ \gamma_n < \gamma_0.$$

Từ (1.30),(1.31) ta có $\forall x' \in x + \delta B_X, \forall f'_x \in D\mathcal{F}(x_0; f_0)x, \forall f'_{x'} \in D\mathcal{F}(x_0; f_0)x', \forall n > N_0$,

$$\begin{aligned} f'_{x'} - f'_x &= f'_{x'} - \frac{f_n - f_0}{\gamma_n} + \frac{f_n - f_0}{\gamma_n} - f'_x \\ &\in \frac{\epsilon}{2} B_Y + \frac{\epsilon}{2} B_Y - K \subset \epsilon B_Y - K. \square \end{aligned}$$

Để thấy rõ hai bài toán (P) và $(\tilde{P})$ có quan hệ mật thiết, khác với phần trên, bây giờ ta xét (P) trước. Ta sẽ giảm nhẹ giả thiết (i) và (iv) theo hướng trên. Tuy vậy ta phải thắt chặt thêm ở (ii) và (iii) từ tính nửa liên tục dưới mạnh thành nửa liên tục dưới đều như sau.

ĐỊNH LÝ 1.3.4 *(Điều kiện cần Fritz John cho (P)). Giả sử rằng:*

(i) từ mỗi $u \in U, p(., u)$ là khả vi liên tục tại x_0 và $p_x(x_0, u_0)X$ có đối chiều hữu hạn;

(ii) $F(., u_0)$ và $G(., u_0)$ là K-khả vi đều tại (x_0, f_0) và M-khả vi đều tại (x_0, g_0), tương ứng;

(iii) với mỗi $u \neq u_0, F(., u)$ và $G(., u)$ là K-u.l.s.c. với $F(x_0, u)$ và M-u.l.s.c. với $G(x_0, u)$, tương ứng; $F(., u_0)$ và $G(., u_0)$ là $-K$-u.l.s.c. với f_0 và $-M$-u.l.s.c. với g_0, tương ứng (tất cả tại x_0);

(iv) bài toán (P) là giống lồi xấp xỉ tại (x_0, u_0).

Khi đó, nếu $(x_0, u_0; f_0)$ là cực tiểu yếu địa phương của bài toán (P), thì tồn tại $(\lambda_0, \mu_0, \nu_0) \in K^\star \times M_0^\star \times W^\star \setminus \{0, 0, 0\}$ sao cho, $\forall (x, u) \in X \times U$,

$$\begin{aligned} &\langle \lambda_0, D_x F(x_0, u_0; f_0)x + F(x_0, u) - f_0 \rangle \\ &+ \langle \mu_0, D_x G(x_0, u_0; g_0)x + G(x_0, u) - g_0 \rangle \\ &+ \langle \nu_o, p_x(x_0, u_0)x + p(x_0, u) - p(x_0, u_0) \rangle \subset R_+. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Chứng minh: Đặt

$$L = p_x(x_0, u_0)X,\ B = L + convp(x_0, U).$$

(Ở đây conv chỉ bao lồi và span chỉ bao tuyến tính.) Nếu $spanB \neq W$, $spanB$ có đối chiều hữu hạn nên tồn tại $\nu_0 \in W^*, \nu_0 \neq 0$, sao cho, với mọi $(x, u) \in X \times U$,

$$\langle \nu_0, p_x(x_0, u_0)x + p(x_0, u)\rangle = 0.$$

Bởi chọn $\lambda_0 = 0$ và $\mu_0 = 0$ ta thu được (1.32). Bây giờ, giả sử rằng $spanB = W$ và gọi Π là phép chiếu chính tắc từ W vào W/L. Từ $\Pi(B)$ là lồi và $Span\Pi(B) = W/L$, ta có $int\Pi(B) \neq \emptyset$. Do đó $intB \neq \emptyset$, vì $\Pi^{-1}(\Pi(B)) = B$. Nếu $0 \notin intB$, sử dụng định lý tách ta có thể tách 0 và B bởi $\nu_0 \in W^\star, \nu_0 \neq 0$, tức là với mọi $(x, u) \in X \times U$,

$$\langle \nu_0, p_x(x_0, u_0)x + p(x_0, u)\rangle \geq 0.$$

Vậy (1.32) là thoả mãn với $\lambda_0 = 0, \mu_0 = 0$.

Nếu $0 \in intB$, ta xét tập C gồm tất cả $(y, z, w) \in Y \times Z \times W$ sao cho $\exists x \in X, \exists \{u_1, ..., u_m\} \subset U$, $\exists \gamma_1 > 0, ..., \exists \gamma_m > 0$, $\exists f_i \in F(x_0, u_i)$, $\exists g_i \in G(x_0, u_i)$, $\exists f'_x \in D_xF(x_0, u_0; f_0)x$, $\exists g'_x \in D_xG(x_0, u_0; g_0)x$,

$$f'_x + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(f_i - f_0) - y \in -intK,$$

$$g'_x + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i(g_i - g_0) - z \in -intM,$$

$$p_x(x_0, u_0)x + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i p(x_0, u_i) = w.$$

Bởi tính lồi của đạo hàm Clarke ta dễ thấy rằng C là tập lồi. Từ Bổ đề 1.3.5 dưới đây, $intC \neq \emptyset$. Nếu C không giao với $(-intK) \times (-intM_0^{\star\star}) \times \{0\}$, thì bởi định lý tách tồn tại $\lambda_0 \in K^\star$, $\mu_0 \in M_0^{\star\star\star} = M_0^\star$ và $\nu_0 \in W^\star$, không đồng thời bằng không, sao cho (1.32) đúng.

Bây giờ ta giả sử ngược lại là hai tập nói trên giao nhau, tức là tồn tại $\gamma_{01} > 0, ..., \gamma_{0m_0} > 0$, $u_{01}, ..., u_{0m_0} \in U$, $x' \in X$, $f_j^0 \in F(x_0, u_{0j})$, $g_j^0 \in$

$G(x_0, u_{0j})$, $j = 1, ..., m_0$, $f' \in D_xF(x_0, u_0; f_0)x'$ và $g' \in D_xG(x_0, u_0; g_0)x'$sao cho

$$f' + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j}(f_j^0 - f_0) \in -intK, \tag{1.33}$$

$$g' + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j}(g_j^0 - g_0) \in -intM_0^{**}, \tag{1.34}$$

$$p_x(x_0, u_0)x' + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j}p(x_0, u_{0j}) = 0. \tag{1.35}$$

Từ $0 \in int\Pi(B)$ và $Span\Pi(B) = W/L$ là hữu hạn chiều, tồn tại $z_1, ..., z_k \in \Pi(B)$ sao cho $Span\{z_1, ..., z_k\} = W/L$ và $z_1 + ... + z_k = 0$. Bởi định nghĩa của B có $x_1 \in X$, $\gamma_{11} > 0, ..., \gamma_{1m_1} > 0, ..., \gamma_{k1} > 0, ..., \gamma_{km_k} > 0$, $u_{11}, ..., u_{1m_1}, ..., u_{k1}, ..., u_{km_k} \in U$sao cho

$$\Pi(\sum_{i=1}^{m_q} \gamma_{qi}p(x_0, u_{qi})) = z_q \ , q = 1, ..., k, \tag{1.36}$$

$$p_x(x_0, u_0)x_1 + \sum_{q=1}^{k}\sum_{i=1}^{m_q} \gamma_{qi}p(x_0, u_{qi}) = 0, \tag{1.37}$$

$$Span(L \bigcup \{p(x_0, u_{qi}) : q = 1, ..., k, i = 1, ..., m_q\}) = W. \tag{1.38}$$

Từ (1.33) suy ra tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho

$$f' + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j}(f_j^0 - f_0) + 2\epsilon B_Y \subset -intK.$$

Do Bổ đề 1.3.3, với mỗi $f_i^q \in Y$, với mỗi $\theta > 0$ đủ bé và mỗi $\overline{f}' \in D_xF(x_0, u_0; f_0)(x' + \theta x_1)$, ta có

$$\overline{f}' + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j}(f_j^0 - f_0) + \sum_{q=1}^{k}(\sum_{i=1}^{m_q} \theta\gamma_{qi}(f_i^q - f_0))$$

$$\in f' + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j}(f_j^0 - f_0) + 2\epsilon B_Y - K \subset -intK - K = -intK. \tag{1.39}$$

Tương tự, từ (1.34) và Bổ đề 1.3.3, với mỗi $g_i^q \in Z$, mỗi $\theta > 0$ đủ bé và từ mỗi $\overline{g}' \in D_xG(x_0, u_0; g_0)(x' + \theta x_1)$, ta có

$$\overline{g}' + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j}(g_j^0 - g_0) + \sum_{q=1}^{k}(\sum_{i=1}^{m_q} \theta\gamma_{qi}(g_i^q - g_0)) \in -intM_0^{**}, \tag{1.40}$$

Đặt $\overline{x} = x' + \theta x_1, \overline{u}_1 = u_{01}, ..., \overline{u}_{m_0} = u_{0m_0}, \overline{u}_{m_0+1} = u_{11}, .., \overline{u}_s = u_{m_0+m_1+..+m_k} = u_{km_k}, \overline{\alpha}_1 = \gamma_{01}, ..., \overline{\alpha}_{m_0} = \gamma_{0m_0}, \overline{\alpha}_{m_0+1} = \theta\gamma_{11}, ..., \overline{\alpha}_s = \theta\gamma_{km_k}, \overline{f}_1 = f_1^0, \overline{f}_{m_0} = f_{m_0}^0, \overline{f}_{m_0+1} = f_1^1, ..., \overline{f}_s = f_{m_k}^k$ và tương tự với $\overline{g}_1, ..., \overline{g}_s$, thì (1.39), (1.40), (1.35) cùng với (1.37), và (1.38) được viết lại là

$$\overline{f}' + \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j(\overline{f}_j - f_0) \in -intK, \tag{1.41}$$

$$\overline{g}' + \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j(\overline{g}_j - g_0) \in -intM_0^{**}, \tag{1.42}$$

$$p_x(x_0, u_0)\overline{x} + \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j p(x_0, \overline{u}_j) = 0, \tag{1.43}$$

$$Span(L \bigcup \{p(x_0, \overline{u}_j) : j = 1, ..., s\}) = W. \tag{1.44}$$

Đối với $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_s$ và $\delta > 0$, mà ta chọn thích hợp dưới đây, sao cho phù hợp với giả thiết (iv), ta có các biểu thức trong Định nghĩa 1.2.5 (với $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_s$ ở chỗ của $u_1, ..., u_s$).

Ta định nghĩa ánh xạ $\mathcal{P}$ và ánh xạ tuyến tính giới nội A của lân cận $(x_0, 0) \in X \times R^s$ vào W như sau

$$\mathcal{P}(x, \alpha) = p(x, v(x, \alpha^+)) + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j^- p(x_0, \overline{u}_j),$$

$$A(x, \alpha) = p_x(x_0, u_0)x + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j p(x_0, \overline{u}_j),$$

ở đây $\alpha_j^+ := max\{\alpha_j, 0\}; \alpha_j^- := \alpha_j - \alpha_j^+$, $\alpha^+ := (\alpha_1^+, ..., \alpha_s^+)$. Bởi biểu thức cuối trong Định nghĩa 1.2.5, từ mỗi (x, α) và (x', α') trong $V \times \epsilon\sum^s$ ta có

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{P}(x, \alpha) - \mathcal{P}(x', \alpha') - A(x, \alpha) + A(x', \alpha')\| \\ &= \|p(x, v(x, \alpha^+)) - p(x', v(x', \alpha'^+)) - p_x(x_0, u_0)(x - x') \\ &- \sum_{j=1}^{s}(\alpha_j^+ - \alpha_j'^+)p(x_0, \overline{u}_j)\| \leq \delta(\|x - x'\| + \sum_{j=1}^{s}|\alpha_j - \alpha_j'|). \end{aligned} \tag{1.45}$$

Từ (1.44) ta có $A(X \times R^s) = W$. Biểu thị $\overline{A} : (X \times R^s)/KerA \to W$ là ánh xạ một một ứng với A. Nếu δ chọn bé sao cho $\delta\|\overline{A}^{-1}\| < 1/2$, thì bởi định lý Lusternik, tồn tại $\overline{t} > 0, k > 0$ và ánh xạ $t \to (x(t), \alpha(t))$ của $[0, \overline{t}]$ vào $X \times R^s$ sao cho, với mỗi $t \in [0, \overline{t}]$,

$$\mathcal{P}(x_0 + t\overline{x} + x(t), t\overline{\alpha} + \alpha(t)) = 0,$$

$$\|x(t)\| + \sum_{j=1}^{s} |\alpha_j(t)| \le k|\mathcal{P}(x_0 + t\overline{x}, t\overline{\alpha})|$$
$$= k\|\mathcal{P}(x_0 + t\overline{x}, t\overline{\alpha}) - \mathcal{P}(x_0, 0) - A(x_0 + t\overline{x}, t\overline{\alpha}) - A(x_0, 0)\|$$
$$\le tk\delta(\|\overline{x}\| + \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j). \tag{1.46}$$

Bởi vậy, $x(t)$ và $\alpha(t)$ hội tụ tới 0 khi t tiến tới 0. Tiếp theo, nếu δ đủ bé sao cho $k\delta(\|\overline{x}\|+\sum_{j=1}^{s}\overline{\alpha}_j) < min\{\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_s\}$, thì (1.46) suy ra $\|x(t)\|+\sum_{j=1}^{s}|\alpha_j(t)| < tmin\{\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_s\}$. Vậy $t\overline{\alpha}_j + \alpha_j(t) > 0$ với mọi j và $t > 0$ đủ bé. Tiếp theo, ta có

$$\mathcal{P}(x, t\overline{\alpha} + \alpha(t)) = p(x, v(x, t\overline{\alpha} + \alpha(t))).$$

Đặt

$$\overline{x}(t) = x_0 + t\overline{x} + x(t)\ ,\ \overline{u}(t) = v(\overline{x}(t), t\overline{\alpha} + \alpha(t)),$$

thì

$$p(\overline{x}(t), \overline{u}(t)) = 0.$$

Bây giờ ta ước lượng $G(\overline{x}(t), \overline{u}(t))$ để thấy $(\overline{x}(t), \overline{u}(t))$ là điểm chấp nhận được với mọi t đủ bé. Từ tính giống lồi xấp xỉ ta có, với mỗi $\overline{g}_t \in G(\overline{x}(t), \overline{u}(t))$,

$$g_{x_t}^{u_0} + \sum_{j=1}^{s}(t\overline{\alpha}_j + \alpha_j(t))(g_{x_t}^{u_j} - g_{x_t}^{u_0})$$
$$+ \delta(\|t\overline{x} + x(t))\| + \sum_{j=1}^{s}(t\overline{\alpha}_j + \alpha_j(t))q - \overline{g}_t \in M. \tag{1.47}$$

Ta ước lượng mỗi số hạng trong (1.47) như sau. Cho $\beta > 0$ và $\sigma > 0$, ta xét δ đủ bé để

$$k\delta(\|\overline{x}\| + \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j) \le \sigma,$$

và, bởi (1.46), $\|x(t)\| \le t\sigma$ nếu t đủ bé, và

$$k\delta(\|\overline{x}\| + \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j)(\overline{g}_i - g_0) \subset \beta B_Z,\ \textit{với}\ \ i = 1, ..., s.$$

Theo giả thiết (iii), tồn tại lân cận N cuả x_0 sao cho (từ $\overline{x}(t) \in N$ với t đủ bé)

$$g_{x_t}^{u_j} - \overline{g}_j \in \beta B_Z - M, \quad j = 1, ..., s,$$
$$-g_{x_t}^{u_0} + g_0 \in \beta B_Z - M.$$

Vì $\overline{\alpha}_j$ (trong (1.41)-(1.43)) có thể xét bé hơn nếu cần , (1.46) cho ta $t(\overline{\alpha}_j + \frac{\alpha_j(t)}{t}) < t,\ j = 1, ..., s$.

Bây giờ ta ước lượng số hạng thứ hai trong (1.47):

$$
\begin{aligned}
&(t\overline{\alpha}_j + \alpha_j(t))(g_{x_i}^{u_j} - g_{x_i}^{u_0}) \\
&= (t\overline{\alpha}_j + \alpha_j(t))(g_{x_i}^{u_j} - \overline{g}_j - g_{x_i}^{u_0} + g_0) + t\overline{\alpha}_j(\overline{g}_j - g_0) + \alpha_j(t)(\overline{g}_j - g_0) \\
&\in (t\overline{\alpha}_j + \alpha_j(t))(\beta B_Z - M + \beta B_Z - M) + t\overline{\alpha}_j(\overline{g}_j - g_0) + t\beta B_Z \\
&\subset t(2\beta B_Z - M) + t\overline{\alpha}_j(\overline{g}_j - g_0) + t\beta B_Z \\
&\subset t(\overline{\alpha}_j(\overline{g}_j - g_0) + 3\beta B_Z - M).
\end{aligned}
$$

Từ đây, với β đủ bé, ta thấy

$$\sum_{j=1}^{s}(t\overline{\alpha}_j + \alpha_j(t))(g_{x_i}^{u_j} - g_{x_i}^{u_0}) \subset t(\sum_{j=1}^{s}\overline{\alpha}_j(\overline{g}_j - g_0) + \frac{\sigma}{8}B_Z - M).$$

Như vậy, tồn tại $b_{\sigma/8}^t \in \frac{\sigma}{8}B_Z$ và $m^t \in M$ sao cho

$$\sum_{j=1}^{s}(t\overline{\alpha}_j + \alpha_j(t))(g_{x_i}^{u_j} - g_{x_i}^{u_0}) = t(\sum_{j=1}^{s}\overline{\alpha}_j(\overline{g}_j - g_0) + b_{\sigma/8}^t - m^t). \tag{1.48}$$

Bây giờ với số hạng thứ ba trong (1.47) ta có, bởi (1.46),

$$
\begin{aligned}
&\delta(\|t\overline{x} + x(t))\| + \sum_{j=1}^{s}(t\overline{\alpha}_j + \alpha_j(t))) \\
&\le t\delta(\|\overline{x}\| + \sum_{j=1}^{s}\overline{\alpha}_j + t^{-1}(\|x(t)\| + \sum_{j=1}^{s}|\alpha_j(t)|) \\
&\le t(\delta + k\delta^2)(\|\overline{x}\| + \sum_{j=1}^{s}\overline{\alpha}_j).
\end{aligned} \tag{1.49}
$$

Với số hạng thứ nhất trong (1.47), bởi tính M-khả vi đều của G, với mọi t đủ bé, tồn tại $c_{\sigma/8}^t \in \frac{\sigma}{8}B_Z$ và $n^t \in M$ sao cho

$$g_{x_i}^{u_0} = g_0 + t(\overline{g}' + c_{\sigma/8}^t - n^t). \tag{1.50}$$

Thay thế (1.48), (1.49) và (1.50) vào trong (1.47) suy ra tồn tại $d_{\sigma/4}^t \in \frac{\sigma}{4}B_Z$ và $p^t \in M$ sao cho

$$g_0 + t(\overline{g}' + \sum_{j=1}^{s}\overline{\alpha}_j(\overline{g}_j - g_0) + d_{\sigma/4}^t - p^t)$$

$$+ t(\delta + k\delta^2)(\|\overline{x}\| - \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j)q - \overline{g}_t \in M. \qquad (1.51)$$

Do δ là bé, nên $(\delta + k\delta^2)(\|\overline{x}\| + \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j)q \in \frac{\sigma}{4}B_Z$. Vậy tồn tại $h^t_{\sigma/2} \in \frac{\sigma}{2}B_Z$ sao cho (1.51) trở thành

$$g_0 + t(\overline{g}' + \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j(\overline{g}_j - g_0) + h^t_{\sigma/2} - p^t) - \overline{g}_t \in M. \qquad (1.52)$$

Tiếp theo ta kiểm tra rằng, với mọi t đủ bé thì $G(\overline{x}(t), \overline{u}(t)) \subset -M$. Giả sử ngược lại, có dãy $t_n \to 0$ và $\mu_n \in M^*$, $\|\mu_n\| = 1$, μ_n hội tụ *-yếu tới $\overline{\mu}$, sao cho $\langle \mu_n, \overline{g}_{t_n} \rangle \geq 0$ với $\overline{g}_{t_n} \in G(\overline{x}(t_n), \overline{u}(t_n))$. Ta chỉ ra rằng $\overline{\mu} \in M_0^*$. Thực vậy, nếu $\overline{\mu}$ không thuộc M_0^* thì tồn tại $\theta > 0$ sao cho $\langle \overline{\mu}, g_0 \rangle < -\theta$. Bởi (1.52) ta có, với mọi n đủ lớn,

$$\langle \mu_n, \overline{g}_{t_n} \rangle \leq \langle \mu_n, g_0 \rangle + t_n \langle \mu_n, \overline{g}' + \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j(\overline{g}_j - g_0) + h^{t_n}_{\sigma/2} - p^{t_n} \rangle \ < 0,$$

là mâu thuẫn.

Mặt khác, từ $\overline{\mu} \in M_0^*$, và biểu thức (1.42) suy ra là (với σ và t bé)

$$\langle \mu_n, \overline{g}' + \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j(\overline{g}_j - g_0) + h^t_{\sigma/2} - p^t) \rangle \ < 0, \qquad (1.53)$$

Bởi vậy, (1.52) suy ra, với n đủ lớn, $\langle \mu_n, \overline{g}_{t_n} \rangle \ < 0$, là không thể xảy ra.

Lý luận như trên với G áp dụng cho F, có $\overline{f}_t \in F(\overline{x}(t), \overline{u}(t))$ sao cho (tương tự (1.52) và (1.53), $\ell^t_{\sigma/2} \in \frac{\sigma}{2}B_Y, k^t \in K$)

$$\overline{f}_t - f_0 \in -K + t(\overline{f}' + \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j(\overline{f}_j - f_0) + \ell^t_{\sigma/2} - k^t) \subset -K - intK = -intK.$$

Như vậy chúng ta có sự mâu thuẫn với tính cực tiểu yếu của $(x_0, u_0; f_0)$ và chứng minh kết thúc.□

BỔ ĐỀ 1.3.5. *Tập C định nghĩa trong chứng minh của Định lý 1.3.4 có phần trong khác rỗng.*

Chứng minh: Từ (1.36) ta có

$$\Pi(\sum_{q=1}^{k} \sum_{i=1}^{m_q} \gamma_{qi} p(x_0, u_{qi})) = \sum_{q=1}^{k} z_q = 0.$$

Thay đổi cách kí hiệu tất cả các γ_{q_i} bởi $\hat{\alpha}_j$ và tất cả các u_{q_j}, bởi u_j, $j = 1,...,m$, thì đẳng thức này được viết lại là

$$\Pi(\sum_{j=1}^{m} \hat{\alpha}_j p(x_0, u_j)) = 0.$$

Tương ứng với (1.37) là

$$p_x(x_0, u_0)x_1 + \sum_{j=1}^{m} \hat{\alpha}_j p(x_0, u_j) = 0.$$

Bây giờ ta chọn điểm của C như sau. Lấy tuỳ ý $k_1 \in intK, m_1 \in intM, f' \in D_xF(x_0, u_0; f_0)x_1, f_j \in F(x_0, u_j), g' \in D_xG(x_0, u_0; g_0)x_1, g_j \in G(x_0, u_j)$ và đặt

$$\hat{y} := f' + \sum_{j=1}^{m} \hat{\alpha}_j(f_j - f_0) + k_1,$$

$$\hat{z} := g' + \sum_{j=1}^{m} \hat{\alpha}_j(g_j - g_0) + m_1.$$

Khi đó rõ ràng $(\hat{y}, \hat{z}, 0) \in C$.

