Các phương pháp biến đổi hệ tuần tự thành hệ song song và ứng dụng trong kỹ thuật phần mềm và truyền tin bằng máy vi tính. Một vài vấn đề về phụ thuộc logic trong cơ sở dữ liệu quan hệ và độ phức tạp otomat của biểu thức chính quy suy rộng.

Số đăng ký : B 93 -05 - 73

Tên các cán bộ phối hợp:

1. GVC Vũ Ngọc Loãn
2. GVC Lê Đức Minh

BÁO CÁO TÓM TẮT

Đề tài thực hiện nghiên cứu ba vấn đề:

1. Các phương pháp biến đổi hệ tuần tự thành hệ song song.
2. Một số vấn đề về phụ thuộc logic trong cơ sở dữ liệu quan hệ.
3. Độ phức tạp otomat đoán nhận của các siêu ngôn ngữ.

Về vấn đề thứ nhất đề tài đã xây dựng được phương pháp biến đổi từ hệ tuần tự thành hệ song song, để biến đổi việc xử lý thông tin từ đơn lẻ tại mỗi thời điểm chuyển sang khả năng xử lý thông tin nhiều chiều, đa xử lý trong mỗi thời điểm và do đó mà tăng được tốc độ xử lý thông tin.

Về vấn đề thứ hai đề tài đã góp phần giải quyết các vấn đề về việc xây dựng quan hệ Armstrong trong lớp phụ thuộc Boolean dương tổng quát và xác định số bộ của quan hệ Armstrong tối thiểu bằng cách đưa ra khẳng định đối với một tập Σ các quan hệ phụ thuộc Boolean tổng quát cho trước có tồn tại quan hệ Armstrong hay không, đưa ra thuật toán tìm quan hệ thu gọn của một quan hệ Armstrong trong trường hợp khi tất cả các miền trị của các thuộc tính không có phần tử trung hoà, khẳng định về sự tồn tại của quan hệ Armstrong trong trường hợp khi tất cả các miền trị có phần tử trung hoà.

Mặt khác, đề tài cũng nghiên cứu về logic đa trị. Dựa vào logic đa trị có thể đưa ra một số khái niệm và kết quả liên quan đến lớp phụ thuộc Boolean đa trị...

Đối với vấn đề thứ ba, đề tài đã xây dựng được các dãy biểu thức chính quy suy rộng mà siêu ngôn ngữ do chúng xác định đòi hỏi độ phức tạp đoán nhận cao. Cụ thể là, đối với các số tự nhiên tuỳ ý s, t có thể xây dựng được dãy các biểu thức chính quy suy rộng $C_{s,t,n}$ trong bảng chữ cái ba ký hiệu mà:

1. Với số tự nhiên n tuỳ ý, biểu thức $C_{s,t,n}$ chứa t dấu phần bù và có độ dài không vượt quá n;

2. Với hằng số tuỳ ý $c > 2^s$, khi n đủ lớn, số trạng thái của otomat đơn định tối tiểu đoán nhận siêu ngôn ngữ do $C_{s,t,n}$ xác định có số trạng thái không ít hơn

$$\left.b^{b^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{b}}}}}\right\}(t+1)\text{ lần}\quad{}^{\frac{n}{c\log_2 n}}$$

trong đó:

$$b = \sqrt{\frac{(2^s)^{2^s}}{(2^s-1)^{2^s-1}}}$$

MỤC LỤC

	Trang
Phần báo cáo chính	1
Mở đầu	1
Biến đổi hệ tuần tự thành hệ song song	3
Một vài vấn đề về phụ thuộc logic trong cơ sở dữ liệu quan hệ	4
Độ phức tạp của biểu thức chính quy suy rộng	7
Kết luận	9
Tài liệu tham khảo	10
Phụ lục	11

PHẦN BÁO CÁO CHÍNH

I. Mở đầu.

Đề tài thực hiện việc nghiên cứu về ba vấn đề:

Các phương pháp biến đổi hệ tuần tự thành hệ song song;
Phụ thuộc logic trong các cơ sở dữ liệu quan hệ;
Độ phức tạp của biểu thức chính qui suy rộng.

Vấn đề sử dụng máy vi tính để xử lý và truyền dữ liệu luôn luôn là bài toán lớn nhất cả về lý thuyết và thực tế, trong đó vấn đề tăng tốc để xử lý và truyền tin là một vấn đề luôn được quan tâm.

Về hướng này đề tài đã xây dựng được phương pháp biến đổi từ hệ tuần tự thành hệ song song, để biến đổi việc xử lý thông tin từ đơn lẻ tại mỗi thời điểm chuyển sang khả năng xử lý thông tin nhiều chiều, đa xử lý trong mỗi thời điểm và do đó mà tăng được tốc độ xử lý thông tin.

Việc nghiên cứu các loại phụ thuộc dữ liệu có vai trò quan trọng để đảm bảo tính nhất quán của dữ liệu. Phụ thuộc Boole và sự mở rộng nó trong mô hình quan hệ đã thực sự được nhiều người quan tâm. Trong [1] đã giới thiệu về họ các phụ thuộc này và một số tính chất cơ bản của chúng. Tiếp theo [2, 3] đã phát triển các kết quả đối với các phụ thuộc Boole dạng tổng quát. Trong [4] các tác giả đã chỉ ra định lý tương đương về tính dẫn được trong lớp các quan hệ có số bộ tuỳ ý cũng như trong lớp các quan hệ chỉ bao gồm có hai bộ hay trong logic mệnh đề đối với lớp phụ thuộc Boole dương tổng quát và đưa ra điều kiện cần và đủ để một quan hệ là quan hệ Armstrong đối với lớp này, đồng thời xuất hiện hai vấn đề cần giải quyết:

1. Trong lớp phụ thuộc Boole dương tổng quát quan hệ Armstrong xây dựng như thế nào ?
2. Số bộ của quan hệ Armstrong tối thiểu ?

Đề tài đã góp phần giải quyết hai vấn đề trên, đã khẳng định được quan hệ Armstrong có luôn luôn tồn tại hay không đối với một tập Σ các quan hệ phụ thuộc Boole tổng quát cho trước, trình bày thuật toán tìm quan hệ thu gọn của một quan hệ Armstrong trong trường hợp khi tất cả các miền trị của các thuộc tính không có phần tử trung hoà, khẳng định về sự tồn tại của quan hệ Armstrong trong trường hợp khi tất cả các miền trị có phần tử trung hoà, trình bày thuật toán tìm quan hệ Armstrong trong trường hợp này, và chỉ ra rằng quan hệ Armstrong tìm được là tối tiểu.

Mặt khác, đề tài cũng nghiên cứu về một kiểu logic đa trị, mà nó là sự mở rộng tự nhiên của khái niệm logic hai trị thông thường. Dựa vào logic đa trị này có thể đưa ra một số khái niệm và kết quả liên quan đến lớp các phụ thuộc Boole đa trị, mà những điều này là sự mở rộng thực sự của một số khái niệm và kết quả đã có như đối với các bài toán thành viên, quan hệ Armstrong ...

Độ phức tạp, tức là số trạng thái của một otomat đơn định tối tiểu đoán nhận ngôn ngữ cũng như siêu ngôn ngữ là một vấn đề luôn được quan tâm. Theo hướng này đề tài đã xây dựng được các biểu thức chính quy suy rộng, mà otomat đoán nhận siêu ngôn ngữ do nó xác định có độ phức tạp cao.

II. Biến đổi hệ tuần tự thành hệ song song.

Vấn đề sử dụng máy vi tính để xử lý và truyền dữ liệu luôn là bài toán lớn cả về lý thuyết và thực tế, trong đó vấn đề tăng tốc độ xử lý và truyền tin là một vấn đề luôn được quan tâm.

