www.VNMATH.com

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

--------------- @ ---------------

LƯU THỊ NHÀN

CHUẨN EISENMAN TRÊN ĐA TẠPPHỨC

CHUYÊN NGÀNH: GIẢI TÍCH
MÃ SỐ : 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN – 2009

www.VNMATH.com

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LƯU THỊ NHÀN

CHUẨN EISENMAN TRÊN ĐA TẠP PHỨC

CHUYÊN NGÀNH: GIẢI TÍCH
MÃ SỐ : 60.46.01

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
PGS.TS PHẠM VIỆT ĐỨC

THÁI NGUYÊN – 2009

Số hóa bởi Trung tâm Học liệu – Đại học Thái Nguyên *http://www.lrc-tnu.edu.vn*

MỤC LỤC

Mở đầu 2

Chương 1: Kiến thức chuẩn bị

1.1. Nhóm tự đẳng cấu của B^n 4

1.2. Metric vi phân Royden-Kobayashi 8

Chương 2: Các khoảng cách bất biến và chuẩn Eisenman trên B^n

2.1. Các khoảng cách bất biến trên B^n 20

2.2. Chuẩn Eisenman trên B^n 32

Chương 3: Chuẩn Eisenman trên đa tạp phức

3.1. Các định nghĩa 36

3.2. Một số tính chất của E_k 37

3.3. Dạng thể tích trên đa tạp 40

3.4. Độ đo Eisenman trên đa tạp 41

3.5. Đa tạp hypebolic k- độ đo 42

3.6. Một số tính chất 43

3.7. Trường hợp k = 1 45

3.8. Công thức tích 48

Kết luận 51

Tài liệu tham khảo 52

www.VNMATH.com

MỞ ĐẦU

Năm 1969, D.A Eisenman trong luận án Tiến sĩ của mình [5] đã đưa ra khái niệm chuẩn Eisenman E^k trên một đa tạp phức.

Trong trường hợp $k = 1$ nó chính là bình phương của metric vi phân Kobayashi [8]. Năm 1985, trong [6] I.Graham và H. Wu đã chứng minh được một số tính chất của E^k tương tự như tính chất của metric vi phân Royden-Kobayashi. Mục đích của luận văn này là tìm hiểu về chuẩn Eisenman và trình bày một cách có hệ thống các tính chất của nó.

Luận văn được chia làm ba chương.

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày các tính chất của nhóm tự đẳng cấu của B^n và metric vi phân Royden-Kobayashi làm cơ sở để trình bày các kiến thức ở các chương tiếp theo.

Chương 2. Các khoảng cách bất biến và chuẩn Eisenman trên B^n

Phần đầu của chương trình bày một số khoảng cách bất biến trên B^n và một số tính chất của chúng. Phần tiếp theo của chương là trình bày về chuẩn Eisenman trên B^n và các tính chất của chuẩn Eisenman trên B^n.

Chương 3. Chuẩn Eisenman trên đa tạp phức

Trong chương này chúng tôi đã trình bày khái niệm và một số tính chất của chuẩn Eisenman trên một đa tạp phức. Ngoài ra còn trình bày một số khái niệm như dạng thể tích nội tại Eisenman, độ đo Eisenman trên đa tạp, hyperbolic k-độ đo. Phần cuối chương xét cụ thể trường hợp E^1 và chứng minh công thức tích của chuẩn Eisenman trên các đa tạp phức.

Luận văn được hoàn thành tại khoa Toán Trường Đại Học Sư Phạm Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn tận tình của PGS.TS Phạm Việt Đức. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn chân thành đến người Thầy của mình .

www.VNMATH.com

Nhân đây cho phép tôi bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn đến các thầy, cô trong tổ bộ môn Giải tích. Tôi xin chân thành cảm ơn các thầy, cô phản biện đã cho tôi những ý kiến quý báu để tôi hoàn thành luận văn này, tôi xin cảm ơn Ban Giám Hiệu, Khoa Toán, Khoa sau Đại học Trường Đại học Sư Phạm Đại học Thái Nguyên và những người thân đã tạo điều kiện giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn này.

Do nhiều nguyên nhân khác nhau nên luận văn này không tránh khỏi thiếu sót và hạn chế, tôi mong nhận được sự góp ý của các thầy cô và các bạn.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 10 năm 2009

Lưu Thị Nhàn

Chương 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Nhóm tự đẳng cấu của B^n

1.1.1. Định nghĩa

$B^n(r) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < r \right\}$ ở đây $\|.\|$ là chuẩn Euclid.

Với $a \in B^n(r)$ ta định nghĩa ma trận $\Gamma_r(a)$ cấp $n \times n$ như sau:

$$\Gamma_r(a) = \frac{a \cdot {}^t\overline{a}}{r - v_r(a)} - v_r(a) I,$$

trong đó a là ma trận cột , $v_r(a) = \sqrt{r^2 - \|a\|^2}$, và I là ma trận đơn vị.

Khi $r = 1$ ta kí hiệu $v(a) = v_1(a)$.

1.1.2. Một số tính chất

Với $a \in B^n(r)$, ta định nghĩa ánh xạ $g_a^r : B^n(r) \to B^n(r)$ xác định bởi

$$g_a^r(z) = r.\Gamma_r(a) \cdot \frac{z - a}{r^2 - {}^t\overline{a} \cdot z}, \ z \in B^n(r)$$

Khi $r = 1$ ta kí hiệu $r(a) = r_1(a);\ g_a(z) = g_a^1(z)$.

1.1.2.1. Ta có

$$\Gamma_r(a) = r.\Gamma(\frac{a}{r}).$$

1.1.2.2. Cho $a, z \in B^n(r)$, ta có đẳng thức $g_a^r(z) = r \cdot g_{\frac{a}{r}}(\frac{z}{r})$.

Chứng minh.

$$r g_{\frac{a}{r}}\left(\frac{z}{r}\right) = r^2 \cdot \Gamma\left(\frac{a}{r}\right) \frac{z - a}{r^2 - {}^t\overline{a} \cdot z} = r.\Gamma_r(a).\frac{z - a}{r^2 - {}^t\overline{a} \cdot z} = g_a^r(z).$$

1.1.2.3. *Nhóm* $Aut(B^n(r))$ *các tự đẳng cấu của* $B^n(r)$ *tác động bắc cầu trên* $B^n(r)$.

Chứng minh.

Ta có

$$g_a^r \in Aut\left(B^n(r)\right) \text{ và } g_a^r(a)=0,$$

$$g_a^r(0)=rg_{\frac{a}{r}}(0)=r\frac{-a}{r}=-a.$$

1.1.2.4. Ta có

$Aut\left(B^n(r)\right)=\left\{A.g_a^r : A\in U(n), a\in B^n(r)\right\}$, *trong đó U(n) là nhóm unita.*

Chứng minh.

Ta có $Aut(B^n(r))$ và $Aut\left(B^n\right)$ là đẳng cấu, hơn nữa

$$Aut\left(B^n\right)=\left\{A\cdot g_a : A\in U(n)\right\}.$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

1.1.2.5. Ta có $\Gamma_r(a)a=ra$ với $a\in B^n(r)$.

Chứng minh.

$$\Gamma_r(a)a=r\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)a=r^2\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)\frac{r}{a}=r^2\frac{a}{r}=ra.$$

1.1.2.6. Ta có

$$^t\overline{\Gamma_r(a)}=\Gamma_r(a), \text{ do đó } {}^t\overline{a}\cdot\Gamma_r(a)=r\cdot{}^t\overline{a}.$$

Thật vậy,

$$^t\overline{\Gamma_r(a)}={}^t\overline{r\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)}=r\cdot{}^t\overline{\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)}=r\cdot\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)=\Gamma_r(a).$$

Hơn nữa,

$$^t\overline{a}\cdot\Gamma_r(a)={}^t\overline{a}\cdot r\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)=r^2\cdot\frac{{}^t\overline{a}}{r}\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)=r^2\cdot\frac{{}^t\overline{a}}{r}=r\cdot{}^t\overline{a}.$$

1.1.2.7. Ta có

$$\Gamma_r(a)^2 = (r - v_r(a)) \cdot \Gamma_r(a) + r \cdot v_r(a) I = a\,{}^t\bar{a} + v_r(a)^2 \cdot I .$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}\Gamma_r(a)^2 = r^2\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)^2 &= r^2\left[\left(1 - v\left(\frac{a}{r}\right)\right)\Gamma\left(\frac{a}{r}\right) + v\left(\frac{a}{r}\right)I\right] \\ &= (r - v_r(a))\, r\Gamma\left(\frac{a}{r}\right) + rv_r(a)I \\ &= (r - v_r(a))\,\Gamma_r(a) + rv_r(a)I,\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\Gamma_r(a)^2 = r^2\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)^2 &= r^2\left(\frac{a}{r} \cdot \frac{{}^t\bar{a}}{r} + v\left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdot I\right) \\ &= a\,{}^t\bar{a} + r^2 v\left(\frac{a}{r}\right)^2 I \\ &= a \cdot {}^t\bar{a} + v_r(a)^2 I.\end{aligned}$$

1.1.2.8. Ta có

$$\Gamma_r(a)^{-1} = \frac{1}{rv_r(a)}\left(\Gamma_r(a) + (v_r(a) - r)I\right) = \frac{1}{rv_r(a)}\left(\frac{a \cdot {}^t\bar{a}}{r - v_r(a)} - rI\right).$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned}\Gamma_r(a)^{-1} = \left(r \cdot \Gamma\left(\frac{a}{r}\right)\right)^{-1} &= \frac{1}{r} \cdot \Gamma\left(\frac{a}{r}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{v\left(\frac{a}{r}\right)}\left(\Gamma\left(\frac{a}{r}\right) + \left(v\left(\frac{a}{r}\right) - 1\right)I\right) \\ &= \frac{1}{v_r(a)}\left(\frac{1}{r} \cdot \Gamma_r(a) + \frac{1}{r}(v_r(a) - r)I\right) \\ &= \frac{1}{rv_r(a)}\left(\Gamma_r(a) + (v_r(a) - r)I\right).\end{aligned}$$

Ngoài ra ta có

$$\Gamma_r(a)^{-1} = \frac{1}{r}\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)^{-1} = \frac{1}{rv\left(\frac{a}{r}\right)}\left(\frac{a\cdot{}^t\bar{a}}{r^2\left(1-v\left(\frac{a}{r}\right)\right)} - I\right)$$

$$= \frac{1}{v_r(a)}\left(\frac{a\cdot{}^t\bar{a}}{r(r-v_r(a))} - I\right) = \frac{1}{rv_r(a)}\left(\frac{a\cdot{}^t\bar{a}}{r-v_r(a)} - rI\right).$$

1.1.2.9. Ta có

$$\Gamma_r(a)^{-2} = \frac{1}{r^3\cdot v_r(a)}\left(-a\cdot{}^t\bar{a} + r^2 I\right).$$

Chứng minh.

$$\Gamma_r(a)^{-2} = \frac{1}{r^2}\cdot\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)^{-2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{v\left(\frac{a}{r}\right)}\left(-\frac{a\cdot{}^t\bar{a}}{r^2} + I\right)$$

$$= \frac{1}{r^3 v_r(a)}\left(-a\cdot{}^t\bar{a} + r^2 I\right).$$

1.1.2.10. $$\det\Gamma_r(a) = r(-v_r(a))^{k-1} = r\left(-\sqrt{r^2-\|a\|^2}\right)^{k-1}.$$

Thật vậy,

$$\det\Gamma_r(a) = \det\left(r\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)\right)$$

$$= r^k\det\Gamma\left(\frac{a}{r}\right) = r^k\left(-v\left(\frac{a}{r}\right)\right)^{k-1}$$

$$= r^k\left(-\sqrt{1-\left\|\frac{a}{r}\right\|^2}\right)^{k-1} = r\left(-\sqrt{r^2-\|a\|^2}\right)^{k-1}.$$

1.1.2.11. Ta có

$$g_{Aa}{}^r = A\cdot g_a{}^r\cdot A^{-1} \text{ với } A\in U(n).$$

Chứng minh. Để tính g^r_{Aa}, ta có

$$g_{Aa}{}^{r}(z) = r\cdot g_{\frac{1}{r}Aa}\left(\frac{z}{r}\right) = rg_{A\left(\frac{a}{r}\right)}\left(\frac{z}{r}\right) = r\cdot A\cdot g_{\frac{a}{r}}\cdot A^{-1}\left(\frac{z}{r}\right)$$

$$= A\left(rg_{\frac{a}{r}}\left(\frac{1}{r}A^{-1}(z)\right)\right) = Ag_{a}{}^{r}A^{-1}(z).$$

Do đó $\quad g^{r}_{Aa} = A\cdot g_{a}{}^{r}\cdot A^{-1}.$

1.1.2.12. Ta có $d\left(g_{a}{}^{t}\right)_{a} = \dfrac{r\Gamma_{r}(a)}{v_{r}(a)^{2}} = \dfrac{r}{r^{2}-\|a\|^{2}}\Gamma_{r}(a)$, ở đây $d\left(g^{r}_{a}\right)_{a}$ là ma trận Jacobi của g^{r}_{a} tại a.