Ta có thể lấy $\epsilon > 0$ sao cho

$$f' + \sum_{j=1}^{m} \hat{\alpha}_j(f_j - f_0) - \hat{y} + 3\epsilon B_Y \subset -intK.$$

Bởi Bổ đề 1.3.3, cho x_1 và ϵ, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\forall x \in x_1 + \delta B_X, \forall f'_x \in D_xF(x_0, u_0; f_0)x$,

$$f'_x \in f' + \epsilon B_Y - K.$$

Đặt

$$B(\hat{\alpha}, \gamma) := \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) : \alpha_j > 0, \max_{1 \le j \le m} |\alpha_j - \hat{\alpha}_j| < \gamma\},$$

sẽ có ϵ_1 sao cho $\sum_{j=1}^{m}(\alpha_j - \hat{\alpha}_j)(f_j - f_0) \in \epsilon B_Y$ với mọi $\alpha \in B(\hat{\alpha}, \epsilon_1)$. Do đó

$$f'_x + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(f_j - f_0) - \hat{y} + \epsilon B_Y$$

$$\subset f' + \sum_{j=1}^{m} \hat{\alpha}_j(f_j - f_0) - \hat{y} + \epsilon B_Y$$

$$+\sum_{j=1}^{m}(\alpha_j-\hat{\alpha}_j)(f_j-f_0)+\epsilon B_Y-K$$

$$\subset f'+\sum_{j=1}^{m}\hat{\alpha}_j(f_j-f_0)-\hat{y}+3\epsilon B_Y-K\subset -intK-K=-intK.$$

Cũng tương tự như ở trên, $\forall g'_x\in D_xG(x_0,u_0;g_0)x$,

$$g'_x+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(g_j-g_0)-\hat{g}+\epsilon B_Z\subset -intM.$$

Bởi (1.38) tập hợp

$$Q:=$$

$$(\hat{y}-\epsilon B_Y)\times(\hat{z}-\epsilon B_Z)\times\{p_x(x_0,u_0)(x_1+\delta B_X)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j p(x_0,u_j):\alpha\in B(\hat{\alpha},\epsilon_1)\}$$

có phần trong khác rỗng. Nhưng rõ ràng $Q\subset C$. Vậy $intC\neq\emptyset$.□

ĐỊNH LÝ 1.3.6 *(Điều kiện Kuhn-Tucker cho (P)). Ngoài các giả thiết của Định lý 1.3.4, giả sử thêm rằng $p_x(x_0,u_0)X+p(x_0,U)$ chứa lân cận gốc toạ độ và tồn tại $(\tilde{x},\tilde{u})\in X\times U$, $g_{\tilde{x}}\in D_xG(x_0,u_0;g_0)\tilde{x}$ và $\tilde{g}\in G(x_0,\tilde{u})$ sao cho*

$$g_{\tilde{x}}+\tilde{g}-g_0\in -int\,M_0^{**},$$
$$p_x(x_0,u_0)\tilde{x}+p(x_0,\tilde{u})=0.$$

Khi đó λ_0 khác 0.

Chứng minh: Tương tự chứng minh của Định lý 1.3.2. □

Chuyển sang bài toán $(\tilde{P})$ ta có thể giảm nhẹ tính giống lồi xấp xỉ như sau

ĐỊNH NGHĨA 1.3.2. *Bài toán (P) với ánh xạ $P:=p$ đơn trị được gọi là giống lồi xấp xỉ yếu tại (x_0,u_0) nếu với mọi tập hữu hạn $\{u_1,...,u_s\}\subset U$ với mọi $\delta>0$, tồn tại $\epsilon>0$, tồn tại lân cận V của x_0 và ánh xạ $v:V\times\epsilon\sum^s\longrightarrow U$, tồn tại $e\in K$ và $q\in M$ sao cho $\forall x,x'\in V$, $\exists f_x^{u_j}\in F(x,u_j),g_x^{u_j}\in G(x,u_j),j=0,1,...,s$, $\forall\alpha,\alpha'\in\epsilon\sum^s$ $\exists g_x\in G(x,v(x,\alpha))$, $\exists f_x\in F(x,v(x,\alpha))$ thoả*

$$v(x,0)=u_0,$$

$$f_x^{u_0} + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j (f_x^{u_j} - f_x^{u_0}) + \delta(\|x - x_0\| + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j) e - f_x \in K,$$

$$g_x^{u_0} + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j (g_x^{u_j} - g_x^{u_0}) + \delta(\|x - x_0\| + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j) q - g_x \in M,$$

$$\|p(x, v(x,\alpha)) - p(x', v(x', \alpha')) - p_x(x_0, u_0)(x - x') - \sum_{j=1}^{s} (\alpha_j - \alpha_j') p(x_0, u_j)\|$$

$$\leq \delta(\|x - x'\| + \sum_{j=1}^{s} |\alpha_j - \alpha_j'|).$$

Việc kiểm tra rằng Định lý 1.3.4 và 1.3.6 vẫn đúng cho bài toán $(\tilde{P})$, với tính giống lồi xấp xỉ được giảm nhẹ thành tính giống lồi xấp xỉ yếu ở giả thiết (iv) không khó khăn nên chúng tôi không trình bày cụ thể ở đây. Hai định lý này là mở rộng của Định lý 2.1 cho bài toán tối ưu đơn trị trong [Khanh-Nuong 1988]. Nhờ những giảm nhẹ về giả thiết ở (i) và (iv) nên ở [Khanh-Nuong 1988] đã áp dụng Định lý 2.1 để rút ra nguyên lý cực đại Pontryagin cho bài toán điều khiển tối ưu với ràng buộc trạng thái. Nghiên cứu áp dụng như vậy cho bài toán với ánh xạ đa trị là vấn đề chúng tôi đang quan tâm để phát triển tiếp sau luận văn này.

Cũng chú ý rằng [Corley 1988] đã xét bài toán đa trị $(\tilde{P})$ nhưng không có ràng buộc đẳng thức và không có tham số. Kết quả của Corley không thể áp dụng được cho trường hợp có ràng buộc đẳng thức (thậm chí cả khi không có tham số) vì ở đó phải giả thiết nón thứ tự trong tích tất cả các không gian ảnh phải có phần trong khác trống.

Chúng ta đã lý giải rằng giả thiết của Định lý 1.3.4 là khá nhẹ. Nhưng phát biểu khá cồng kềnh của nó là một yếu điểm chưa khắc phục được, vì thậm chí với trường hợp riêng là bài toán đơn trị của tối ưu vô hướng trong [Ioffe-Tihomirov 1979] dạng của định lý cũng đã tương tự. Tuy vậy, thí dụ sau đây cho thấy các giả thiết của định lý không phải là khó kiểm tra.

THÍ DỤ 1.3.2. Giả sử $X = Y = Z = W = R$ và $K = M = R_+$. Giả sử $f : R \to R$ là khả vi trong lân cận của x_0. Giả gử $U = [-1, +\infty)$. Giả sử $g : U \to R$ là Lipschitz với hằng Lipschitz $L \geq 1$. Xét bài toán

$$min(f(x)+u),$$
$$(x-x_0)^2(|u|[0,1]-1)\subset -R_+,$$
$$(x-x_0)g(u)=0.$$

Rõ ràng nếu $f(x)\geq f(x_0)$ với mọi $x\in R$ thì $(x_0,-1)$ là cực tiểu tòan cục của bài toán. Ta kiểm tra rằng $(x_0,u_0):=(x_0,-1)$ thoả tất cả các giả thiết của Định lý 1.3.4. (i), (ii) và (iii) là dễ kiểm tra (xem, Thí dụ 1.3.1). Xét (iv). Cho $\{u_1,...,u_s\}\subset U$ và $\delta>0$. Chọn $\epsilon=min\{\frac{\delta}{4ML},1\}, V=(x_0-\epsilon,x_0+\epsilon)$, ở đây $M=max\{|u_j|:j=0,1,...,s\}, e=1, q=1$ và $v(x,\alpha)=u_0+\sum_{j=1}^s\alpha_j(u_j-u_0)$. Cho $x\in V$, vì f đơn trị nên biểu thức ứng với F trong Định nghĩa 1.2.5 là rõ ràng. Đối với biểu thức ứng với G ta lấy $g_x^{u_j}=-(x-x_0)^2$ với mọi $j=0,1,...,s$. Tiếp theo, $-(x-x_0)^2\in(x-x_0)^2(|u_j|[0,1]-1)=G(x,u_j)$ với mọi j. Hơn nữa, mọi số thực của tập

$$g_x^{u_0}+\sum_{j=1}^s\alpha_j(g_x^{u_j}-g_x^{u_0})-G(x,v(x,\alpha))$$

$$=-(x-x_0)^2|u_0+\sum_{j=1}^s\alpha_j(u_j-u_0)|[0,1]$$

là không bé thua $-(x-x_0)^2|u_0+\sum_{j=1}^s\alpha_j(u_j-u_0)|\geq-\frac{3M\delta}{4ML}\|x-x_0\|:=\gamma$. Vậy vế trái của biểu thức ứng với G là không bé thua

$$\gamma+\delta(\|x-x_0\|+\sum_{j=1}^s\alpha_j),$$

nên sẽ là không âm.

Bây giờ ta kiểm tra biểu thức ứng với P. Cho $x,x'\in V$ và $\alpha,\alpha'\in\epsilon\Sigma^s$, ta đánh giá vế trái của biểu thức này như sau

$$\|p(x,v(x,\alpha))-p(x',v(x',\alpha'))-p_x(x_0,u_0)(x-x')-\sum_{j=1}^s(\alpha_j-\alpha_j')p(x_0,u_j)\|$$

$$=\|(x-x_0)g(u_0+\sum_{j=1}^s\alpha_j(u_j-u_0))-(x'-x_0)g(u_0+\sum_{j=1}^s\alpha_j'(u_j-u_0))-g(u_0)(x-x')-0\|$$

$$\leq L\|(x-x_0)\|.\|\sum_{j=1}^s(\alpha_j-\alpha_j')(u_j-u_0)\|+\|(x-x')(g(u_0+\sum_{j=1}^s\alpha_j'(u_j-u_0))-g(u_0))\|$$

$$\leq 2LM\|x - x_0\| \sum_{j=1}^{s} |\alpha_j - \alpha'_j| + 2LM\|x - x'\| \sum_{j=1}^{s} |\alpha'_j|$$
$$\leq \frac{\delta}{2}(\sum_{j=1}^{s} |\alpha_j - \alpha'_j| + \|x - x'\|).$$

Vậy mọi giả thiết của Định lý được thỏa.

Chương 2

ĐIỀU KIỆN CẦN TỐI ƯU CHO TỐI ƯU HÓA ĐA TRỊ PHỤ THUỘC THAM SỐ VỚI RÀNG BUỘC BAO HÀM THỨC

Trong chương này ta sẽ nghiên cứu bài toán (P) và $(\tilde{P})$ tổng quát, với ràng buộc $0 \in P(x,u)$ là ràng buộc bao hàm thức thực sự. Các bài toán thực tế cũng hay có dạng này, chẳng hạn trạng thái của hệ động học có điều khiển có thể được mô tả bởi bao hàm thức vi phân mà không đưa về phương trình vi phân được.

2.1 Điều kiện cần tối ưu

Mục này dành cho việc mở rộng các điều kiện cần dạng Fritz John và Kuhn-Tucker nhận được ở chương trước cho trường hợp ràng buộc đẳng thức $p(x,u) = 0$ ra cho trường hợp ràng buộc bao hàm thức $0 \in P(x,u)$. Ta xét bài toán $(\tilde{P})$ trước.

ĐINH LÝ 2.1.1 *Giả sử rằng (x_0, u_0) là điểm chấp nhận của $(\tilde{P})$ và*

(i_1) từ mỗi $\overline{x} \in X, p'_{\overline{x}} \in D_x P(x_0, u_0; 0)\overline{x}, P(.,u_0)$ có lát cắt dưới chính qui $p(.,u_0)$ tại $(x_0, 0)$ khả vi liên tục sao cho $p'_{\overline{x}} = p'_x(x_0,u_0)\overline{x}$;

(i_2) Với mọi $u \neq u_0$ và $p \in P(x_0,u), P(.,u)$ có lát cắt địa phương khả vi liên tục $p(.,u)$ tại (x_0,p);

(ii) $F(.,u_0)$ và $G(.,u_0)$ là K-khả vi đều tại $(x_0,u_0;f_0)$ và M-khả vi đều tại $(x_0,u_0;g_0)$, tương ứng, ở đây $f_0 \in F(x_0,u_0), g_0 \in G(x_0,u_0) \cap (-M)$;

(iii) từ mỗi $u \neq u_0, F(.,u)$ $(G(.,u)$, tương ứng) là K-s.l.s.c. với $F(x_0,u)$ (M-s.l.s.c. với $G(x_0,u)$) tại x_0. Hơn nữa, $F(.,u_0)$ $(G(.,u_0))$ là $-K$-s.l.s.c. với f_0 ($-M$-s.l.s.c. với g_0, tương ứng) tại x_0;

(iv) từ mỗi x trong lân cận của x_0, $(F,G,P)(x,.)$ là $K \times M \times \{0\}$-giống lồi.

Nếu $(x_0,u_0;f_0)$ là cực tiểu địa phương yếu của $(\tilde{P})$, thì tồn tại

$$(\lambda_0, \mu_0, \nu_0) \in K^\star \times M_0^\star \times W^\star \setminus \{0,0,0\}$$

sao cho, với mỗi $(x,u) \in X \times U$,

$$\begin{aligned}&\langle \lambda_0, D_xF(x_0,u_0;f_0)x + F(x_0,u) - f_0\rangle\\&+\langle \mu_0, D_xG(x_0,u_0;g_0)x + G(x_0,u) - g_0\rangle\\&+\langle \nu_o, D_xP(x_0,u_0;0)x + P(x_0,u)\rangle \subset R^+.\end{aligned} \qquad (2.2)$$

Chứng minh: Giả sử

$$L = D_xP(x_0,u_0;0)X,\ B = L + P(x_0,U),$$

thì B là lồi (vì $P(x_0,U)$ là lồi do (iv)). $SpanB$ là không gian con có đối chiều hữu hạn. Nếu $spanB \neq W$ thì tồn tại $\nu_0 \in W^* \setminus \{0\}$ sao cho, từ mỗi $(x,u) \in X \times U$,

$$\langle \nu_0, D_xP(x_0,u_0;0)x + P(x_0,u)\rangle = 0$$

và (2.2) là thỏa mản với $\lambda_0 = 0, \mu_0 = 0$.

Bây giờ giả sử rằng $SpanB = W$ và kí hiệu Π là phép chiếu chính tắc từ W vào W/L. Do $\Pi(B)$ là lồi và $Span\Pi(B) = W/L$, ta có $int\Pi(B) \neq \emptyset$. Vì $\Pi^{-1}(\Pi(B)) = B$, $intB \neq \emptyset$. Nếu $0 \notin intB$, 0 có thể tách từ B bởi $\nu_0 \in W^* \setminus \{0\}$, tức là với mỗi $(x,u) \in X \times U$,

$$\langle \nu_0, D_xP(x_0,u_0;0)x + P(x_0,u)\rangle \geq 0$$

và (2.2) là đúng với $\lambda_0 = 0, \mu_0 = 0$.

Bây giờ xét trường hợp $0 \in intB$. Gọi C là tập mọi $(y,z,w) \in Y \times Z \times W$ sao cho $\exists (x,u) \in X \times U$, $\exists f'_x \in D_xF(x_0,u_0;f_0)x$, $\exists g'_x \in D_xG(x_0,u_0;g_0)x$, $\exists p'_x \in D_xP(x_0,u_0;0)x$, $\exists\ f^u_{x_0} \in F(x_0,u)$, $\exists g^u_{x_0} \in G(x_0,u)$ $\exists p^u_{x_0} \in P(x_0,u)$,

$$f'_x + f^u_{x_0} - f_0 - y \in -intK,$$

$$g'_x + g^u_{x_0} - g_0 - z \in -intM,$$

$$p'_x + p^u_{x_0} - w = 0.$$

Tương tự như trong chứng minh Định lý 1.3.1, bởi tính lồi của đạo hàm Clarke và giả thiết $K \times M \times \{0\}$-giống lồi trong (iv) ta thấy C là một tập lồi.

Do tính khả vi đều theo hướng của $F(.,u_0)$ và $G(.,u_0)$ trong (ii), bằng lý luận tương tự như trong Bổ đề 1.3.5 không khó kiểm tra rằng $intC \neq \emptyset$. Nếu

$$C \bigcap \{(-intK) \times (-intM_0^{**}) \times \{0\}\} = \emptyset, \tag{2.3}$$

thì bởi định lý tách ta có (2.2). Bây giờ ta chứng minh (2.3). Giả sử ngược lại, tồn tại $(\hat{x},\hat{u}) \in X \times U$, $f'_{\hat{x}} \in D_xF(x_0,u_0;f_0)\hat{x}$, $g'_{\hat{x}} \in D_xG(x_0,u_0;g_0)\hat{x}$, $p'_{\hat{x}} \in D_xP(x_0,u_0;0)\hat{x}$, $f^{\hat{u}}_{x_0} \in F(x_0,\hat{u})$, $g^{\hat{u}}_{x_0} \in G(x_0,\hat{u})$ và $p^{\hat{u}}_{x_0} \in P(x_0,\hat{u})$ sao cho

$$f'_{\hat{x}} + f^{\hat{u}}_{x_0} - f_0 \in -int\ K, \tag{2.4}$$

$$g'_{\hat{x}} + g^{\hat{u}}_{x_0} - g_0 \in -int\ M_0^{**}, \tag{2.5}$$

$$p'_{\hat{x}} + p^{\hat{u}}_{x_0} = 0. \tag{2.6}$$

Với $\hat{x}$ và $p'_{\hat{x}}$, do (i_1), tồn tại lát cắt dưới chính qui $p(.,u_0)$ tại $(x_0,0)$ sao cho $p'_{\hat{x}} = p'_x(x_0,u_0)\hat{x}$.

Từ $0 \in int\Pi(B)$ và $Span\Pi(B) = W/L$ là hữu hạn chiều , tồn tại $z_1,...,z_m \in \Pi(B)$ sao cho $Span\{z_1,...,z_m\} = W/L$ và $z_1 + ... + z_m = 0$. Bởi định nghĩa của B, tồn tại $x_1 \in X$, $u_i \in U, p^{u_i}_{x_0} \in P(x_0,u_i), i = 1,...,m$, sao cho

$$\Pi(p^{u_i}_{x_0}) = z_i, \tag{2.7}$$

$$p'_x(x_0,u_0)x_1 + \textstyle\sum_{i=1}^m p^{u_i}_{x_0} = 0, \tag{2.8}$$

$$Span(L \bigcup \{P(x_0,u_i) : i = 1,...,m\}) = W. \tag{2.9}$$

Do gỉa thiết (i_2) sẽ tồn tại các lát cắt dịa phương $p(.,u_i)$ sao cho $p(x_0,u_i) = p^{u_i}_{x_0}$.

Bởi (2.5), ta có $\delta > 0$ sao cho

$$g'_{\hat{x}} + g^{\hat{u}}_{x_0} - g_0 + \delta B_Z - M \subset -intM_0^{**}, \tag{2.10}$$

ở đây B_Z là quả cầu đơn vị mở của Z.

Do tính M-khả vi đều của $G(.,u_0)$ trong (ii) ta có lân cận N_1 của $\hat{x}$ và $t_1 > 0$ sao cho $\forall z \in N_1, \forall t \in (0,t_1), \forall g_z \in G(x_0+tz,u_0)$,

$$g_z \in g_0 + tg'_{\hat{x}} + t\frac{\delta}{4}B_Z - M. \tag{2.11}$$

Chọn ϵ_1 sao cho $\hat{x} + \epsilon_1 x_1 \in N_1$. Lấy tùy ý $g_{x_0}^{u_i} \in G(x_0, u_i), i = 1, ..., m$, và ϵ_2 sao cho $\epsilon_2 \sum_{i=1}^{m}(g_{x_0}^{u_i} - g_0) \in \frac{\delta}{4}B_Z$. Đặt $\epsilon = min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ và

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}(x, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m)\\ &= p(x, u_0) + \alpha_0(p(x, \hat{u}) - p(x, u_0))\\ &+\epsilon \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(p(x, u_i)) - p(x, u_0)).\end{aligned}$$

Ta có

$$\mathcal{P}(x_0, 0, ..., 0) = 0,$$

$$\mathcal{P}'(x_0, 0, ..., 0)(x, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m) = p'_x(x_0, u_0)x + \alpha_0 p(x_0, \hat{u}) + \epsilon \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p(x_0, u_i),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}'(x_0, 0, ..., 0)(\hat{x} + \epsilon x_1, 1, ..., 1) &= p'_x(x_0, u_0)(\hat{x} + \epsilon x_1) + p(x_0, \hat{u}) + \epsilon \sum_{i=1}^{m} p(x_0, u_i)\\ &= p'_x(x_0, u_0)\hat{x} + p(x_0, \hat{u}) + \epsilon(p'_x(x_0, u_0)x_1 + \sum_{i=1}^{m} p(x_0, u_i)) = 0.\end{aligned}$$

vậy $(\hat{x} + \epsilon x_1, 1, ..., 1) \in Ker\mathcal{P}'(x_0, 0, ..., 0)$. Hơn nữa, theo định lý Lusternik, sẽ có ánh xạ $t \to \overline{x}(t), t \to \alpha_0(t), ..., t \to \alpha_m(t)$ của $[0, t_0]$ vào R sao cho $\overline{x}(t) \to 0, \alpha_i(t) \to 0, i = 1, ..., m$, khi $t \to 0^+$, và

$$\mathcal{P}(t(\hat{x} + \epsilon x_1 + \overline{x}(t)), t(1 + \alpha_0(t), ..., t(1 + \alpha_m(t))) = 0. \tag{2.12}$$

Nếu đặt $x(t) := x_0 + t(\hat{x} + \epsilon x_1 + \overline{x}(t))$, thì (2.12) được viết lại là

$$\begin{aligned}&p(x(t), u_0) + t(1 + \alpha_0(t))(p(x(t), \hat{u}) - p(x(t), u_0))\\ &+\epsilon \sum_{i=1}^{m} t(1 + \alpha_i(t))(p(x(t), u_i) - p(x(t), u_0)) = 0.\end{aligned}$$

Theo tính nửa liên tục dưới mạnh giả thiết ở (iii), với $x(t)$ và $\hat{u}$ sẽ có $g_{x(t)}^{\hat{u}} \in G(x(t), \hat{u}), g_{x(t)}^{u_0} \in G(x(t), u_0), f_{x(t)}^{\hat{u}} \in F(x(t), \hat{u})$ và $f_{x(t)}^{u_0} \in F(x(t), u_0)$ sao cho, với mọi t và ϵ đủ bé,

$$g_{x(t)}^{\hat{u}} - g_{x_0}^{\hat{u}} \in \epsilon B_Z - M, \tag{2.13}$$

$$-g_{x(t)}^{u_0} + g_0 \in \epsilon B_Z - M, \tag{2.14}$$

$$f_{x(t)}^{\hat{u}} - f_{x_0}^{\hat{u}} \in \epsilon B_Y - K, \tag{2.15}$$

$$-f_{x(t)}^{\hat{u}} + f_0 \in \epsilon B_Y - K. \tag{2.16}$$

Do tính giống lồi ở giả thiết (iv) lại có $u(t) \in U$, $f_t \in F(x(t), u(t))$, và $g_t \in G(x(t), u(t))$ sao cho

$$f_{x(t)}^{u_0} + t(1 + \alpha_0(t))(f_{x(t)}^{\hat{u}} - f_{x(t)}^{u_0})$$
$$+\epsilon \textstyle\sum_{i=1}^{m} t(1 + \alpha_i(t))(f_{x(t)}^{u_i} - f_{x(t)}^{u_0}) - f_t \in K, \tag{2.17}$$
$$g_{x(t)}^{u_0} + t(1 + \alpha_0(t))(g_{x(t)}^{\hat{u}} - g_{x(t)}^{u_0})$$
$$+\epsilon \textstyle\sum_{i=1}^{m} t(1 + \alpha_i(t))(g_{x(t)}^{u_i} - g_{x(t)}^{u_0}) - g_t \in M, \tag{2.18}$$
$$0 \in P(x(t), u(t)). \tag{2.19}$$

Đến đây ta sẽ đi đến mâu thuẫn với $(x_0, u_0; f_0)$ là cực tiểu yếu nếu ta có thể chứng minh rằng, từ mỗi t đủ bé, $g_t \in -M$ và $f_t - f_0 \in -intK$.