Đề tài đã xây dựng được phương pháp biến đổi từ hệ tuần tự thành hệ song song, để biến đổi việc xử lý thông tin , từ đơn lẻ tại mỗi thời điểm chuyển sang khả năng xử lý thông tin nhiều chiều, đa xử lý trong mỗi thời điểm. Điều này thể hiện khía cạnh tăng tốc độ để xử lý thông tin và truyền tin bằng máy tính điện tử.

Bên cạnh đó , đề tài đã bước đầu xây dựng được các mô hình biểu diễn hệ thống là các hệ lưới và các hệ đồng thời, nhằm để tăng tốc độ xử lý và truyền tin của máy tính điện tử.

Đây là những kết quả có ý nghĩa về mặt lý thuyết , song cũng thể hiện khả năng ứng dụng có hiệu quả tốt trong lĩnh vực truyền tin .

III. Một vài vấn đề về phụ thuộc lôgic trong cơ sở dữ liệu quan hệ.

Như chúng ta đã biết một cơ sở dữ liệu chính là một tập các dữ liệu về các đối tượng cần được quản lý, được lưu trữ trên các thiết bị mang tin của máy tính điện tử và được quản lý theo một cơ chế thống nhất nhằm thực hiện có hiệu quả các chức năng như : Tạo lập, cập nhật và khai thác dữ liệu ...

Để tổ chức lưu trữ, quản lý và khai thác dữ liệu người ta thường có thể sử dụng một số mô hình như mô hình phân cấp, mô hình mạng và mô hình quan hệ.

Trong số ba mô hình cho việc tổ chức và khai thác các cơ sở dữ liệu đó thì mô hình quan hệ được quan tâm hơn cả. Sở dĩ mô hình quan hệ được quan tâm như vậy là vì nó được xây dựng trên một cơ sở toán học chặt chẽ - đó là lý thuyết về các quan hệ có áp dụng rộng rãi các công cụ đại số và lôgic. Trong CSDL quan hệ các quan hệ có hình ảnh trực quan khá gần gũi với quan niệm của người sử dụng về các bảng biểu thông thường.

Trong mô hình quan hệ, việc nghiên cứu các ràng buộc dữ liệu là một vấn đề cần thiết, có ý nghĩa và giữ một vai trò quan trọng trong việc đảm bảo tính nhất quán dữ liệu.

Mục đích của việc nêu ra khái niệm phụ thuộc dữ liệu là nhằm bảo đảm cho dữ liệu trong cơ sở dữ liệu không mâu thuẫn, phản ánh đúng thế giới hiện thực, tránh được dư thừa.

Cho đến nay đã có nhiều loại phụ thuộc dữ liệu khác nhau. Điều đó là hợp lý bởi vì thực tế là đa dạng và phong phú do đó sự ràng buộc của dữ liệu phản ánh các đối tượng thực tế cũng rất đa dạng, phong phú và phức tạp.

Vì thế , sự quan tâm ở đây là tiếp tục nghiên cứu các ràng buộc dữ liệu hay còn gọi là các phụ thuộc dữ liệu trong mô hình quan hệ.

Như chúng ta đã biết, loại phụ thuộc dữ liệu đầu tiên là các phụ thuộc hàm được giới thiệu bởi E.F. Codd vào năm 1970.

Tiếp theo các tác giả J. Demetrovics, Gy. Gyepesy đã đề xuất các lớp phụ thuộc mạnh, lớp phụ thuộc mạnh (PTM), lớp phụ thuộc yếu (PTY), lớp phụ thuộc đối ngẫu (PTĐN), năm 1981.

Cũng trong năm 1981, nhóm nghiên cứu Y. Sagiv, C. Delobel, D.S. Parker, R. Fagin đã giới thiệu họ các phụ thuộc Boole.

Sau đó J. Berman and W.J. Block đã giới thiệu một lớp các PTCB. Lớp này cũng bao hàm lớp các PTH, PTM, PTY, PTĐN, năm 1990.

Vào năm 1992, các tác giả Nguyễn Xuân Huy and Lê Thị Thanh đề cập đến một lớp phụ thuộc mới, đó là lớp các phụ thuộc Boole dương tổng quát (PTBDTQ). Điều đáng lưu ý là lớp này cũng bao hàm lớp các phụ thuộc cân bằng.

Trên cơ sở đó mục tiêu của việc nghiên cứu ở đây là tiếp tục mở rộng và phát triển lớp các phụ thuộc Boole theo những khía cạnh khác nhau.

Trong công trình của các tác giả Nguyễn Xuân Huy và Lê Thị Thanh đã chỉ ra định lý tương đương về tính dẫn được trong lớp các quan hệ có số bộ tùy ý cũng như trong lớp các quan hệ chỉ bao gồm có hai bộ hay trong lôgic mệnh đề đối với lớp phụ thuộc Boolean dương tổng quát. Ở đó các tác gia đưa ra điều kiện cần và đủ để một quan hệ là quan hệ Armtrong đối với tập Σ và đã nêu ra hai vấn đề : hãy xây dựng quan hệ Armstrong cho tập Σ các phụ thuộc Boolean dương tổng quát và hãy cho một đánh giá về số bộ của quan hệ Armstrong tối thiểu.

Trên tinh thần đó , để thực hiện đề tài trong công trình " Về sự biểu diễn các tập phụ thuộc Boole dương tổng quát " của tác giả Vũ Ngọc Loãn, Tạp chí Khoa học N7,1994 , Đại học Tổng hợp Hà nội nhằm góp phần giải quyết các vấn đề đã nêu và đề cập đến một vài khía cạnh khác. Bài viết gồm 3 phần . Phần đầu giới thiệu chung. Phần hai đưa ra một số định nghĩa cơ bản. Phần ba là kết quả chính của bài viết : khẳng định quan hệ Armstrong có luộn luôn tồn tại hay không đối với một tập Σ các phụ thuộc boole tổng quát cho trước, trình bày thuật toán tìm quan hệ thu gọn của một quan hệ Armstrong trong trường hợp khi tất cả các miền trị của các thuộc tính không có phần tử trung hoà. Tiếp theo là khẳng định về sự tồn tại của quan hệ Armstrong trong trường hợp khi tất cả các miền trị có phần tử trung hòa. Ở đây cũng trình bày thuật toán tìm quan hệ Armstrong đó và chứng minh rằng quan hệ Armstrong đã tìm là không rút gọn được và có kích cỡ bằng số phần tử của tập T_{Σ}

Cũng tiếp tục hướng nghiên cưú của đề tài về phụ thuộc dữ liệu, trong công trình " Một vài khía cạnh mở rộng cho các lớp phụ thuộc Boole" của tác giả Vũ Ngọc Loãn, Tạp chí Khoa học N4,1994, Đại học Tổng hợp Hà nội , đã tiếp tục phát triển lớp phụ thuộc Boole bằng các đề xuất một lớp phụ thuộc mới dựa vào một kiểu thể hiện của logic đa trị, đó là lớp các phụ thuộc lôgic dương đa trị.

Trong bài viết trình bày về một kiểu lôgic đa trị mà nó là sự mở rộng tự nhiên của khái niệm lôgic hai trị thông thường và nêu một vài hướng có thể ứng dụng nó vào việc nghiên cứu các ràng buộc giữ liệu trong mô hình quan hệ. Dựa vào lôgic đa trị , ta có thể đưa ra một số khái niệm và kết qủa liện quan đến lớp các phụ thuộc Boole dương đa trị mà những điều đó là sự mở rộng thực sự của một số khía niệm và kết quả đã có.