Chứng minh.

$$g_{a}{}^{r}(z) = r\cdot g_{\frac{a}{r}}\left(\frac{z}{r}\right) = r\cdot g_{a}{}^{r}\cdot h(z), \text{ trong đó } h = \frac{1}{r}id\left(B^{n}(r)\right).$$

Khi đó

$$d\left(g_{a}{}^{r}\right)_{a} = rd\left(g_{\frac{a}{r}}\cdot h\right)_{(a)} = r\left(dg_{\frac{a}{r}}\right)_{h(a)}\cdot dh_{(a)}$$

$$= \left(dg_{\frac{a}{r}}\right)_{h(a)} = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)}{1-\left\|\frac{a}{r}\right\|^{2}} = \frac{1}{r^{2}-\|a\|^{2}}\cdot r^{2}\cdot\Gamma\left(\frac{a}{r}\right)$$

$$= \frac{r}{r^{2}-\|a\|^{2}}\Gamma_{r}(a).$$

1.2. Metric vi phân Royden-Kobayashi trên đa tạp phức

1.2.1. Định nghĩa

Một ánh xạ $F:T\left(M\right)\to \mathbb{R}^{+}$ gọi là metric vi phân nếu nó thoả mãn các điều kiện sau:

i) $F\left(O_{x}\right)=0$ với O_{x} là vectơ không của $T\left(M\right)_{x}$

ii) Với mọi $\xi_{x}\in T\left(M\right)_{x}$ và $\alpha\in\mathbb{C}$ ta có: $F\left(a\xi_{x}\right)=|a|\cdot F\left(\xi_{x}\right)$.

Hơn nữa nếu *F* liên tục và $F\left(\xi_{x}\right)\neq 0$ với mọi $\xi_{x}\in T\left(M\right)_{x}-O_{x}$ thì ta nói *F* là metric Finsler.

www.VNMATH.com

Chúng ta định nghĩa **metric vi phân Kobayashi**:

Xác định ánh xạ $F_M : T(M) \to \mathbb{R}^+$ như sau:

Với mọi $\xi_x \in T(M)_x, F_M(\xi_x) = inf\left\{\frac{1}{r}:\right.$tồn tại ánh xạ chỉnh hình $f : \Delta(r) \to M$ sao cho $f(0) = x$ và $\left. f_*\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_0\right] = \xi_x\right\}$,

ở đây chúng ta chú ý rằng với mọi $s > 0$ mà $F_M(\xi_x) < \frac{1}{s}$ thì tồn tại ánh xạ chỉnh hình $f : \Delta(s) \to M$ sao cho $f(0) = x$ và $f_*\left[\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_0\right] = \xi_x$.

Ta có định nghĩa tương đương sau:

$F_M(\xi_x) = inf\left\{|a|:\right.$ tồn tại ánh xạ chỉnh hình $f : \Delta(1) \to M$ sao cho $f(0) = x$ và $\left. f_*\left[a\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_0\right] = \xi_x, a \in \mathbb{C}\right\}$.

1.2.2. Mệnh đề

Ánh xạ $F : T(M) \to \mathbb{R}^+$ *là một metric vi phân* .

Chứng minh. Ta chứng minh $F_M(O_x) = 0$.

Với bất kỳ $r > 0$ ta lấy $f : \Delta(r) \to M$ là ánh xạ hằng $f(z) = x$, thế thì $f(0) = x$ và $f'(0) = O_x$, cho $r \to +\infty$ ta được $F_M(O_x) = 0$.

Ta chứng minh $F_M(a\xi_x) = |a| \cdot F_M(\xi_x)$, $a=0$ hiển nhiên đúng.

Với $a \neq 0$ ta có:

Gọi $f : \Delta(1) \to M$ là ánh xạ chỉnh hình sao cho $f(0) = x$ và $f_*\left[c \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_0\right] = \xi_x$, với $c \in \mathbb{C}$.

Vì $f_*\left[ac\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)_0\right] = a\xi_x$ nên $F_M\left(\xi_x\right) \le |a|\cdot|c|$ suy ra $F_M\left(a\xi_x\right) \le |a|\cdot F_M\left(\xi_x\right)$.

Suy ra

$$F_M\left(\xi_x\right) = F_M\left(\frac{1}{a}a\cdot\xi_x\right) \le \frac{1}{|a|}F_M\left(a\xi_x\right)$$

do đó $$F_M\left(a\xi_x\right) = |a|\cdot F_M\left(\xi_x\right).$$

1.2.3. Định lí

Cho M, N là hai đa tạp phức, $f: M \to N$ *là ánh xạ chỉnh hình thì ta có* $f^*F_N \le F_M$*, có nghĩa*

$$F_N\left(f_*\left(\xi_x\right)\right) \le F_M\left(\xi_x\right)$$

với mọi $\xi_x \in T\left(M\right)_x$*. Đặc biệt nếu f là song chỉnh hình thì* $f^*F_N = F_M$ *.*

Chứng minh.

Lấy $h: \Delta\left(r\right) \to M$ là ánh xạ chỉnh hình sao cho $h'\left(0\right) = \xi_x$

suy ra $f \circ h: \Delta\left(r\right) \to N$ là ánh xạ chỉnh hình sao cho $\left(f \circ h\right)'\left(0\right) = f_*\left(\xi_x\right)$

suy ra

$$f_N\left(f_*\left(\xi_x\right)\right) \le \frac{1}{r}$$

và vì *h* bất kỳ nên ta có $$F_N\left(f_*\left(\xi_x\right)\right) \le F_M\left(\xi_x\right).$$

1.2.4. Mệnh đề

Cho M_1, M_2 là hai đa tạp phức. Thế thì với mọi $\xi_x + \nu_y \in T\left(M_1\right)_x + T\left(M_2\right)_y$ *ta có*

$$F_{M_1\times M_2}\left(\xi_x + \nu_y\right) = \max\left\{F_{M_1}\left(\xi_x\right), F_{M_2}\left(\nu_y\right)\right\}.$$

Chứng minh.

Xét ánh xạ chiếu tự nhiên $\pi_j : M_1 \times M_2 \to M_j$, *j =1, 2* nó là ánh xạ chỉnh hình, theo định lý trên ta có

$$F_{M_1 \times M_2}\left(\xi_x + \nu_y\right) \geq \max\left\{F_{M_1}\left(\xi_x\right), F_{M_2}\left(\nu_y\right)\right\} \qquad (1)$$

Xét $f_j : \Delta\left(r_j\right) \to M_j$ là ánh xạ chỉnh hình sao cho $f_1^{'}\left(0\right) = \xi_x,\ f_2^{'}\left(0\right) = \nu_y$.

Đặt $r = min\left\{r_1, r_2\right\}$ thế thì ánh xạ chỉnh hình

$f\ : z \in \Delta\left(r\ \right) \to \left(\ f_1\left(z\right),\ f_2\left(z\right)\right) \in M_1 \times M_2$ thoả mãn $f^{'}\left(0\right) = \xi_x + \nu_y$.

Do đó

$$F_{M_1 \times M_2}\left(\xi_x + \nu_y\right) \leq \frac{1}{r} = \max\left\{\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}\right\}.$$

Có nghĩa

$$F_{M_1 \times M_2}\left(\xi_x + \nu_y\right) \leq \max\left\{F_{M_1}\left(\xi_x\right), F_{M_2}\left(\nu_y\right)\right\}\ . \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

1.2.5. Bổ đề (Royden).

Cho M là đa tạp phức và $h : \Delta\left(r\right) \to M$ *là ánh xạ với* $h'\left(0\right) \neq O_{h(0)}$ *thì với mọi số dương* $s < r$ *tồn tại ánh xạ chỉnh hình* $H : \Delta\left(s\right) \times \Delta\left(1\right)^{m-1} \to M$ *sao cho H là song chỉnh hình trong lân cận của O và* $H\left(z_1, 0, ..., 0\right) = h\left(z_1\right)$ *với mọi* $z_1 \in \Delta\left(s\right)$*. Hơn nữa nếu h là nhúng địa phương thì H cũng là nhúng địa phương.*

1.2.6. Định lý

Cho M là đa tạp phức thế thì metric vi phân Kobayashi $F_M : T\left(M\right) \to \mathbb{R}^+$ *là nửa liên tục trên có nghĩa với mọi* $\xi \in T\left(M\right)$ *và mọi* $\varepsilon > 0$ *thế thì tồn tại lân* *cận U của ξ trong $T(M)$ sao cho:*

$$F_M(v) < F_M(\xi) + \varepsilon \quad \textit{với mọi } v \in U.$$

Chứng minh.

Lấy $\xi_x \in T(M)_x$ với $\xi_x \neq O_x$ và $\varepsilon > 0$ bất kỳ.

Suy ra tồn tại $r > 0$ và ánh xạ chỉnh hình $h : \Delta(r) \to M$ sao cho $h(0) = x, h'(0) = \xi_x$ và

$$F_M(\xi_x) \leq \frac{1}{r} < F_M(\xi_x) + \varepsilon.$$

Cố định $0 < s < r$ sao cho $\frac{1}{s} < F_M(\xi_x) + \varepsilon$.

Bởi bổ đề Royden tồn tại ánh xạ $H : \Delta(s) \times \Delta(1)^{m-1} \to M$ sao cho H là ánh xạ chỉnh hình trong lận cận của O_x và $H(z, 0, ..., 0) = h(z)$ với mọi $z \in \Delta(s)$.

Đặt $D = \Delta(s) \times \Delta(1)^{m-1}$, và ta có $H(O) = x$ và $H_*\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\right)_O = \xi_x$

nên

$$F_D\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\right)_O = \frac{1}{s} < F_M(\xi_x) + \varepsilon$$

Do F_D liên tục nên tồn tại lân cận V của $\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)_O$ trong $T(D)$ sao cho

$$F_D(\xi) < F_D\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\right)_O + \varepsilon, \ \forall \xi \in V.$$

Vì H là song chỉnh hình quanh O nên chúng ta có thể lấy V sao cho $U = H_*(V)$ là lân cận của ξ_x trong $T(M)$ và ánh xạ $H_*: V \to U$ là song chỉnh hình.

Lấy $\nu \in U$ bất kì thế thì tồn tại $\xi \in V$ sao cho $H_*(\xi) = \nu$. Suy ra:

$$F_M(\nu) = F_M(H_*(\xi)) \le F_D(\xi) < F_D\left(\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\right)_O + \varepsilon < F_M(\xi_x) + 2\varepsilon$$

vì vậy F_M là nửa liên tục trên tại $\xi_x \neq O_x$.

Để chứng minh F_M nửa liên tục trên tại O_x chúng ta cố định W là lân cận compact tương đối trong M. Lấy bất kỳ metric Hecmit trên lân cận của $\overline{W}$.

Đặt

$$K = \{\xi_y \in T(M) : y \in \overline{W}; \|y\| = 1\}$$

Vì K là compact trong $T(M) \setminus O$ và F_M là nửa liên tục trên K suy ra F_M đạt cực đại A trên K, lấy $L > A$ với mọi $\varepsilon > 0$, đặt:

$$U = \left\{\xi_y \in T(M) : y \in W; \|y\| < \frac{\varepsilon}{L}\right\}$$

thế thì U là lân cận của O_x trong $T(M)$, vậy với mọi $\xi_y \in U \setminus O$ ta có:

$$F_M(\xi_y) = F_M\left(\|\xi_y\| \cdot \frac{\xi_y}{\|\xi_y\|}\right) = \|\xi_y\| \cdot F_M\left(\frac{\xi_y}{\|\xi_y\|}\right)$$

$$\le \frac{\varepsilon}{L} \cdot A < \varepsilon = F_M(O_x) + \varepsilon.$$

Suy ra F_M nửa liên tục trên tại O_x. Điều phải chứng minh.

1.2.7. Mệnh đề.

Cho M là đa tạp phức và S là tập con giải tích của M với $\operatorname{codim} S \ge 2$ thế thì $F_{M\setminus S} = F_M$ trên $M \setminus S$.

Chứng minh.

Cho $f : \Delta(r) \to M$ là ánh xạ chỉnh hình bất kỳ với $f(0) \neq S$.

Ta chỉ việc chỉ ra với mọi số $r' \in (0, r)$ tồn tại ánh xạ chỉnh hình $g : \Delta(r') \to M \setminus S$ sao cho $g'(0) = f'(0)$.

Đặt

$$M_1 = \Delta(r) \times M,\ S_1 = \Delta(r) \times S$$

và $f_1 : z \in \Delta(r) \mapsto (z, f(z)) \in M_1$ là ánh xạ đồ thị của *f*.

Theo bổ đề Royden vì f_1 là một phép nhúng nên tồn tại nhúng chỉnh hình địa phương $g_1 : \Delta(r') \times \Delta(1)^m \to M_1$ sao cho $g_1\big|_{\Delta(r') \times \{O\}} = f_1$ thế thì tập con giải tích $(g_1)^{-1}(S^1)$ của $\Delta(r') \times \Delta(1)^m$ có đối chiều ≥ 2 và không chứa 0.

Đặt

$$\Phi : \left(z, \left(\mathrm{w}^{\mathrm{i}}\right)\right) \in \Delta(r') \times \Delta\left(\frac{1}{r'^2}\right)^m \to \left(z, z^2 \mathrm{w}^{\mathrm{i}}\right) \in \Delta(r') \times \Delta(1)^m .$$

Các giá trị chính quy của Φ chỉ là 0 và do đó

$$codim \Phi^{-1}\left((g_1)^{-1}(S^1)\right) \geq 2 .$$

Gọi $p : \Delta(r') \times \Delta\left(\frac{1}{r'^2}\right)^m \to \Delta\left(\frac{1}{r'^2}\right)^m$ là phép chiếu tự nhiên thì $p^{-1}\left((g_1)^{-1}(S^1)\right)$ không chứa tập mở khác rỗng nào.

Lấy $\mathrm{w}_0 \in \Delta\left(\frac{1}{r'^2}\right)^m - p^{-1}\left((g_1)^{-1}(S^1)\right) \neq O,\ q : M_1 \to M$ là phép chiếu tự nhiên và đặt

$$g ; z \in \Delta(r') \mapsto q\left(g_1\left(z, z^2 \mathrm{w}_0\right)\right) \in M .$$

Rõ ràng $g(\Delta(r')) \cap S = \phi$ và $g'(0) = f'(0)$.