Ta sẽ chứng minh với g_t còn với f_t là tương tự.

Xét các số hạng trong (2.18). Bởi (2.13),(2.14) và từ $\alpha_i(t)$ là bé khi t đủ bé, với $i = 0, ..., m$ và ϵ đủ bé, ta có

$$\begin{aligned} & t(1 + \alpha_0(t))(g_{x(t)}^{\hat{u}} - g_{x(t)}^{u_0}) \\ &= t(1 + \alpha_0(t))(g_{x(t)}^{\hat{u}} - g_{x_0}^{\hat{u}} - g_{x(t)}^{u_0} + g_0) + t(g_{x_0}^{\hat{u}} - g_0) + t\alpha_0(t)(g_{x_0}^{\hat{u}} - g_0) \\ &\subset t(1 + \alpha_0(t))(2\epsilon B_Z - M) + t(g_{x_0}^{\hat{u}} - g_0) + t\epsilon B_Z \\ &\subset t(g_{x_0}^{\hat{u}} - g_0 + \tfrac{\delta}{4} B_Z - M). \end{aligned}$$

Tương tự, với $i = 1, ..., m$,

$$t(1 + \alpha_i(t))(g_{x(t)}^{u_i} - g_{x(t)}^{u_0}) \subset t(g_{x_0}^{u_i} - g_0 + \tfrac{\delta}{4m} B_Z - M). \tag{2.20}$$

Kết hợp (2.11) với $z = \hat{x} + \epsilon x_1 + \overline{x}(t)$ và (2.20) ta thấy vế trái của biểu thức (2.18) chứa trong vế trái của bao hàm thức

$$g_0 + t(g_{\bar{x}}' + g_{x_0}^{\hat{u}} - g_0 + \epsilon \sum_{i=1}^{m} (g_{x_0}^{u_i} - g_0)$$
$$+ \frac{\delta}{4} B_Z + \frac{\delta}{4} B_Z + \frac{\delta}{4} B_Z - M) - g_t$$
$$\subset g_0 + t(g_{\bar{x}}' + g_{x_0}^{\hat{u}} - g_0 + \delta B_Z - M) - g_t.$$

Bởi vậy, từ mỗi $b_\delta^t \in \delta B_Z$ và $m^t \in M$, thì (2.18) có thể viết lại là

$$g_0 + t(g_{\bar{x}}' + g_{x_0}^{\hat{u}} - g_0 + b_\delta^t - m^t) - g_t \in M. \tag{2.21}$$

Để kiểm tra $g_t \in -M$ với những $t > 0$ đủ bé, ta giả sử ngược lại là $\exists t_n \to 0^+$, $\exists \mu_n \in M^*$, $\|\mu_n\| = 1$, (với μ_n hội tụ *yếu tới $\overline{\mu} \in M^*$), $\langle \mu_n, g_{t_n} \rangle \geq 0$. Dễ thấy rằng $\overline{\mu} \in M_0^*$. Thực vậy, nếu $\overline{\mu} \notin M_0^*$ thì tồn tại $\beta > 0$ sao cho $\langle \overline{\mu}, g_0 \rangle < -\beta$. Đồng thời, (2.21) suy ra

$$\langle \mu_n, g_{t_n} \rangle \leq \langle \mu_n, g_0 \rangle + t_n \langle \mu_n, g'_{\bar{x}} + g^{\bar{u}}_{x_0} - g_0 + b^{t_n}_{\delta} - m^{t_n} \rangle. \qquad (2.22)$$

Do đó, $\langle \mu_n, g_{t_n} \rangle < 0$ với t_n đủ bé. Đây là mâu thuẫn. Bây giờ với $\overline{\mu} \in M_0^*$ và biểu thức (2.10) ta có, khi n đủ lớn,

$$t_n \langle \mu_n, g'_{\bar{x}} + g^{\bar{u}}_{x_0} - g_0 + b^{t_n}_{\delta} - m^{t_n} \rangle < 0.$$

Bởi vậy, (2.22) suy ra với n đủ lớn, $\langle \mu_n, g_{t_n} \rangle < 0$, là không thể xảy ra.

Lý luận như trên với g_t áp dụng cho f_t ta có

$$f_t - f_0 \in t(f'_{\bar{x}} + f^{\bar{u}}_{x_0} - f_0 + b^t_{\delta} - k^t) - K$$
$$\subset -K - intK = -int\ K.$$

Điều này mâu thuẫn với gỉa thiết $(x_0, u_0; f_0)$ là cực tiểu yếu của bài toán và định lý được chứng minh. □

Cũng như ở Chương 1, đến đây ta lại có thể áp dụng định tính ràng buộc kiểu Slater để suy ra điều kiện cần tối ưu kiểu Kuhn-Tucker như sau.

ĐỊNH LÝ 2.1.2 *Nếu thêm vào các giả thiết của Định lý 2.1.1 các giả thiết* $D_x P(x_0, u_0; 0)X + P(x_0, U)$ *chứa lân cận gốc tọa độ và tồn tại* $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in X \times U$, $g'_{\tilde{x}} \in D_x G(x_0, u_0; g_0)\tilde{x}$, $p'_{\tilde{x}} \in D_x P(x_0, u_0; 0)\tilde{x}$, $g^{\tilde{u}}_{x_0} \in G(x_0, \tilde{u})$ *và* $p^{\tilde{u}}_{x_0} \in P(x_0, \tilde{u})$ *sao cho*

$$g'_{\tilde{x}} + g^{\tilde{u}}_{x_0} - g_0 \in -int\ M_0^{**},$$
$$p'_{\tilde{x}} + p^{\tilde{u}}_{x_0} = 0,$$

thì, $\lambda_0 \neq 0$.

Chứng minh: Tương tự chứng minh cuả Định lý 1.3.2. □

NHẬN XÉT 2.1.1. Định lý 2.1.1 là mở rộng của Định lý 1.3.1 ra cho trường hợp bao hàm thức $0 \in P(x, u)$. Hơn nữa ở đây còn có một cải tiến là

$p(.,u_0)$ chỉ cần là dưới chính qui, nhẹ đi nhiều so với giả thiết về chính quy ở Định lý 1.3.1. Để bù lại, ở (iv), ánh xạ $(F,G,P)(x,.)$ cần giả thiết thêm là $K \times M \times \{0\}$-giống lồi trong cả U, không chỉ trong $(U,\{u_0\}))$. Tuy nhiên sự hạn chế thêm này có thể được nới lỏng nếu ta thay tính nủa liên tục mạnh ở (iii) bởi tính nửa liên tục đều như sau.

ĐỊNH LÝ 2.1.3 *Giả sử có $(i_1),(i_2)$ và (ii) như trong Định lý 2.1.1. Giả thiết thêm là*

(iii') với mỗi $u \neq u_0$, $F(.,u)(G(.,u)$,tương ứng) là K -u.l.s.c. với $F(x_0,u)(M$-u.l.s.c. với $G(x_0,u))$ tại x_0. Hơn nữa, $F(.,u_0)$ $(G(.,u_0))$ là $-K$-u.l.s.c. với f_0 $(-M$-u.l.s.c. với g_0, tương ứng) tại x_0;

(iv') $(F,G,P)(x_0,.)$ là $K \times M \times \{0\}$-giống lồi. Hơn nữa, $(F,G,P)(.,.)$ là $K \times M \times \{0\}$-giống lồi yếu trong $(U,\{u_0\})$ tại x_0, mạnh đối với P.

Khi đó kết luận của Định lý 2.1.1 vẫn đúng.

Chứng minh. Tương tự chứng minh Định lý 2.1.1, với một vài thay đổi nhỏ. □

Bây giờ việc chuyển kết quả vừa nhận được của bài toán $(\tilde{P})$ sang cho (P) chỉ là thay đổi một số kỹ thuật cụ thể trên con đường đã quen biết như đã nói ở chương trước. Chúng tôi đã kiểm tra cụ thể rằng ba Định lý 2.1.1, 2.1.2 và 2.1.3 vẫn đúng cho bài toán (P) nếu ta thay tính giống lồi và giống lồi yếu giả thiết ở (iv) và (iv') bởi tính giống lồi mạnh đối với G (xem Định nghĩa 1.2.3).

Cuối cùng, để hoàn thiện nghiên cứu về điều kiện cần tối ưu cho tối ưu hoá đa trị có tham số theo cách tiếp cận đã đặt ra, ta phải mở rộng các Định lý 1.3.4 và 1.3.6 ra trường hợp bao hàm thức. Tức là phải thay giả thiết về giống lồi bởi giả thiết về giống lồi xấp xỉ. Như đã nói ở chương trước, việc này là quan trọng cho khả năng áp dụng, nhất là vào điều khiển tối ưu. Để tôn thêm tính "đối xứng" bản chất của đa số các mô hình toán học, bây giờ ta lại trình bày cụ thể cho bài toán (P).

ĐỊNH NGHĨA 2.1.1. Bài toán (P), hoặc bộ ba ánh xạ đa trị (F,G,P), được gọi là giống lồi xấp xỉ tại (x_0,u_0) nếu tồn tại lát cắt $\overline{p}(.,.)$ của $P(.,.)$ sao cho với mọi $u \in U$, $\overline{p}(.,u)$ là khả vi liên tục tại x_0 và $\overline{p}(x_0,u_0) = 0$;

đồng thời với mọi tập hữu hạn $\{u_1, ..., u_s\} \subset U$, với mọi $\delta > 0$, tồn tại $\epsilon > 0$, lân cận V của x_0, ánh xạ $v : V \times \epsilon\sum^s \longrightarrow U, e \in K, q \in M$ sao cho $\forall x, x' \in V$, $\exists f_x^{u_j} \in F(x, u_j), g_x^{u_j} \in G(x, u_j), j = 0, 1, ..., s$, $\forall \alpha, \alpha' \in \epsilon\sum^s$, $\forall g_x \in G(x, v(x, \alpha))$, $\exists f_x \in F(x, v(x, \alpha))$, $\forall \overline{p}' \in D_x P(x_0, u_0; 0)(x - x')$, $\forall \overline{p}_{x_0}^{u_j} \in P(x_0, u_j)$, ta có ba hệ thức đầu cho v, F và G như ở Định nghĩa 1.2.5, còn hệ thức cho P thay bởi

$$\|\overline{p}(x, v(x, \alpha)) - \overline{p}(x', v(x', \alpha')) - \overline{p}' + \sum_{i=1}^{s}(\alpha_i - \alpha_i')\overline{p}_{x_0}^{u_i}\|$$
$$\leq \delta(\|x - x'\| + \sum_{i=1}^{s} |\alpha_i - \alpha_i'|). \tag{2.25}$$

Bây giờ giả sử (x_0, u_0) là điểm chấp nhận được của (P) và $f_0 \in F(x_0, u_0)$, $g_0 \in G(x_0, u_0)$.

ĐỊNH LÝ 2.1.4 *Giả sử có gỉa thiết* $(i_1), (ii)$ *và (iii') như trong Định lý 2.1.3. Hơn nữa giả thiết là (iv'')* (F, G, P) *là giống lồi xấp xỉ tại* (x_0, u_0)*. Khi đó kết luận của Định lý 2.1.3 vẫn đúng.*

Chứng minh. Đặt

$$L = D_x P(x_0, u_0; 0)X, \ B = L + convp(x_0, U).$$

Nếu $spanB \neq W$, $0 \notin intB$, thì đúng như trong chứng minh của Định lý 2.1.1 ta có kết luận của định lý.

Trường hợp $0 \in intB$, xét tập C gồm tất cả $(y, z, w) \in Y \times Z \times W$ sao cho $\exists x \in X, \exists \{u_1, ..., u_m\} \subset U$, $\exists \gamma_i > 0$, $\exists (f_i, g_i, p_i) \in (F, G, P)(x_0, u_i)$, $i = 1, ..., m$, $\exists f_x' \in D_x F(x_0, u_0; f_0)x$, $\exists g_x' \in D_x G(x_0, u_0; g_0)x$, $\exists p_x' \in D_x P(x_0, u_0; 0)x$,

$$f_x' + \textstyle\sum_{i=1}^m \gamma_i(f_i - f_0) - y \in -intK, \tag{2.26}$$
$$g_x' + \textstyle\sum_{i=1}^m \gamma_i(g_i - g_0) - z \in -intM, \tag{2.27}$$
$$p_x' + \textstyle\sum_{i=1}^m \gamma_i p_i - w = 0. \tag{2.28}$$

Tương tự như trong chứng minh Định lý 1.3.4, C là tập lồi với phần trong khác rỗng. Nếu C không giao với $\{-intK\} \times \{-intM_0^{**}\} \times \{0\}$ thì bởi định lý tách ta có kết luận của định lý.

Bây giờ, giả sử hai tập nói trên giao nhau thì tồn tại $x' \in X$, $u_{01}, ..., u_{0m_0} \in U$, $\gamma_{01} > 0, ..., \gamma_{0m_0} > 0$, $(f_j^0, g_j^0, p_j^0) \in (F, G, P)(x_0, u_{0j})$, $j = 1, ..., m_0$, $f' \in$

$D_xF(x_0,u_0;f_0)x'$, $g' \in D_xG(x_0,u_0;g_0)x'$, $p' \in D_xP(x_0,u_0;0)x'$, sao cho

$$f' + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j}(f_j^0 - f_0) \in -intK,$$
$$g' + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j}(g_j^0 - g_0) \in -intM_0^{**},$$
$$p' + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j}p_j^0 = 0.$$

Do $Span\Pi(B) = W/L$ là hữu hạn chiều, sẽ có $z_1,...,z_k \in \Pi(B)$ sao cho $Span\{z_1,...,z_k\} = W/L$ và $z_1 + ... + z_k = 0$. Từ định nghĩa của B ta có $x_1 \in X$, $\gamma_{11} > 0, ..., \gamma_{1m_1} > 0, ..., \gamma_{k1} > 0, ..., \gamma_{km_k} > 0$, $u_{11},...,u_{1m_1},...,u_{k1},...,u_{km_k} \in U$, $p'_{x_1} \in D_xP(x_0,u_0;0)x_1$, và $P_{qi} \in P(x_0,u_{qi})$, $q = 1,...,k$, và $i = 1,...,m_0$ sao cho

$$\Pi(\textstyle\sum_{i=1}^{m_q} \gamma_{qi}p_{qi}) = z_q \ , q = 1,...,k,$$
$$p'_{x_1} + \textstyle\sum_{q=1}^{k}\sum_{i=1}^{m_q} \gamma_{qi}p_{qi} = 0, \tag{2.29}$$
$$Span(L \cup \{p_{qi} : q = 1,...,k, i = 1,...,m_q\}) = W. \tag{2.30}$$

Tương tự như trong chứng minh Định lý 1.3.4, bởi Bổ đề 1.3.3, (2.26),(2.27) và (2.28) chỉ ra rằng với mọi $(f_i^q, g_i^q) \in Y \times Z$, với mọi $\theta > 0$ đủ bé, tồn tại $\overline{f}' \in D_xF(x_0,u_0;f_0)(x' + \theta x_1)$, $\overline{g}' \in D_xG(x_0,u_0;g_0)(x' + \theta x_1)$, và $\overline{p}' = p' + \theta p'_{x_1} \in D_xP(x_0,u_0;0)(x' + \theta x_1)$, sao cho

$$\overline{f}' + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j}(f_j^0 - f_0) + \sum_{q=1}^{k}(\sum_{i=1}^{m_q} \theta\gamma_{qi}(f_i^q - f_0)) \in -intK, \tag{2.31}$$

$$\overline{g}' + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j}(g_j^0 - g_0) + \sum_{q=1}^{k}(\sum_{i=1}^{m_q} \theta\gamma_{qi}(g_i^q - g_0)) \in -intM_0^{**}, \tag{2.32}$$

$$\overline{p}' + \sum_{j=1}^{m_0} \gamma_{0j}p_j^0 + \sum_{q=1}^{k}\sum_{i=1}^{m_q} \theta\gamma_{qi}p_{qi} = 0. \tag{2.33}$$

Đặt $\overline{x} = x' + \theta x_1, \overline{u}_1 = u_{01}, ..., \overline{u}_{m_0} = u_{0m_0}, \overline{u}_{m_0+1} = u_{11}, ..,$
$\overline{u}_s = \overline{u}_{m_0+m_1+..+m_k} = u_{km_k}, \overline{\alpha}_1 = \gamma_{01}, ..., \overline{\alpha}_{m_0} = \gamma_{0m_0}, \overline{\alpha}_{m_0+1} = \theta\gamma_{11}, ..., \overline{\alpha}_s = \theta\gamma_{km_k}, \overline{f}_1 = f_1^0, \overline{f}_{m_0} = f_{m_0}^0, \overline{f}_{m_0+1} = f_1^1, ..., \overline{f}_s = f_{m_k}^k$ và tương tự cho $\overline{g}_1, ..., \overline{g}_s$, và $\overline{p}_1, ..., \overline{p}_s$. Khi đó (2.31), (2.32), (2.33) cùng với (2.29) và (2.30) được viết

lại là

$$\overline{f}' + \Sigma_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j(\overline{f}_j - f_0) \in -intK, \tag{2.34}$$

$$\overline{g}' + \Sigma_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j(\overline{g}_j - g_0) \in -intM_0^{**}, \tag{2.35}$$

$$\overline{p}' + \Sigma_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j \overline{p}_j = 0, \tag{2.36}$$

$$Span(L \cup \{\overline{p}_j : j = 1, ..., s\}) = W. \tag{2.37}$$

Từ giả thiết (iv"), sẽ có $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_s$ và $\delta > 0$ đủ bé để nhận được (2.25) và các hệ thức ứng với F và G trong Định nghĩa 1.2.5 (với $\overline{u}_1, ..., \overline{u}_s$ thay cho $u_1, ..., u_s$).

Bởi giả thiết (i_1), với $\overline{x}$ và $\overline{p}'$, sẽ có lát cắt địa phương $p(., u_0)$ với $p(x_0, u_0) = 0$ và $\overline{p}' = p'_x(x_0, u_0)\overline{x}$. Ta định nghĩa ánh xạ $\mathcal{P}$ và ánh xạ tuyến tính giới nội A của lân cận $(x_0, 0) \in X \times R^s$ vào W như sau

$$\mathcal{P}(x, \alpha) = \overline{p}(x, v(x, \alpha^+)) + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j^- \overline{p}_j,$$

$$A(x, \alpha) = p'_x(x_0, u_0)x + \sum_{j=1}^{s} \alpha_j \overline{p}_j,$$

ở đây $\alpha_j^+ := max\{\alpha_j, 0\}; \alpha_j^- := \alpha_j - \alpha_j^+$, $\alpha^+ := (\alpha_1^+, ..., \alpha_s^+)$. Bởi (2.25), với mỗi (x, α) và (x', α') trong $V \times \epsilon \sum^s$ ta có

$$\|\mathcal{P}(x, \alpha) - \mathcal{P}(x', \alpha') - A(x, \alpha) + A(x', \alpha')\|$$

$$= \|\overline{p}(x, v(x, \alpha^+)) - \overline{p}(x', v(x', \alpha'^+)) - p'_x(x_0, u_0)(x - x')$$

$$- \sum_{j=1}^{s}(\alpha_j^+ - \alpha_j'^+)\overline{p}_j\| \le \delta(\|x - x'\| + \sum_{j=1}^{s} |\alpha_j - \alpha_j'|). \tag{2.38}$$

Do (2.37), $A(X \times R^s) = W$. Ký hiệu $\overline{A} : (X \times R^s)/KerA \to W$ là ánh xạ một một ứng với A. Nếu δ chọn bé sao cho $\delta\|\overline{A}^{-1}\| < 1/2$, thì bởi định lý Lusternik, tồn tại $\overline{t} > 0, k > 0$ và ánh xạ $t \to (x(t), \alpha(t))$ của $[0, \overline{t}]$ vào $X \times R^s$ sao cho, với mỗi $t \in [0, \overline{t}]$,

$$\mathcal{P}(x_0 + t\overline{x} + x(t), t\overline{\alpha} + \alpha(t)) = 0,$$

$$\|x(t)\| + \sum_{j=1}^{s} |\alpha_j(t)| \le k\|\mathcal{P}(x_0 + t\overline{x}, t\overline{\alpha})\|$$

$$= k\|\mathcal{P}(x_0 + t\overline{x}, t\overline{\alpha}) - \mathcal{P}(x_0, 0) - A(x_0 + t\overline{x}, t\overline{\alpha}) - A(x_0, 0)\|$$
$$\leq tk\delta(\|\overline{x}\| + \sum_{j=1}^{s} \overline{\alpha}_j). \quad (2.39)$$

Bởi vậy, $x(t)$ và $u(t)$ hội tụ tới 0 khi t tiến tới 0. Nếu δ đủ bé sao cho $k\delta(\|\overline{x}\|+\sum_{j=1}^{s}\overline{\alpha}_j) < min\{\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_s\}$, thì (2.39) suy ra $\|x(t)\|+\sum_{j=1}^{s}|\alpha_j(t)| < tmin\{\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_s\}$. Vậy $t\overline{\alpha}_j + \alpha_j(t) > 0$ với mọi j và $t > 0$ đủ bé. Hơn nữa,

$$\mathcal{P}(x, t\overline{\alpha} + \alpha(t)) = \overline{p}(x, v(x, t\overline{\alpha} + \alpha(t))) \in P(x, v(x, t\overline{\alpha} + \alpha(t))).$$

Đặt

$$\overline{x}(t) = x_0 + t\overline{x} + x(t)\ ,\ \overline{u}(t) = v(\overline{x}(t), t\overline{\alpha} + \alpha(t)),$$

ta có

$$0 = \overline{p}(\overline{x}(t), \overline{u}(t)) \in P(\overline{x}(t), \overline{u}(t)).$$

Bây giờ như trong chứng minh Định lý 1.3.4, ta thu được, với mọi t đủ bé, $G(\overline{x}(t), \overline{u}(t)) \subset -M$ và tồn tại $\overline{f}_t \in F(\overline{x}(t), \overline{u}(t))$ sao cho $\overline{f}_t - f_0 \in -intK$. Điều này mâu thuẫn với $(x_0, u_0; f_0)$ là cực tiểu yếu và chứng minh kết thúc. □

Cũng tương tự như ở Chương 1, dễ kiểm tra được là Định lý 2.1.4 vẫn đúng cho bài toán $(\tilde{P})$, thậm chí có thể nới lỏng ở (iv") từ " $\forall g_x \in G(x, v(x, \alpha))$ " thành " $\exists g_x \in G(x, v(x, \alpha))$".

2.2 Các thí dụ

Vì dạng các định lý trong chương này phức tạp, để thuyết phục độc giả rằng thực ra các giả thiết là nhẹ và không khó kiểm tra ta hãy xét hai thí dụ minh họa việc áp dụng hai định lý chính.

THÍ DỤ 2.2.1 (Minh họa Định lý 2.1.1). Giả sử $X = W = C^1_{[0,1]}$, $Y = Z = U = R$ và $K = M = R_+$. Giả sử $f : X \to R$ là khả vi liên tục trong lân cận của x_0 thỏa $x_0 \neq const$ và $x_0(0) = 0$. Xét bài toán tối ưu với bao hàm thức vi phân sau

$$min(\textstyle\int_0^1 f(x(t))dt + u^2), \quad (2.40)$$
$$\|x - x_0\|^2(|u|[0, 1] - 1) \subset -R_+, \quad (2.41)$$
$$\dot{x} \in \{\tfrac{\dot{x}_0 + 2a\dot{x}_0 x_0 - a\dot{x}_0 x}{ax_0 + 1} : a \in R\},\ x(0) = 0. \quad (2.42)$$

Rõ ràng rằng nếu tồn tại lân cận V của x_0 sao cho $f(x) \geq f(x_0)$ với mọi $x \in V$, thì $(x_0, u_0) := (x_0, 0)$ là cực tiểu địa phương của Bài toán (2.40)-(2.42). Để đưa bài toán này về bài toán ở dạng (P) ta thấy rằng (2.42) là tương đương với

$$0 \in \{a\dot{x}x_0 + \dot{x} - \dot{x}_0 - 2a\dot{x}_0x_0 + a\dot{x}_0x : \ a \in R\}, x(0) = 0,$$

hoặc, tương đương,

$$0 \in \{\frac{d}{dt}[(x - x_0)(ax_0 + 1)] : \ a \in R\}, \ x(0) = 0.$$

Vậy (2.42) tương đương với

$$0 \in \{(x - x_0)(ax_0 + 1) : a \in R\},$$

có dạng $0 \in P(x, u)$ (nhưng P là không phụ thuộc u).