Bài viết gồm 4 phần. Phần đầu giới thiệu chung. Phần hai nêu một số khái niệm và trình bày một số kết qủa cơ bản liên quan đến lôgic đa trị.

Đó là những điều cần thiết cho việc cứu một số bài toán đối với lớp phụ thuộc Boole đa trị. Phần ba trình bày khái niệm lớp các phụ thuôc Boole đa trị , một lớp con quan trọng của nó là lớp các phụ thuôc Boole dương đa trị (PTBDĐT) sẽ được quan tâm nhiều khi nghiên cứu các bài toán thành viên , quan hệ Armstrong,....trong mô hình quan hệ . Trong phần bốn ,đề xuất một vài hướng nghiên cứu liên quan đến lớp các loại phụ thuôc Boole đa trị. Trong đề xuất đó tác giả đặc biệt lưu ý việc mở rộng một số kết quả đã có - đó là định lý sư tương đương giữa các kiểu suy dẫn : Suy dẫn theo quan hệ và suy dẫn lôgic

Khi kiểm ta được điều đó là đúng đắn thì nhiều vấn đề liên quan đến sự suy dẫn theo quan hệ trong lớp các phụ thuộc Boole đa trị có thể sẽ được giải quyết khá thuận tiện và đơn giản nhiều so với việc xem xét chúng với chính khái niệm suy dẫn theo quan hệ.

Tài liệu tham khảo.

[1] Berman J. and Blok W.J. Generalized Boolean dependencies. Abstracts of AMS, 6 (1985), 163.

[2] Berman J. and Blok W.J. Positive Boolean dependencies. Inf. Processing Letters, 27(1988), 147-150.

[3] Nguyen Xuan Huy and Le Thi Thanh. Generalized Positive Boolean Dependencies .J. Inform. Process. Cybernet. EIK 28 (1992) 6, 363-370.

[4] Novikop P.X. Đại cương lôgic toán. Nhà xuất bản Khoa hoc và Kỹ thuật Hà nội ,1971. (Dịch nguyên bản từ tiếng Nga. Người dich : Nguyễn Hữu Ngự, Đặng Huy Ruận)

[5] Sagiv Y., Delobel C., Parker D.S., and Fagin R. An Equivevalence Between Relationl Database Dependencies and a Fragment of Propositional Logic. J. ACM, 28, 3(1981), 435-453. Also a correction to this paper in J. ACM, 34, 4(1987), 1016-1018.

IV. Độ phức tạp Otomat của biểu thức chính quy suy rộng

Giả sử có bảng chữ cái A. Dãy vô hạn các ký hiệu thuộc A được gọi là một siêu từ trên bảng chữ cái A. Tập hợp tất cả các siêu từ trên bảng chữ cái ký hiệu bằng A^{∞}.

Tập con tùy ý của tập A^{∞} được gọi là một siêu ngôn ngữ trên bảng chữ cái A.

Tích của ngôn ngữ M_1 với siêu ngôn ngữ M_2 cùng trên bảng chữ cái A là một siêu ngôn ngữ dạng $\alpha = a(1)a(2)...$, sao cho có số tự nhiên i nào đó , để $a(1)a(2)...a(i)$ thuộc M_1 ,còn siêu từ $a(i+1)a(i+2)...$ thuộc M_2.

Siêu lặp của ngôn ngữ M trên bảng chữ cái A (ký hiệu bằng M) là siêu ngôn ngữ trên bảng chữ cái A, gồm tất cả các siêu tư` $\alpha=a(1)a(2)...$, sao cho đối với dãy số tự nhiên tăng nào đó $i_1, i_2, i_3...$ thỏa mãn quan hệ:

$a(i_t)a(i_{t+1})...a(i_{t+1}-1) \in M$, $t=1,2..$

Quy ước rằng $\varnothing^{\infty} = \varnothing$ và đối với siêu ngôn ngữ tùy ý M đều có $\varnothing.M=\varnothing$

Biểu thức chính quy suy rộng (b.c.s.) trên bảng chữ cái A là biểu thức tùy ý được xây dựng từ các biểu thức cơ bản ($\varnothing$, A và $a \in A$) nhờ các phép toán nhân (.), lặp (*) và các phép toán tập hợp: hợp ($\cup$), giao ($\cap$) và lấy phần bù (C).

Lớp các biểu thức chính quy suy rộng siêu ngôn ngữ (b.c.s.s.n.) trên bảng chữ cái A được xác định như sau:

1) Nếu R là một biểu thức chính quy suy rộng, xác định siêu ngôn ngữ nào đó, thì R là biểu thức chính quy suy rộng siêu ngôn ngữ cơ bản;

2) Nếu R là b.c.s., thì R^{∞} là b.c.s.s.n. ;

3) Nếu R_1 và R_2 là b.c.s.s.n. , thì $R_1 \cup R_2$ là b.c.s.s.n. ;

4) Nếu R_1 là b.c.s. , còn R_2 là b.c.s.s.n. , thì $R_1.R_2$ là b.c.s.s.n. ;

5) Nếu R là b.c.s.s.n. , thì CR là b.c.s.s.n. ;

6) Nếu R_1, R_2 là b.c.s.s.n. , thì $R_1 \cap R_2$ là b.c.s.s.n. ;

7) Chỉ các biểu thức định nghĩa theo các mục 1-6 mới là b.c.s.s.n.

Giả sử M là b.c.s.s.n. trên bảng chữ cái A . Số các vị trí của các ký hiệu thuộc A, chứa trong M được gọi là độ dài của biểu thức M và ký hiệu bằng $|M|$

Số trạng thái ít nhất đủ để xây dựng ôtômat đơn định đoán nhận siêu ngôn ngữ được cho bởi biểu thức M được gọi là độ phức tạp ôtômat của biểu thức M và được ký hiệu bằng G(M).

Đề tài đã khẳng định được kết quả sau: Đối với các số tự nhiên tùy ý s, t có thể xây dựng được dãy các biểu thức chính quy suy rộng siêu ngôn ngữ $C_{s,t,n}$ trong bảng chữ cái gồm 3 ký hiệu, sao cho:

1. Với n tùy ý biểu thức $C_{s,t,n}$ chứa t dấu phần bù và có độ dài không vượt quá n;

2. Với bất kỳ hằng số $c > 2^s$ nào khi n đủ lớn

$$\underbrace{\log_b \log_b \ldots \log_b}_{(t+1)\ \text{lần}} G(C_{s,t,n}) \geq n / (c\log_2 n)$$

trong đó:

$$b = \sqrt{\frac{(2^s)^{2^s}}{(2^s-1)^{2^s-1}}}$$

Kết quả trên chứng tỏ tồn tại vô hạn các siêu ngôn ngữ có độ phức tạp đoán nhận cao.

KẾT LUẬN

Ba vấn đề được đề tài nghiên cứu giải quyết có tính thời sự, các kết quả nghiên cứu chẳng những có ý nghĩa về mặt lý thuyết , mà một số kết quả còn có khả năng ứng dụng. Các kết quả này được trên 5 bài báo khoa học đăng trên các tạp chí trong và ngoài nước.

Với một số kết quả về phần phụ thuộc logic trong các cơ sở dữ liệu quan hệ, đồng chí Vũ Ngọc Loãn đã hoàn thành phần cuối của luận văn tiến sĩ chuyên ngành của mình.

Nhân dịp này các thành viên của đề tài B 93 - 05 -73 xin chân thành cảm ơn các cấp quản lý đã nhiệt tình giúp đỡ, tạo điều kiện cho chúng tôi hoàn thành đề tài này.