1.2.8. Định nghĩa

Giả sử *X* là một không gian phức, *x* và *y* là hai điểm tuỳ ý của *X*. *Hol(D,X)* là tập hợp tất cả các ánh xạ chỉnh hình từ *D* vào *X*, được trang bị tôpô compact mở. Xét dãy các điểm $p_0 = x$, p_1, ..., $p_k = y$ của *X*, dãy các điểm a_0 , a_1, ..., a_k của *D* và dãy các ánh xạ $f_0, f_1, \dots , f_k$ trong *Hol(D,X)* thoả mãn

$$f_i(0) = p_{i-1},\ f_i(a_i) = p_i,\ \forall i = 1,...,k.$$

Tập hợp $\alpha = \{p_0,..., p_k, a_1,..., a_k, f_1,..., f_k\}$ thoả mãn các điều kiện trên được gọi là một dây chuyền chỉnh hình nối *x* và y trong *X*.

Ta định nghĩa $d_X(x,y) = \inf\limits_{\alpha}\left\{\sum\limits_{i=1}^{k}\rho_D(0,a_i),\ \ \alpha \in \Omega_{x,y}\right\}$.

trong đó $\Omega_{x,y}$ là tập tất cả các dây chuyền chỉnh hình nối *x* và *y* trong *X* .

Khi đó $d_X : X \times Y \to \mathbb{R}$ là một giả khoảng cách trên *X* và gọi là giả khoảng cách Kobayashi trên không gian phức *X*.

Tổng $\sum\limits_{i=1}^{k}\rho_D(0,a_i)$ được gọi là tổng Kobayashi của dây chuyền chỉnh hình α .

Nếu *X* không liên thông, ta định nghĩa $d_X(x,y) = \infty$ với *x, y* thuộc các thành phần liên thông khác nhau.

1.2.9. Định nghĩa

Không gian phức *X* gọi là **không gian hyperbolic** (theo nghĩa Kobayashi) nếu giả khoảng cách Kobayashi d_X là khoảng cách trên *X*, tức là

$$d_X(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q\ \forall p,q \in X.$$

1.2.10. Định lý

Giả sử X là đa tạp phức, $x, y \in X$ *. Khi đó*

$$d_X(x,y) = \inf_{\gamma}\left\{\int_0^1 F_X\left(\dot{\gamma}(t)\right)dt\right\},$$

trong đó infimun được lấy theo tất cả các đường cong trơn từng khúc

$\gamma:[0,1]\to X$ *nối x với y và* $\dot{\gamma}(t)=\gamma_*\left((\partial/\partial t)_t\right)$.

Chứng minh.

Đặt

$$d_X^{'}(x,y)=\inf_{\gamma}\left\{\int_0^1 F_X\left(\dot{\gamma}(t)\right)dt\right\}.$$

Trước hết ta chứng minh tính chất giảm khoảng cách qua ánh xạ chỉnh hình của $d_X^{'}$.

Thật vậy, giả sử $f:X\to Y$ là ánh xạ chỉnh hình giữa các đa tạp phức. Ta chứng minh

$$d_Y^{'}\left(f(x),f(y)\right)\le d_X^{'}(x,y) \text{ với mọi } x,y\in X \quad (1)$$

Giả sử $\gamma:[0,1]\to X$ là đường cong C^∞ từng khúc nối *x* và *y* trong *X*.

Khi đó $f\circ\gamma:[0,1]\to Y$ cũng đường cong C^∞ từng khúc nối *f(x)* và *f(y)* trong *Y*. Từ đó ta nhận được (1).

Mặt khác, từ $F_D^2=ds^2$ ta có

$$d_{\mathrm{D}}^{'}=\rho_D=d_{\mathrm{D}} \qquad (2)$$

Từ đó theo định nghĩa của d_X ta suy ra

$$d_X(x,y)\ge d_X^{'}(x,y) \text{ với mọi } x,y\in X.$$

Để chứng minh chiều ngược lại, ta lấy $\varepsilon>0$ tuỳ ý. Khi đó có đường cong C^∞ từng khúc $\gamma:[0,1]\to X$ từ *x* tới *y* sao cho

$$\int_0^1 F_X\left(\dot{\gamma}(t)\right)dt<d_X^{'}(x,y)+\varepsilon\ .$$

Theo tính chất "Nếu X là đa tạp phức, thì F_X là hàm nửa liên tục trên TX. Nếu *X* là không gian phức hyperbolic đầy thì F_X liên tục" thì $F_X\left(\dot{\gamma}(t)\right)$ nửa liên tục tại *t* trong đó $\dot{\gamma}(t)$ là liên tục. Từ đó có hàm $h:[0,1]\to \mathbb{R}^+$ thoả mãn với phép chia

$$0=t_0<t_1<\ldots<t_l=1, \ (3)$$

Ta có

i) $h(t)>F_X\left(\dot{\gamma}(t)\right)\geq 0;$

ii) $h\Big|_{\left[t_{j-1},t_j\right)}, 1\leq j\leq l$ là các hạn chế của các hàm liên tục xác định trên các lân cận của $\left[t_{j-1},t_j\right]$*;*

iii) $\int\limits_0^1 F_X\left(\dot{\gamma}(t)\right)dt<\int\limits_0^1 h(t)dt<d'_X(x,y)+\varepsilon$.

Do tích phân $\int\limits_0^1 h(t)dt$ là tích phân Rieman nên tồn tại $\delta>0$ sao cho với mỗi phép chia $0=s_0\leq s_1\leq\ldots\leq s_k=1$ mà

$$max\left\{s_j - s_{j-1}; 1\leq j\leq k\right\}<\delta.$$

Và với mỗi $p_j\in[0,1];\ 1\leq j\leq k$ mà $\left|p_j-s_j\right|<\delta$ thì ta có

$$\sum_{j=1}^{k}h\left(p_j\right)\left(s_j-s_{j-1}\right)<d'_X(x,y)+\varepsilon. \ (4)$$

Lấy tuỳ ý điểm $p\in\left[t_{j-1},t_j\right], 1\leq j\leq l$. Trước hết giả sử rằng $\dot{\gamma}(p)=O_{\gamma(p)}$.

Lấy $\left(U,\phi,D^m\right)$ là hệ toạ độ địa phương chỉnh hình quanh $\gamma\left(p\right)$ với $\phi\left(\gamma\left(p\right)\right)=0$, trong đó $m=dimX$. Khi đó ta đặt

$$F=\phi^{-1}:D^m\to U\subset X.$$

Tiếp theo giả sử rằng $\dot{\gamma}\left(p\right)\neq O_{\gamma(p)}$. Khi đó có ánh xạ chỉnh hình $f:D_r\to X$ sao cho

$$f'(0)+\overline{f'(0)}=\dot{\gamma}\left(p\right),$$
$$F_X\left(\dot{\gamma}\left(p\right)\right)=2F_X\left(f'(0)\right),$$
$$F_X\left(f'(0)\right)<\frac{1}{r}<\frac{1}{2}h\left(p\right).$$

Lấy *r* đủ nhỏ, ta có ánh xạ chỉnh hình $F:D_r\times D^{m-1}\to X$ là song chỉnh hình địa phương quanh *O* thoả mãn

$$\frac{1}{r}<\frac{1}{2}h\left(p\right),F\left(O\right)=\gamma\left(p\right), \qquad (5)$$
$$F_*\left(\left(\partial/\partial z_1\right)_O\right)+\overline{F_*\left(\left(\partial/\partial z_1\right)_O\right)}=\dot{\gamma}\left(p\right).$$

Trong bất kỳ trường hợp nào ta cũng có lân cận I_p của *p* và đường cong C^∞ từng khúc $\alpha:I_p\to D_r\times D^{m-1}$ sao cho

$$\alpha\left(p\right)=O \text{ và } F\circ\alpha=\gamma\big|_{I_p}.$$

Với $s\in I_p,\alpha\left(s\right)=O\left(\left|s-p\right|^2\right)$ hoặc $\alpha\left(s\right)=\left(s-p,0,...,0\right)+O\left(\left|s-p\right|^2\right)$.

Từ (2) ta có khoảng mở I'_p trong I_p sao cho $p\in I'_p$ độ dài của I'_p nhỏ hơn δ và $d'_{D_r\times D^{m-1}}\left(\alpha\left(s\right),\alpha\left(s'\right)\right)\le\left(1+\varepsilon\right)\frac{2}{r}\left|s-s'\right|$

với $s, s' \in I_p^{'}$. Theo định nghĩa d ta có

$$d_{D_r \times D^{m-1}} = d_{D_r \times D^{m-1}}^{'}$$

Từ đó, theo tính chất giảm khoảng cách qua ánh xạ chỉnh hình của d_X và (5) ta nhận được

$$\begin{aligned} d_X\left(\gamma(s), \gamma(s')\right) &= d_X\left(F\left(\alpha(s)\right), F\left(\alpha(s')\right)\right) \\ &\le d_{D_r \times D^{m-1}}\left(\alpha(s), \alpha(s')\right) \le d_{D_r \times D^{m-1}}^{'}\left(\alpha(s), \alpha(s')\right) \quad (6) \\ &\le \left(1+\varepsilon\left|s\right) - s'\right| h(p) \end{aligned}$$

Vì $\left[t_{j-1}, t_j\right]$ là compact với $1 \le j \le l$, có số dương $\eta < \delta$ sao cho với bất kỳ $s, s' \in \left[t_{j-1}, t_j\right]$ mà $\left|s - s'\right| < \eta$, ta có $p \in \left[t_{j-1}, t_j\right]$ với $s, s' \in I_p^{'}$.

Thực hiện phép chia đoạn [0,1] như sau: $0 = s_0 < s_1 < ... < s_k = 1$ mà làm mịn của (3) và $\left|s_j - s_{j-1}\right| < \eta$ với mọi *j*. Lấy $p_j \in [0,1]$ sao cho $s_{j-1}, s_j \in I_{p_j}^{'}$.

Khi đó từ (4) và (6) ta có

$$\begin{aligned} d_X(x, y) = d_X\left(\gamma(0), \gamma(1)\right) &\le \sum_{j=1}^{k} d_X\left(\gamma\left(s_{j-1}\right), \gamma\left(s_j\right)\right) \\ \le \sum_{j=1}^{k} (1+\varepsilon)\left(s_j - s_{j-1}\right) h\left(p_j\right) &\le (1+\varepsilon)\left(d_X^{'}(x, y) + \varepsilon\right). \end{aligned}$$

Cho $\varepsilon \to 0$, ta nhận được $d_X(x, y) \le d_X^{'}(x, y)$.

Ta có điều phải chứng minh.

Chương 2

CÁC KHOẢNG CÁCH BẤT BIẾN VÀ CHUẨN EISENMAN TRÊN B^n

2.1. Các khoảng cách bất biến trên B^n

2.1.1. Định nghĩa

Cho $a,b \in B^n$, ta định nghĩa

$$\rho_n(a,b) = \|T_a(b)\| = \left\|\Gamma(a)\frac{b-a}{1-{}^t\bar{a}b}\right\|$$

$$= \left[1-\frac{\left(1-\|a\|^2\right)\left(1-\|b\|^2\right)}{\left|1-{}^t\bar{a}b\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\left|{}^t\bar{a}b\right|^2-\|a\|^2\|b\|^2+\|a-b\|^2}{\left|1-{}^t\bar{a}b\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Thường bỏ qua chỉ số dưới ta kí hiệu $\rho = \rho_n$.

2.1.2. Mệnh đề

ρ là khoảng cách trên B^n. Nó là bất biến đối với nhóm $Aut(B^n)$ và giảm qua các ánh xạ chỉnh hình từ B^n tới B^m. Tức là:

i) $\rho(a, b) = \rho(b, a)$,

ii) $\rho(a, b) = 0$ *khi và chỉ khi* $a = b$,

iii) $\rho(a, b) \le \rho(a, c) + \rho(c, b)$,

iv) $\rho(T(a), T(b)) = \rho(a, b)$ *với* $T \in Aut\left(B^n\right)$,

v) $\rho_m\left(f(a), f(b)\right) \le \rho_n(a,b)$ *với* $f: B^n \to B^m$ *là chỉnh hình.*

Chứng minh.

i) và *ii)* được suy ra từ Định nghĩa 2.2.1.

iv) Giả sử $S = T_{T(a)} \circ T \circ T_a^{-1}$. Khi đó $S(0) = T_{T(a)}\left(T(a)\right) = 0$.

Vì $S \in Aut\left(B^n\right)$ nên $S \in Aut_0\left(B^n\right) = U(n)$.

Khi đó ta có $T_{T(a)} \circ T = S \circ T_a$ và $\left\| T_{T_{(a)}}\left(T\left(b\right)\right) \right\| = \left\| S\left(T_a\left(b\right)\right) \right\| = \left\| T_a\left(b\right) \right\|$.

Từ đó kéo theo

$$\rho\big(T(a), T(b)\big) = \rho(a,b).$$

Do *iv)*, ta có thể giả thiết $c = 0$. Vì vậy để chứng minh *iii)* ta phải chứng minh $\left\| T_a\left(b\right) \right\| \le \|a\| + \|b\|$.