Lấy $f_0 = \int_0^1 f(x(t))dt$ và $g_0 = 0$ chúng ta kiểm tra rằng tất cả các giả thiết của Định lý 2.1.1 cho cả hai bài toán (P) và $(\tilde{P})$ là thỏa mãn.

Vì F là đơn trị, các giả thiết (ii) và (iii) đối với F là rõ ràng còn đối với G ta đã kiểm tra ở Thí dụ 1.3.1. Bây giờ tới kiểm tra (i_1). Giả sử $\overline{x} \in X$ và $p'_{\overline{x}} \in D_xP(x_0, 0; 0)\overline{x}$. Khi đó lát cắt

$$P(x, u_0) = \begin{cases} x - x_0 & \text{nếu } \ \overline{x} = 0, \\ \frac{p'_{\overline{x}}}{\overline{x}}(x - x_0) & \text{nếu } \ \overline{x} \neq 0, \end{cases}$$

là thỏa giả thiết (i_1). Bây giờ kiểm tra (i_2), dễ thấy rằng $P(x_0, u) = \{0\}$ với mọi $u \in U$. Vậy lát cắt $P(x, u) = x - x_0$ là thỏa mãn (i_2). Cuối cùng tới kiểm tra (iv). $\forall x \in C^1_{[0,1]}, \forall\ u_1 \in U$, $\forall u_2 \in U$, $\forall \gamma \in [0, 1]$, lấy $u = 0$, $f_u = \int_0^1 f(x(t))dt$ và $g_x = -\|x - x_0\|^2$ ta có

$$\begin{aligned} &(1-\gamma)(\textstyle\int_0^1 f(x(t))dt + u_1^2) + \gamma(\int_0^1 f(x(t))dt + u_2^2) - \int_0^1 f(x(t))dt \\ &\qquad = (1-\gamma)u_1^2 + \gamma u_2^2 \in R_+, \\ &(1-\gamma)\|x - x_0\|^2(|u_1|[0,1] - 1) + \gamma\|x - x_0\|^2(|u_2|[0,1] - 1) + \|x - x_0\|^2 \\ &\qquad = (1-\gamma)\|x - x_0\|^2|u_1|[0,1] + \gamma\|x - x_0\|^2|u_2|[0,1] \subset R_+, \\ &\qquad (1-\gamma)P(x, u_1) + \gamma P(x, u_2) = P(x, u). \end{aligned}$$

Vậy, (iv) là đúng.

THÍ DỤ 2.2.2 (Minh họa Định lý 2.1.4). Giả sử $X = Y = Z = W = U = R$ và $K = M = R_+$. Giả sử $\mathcal{F} : X \rightsquigarrow Y$, $v : X \to Y$, $w : U \to Y$ và $P : U \rightsquigarrow W$ là các ánh xạ đa trị. Giả sử $x_0 \in X$ và $u_0 \in U$. Bài toán được xét như sau

$$\begin{gathered} min[(x - x_0)^2\mathcal{F}(u) + v(x) + w(u)], \\ (x - x_0)^2(|u_1|[0,1] + u_0) \subset -R_+, \\ 0 \in (x - x_0)P(u). \end{gathered}$$

Giả sử các giả thiết sau là thỏa mãn.

(a) $\mathcal{F}(u)$ là giới nội với mọi $u \in U$. $\mathcal{F}(.)$ có lát cắt $f(.)$ sao cho $sup\{|f(u)| : u \in N(u_0)\} := A$ là hữu hạn, ở đây $N(u_0)$ là lân cận của u_0.

(b) $v(.)$ là khả vi tại x_0 và $w(.)$ là hàm tuyến tính.

(c) $1 \in P(u)$ với mọi $u \in U$ và $P(u_0) = \{1\}$.

Bây giờ ta kiểm tra các giả thiết của Định lý 2.1.4, với $f_0 = v(x_0) + w(u_0)$, $g_0 = 0$.

Tính toán các đạo hàm Clarke ta được

$$D_x P(x_0, u_0; 0)\overline{x} = \{\overline{x}\}, \tag{2.43}$$

$$D_x F(x_0, u_0; f_0)\overline{x} = \{v'(x_0)\overline{x}\}.$$

với mọi $\overline{x} \in R$. Do (2.43), (i_1) là dễ kiểm tra với lát cắt $p(., u_0) = x - x_0$. Các giả thiết (ii) và (iii') đối với G được kiểm tra tương tự như trong Thí dụ 1.3.1. Xét giả thiết (ii) đối với F. Giả sử $\overline{x} \in R$ và $\epsilon > 0$. Ta chỉ ra là, với mỗi $\gamma > 0$ đủ bé và mỗi x gần $\overline{x}$,

$$\frac{1}{\gamma}(F(x_0 + \gamma x, u_0) - f_0) - v'(x_0)\overline{x} \subset (-\epsilon, \epsilon) - R_+.$$

Điều này là đúng bởi (a) và (b), vì vế trái biểu thức trên viết lại được là

$$\gamma x^2 \mathcal{F}(u_0) + \frac{v(x_0 + \gamma x) - v(x_0)}{\gamma} - v'(x_0)\overline{x}.$$

Bây giờ xét tính nửa liên tục dưới đều của $F(.,u)$ trong (iii'). Cho $\epsilon > 0$, ta có

$$F(x,u) - F(x_0,u) = (x-x_0)^2\mathcal{F}(u) + v(x) - v(x_0) \subset (-\epsilon,\epsilon)$$

với x khá gần x_0, do $\mathcal{F}(u)$ là giới nội và $v(.)$ là liên tục. Vậy $F(.,u)$ là R_+-u.l.s.c. với $F(x_0,u)$ tại x_0. Tương tự, $F(.,u_0)$ là $-R_+$-u.l.s.c. với f_0 tại x_0.

Bây giờ kiểm tra (iv"). Chọn $\overline{p}(x,u) = x - x_0$. Giả sử $u_1,...,u_s$ và δ là đã cho. Đặt $M = max\{|u_i|,\ i = 1,...,s\}$, $Q = max\{A, 1, max\{|f(u_i)|,\ i = 0,...,s\}\}$, $\epsilon = min\{\frac{\delta}{4QM}, \frac{\delta}{4Q}, 1\}$, $V = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$, $v(x,\alpha) = u_0 + \sum_{j=1}^s \alpha_j(u_j - u_0)$, $e = 1$ và $q = 1$. Với $x, x' \in V$ ta lấy $f_x^{u_i} = (x-x_0)^2 f(u_i) + v(x) + w(u_i)$ và $g_x^{u_i} = (x-x_0)^2 u_0$. Tiếp tục, từ mỗi $\alpha, \alpha' \in \epsilon\sum^s$ ta lấy $f_x = (x-x_0)^2 f(v(x,\alpha)) + v(x) + w(v(x,\alpha))$. Hơn nữa, trong thí dụ này thì $\overline{p}' = x - x'$ và $\overline{p}_{x_0}^{u_i} = 0$. Hệ thức ứng với F trong Định nghĩa 1.2.5 được kiểm tra như sau

$$\begin{aligned}
&f_x^{u_0} + \textstyle\sum_{i=1}^s \alpha_i(f_x^{u_i} - f_x^{u_0}) - f_x + \delta(|x-x_0| + \sum_{i=1}^s \alpha_i)\\
&= (x-x_0)^2(f(u_0) - f(u_0 + \textstyle\sum_{i=1}^s \alpha_i(u_i - u_0)))\\
&+ (x-x_0)^2 \textstyle\sum_{i=1}^s \alpha_i(f(u_i) - f(u_0)) + \delta(|x-x_0| + \sum_{i=1}^s \alpha_i)\\
&\geq -(x-x_0)^2 2Q - (x-x_0)^2 2Q \textstyle\sum_{i=1}^s \alpha_i + \delta(|x-x_0| + \sum_{i=1}^s \alpha_i)\\
&\geq -\tfrac{\delta}{2}|x-x_0| - \tfrac{\delta}{2}\textstyle\sum_{i=1}^s \alpha_i + \delta(|x-x_0| + \sum_{i=1}^s \alpha_i) \geq 0.
\end{aligned}$$

Tiếp theo, hệ thức ứng với G được kiểm tra tương tự như trong Thí dụ 1.3.1. Cuối cùng, (2.25) là rõ ràng vì lát cắt $\overline{p}(x,u) = x - x_0$.

2.3 Nhận xét cuối chương

Điều kiện cần tối ưu kiểu Fritz John cho bài toán tối ưu đa trị cũng được xét trong [Corley 1981, 1988, 1989], [Luc-Malivert 1992], [Sach-Craven 1991a, 1991b], [Sach-Yen-Craven 1994]. Giả thiết nặng và cốt yếu trong các nghiên cứu đó là nón thứ tự của các không gian được xét đều có phần trong khác trống. Việc loại bỏ giả thiết này đã là nguyên nhân chính tạo nên sự phức tạp trong chứng minh của các định lý.

Trong chương này chúng ta đã mở rộng kết quả ở Chương 1 từ trường hợp ràng buộc đẳng thức trở thành bao hàm thức $0 \in P(x, u)$. Tuy vậy chúng ta vẫn chỉ hạn chế trong trường hợp ánh xạ đa trị P có các lát cắt đơn trị thích hợp. Chúng tôi nghĩ rằng việc loại bỏ hạn chế này có lẽ liên quan đến các mở rộng của định lý Lusternik ra trường hợp đa trị, Chẳng hạn như trong [Khanh 1986,1988,1889]. Đây là một hướng phát triển tiếp của luận án.

Một hướng nghiên cứu tiếp theo khác là áp dụng các kết quả của hai Chương 1 và 2 vào bài toán điều khiển tối ưu hệ động, kể cả trường hợp hệ mô tả bằng bao hàm thức vi phân.

Việc áp dụng kết quả tương ứng cho trường hợp riêng là bài toán tối ưu đơn trị vào điều khiển đã được thực hiện thành công trong [Ioffe-Tihomirov 1979], [Khanh-Nuong 1988,1989],[Nuong 1989], [Khanh 1995_a, 1995_b]. Vì vậy nghiên cứu áp dụng cho trường hợp đa trị là khả thi, tuy tính phức tạp về kỹ thuật là cao.

Chương 3
SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VÀ GỈA BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

3.1 Bất đẳng thức biến phân và mở rộng

3.1.1 Bất đẳng thức biến phân

Bất đẳng thức biến phân được đặt ra và nghiên cứu đầu tiên bởi [Hartman-Stampacchia 1966]. Sự quan tâm nghiên cứu bất đẳng thức biến phân phát triển cực kỳ nhanh chóng, do ý nghĩa lớn và tầm quan trọng cuả bài toán này trong nhiều lĩnh vực như tối ưu hóa, phương trình đạo hàm riêng, toán kinh tế, điều khiển học....

Nhắc lại bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển trong không gian Euclide R^n (đã nói ở Mục 0.2) là cho $E \subset R^n$ là tập lồi đóng, khác trống và $t : R^n \to R^n$, tìm $x_0 \in E$ sao cho

$$\langle t(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0, \ \forall x \in E. \tag{3.1}$$

Một tổng quan khá đầy đủ và sâu sắc về cả lý thuyết, thuật toán và áp dụng cho bài toán hữu hạn chiều này là [Harker-Pang 1990].

Mở rộng ra trường hợp không gian Banach vô hạn chiều X cuả bất đẳng thức biến phân là thay R^n bởi X và $t : R^n \to R^n$ bởi $t : X \to X^*$ với $t(x) = \nabla f(x)$ thì (3.1) chính là điều kiện cần để x_0 là nghiệm bài toán tối ưu vô hướng trong không gian Banach

$$\min_{x \in E} f(x). \tag{3.2}$$

Rõ ràng là để bất đẳng thức biến phân tương ứng điều kiện cần tối ưu cho bài toán tối ưu vectơ (tức là tối ưu đa mục tiêu) ta phải xét $t : X \to L(X, Y)$ ở đây Y là một không gian Banach được sắp bởi nón lồi đóng K có $intK \neq \emptyset$, L(X,Y) là không gian các toán tử tuyến tính liên tục từ X vào Y. Lúc này bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ là tìm $x_0 \in E$ sao cho

$$(t(x_0), x - x_0) \in Y \setminus -intK, \ \forall x \in E. \tag{3.3}$$

Ở đây (ζ, x) là ký hiệu giá trị của toán tử tuyến tính ζ tại x.

Nếu $t(x) = \nabla f(x) \in L(X, Y)$ là đạo hàm Fréchet của $f : X \to Y$ thì (3.3) là điều kiện cần để x_0 là cực tiểu yếu của bài toán tối ưu vectơ cũng có dạng (3.2). Tương tự, nếu thay (3.3) bởi

$$(t(x_0), x - x_0) \in Y \backslash (-K \backslash K) \tag{3.4}$$

thì bất đẳng thức biến phân (3.4) chính là điều kiện cần để x_0 là cực tiểu (Pareto) của bài toán tối ưu vectơ. Cho đến nay bất đẳng thức biến phân vectơ (3.4) gần như chưa được xét tới, mới chỉ có (3.3) được xét.

Chú ý thêm rằng trong tối ưu hóa đa mục tiêu còn có khái niệm quan trọng nữa là cực tiểu thực sự. Có rất nhiều định nghĩa khác nhau (nhưng tương đương với nhau nếu xét bài toán trên tập lồi đóng trong không gian hữu hạn chiều) về cực tiểu thực sự, xem chẳng hạn [Sawaragi-Nakayama-Tanino 1984] , [Khanh 1992]. Đã xuất hiện bài báo đầu tiên nghiên cứu bất đẳng thức biến phân vectơ tương ứng với các định nghĩa nghiệm thực sự đó là [Liu-Gong 2000].

Gần đây bất đẳng thức biến phân với toán tử đa trị đã bắt đầu được quan tâm nhiều. Ý nghĩa thực tế của các bất đẳng thức biến phân đa trị là rất rõ ràng. Chỉ xét ngay bài toán tối ưu vô hướng trong $E \subset R^n$ (3.2), nếu $f : R^n \to R$ lồi nhưng không khả vi mà chỉ có dưới vi phân ∂f thì điều kiện cần (và đủ) để x_0 là nghiệm (3.2) là với mọi $x \in E$, tồn tại $x^* \in \partial f(x_0)$ sao cho

$$(x^*, x - x_0) \geq 0.$$

Do đó dẫn đến bất đẳng thức biến phân với toán tử đa trị $T : E \rightsquigarrow L(X, Y)$ với X, Y là các không gian Banach, Y được sắp bởi nón lồi đóng K với $intK \neq \emptyset$, và $E \subset X$ là tập lồi đóng, khác trống là:

(VI) : Tìm $x_0 \in E$ sao cho $\forall x \in E, \exists t_0 \in T(x_0)$,

$$(t_0, x - x_0) \in Y \backslash -intK. \tag{3.5}$$

Đồng thời ta cũng có thể xét bài toán chặt hơn là

(SVI) : Tìm $x_0 \in E$ sao cho $\forall x \in E, \forall t \in T(x_0)$,

$$(t, x - x_0) \in Y \backslash -intK. \tag{3.6}$$

((SVI) là viết tắt của Strongly Variational Inequality). Ta cũng có thể xét hai bài toán như vậy tương ứng với cực tiểu Pareto, tức là thay $Y\backslash -intK$ bởi $Y\backslash(-K\backslash K)$.

3.1.2 Giả bất đẳng thức biến phân

[Bensonssan-Lions 1979] đã đưa ra bài toán giả bất đẳng thức biến phân (quasi variational inequality problem) với ứng dụng trong bài toán điều khiển xung (impulse control problem). Từ đó bài toán này đã được nghiên cứu trên nhiều khía cạnh và mở rộng, chẳng hạn trong [Chan-Pang 1982], [Shih-Tan 1985], [Kim-Tan 1999], [Ding-Luo 1999]. Người ta cũng thấy các bài toán này được ứng dụng khá nhiều trong lý thuyết trò chơi, toán kinh tế và quy hoạch toán học. Ở Chương 3 và 4 chúng tôi xét bài toán tổng quát này.

Giả sử X và Y là các không gian Banach, $A \subset X$ là tập lồi, khác trống và compact, $K : A \rightsquigarrow Y$ là ánh xạ đa trị có ảnh là nón, lồi, đóng, $\neq Y$ và có phần trong khác trống. Giả sử $T : A \rightsquigarrow L(X,Y)$. Giả sử $E : A \rightsquigarrow X$ là ánh xạ đa trị với $F := \{x \in A, x \in clE(x)\} \neq \emptyset$, và $g : A \to A$ là ánh xạ (đơn trị) liên tục. Hai bài toán giả bất đẳng thức biến phân chúng tôi xét được phát biểu như sau

$$\text{(QVI)} : \text{Tìm } x_0 \in A \text{ sao cho } x_0 \in A \cap clE(x_0), \forall x \in E(x_0);\ \exists t_0 \in T(x_0),$$

$$(t_0, x - g(x_0)) \in Y\backslash -intK(x_0);$$

$$\text{(SQVI)} : \text{Tìm } x_0 \in A \text{ sao cho } x_0 \in A \cap clE(x_0), \forall x \in E(x_0);\ \forall t \in T(x_0),$$

$$(t, x - g(x_0)) \in Y\backslash -intK(x_0).$$

Trong [Kim-Tan 1999] xét trường hợp riêng cuả (QVI) với $T \equiv t$ là ánh xạ đơn trị và dùng thuật ngữ giả bất đẳng thức biến phân suy rộng vì bài toán đã tổng quát hơn các nghiên cứu trước đó. Chúng tôi bỏ từ "suy rộng" cho gọn.

Trong ba tuyển tập các bài báo đứng tên chung ngoài bìa bởi editors [Giannessi-Maugeri 1995], [Pillo-Giannessi 1996] và [Giannessi 2000] xuất hiện cả loạt bài về giả bất đẳng thức biến phân và bất đẳng thức giống biến phân (variational-like inequality), chủ yếu nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm.

Ngoài ra các vấn đề như áp dụng cho các bài toán điều khiển tuyến tính [Cubiotti 1995], bài toán cân bằng giao thông [Luca 1995], [Maugeri 1995], các định lý tách và hàm lỗ hổng (gap functions) [Giannessi 1995],...cũng được đề cập đến. Tuy nhiên chúng tôi chưa thấy bài toán (SQVI) được xét đến.

3.2 Sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân

Sự tồn tại nghiệm là vấn đề trung tâm và được xét đến đầu tiên trong lý thuyết bất đẳng thức biến phân nên các kết quả cho đến nay đã khá phong phú.

[Yao 1994] chứng minh sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân (3.1) trong không gian Banach, trường hợp t là toán tử đơn trị tựa đơn điệu (pseudomonotone) và liên tục trên các không gian con hữu hạn chiều. [Crouzeix 1997] chứng minh cho trường hợp t là toán tử đa trị tựa đơn điệu và nửa liên tục trên. Cả hai tác giả đều nghiên cứu bất đẳng thức biến phân khi tập nghiệm của nó trùng với tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân Minty. Đây cũng là một lý do chính để giả thiết về tính đơn điệu nào đó là cốt yếu. Bài toán bất đẳng thức biến phân Minty, chẳng hạn tương ứng với (VI), là

(VI_M) : tìm $x_0 \in E$ sao cho $\forall x \in E$; $\forall t \in T(x)$,

$$(t, x - x_0) \in Y \setminus -intK.$$

Trong [Hadjisavvas-Schaible 1996] đã thu được sự tồn tại nghiệm cho bất đẳng thức biến phân với toán tử giả đơn điệu (quasimonotone). [Konnov 1998] đã chỉ ra rằng kết quả tương ứng như vậy cho (VI_M) là không đúng, tức là giả thiết T là giả đơn điệu không đảm bảo (VI_M) có nghiệm. Hơn nữa Konnov đã chứng minh được sự tồn tại nghiệm của (VI_M) khi T là giả đơn điệu chặt (strictly quasimonotone), một khái niệm được định nghĩa trong [Hadjisavvas-Schaible 1993] cho toán tử đơn trị và trong Konnov cho toán tử đa trị. [Daniilidis-Hadjisavvas 1999] chứng tỏ rằng có thể giảm nhẹ một chút giả thiết về giả đơn điệu chặt thành giả đơn điệu thực sự (properly quasimonotone), khái niệm được đưa ra trong [Daniilidis-Hadjisavvas 1997].

[John 1999] chứng minh rằng giả thiết về giả đơn điệu thực sự là không giảm nhẹ được nữa, cụ thể là (VI_M) có nghiệm trong mọi E lồi, compact khi và chỉ khi T là giả đơn điệu thực sự.

[Peng 1997] chứng minh sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân là điểm dừng của một hàm merit (merit function) do tác giả đưa ra để chuyển bài toán bất đẳng thức biến phân về bài toán cực tiểu hàm merit.

[Lin-Yang- Yao 1997] nghiên cứu sự tồn tại nghiệm khi giảm nhẹ giả thiết tựa đơn điệu không theo hướng giả đơn điệu mà theo hướng khác, khi dùng định nghĩa K-tựa đơn điệu mở rộng (generalized K-pseudomonotone). Khái niệm này được gọi là tựa đơn điệu yếu (weakly pseudomonotone) trong [Hadjisavvas-Schaible 1998].

[Zhao-Han-Qi 1999] nghiên cứu bất đẳng thức biến phân đơn trị (3.1) trong R^n khi E được cho bởi các bất đẳng thức lồi và đẳng thức affine và chứng minh rằng (3.1) có nghiệm khi và chỉ khi E không có họ đặc biệt, một khái niệm được [Isac-Bulavski-Kalashnikov 1997] đưa ra và được mở rộng ở đây.

[Fu 1997] đưa ra khái niệm cặp ánh xạ đơn điệu và dùng giả thiết về cặp như vậy để chứng minh sự tồn tại nghiệm của cặp bất đẳng thức biến phân.

[Hadjisavvas-Schaible 1998] nghiên cứu sự tồn tại nghiệm cho bài toán cân bằng tổng quát và suy ra sự tồn tại nghiệm cho bất đẳng thức biến phân với toán tử giả đơn điệu yếu (weakly quasimonotone), một tính chất giảm nhẹ từ giả đơn điệu tương tự như tựa đơn điệu yếu nhận được từ tựa đơn điện nói trên.

Trong tất cả nghiên cứu nói trên, các giả thiết đơn điệu là cốt yếu, có thể giảm nhẹ ở mức độ nhất định nhưng không bỏ được. Điều này cũng dễ hiểu vì tính đơn điệu (hoặc đơn điệu giảm nhẹ nào đó) là rất quan trọng, cả về kỹ thuật toán học cũng như để đảm bảo có được kết luận của vấn đề. Chỉ việc chú ý rằng, chẳng hạn xét trường hợp hàm vô hướng $f : X \to R$ cho đơn giản, thì f là lồi (tựa lồi, giả lồi,..., tương ứng) khi và chỉ khi $t = \nabla f$ là đơn điệu (tựa đơn điệu, giả đơn điệu,..., tương ứng). Đã biết tính lồi (hoặc giảm nhẹ) là quan trọng nhường nào cho bài toán tối ưu (3.2), nên cũng dễ thấy tính đơn điệu (hoặc giảm nhẹ) là quan trọng cho bất đẳng thức biến phân

(3.1), biểu thị điều kiện tối ưu cho (3.2).

Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm bất đẳng thức biến phân với toán tử không đơn điệu còn rất ít. [Guo-Yao 1994] xét bài toán này trong không gian Banach phản xạ và giả thiết toán tử t liên tục trong các không gian con hữu hạn chiều và thuộc lớp $(S)_+$, một tính chất đảm bảo sự hội tụ mạnh cuả dãy hội tụ yếu, được định nghĩa trong [Browder 1970]. Nhờ giả thiết này tác giả đưa bài toán về xét trong không gian hữu hạn chiều, khi đó nghiệm tồn tại chỉ cần toán tử là liên tục, không cần đơn điệu.