Hà nội ngày 10 tháng 4 năm 1995.

Tài liệu tham khảo

[1] Sagiv Y., Delobel C., Parker D.S. and Fagin R.
An Equivalence Between Relational Database Dependencies and a Fragment of Propositional Logic, J.ACM, 344 (1981), 435 - 453. Also a correction to this paper in J.AMM, 34, 4 (1987), 1016 - 1018.

[2] Berman J. and Blok W.J. Generalized Boolean dependencies. Abstracts of ASM, 6 (1985), 163.

[3] Berman J. and Blok W.J. Positive Boolean dependencies.
Inf. Processing Letters, 27 (1988), 147 - 150.

[4] Nguyễn Xuân Huy and Lê Thị Thanh. Generalized Positive Boolean Dependencies. J. Inform. Process. Cybernet. EIK 28 (1992) 6, 363 - 370.

PHỤ LỤC

Các bài báo được đăng

Consistency and Semiconsistency Preserving Composition in Net Systems

HOÀNG CHÍ THÀNH
Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Science
University of Hanoi
90 – Nguyen Trai, Dong Da, Hanoi
VIETNAM

Abstract

In this paper, we partially solve the problem of net systems' composition in the family of contact - free net systems by proposing an operation and show that the operation preserves the consistency and semiconsistency of contact - free net systems.

1 Introduction

Net systems are one of sound tools for modelling the bebaviours of concurrent systems and processes. It turns out that the modular method is a very useful way to design large concurrent systems, e.g. communicating systems, production schematas, transport networks, etc. The composition problem in models for concurrent systems proves that idea (see [Che88, Mar84, Tha85]).

The paper concerns the problem of net systems' composition. Assuming that two net systems are given, we attempt to state the rules of constructing the net system composed from them. The main requirement here is to save the dynamic structures of the input systems as far as possible. A similar approach was investigated by V. Kotov for Place/Transition nets [Kot78]. Our attention is paid to the consistency and semiconsistency – two fundamental properties of net systems. These properties are based on the coexistancy relation, one of the most important notions of the Petri net theory.

The paper is organized as follows. We start with some basic notions concerning the theory of net systems. In Section 2 we concentrate on two basic notions: the sir-relation and the covering. The former is used for describing a number of the phenomena of concurrent systems, such as independency, coexistancy, concurrency, conflict, etc. [Tha85, Thi90], while the latter is interpreted as the set of all global states or the set of sequential components of those systems [Jan84, Pro81]. Sections 3 and 4 are devoted to net systems. We show that the set of all simple nets is a complete lattice by introducing a partial order. Some basic properties of net systems are formulated.

In section 5, the problem of net systems composition is formalized and solved for the family of all contact - free net systems by defining an operation on it. We point out that the consistency and semiconsistency of contact - free net systems are preserved by this operation.

Some concluding remarks are presented in the last section.

2 An algebra of sir-relations and an albegra of coverings

Let X be a set and $id_X \subseteq X \times X$ be the indentity relation on X.

DEF. 1: A relation $C \subset X \times X$ is called *a sir-relation* iff it is symmetric and irreflexive, i.e.

$$(\forall a, b \in X),\ (a,b) \in C \iff (b,a) \in C \implies a \neq b\ .$$

For every sir-relation C we define two families of subsets of X : $kens(C)$ and $\overline{kens}(C)$ in the following way (see also [Pet77]):

$kens(C) = \{A \subseteq X \mid (\forall a, b \in A)\,(a,b) \in C \cup id_X\ \&\ (\forall c \notin A)\,(\exists a \in A)\,(a,c) \notin C\}$,

$\overline{kens}(C) = \{A \subseteq X \mid (\forall a, b \in A)\,(a,b) \notin C\ \&\ (\forall c \notin A)\,(\exists a \in A)\,(a,c) \in C\}$.

Note that for every sir-relation $C \subset X \times X$ the relation $\overline{C} = X \times X - id_X - C$ is a sir-relation and $\overline{(\overline{C})} = C$.

Let cov be a covering of X.
The relations $sir(cov)$ and $\overline{sir}(cov) \subset X \times X$, defined below, are sir-relations (called *sir-relations defined by covering*):

$$(a,b) \in sir(cov) \iff a \neq b\ \&\ (\forall A \in cov)\ a \notin A \text{ or } b \notin A,$$
$$(a,b) \in \overline{sir}(cov) \iff a \neq b\ \&\ (\exists A \in cov)\ a \in A \text{ and } b \in A.$$

Of course, $\overline{sir}(cov) = X \times X - id_X - sir(cov)$.

A covering cov of a set X is called *a maximal set covering* iff:

$$(\forall A \in cov,\ \forall A' \subseteq X),\ A' \subset A\ \Rightarrow\ A' \notin cov\ .$$

From every covering cov, we can get a maximal set covering, denoted by $\mathrm{mx}(cov)$ as follows:

$$\mathrm{mx}(cov) := cov - \{A' \mid A' \in cov\ \&\ \exists A \in cov,\ A' \subset A\}\ .$$

Of course, $sir(\mathrm{mx}(cov)) = sir(cov)$ and $\overline{sir}(\mathrm{mx}(cov)) = \overline{sir}(cov)$.

DEF. 2: A covering cov is said to be *consistent* iff $cov = kens(\overline{sir}(cov))$, and it is said to be *semiconsistent* iff $cov \subseteq kens(\overline{sir}(cov))$.

The consistency property means that the concurrency relation describes precisely the set of sequential components of a system, while the semiconsistency property means only that every sequential component is defined by the concurrency relation, (see [Jan84]).
For every sir-relation C, $kens(C)$ and $\overline{kens}(C)$ are consistent coverings. (Of course, they are maximal set coverings.)

In order to construct methods for composing net systems in Section 5, we define an operation of sir-relations' composition in the way which ensures that the composed relation is an extension of each previous one except contrary requirements given by the relations. We also define coverings' operation, which preserves their consistency and semiconsistency.

Given two sir-relations $C_1 \subset X_1 \times X_1$ and $C_2 \subset X_2 \times X_2$. Their composition is defined in [ThP85] as follows:
DEF. 3: $$C_1 \otimes C_2 = sir(\overline{kens}(C_1) \cup \overline{kens}(C_2))\ .$$

Clearly, $C_1 \otimes C_2 \subset (X_1 \cup X_2) \times (X_1 \cup X_2)$ is a sir-relation.

Theorem 2.1 *Let C_1, C_2 be sir-relations, then:* $\overline{C_1 \otimes C_2} = \overline{C_1} \cup \overline{C_2}$.

PROOF: Here we have:
$\overline{C_1 \otimes C_2} = \overline{sir}(\overline{kens}(C_1) \cup \overline{kens}(C_2)) = \overline{sir}(\overline{kens}(C_1)) \cup \overline{sir}(\overline{kens}(C_2)) = \overline{C_1} \cup \overline{C_2}$. □

The above theorem gives another useful description of $C_1 \otimes C_2$:

$$C_1 \otimes C_2 = (X_1 \cup X_2) \times (X_1 \cup X_2) - id_{X_1 \cup X_2} - (\overline{C_1} \cup \overline{C_2}).$$

As an immediate consequence of Theorem 2.1, we have:

Corollary 2.1 $C_1 \otimes C_2 = C_1 \cup C_2 - (X_1 \cap X_2) \times (X_1 \cap X_2) \cup C_1 \cap C_2 \cup (X_1 - X_2) \times (X_2 - X_1)$. □

The fact that $C_1 \otimes C_2$ is the "extension" mentioned earlier is now obvious.