Trường hợp 1:

Giả sử $\left|1 - {}^t\bar{a}b\right| \ge 1$. Khi đó

$$\left\| T_a\left(b\right) \right\|^2 = \frac{\left|1 - {}^t\bar{a}b\right|^2 - \left(1 - \|a\|^2\right)\left(1 - \|b\|^2\right)}{\left|1 - {}^t\bar{a}b\right|^2}$$

$$\le \left|{}^t\bar{a}b\right|^2 + 2\left|{}^t\bar{a}b\right| - \|a\|^2\|b\|^2 + \|a\|^2 + \|b\|^2 \;(\text{Do } 2.1.1)$$

$$\le \left(\|a\| + \|b\|\right)^2 \quad (\text{vì } \left|{}^t\bar{a}b\right| \le \|a\|^2\|b\|^2).$$

Trường hợp 2:

Giả sử $\left|1 - {}^t\bar{a}b\right| < 1$. Ta có thể giả thiết rằng $\left\| T_a\left(b\right) \right\| > \|a\|$, từ 2.1.1 ta có

$$1 - \|a\|^2 < \frac{\left(1 - \|a\|^2\right)\left(1 - \|b\|^2\right)}{\left|1 - {}^t\bar{a}b\right|^2}, \text{ hoặc } \frac{1 - \|b\|^2}{\left|1 - {}^t\bar{a}b\right|^2} < 1.$$

Khi đó

$$\left\| T_a\left(b\right) \right\|^2 = 1 - \frac{\left(1 - \|a\|^2\right)\left(1 - \|b\|^2\right)}{\left|1 - {}^t\bar{a}b\right|^2}$$

$$< 1 + \|a\|^2 - \frac{\left(1 - \|b\|^2\right)}{\left|1 - {}^t\bar{a}b\right|^2}$$

$$< 1 + \|a\|^2 - 1 + \|b\|^2 \le \left(\|a\| + \|b\|\right)^2.$$

Vậy *iii*) được chứng minh.

v) Giả sử $g(z)=T_{f(a)}\circ f\circ T_a^{-1}(z)$. Khi đó $g:B^n\to B^m$ và $g(0)=0$, do đó theo bổ đề Schwars thì

$$\left\|g\left(T_a(b)\right)\right\|\le\left\|T_a(b)\right\|.$$

Vế phải chính là $\rho_n(a,b)$, và $\left\|g\left(T_a(b)\right)\right\|=\left\|T_{f(a)}\left(f(b)\right)\right\|=\rho_m\left(f(a),f(b)\right)$.

Mệnh đề được chứng minh hoàn toàn.

2.1.3. Khoảng cách hyperbolic trên B^n

Trước tiên ta nhắc lại một số khái niệm.

Cho (X,γ) là không gian metric. Với $A\subseteq X$ (hoặc $A\in X$) và $r\ge 0$.

Đặt

$$B_\gamma(A;r)=\left\{x\in X:\gamma(A,x)<r\right\} \text{ và } \overline{B}_\gamma(A;r)=\overline{B_\gamma(A;r)}.$$

(X,γ) gọi là đầy đủ khi $\overline{B}(a;r)$ là compact $\forall a\in X.$

Bất đẳng thức tam giác chỉ ra rằng

$$B\left(B(A;r);r'\right)\subset B\left(A;r+r'\right) \text{ với } r,r'\ge 0.$$

γ được gọi là cộng tính nếu đẳng thức xảy ra với mọi A,r,r'.

2.1.3.1. Định nghĩa

Metric Bergman trên B^n được định nghĩa bởi

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\overline{z}^i z^j+\left(1-\|z\|^2\right)\delta_{ij}}{\left(1-\|z\|^2\right)^2}\right)dz^i d\overline{z}^j.$$

Ta có ds^2 là metric Hermit trên B^n.

Với $u=\sum_{i=1}^{n}a^i\frac{\partial}{\partial z^i}$, $v=\sum_{j=1}^{n}b^j\frac{\partial}{\partial z^j}$ trong $\mathrm{T}_z\left(B^n\right)$, tích Hermit của *u* và *v* ứng với ds^2 kí hiệu là "$\langle u,v\rangle_z$" được xác định bởi

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle_z&=\left[a.\left(d\left(T_z\right)_z\right)\right].^t\overline{[b.d\left(T_z\right)_z]}\\&=\left\langle T_{z*}(u),T_{z*}(v)\right\rangle_0,\end{aligned}$$

trong đó $a = \left(a^1, ..., a^n\right)$ và $b = \left(b^1, ..., b^n\right)$.

Với $u \in T_z\left(B^n\right)$ và ta định nghĩa $\|u\|_z = \left(\langle u, u\rangle_z\right)^{\frac{1}{2}}$.

2.1.3.2. Mệnh đề

i) $\left\langle T(u), T(v)\right\rangle_{T_z} = \langle u, v\rangle_z$ *với* $u \in Aut\left(B^n\right)$.

ii) $\left\langle f_* u, f_* v\right\rangle_{f(z)} \leq \langle u, u\rangle_z$ *với* $f : B^n \to B^n$ *là chỉnh hình.*

Chứng minh.

i) Lấy $w = T(z)$. Khi đó $T_w\left(T(z)\right) = 0$, vì vậy $T_w \circ T = AT_z$ với $A \in U(n)$, hoặc $T = T_w^{-1} \circ A \circ T_z$.

Suy ra

$$\begin{aligned}
\left\langle T_* u, T_* v\right\rangle_w &= \left\langle T_{w*}\left(T_* u\right), T_{w*}\left(T_* v\right)\right\rangle_0 \\
&= \left\langle A_* \circ T_{z*}(u), A_* \circ T_{z*}(v)\right\rangle_0 \\
&= a\left(d\left(T_z\right)_z\right) A^t A^{-t} \left(\overline{d\left(T_z\right)_z}\right)^t b \\
&= \left\langle T_{z*} u, T_{z*} u\right\rangle = \langle u, v\rangle_z .
\end{aligned}$$

ii) Lấy $w = f(z)$ và $g = T_w \circ f \circ T_z^{-1}$, ta có *g(0) = 0.*

Nếu $v \in T_0\left(B^n\right)$ ta có

$$\langle g_* v, g_* v\rangle_0 = \|g_* v\|^2 \leq \|v\|^2 = \langle v, v\rangle_0 .$$

Cho $u \in T_z\left(B^n\right), v = T_{z*}(u) \in T_0\left(B^n\right)$ thì ta có

$$\begin{aligned}
\langle g_* v, g_* v\rangle_0 &= \left\langle T_{w*}\left(f_* u\right), T_{w*}\left(f_* u\right)\right\rangle_0 \\
&= \left\langle f_* u, f_* u\right\rangle_w \leq \langle v, v\rangle_0 \\
&= \left\langle T_{z*}(u), T_{z*}(u)\right\rangle_0 \leq \langle u, v\rangle_z .
\end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh.

2.1.3.3. Bổ đề

Cho $g : B^n \to B^n$ *là ánh xạ chỉnh hình, g(0) = 0 và* $u \in T_0\left(B^n\right)$. *Khi đó*

$$\|g_* u\| \le \|u\|.$$

Chứng minh.

Ta có thể lấy toạ độ sao cho $u = \frac{\partial}{\partial z^1}, r \ge 0$. Khi đó tồn tại $A \in U(m)$ sao cho

$$(A \circ g)_* u = A_* \circ g_* u = s\frac{\partial}{\partial z^1}, s \ge 0.$$

Vì $\|A_* g_* u\| = \|g_* u\|$, ta có thể giả thiết $g_* u = s\frac{\partial}{\partial z^1}$.

Giả sử $h(z) = g^1(z, 0..., 0), |z| < 1$. Ta có $h: B^1 \to B^1$ là chỉnh hình, $h(0) = 0$ và do Bổ đề Schwarz ta có $s = h'(0) \le 1$.

Vì vậy

$$\|g_*(u)\| = r\left\|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g^i}{\partial z^1}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial z^i}\right\| = rs \le r = \|u\|.$$ Bổ đề được chứng minh.

2.1.3.4. Mệnh đề

Cho $u = \sum_{i=1}^{k} a^i \frac{\partial}{\partial z}$, $v = \sum_{j=1}^{k} b^j \frac{\partial}{\partial z^j}$, *là các véc tơ tiếp xúc của* $B^k(r)$ *tại điểm z. Với* $u, v \in T_z B^k(r)$ *ta có*

$$\langle u,v\rangle_z = \frac{1}{r^2}\left[a\left(dg_z^r\right)_z\right]\left[{}^t\overline{b\left(dg_z^r\right)_z}\right] = \left\langle g_{z*}^r u, g_{z*}^r v\right\rangle_0,$$

ở đây $\langle u,v\rangle_z$ *là tích Hermit của u và v ứng với metric* ds^2, $a = \langle a^j\rangle, b = \langle b^j\rangle$ *là các ma trận cấp* $1 \times k$, $z = \langle z^j\rangle$ *là véc tơ cột.*

Chứng minh.

Ta có

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle_z = ds^2(u,v) &= \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\bar{z}^i z^j + \left(r^2 - \|z\|^2\right)\delta_{ij}}{\left(r^2 - \|z\|^2\right)^2} a^i \bar{b}^j \\ &= \frac{1}{\left(r - \|z\|^2\right)^2}\left(\sum_{i,j=1}^{k} \bar{z}^i z^j a^i \bar{b}^j + \left(r^2 - \|z\|^2\right) a \cdot {}^t\bar{b}\right).\end{aligned} \tag{1}$$

Mặt khác,

$$
\begin{aligned}
a\cdot\left(dg_z^r\right)_Z\cdot{}^t\overline{b\left(dg_z^r\right)_z} &= a\cdot\left(dg_z^r\right)_z\cdot{}^t\overline{\left(dg_z^r\right)_z}\cdot{}^t\overline{b}\\
&= a\cdot\left(\frac{r}{r^2-\|z\|^2}\right)^2\Gamma_r(z)\cdot{}^t\overline{\Gamma_r(z)}\cdot{}^t\overline{b}\\
&= \frac{r^2}{\left(r^2-\|z\|^2\right)^2}\cdot a\cdot\Gamma_r^2(z)\cdot{}^t\overline{b}\\
&= \frac{r^2}{\left(r^2-\|z\|^2\right)^2}\cdot a\cdot\left(z\cdot{}^t\overline{z}+\left(r^2-\|z\|^2\right)I\right)\cdot{}^t\overline{b} \qquad (2)\\
&= \frac{r^2}{\left(r^2-\|z\|^2\right)^2}\cdot\left[a\cdot z\cdot{}^t\overline{z}\,{}^t\overline{b}+\left(r^2-\|z\|^2\right)a\cdot{}^t\overline{b}\right]\\
&= \frac{r^2}{\left(r^2-\|z\|^2\right)^2}\left[\sum_{i,j=1}^{k}a^iz^i\overline{z}^j\overline{b}^j+\left(r^2-\|z\|^2\right)a\cdot{}^t\overline{b}\right].
\end{aligned}
$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\langle u,v\rangle_z=\frac{1}{r^2}\left[a\left(dg_z^r\right)_z\right]\cdot\left[{}^t\overline{b\left(dg_z^r\right)_z}\right].$$

Hơn nữa,

$$g_{z*}^r(u)=\sum_{j=1}^{k}a^jg_{z*}^r\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)=a\left(dg_z^r\right)_z\ ,$$

$$g_{z*}^r(v)=\sum_{j=1}^{k}b^jg_{z*}^r\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)=b\left(dg_z^r\right)_z.$$

Vì vậy

$$
\begin{aligned}
\left\langle g_{z*}^r(u),g_{z*}^r(v)\right\rangle_0 &= ds^2\left(g_{z*}^r(u),g_{z*}^r(v)\right)_0\\
&= \frac{1}{r^2}\left(\sum_{i,j=1}^{k}dz^id\overline{z}^j\right)\left(g_{z*}^r(u),g_z^r(v)\right)_0\\
&= \frac{1}{r^2}\left(a.\left(dg_z^r\right)_z\right).{}^t\overline{b\left(dg_z^r\right)_z}=\langle u,v\rangle_z.
\end{aligned}
$$

2.1.3.5. Mệnh đề

Với mỗi $h \in Aut(B^n(r))$ *ta có h là đẳng cự ứng với metric Bergman* ds^2 *trên* $B^n(r)$.

Chứng minh.

Ta chỉ ra rằng $h^* ds^2 = ds^2$, tức là với $u,v \in T_z\left(B^n(r)\right)$, ta có

$$\left\langle h_*(u), h_*(v)\right\rangle_{h(z)} = \langle u,v\rangle_z .$$

Thực vậy, giả sử $w=h(z)$. Khi đó $g_w^r(w)=0$.

Vậy $g_w^r \cdot h = A \cdot g_z^r$, với mỗi $A \in U(k)$ (do $g_w^r \cdot h \in Aut\left(B^n(r)\right)$ và 1.1.2.4). Vì vậy ta có:

$$\begin{aligned}\left\langle h_*(u), h_*(v)\right\rangle_w &= \left\langle g_{w*}^r h_*(u), g_{w*}^r h_*(v)\right\rangle_0 \\ &= \left\langle A_* g_{z*}^r(u), A_* g_{z*}^r(v)\right\rangle_0 \\ &= \left\langle g_{z*}^r(u), g_{z*}^r(v)\right\rangle_0 = \langle u,v\rangle_z .\end{aligned}$$

2.1.3.6. Mệnh đề

Cho $u_j = \sum_{i=1}^n a_j^i \frac{\partial}{\partial z^i}$ *là véctơ tiếp xúc của* $B^n(r)$ *tại điểm 0,* $u_j \in T_0\left(B^n(r)\right)$, $j=1,...,n$. *Khi đó*

$$det\left(\langle u_i,u_j\rangle_0\right) = det\left(A \cdot {}^t\bar{A}\right),$$

trong đó $A=\left(a_i^j\right) \in Mat\left(k,\mathbb{C}\right)$.