3.3 Sự tồn tại nghiệm cuả bất đẳng thức biến phân suy rộng

Gần đây đã xuất hiện nhiều nghiên cứu về sự tồn tại mghiệm cuả các bất đẳng thức biến phân suy rộng, thường gọi là giả bất đẳng thức biến phân (quasi variational inequality) và bất đẳng thức giống biến phân (variational-like inequality) với các định nghĩa khá đa dạng, không hoàn toàn trùng nhau, và thuật ngữ cũng biến động đôi chút, chẳng hạn cả loạt bài cuả Ansari, Yao, Chang, Thompson, Yuan, Chen, Goh, Yang, Ding, Fu, Tarafdar, Giannessi, Mastroeni, Pellegrini,... trong [Giannessi 2000], cuả Giannessi trong [Pillo-Giannessi 1996], [Ding 1997], [Kim-Tan 1999], [Chadli-Riahi 2000]....

Đa số các bài trên đều dùng đến các khái niệm đơn điệu nào đó đã nhắc đến trên đây. Ngoài ra còn một số khái niệm mới như C-đơn điệu (C-monotone), η-tựa đơn điệu (η-quasimonotone),C_x-tựa đơn điệu (C_x-quasimonotone).... Một số định lý tồn tại cho bất đẳng thức giống biến phân với toán tử không đơn điệu được chứng minh trong [Ding-Tarafdar 2000].

3.4 Sự tồn tại nghiệm cuả bất đẳng thức biến phân (VI) và (SVI)

Trong mục này chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân trong không gian Banach, tổng quát hơn (VI) và (SVI) định nghĩa ở 3.1.1 và để đơn gian cách gọi ta cũng gọi chúng là (VI) và (SVI), tương ứng. Cụ thể, bài toán là: Cho X và Y là các không gian Banach; $E \subset X$ là tập lồi, khác trống, compact yếu; $K : E \rightsquigarrow Y$ là ánh xạ có ảnh là nón lồi đóng, khác Y và có phần trong khác trống $T : E \rightsquigarrow L(X,Y)$ và $f : E \times E \to Y$. Hai bài toán đặt ra là:

(VI) : tìm $x_0 \in E$ sao cho $\forall x \in E$, $\exists t_0 \in T(x_0)$,

$$(t_0, x - x_0) + f(x, x_0) \in Y \setminus -intK(x_0);$$

(SVI) : tìm $x_0 \in E$ sao cho $\forall x \in E$, $\forall t \in T(x_0)$,

$$(t, x - x_0) + f(x, x_0) \in Y \setminus -intK(x_0);$$

Nếu $f \equiv 0$ và $K(x) \equiv K$, $\forall x \in E$, thì hai bài toán này chính là (VI) và (SVI) định nghĩa ở Mục 3.1.1.

Trước hết ta hãy nhắc lại một số định nghĩa cơ bản cuả giải tích đa trị. Định nghiã đầu tiên là về tính liên tục.

ĐỊNH NGHĨA 3.4.1. Ánh xạ đa trị $\mathcal{F} : E \rightsquigarrow Y$ được gọi là

(i) nửa liên tục trên (upper semicontinuous) viết tắt là usc tại $x_0 \in dom\mathcal{F}$ nếu với mọi tập mở $U \supset \mathcal{F}(x_0)$ tồn tại tập mở $N \ni x_0$ sao cho $\mathcal{F}(N) \subset U$; nửa liên tục trên trong $A \subset dom\mathcal{F}$ nếu $\mathcal{F}$ nửa liên tục trên tại mọi $x \in A$ (nếu $A = dom\mathcal{F}$ thì không cần nói "trong A");

(ii) đóng (closed) nếu $graph\mathcal{F}$ là đóng trong $X \times Y$;

(iii) nửa liên tục dưới (lower semicontinuous) viết tắt là lsc tại $x_0 \in dom\mathcal{F}$ nếu với mọi U mở $U \cap \mathcal{F}(x_0) \neq \emptyset$, tồn tại N mở chứa x_0 sao cho, với mọi $x \in N$, $U \cap \mathcal{F}(x) \neq \emptyset$; phát biểu tương đương là $\forall y_0 \in \mathcal{F}(x_0)$, $\forall x_n \in dom\mathcal{F}$, $x_n \to x_0$, $\exists y_n \in \mathcal{F}(x_n)$, $y_n \to y_0$; nửa liên tục dưới trong A nếu nửa liên tục dưới tại mọi $x \in A$;

(iv) liên tục tại x_0 nếu nó vừa usc tại x_0 vừa lsc tại x_0;

(v) nửa liên tục trên theo tia (upper hemicontinuous), viết tắt là uhc, tại x_0 nếu với mọi $x \in E$, ánh xạ đa trị từ $[0,1]$ vào Y,

$$\alpha \mapsto \mathcal{F}(\alpha x + (1-\alpha)x_0) \tag{3.7}$$

là usc tại 0^+;

(vi) nửa liên tục dưới theo tia (lower hemicontinuous), viết tắt là lhc, tại

x_0 nếu (3.7) là lsc tại $0+$;

(vii) Nếu K là nón trên Y thì $f : X \to Y$ gọi là $K-$lồi trên $E \subset X$ nếu $\forall x_1, x_2 \in X,\ \lambda \in [0,1]$,

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in K.$$

Chú ý rằng tính đóng cuả $\mathcal{F}$ rất gần với tính nửa liên tục trên cuả $\mathcal{F}$ trên $dom\mathcal{F}$. (Vì vậy nhiều tác giả dùng thuật ngữ usc cho tính đóng.) Mối quan hệ cụ thể là (xem [Aubin-Frankowska 1990], hoặc [Konnov 2001] Proposition 2.1.1).

MỆNH ĐỀ 3.4.1 Xét ánh xạ đa trị $\mathcal{F} : E \rightsquigarrow Y$,

(i) Nếu $\mathcal{F}$ là usc và có giá trị đóng thì $\mathcal{F}$ đóng;

(ii) Nếu $\mathcal{F}$ đóng và mọi tập compact $A \subset dom\mathcal{F}$ có ảnh $\mathcal{F}(A)$ compact thì $\mathcal{F}$ usc.

ĐỊNH NGHĨA 3.4.2. Cho ánh xạ $f : E \times E \to Y$ thì ánh xạ đa trị $T : E \rightsquigarrow L(X,Y)$ được gọi là

(i) $f-$đơn điệu trên E nếu $\forall x,\ y \in E,\ \forall s \in T(x),\ \forall t \in T(y)$,

$$(t - s, y - x) + f(y,x) \in Y \setminus -intK;$$

(ii) $f-$tựa đơn điệu (pseudomonotone) trên E nếu $\forall x,\ y \in E, \forall s \in T(x),\ \forall t \in T(y)$,

$$(s, y - x) + f(y,x) \in Y \setminus -intK \ \Rightarrow$$
$$(t, y - x) + f(y,x) \in Y \setminus -intK;$$

(ii') Trường hợp $K : E \rightsquigarrow Y$ thì T được gọi là $f-$tựa đơn điệu trên E nếu $\forall x,\ y \in E$,

$$[\exists s \in T(x), (s, y - x) + f(y,x) \in Y \setminus -intK(x)] \Rightarrow$$
$$[\forall t \in T(y), (t, y - x) + f(y,x) \in Y \setminus -intK(x)];$$

(iii) $f-$tựa đơn điệu yếu trên E nếu $\forall x,\ y \in E$,

$$[\exists s \in T(x), (s, y - x) + f(y,x) \in Y \setminus -intK] \Rightarrow$$

$$[\exists t \in T(y), (t, y - x) + f(y, x) \in Y \setminus -intK];$$

(iii') Trường hợp $K : E \rightsquigarrow Y$ thì T được gọi là $f-$tựa đơn điệu yếu trên E nếu $\forall x,\ y \in E$,

$$[\exists s \in T(x), (s, y - x) + f(y, x) \in Y \setminus -intK(x)] \Rightarrow$$

$$[\exists t \in T(y), (t, y - x) + f(y, x) \in Y \setminus -intK(x)].$$

Trong các khái niệm trên, nếu $f \equiv 0$ thì không cần nói "$f-$".

ĐỊNH NGHĨA 3.4.3. Ánh xạ $\mathcal{F} : E \rightsquigarrow L(X, Y)$ được gọi là nửa liên tục dưới (trên, tương ứng) theo tia suy rộng (generalized lower hemicontinuous), viết tắt là glhc (guhc, tương ứng), tại $x_0 \in E$ nếu với mọi $x \in E$, ánh xạ đa trị từ $[0, 1]$ vào Y

$$\gamma \to (\mathcal{F}(\gamma x + (1 - \gamma)x_0), x - x_0)$$

nửa liên tục dưới (trên, tương ứng) tại 0^+. $\mathcal{F}$ là glhc trên $A \subset E$ nếu glhc tại mọi $x \in A$.

Công cụ chính chúng tôi dùng để chứng minh sự tồn tại nghiệm là Định lý KKM-Fan sau đây, xem [Fan 1961].

ĐỊNH NGHĨA 3.4.5. Giả sử E là tập con của không gian tô pô tuyến tính X. Ánh xạ đa trị $F : E \rightsquigarrow X$ được gọi là ánh xạ KKM trên E nếu với mọi tập hữu hạn $\{x_1, ..., x_n\}$ trong E, ta có $co\{x_1, ..., x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i)$, ở đây coA là ký hiệu bao lồi của tập A.

ĐỊNH LÝ 3.4.1 (KKM-Fan). *Giả sử E là tập con của không gian tô pô tuyến tính Hausdorff X và $F : E \rightsquigarrow X$ là ánh xạ KKM có ảnh đóng. Nếu có ít nhất một $x \in E$ để $F(x)$ compact thì $\bigcap_{x \in E} F(x) \neq \emptyset$.*

Đối với bài toán (VI) chúng ta chứng minh định lý sau về tồn tại nghiệm, không cần giả thiết đơn điệu.

ĐỊNH LÝ 3.4.2. *Giả sử*

(i) $T : E \rightsquigarrow L(X, Y)$ là nửa liên tục trên trong E với tô pô yếu và $L(X, Y)$ với tô pô chuẩn, có ảnh compact khác trống;

(ii) $\forall x, y \in E$, $\forall x_\alpha \xrightarrow{w} x$, $\exists x_\beta$(*lưới con*), $\exists u \in -K(x) + f(y, x)$, $f(y, x_\beta) \xrightarrow{w}$

u;

(iii) $\forall x \in E$, $f(.,x)$ *là* $K(x)-$*lồi và* $f(x,x) \in K(x) \cap -K(x)$;

(iv) $Y \setminus -intK(.)$ *là đóng yếu (tức là khi xét* X *và* Y *với tô pô yếu).*

Khi đó (VI) có nghiệm.

Chứng minh: Với mỗi $y \in E$, ta xác định ánh xạ đa trị $F : E \rightsquigarrow E$ bởi

$$F(y) := \{x \in E : \exists t \in T(x),\ (t, y-x) + f(y,x) \in Y \setminus -intK(x)\}.$$

Vì $y \in F(y)$ nên $F(y) \neq \emptyset$. Nếu $\overline{x} \in \bigcap_{y\in E} F(y)$ thì rõ ràng $\overline{x}$ là nghiệm của (VI). Vì vậy ta chỉ cần chứng minh $\bigcap_{y\in E} F(y) \neq \emptyset$.

Trước hết ta kiểm tra F là ánh xạ KKM trên E. Giả sử phản chứng là có $y = \sum_{i=1}^n \gamma_i y_i$, $\gamma_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1$, $y_i \in E$, $y \notin \bigcup_{i=1}^n F(y_i)$ Khi đó $y \notin F(y_i)$ với mọi i, tức là, với mọi i và mọi $s \in T(y)$,

$$(s, y_i - y) + f(y_i, y) \in -intK(y).$$

Do đó

$$\begin{aligned} 0 = (s, y-y) &= (s, \sum_{i=1}^n \gamma_i y_i - \sum_{i=1}^n \gamma_i y) \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i[(s, y_i - y) + f(y_i, y)] - \sum_{i=1}^n \gamma_i f(y_i, y) \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i[(s, y_i - y) + f(y_i, y)] + f(\sum_{i=1}^n \gamma_i y_i, y) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \gamma_i f(y_i, y) - f(y,y) \in -intK(y). \end{aligned}$$

Suy ra $K(y) = Y$, mâu thuẫn với giả thiết của bài toán bất đẳng thức biến phân. Vậy F là ánh xạ KKM trên E.

Tiếp theo ta chỉ ra rằng $F(y)$ là compact yếu với mọi $y \in E$. Giả sử $x_\alpha \in F(y)$, x_α hội tụ yếu tới $x_0 \in E$. Theo định nghĩa của $F(y)$, $\forall \alpha$, $\exists t_\alpha \in T(x_\alpha)$,

$$(t_\alpha, y - x_\alpha) + f(y, x_\alpha) \in Y \setminus -intK(x_\alpha). \tag{3.8}$$

Vì T là usc trên E, $\forall \epsilon$, $\exists N(x_0)$ (lân cận yếu của x_0) sao cho

$$T(N(x_0)) \subset B(T(x_0), \epsilon),$$

ở đây $B(T(x_0), \epsilon) := \{t \in L(X,Y) : \exists t' \in T(x_0), \|t - t'\| < \epsilon\}$. Do x_α hội tụ yếu đến x_0, không mất tổng quát coi $x_\alpha \in N(x_0), \forall \alpha$. Từ đó $\forall t_\alpha \in T(x_\alpha)$, $\exists t_\alpha^0 \in T(x_0), \|t_\alpha - t_\alpha^0\| < \epsilon$.

Bởi tímh compact của $T(x_0)$, sẽ có lưới con t_β^0 hội tụ tới một điểm $t_0 \in T(x_0)$. Ta có

$$\|t_\beta - t_0\| \leq \|t_\beta - t_\beta^0\| + \|t_\beta^0 - t_0\| < \epsilon + \|t_\beta^0 - t_0\|.$$

Cho $\epsilon \to 0^+$ ta được $\|t_\beta - t_0\| \to 0$. Vì $t_0 \in L(X,Y)$, t_0 cũng là ánh xạ liên tục từ X vào Y khi xét hai không gian này với tô pô yếu. Do đó, $(t_0, y - x_\beta)$ hội tụ yếu tới $(t_0, y - x_0)$. Mặt khác, do

$$\|(t_\beta - t_0, y - x_\beta)\|_Y \leq \|t_\beta - t_0\|_{L(X,Y)} \|y - x_\beta\|_X$$

và $\|y - x_\beta\|_X$ giới nội (do x_β hội tụ yếu), ta có $(t_\beta - t_0, y - x_\beta) \to 0$ (mạnh) trong Y. Vì vậy

$$(t_\beta, y - x_\beta) = (t_\beta - t_0, y - x_\beta) + (t_0, y - x_\beta)$$

hội tụ yếu tới $(t_0, y - x_0)$.

Từ giả thiết (ii) lưới x_β có lưới con mà ta vẫn ký hiệu là x_β sao cho $f(y, x_\beta) \overset{w}{\to} u \in -K(x_0) + f(y, x_0)$. Do (3.8) và tính đóng yếu của $Y \setminus -intK(.)$, ta có

$$(t_0, y - x_0) + u \in Y \setminus - intK(x_0).$$

Vậy

$$(t_0, y - x_0) + f(y, x_0) = (t_0, y - x_0) + u + f(y, x_0) - u \in Y \setminus - intK(x_0).$$

Vì thế $x_0 \in F(y)$, tức là $F(y)$ là tập con đóng yếu của tập compact yếu E. Vậy $F(y)$ compact yếu với mọi $y \in E$. Theo Định lý 3.1.1 của KKM-Fan, $\bigcap_{y \in E} F(y) \neq \emptyset$, tức là (VI) có nghiệm. □

Định lý 3.4.2 là kết quả mới. Trong trường hợp $f \equiv 0$ thì định lý này cải tiến Định lý 3.1 là định lý chính trong [Lin-Yang-Yao 1997]. Bản thân Định lý 3.1 là mở rộng và suy ra được các kết quả trong [Yao 1994a, 1994b], và [Cottle-Yao 1992]. Ở Định lý 3.1 này T phải tựa đơn điệu yếu. Định lý 3.4.2

không cần giả thiết nào về đơn điệu. Cũng chú ý rằng nếu f liên tục yếu theo biến thứ hai thì f thỏa giả thiết (ii) của Định lý 3.4.2.

ĐỊNH LÝ 3.4.3. *Giả sử (ii), (iii) và (iv) như trong Định lý 3.4.2 và giả thiết (i) thay bởi*

(i') T là nửa liên tục trên theo tia suy rộng trong E, là $f-$ tựa đơn điệu yếu trong E, có ảnh compact khác trống.

Khi đó (VI) có nghiệm.

Chứng minh: Với mỗi $y \in E$ ta đặt $F(y)$ như trên và

$$F_1(y) := \{x \in E : \exists t \in T(y),\ (t, y-x) + f(y,x) \in Y \setminus -intK(x)\}.$$

Do tính tựa đơn điệu yếu ta có $F(y) \subset F_1(y)$. Vì F là ánh xạ KKM nên F_1 cũng là ánh xạ KKM. Ta chứng tỏ $F_1(y)$ là compact yếu với mọi y. Giả sử $x_\alpha \in F_1(y)$, x_α hội tụ yếu tới $x_0 \in E$. Theo định nghĩa của F_1, với mỗi α sẽ có $t_\alpha \in T(y)$,

$$(t_\alpha, y - x_\alpha) + f(y, x_\alpha) \in Y \setminus -intK(x_\alpha).$$

Từ giả thiết (ii), lưới x_α có lưới con mà vẫn ký hiệu là x_α sao cho $f(y, x_\alpha) \overset{w}{\to} u \in -K(x_0) + f(y, x_0)$.

Từ tính compact của $T(y)$ sẽ có lưới con t_β hội tụ tới một điểm $\bar{t}$ nào đó thuộc $T(y)$. $\bar{t} \in L(X,Y)$ nên cũng liên tục theo tô pô yếu của X và Y. Vì vậy $(\bar{t}, y - x_\beta)$ hội tụ yếu tới $(\bar{t}, y - x_0)$. Mặt khác ta có

$$\|t_\beta - \bar{t}, y - x_\beta)\|_Y \leq \|t_\beta - \bar{t}\|_{L(X,Y)} \|y - x_\beta\|_X.$$

Do $t_\beta \to \bar{t}$ và $\|y - x_\beta\|_X$ giới nội, nên

$$(t_\beta, y - x_\beta) = (t_\beta - \bar{t}, y - x_\beta) + (\bar{t}, y - x_\beta)$$

hội tụ yếu tới $(\bar{t}, y - x_0)$. Từ tính đóng yếu của $Y \setminus -intK(.)$, suy ra

$$(\bar{t}, y - x_0) + u \in Y \setminus -intK(x_0).$$

Vậy

$$(t_0, y - x_0) + f(y, x_0) = (t_0, y - x_0) + u + f(y, x_0) - u \in Y \setminus -intK(x_0),$$

tức là $x_0 \in F_1(y)$, và $F_1(y)$ đóng yếu và do đó compact yếu. Theo Định lý KKM-Fan, sẽ có

$$\overline{x} \in \bigcap_{y \in E} F_1(y).$$

Bây giờ ta chứng tỏ $\overline{x}$ là nghiệm (VI). Với mỗi $y \in E$, xét ánh xạ $G : [0,1] \rightsquigarrow Y$ xác định bởi

$$G(\gamma) := (T(\gamma y + (1-\gamma)\overline{x}), y - \overline{x}).$$

Xét dãy $\gamma_n \to 0^+$. Do định nghiã $F_1(y)$ sẽ có $t_n \in T(\gamma_n y + (1-\gamma_n)\overline{x})$ sao cho

$$\overline{g_n} := (t_n, y - \overline{x}) + f(y, \overline{x})$$

$$= \frac{1}{\gamma_n}[(t_n, \gamma_n y + (1-\gamma_n)\overline{x} - \overline{x}) + f(\gamma_n y + (1-\gamma_n)\overline{x}, \overline{x})]$$

$$+ f(y, \overline{x}) - \frac{1}{\gamma_n} f(\gamma_n y + (1-\gamma_n)\overline{x}, \overline{x})$$

$$= \frac{1}{\gamma_n}[(t_n, \gamma_n y + (1-\gamma_n)\overline{x} - \overline{x}) + f(\gamma_n y + (1-\gamma_n)\overline{x}, \overline{x})]$$

$$+ \frac{1}{\gamma_n}[\gamma_n f(y, \overline{x}) + (1-\gamma_n) f(\overline{x}, \overline{x}) - f(\gamma_n y + (1-\gamma_n)\overline{x}, \overline{x})]$$

$$- \frac{1-\gamma_n}{\gamma_n} f(\overline{x}, \overline{x}) \in Y \setminus -intK(\overline{x}).$$

Do tính nửa liên tục trên theo tia suy rộng của T, G là usc tại 0^+. Đặt $g_n := (t_n, y - \overline{x}) = \overline{g_n} - f(y, \overline{x})$. Ta có, $\forall k = 1, 2, ..., \exists g_{n_k}$,

$$g_{n_k} \in G(\gamma_{n_k}) \subset B(G(0), \frac{1}{k}).$$

Khi đó sẽ có $g^0_{n_k} \in G(0)$ sao cho $\|g_{n_k} - g^0_{n_k}\| < \frac{1}{k}$. Do $G(0)$ compact sẽ có dãy con, vẫn ký hiệu là $g^0_{n_k}$, để $g^0_{n_k} \to g^0 \in G(0)$. Vì

$$\|g_{n_k} - g^0\| \le \|g_{n_k} - g^0_{n_k}\| + \|g^0_{n_k} - g^0\|$$

nên $g_n \to g^0$ và $\overline{g}_{n_k} \to g^0 + f(y, \overline{x})$. Vì $Y\backslash - intK(\overline{x})$ đóng nên $g^0 + f(y, \overline{x}) \in Y\backslash - intK(\overline{x})$, chứng tỏ $\overline{x}$ là nghiệm (VI). □

Chuyển sang bài toán (SVI) chúng ta chứng minh định lý sau đây, phải giả thiết tựa đơn điệu theo (ii') nói trên. Bài toán (SVI) này chưa được ai nghiên cứu, theo chúng tôi được biết.

ĐỊNH LÝ 3.4.4. *Giả sử (ii), (iii) và (iv) như trong Định lý 3.4.1 và giả thiết (i) thay bởi*

(i") T là nửa liên tục dưới theo tia suy rộng trên E, là $f-$ tựa đơn điệu trên E.

Khi đó (SVI) có nghiệm.

Chứng minh: Với mỗi $y \in E$ ta xác định hai ánh xạ đa trị bởi

$$F(y) := \{x \in E : \exists t \in T(x),\ (t, y - x) + f(y, x) \in Y\backslash - intK(x)\},$$
$$F_2(y) := \{x \in E :\ (T(y), y - x) + f(y, x) \subset Y\backslash - intK(x)\}.$$

Theo chứng minh Định lý 3.4.2, F là ánh xạ KKM trên E. Do tính tựa đơn điệu $F(y) \subset F_2(y)$ với mọi y nên F_2 cũng là ánh xạ KKM. Ta chứng minh $F_2(y)$ là compact yếu với mọi y. Giả sử $x_\alpha \in F_2(y)$, x_α hội tụ yếu tới $x_0 \in E$. Theo định nghĩa của F_2, với mọi $t \in T(y)$ ta có

$$(t, y - x_\alpha) + f(y, x_\alpha) \in Y\backslash - intK(x_\alpha).$$

Vì t liên tục khi xét X và Y với tô pô yếu nên $(t, y - x_\alpha)$ hội tụ yếu tới $(t, y - x_0)$.