The set of all sir-relations SIRS with the operation $\otimes$ becomes an algebra, called *the algebra of sir-relations.*

Let X_1, X_2 be two finite sets and cov_1, cov_2 be their coverings respectively. We define a composition cos from cov_1, cov_2 as follows:

DEF. 4: 1) $cox = \{A_1 \cap (X_1 - X_2) \cup A_1 \cap A_2 \cup A_2 \cap (X_2 - X_1) \mid A_1 \in cov_1 \ \& \ A_2 \in cov_2\}$,
2) $cos := cov_1 \uplus cov_2 = \mathrm{mx}(cox)$.

It is obvious that cos is a proper covering of the set $X_1 \cup X_2$.

Theorem 2.2 $\overline{sir}(cos) = \overline{sir}(cov_1) \otimes \overline{sir}(cov_2)$.

PROOF: Using Corollary 2.1 we show that:
$\overline{sir}(cos) = \overline{sir}(cov_1) \cup \overline{sir}(cov_2) - (X_1 \cap X_2) \times (X_1 \cap X_2) \cup \overline{sir}(cov_1) \cap \overline{sir}(cov_2) \cup (X_1 - X_2) \times (X_2 - X_1)$.

a) Assume that $(a, b) \in \overline{sir}(cos)$, i.e. $(\exists Q \in cos), a \neq b \ \& \ \{a, b\} \subseteq Q$, where:
$Q = L \cap (X_1 - X_2) \cup L \cap M \cup M \cap (X_2 - X_1)$, $L \in cov_1$ and $M \in cov_2$.

Because of the symmetry of sir-relations, it is enough to consider the following cases:

1. $a \in L \cap (X_1 - X_2)$ and
   - $b \in L \cap (X_1 - X_2) \cup L \cap M \Rightarrow (a, b) \in \overline{sir}(cov_1) - (X_1 \cap X_2) \times (X_1 \cap X_2)$,
   - $b \in M \cap (X_2 - X_1) \Rightarrow (a, b) \in (X_1 - X_2) \times (X_2 - X_1)$.
2. $a \in L \cap M$ and
   - $b \in L \cap M \Rightarrow (a, b) \in \overline{sir}(cov_1) \cap \overline{sir}(cov_2)$,
   - $b \in M \cap (X_2 - X_1) \Rightarrow (a, b) \in \overline{sir}(cov_2) - (X_1 \cap X_2) \times (X_1 \cap X_2)$.
3. $a \in M \cap (X_2 - X_1)$ and
   - $b \in M \cap (X_2 - X_1) \Rightarrow (a, b) \in \overline{sir}(cov_2) - (X_1 \cap X_2) \times (X_1 \cap X_2)$.

So in all the above cases, we have: $(a, b) \in \overline{sir}(cov_1) \otimes \overline{sir}(cov_2)$.

b) The proof of the reverse inclusion can be proceeded similarly. □

Corollary 2.2 $sir(cos) = sir(cov_1) \cup sir(cov_2)$.

PROOF: Follows from Theorem 2.1 and 2.2 . □

Furthermore, the above operation preserves the consistency and semiconsistency of coverings.

Theorem 2.3 *If cov_1, cov_2 are consistent (semiconsistent) then their composition cos is consistent (semiconsistent).*

PROOF: To prove the consistency of a covering cov we use the necessary and sufficient condition formulated in Theorem 3.3 in [Pro81] as follows:

$$cov \text{ is consistent} \iff cov \text{ is a maximal set covering } \& \ (\forall P_1, P_2, P_3 \in cov) \ (\exists Q \in cov), \ \bigcup_{i \neq j} P_i \cap P_j \subseteq Q \ .$$

1) Assume that cov_1, cov_2 are consistent coverings. It is clear that cos is a maximal set covering. Let $P_1, P_2, P_3 \in cos$. Hence $P_i = L_i \cap (X_1 - X_2) \cup L_i \cap M_i \cup M_i \cap (X_2 - X_1)$, where $L_i \in cov_1, \ M_i \in cov_2, \ i = 1,2,3$.
By the consistency of cov_1, cov_2 we have:

$\exists Q_1 \in cov_1, \ \bigcup_{i \neq j} L_i \cap L_j \subseteq Q_1$ and $\exists Q_2 \in cov_2, \ \bigcup_{i \neq j} M_i \cap M_j \subseteq Q_2$.

Put: $L'_i = L_i \cap (X_1 - X_2) \cup L_i \cap M_i$ and $M'_i = M_i \cap (X_2 - X_1) \cup L_i \cap M_i, \ i = 1,2,3$.
We get $L'_i \cap M'_i = L_i \cap M_i, \quad L'_i \cap M'_j \subseteq L'_i \cap L'_j \quad$ and $P_i = L'_i \cup M'_i$.

$$\text{Hence } P_i \cap P_j = (L'_i \cup M'_i) \cap (L'_j \cup M'_j) = (L'_i \cap L'_j) \cup (L'_i \cap M'_j) \cup (L'_j \cap M'_i) \cup (M'_i \cap M'_j) = (L'_i \cap L'_j) \cup (M'_i \cap M'_j) \ .$$

So $\quad \bigcup_{i \neq j} P_i \cap P_j = \bigcup_{i \neq j} L'_i \cap L'_j \cup \bigcup_{i \neq j} M'_i \cap M'_j$.

Denote $L = \bigcup_{i \neq j} L'_i \cap L'_j$ and $M = \bigcup_{i \neq j} M'_i \cap M'_j$. We have:

$$L \cap X_1 \cap X_2 = M \cap X_1 \cap X_2 = L \cap M.$$

Since $L \subseteq \bigcup_{i \neq j} L_i \cap L_j \subseteq Q_1, \quad M \subseteq \bigcup_{i \neq j} M_i \cap M_j \subseteq Q_2 \quad$ it follows $L \cap M \subseteq Q_1 \cap Q_2$.

Let us put $Q' = Q_1 \cap (X_1 - X_2) \cup Q_1 \cap Q_2 \cup Q_2 \cap (X_2 - X_1)$, then $Q' \in cox$. So $\exists Q \in cos, Q' \subseteq Q$ and $\bigcup_{i \neq j} P_i \cap P_j = L \cup M \subseteq Q' \subseteq Q$. It asserts the consistency of cos.

2. Now assume that cov_1, cov_2 are semiconsistent coverings, i.e. $cov_i \subseteq kens(\overline{sir}(cov_i)), \ i = 1,2$. Applying the part 1) of this theorem and Theorem 2.2, we have:

$$\begin{aligned} cos = cov_1 \uplus cov_2 \quad &\subseteq \quad kens(\overline{sir}(cov_1)) \uplus kens(\overline{sir}(cov_2)) = \\ &= kens(\overline{sir}(kens(\overline{sir}(cov_1)) \uplus kens(\overline{sir}(cov_2)))) \\ &= kens(\overline{sir}(kens(\overline{sir}(cov_1))) \otimes \overline{sir}(kens(\overline{sir}(cov_2)))) \\ &= kens(\overline{sir}(cov_1) \otimes \overline{sir}(cov_2)) \\ &= kens(\overline{sir}(cos)) \ . \end{aligned}$$

This means cos is a semiconsistent covering. □

Note that the reciprocal of this theorem is not always true. Consider the following example.

Example 2.1 Let $X_1 = \{a,b,c\}, \quad X_2 = \{b,c,d\}$ and

$cov_1 = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}, \quad cov_2 = \{\{b\},\{c\},\{d\}\}$.