2.1.3.7. Định nghĩa

Metric ds^2 xác định một khoảng cách trên B^n như sau.

Với $z \in B^n, u \in T_Z\left(B^n\right)$ ta định nghĩa

$$\lambda_n^1(z,u) = \left(\langle u,u\rangle_Z\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Với $a,b \in B^n$ ta có

$\lambda_n(a,b) = \lambda_n^1(a,b) = inf\{\int_0^1 \lambda_n^1(\delta(t),\delta'(t))dt$, trong đó δ là đường cong trơn từng khúc nối *a* và *b* trong B^n}.

$\lambda(a,b) = \lambda_n^1(a,b)$ được gọi là là khoảng cách hyperbolic giữa *a* và *b* trong B^n

Chú ý.

Với mỗi *a* và *b* trong B^n tồn tại duy nhất đường cong δ nối *a* và *b* sao cho độ dài của nó lấy theo ds^2 xác định $\lambda(a,b)$. Đường cong này gọi là đường trắc địa giữa *a* và *b*.

Đường trắc địa giữa 0 và *b* chính là đường thẳng $\sigma(t) = tb, 0 \le t \le 1$.

2.1.3.8. Mệnh đề

i) $\lambda(Ta,Tb) = \lambda(a,b),\ T \in Aut(B^n)$.

ii) $\lambda_m(f(a), f(b)) \le \lambda_n(a,b)$, *với mọi* $f: B^n \to B^m$ *chỉnh hình và* $a,b \in B^n$.

Chứng minh. Được suy ra từ 2.1.3.2.

2.1.3.9. Hệ quả

Cho $i: B^m \to B^n,\ n \ge m$, *định nghĩa bởi*

$$i(z^1,...,z^m) = (z^1,...,z^m,0,...,0).$$

Khi đó với mỗi $a,b \in B^m$, *ta có* $\lambda_m(a,b) = \lambda_n(ia,ib)$.

Do đó nếu đồng nhất B^m *với* $i(B^m) \subset B^n$, *thì* λ_n *hạn chế trên* B^m *trùng với* λ_m.

Chứng minh.

Định nghĩa $\pi: B^n \to B^m$ bởi $\pi(z^1,...,z^n) = (z^1,...,z^m)$. Khi đó $\pi \circ i = id_{B^m}$ và

$$\begin{aligned}\lambda_m(a,b) &= \lambda_m(\pi i(a), \pi i(b))\\ &\le \lambda_n(i(a), i(b))\\ &\le \lambda_m(a,b).\end{aligned}$$

2.1.3.10. Mệnh đề

$$\lambda(a,b)=\frac{1}{2}log\frac{1+\rho(a,b)}{1-\rho(a,b)},$$

trong đó $\rho(a,b)$ *được xác định trong 2.1.1.*

Chứng minh.

Giả sử $b=0,\ a=(r,0,...,0),\ r\geq 0.$

Khi đó

$$\lambda(0,a)=\int_0^1\lambda_n^1(ta,a)dt=\int_0^1\frac{r^2}{1-t^2r^2}dt=\frac{1}{2}log\frac{1+r}{1-r}.$$

Nhưng $\rho(0,a)=\|a\|=r$. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

2.1.3.11. Hệ quả

$$1=\lim_{\rho(a,b)\to 0}\frac{\lambda(a,b)}{\rho(a,b)}=\lim_{\lambda(a,b)\to 0}\frac{\lambda(a,b)}{\rho(a,b)}.$$

Tiếp theo ta xét $B_\rho(a,r)$ với $0\leq r<1.$ Chú ý rằng với $r'=\frac{1}{2}log\frac{1+r}{1-r}$ ta có $B_\rho(a,r)=B_\lambda(a,r').$

2.1.3.12. Bổ đề

Cho $a=(s,0,...,0)\in B^n, 0\leq s<1,\ 0\leq r<1.$ *Giả sử* $z^i=x^i+iy^i,\ i=1,...,n$ *là các toạ độ Ơclit của* B^n. *Khi đó*

$$B_\rho(a,r)=\left\{z\in B^n:\left(x^1-\frac{s(1-r^2)}{1-r^2s^2}\right)^2+\left(y^1\right)^2+\frac{1-s^2}{1-r^2s^2}\sum_{i=2}^n\left|z^i\right|^2<\frac{r^2\left(1-s^2\right)^2}{\left(1-r^2s^2\right)^2}\right\}.$$

Chứng minh.

Ta có $\rho(a,z)<r$ khi và chỉ khi $\|T_a(z)\|^2<r^2.$ Ta xét với

$$T_a(z)=\left(\frac{z^1-s}{1-sz^1};-\frac{\sqrt{1-s^2}z^2}{1-sz^1};...;-\frac{\sqrt{1-s^2}z^n}{1-sz^1}\right).$$

Tính toán trực tiếp ta có điều phải chứng minh.

2.1.3.13. Hệ quả

Cho $a\in B^n$, $0\le r<1$. *Khi đó* $B_\lambda(a,r)$ *(hoặc* $B_\rho(a,r)$*) là lồi, và đối xứng qua đường thẳng* $\{ta,t\in\square\}$.

Chứng minh.

Nếu $a\in B^n$, tồn tại $A\in U(n)$ với $Aa=(\|a\|,0,...,0)$.

Khi đó

$$B_\lambda(a,r)=A^{-1}(B_\lambda(a,r)).$$

2.1.3.14. Mệnh đề

Tồn tại khoảng cách λ *trên* B^n *thoả mãn:*

i) λ *là tương đương tôpô với khoảng cách Ơclit.*

ii) $\lambda\big(f(a),f(b)\big)\le\lambda(a,b)$, *với* $f:B^n\to B^n$ *là ánh xạ chỉnh hình.*

iii) $B_\lambda(A;r+s)=B_\lambda\big(B_\lambda(A;r);s\big)$.

Khoảng cách λ *là duy nhất sai khác một hằng số nhân dương.*

Chứng minh.

Ta có λ thoả mãn *i), ii)* là hiển nhiên. λ thoả mãn *iii)* vì nó là khoảng cách Riemann và vì $B_\lambda(A,r)$ là compact tương đối nếu *A* là bị chặn.

Ta chứng minh tính duy nhất .

Giả sử γ là một khoảng cách trên B^n mà thoả mãn *i) ii)* và *iii)*. Lấy $e=(1,0,...,0)$. Với $0\le r<1$ xác định $h(r)=\gamma(0,re)$. Do *i)* ta suy ra *h* là liên tục. Do *ii),* γ là hoàn toàn xác định bởi *h*.

a) Ta chứng minh h là tăng chặt.

Cho $0 \le t \le 1$. Khi đó $z \mapsto tz$ là ánh xạ chỉnh hình từ B^n tới chính nó. Do đó theo *ii)* ta có $h(tr) \le h(r)$. Vậy h là không giảm. Nếu *h* là không tăng chặt thì có r_0 và s với $r_0 < r_0 + s < 1$ và $h(r_0 + t) = h(r_0)$ với $0 \le t \le s$. Vì γ là khoảng cách, $r_0 > 0$ và ta có thể giả thiết $h(r) < h(r_0)$ với $0 \le r < r_0$.

Với $n \in \mathbb{N}^+$, lấy $r_n < r_0$ sao cho

$$h(r_n) + \frac{1}{n} > h(r_0).$$

Điều này kéo theo $B_\gamma(0; h(r_0))$ là tập con của $B_\gamma\left(0; h(r_n) + \frac{1}{n}\right)$. Nhưng

vì *h* là không tăng nên ta có $B_\gamma\left(B_\gamma(0; h(r_n)); \frac{1}{n}\right) \subset B_\gamma\left(\{z \in B^n : \|z\| < r_0\}; \frac{1}{n}\right)$.

Với *n* đủ lớn ta có vế phải là tập con thực sự của

$\{z \in B^n : \|z\| < r_0 + s\} \subset B_\gamma(0; h(r_0 + s)) = B_\gamma(0; h(r_0))$. Do đó với *n* đủ lớn ta có $B_\gamma\left(B_\gamma(0; h(r_n)); \frac{1}{n}\right)$ là tập con thực sự của $B_\gamma\left(0; h(r_n) + \frac{1}{n}\right)$, điều này mâu thuẫn với *iii)*. Vậy *h* là tăng nghiêm ngặt.

b) Với $a \in B^n, s \ge 0, B_\gamma(a; s)$ là một elipsoid và do đó là lồi đối xứng qua đường thẳng $\{ta \mid t \in \mathbb{C}\}$.

Theo a) ánh xạ *h* có ánh xạ ngược *g*, với $z \in B^n$, $\gamma(0; z) < s$ nếu và chỉ nếu $h(\|z\|) < s$, tương đương với $\|z\| < g(z)$.

Với $a \in B^n$, ta có

$$\begin{aligned} B_\gamma(a; s) &= T_{-a}\left(B_\gamma(0; s)\right) \quad (\text{theo } ii)) \\ &= T_{-a}\left(\{z \in B^n : \|z\| < g(s)\}\right) \\ &= \{z \in B^n : \|T_a(z)\| < g(s)\}. \end{aligned}$$

Do đó b) được suy ra từ 2.1.3.13.

c) Giả sử $r, s \geq 0,\ r+s<1$. Khi đó

$$\gamma\left(0;(r+s)e\right)=\gamma\left(0;re\right)+\gamma\left(re;(r+s)e\right).$$

Giả sử $\gamma\left(0;(r+s)e\right)=\alpha, \gamma\left(0;re\right)=\beta$.

Khi đó $\alpha \geq \beta$ và từ *iii)* ta suy ra $B_\gamma\left(0;\alpha\right)=B_\gamma\left(B_\gamma\left(0;\beta\right);\alpha-\beta\right)$.

Vậy $\gamma\left(0;(r+s)e\right)\leq\gamma\left(0;y\right)+\gamma\left(y;(r+s)e\right)\leq\beta+\alpha-\beta=\alpha$.

Ta có

$$\gamma\left(0;y\right)=\beta,\ \gamma\left(y;(r+s)e\right)=\alpha-\beta.$$

Vì vậy

$$y\in\overline{B_\gamma\left(0;\beta\right)}\cap\overline{B_\gamma\left((r+s)e;\alpha-\beta\right)}=K.$$

Theo b) K là lồi, đối xứng qua đường thẳng $\{te\ |t\in\mathbb{R}\}$. Nếu K là điểm đơn *re* thì nó phải chứa một điểm trong của $B_\gamma\left(0;\beta\right)$, gọi là *y*’, do đó

$$\gamma\left(0;y'\right)<\beta, \gamma\left(y';(r+s)e\right)\leq\alpha-\beta.$$

Từ đó kéo theo $\gamma\left(0;(r+s)e\right)\leq\alpha$, điều này mâu thuẫn.

Vì vậy $y\in K=\{re\}$, hoặc $y = re$

và $\gamma\left(0;(r+s)e\right)=\gamma\left(0;re\right)+\gamma\left(re;(r+s)e\right)$.

d) $h(r+s)=h(s)+h\left(\dfrac{s}{1-r^2-rs}\right)$.

$$\begin{aligned}\gamma\left(re,(r+s)e\right)&=\gamma\left(0,T_{re}\left((r+s)e\right)\right) \quad \text{(do } ii\text{))}\\ &=\gamma\left(0,\frac{s}{1-r^2-rs}e\right)\\ &=h\left(\frac{s}{1-r^2-rs}\right).\end{aligned}$$

Từ đó c) kéo theo d).

e) h(r) là hằng số nhân của $\dfrac{1}{2}log\dfrac{1+r}{1-r}$.

Vì h là tăng chặt nên h là khả vi với hầu hết r. Gọi r_0 là một hằng số r như vậy. Khi đó

$$\frac{h\left(\frac{s}{1-r_0^2-r_0 s}\right)}{\frac{s}{1-r_0^2-r_0 s}}=\frac{h(r_0+s)-h(r_0)}{s}\left(1-r_0^2-r_0 s\right).$$

Vế trái có giới hạn, do đó vế phải cũng có giới hạn, tức là h khả vi tại 0.

Khi đó với bất kỳ $r\geq 0$ ta có

$$\frac{h(r+s)-h(r)}{s}=\frac{h\left(\frac{s}{1-rs-r^2}\right)}{\frac{s}{1-rs-r^2}\cdot\frac{1}{1-rs-r^2}}$$

và khi $s\to 0$ thì nó dần đến $\frac{h'(0)}{1-r^2}$.

Vậy $h'(r)$ tồn tại và bằng $\frac{h'(0)}{1-r^2}$.

Khi đó

$$h(r)=h'(0)\int_0^r\frac{dt}{1-t^2}\quad (\, h(0) = 0),$$

hoặc
$$h(r)=\frac{h'(0)}{2}log\frac{1+r}{1-r}.$$

Vì vậy

$$\gamma(a,b)=\frac{h'(0)}{2}log\frac{1+\rho(a,b)}{1-\rho(a,b)}=h'(0)\lambda(a,b).$$

Mệnh đề được chứng minh hoàn toàn.

2.2. Chuẩn Eisenman trên B^n

2.2.1. Định nghĩa

Cho $z\in B^n$ và $v_1,v_2,...,v_k\in T_z\left(B^n\right)$. Ta định nghĩa chuẩn Eisenman trên B^n như sau:

$$\lambda_n^k(z;v_1,...,v_k)=\left(det\left(Re\langle v_i,v_j\rangle_z\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ta thường viết $\lambda_n^k(z;v_j)$ thay cho $\lambda_n^k(z;v_1,...,v_k)$.