Từ giả thiết (ii) lưới x_α có lưới con mà vẫn ký hiệu là x_α sao cho $f(y, x_\alpha) \xrightarrow{w} u \in -K(x_0) + f(y, x_0)$. Do $Y\backslash - intK(.)$ đóng yếu nên

$$(t, y - x_0) + u \in Y\backslash - intK(x_0),\ \forall t \in T(y).$$

Vậy

$$(t_0, y - x_0) + f(y, x_0) = (t_0, y - x_0) + u + f(y, x_0) - u \in Y\backslash - intK(x_0),$$

tức là $x_0 \in F_2(y)$, và $F_2(y)$ đóng yếu và do đó compact yếu. Theo Định lý KKM-Fan, sẽ có

$$\overline{x} \in \bigcap_{y \in E} F_2(y). \tag{3.9}$$

Cuối cùng, ta kiểm tra rằng $\overline{x}$ là nghiệm (SVI). Với mỗi $y \in E$, ta xác định ánh xạ $G : [0,1] \rightsquigarrow Y$ bởi

$$G(\gamma) := (T(\gamma y + (1-\gamma)\overline{x}), y - \overline{x}).$$

Do tính nửa liên tục dưới theo tia suy rộng của T, G là lsc tại 0^+, tức là $\forall g \in G(0), \forall \gamma_n \to 0^+, \exists g_n \in G(\gamma_n),\ g_n \to g$. Đặt $y_n = \gamma_n y + (1-\gamma_n)\overline{x}$ thì sẽ có $t_n \in T(y_n)$ để $g_n = (t_n, y - \overline{x})$. Theo (3.9) với mọi n ta có

$$(t_n, y_n - \overline{x}) + f(y_n, \overline{x}) \in Y \backslash - intK(\overline{x}).$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&g_n + f(y, \overline{x})\\
&\quad = (t_n, y - \overline{x}) + f(y, \overline{x})\\
&\quad = \frac{1}{\gamma_n}(t_n, \gamma_n y + (1-\gamma_n)\overline{x} - \overline{x}) + f(y, \overline{x})\\
&\quad = \frac{1}{\gamma_n}[(t_n, y_n - \overline{x}) + f(y_n, \overline{x})] - \frac{1}{\gamma_n} f(y_n, \overline{x}) + f(y, \overline{x})\\
&\quad = \frac{1}{\gamma_n}[(t_n, y_n - \overline{x}) + f(y_n, \overline{x})]\\
&\quad + \frac{1}{\gamma_n}[\gamma_n f(y, \overline{x}) + (1-\gamma_n) f(\overline{x}, \overline{x})\\
&\quad - f(\gamma_n y + (1-\gamma_n)\overline{x}, \overline{x})] - \frac{1-\gamma_n}{\gamma_n} f(\overline{x}, \overline{x}) \in Y \backslash - intK(\overline{x}).
\end{aligned}$$

Vì $g_n \to g$ và $Y \backslash - intK(\overline{x})$ đóng nên $g + f(y, \overline{x}) \in Y \backslash - intK(\overline{x})$. Do đó, với mọi $y \in E$,

$$(T(\overline{x}), y - \overline{x}) + f(y, \overline{x}) = G(0) + f(y, \overline{x}) \subset Y \backslash - intK(\overline{x}),$$

tức là $\overline{x}$ là nghiệm (SVI). □

Định lý 3.4.4 là mới vì bài toán (SVI) chưa được nghiên cứu.

3.5 Sự tồn tại nghiệm của giả bất đẳng thức biến phân

Trong mục này chúng ta xét hai bài toán giả bất đẳng thức biến phân (QVI) và (SQVI) định nghĩa ở Mục 3.1.2, nhưng trong không gian tô pô tuyến tính Hausdorff, tức là X và Y là các không gian như vậy. Chúng ta sẽ mở rộng các kết quả ở Mục 3.4 đã xét cho (VI) và (SVI) trong không gian Banach.

ĐỊNH LÝ 3.5.1 *Giả sử, đối với bài toán (QVI),*

(i) $E(x)$ lồi và khác trống với mọi $x \in A$, $E^{-1}(y)$ mở trong A với mọi $y \in A$ và ánh xạ $clE(.)$ là usc;

(ii) nếu $x_\alpha \to x$, $y_\alpha \to y$, trong A và $t_\alpha \in T(x_\alpha)$, sẽ có $t \in T(x)$ và có các lưới con $x_\beta, t_\beta \in T(x_\beta)$, sao cho $(t_\beta, y_\beta) \to (t, y)$;

(iii) $Y \backslash -intK(.)$ là ánh xạ đóng và $\forall x \in A, \exists t \in T(x)$,

$$(t, x - g(x)) \in Y \backslash -intK(x).$$

Khi đó (QVI) có nghiệm.

Chứng minh: Với mọi $x \in A$ ký hiệu

$$P(x) := \{y \in A : (T(x), y - g(x)) \subset -intK(x)\}.$$

Đặt

$$F := \{x \in A : x \in clE(x)\}.$$

F là tập đóng. Thật vậy, vì $clE(.)$ là usc và có ảnh đóng nên $clE(.)$ có đồ thị đóng. Do đó $\forall x_0 \in A$,

$$clE(x_0) = \limsup_{x_\alpha \to x_0} E(x_\alpha).$$

Do đó, nếu $x_\alpha \in F$, tức là $x_\alpha \in clE(x_\alpha)$, và $x_\alpha \to x_0$ thì $x_0 \in clE(x_0)$. Vậy $x_0 \in F$. Với $x \in A$, $y \in A$, đặt

$$\Phi(x) := \begin{cases} E(x) \cap P(x) & \text{nếu } x \in F, \\ E(x) & \text{nếu } x \in A \backslash F, \end{cases}$$

$$Q(y) := A \backslash \Phi^{-1}(y),$$

ta sẽ chứng tỏ Q là ánh xạ KKM. Giả sử phản chứng là có $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, $y_i \in A$ mà $\bar{x} \notin \bigcup_{i=1}^n Q(y_i)$, tức là $\bar{x} \in \Phi^{-1}(y_i)$ với mọi i. Do đó $y_i \in \Phi(\bar{x})$, $i = 1, ..., n$.

Nếu $\bar{x} \in F$ thì $\Phi(\bar{x}) = A(\bar{x}) \bigcap P(\bar{x})$. Suy ra $y_i \in P(\bar{x})$, $i = 1, ..., n$, tức là

$$(T(\bar{x}), y_i - g(\bar{x})) \subset -intK(\bar{x}).$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned}(T(\bar{x}), \bar{x} - g(\bar{x}))) &= (T(\bar{x}), \sum_{i=1}^n \alpha_i(y_i - g(\bar{x}))) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i(T(\bar{x}), y_i - g(\bar{x})) \subset -intK(\bar{x}),\end{aligned}$$

mâu thuẫn với (iii). Vậy chỉ còn khả năng $\bar{x} \in A\backslash F$. Khi đó theo định nghĩa của F, $\bar{x} \notin E(\bar{x})$. Vì vậy, với $i = 1, ..., n$,

$$y_i \in \Phi(\bar{x}) = E(\bar{x}).$$

Do đó $\bar{x} = \sum_{i-1}^n \alpha_i y_i \in E(\bar{x})$, là mâu thuẫn. Vậy $Q(.)$ là ánh xạ KKM.

Bây giờ ta chứng tỏ, với mỗi $y \in A$, $Q(y)$ là đóng. Ta có

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(y) &= \{x \in A : y \in \Phi(x)\} \\ &= \{x \in F : y \in E(x) \bigcap P(x)\} \bigcup \{x \in A\backslash F : y \in E(x)\} \\ &= \{x \in F : x \in E^{-1}(y) \bigcap P^{-1}(y)\} \bigcup \{x \in A\backslash F : x \in E^{-1}(y)\} \\ &= [F \bigcap E^{-1}(y) \bigcap P^{-1}(y)] \bigcup [(A\backslash F) \bigcap E^{-1}(y)] \\ &= [(F \bigcap P^{-1}(y)) \bigcup (A\backslash F)] \bigcap E^{-1}(y) \\ &= [(A\backslash F) \bigcup P^{-1}(y)] \bigcap E^{-1}(y).\end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}Q(y) &= A\backslash([(A\backslash F) \bigcup P^{-1}(y)] \bigcap E^{-1}(y)) \\ &= \{A\backslash[(A\backslash F) \bigcup P^{-1}(y)]\} \bigcup [A\backslash E^{-1}(y)] \\ &= [F \bigcap (A\backslash P^{-1}(y))] \bigcup [A\backslash E^{-1}(y)]. \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Bây giờ ta kiểm tra $A\backslash P^{-1}(y)$ đóng trong A với mọi $y \in A$. Từ định nghĩa của $P(x)$ suy ra

$$P^{-1}(y) = \{x \in A : (T(x), y - g(x)) \subset -intK(x)\}$$

và

$$A \backslash P^{-1}(y) = \{x \in A : \exists t \in T(x),\ (t, y - g(x)) \in Y \backslash -intK(x)\}.$$

Giả sử có lưới $x_\alpha \in A \backslash P^{-1}(y)$, $x_\alpha \to x_0$. Khi đó có $t_\alpha \in T(x_\alpha)$ với

$$(t_\alpha, y - g(x_\alpha)) \in Y \backslash -intK(x_\alpha).$$

Do (ii) sẽ có lưới con x_β và $t_\beta \in T(x_\beta)$ và có $t_0 \in T(x_0)$ sao cho

$$(t_\beta, y - g(x_\beta)) \to (t_0, y - g(x_0)).$$

Do $Y \backslash -intK(.)$ đóng nên

$$(t_0, y - g(x_0)) \in Y \backslash -intK(x_0).$$

Vậy $x_0 \in A \backslash P^{-1}(y)$, chứng tỏ $A \backslash P^{-1}(y)$ đóng trong A. Theo (3.10), $Q(y)$ là tập con đóng của tập A compact nên cũng compact. Theo Định lý 3.4.1 của KKM-Fan tồn tại

$$\hat{x} \in \bigcap_{y \in A} (A \backslash \Phi^{-1}(y)) = A \backslash (\bigcup_{y \in A} \Phi^{-1}(y)),$$

tức là $\hat{x} \notin \bigcup_{y \in A} \Phi^{-1}(y)$. Do đó, $\Phi(\hat{x}) = \emptyset$. Ta phải xét hai khả năng. Nếu $\hat{x} \in A \backslash F$ thì, theo định nghĩa Φ, $\Phi(\hat{x}) = E(\hat{x}) \neq \emptyset$, là mâu thuẫn. Còn nếu $\hat{x} \in F$, tức là $\hat{x} \in clE(\hat{x})$, ta có

$$\emptyset = \Phi(\hat{x}) = E(\hat{x}) \bigcap P(\hat{x}).$$

Suy ra $\forall y \in E(\hat{x})$ thì $y \notin P(\hat{x})$, tức là

$$\exists \hat{t} \in T(\hat{x}),\ (\hat{t}, y - g(\hat{x})) \in Y \backslash -intK(\hat{x}).$$

Điều này có nghĩa là $\hat{x}$ là nghiệm của (QVI). □

Định lý 3.5.1 là mở rộng Định lý 1, định lý cơ bản trong [Kim-Tan 1999] ra trường hợp T là ánh xạ đa trị với một cải tiến là ở giả thiết (ii) chúng tôi chỉ cần tồn tại lưới con x_β để có tính chất hội tụ đó. Đồng thời cách chứng minh cũng khác.

CHÚ Ý 3.5.1. (i) Nếu trong phát biểu của (QVI) ta bỏ giả thiết A là tập compact, thì Định lý 3.5.1 vẫn đúng nhưng phải thêm một trong hai giả thiết sau

(a) Tồn tại $\bar{y} \in A$ sao cho $A \setminus E^{-1}(\bar{y})$ compact và tồn tại tập con compact khác trống $B \subset A$ sao cho với mọi $x \in A \setminus B$ thì $(T(x), \bar{y} - x) \subset -intK(x)$.

(b) Tập $F := \{x \in A : x \in clE(x)\}$ compact và tồn tại $\bar{y} \in A$ sao cho $A \setminus E^{-1}(\bar{y})$ compact.

Thật vậy, trong trường hợp (a) theo (3.10) ta chỉ việc chứng minh là $A \setminus P^{-1}(\bar{y})$ compact. Theo (a) thì $A \setminus B \subset P^{-1}(\bar{y})$ nên $A \setminus P^{-1}(\bar{y}) \subset B$. Theo chứng minh định lý thì $A \setminus P^{-1}(\bar{y})$ đóng. Do đó tập này compact và từ đó $Q(\bar{y})$ compact và ta vẫn áp dụng được định lý của KKM-Fan.

Trong trường hợp (b) thì vì $A \setminus P^{-1}(\bar{y})$ đóng nên $F \cap (A \setminus P^{-1}(\bar{y}))$ compact và (3.10) cũng cho thấy $Q(\bar{y})$ là compact.

(ii) Theo chứng minh Định lý 3.4.2, nếu X và Y là các không gian Banach, T là usc trong A và có ảnh compact thì giả thiết (ii) của Định lý 3.5.1 thoả.

Giả thiết của Định lý 3.5.1 tương đối dễ kiểm tra (xem Thí dụ 4.2.1).

Bây giờ chuyển sang xét bài toán (SQVI) với hạn chế là $\forall x \in A$, $g(x) = x$, trong không gian tô pô tuyến tính Hausdorff.

ĐỊNH LÝ 3.5.2 *Giả sử, đối với bài toán (SQVI),*

(i_1) với mỗi $y \in A$, $E^{-1}(y)$ mở trong A và $clE(.)$ là usc;

(i_2) $\forall x \in F$, $\forall y \in E(x)$, $\lambda \in (0, 1]$, $\lambda y + (1 - \lambda)x \in E(x)$;

(ii) T là glhc trên A và tựa đơn điệu trên A;

(iii) $Y \setminus -intK(.)$ là ánh xạ đóng.

Khi đó (SQVI) có nghiệm.

Chứng minh: Đặt

$$F := \{x \in A : x \in clE(x)\},$$

và với mọi $x \in A$ đặt

$$P_1(x) := \{y \in A : (T(x), y - x) \subset -intK(x)\},$$

$$P_2(x) := \{y \in A : \exists t_y \in T(y),\ (t_y, y - x) \in -intK(x)\}.$$

Cũng như chứng minh Định lý 3.5.1, F là tập đóng. Ta lại đặt, với $i = 1, 2$ và với mỗi $x \in A$, $y \in A$,

$$\Phi_i(x) := \begin{cases} E(x) \bigcap P_i(x) & \textit{nếu} \ \ x \in F, \\ E(x) & \textit{nếu} \ \ x \in A \backslash F, \end{cases}$$

$$Q_i(y) := A \backslash \Phi_i^{-1}(y).$$

Theo định nghĩa của P_i ta có, với mỗi $y \in A$,

$$A \backslash P_1^{-1}(y) = \{x \in A : \exists t \in T(x),\ (t, y - x) \in Y \backslash -intK(x)\},$$

$$A \backslash P_2^{-1}(y) = \{x \in A :\ (T(y), y - x) \subset Y \backslash -intK(x)\}.$$

Theo chứng minh Định lý 3.5.1 ta có, với mọi $y \in A$ và $i = 1, 2$,

$$Q_i(y) = [F \bigcap (A \backslash P_i^{-1}(y))] \bigcup [A \backslash E^{-1}(y)],$$

và Q_1 là ánh xạ KKM. Do T là tựa đơn điệu trên A nên, với mọi $y \in A$,

$$A \backslash P_1^{-1}(y) \subset A \backslash P_2^{-1}(y),$$

và vì thế

$$Q_1(y) \subset Q_2(y).$$

Do vậy Q_2 cũng là ánh xạ KKM.

Tiếp theo ta chứng tỏ $A \backslash P_2^{-1}(y)$ đóng trong A với mọi $y \in A$. Giả sử có lưới $x_\alpha \in A \backslash P_2^{-1}(y)$, $x_\alpha \to x_0$. Ta có $\forall \alpha, \forall t \in T(y)$,

$$(t, y - x_\alpha) \in Y \backslash -intK(x_\alpha).$$

Vì $Y \backslash -intK(.)$ đóng nên

$$(t, y - x_0) \in Y \backslash -intK(x_0).$$

Vậy $x_0 \in A \backslash P_2^{-1}(y)$ và tập này đóng trong A . Theo biểu thức của $Q_2(y)$ ta thấy nó đóng và do đó là compact với mọi $y \in A$. Từ định lý KKM-Fan sẽ có

$$\overline{x} \in \bigcap_{y \in A} Q_2(y) = \bigcap_{y \in A} (A \backslash \Phi_2^{-1}(y)) = A \backslash \bigcup_{y \in A} \Phi_2^{-1}(y).$$

Vậy $\overline{x} \notin \bigcup_{y\in A} \Phi_2^{-1}(y)$. Tức là $\Phi_2(\overline{x}) = \emptyset$. Lại xét hai khả năng. Nếu $\overline{x} \in A\backslash F$ thì, $\Phi_2(\overline{x}) = E(\overline{x}) \neq \emptyset$, là mâu thuẫn. Nếu $\overline{x} \in F$, tức là $\overline{x} \in clE(\overline{x})$, thì

$$\emptyset = \Phi_2(\overline{x}) = E(\overline{x}) \bigcap P_2(\overline{x}).$$

Suy ra, $\forall y \in E(\overline{x})$, $y \notin P_2(\overline{x})$.

Với mỗi $y \in E(\overline{x})$, ta xác định ánh xạ $Z : [0,1] \rightsquigarrow Y$ bởi

$$Z(\gamma) := (T(\gamma y + (1-\gamma)\overline{x}), y - \overline{x}).$$

Do T là glhc tại $\overline{x}$, ánh xạ Z là lsc tại 0^+. Từ đó $\forall z \in Z(0), \forall \gamma_n \to 0^+, \exists z_n \in Z(\gamma_n)$, $z_n \to z$. Đặt $\overline{x}_n = \gamma_n y + (1-\gamma_n)\overline{x}$. Do $z_n \in Z(\gamma_n)$, sẽ có $t_n \in T(\overline{x}_n)$ với mỗi n sao cho $z_n = (t_n, y - \overline{x})$. Vì $\overline{x}_n \in E(\overline{x})$ nên $\overline{x}_n \notin P_2(\overline{x})$, tức là

$$(T(\overline{x}_e), \overline{x}_n - \overline{x}) \subset Y\backslash - intK(\overline{x}).$$

Suy ra $(t_n, \overline{x}_n - \overline{x}) \in Y\backslash - intK(\overline{x})$. Xét z_n ta thấy

$$\begin{aligned} z_n &= (t_n, y - \overline{x}) \\ &= \frac{1}{\gamma_n}(t_n, \gamma_n y + (1-\gamma_n)\overline{x} - \overline{x}) \\ &= \frac{1}{\gamma_n}(t_n, \overline{x}_n - \overline{x}) \in Y\backslash - intK(\overline{x}). \end{aligned}$$

Do $z_n \to z$ và $Y\backslash - intK(.)$ đóng nên $z \in Y\backslash - intK(\overline{x})$. Vậy $Z(0) \subset Y\backslash - intK(\overline{x})$, tức là

$$(T(\overline{x}), y - \overline{x}) \subset Y\backslash - intK(\overline{x}),$$

với mọi $y \in E(\overline{x})$, có nghĩa là $\overline{x}$ là nghiệm (SQVI). □

CHÚ Ý 3.5.2. Tương tự như ở Chú ý 3.5.1, nếu trong phát biểu của bài toán (SQVI) không có giả thiết A là tập compact thì Định lý 3.5.2 vẫn đúng với một trong hai điều kiện bổ sung:

(a) Tồn tại $\overline{y} \in A$ sao cho $A\backslash E^{-1}(\overline{y})$ compact và tồn tại tập con compact khác trống $B \subset A$ sao cho $\forall x \in A\backslash B$, $\exists \overline{t} \in T(\overline{y})$, $(\overline{t}, \overline{y} - x) \in -intK(x)$.

(b) Tập F compact và tồn tại $\overline{y} \in A$ sao cho $A\backslash E^{-1}(\overline{y})$ compact.

3.6 Áp dụng cho bài toán giả bù

Bài toán bù (phi tuyến), tiếng Anh là (nonlinear) complementarity problem được [Karamardian 1971] đưa ra là như sau. Xét X, Y, K, t, E như ở định nghĩa bất đẳng thức biến phân vô hướng (3.1) trong không gian Banach. Bài toán đặt ra là

(CP): Tìm $x_0 \in E$ sao cho

$$t(x_0) \in -E^0, \ \langle t(x_0), x_0 \rangle = 0,$$

ở đây E^0 là tập đối cực (polar set) của E, tức là

$$E^0 := \{f \in X^* : \langle f, x \rangle \leq 1, \ \forall x \in E\}.$$

(Chú ý rằng nếu E là nón thì $E^0 = -E^*$ với E^* là nón liên hợp dương của E.)

[Karamardian 1971] đã chứng minh rằng nếu E là nón lồi đóng thì tập nghiệm của bài toán bù (CP) trùng với tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân (3.1).

Các bài toán bất đẳng thức biến phân tổng quát hơn cũng thường được nghiên cứu tương ứng với các bài toán bù tổng quát hơn (CP). Bài toán giả bù còn ít được xét đến. [Noor-Oettli 1994] và [Fu 2000] định nghĩa và nghiên cứu các bài toán này trong mối liên quan với các giả bất đẳng thức biến phân tương ứng.

Ở đây chúng tôi định nghĩa một bài toán giả bù mới cho trường hợp ánh xạ đa trị, tương ứng với giả bất đẳng thức biến phân (SQVI) và xét sự tồn tại nghiệm.

Giả sử X, Y, A, K, E, g và T như ở định nghĩa (SQVI) trong mục 3.1.2 cho trường hợp vô hướng, tức là $Y = R$ với dạng đặc biệt $K(x) \equiv R_+$, $g(x) \equiv x$.

Giả sử $S : A \rightsquigarrow X$ là ánh xạ đa trị. Bài toán giả bù là

(QCP): Tìm $\bar{x} \in A$ sao cho $\forall \bar{s} \in A \cap S(\bar{x})$, $\forall \bar{t} \in (-A^0) \cap T(\bar{x})$,

$$\langle \bar{t}, \bar{s} \rangle = 0.$$

Nếu $S(.)$ và $E(.)$ thỏa hệ thức $E(x) = x - A \cap S(x) + A$, $\forall x \in A$,thì áp dụng Định lý 3.5.2 về sự tồn tại nghiệm của giả bất đẳng thức biến phân (SQVI) ta có kết quả về tồn tại nghiệm của (QCP). Chúng ta cần đến bổ đề sau về sự tương đương của (VI) và (CP), suy ngay từ [Karamardian 1971].

BỔ ĐỀ 3.6.1. *Giả sử X là không gian Banach và $A \subset X$ là nón lồi đóng. Khi đó $\bar{t} \in A^*$ và $\bar{s} \in A$ thỏa $\bar{s} \in A$, $\langle \bar{t}, \bar{s} \rangle = 0$ khi và chỉ khi $\langle \bar{t}, x - \bar{s} \rangle \geq 0$, $\forall x \in A$.*

ĐỊNH LÝ 3.6.2 *Giả sử đối với bài toán (QCP) các giả thiết (i) và (ii) của Định lý 3.5.2 thoả. Ngoài ra, A là nón lồi đóng và một trong hai điều kiện (a), (b) ở chú ý 3.5.2 thoả. Khi đó (QCP) có nghiệm.*

Chứng minh: Theo Định lý 3.5.2 và Chú ý 3.5.2, bài toán (SQVI) có nghiệm $\bar{x}$, tức là $\bar{x} \in A \cap E(\bar{x})$ sao cho $\forall x \in E(\bar{x})$, $\forall t \in T(\bar{x})$, $\langle \bar{t}, x - \bar{x} \rangle \geq 0$. Vì $\bar{x} \in E(\bar{x}) = \bar{x} - S(\bar{x}) + A$ nên $A \cap S(\bar{x}) \neq \emptyset$. Xét $\bar{s} \in A \cap S(\bar{x})$ và $\bar{t} \in A^* \cap T(\bar{x})$ bất kỳ. $\forall a \in A$ thì $\bar{x} - \bar{s} + a \in E(\bar{x})$ nên

$$\langle \bar{t}, a - \bar{s} \rangle = \langle \bar{t}, (\bar{x} - \bar{s} + a) - \bar{x} \rangle \geq 0.$$

Theo Bổ đề 3.6.1, ta có

$$\langle \bar{t}, \bar{s} \rangle = 0.$$

Định lý được chứng minh. □

3.7 Ứng dụng vào bài toán cân bằng giao thông

Bài toán tìm dòng cân bằng (theo nghĩa Wardrop) của mạng giao thông liên quan đến bài toán tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân. [Luca 1995] đã xét mô hình mạng giao thông với hàm cước phí đa trị.