In this case, $cov_1 \not\subseteq kens(\overline{sir}(cov_1)) = \{\{a,b,c\}\}$. So it is not semiconsistent.
$cov_2 = kens(\overline{sir}(cov_2))$ then it is consistent. And

$cox = \{\{a,b\},\{a\},\{a,d\},\{a,c\},\{b\},\{c\},\{d\}\}$

$cos = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\}\} = kens(\overline{sir}(cos))$, i.e. cos is consistent.

The set of all coverings COVS with the operation $\uplus$ becomes an algebra. We call it *the algebra of coverings.*
Let CCOVS denote the family of all consistent coverings while SCOVS denote the family of all semiconsistent coverings. Theorem 2.3 points out that CCOVS, SCOVS are closed under the operation $\uplus$. So CCOVS, SCOVS are subalgebras of COVS.

Theorem 2.4 *The algebra of sir-relations SIRS and the algebra of consistent coverings CCOVS are isomorphic.*

PROOF: Define φ : SIRS $\longrightarrow$ CCOVS as follows:

$$\forall C \in \text{SIRS}, \varphi(C) = kens(C) .$$

It is easy to show that φ is an isomorphism. $\square$

So every sir-relation determines uniquely a consistent covering. In other words, in many cases the set of all global states of a system can be expressed by a sir-relation.

3 A lattice of simple nets

Simple nets repesent the static aspects of concurrent systems. So in this section we recall some basic notions and show that the set of all simple nets is a complete lattice.

DEF. 5: A triple $N = (B, E, F)$ is called *a net* iff:

1) B and E are disjoint sets,
2) $F \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$ is a binary relation called *the flow relation of* N, such that:

$$\text{domain}(F) \cup \text{range}(F) = B \cup E.$$

The elements of B are called *conditions* and the elements of E are called *events*. The flow relation models a fixed "neighbourhood" relation between the conditions and events of a concurrent system. In the graphic representation, the conditions will be drawn as circles, the events as boxes and the elements of the flow relation as directed arcs.

Let $N = (B, E, F)$ be a net. Then, $X_N = B \cup E$ is the set of elements of N.
For every $x \in X_N$:

$${}^{\cdot}x = \{y \mid (y, x) \in F\} \text{ is called the pre-set of } x,$$
$$x^{\cdot} = \{y \mid (x, y) \in F\} \text{ is called the post-set of } x.$$

In this paper we restrict our attention to finite nets.

A pair $(p, e) \in B \times E$ is called *a self-loop* iff $(p, e) \in F \wedge (e, p) \in F$.
A net N is said to be *pure* iff F does not contain any self-loop.

DEF. 6: A net N is called *simple* iff its two elements do not have the same pre- and post-set, i.e.:

$$(\forall x, y \in X_N), ({}^{\cdot}x = {}^{\cdot}y \ \wedge \ x^{\cdot} = y^{\cdot}) \Rightarrow x = y.$$

Let N be a simple net.
A relation $I \subseteq E \times E$ is called *the independency relation* of N iff:

$$(e, f) \in I \iff ({}^{\cdot}e \cup e^{\cdot}) \cap ({}^{\cdot}f \cup f^{\cdot}) = \emptyset .$$

The independency relation describes that in a concurrent system two actions are independent iff they do not share any resource.
It is easy to see that I is a sir-relation. $D = E \times E - I$ is called *the dependency relation* of N.

Let NETS denote the family of all finite simple nets. We shows that NETS is a complete lattice (see [Jan84]).

Let $\sqsubseteq$ be the following relation on NETS:

$$N_1 = (B_1, E_1, F_1) \sqsubseteq N_2 = (B_2, E_2, F_2) \iff B_1 \subseteq B_2 \ \& \ F_1 \subseteq F_2 .$$

Note that $\sqsubseteq$ is a partial order and $N_1 \sqsubseteq N_2 \Rightarrow E_1 \subseteq E_2$.
Let $sup\{N_1, N_2\}$, $inf\{N_1, N_2\}$ denote respectively the least upper and the greatest lower bound of N_1, N_2 under the relation $\sqsubseteq$.

Lemma 3.1 *For every* $N_1 = (B_1, E_1, F_1)$, $N_2 = (B_2, E_2, F_2) \in NETS$ *:*
1) $sup\{N_1, N_2\} = (B_1 \cup B_2, E_1 \cup E_2, F_1 \cup F_2)$,
2) $inf\{N_1, N_2\} = (B_1 \cap B_2, E_1 \cap E_2, F_1 \cap F_2)$.

PROOF: Follows directly from the definition of the least upper and the greatest lower bound. □

Let us define the well-known lattice operations:
$N_1 \cup N_2 = sup\{N_1, N_2\}$, $\quad N_1 \cap N_2 = inf\{N_1, N_2\}$,
$\bigcup_{N \in \mathcal{D}} N = sup\{N \mid N \in \mathcal{D}\}$, $\quad \bigcap_{N \in \mathcal{D}} N = inf\{N \mid N \in \mathcal{D}\}$.

Corollary 3.1 *The algebra* $(NETS, \cup, \cap)$ *is a complete lattice.* □

In a simple net $N = (B, E, F)$, every arc $(x, y) \in F$ alongwith the condition and the event related to it create an atom (net) in the lattice NETS. Hence, every simple net is atomic, i.e. it is composible from its atoms. In other words, elements of the lattice NETS may be constructed from "smaller" ones by the operation $\cup$.

Let N_1, N_2 be simple nets and $N = N_1 \cup N_2$.
Let I, I_1, I_2 denote the independency relations of N, N_1, N_2 respectively.

Theorem 3.1 $I = I_1 \otimes I_2$.

PROOF: It is obvious that $D = D_1 \cup D_2$. So $I = \overline{D} = \overline{D_1 \cup D_2} = \overline{\overline{I_1} \cup \overline{I_2}} = I_1 \otimes I_2$. □

4 Net systems

Simple nets represent the static aspests of concurrent systems, while net systems represent the dynamic aspects of those systems. We are now going to extend the present approach to net systems.

Let $N = (B, E, F)$ be a simple net. A subset $c \subseteq B$ is called *a case*.
Let $e \in B$ and $c \subseteq B$. Then, e is said *enabled at* c (c - enabled, for short) iff ${}^{\cdot}e \subseteq c$ & $e^{\cdot} \cap c = \emptyset$.
We denote: $c[e\rangle$.

Let $e \in E$, $c \subseteq B$ and e be c - enabled. Then $d = (c - {}^{\cdot}e) \cup e^{\cdot}$ is called the reachable case from the occurrence of e in the case c, and we write: $c[e\rangle d$. If $c[e_1\rangle c_1[e_2\rangle c_2 \ldots c_n[e_{n+1}\rangle d$, we shall write $c[[e_1 e_2 \ldots e_{n+1}\rangle d$.
So we adopt the following definition of the reachability of the net N:

The reachability relation of N is the relation $R_N = (r_N \cup r_N^{-1})^*$, where $r_N \subseteq 2^B \times 2^B$ is given by:
$$(c, d) \in r_N \iff (\exists e \in E), c[e\rangle d .$$
Note that R_N is an equivalence relation.

DEF. 7: *A net system* we mean any quadruple: $\Sigma = (B, E, F, \mathcal{S})$, where:
i) $N = (B, E, F)$ is a simple net, called *the underlying net* of Σ ,
ii) $\mathcal{S} \subseteq 2^B$ is an union of some equivalence classes of R_N, such that:
$$(\forall e \in E, \exists c \in \mathcal{S}), e \text{ is } c\text{ - enabled.}$$
$\mathcal{S}$ is called *the state space* of Σ. An equivalence class of R_N is called an orbit. So the state space consists of one or some orbits.

Theorem 4.1 *For every net system $\Sigma = (B, E, F, \mathcal{S})$:*
1) The underlying net N is a pure net.
2) The state space $\mathcal{S}$ is a covering of B.