2.2.2. Mệnh đề

Cho $T\in Aut(B^n)$, $z\in B^n$ *và* $v_1,v_2,...,v_k\in T_z(B^n)$. *Khi đó*

$$\lambda_n^k(z;v_j)=\lambda_n^k(Tz;T_*v_j).$$

Chứng minh. Được suy ra từ Mệnh đề 2.1.3.2.

2.2.3. Mệnh đề

Cho $f:B^n\to B^n$ *là ánh xạ là chỉnh hình,* $z\in B^n$ *và* $v_1,v_2,...,v_k\in T_z(B^n)$.

Khi đó

$$\lambda_m^k(f(z),f_*v_j)\le\lambda_n^k(z;v_j).$$

Để chứng minh Mệnh đề trên ta cần các Bổ đề sau:

2.2.4. Bổ đề

Cho $v_j=\sum_{i=1}^n a_j^i\frac{\partial}{\partial z^i}$, $j=1,...,k$ *là các phần tử của* $T_0(B^n)$ *và* $A=(a_j^i)$.

Khi đó

i) $\lambda_n^k(0;v_1,...,v_k)=\left(det\left(ReA^t\overline{A}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

ii) Giả sử với m = 1,...,k, $u_m=\sum_{j=1}^k c_m^j v_j$ *và* $C=(c_j^i)$ *với* $c_j^i\in\mathbb{R}$. *Khi đó*

$$\lambda_n^k(0;u_j)=|detC|.\lambda_n^k(0;v_j).$$

Chứng minh.

i) $\langle v_i,v_j\rangle_0=\sum_{m=1}^n a_i^m\bar{a}_j^m$, $1\le i,j\le k$.

ii) $u_m=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^k c_m^j a_j^i\right)\frac{\partial}{\partial z^i}=\sum_{i=1}^n b_m^i\frac{\partial}{\partial z^i}$. Đặt $B=(b_m^i)$, $B=CA$. Khi đó

$$det\left(Re\left(B^t\overline{B}\right)\right)=det\left(Re\left(CA^t\overline{A}\overline{C}\right)\right)=\left(detC\right)^2 det\left(Re\left(A^t\overline{A}\right)\right).$$

Do C và $Re\left(A^t\overline{A}\right)$ là các ma trận cấp $k\times k$ và $Re\left(CA^t\overline{A}\overline{C}\right)=C\left(Re\left(A^t\overline{A}\right){}^tC\right)$.

2.2.5. Bổ đề

Nếu $z\in B^n$ *và* $v_1,v_2,...,v_k\in T_z\left(B^n\right)$ *là phụ thuộc tuyến tính trên* ℂ *thì*

$$\lambda_n^k\left(z;v_j\right)=0.$$

Chứng minh.

Do 2.2.2 ta có thể lấy $z = 0$. Giả sử $\sum_{j=1}^{k}\gamma^j v_j=0,\ \gamma^j\in\mathbb{C}$ và giả sử $\gamma^k\neq 0$.

Khi đó, với $1\le j\le k, 1\le i<k$ ta định nghĩa $c_k^j=\gamma^j$ và $c_i^j=\delta_i^j$. Rõ ràng $C=\left(c_i^j\right)$ là ma trận khả nghịch. Giả sử $u_i = v_i$, $1\le i<k$ và $u_k = 0$.

Khi đó $u_i=\sum_{j=1}^{k}c_i^j v_j$, và áp dụng Bổ đề 2.2.4 *ii)* cho ta

$$\lambda_n^k\left(0;v_j\right)=\left|detC\right|^{-1}\lambda_n^k\left(0;u_j\right).$$

Hơn nữa ta có $\lambda_n^k\left(0;u_j\right)=0$.

Do đó $\lambda_n^k\left(0;v_j\right)=0$. Bổ đề được chứng minh.

2.2.6. Bổ đề

Ta có $\lambda_n^k\left(z;v_1,...,v_k\right)\le\left\|v_1\right\|_z...\left\|v_k\right\|_z$.

Chứng minh.

Do 2.2.2 ta có thể lấy z = 0. Nếu $v_1,v_2,...,v_k$ là phụ thuộc tuyến tính trên ℂ thì bổ đề được suy ra từ Bổ đề 2.2.5.

Giả sử $v_1,v_2,...,v_k$ là ℂ - độc lập tuyến tính và giả sử L là ℂ - không gian vectơ span{$v_1,v_2,...,v_k$} trong $T_0\left(B^n\right)$. Xét L như là không gian vectơ thực với tích vô hướng định nghĩa bởi

$$(u,v)=Re\langle u,v\rangle_0$$

và cho $u_1, u_2, ..., u_k$ là cơ sở trực chuẩn của *L*.

Khi đó

$$v_j = \sum_{j=1}^{k} c_i^j u_j, c_i^j \in \mathbb{R} \text{ và } \|v_j\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \left(c_j^i\right)^2.$$

Đặt $C = \left(c_i^j\right)$. Khi đó

$$\lambda_n^k \left(0; v_j\right)^2 = \left(\det C\right)^2 \lambda_n^k \left(0; u_j\right) = \left(\det C\right)^2 \le \prod_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(c_j^i\right)^2 \right),$$

vì $(c_j^1, ..., c_j^k)$ là hàng thứ *j* của *C* và vì vậy

$$\lambda_n^k \left(0, v_j\right) \le \|v_1\| \; ... \|v_k\|.$$

Chứng minh Mệnh đề 2.2.3.

Do 2.2.2 ta có thể giả sử z = 0 và *f(0)=0*. Do 1.3.5 ta cũng có thể giả sử $v_1, v_2, ..., v_k$ độc lập tuyến tính trên $\mathbb{R}$.

Giả sử *L* là không gian tuyến tính thực sinh bởi $v_1, v_2, ..., v_k$, được xem như không gian vectơ với tích vô hướng $(u,v) = Re\langle u,v\rangle_0$. Giả sử $u_1, u_2, ..., u_k$ là cơ sở trực chuẩn của *L*.

Khi đó,

$$v_j = \sum_{j=1}^{k} c_j^i u_i \;,\; c_j^i \in \mathbb{R} \text{ và } \lambda_n^k \left(0; v_j\right) = |\det C|, \text{ ở đây } C = \left(c_j^i\right).$$

Do đó $f_* v_j = \sum_{i=1}^{k} c_j^i \left(f_* u_i\right)$, và ta có

$$\begin{aligned}
\lambda_n^k \left(0; f_* v_j\right)^2 &= \left(detC\right)^2 \lambda_n^k \left(0; f_* u_j\right)^2 && \text{(do 2.2.4)}\\
&\le \left(detC\right)^2 \| f_* u_1\|^2 ... \| f_* u_k\|^2 && \text{(do 2.2.6)}\\
&\le \left(detC\right)^2 \|u_1\|^2 ... \|u_k\|^2 && \text{(do 2.1.3.3)}\\
&= \left(detC\right)^2 && (\text{do } \|u_i\| = 1)\\
&= \lambda_n^k \left(0; v_j\right)^2.
\end{aligned}$$

Định lý được chứng minh.

Chương 3

CHUẨN EISENMAN TRÊN ĐA TẠP PHỨC

3.1. Các định nghĩa

Cho *M* là đa tạp phức *n* chiều, $p \in M$. Ta kí hiệu T_pM là không gian tiếp xúc chỉnh hình với *M* tại *p*, $TM = \bigcup_{p\in M} T_pM$ là phân thớ tiếp xúc chỉnh hình của *M*.

Gọi $\Lambda^k TM$ là tích ngoài k lần của TM.

Các phần tử phân tích được của $\Lambda^k T_pM$ (tương ứng $\Lambda^k TM$) được kí hiệu bởi D_p^kM (tương ứng D^kM) nghĩa là các phần tử có dạng $v_1 \wedge ... \wedge v_k$ với $v_i \in T_pM, i = 1,...,k$ sao cho $\{v_1,...,v_k\}$ độc lập tuyến tính. Khi đó D_p^kM là các không gian con phức k chiều của T_pM. Nếu $\langle\cdot\rangle$ là metric Hermit trên *TM*, nó có thể được mở rộng thành metric Hermit trên $\Lambda^k TM$ như sau:

Với $\alpha, \beta \in D_p^kM$, $\alpha = v_1 \wedge ... \wedge v_k$, $\beta = w_1 \wedge ... \wedge w_k$ thì

$\langle \alpha, \beta \rangle = det\{\langle v_i, w_j \rangle\}$ với $i,j = 1,...,k$ và mở rộng tuyến tính tới phần tử tuỳ ý của $\Lambda^k T_pM$.

Kí hiệu $\|\alpha\|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle$. Nếu α có một hướng vuông góc với tất cả các vectơ trong β thì $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$. Ta đồng nhất α với span$_{\mathbb{C}}$ $\{v_1,...,v_k\}$ và β với span$_{\mathbb{C}}$ $\{w_1,...,w_k\}$.

3.1.1. Định nghĩa

Ta gọi $\alpha, \beta \in D_p^kM$ là trực giao ngặt nếu bất kỳ một vectơ trong α đều trực giao mọi véctơ trong β.

3.1.2. Định nghĩa

Cho k là một số nguyên bất kì, $k = 1,...,n$, và giả sử $\alpha \in D_p^k M,\ p \in M$. Chuẩn nội tại Eisenman của α được định nghĩa bởi:

$E_k(p;\alpha) \equiv inf\{\|\gamma\|^2, \gamma \in D_0^k B_k$ và tồn tại ánh xạ chỉnh hình $f : B^k \to M$ sao cho $f(0) = p$ và $f_*(\gamma) = \alpha\}$.

3.2. Một số tính chất của E_k

3.2.1. Mệnh đề

$E_k(p;\alpha) = inf\{\ R^{-2k}$: *tồn tại ánh xạ chỉnh hình* $f : B^k(R) \to M$ *thoả mãn* $f(0) = p$ *và* $f_*\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{z_k}(0)\right) = \alpha\}$.

Chứng minh.

Đặt $E_k^1(p;\alpha) = inf\{\ R^{-2k}$: tồn tại ánh xạ chỉnh hình $f : B^k(R) \to M$ thoả mãn $f(0) = p$ và $f_*\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{z_k}(0)\right) = \alpha\ \}$.

$E_k^2(p;\alpha) = inf\{\|\gamma\|^2, \gamma \in D_0^k B^k$ và tồn tại ánh xạ chỉnh hình $f : B^k \to M$ sao cho $f(0) = p$ và $f_*(\gamma) = \alpha\ \}$.

Ta sẽ chứng minh $E_k^1(p;\alpha) = E_k^2(p;\alpha)$.

Trước hết ta chứng minh $E^1 \geq E^2$.

Xét ánh xạ chỉnh hình $f : B^k(R) \to M$ thoả mãn $f(0) = p$ và

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{z_k}(0)\right) = \alpha. \qquad (1)$$

Xét ánh xạ $\tilde{f} : B^k \to M; z \mapsto f(Rz)$. Ta có $\tilde{f}(0) = f(0) = p.$ Hơn nữa,

$$\tilde{f}_*\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{z_k}(0)\right) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial \tilde{f}}{z_k}(0) = \left(R.\frac{\partial f}{\partial z_1}\right) \wedge ... \wedge \left(\frac{R\partial f}{z_k}\right)(0)$$

$$= R^k.\frac{\partial f}{\partial z_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial f}{z_k}(0) = R^k.f_*\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{z_k}(0)\right) = R^k.\alpha.$$

Do đó

$$\tilde{f}_*\left(\frac{1}{R^k}\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge...\wedge\frac{\partial}{z_k}(0)\right)=\alpha;\ \text{ trong đó } \frac{1}{R^k}\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge...\wedge\frac{\partial}{z_k}(0)\in D_0^k B^k \text{ và}$$

$$\left\|\frac{1}{R^k}\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge...\wedge\frac{\partial}{z_k}(0)\right\|=\frac{1}{R^{2k}}\Rightarrow\frac{1}{R^{2k}}\geq E^2.$$

Vậy

$inf\{\ \frac{1}{R^{2k}}$ và tồn tại ánh xạ chỉnh hình $f:B^k\to M$ sao cho $f(0)=p$ và

$f_*(\gamma)=\alpha\}\geq E^2\Rightarrow E^1\geq E^2$.

Ngược lại ta chứng minh $E^1\leq E^2$.

Xét ánh xạ $\tilde{f}:B^k\to M$ sao cho $f(0)=p$ và $f_*(\gamma)=\alpha$ (2) trong đó $\gamma\in D_0^k B^k$ có dạng $\gamma=a\cdot\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge...\wedge\frac{\partial}{z_k}(0),\ a\in\mathbb{C}$.

Đặt $R=\frac{1}{\sqrt[k]{|a|}}\Rightarrow\frac{1}{R^{2k}}=|a|^2=\|\gamma\|^2$. Ta xây dựng ánh xạ chỉnh hình

$f:B^k(R)\to M$ với *r* là một căn bậc *k* của a, $|r|=\frac{1}{R}$.

Khi đó

$$\begin{aligned}f_*\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge...\wedge\frac{\partial}{z_k}(0)\right)&=\frac{\partial f}{\partial z_1}\wedge...\wedge\frac{\partial f}{z_k}(0)=r.\frac{\partial\tilde{f}}{\partial z_1}\wedge...\wedge r.\frac{\partial\tilde{f}}{z_k}(0)\\&=r^k.\frac{\partial\tilde{f}}{\partial z_1}\wedge...\wedge\frac{\partial\tilde{f}}{z_k}(0)=a.\tilde{f}_*\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge...\wedge\frac{\partial}{z_k}(0)\right)\\&=\tilde{f}_*(\gamma)=a.\end{aligned}$$

Nên $E^1\leq\frac{1}{R^{2k}}=\|\gamma\|^2\Rightarrow E^1\leq\inf\{\|\gamma\|^2$: thoả mãn (2)} = E^2.