Trong mục này chúng tôi phát triển ý tưởng của [Luca 1995] và mở rộng định nghĩa cân bằng Wardrop cho hàm đa trị và ứng dụng các kết qủa ở Mục 3.2 để chứng minh sự tồn tại dòng cân bằng của mạng giao thông với hàm cước phí đa trị.

Bài toán mạng giao thông ở đây được xét như sau. Gỉa sử N là tập các nút, L là tập các cung và $W := (W_1, ..., W_l)$ là tập các cặp Đầu-Cuối (O/D, origin-destimation pairs). Với mỗi j ký hiệu P_j là tập các đường của W_j (P_j chứa $r_j \geq 1$ đường). Gỉa sử $m := r_1 + ... + r_l$ tức là mạng giao thông có m

đường. Gỉa sử $F := (F_1, ..., F_m)$ là vector dòng trên đường. Gỉa sử vector cước phí $T(F) := (T_1(F), ..., T_m(F))$ là hàm đa trị $T : R^m_+ \rightsquigarrow R^m_+$. Gỉa sử Γ_s là taỉ năng của đường R_s, $s = 1, ..., m$. Vậy vector dòng đường thỏa ràng buộc

$$0 \leq F_s \leq \Gamma_s, \ s = 1, ..., m. \tag{3.11}$$

Chúng tôi mở rộng định nghiã cân bằng Wardrop như sau.

ĐỊNH NGHĨA 3.7.1.

(i) Dòng H được gọi là dòng cân bằng yếu nếu $\forall W_j$, $\forall R_q \in P_j$, $\forall R_s \in P_j$, $\exists t \in T(H)$,

$$t_q < t_s \ \Rightarrow \ H_q = \Gamma_q \ hoặc \ H_s = 0.$$

(ii) Dòng H được gọi là cân bằng mạnh nếu trong (i) thay thế "$\exists t \in T(H)$" bởi "$\forall t \in T(H)$".

Giả sử nhu cầu của W_j là ρ_j, $j = 1, ...l$, thỏa $\rho_j \leq \sum_{R_s \in P_j} \Gamma_s$. Vector dòng trên đường gọi là chấp nhận được nếu nó thỏa (3.11) và thỏa vector nhu cầu

$$\sum_{R_s \in P_j} F_s = \rho_j, \ j = 1, ..., l.$$

Đặt E là tập vector dòng trên đường chấp nhận được thì rõ ràng E là một tập lồi và compact của R^m.

Từ Định lý 3.4.3 ta có

HỆ QỦA 3.7.1. Nếu T là guhc trong E, tựa đơn điệu yếu trong E và có ảnh compact khác trống, thì mạng giao thông có dòng cân bằng yếu.

Chứng minh: Từ Định lý 3.4.3 bài toán (VI) với E, T và $C(x) \equiv R_+$ có nghiệm $\overline{H} \in E$. Giả sử $\overline{H}$ không là dòng cân bằng yếu, tức là, $\exists W_j$, $\exists R_q \in P_j$, $\exists R_s \in P_j$, $\forall t \in T(\overline{H})$,

$$t_q < t_s \ nhưng \ H_q < \Gamma_q \ và \ 0 < H_s \leq \Gamma_q.$$

Chọn dòng F như sau.

Nếu $\overline{H}_q + \overline{H}_s > \Gamma_q$, chọn

$$F_p := \begin{cases} \overline{H}_p & \text{nếu } p \neq q,\ p \neq s, \\ \overline{H}_p + \overline{H}_s - \Gamma_q & \text{nếu } p = s, \\ \Gamma_q & \text{nếu } p = q. \end{cases}$$

Nếu $\overline{H}_q + \overline{H}_s \leq \Gamma_q$, ta chọn

$$F_p := \begin{cases} \overline{H}_p & \text{nếu } p \neq q,\ p \neq s, \\ 0 & \text{nếu } p = s, \\ \overline{H}_p + \overline{H}_s & \text{nếu } p = q. \end{cases}$$

Rõ ràng rằng $F \in E$.

Từ $\overline{H}$ là nghiệm của (VI), từ $F \in E$, ta có $\bar{t} \in T(\overline{H})$ sao cho

$$\langle \bar{t}, F - \overline{H} \rangle \geq 0. \tag{3.12}$$

Mặt khác, nếu $\overline{H}_q + \overline{H}_s > \Gamma_q$, suy ra

$$\begin{aligned} \langle \bar{t}, F - \overline{H} \rangle &= \sum_{p=1}^{m} \bar{t}(F_p - \overline{H}_P) \\ &= \bar{t}_s(\overline{H}_q + \overline{H}_s - \Gamma_q - \overline{H}_s) + \bar{t}_q(\Gamma_q - \overline{H}_q) \\ &= (\bar{t}_s - \bar{t}_q)(\overline{H}_q - \Gamma_q) < 0, \end{aligned}$$

là mâu thuẫn với (3.12). Nếu $\overline{H}_q + \overline{H}_s \leq \Gamma_q$, lý luận cũng tương tự. Vậy $\overline{H}$ là dòng cân bằng yếu. □

Cũng tương tự (với việc chọn F) và áp dụng Định lý 3.4.2 và 3.4.4 ta có

HỆ QỦA 3.7.2. Nếu T là usc trong E và có giá trị compact khác trống, thì mạng giao thông có dòng cân bằng yếu.

HỆ QỦA 3.7.3. Nếu T là glhc trong E và tựa đơn điệu trong E, thì mạng giao thông có dòng cân bằng mạnh.

Chương 4

SỰ ỔN ĐỊNH CUẢ NGHIỆM GIẢ BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

4.1 Sự ổn định cuả nghiệm bất đẳng thức biến phân

Sau sự tồn tại nghiệm, nghiên cứu về ổn định (stability) cuả nghiệm hoặc cũng gọi là phân tích độ nhạy cảm (sensitivity analysis) hay nghiên cứu nghiệm dưới tác động nhiễu (under perturbation), cho bất đẳng thức biến phân và mở rộng cũng rất phát triển. Đây là một vấn đề lý thuyết quan trong nhưng cũng có ý nghĩa thực tiễn lớn vì chỉ các nghiệm ổn định mới có thể dùng trong thực tế, do các dữ kiện thực tế chỉ là xấp xỉ và luôn biến động.

[Gwinner 1995] xét nhiễu cuả (VI) đơn trị, vô hướng trong không gian Banach phản xạ ở dạng dãy bài toán (VI_n): tìm $x_0^n \in E_n$, sao cho, $\forall x \in E_n$,

$$\langle t_n(x_0^n), x - x_0^n \rangle \geq 0,$$

với dãy tập E_n hội tụ theo nghĩa Mosco (Mosco Converge) đến E và dãy ánh xạ t_n đơn điệu hội tụ đến t theo một kiểu thích hợp dựa vào chuẩn. Tác giả chỉ ra rằng sẽ tồn tại dãy nghiệm x_0^n hội tụ yếu, và thêm một giả thiết bổ sung sẽ hội tụ, đến một nghiệm x_0 cuả (VI).

[Lignola-Morgan 1999] cũng xét nhiễu cuả (VI) theo nghĩa hội tụ Mosco như trên cho trường hợp các ánh xạ T_n, T đa trị, đơn điệu hoặc tựa đơn điệu. Ở đây T_n hội tụ tới T theo một nghĩa khác, thông qua tính giới nội đều cuả các T_n. Ánh xạ T giả thiết là có tính chất kiểu nửa liên tục dưới. Các tác giả chứng minh rằng nếu dãy nghiệm x_0^n cuả (VI_n) hội tụ yếu tới x_0 thì x_0 là nghiệm cuả (VI).

[Noor 1997] xét (VI) đơn trị, vô hướng phụ thuộc số λ với $(x, \lambda) \in X \times X$, ở đây X là không gian Hilbert và nghiên cứu tính liên tục và liên tục Lipschitz cuả nghiệm $x_0(\lambda)$ thông qua phương trình Wiener-Hopf, tương đương với

(VI) (cũng có tác giả gọi phương trình này là normal maps). Giả thiết ở đây là các dữ kiện của bài toán cũng, tương ứng, liên tục hoặc liên tục Lipschitz.

[Domokos 1999] xét (VI) đơn trị, vô hướng trong không gian Banach phản xạ phụ thuộc hai tham số ở dạng $t(.,w)$, $E(\lambda)$ với w, λ thuộc hai không gian metric. Với giả thiết chính là $t(.,.)$ liên tục, $t(.,w)$ đơn điệu chặt và $E(.)$ thỏa một điều kiện tựa Lipchitz giảm nhẹ. Tác giả chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm, liên tục theo tham số ở lân cận một nghiệm đã cho.

Nhiều tác giả sử dụng phương pháp chiếu để nghiên cứu sự ổn định của bất đẳng thức biến phân trong không gian Hilbert như [Dafermos 1988], [Mukherjee-Verma 1992], [Noor 1992], [Yen 1995]....[Robinson 1995] sử dụng cái gọi là "normal mappings" nghiên cứu sự ổn định cho bất đẳng thức biến phân thoả điều kiện đủ trơn, thông qua cách tiếp cận hàm ẩn.

4.2 Tính nửa liên tục theo tham số của nghiệm giả bất đẳng thức biến phân

Nghiên cứu về ổn định của giả bất đẳng thức biến phân còn rất ít, chúng tôi mới chỉ gặp một bài [Ding-Luo 1999]. Ở đây đã phát triển phương pháp chiếu của [Dafermos 1988] vào nghiên cứu tính liên tục và liên tục Lipchitz theo tham số của tập nghiệm giả bất đẳng thức biến phân (trong không gian Hilbert X) theo khoảng cách Hausdorff $H(A, B)$ giữa các tập $A, B \subset X$, và cả theo khoảng cách $\delta(A, B) := \sup\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}$. Các giả thiết chính ở đây cũng là tính liên tục và liên tục Lipchitz theo khoảng cách H và δ tương ứng và tính đơn điệu mạnh.

Trong mục này chúng tôi nghiên cứu tính nửa liên tục trên theo tham số của tập nghiệm giả bất đẳng thức biến phân trong không gian tô pô tuyến tính Hausdorff, nói cụ thể hơn là tính đóng của đồ thị. Kỹ thuật ở đây khác hẳn bài báo trên. Nghiên cứu về tính nửa liên tục của tập nghiệm, cả cho trường hợp riêng là bất đẳng thức biến phân cũng chưa xuất hiện. Chúng tôi mới chỉ thấy xét đến sự hội tụ của nghiệm của dãy bài toán bất đẳng thức biến phân bị nhiễu đến nghiệm của bài toán ban đầu trong [Gwinner 1995] và [Lignola-Morgan 1999]. Đây là các tính chất gần với tính nửa liên tục của tập nghiệm. Như đã nói trên đây trong thực tế cần phải có tính ổn định của tập nghiệm. Trong nhiều trường hợp sự ổn định này chỉ cần ở mức nửa liên tục theo tham số là đủ, không cần liên tục hoặc liên tục Lipchitz. Chẳng hạn để các mô hình kinh tế thị trường cạnh tranh Walras-Ward và Arrow-Debreu-Mckenzie có trạng thái cân bằng thì chỉ cần tính nửa liên tục trên theo bảng giá p của tập vectơ sản phẩm $Y(p)$ và tập vectơ giá vật tư $W(p)$. Đây là hai tập nghiệm tối ưu của một cặp quy hoạch tuyến tính đối ngẫu. (Xem [Lancaster 1968].) Hơn nữa, chúng ta đã biết rằng tập nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu lồi chính là tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân tương ứng (biểu thị điều kiện tối ưu). Vì lý do này chúng tôi thấy việc nghiên cứu ổn định theo nghĩa nửa liên tục của tập nghiệm là rất cần thiết. Tất nhiên để có kết luận ổn định theo nghĩa nhẹ như vậy, các giả thiết cũng phải nhẹ và dễ thoả mãn trong thực tế. Ở đây chúng tôi cũng chỉ cần đến các giả thiết về tính nửa liên tục của các dữ kiện của bài toán. Hơn nữa, chúng tôi cũng không cần các giả thiết về tính đơn điệu như trong [Gwinner 1995] và [Lignola-Morgan 1999], mặc dù chúng tôi xét bài toán giả bất đẳng thức biến phân là tổng quát hơn, và trong không gian tổng quát hơn là không gian tô pô tuyến tính.

Giả sử X, Y là các không gian tô pô tuyến tính Hausdorff, U là không gian tô pô Hausdorff, $A \subset X$ là tập lồi, đóng, khác trống; $K : A \rightsquigarrow Y$ là ánh xạ đa trị có ảnh là nón lồi đóng, có phần trong khác trống; $T : U \times A \rightsquigarrow L(X, Y)$, $E : U \times A \rightsquigarrow A$, còn $g : U \times A \to A$ là ánh xạ đơn trị liên tục. Chúng tôi xét hai bài toán giả bất đẳng thức biến phân sau đây:

(PQVI): Tìm $\overline{u} \in U$ và $\overline{x} \in clE(\overline{u}, \overline{x})$ sao cho $\forall x \in E(\overline{u}, \overline{x})$, $\exists \overline{t} \in T(\overline{u}, \overline{x})$,

$$(\overline{t}, x - g(\overline{u}, \overline{x})) \in Y \setminus -intK(\overline{x});$$

(PSQVI): Tìm $\overline{u} \in U$ và $\overline{x} \in clE(\overline{u}, \overline{x})$ sao cho $\forall x \in E(\overline{u}, \overline{x})$, $\forall t \in T(\overline{u}, \overline{x})$,

$$(t, x - g(\overline{u}, \overline{x})) \in Y \setminus -intK(\overline{x});$$

Giả sử hai bài toán này có nghiệm $(\overline{u}, \overline{x})$, ta ký hiệu

$$S(\overline{u}) := \{\overline{x} \in A : (\overline{u}, \overline{x}) \textit{ là nghiệm } (PQVI),$$

$$S_1(\overline{u}) := \{\overline{x} \in A : (\overline{u}, \overline{x}) \textit{ là nghiệm } (PSQVI).$$

Trong mục này ta xét tính đóng của các ánh xạ đa trị $S(.)$ và $S_1(.)$. Ta sẽ không xét sự tồn tại nữa nên giả sử với mọi u (trong một tập U_0 có phần trong khác trống) $S(u) \neq \emptyset$, $S_1(u) \neq \emptyset$.

Điều này xảy ra chẳng hạn khi với mỗi u trong miền đang xét, các giả thiết của các định lý ở mục 3.5 hoặc ở các định lý tồn tại ở các tài liệu khác đã nhắc đến được thỏa mãn.

ĐỊNH NGHĨA 4.2.1. Ánh xạ đa trị $\mathcal{F} : X \rightsquigarrow Y$ được gọi là nửa liên tục dưới yếu tại x_0 nếu

$$\forall x_\alpha \to x_0,\ \forall f_0 \in \mathcal{F}(x_0)\ \exists x_\beta\ (\textit{lưới con}),\ \exists f_\beta \in \mathcal{F}(x_\beta),\ f_\beta \to f_0.$$

Dễ thấy rằng với ánh xạ đơn trị thì các tính chất nửa liên tục dưới, nửa liên tục dưới yếu, nửa liên tục trên đều trùng với tính liên tục.

Đối với giả bất đẳng thức biến phân (PQVI) ta có.

ĐỊNH LÝ 4.2.1. *Giả sử*

(i) $E(.,.)$ là lsc trong (u_0, A) và $clE(.,.)$ là usc trong (u_0, A);

(ii) $\forall u_\alpha \to u_0$, $\forall x_\alpha \to x_0$, $\forall y_\alpha \to y_0$, $\forall t_\alpha \in T(u_\alpha, x_\alpha)$, $\exists t_\beta$ (*lưới con*), $\exists t_0 \in T(u_0, x_0)$,

$$(t_\beta, y_\beta) \to (t_0, y_0);$$

(iii) $Y\setminus - intK(.)$ đóng.
Khi đó $S(.)$ đóng tại u_0, tức là $\forall u_\alpha \to u_0$, $\forall x_\alpha \in S(u_\alpha)$: $x_\alpha \to x_0$, $x_0 \in S(u_0)$.

Chứng minh: Xét các lưới $u_\alpha \to u_0$, $x_\alpha \in S(u_\alpha)$, $x_\alpha \to x_0$ bất kỳ. Giả sử phản chứng $x_0 \notin clE(u_0, x_0)$, tức là có $N(x_0)$ là lân cận x_0 và có V là lân cận của tập $clE(u_0, x_0)$ sao cho

$$N(x_0) \bigcap V = \emptyset. \tag{4.1}$$

Do $clE(.,.)$ là usc tại (u_0, x_0), có thể coi là $x_\alpha \in clE(x_\alpha, u_\alpha) \subset V$ và $x_\alpha \in N(x_0)$, là mâu thuẫn với (4.1). Vậy $x_0 \in clE(u_0, x_0)$. Lại giả sử phản chứng là $x_0 \notin S(u_0)$, tức là có $y_0 \in E(u_0, x_0)$ sao cho

$$(T(u_0, x_0), y_0 - g(u_0, x_0)) \subset -intK(x_0). \tag{4.2}$$

Do $E(.,.)$ là lsc tại (u_0, x_0), sẽ có $y_\alpha \in E(u_\alpha, x_\alpha)$, $y_\alpha \to y_0$. Vì $x_\alpha \in S(u_\alpha)$ nên với y_α này sẽ có $t_\alpha \in T(u_\alpha, x_\alpha)$ sao cho

$$(t_\alpha, y_\alpha - g(u_\alpha, x_\alpha)) \in Y \backslash -intK(x_\alpha).$$

Theo giả thiết (ii), phải tồn tại $t_0 \in T(u_0, x_0)$ và lưới con t_β sao cho

$$(t_\beta, y_\beta - g(u_\beta, x_\beta)) \to (t_0, y_0 - g(u_0, x_0)).$$

Do tính đóng của $Y \backslash -intK(.)$ ta thấy

$$(t_0, y_0 - g(u_0, x_0) \in Y \backslash -intK(x_0),$$

mâu thuẫn với (4.2). Vậy $x_0 \in S(u_0)$, tức là $S(.)$ đóng tại u_0. □

Chuyển sang giả bất đẳng thức biến phân (PSQVI) ta có

ĐỊNH LÝ 4.2.2. *Giả sử ta có (i) và (iii) như ở Định lý 4.2.1 và (ii) thay bởi*

(ii)' Ánh xạ đa trị $(T(.,.),.)$ nửa liên tục dưới yếu trong (u_0, A, A). Khi đó $S_1(.)$ đóng tại u_0.

Chứng minh: Xét các lưới $u_\alpha \to u_0$, $x_\alpha \in S_1(u_\alpha)$, $x_\alpha \to x_0$, bất kỳ. Cũng như ở chứng minh trên ta phải có $x_0 \in E(u_0, x_0)$. Giả sử phản chứng là $x_0 \notin S_1(u_0)$, tức là $\exists y_0 \in E(u_0, x_0)$, $\exists t_0 \in T(u_0, x_0)$,

$$(t_0, y_0 - g(u_0, x_0)) \in -intK(x_0). \tag{4.3}$$

Vì $E(.,.)$ lsc tại (u_0, x_0), cũng như trên ta có $y_\alpha \in E(u_\alpha, x_\alpha)$, $y_\alpha \to y_0$. Do $(T(.,.),.)$ nửa liên tục dưới yếu tại (x_0, u_0, y_0) sẽ có lưới con $t_\beta \in T(u_\beta, x_\beta)$ và y_β sao cho

$$(t_\beta, y_\beta - g(u_\beta, x_\beta)) \to (t_0, y_0 - g(u_0, x_0)).$$

Vì $x_\beta \in S_1(u_\beta)$ nên

$$(t_\beta, y_\beta - g(u_\beta, x_\beta)) \in Y \backslash -intK(x_\beta).$$

Bởi $Y\backslash -intK(.)$ đóng, thì

$$(t_0, y_0 - g(u_0, x_0)) \in Y\backslash -intK(x_0),$$

mâu thuẫn với (4.3). Vậy $x_0 \in S_1(u_0)$, tức là $S_1(.)$ đóng tại u_0. □

THÍ DỤ 4.2.1. Xét bài toán (PQVI) với $X = Y = U = R$, $A = [0,1]$, $K(x) \equiv R_+$, $g(u,x) \equiv x$. Hơn nữa, các ánh xạ đa trị E và T được cho bởi, với mỗi $u \in U$,

$$E(u,x) = [0, \frac{u+x}{2}), \ x \in [0,1],$$

$$T(u,x) = \begin{cases} R \quad nếu \ \ x = 0, \ x = 1, \\ [-u, u] \quad nếu \ \ x \in (0, \frac{1}{2}], \\ u^2 + x^2 \quad nếu \ \ x \in (\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Rõ ràng các định lý cuả [Dinh-Luo 1999] không áp dụng được vì các giả thiết không thoả, chẳng hạn ánh xạ T không liên tục. Ta chứng tỏ Định lý 4.2.1 áp dụng được và do đó tập nghiệm $S(.)$ là đóng, tại u_0 bất kỳ thuộc $U_0 = (0,1)$, bằng cách kiểm tra các giả thiết. (i) thoả vì rõ ràng $E(.,.)$ nửa liên tục dưới và $clE(.,.)$, usc tại mọi $(u,x) \in U_0 \times A$.

Xét (ii) ta giả sử có $u_n \to u_0$, $x_n \to x_0$, $x_n \neq x_0$, $y_n \to y_0$ và $t_n \in T(u_n, x_n)$ bất kỳ, Nếu $0 < x_0 \leq \frac{1}{2}$ và $0 < x_n \leq \frac{1}{2}$ thì $t_n \in [-u_n, u_n] \subset [-u_0 - \delta, u_0 + \delta]$ với δ cố định khi n đủ lớn. Do đó sẽ có dãy con $t_{n_k} \in [-u_{n_k}, u_{n_k}]$, $t_{n_k} \to t_0 \in [-u_0, u_0]$. Khi đó

$$(t_{n_k}, y_{n_k}) \to t_0 y_0.$$

Nếu $x_n > \frac{1}{2}$ thì $t_n = u_n^2 + x_n^2 \to u_0^2 + x_0^2 := t_0$.

Nếu $\frac{1}{2} < x_0 < 1$ thì $T(u,x) = u^2 + x^2$ là ánh xạ đơn trị nên (ii) thoả rõ ràng.

Nếu $x_0 = 0$, vì $x_n \neq x_0$, nên ta gặp trường hợp tương tự như $0 < x_0 \leq \frac{1}{2}$, $0 < x_n \leq \frac{1}{2}$.

Nếu $x_0 = 1$ thì $T(u_n, x_n) = u_n^2 + x_n^2$ là ánh xạ đơn trị nên rõ ràng (ii) thoả. Còn (iii) là rõ ràng với $K(x) \equiv R_+$.

Vậy mọi giả thiết cuả chúng tôi đều thoả và tập nghiệm $S(.)$ có đồ thị đóng. Vì A là tập compact nên $S(.)$ cũng nửa liên tục trên.