PROOF: 1) By the definition 7 then $(\forall e \in E, \exists c \in \mathcal{S})$, $^\cdot e \subseteq c$ & $c \cap e^\cdot = \emptyset$. This means $\forall e \in E$, $^\cdot e \cap e^\cdot = \emptyset$. So N is pure.
2) We have to prove that: $(\forall p \in B,\ \exists c \in \mathcal{S}), p \in c$.
Let $p \in B$. Since domain$(F) \cup$ range$(F) = B \cup E$, $\exists e \in E$ such that $(p, e) \in F$ or $(e, p) \in F$. So $p \in {^\cdot e}$ or $p \in e^\cdot$. By the definition 7, $\exists c \in \mathcal{S}$, e is c - enabled.
Thus, $p \in {^\cdot e} \subseteq c$ or $p \in e^\cdot \subseteq d = (c - {^\cdot e}) \cup e^\cdot \in \mathcal{S}$. □

DEF. 8: A net system $\Sigma = (B, E, F, \mathcal{S})$ is said to be *contact - free* iff: $(\forall e \in E, \forall c \in \mathcal{S})$,
$$({^\cdot e} \subseteq c \Rightarrow e^\cdot \cap c = \emptyset) \,\&\, (e^\cdot \subseteq c \Rightarrow {^\cdot e} \cap c = \emptyset) .$$
Hence, in a contact - free net system the occurrence of an event in a case ensures that the event can be enabled at the case.

From a contact - free net system we can get a reduced contact - free net system, which has no "redundant" cases. To do so we introduce some following notions:
Let $\Sigma_1 = (B, E, F, \mathcal{S}_1)$, $\Sigma_2 = (B, E, F, \mathcal{S}_2)$ be net systems having a common underlying net and holding the following condition: $(\forall c_1 \in \mathcal{S}_1, \exists c_2 \in \mathcal{S}_2), c_1 \subseteq c_2$.
Then we shall write: $\Sigma_1 \preceq \Sigma_2$. In this case, the contact - freeness of the "smaller" net system follows naturally from that of the "greater" one.

Theorem 4.2 *If $\Sigma_1 \preceq \Sigma_2$ then: Σ_2 is contact - free $\Rightarrow$ Σ_1 is contact - free.* □

Note that Theorem 4.2 is not always true when the underlying net N_1 is a proper subnet of N_2.
Given a net system $\Sigma = (B, E, F, \mathcal{S})$. If its state space contains cases, which are proper parts of other cases then the state space can be split into two disjoint parts as follows:
$$\mathcal{S}^I = \text{mx}(\mathcal{S}) \text{ and } \mathcal{S}^{II} = \mathcal{S} - \mathcal{S}^I .$$

Theorem 4.3 *If $\Sigma = (B, E, F, \mathcal{S})$ is a contact - free net system then $\mathcal{S}^I$ and $\mathcal{S}^{II}$ are closed under the reachability relation R_N .*

PROOF: It sufficies to show that $\mathcal{S}^{II}$ is closed under R_N . Let $c' \in \mathcal{S}^{II}$ and $d' \subseteq B$.
Assume that $(c', d') \in r_N$, thus $\exists e \in E, {^\cdot e} \subseteq c'$ & $e^\cdot \cap c' = \emptyset$ & $d' = (c' - {^\cdot e}) \cup e^\cdot$.
So $d' \in \mathcal{S}$. Since $c' \in \mathcal{S}^{II}$ then $\exists c \in \mathcal{S}$, $c' \subset c$ and ${^\cdot e} \subseteq c' \implies {^\cdot e} \subset c$.
Applying the contact - freeness of Σ, we have $e^\cdot \cap c = \emptyset$. Let us put $d = (c - {^\cdot e}) \cup e^\cdot$. It implies $(c, d) \in r_N$, so $d \in \mathcal{S}$ and $d' \subset d$. This means $d' \in \mathcal{S}^{II}$.
In a similar way we can prove that if $(d', c') \in r_N$ then $d' \in \mathcal{S}^{II}$. □

It is obvious that $\mathcal{S}^I$ (similar to $\mathcal{S}$) is large enough such that every event of the system is enabled, but $\mathcal{S}^{II}$ may be not. So $\mathcal{S}^{II}$ can be ignored and we get the reduced contact - free net system $\Sigma^M = (B, E, F, \mathcal{S}^I)$ from Σ .
From now on, unless otherwise stated, a contact - free net system means a reduced contact - free net system.

Let $\Sigma = (B, E, F, \mathcal{S})$ be a net system.
The sir-relation $coex_{\mathcal{S}} = \overline{sir}(\mathcal{S})$ is called *the coexistancy relation* defined by states.

Since the state space of a net system is a covering of the set of conditions, so we can define the consistency and semiconsistency of a net system as follows:
DEF. 9: A net system $\Sigma = (B, E, F, \mathcal{S})$ is said to be *consistent* iff $\mathcal{S} = kens(coex_{\mathcal{S}})$ and it is said to be *semiconsistent* iff $\mathcal{S} \subseteq kens(coex_{\mathcal{S}})$.

In this case, the property of consistency means that the set of all global system states and the set of local coexistancy sets are identical. Hence, the state space can be expressed by the coexistancy relation. The property of semiconsistancy means that the set of all global system states is included in the set of all local coexistancy sets defined by the coexistancy relation.

5 Problem of Net Systems' Composition

Let NSYS denote the family of all net systems. We propose the following problem:

Construct an operation ϕ on NSYS, i.e.

$$\phi : \text{NSYS} \times \text{NSYS} \longrightarrow \text{NSYS}$$

and consider fundamental properties of the operation.

Let $\Sigma_1 = (B_1, E_1, F_1, \mathcal{S}_1)$, $\Sigma_2 = (B_2, E_2, F_2, \mathcal{S}_2)$ be net systems.
We are going to build now a new net system on the basic of two given above. It is clear that such a net system should be of the form: $(B_1 \cup B_2, E_1 \cup E_2, F_1 \cup F_2, \mathcal{S})$. Thus, its static structure is exactly described.
According to the previous sections we can also find the coexistancy relation implied by the state spaces $\mathcal{S}_1$ and $\mathcal{S}_2$ (or, in other words, the coexistancy relation incident to this net system), that holds the following equality: $coex_{\mathcal{S}} = coex_{\mathcal{S}1} \otimes coex_{\mathcal{S}2}$.

Using the composition operation for coverings (Definition 4) we define:
DEF. 10: $\Sigma = (B_1 \cup B_2, E_1 \cup E_2, F_1 \cup F_2, \mathcal{S})$, where:

$$\mathcal{S} = \{c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap (B_2 - B_1) \mid c_1 \in \mathcal{S}_1 \ \& \ c_2 \in \mathcal{S}_2\}.$$

Theorem 5.1 *If Σ_1, Σ_2 are contact - free net systems then the quadruple $\Sigma = (B_1 \cup B_2, E_1 \cup E_2, F_1 \cup F_2, \mathcal{S})$ is also a contact - free net system.*

PROOF: 1) We prove first that the quadruple Σ is a net system.
It is obvious that $N := N_1 \cup N_2 = (B_1 \cup B_2, E_1 \cup E_2, F_1 \cup F_2)$ is a simple net.