Vậy $E^1=E^2$. Mệnh đề được chứng minh.

Ở trên nếu ta không yêu cầu $f(0)=p$ thì ta cần lấy chuẩn $\|\gamma\|^2$ ứng với mêtric Bergman trong B^n và sử dụng k-vectơ đơn vị lấy theo metric Bergman thay cho $\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{z_k}(0)$.

3.2.2. Mệnh đề

Khi $M\equiv\mathbb{C}^k$ *thì với* $\forall p\in M;\ \alpha\in D_p^k M$ *ta có* $E_k(p;\alpha)=0$.

Chứng minh.

Với mọi $R>0$, vì $M\equiv\mathbb{C}^k$ và $\alpha\in D_p^k\mathbb{C}^k$ nên α có dạng

$$\alpha=a\cdot\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial z_k}\quad \text{với } a\in\mathbb{C}.$$

Giả sử *r* là một căn bậc *k* của *a*.

Xét ánh xạ $f: B^k(R)\to M$

$$z\mapsto rz+p.$$

Rõ ràng *f* là ánh xạ chỉnh hình thoả mãn $f(0)=p$ và

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial z_k}(0)\right)=\frac{\partial f}{\partial z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial f}{\partial z_k}(p)$$

$$=r^k\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial z_k}(p)=a\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial z_k}(p)=\alpha.$$

Vậy $E_k(p;\alpha)\le\frac{1}{R^{2k}}$.

Cho $R\to\infty$ ta có $E_k(p;\alpha)=0$. Điều phải chứng minh.

3.2.3. Nhận xét

.) E_1 là bình phương metric Royden- Kobayashi (xem [8]).

*.) Nếu thay B^k trong vế phải định nghĩa E_k bởi B^l (với $l\ge k$) thì kết quả tương tự (*Xem 2.9 (ii) [5]).

.) Hàm $E_k : D_M^k \to [0,+\infty)$ *là nửa liên tục trên.*

Chứng minh.

Với $k = n$, Eisenman đã chứng minh trong bổ đề 2.5 [5].

Trường hợp tổng quát với *k* tuỳ ý được suy ra từ Royden (Xem [8])

.) Nói chung E_k *không liên tục* (xem[6]).

.) Với $k = n$, E_n có thể định nghĩa như sau:

Cho $(w_1,...,w_n)$ là toạ độ phức quanh $p \in M$. Khi đó

$E_n\left(p, \frac{\partial}{\partial w_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial w_n}(p)\right) = inf\left\{\left|Jf(0)\right|^{-2}\right.$: tồn tại ánh xạ chỉnh hình $f : B^n \to M$ sao cho $\left. f(0) = p\right\}$ ở đây Jf là kí hiệu của định thức Jacôbi của *f.*

3.3. Dạng thể tích trên đa tạp

3.3.1. Định nghĩa

$\tau_M(p) = E_n\left(p, \frac{\partial}{\partial w_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{w_n}(p)\right)\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n dw_1 \wedge d\overline{w_1} \wedge ... \wedge dw_n \wedge d\overline{w_n}$ được gọi là dạng thể tích nội tại trên đa tạp *M.*

3.3.2. Nhận xét

i) Dạng định nghĩa sau của τ_M chỉ ra rằng nó độc lập với việc chọn hệ toạ độ:

Giả sử $\theta_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n dz_1 \wedge d\overline{z_1} \wedge ... \wedge dz_n \wedge d\overline{z_n}$. Khi đó

$\tau_M(p) = inf\left\{(f^*)^{-1}\theta_n(0)\right.$: có ánh xạ chỉnh hình $f : B^n \to M$ sao cho $f(0) = p$ và $df(0)$ không suy biến }.

ii) Ta có thể dùng dạng thể tích của metric Bergman trên B^n thay cho θ_n trong định nghĩa trên.

3.3.3. Định nghĩa

Cho A là đa tạp con phức k chiều của một tập mở $U \subset M$ (gọi là đa tạp con phức địa phương của M) ta định nghĩa dạng thể tích nội tại τ_A^M trên A như sau:

Với $p \in A$ và $(w_1,...,w_k)$ là toạ độ địa phương quanh p sao cho $\frac{\partial}{\partial w_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\partial w_k}$ là tiếp xúc với A tại p.

Khi đó

$$\tau_A^M(p) = E_k\left(p; \frac{\partial}{\partial \mathrm{w}_1} \wedge ... \wedge \frac{\partial}{\mathrm{w}_k}(p)\right)\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^k d\mathrm{w}_1 \wedge d\overline{\mathrm{w}_1} \wedge ... \wedge d\mathrm{w}_k \wedge d\overline{\mathrm{w}}_k .$$

3.3.4. Nhận xét

Định nghĩa τ_A^M tương đương với

$\tau_A^M(p) = inf\left\{\left(f^*\right)^{-1}\theta_k(0):\right.$ có ánh xạ chỉnh hình $f: B^k \to M$ sao cho $f(0) = p$ và $df(0)$ không suy biến và $\left.df(T_0B_k) = T_pA\right\}$.

Điều này chứng tỏ định nghĩa 3.3.3 không phụ thuộc vào việc chọn bản đồ toạ độ địa phương $(w_1,...,w_k)$ quanh p.

Chú ý rằng E_k là nửa liên tục trên. Vì thế τ_A^M là $2k$-dạng khả tích trên A.

3.3.5. Định nghĩa

Thể tích nội tại của A được định nghĩa bởi

$$I_k(A) = \int_A \tau_A^M .$$

Đặc biệt thể tích nội tại của tập con mở U của M là

$$I_n(U) = \int_U \tau_M .$$

3.4. Độ đo Eisenman trên đa tạp

3.4.1. Định nghĩa

Tương ứng $A \to I_k A$ xác định một độ đo Borel trên mỗi đa tạp con phức k chiều của đa tạp M gọi là độ đo Eisenman. Trong [5] Eiseman đã đưa ra độ đo Borel khác trên mỗi tập A như sau:

Cho λ_k là độ đo Borel trên B^k, xác định bởi phép lấy tích phân lấy theo phần tử thể tích của metric Bergman trên B^k. Khi đó

$I_k^*(A) = inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_k(E_i)\right.$; với mọi $E_i \subset B^k$, và tồn tại ánh xạ chỉnh hình

$f_i : B^k \to M$ sao cho $\left. A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(E_i)\right\}$.

Chú ý rằng các độ đo I_k và I_k^* đều có tính chất giảm qua các ánh xạ chỉnh hình. Hơn nữa, trên B_n, có các hằng số $C_{n,k}$ sao cho $I_k^*(A) = C_{n,k} I_k(A)$.Với mỗi đa tạp con phức địa phương k chiều A của B_k (Xem [5] mệnh đề 1.5 và mệnh đề 2.4).

Tổng quát ta có:

3.4.2. Bổ đề

Trên đa tạp phức n chiều tuỳ ý ta có $I_k^* = C_{n,k} \cdot I_k$.

Với $n = k$, Bổ đề được chứng minh bởi Eisenman ([5], mệnh đề 2.13). Chứng minh tổng quát được lập luận tương tự như của Eisenman và áp dụng tính nửa liên tục trên của E_k.

3.5. Đa tạp hypebolic k- độ đo

3.5.1. Định nghĩa

Một đa tạp phức n chiều M được gọi là hyperbolic k-độ đo nếu với mỗi đa tạp con phức địa phương k chiều A của M, $A \neq \phi$ ta có $I_k^*(A) > 0$

Trường hợp $k = n$ thì M được gọi là hyperbolic độ đo.

Đa tạp M được gọi là hyperbolic k- độ đo mạnh nếu mỗi tập compact $K \subset M$ có hằng số dương c_K sao cho

$$E_k(p, \alpha) \geq c_K \|\alpha\|^2 \quad \text{với mọi } p \in K \text{ và mọi } \alpha \in D_p^k M .$$

Trường hợp $k = n$ thì M được gọi là hyperbolic độ đo mạnh.

Một đa tạp phức M được gọi là E_k hypebolic nếu $E_k(p,\alpha)\geq 0$ mỗi $p\in M$ và mỗi $\alpha\in D_p^k M$.

3.5.2. Định nghĩa

Đa tạp phức M được gọi là hầu hypebolic nếu tồn tại đa tạp con thực sự $V\subset M$ sao cho M là hypebolic tại mỗi điểm của $M\setminus V$, theo nghĩa với mỗi tập con compact K của $M\setminus V$ tồn tại một hằng số dương c_k sao cho

$$E_1(p,X)\geq c_k\|X\|^2, \forall p\in K, X\in T_pM .$$

3.6.Một số tính chất

3.6.1. Định lý

i) Cho $\phi: M\to N$ là ánh xạ chỉnh hình giữa các đa tạp phức có số chiều lớn hơn hoặc bằng k. Khi đó

$$E_k^N(\phi(p);d\phi(\alpha))\leq E_k^M(p;\alpha)\ \forall p\in M,\forall\alpha\in D_p^k M.$$

ii) Nếu M là hình cầu đơn vị B^n, $n\geq k$, thì

$$E_k^M(p,\alpha)=\|\alpha\|^2,$$

trong đó $\|\alpha\|$ kí hiệu chuẩn mêtric Bergman trên $B^{n.}$.

Chứng minh.

i) Lấy bất kì $p\in M$, và $\alpha\in D_p^k M$.

Giả sử có ánh xạ chỉnh hình $f: B^k\to M$, sao cho $f(0)=p,\ f_*(\gamma)=\alpha$ trong đó $\gamma\in D_0^k B^k$.

Vì $\phi: M\to N$ là ánh xạ chỉnh hình giữa hai đa tạp phức nên ta có $\phi\circ f: B^k\to N$ thoả mãn

$$\phi\circ f(0)=\phi(p) \text{ và } (\phi\circ f)_*(\gamma)=\phi_*(\alpha)=d\phi(\alpha).$$

Do đó khi lấy infimum theo f ta có

$$E_k^N\left(\phi(p);d\phi(p)\right)\le E_k^M\left(p;\alpha\right).$$

ii) Được suy ra từ định nghĩa của $E_k^M\left(p;\alpha\right)$ và Mệnh đề 2.3.3 (Chương 2).

3.6.2. Bổ đề

Cho $1\le k,\ l\le n$ *và cho* $\alpha\in\Lambda^k T_pM$, $\beta\in\Lambda^l T_pM$. *Khi đó*

$$\|\alpha\wedge\beta\|\le\|\alpha\|\cdot\|\beta\|.$$

Nếu cả α,β *đều là phân tích được và* $k+l\le n$, *dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi* α *trực giao với* β.

3.6.3. Định lý

Giả sử $1\le k<n=\dim M$. Nếu *M* là hyperbolic *k*-độ đo mạnh thì *M* là hyperbolic *(k+1)*- độ đo mạnh.

Chứng minh.

Lấy $\varepsilon>0$ bất kỳ.

Xét mêtric Hermit $\langle,\rangle$ trong *TM* rồi mở rộng lên T^lM (l =2,…,n).

Lấy $p\in M,\alpha\in D_p^{k+1}M$ sao cho $\|\alpha\|=1$.

Giả sử tồn tại ánh xạ chỉnh hình $f:B^{k+1}\to M$ sao cho $f\left(0\right)=p$ và $df\left(\gamma\right)=\alpha$ với $\gamma\in D_0^{k+1}B^{k+1}$ thoả mãn $\|\gamma\|=\varepsilon$. Vì $\|\gamma\|=\varepsilon$ và $\|df\left(\gamma\right)\|=1$, nên tồn tại một vectơ tiếp xúc *u* của B^{k+1} tại 0 sao cho $\|u\|=1$ và $\|df\left(u\right)\|\le\varepsilon^{\frac{-1}{k+1}}$.

Lấy $\gamma'\in D_0^kB^{k+1}$ sao cho nó trực giao với *u*. Đặt $\gamma=\gamma'\wedge u$. Ta có thể coi γ' như là không gian tiếp xúc của B^k tại 0. Do Bổ đề 3.6.2 ta có $\|\gamma'\|=\varepsilon$ và

$$\begin{aligned}1=\|df\left(\gamma\right)\|&=\|df\left(\gamma'\right)\wedge df\left(u\right)\|\\&\le\|df\left(\gamma'\right)\|\|df\left(u\right)\|\\&\le\|df\left(\gamma'\right)\|\varepsilon^{\frac{-1}{k+1}}.\\\Rightarrow\ \|df\left(\gamma'\right)\|&\ge\varepsilon^{\frac{1}{k+1}}.\end{aligned}$$

Do đó $\|\gamma'\| = \varepsilon$ và $\|df(\gamma')\| \geq \varepsilon^{\frac{1}{k+1}}$ nếu ta đặt $\eta = \varepsilon^{\frac{-1}{k+1}}\gamma'$, thì $\eta \in D_0^k B^{k+1}$, với $\|\eta\| = \varepsilon^{\frac{k}{k+1}}$ và $\|df(\eta)\| = 1$.

Nếu *M* không là hyperbolic (*k*+*1*)- độ đo chặt, thì ta lấy dãy các số ε dần tới 0. Khi đó dãy η thuộc $D_0^k B^{k+1}$ với $\|\eta\| = \varepsilon^{\frac{k}{k+1}}$ và $\|df(\eta)\| = 1$ mâu thuẫn với *M* là hyperbolic *k*- độ đo chặt. Định lý được chứng minh.

3.7. Trường hợp *k = 1*

3.7.1. Bổ đề

Cho M là một đa tạp phức hyperbolic, $p \in M$*. Khi đó tồn tại một hằng số dương* c_p *sao cho*

$$E_1(p;\alpha) > c_p,\ \forall \alpha \in T_pM, \|\alpha\| = 1.$$

Chứng minh.