Như đã nói trước Định lý 4.2.1, khi xét ổn định, ta đã giả sử tồn tại nghiệm ở lân cận u_0. Bây giờ ta chứng tỏ điều này bằng cách kiểm tra các giả thiết của Định lý 3.5.1 về tồn tại cho mọi $u_0 \in (0,1)$. Ở giả thiết (i), do $clE(.,.)$ là usc, ta chỉ còn kiểm tra $E^{-1}(u_0, y)$ mở trong A với $\forall y \in A$. Ta có

$$E^{-1}(u_0, y) = \{x \in A : y \in [0, \frac{u_0 + x}{2})\}.$$

Với $x' \in E^{-1}(u_0, y)$ bất kỳ, tức là $0 \leq y < \frac{u_0+x'}{2}$, sẽ có $\epsilon > 0$ sao cho $0 \leq y < \frac{u_0+x'}{2} - \epsilon$. Lấy $\delta < 2\epsilon$ thì với $x \in (x' - \delta, x' + \delta)$ ta có $0 \leq y < \frac{u_0+x'}{2} - \epsilon = \frac{u_0+x'-2\epsilon}{2} \leq \frac{u_0+x}{2}$, nghĩa là $x \in E^{-1}(u_0, y)$. Vậy tập này mở trong A. Do (ii) và (iii) của Định lý 4.2.1 đã thỏa nên (ii) và (iii) của Định lý 3.5.1 thoả. Áp dụng Định lý 3.5.1 ta được sự tồn tại nghiệm của thí dụ đang xét.

4.3 Áp dụng cho bài toán gia bù

Gỉa sử X, U, A, T và E như trong bài toán (PSQVI) cho trường hợp vô hướng, tức là $Y = R$. Với các dữ kiện khác, ta xét trường hợp đặc biệt $K(x) \equiv x$, $g(u,x) \equiv x$, $\forall u \in U$. Gỉa sử $H : U \times A \rightsquigarrow X$ là hàm đa trị. Bài toán gỉa bù có tham số ứng với (PSQVI) được xét như sau

(PQC): Tìm $(\overline{u}, \overline{x}) \in U \times A$ sao cho $\forall \overline{h} \in A \bigcap H(\overline{u}, \overline{x})$,

$$\forall t \in (-A^0) \bigcap T(\overline{u}, \overline{x}),\ \langle t, \overline{h} \rangle = 0.$$

Ở đây A^0 là tập đối cực của A.

Tương tự Mục 3.6 ta có kết qủa sau

ĐỊNH LÝ 4.3.1. *(a) Nếu E trong (PSQVI) và H trong (PQC) thỏa hệ thức $\forall (u,x) \in U \times A,\ E(u,x) = x - A \bigcap H(u,x) + A$ và nếu A là nón lồi đóng, thì $(\overline{u}, \overline{x})$ là nghiệm của (PSQVI) khi và chỉ khi $(\overline{u}, \overline{x})$ là nghiệm của (PQC).*

(b) Với cùng gỉa thiết như ở (a), nếu $H(.,.)$ có giá trị đóng và liên tục trong (u_0, A) và nếu $(T(.,.),.)$ là wlsc trong (u_0, A, A), thì ánh xạ xác định bởi $u \in U$,

$$W(u) := \{x \in A :\ (u,x) \text{ là nghiệm của } (PQC)\}$$

là đóng tại u_0.

Chứng minh: (a) Giả sử $(\overline{u}, \overline{x})$ là nghiệm của (PQC), tức là $\forall x \in E(\overline{u}, \overline{x})$, $\exists \overline{h} \in A \cap H(\overline{u}, \overline{x})$, $\exists a \in A$, $x = \overline{x} - \overline{h} + a$. Từ Bổ đề 3.6.1 ta có, $\forall t \in T(\overline{u}, \overline{x})$,

$$\langle t, x - \overline{x} \rangle = \langle t, a - \overline{h} \rangle \geq 0,$$

tức là $(\overline{u}, \overline{x})$ là nghiệm của (PSQVI).

Ngược lại, nếu $(\overline{u}, \overline{x})$ là nghiệm của (PSQVI), thì từ $\forall \overline{h} \in A \cap H(\overline{u}, \overline{x})$, $\forall x \in A$, $x := \overline{x} - \overline{h} + a \in E(\overline{u}, \overline{x})$, với mỗi $t \in T(\overline{u}, \overline{x})$, ta có

$$0 \leq \langle t, (\overline{x} - \overline{h} + a) - \overline{x} \rangle = \langle t, a - \overline{h} \rangle.$$

Từ Bổ đề 3.6.1 thì $\langle t, \overline{h} \rangle = 0$, tức là $(\overline{u}, \overline{x})$ là nghiệm của (PQC).

(b) Áp dụng Định lý 4.2.2 ta nhận được $W(.)$ là đóng tại u_0. □

KẾT LUẬN

Các đóng góp chính của luận án

1) Sử dụng các phương pháp của giải tích đa trị và định lý Lusternik chứng minh các điều kiện cần tối ưu Fritz John và Kuhn-Tucker của tối ưu đa trị có tham số cho bài toán có ràng buộc đẳng thức $p(x,u) = 0$ với các giả thiết nhẹ về tính lồi và tính khả vi (Định lý 1.3.1, 1.3.2).

2) Mở rộng các kết quả ở 1) cho trường hợp $p'_x(x_0, u_0)X$ có đối chiều hữu hạn. Đồng thời tính giống lồi được giảm nhẹ thành tính giống lồi xấp xỉ (Định lý 1.3.4, 1.3.6).

3) Mở rộng các điều kiện cần dạng Fritz John và Kuhn-Tucker ở 1) cho trường hợp ràng buộc bao hàm thức $0 \in P(x,u)$. Đồng thời giảm nhẹ được giả thiết chính qui thành giả thiết dưới chính qui (Định lý 2.1.1).

4) Mở rộng các kết quả ở 2) cho trường hợp bao hàm thức $0 \in P(x,u)$ (Định lý 2.1.4).

5) Dùng Định lý KKM-Fan và công cụ giải tích đa trị chứng minh các định lý về tồn tại nghiệm của các bất đẳng thức biến phân (VI) và (SVI) tổng quát với các giả thiết nhẹ trong không gian Banach (Định lý 3.4.2, 3.4.3, 3.4.4) và áp dụng cho bài toán cân bằng giao thông (Hệ quả 3.7.1).

6) Mở rộng các kết quả ở 5) cho các bài toán giả bất đẳng thức biến phân (QVI) và (SQVI) trong không gian tô pô tuyến tính Hausdorff (Định lý 3.5.1, 3.5.2), và áp dụng cho bài toán giả bù tương ứng (Định lý 3.6.2).

7) Nghiên cứu tính nửa liên tục trên theo tham số của tập nghiệm của các bài toán giả bất đẳng thức biến phân (PQVI) và (PSQVI) trong không gian tô pô tuyến tính Hausdorff (Định lý 4.2.1, 4.2.2) và áp dụng cho bài toán gỉa bù có tham số (Định lý 4.3.1).

Một số vấn đề mở liên quan đến các hướng có thể phát triển tiếp cuả luận án

1. Áp dụng điều kiện cần tối ưu cho bài toán đa trị với ràng buộc đẳng thức đơn trị ở Chương 1 vào điều khiển như thế nào? Có mở rộng nguyên lý cực đại Pontryagin ra trường hợp này được không?

2. Xét bài toán với ràng buộc bao hàm thức ở Chương 2 cho trường hợp "thực sự đa trị" hơn là không có các lát cắt cần thiết như là đã giả thiết.

3. Ứng dụng các kết quả ở Chương 2 vào bài toán điều khiển tối ưu có bao hàm thức vi phân.

4. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm cuả bất đẳng thức biến phân (VI) và (SVI) ở Mục 3.4 cho bài toán tương ứng với nghiệm Pareto, không phải nghiệm yếu, tức là thay $Y\backslash - intK(x)$ bởi $Y\backslash(-K(x)\backslash K(x))$.

5. Xét sự tồn tại nghiệm của bài toán (SQVI) tổng quát hơn ở Định lý 3.5.2, với $g(x) \neq x$.

6. Xét bài toán gia bù tương ứng với gia bất đẳng thức biến phân (QVI).

7. Mở rộng kết quả cho giả bất đẳng thức biến phân (QVI) và (SQVI) ở Mục 3.5 cho bài toán tương ứng với nghiệm Pareto, tức là thay nón thứ tự như trên.

8. Xét sự ổn định nghiệm tương tự như ở Chương 4, nhưng cho bài toán (PQVI) và (PSQVI) ứng với nghiệm Pareto, tức là thay nón thứ tự như trên. Có thể hình dung rằng trong trường hợp này ta nhận được tính nửa liên tục dưới cuả tập nghiệm. Có cách nào kết hợp với kết quả đã có ở Chương 4 để nhận được trường hợp tập nghiệm liên tục không?

9. Áp dụng các kết quả ổn định đã nhận được vào bài toán cân bằng mạng.

Các bài báo liên quan trực tiếp đến luận án

1) [Khanh-luu 2000](P. Q. Khanh, L. M. Luu), On necessary optimality conditions in multifunctions optimization with parameters, *Acta Mathematica Vietnamica,* Vol. 25, pp. 125-136.

2) [Khanh-Luu 2001a], Multifunction optimization problems involving parameters. Necessary optimization conditions, *Optimization* (đang in).

3) [Khanh-Luu 2001b], Necessary optimality conditions in problems involving set-valued maps with parameters, *Acta Mathematica Vietnamica* (đang in).

4) [Khanh-Luu 2001c], On the existence of solutions to vector variational inequalities involving multifunctions and applications to traffic equilibrium problems, *J. Optimization Theory and Applications* (đã gửi đăng).

5) [Khanh-Luu 2001d], On the existence of solutions to vector quasi-variational inequalities, quasi-complementarity problems and traffic network equilibria, *J. Optimization Theory and Applications* (đã gửi đăng).

6) [Khanh-Luu 2001e], On the upper semicontinuity with respect to parameter of solutions to vector quasi-variational inequalities and applications, *J. Optimization Theory and Applications* (đã gửi đăng).

7) [Khanh-Luu-Nguyen 1999](V. H. Nguyen), Invex-convexlike multifunctions, sufficient optimality conditions and duality, *Nonlinear Funtional Analysis and Applications,* Vol. 4, pp. 87-106.

8) [Khanh-Luu-Nuong 2001](T. H. Nuong), On several nonconvex general optimization problems, *Scientific Bulletin of Universities,* ISSN 0868.3034, pp. 14-19.

Nội dung cuả luận án đã được báo cáo tại các hội nghị khoa học sau đây

1) Hội nghị khoa học Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh 1998.

2) Hội nghị khoa học lần thứ 2 trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh, 5-2000.

3) Hội thảo khoa học "Các phương pháp toán học ứng dụng trong công nghệ và quản lý", Nha trang 10-15/2/1998.

4) Hội nghị toàn quốc lần thứ nhất về ứng dụng Toán học, Hà nội 23-25/12/1999.

5) International Workshop on Applied Analysis and Optimization, August 28-31, 2000.

6) Thông báo khoa học cuả Bộ giáo dục và đào tạo
"Về một số bài toán tối ưu tổng quát không lồi", (đã gửi đăng năm 2000).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[Aubin-Frankowska 1990](J. P. Aubin, H. Frankowska), *Set Valued Analysis,* Birkhauser, Boston, Basel-Berlin.

[Beusoussan-Lions 1984](J. Beusuossan, J. L. Lions), *Impulse Control and Quasi-Variational Inequalities,* Gauthicrs Villars, Bordar, Paris.

[Browder 1970] (F. E. Browder), Pseudo-monotone operators and the direct method of the calculus of variations, *Archive for Rational Mechanic and Analysis,* Vol. 38, pp. 268-277.

[Chadli-Riabi 2000](O. Chadli, H. Riabi), On generalized vector equibibrium problems, *J. Global Optimization* 16, 33-41.

[Chan-Pang 1882](D. Chan, J. S. Pang), Generalized quasi-variational Inequality problem, *Mathematical Operational Researches* 7, 211-222.

[Corley 1981](H. W. Corley), Duality theory for maximizations with respect to cones, *J. Mathematical Analysis and Applications,* Vol. 84, pp. 560-568.

[Corley 1987], Existence and Lagrange duality for maximizations of set-valued functions, *J. Optimization Theory and Applications,* Vol. 54, pp. 489-501.

[Corley 1988], Optimality conditions for maximization of set-valued functions, *J. Optimization Theory and Applications,* Vol. 58, pp. 1-10.

[Cottle-Yao 1992](R. W. Cottle, J. C. Yao), Pseudomonotone complementarity problems in Hilbert space, *J. Optimization Theory and Applications,* Vol. 75, pp. 281-295.

[Crouzeix 1997](J. P. Crouzeix), Pseudomonotone variational inequality problems : Existence of solutions, *Mathematical Programming* 78, 305-314.

[Cubiotti 1995](P. Cubiotti), Some properties of periodic solutions of linear control systems via quasi-variational inequalities. in: Giannesi and A. Maugeri eds., *"Variational Inequalities and Network equilibrium problems",* Plenum Press, New York, London.

[Dafermos 1988](S. Dafermos), Sensitivity analysis in variational inequalities, *Mathematics of Operations Research,* Vol. 13, pp. 421-434.

[Daniilidis-Hadjisavvas 1997](A. Daniilidis, N. Hadjisavvas), On the subdifferentials of quasi-convex and pseudoconvex functions and cyclic monotonicity, Technical Report No.97-08, Department of Mathematics, University of the Aegean, Samos, Greece.

[Daniilidis-Hadjisavvas 1998], Characterization of nonsmooth semistrictly quasiconvex and strictly quasiconvex functions, Technical Report No.98-01, Department of Mathematics, University of the Aegean, Samos, Greece.

[Ding 1997](X. P. Ding),Generalized variational-like inequalities with nonmonotone set-valued mappings, *J. Optimization Theory and Applications,* Vol. 95, pp. 601-613.

[Ding-Luo 1999](C. L. Luo), On parametric generalized quasi-variational inequalities, *J. Optimization Theory and Applications,* Vol. 100. No.1, pp. 195-205.

[Ding-Tarafdar 2000](E. Tarafdar), Generalized vector variational-like inequalities with C_X-pseudomonotone set-valued mappings, in: F. Giannessi ed., *"Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria",* Kluwer Academic Publishers, Dordrec.

[Domokos 1999](A. Domokos), Solution sensitivity of variational inequalities, *Journal of Mathematical Analysis and Application* 230, 382-389.

[Fan 1953](K. Fan), Minimax theorems, Proceedings Nat. Acad. of Sciences, Vol. 39, pp. 42-47.

[Fan 1961], A generalization of Tychonoff's fixed point theorem, *Math. Ann.,* Vol. 142, pp. 305-310.

[Fu 1997](J. Fu), Simultaneous vector variational inequalities and vector implicit complementarity problem, *J. Optimization Theory and Applications,* Vol. 93, No. 1, pp. 141-151.

[Fu 2000], A vector variational-like inequality for compact acyclic multifunctions and its applications, in: F. Giannessi ed., *"Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria"*, Kluwer Academic Publishers, Boston-London.

[Giannessi 1995](F. Giannessi), Separation of sets and gap functions for quasi-variational inequalities. in F. Giannessi, A. Maugeri eds., *"Variational inequalities and Networks equilibrium problems"*, Plenum Prees New York, London, pp. 101-118.

[Giannessi 2000], *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecity, Boston, London.

[Giannessi-Maugeri 1995](A. Maugeri), *Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems*, Plenum Press, New York-London.

[Gwinner 1995](J. Gwinner), Stability of monotone variational inequalities with various applications, in :F. Giannessi and A. Maugeri, *"Variational Inequalities and Network equilibrium problems"*, Plenum Press, New York-London.

[Guo-Yao 1994](J. S. Guo, J. C. Yao), Variational inequalities with nonmonotone operatos, *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 80, No. 1, pp. 63-75.

[Hadjisavvas-Schaible 1993](N. Hadjisavvas, S. Schaible), On strong pseudomonotonicity and (semi) strict quasimonotonicity, *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 79, pp. 139-155.

[Hadjisavvas-Schaible 1996], Quasimonotone variational inequalities in Banach spaces, *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 90, pp. 95-111.

[Hadjisavvas-Schatble 1998], From scalar to vector equilibrium problems in the quasimonotone case, *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 96. To appear.

[Harker-Pang 1990](P. T. Harker, J. S. Pang), Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of Theory, Algorithms and Appls. *Mathem. Programming*, Vol. 48, pp. 161-220.

[Hartman-Stampacchia 1996](P. Hartman, G. Stampacchia), On same nonlinear eliptic differentiable functional equation, *Acta Mathematics*, Vol. 115, pp. 71-310.

[Isac-Bulavski-Kalashnikov 1997](G. Isac, V. Bulavski, V. Kalashnikov), Exceptional families, topological degree and complementarity problems, *Journal of Global Optimization*, Vol. 10, pp. 207-225.

[John 1999](R. John), A note on Minty variational inequalities and generalized monotonicity, Proceedings.

[Karamardian 1971](S. Karamardian), Generalized complementarity problem, *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 8, pp. 161-168.

[Khanh-Nuong 1988](P. Q. Khanh, T. H. Nuong), On necessary optimality conditions in vector optimization problems, *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 58, pp. 63-81.

[Khanh-Nuong 1989], On necessary and sufficient conditions in vector optimization, *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 63, pp. 391-413.

[Khanh 1986], An induction theorem and general open mapping theorems, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 118, 519-534.

[Khanh 1988], An open mapping theorem for families of multifunctions, *J.Math. Anal. Appl.*, Vol. 132, pp. 491-498.

[Khanh 1989], On general open mapping theorems, *J. Mathematical Theory and Applications*, Vol., 144, pp. 305-312.

[Khanh 1992], Proper of vector optimization problems, *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 74, pp. 105-130.

[Khanh 1995a], Invex-convexlike functions and duality, *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 87, pp. 141-165.

[Khanh 1995b], Sufficient optimality conditions and duality in vector optimization with invex-convexlike functions, *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 87, pp. 359-378.

[Khanh-Luu 2000](L.M. Luu), On necessary optimality conditions in multifunctions optimization with parameters, *Acta Mathematica Vietnamica*, Vol. 25, pp. 125-136.

[Khanh-Luu 2001a], Multifunctions optimization problems involving parameters. Necessary optimization conditions, *Optimization* (đang in).

[Khanh-Luu 2001b], Necessary optimality conditions in problems involving set-valued maps with parameters, *Acta Mathematica Vietnamica* (đang in).

[Khanh-Luu 2001c], On the existence of solutions to vector variational inequalities involving multifunctions and applications to traffic equilibrium problems, *J. Optimization Theory and Applications* (đã gửi đăng).

[Khanh-Luu 2001d], On the existence of solutions to vector quasi-variational inequalities, quasi-complementarity problems and traffic network equilibria, *J. Optimization Theory and Applications* (đã gửi đăng).

[Khanh-Luu 2001e], On the upper semicontinuity with respect to parameter of solutions to vector quasi-variational inequalities and applications, *J. Optimization Theory and Applications* (đã gửi đăng).

[Khanh-Luu-Nguyen 1999](V. H. Nguyen), Invex-convexlike multifunctions, sufficient optimality conditions and duality, *Nonlinear Funtional Analysis and Applications,* Vol. 4, pp. 87-106.

[Khanh-Luu-Nuong 2001](T. H. Nuong), On several nonconvex general optimization problems, *Scientific Bulletin of Universities,* ISSN 0868.3034, pp. 14-19.

[Kim-Tan 1999](W. K. Kim, K. K. Tan), On generalized vector quasi-variational inequalities, *Optimization,* Vol. 46, pp. 185 - 198.

[Konnov 1998](I. V. Konnov), On quasimototone variational inequalities, *J. Optimization Theory and Applications,* Vol.99, No.1, pp.165-181.

[Konnov 2001], *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities,* Springer, Berlin-New York.

[Lancaster 1968](K. Lancaster), *Mathematical Economics,* The Macmillan

Company, NewYork, London.

[Lignola-Morgan](M. B. Lignola, J. Morgan), Generalized variational inequalities with pseudomonotone operators under perturbations, *J. optimization Theory and Appilications,* Vol. 101, No.1, pp. 213-220.

[Lin-Lang-Yao 1997](K. L. Lin, D. P. Yang, J. C. Yao), Generalized vector variational inequalities, *J. Optimization Theory and Applications*, Vol. 92, No. 1, pp. 117-125.

[Lions-Stampacchia 1967](J. L. Lions, G. Stampacchia), Variational inequalities, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 22, pp. 493-519.

[Liu-Gong 2000](W. Liu, X. Gong), Proper efficiency for set-valued vector optimization problems and vector variational inequalities. *math. Meth. Oper. Res.*, 51 pp. 443-457.

[Luc 1989](D. T. Luc), *Theory of Vector Optimization,* Springer Verlag, Berlin, Germany.

[Luc-Malivert 1992](C. Malivert), Invex optimization problems, *Bulletin Australian Mathematical society* 46, 47-66.

[Luca 1995](M. D. Luca), Generalized quasi-variational inequalities and traffic equilibrium problem. in F. Giannessi, A. Maugeri eds., *"Variational Inequalities and Networks equilibrium problems",* Plenum Press, pp. 45-51.

[Maugeri 1995] (A. Maugeri), Variational and quasi-variational inequalities in network flow models. Recent developments in theory and algorithms, in: F. Giannessi, A. Maugeri eds., *"Variational Inequalities and Network equilibrium problems"*, Plenum Press,

[Mukherjee-Verma 1992](R. N. Mukherjee, H. L. Verma), Sensitivity analysis of generalized variational inequalities, *J. Mathematical Analysis and Applications,* Vol. 167, pp. 299-304.

[Noor 1992](M. A. Noor), General algorithm and sensitivity analysis for variational inequalities, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis* Vol. 5, pp. 29-42.

[Noor 1997], Sensitivity analysis for variational inequalities, *Optimization,* Vol. 11. , pp. 207-217.

[Noor-Oettli 1994](W. Oettli), On general nonlinear complementarity problems and quasi-equilibria, in: F. Giannessi, A. Maugeri eds., "LE MATEMATICHE" Vol. XLIX-Fasc II, pp. 313-331.

[Nuong 1989](T. H. Nuong), Optimality conditions in cooperative differential games, *Control and Cybernetics,* Vol. 18, pp. 95-114.

[Peng 1997] (J. Peng), Equivalence of variational inequality problems to unconstrained minimization, *mathematical Programming* 78, 347-355.

[Pillo-Giannessi 1996](G. Pillo, F. Giannessi), *Nonlinear Optimization and Application,* Plenum Press, New York-London.

[Robinson 1995](S. M. Robinson), Sensitivity analysis of variational inequalities by normal-map techniques, *"Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems"*, Edited by F. Giannessi and A. Maugeri, Plenum Press, NewYork.

[Sach-Craven 1991a](P. H. Sach, B. D. Craven), Invexity in multifunction optimization, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 12, 383-394.

[Sach-Craven 1991b], Invex multifunctions and duality, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 12, 575-591.

[Sach-Yen-Craven 1994](N. D. Yen), Generalized invexity and duality theories with multifunctions, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 15, 131-153.

[Sawaragi-Nakayama-Tanino 1985](Y. Sawaragi, H. Nakayama, T. Tanino), *Theory of Multiobjective Optimization.* Academic Press, NewYork.

[Shih-Tan 1985](M. H. Shih, K. K. Tan), Generalized quasi-variational inequalities in localy convex topological vector spaces, *J. Math. Anal. Appl.* ,108, pp. 333-343.

[Stampacchia 1969](G. Stampacchia), Variational inequalities, Theory and Applications of Monotone Operators. Edited by A. Ghizzetti, Edizioni Oderisi, Gubbio, Italy, pp. 101-192.

[Yao 1994a](J. C. Yao), Variational inequalities with generalized monotone operators, *Mathematics of Operations Research,* Vol. 19, pp. 691-705.

[Yao 1994b], Multi-valued variational inequalities with K-pseudomonotone operators, *Journal of Optimization Theory and Applications,* Vol. 83, pp. 391-403.

[Yen 1995], Lipschitz continuity of solutions of variational inequalities with a parametric polyhedral constraint, *Mathematics of Operations Research,* Vol. 20, pp. 695-708.

[Zhao-Han-Qi 1999](Y. B. Zhao, J. Y. Han, H. D. Qi), Exceptional families and existence theorems for variational inequality problems, *J. Optimization Theory and Applications,* Vol. 101, No. 2, pp. 475-495.