Giả sử không tồn tại hằng số c_p như trên thì có các điểm $p_i \in M$, $\alpha_i \in T_pM$ với $p_i \to p$, $\alpha_i \to \alpha$ sao cho

$$\|\alpha_i\| = 1 \text{ và } E_1(p_i;\alpha_i) < \frac{1}{i}.$$

Theo định nghĩa của $E_1(p_i;\alpha_i)$ nên với mỗi *i* tồn tại ánh xạ chỉnh hình $f_i : B^1 \to M$ và $\gamma_i \in T_0(B^1)$ sao cho

$$f_i(0) = p_i,\ f_{i*}(\alpha_i) = \gamma_i \text{ và } \|\gamma_i\| < \frac{2}{i}.$$

Với $\varepsilon > 0$, tồn tại số $r > 0$ sao cho $\forall |z| < r, \forall g : B^1 \to M$ là chỉnh hình ta có $d_M(g(0); g(z)) \leq d(0,z) < \varepsilon$.

Suy ra

$$f_i(B^r) \subset B(p;2\varepsilon) \text{ với } i \text{ đủ lớn.}$$

Theo định lý Ascoli, tồn tại dãy con $\{i_k\} \subset \mathbb{N}$ sao cho $f_{i_k}\Big|_{B^r} \to g$ ở đó $g: B^r \to M$ là chỉnh hình.

Chúng ta có $g(0) = p$ và do f_{i_k} chỉnh hình nên $f_{i*_k} \to g_*$ và vì $\alpha_i \to 0 \Rightarrow f_{i_k*}(\alpha_i) \to g_*(0) = 0,$ như vậy $\gamma_i \to 0 \in T_pM$. Điều mâu thuẫn này đã chứng minh Bổ đề.

3.7.2 Định lý

Cho M là đa tạp phức thì M là E_1 – hyperbolic nếu và chỉ nếu M là hyperbolic theo nghĩa Kobayashi.

Chứng minh.

Đặt $E_1(p;\alpha) = E\ (p;\alpha)$. Ta biết rằng *M* là đa tạp hyperbolic nếu và chỉ nếu giả khoảng cách Kobayashi d_M là khoảng cách, trong đó

$$d_M(x;y) = \inf_{\gamma} \left\{ L_M(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(\gamma(t);\gamma'(t))}dt \right\} \text{ (Xem 1.4.8)}$$

Đa tạp *M* là E_1- hyperbolic nếu và chỉ nếu

$$E_1(p;\alpha) > 0, \left(\forall p \in M, \forall \alpha \in D_p^1 M = T_p^{\mathbb{C}} M\right).$$

$\gamma(t)$ là đường cong khả vi từng khúc nối *x, y* trong *M*.

$\gamma'(t) = \gamma_*\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\right)t\right)$ là một véc tơ tiếp xúc thực của $T_p^{\mathbb{R}} M$ thì $\alpha_p \in T_p^{\mathbb{C}} M$.

$\gamma'(t) = \alpha_p + \bar{\alpha}_p$ và chúng ta đặt $E(\gamma(t);\gamma'(t)) = 2E(\gamma(t);\alpha_p)$.

Điều kiện cần.

Ta có thể coi γ là trơn vì nếu không ta chia γ ra các đoạn nhỏ mà từng đoạn đó thì γ trơn từng khúc.

Cho $x \neq y \in M$, ta có

$$d_M(x;y) = inf\left\{\mathrm{L}_\mathrm{M}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(\gamma(t);\gamma'(t))}dt\right\}.$$

Tham số hoá γ theo độ dài cung $s = s(t)$ thì

$$\gamma'(s) = \gamma'(t)\frac{ds}{dt} \text{ và } \|\gamma'(s)\| = 1.$$

Do đó

$$\begin{aligned} d_M(x;y) &= inf\left\{\mathrm{L}_\mathrm{M}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(\gamma(t);\gamma'(t))}dt\right\} \\ &= inf\left\{\mathrm{L}_\mathrm{M}(\gamma) = \int_0^{l(\gamma)} \sqrt{E(\gamma(s);\gamma'(s))}ds\right\}. \end{aligned}$$

Theo Bổ đề 3.7.1, tồn tại lân cận U của x và hằng số $c > 0$ sao cho

$$E\ (q;\alpha) > c,\ \forall q \in U, \alpha \in T_pM, \|\alpha\| = 1.$$

Suy ra

$$d_M(x;y) > \int_0^\delta cds = c\cdot\delta > 0.$$

Vậy M là đa tạp hyperbolic.

Điều kiện đủ.

Ta cần chứng minh $E(p;\alpha) > 0, \forall p \in M, \forall\alpha \in T_pM$. Theo Bổ đề 3.7.1 ta có $E\ (p;\alpha) = \|\alpha\| E\left(p;\dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}\right) > 0$. Vậy định lý được chứng minh.

3.8. Công thức tích

3.8.1. Định lí

Cho M và N là đa tạp phức có số chiều tương ứng là m và n. Lấy $1 \le k \le m, 1 \le l \le n$, *và* $p \in M, q \in N$. *Giả sử* $\alpha \in D^{k+l}_{(p,q)}M \times N, \alpha = \beta\wedge\gamma$, *trong đó* $\beta \in D^k_pM$, $\gamma \in D^l_qN$ *thì*

$$E^{M\times N}_{k+l}((p,q);\alpha) = E^M_k(p,\beta)\times E^N_l(q,\gamma).$$

Chứng minh.

Đầu tiên ta chứng minh

$$E_{k+l}^{M\times N}\left((p,q);\alpha\right)\le E_k^M\left(p,\beta\right)\cdot E_l^N\left(q,\gamma\right).$$

Cho $\varepsilon>0$ bất kì, lấy $f_1:B^k\to M$ và $f_2:B^l\to N$ là các ánh xạ chỉnh hình sao cho $f_1(0)=p,\ f_2(0)=q$ và với $\mathrm{w}_1\in D_0^kB^k,\mathrm{w}_2\in D_0^lB^l$ ta có

$$df_1(\mathrm{w}_1)=\beta,\quad \|\mathrm{w}_1\|\le E_k^M\left(p,\beta\right)+\frac{1}{2}\varepsilon;$$
$$df_2(\mathrm{w}_2)=\beta,\quad \|\mathrm{w}_2\|\le E_l^N(q,\gamma)+\frac{1}{2}\varepsilon.$$

Có thể coi $B^{k+l}\subset B^k\times B^l$. Khi đó ta có $\mathrm{w}_1\wedge\mathrm{w}_2\in D_0^{k+l}B^{k+l}$ và

$$f\equiv\left(f_1,f_2\right):B^{k+l}\to M\times N$$

là ánh xạ chỉnh hình sao cho $f\left(0\right)=\left(p,q\right),df\left(\mathrm{w}_1\wedge\mathrm{w}_2\right)=\alpha$.

Vì $\|\mathrm{w}_1\wedge\mathrm{w}_2\|=\|\mathrm{w}_1\|\cdot\|\mathrm{w}_2\|$ nên ta có

$$\begin{aligned}E_{k+l}^{M\times N}\left((p,q);\alpha\right)&\le\|\mathrm{w}_1\wedge\mathrm{w}_2\|^2=\|\mathrm{w}_1\|^2\|\mathrm{w}_2\|^2\\&\le E_k^M\left(p,\beta\right)E_l^N\left(q,\gamma\right)+O(\varepsilon).\end{aligned}$$

Trong đó $O(\varepsilon)\to0$ khi $\varepsilon\to0$. Vậy $E_{k+l}^{M\times N}\le E_k^M\cdot E_l^N$.

Ngược lại, ta chứng minh

$$E_k^M\left(p,\beta\right)\wedge E_l^N\left(q,\gamma\right)\le E_{k+l}^{M\times N}\left((p,q);\alpha\right).$$

Giả sử $f:B^{k+l}\to M\times N$ là ánh xạ chỉnh hình sao cho $f\left(0\right)=\left(p,q\right)$ và $\mathrm{w}\in D_0^{k+l}B^{k+l}$. Ta có

$$df\left(\mathrm{w}\right)=\alpha\text{, trong đó }\quad\|\mathrm{w}\|^2\le E_{k+l}^{M\times N}\left((p,q);\alpha\right)+\varepsilon.$$

Vì $\mathrm{w}\in D_0^{k+l}B^{k+l}$ nên w có dạng

$$w=a\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial z_{k+l}}(0)\right)$$

với $a\in\mathbb{C},a\neq0$ nào đó. Ta có $|a|=\|\mathrm{w}\|$.

www.VNMATH.com

Nếu cần bằng phép biến đổi unita trên $\mathbb{C}^{k+1}$ (và trên B^{k+1}). Ta có thể giả thiết $df\left(b\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial z_k}(0)\right)=\beta$ với $b\in\mathbb{C}, b\neq 0$.

Vì $\beta\wedge\gamma=\alpha=df(w)$

$$=df\left(b\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial z_k}(0)\right)\wedge df\left(b\frac{\partial}{\partial z_{k+1}}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial z_{k+l}}(0)\right)$$

$$=\beta\wedge df\left(\frac{a}{b}\frac{\partial}{\partial z_{k+1}}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial z_{k+l}}(0)\right),$$

nên ta có

$$df\left(\frac{a}{b}\frac{\partial}{\partial z_{k+1}}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial z_{k+l}}(0)\right)=\gamma. \qquad (*)$$

Giả sử $i_1: B^k\to B^{k+l}, i_2: B^l\to B^{k+l}$ là các phép nhúng cảm sinh bởi phép nhúng chính tắc $\mathbb{C}^k\equiv\mathbb{C}^k\times\{0\}\subset\mathbb{C}^{k+l}$ và $\mathbb{C}^l\equiv\mathbb{C}^l\times\{0\}\subset\mathbb{C}^{k+l}$.

Gọi $\pi_1: M\times N\to M, \pi_2: M\times N\to N$ là các phép chiếu chính tắc. Nếu $f_1=\pi_1\circ f\circ i_1$ và $f_2=\pi_2\circ f\circ i_2$ thì $f_1: B^k\to NM, f_2: B^l\to N$ là các ánh xạ chỉnh hình thoả mãn $f_1(0)=p$, $f_2(0)=q$ và theo (*) ta có

$$df_1\left(b\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial z_k}(0)\right)=\beta,$$

$$df_2\left(\frac{a}{b}\frac{\partial}{\partial z_1}\wedge\ldots\wedge\frac{\partial}{\partial z_l}(0)\right)=\gamma.$$

Vì vậy

$$E_k^M(p,\beta)\cdot E_l^N(q,\gamma)\leq|b|^2\left(\frac{a}{b}\right)^2=|a|^2=\|w\|^2$$
$$\leq E_{k+l}^{M\times N}((p,q);\alpha)+\varepsilon.$$

Cho $\varepsilon\to 0$ ta được điều phải chứng minh.

www.VNMATH.com

KẾT LUẬN

Luận văn nghiên cứu về chuẩn Eisenman trên đa tạp phức và đã đạt được một số kết quả sau:

1. Trình bày được một số khoảng cách bất biến trong B^n và một số các tính chất của chúng.
2. Trình bày khái niệm chuẩn Eisenman trên B^n và chứng minh được tính chất giảm của chuẩn Eisenman qua các ánh xạ chỉnh hình (Mệnh đề 2.2.3.).
3. Trình bày khái niệm chuẩn Eisenman trên đa tạp phức và chứng minh được một định nghĩa tương đương với khái niệm này (Mệnh đề 3.2.1.). Đồng thời chứng tỏ chuẩn Eisenman trên $\square^{k}$ luôn bằng 0 (Mệnh đề 3.2.2.).
4. Trình bày các khái niệm dạng thể tích trên đa tạp, độ đo Eisenman trên đa tạp, đa tạp hyperbolic k- độ đo.
5. Chứng minh một số tính chất của chuẩn Eisenman trên đa tạp như tính chất giảm qua ánh xạ chỉnh hình (Định lí 3.6.1.), tính chất tích (Định lí 3.8).
6. Trình bày trong trường hợp k=1 thì tích E_1 – hyperbolic tương đương với tính hyperbolic theo nghĩa Kobayashi của một đa tạp phức.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Phạm Việt Đức, *Mở đầu về lý thuyết các không gian phức hyperbolic*, NXB ĐHSP, 2005.

[2] Nguyễn Đức Minh, *Về tính E_k- hyperbolic của đa tạp phức*, Luận văn thạc sĩ Toán học, ĐHSP Hà Nội, 2006.

[3] Đỗ Đức Thái, *Cơ sở Lý thuyết hàm Hình học*, NXB ĐHSP, 2003.

[4] Nguyễn Doãn Tuấn và Nguyễn Thị Thảo, *A High-Dimensional version of the Brody parametrization Lema,* Proceedings of CFCA.Vol.5,2001, 163-175.

[5] A Eisenman, *Intrinsic measures on complex manifold and holomorphic mappings,* Mem.Amer.Math.Soc.No.96. Amer.Math.Soc Provindence, R.I, 1970.

[6] Ian Graham and H. Wu, *Some remarks on the intrinsic measures of Eisenman,* Tran.Amer.Math.Soc.Vol.288, No2, April 1985.

[7] IanGraham, *Intrinsic measures and holomorphic retracts,Parafic journal of mathematics*.Vol 130, No 2, 1987.

[8] J.Nuguchi and T.Ochiai (1990), *Geometric Function Theory in Several Complex Variables*,Translation ò Math. Monographs, Amer. Math. Soc.,80.