a) We have to show that $\mathcal{S}$ is closed under the reachability relation R_N of N.
Let $c \in \mathcal{S}$ and $d \subseteq B$.
Assume that $(c, d) \in r_N$, i.e. $(\exists e \in E)$, $^{\cdot}e \subseteq c \ \& \ e^{\cdot} \cap c = \emptyset \ \& \ d = (c - {}^{\cdot}e) \cup e^{\cdot}$.
Let us denote:

$$^{\cdot}e_0 = {}^{\cdot}e \cap B_1 \cap B_2, \quad {}^{\cdot}e_1 = {}^{\cdot}e \cap (B_1 - B_2), \quad {}^{\cdot}e_2 = {}^{\cdot}e \cap (B_2 - B_1),$$
$$e_0^{\cdot} = e^{\cdot} \cap B_1 \cap B_2, \quad e_1^{\cdot} = e^{\cdot} \cap (B_1 - B_2), \quad e_2^{\cdot} = e^{\cdot} \cap (B_2 - B_1).$$

Of course, $^{\cdot}e = {}^{\cdot}e_0 \cup {}^{\cdot}e_1 \cup {}^{\cdot}e_2$ and $e^{\cdot} = e_0^{\cdot} \cup e_1^{\cdot} \cup e_2^{\cdot}$.
Because $c \in \mathcal{S}$ then there are $c_1 \in \mathcal{S}_1$ & $c_2 \in \mathcal{S}_2$, such that:

$$c = c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap (B_2 - B_1) .$$

Put $c_1' = c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2$, $\quad c_2' = c_2 \cap (B_2 - B_1) \cup c_1 \cap c_2$.
So $c = c_1' \cup c_2'$ and $^{\cdot}e_0 \cup {}^{\cdot}e_i \subseteq c_i'$, $i = 1, 2$. Due to the contact - freeness of Σ_1 and Σ_2, we have:

$$^{\cdot}e_0 \cup {}^{\cdot}e_i \subseteq c_i' \subseteq c_i \in \mathcal{S}_i \Rightarrow (e_0^{\cdot} \cup e_i^{\cdot}) \cap c_i = \emptyset, \ i = 1, 2 .$$

Hence, $d_i = (c_i - ({}^{\cdot}e_0 \cup {}^{\cdot}e_i)) \cup (e_0^{\cdot} \cup e_i^{\cdot}) \in \mathcal{S}_i$, $i = 1, 2$, and:
$d_1 \cap (B_1 - B_2) = (c_1 - ({}^{\cdot}e_0 \cup {}^{\cdot}e_1)) \cap (B_1 - B_2) \cup (e_0^{\cdot} \cup e_1^{\cdot}) \cap (B_1 - B_2) = (c_1 \cap (B_1 - B_2) - {}^{\cdot}e_1) \cup e_1^{\cdot}$.

Analogously, we obtain: $d_2 \cap (B_2 - B_1) = (c_2 \cap (B_2 - B_1) - {}^{\cdot}e_2) \cup e_2^{\cdot}$.
Since $d_i \cap (B_1 \cap B_2) = (c_i \cap B_1 \cap B_2 - {}^{\cdot}e_0) \cup e_0^{\cdot}$, $i = 1, 2$, thus $d_1 \cap d_2 = (c_1 \cap c_2 - {}^{\cdot}e_0) \cup e_0^{\cdot}$.

Applying the above equalities, we get:

$$\begin{aligned} d &= (c - {}^{\cdot}e) \cup e^{\cdot} = c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap (B_2 - B_1) - ({}^{\cdot}e_1 \cup {}^{\cdot}e_0 \cup {}^{\cdot}e_2) \cup (e_1^{\cdot} \cup e_0^{\cdot} \cup e_2^{\cdot}) \\ &= ((c_1 \cap (B_1 - B_2) - {}^{\cdot}e_1) \cup e_1^{\cdot}) \cup ((c_1 \cap c_2) - {}^{\cdot}e_0) \cup e_0^{\cdot}) \cup ((c_2 \cap (B_2 - B_1) - {}^{\cdot}e_2) \cup e_2^{\cdot}) \\ &= d_1 \cap (B_1 - B_2) \cup d_1 \cap d_2 \cup d_2 \cap (B_2 - B_1) \end{aligned}$$

. By the definition of $\mathcal{S}$, we have $d \in \mathcal{S}$.
In a similar way we can prove that if $(d, c) \in r_N$ then also $d \in \mathcal{S}$.

b) We still have to show that: $\forall e \in E, \exists c \in \mathcal{S}$ such that e is c - enabled.

Let $e \in E = E_1 \cup E_2$.
Assume that $e \in E_1 - E_2$, then $\exists c_1 \in \mathcal{S}_1$, $c_1[e\rangle$. Hence ${}^{\cdot}e \subseteq c_1 \cap (B_1 - B_2)$ & $e^{\cdot} \cap c_1 = \emptyset$. For some $c_1 \in \mathcal{S}_2$, put $c = c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap (B_2 - B_1)$. Of course, ${}^{\cdot}e \subseteq c$ & $e^{\cdot} \cap c = \emptyset$, i.e. $c[e\rangle$ in Σ .
In the case when $e \in E_2 - E_1$, we can proceed similarly.
Now assume that $e \in E_1 \cap E_2$, then $\exists c_i \in \mathcal{S}_i$, $c_i[e\rangle$ for $i = 1, 2$.
So ${}^{\cdot}e_0 \cup {}^{\cdot}e_i \subseteq c_i'$ and $(e_0^{\cdot} \cup e_i^{\cdot}) \cap c_i' = \emptyset$. Put $c = c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap (B_2 - B_1)$.
Hence $c \in \mathcal{S}$ and we have: ${}^{\cdot}e = {}^{\cdot}e_1 \cup {}^{\cdot}e_0 \cup {}^{\cdot}e_2 \subseteq c_1' \cup c_2' = c$ and $e^{\cdot} \cap c = e^{\cdot} \cap (c_1' \cup c_2') = \emptyset$, i.e. $c[e\rangle$.

So Σ becomes a net system.

2) Now we show that Σ is contact - free. Let $e \in E$ and $c \in \mathcal{S}$ such that ${}^{\cdot}e \subseteq c$.
Thus, there are $c_1 \in \mathcal{S}_1$, $c_2 \in \mathcal{S}_2$ and $c = c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap (B_2 - B_1)$.
By the contact - freeness of Σ_1, Σ_2 we have: $(e_0^{\cdot} \cup e_i^{\cdot}) \cap c_i = \emptyset$, for $i = 1, 2$.
But $c_i' \subseteq c_i$, so $(e_0^{\cdot} \cup e_i^{\cdot}) \cap c_i' = \emptyset$. Hence,
$e^{\cdot} \cap c = e^{\cdot} \cap (c_1' \cup c_2') = (e_0^{\cdot} \cup e_1^{\cdot}) \cap c_1' \cup (e_0^{\cdot} \cap e_2^{\cdot}) \cap c_2' = \emptyset$.
In the case when $e^{\cdot} \subseteq c$, we can proceed similarly. □

Note that after having composed, the state space $\mathcal{S}$ may contain "redundant" cases. Using the reduction technique presented in Section 4 (Theorems 4.2 and 4.3) we can get a reduced contact - free net system composed from two given contact - free ones.

So we define:

DEF. 11: $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2 = (B_1 \cup B_2, E_1 \cup E_2, F_1 \cup F_2, \mathcal{S}^I)$, where $\mathcal{S}^I = \mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_2 = \mathrm{mx}(\mathcal{S})$.

Obviously, the family of all contact - free net systems with the operation $\oplus$ becomes a commutative monoid. It is clear that $coex_{\mathcal{S}^I} = coex_{\mathcal{S}1} \otimes coex_{\mathcal{S}2}$. Hence, the present method meets the requirement proposed in the beginning of this section.

Besides, the consistency and semiconsistency of net systems are preserved by the above operation $\oplus$.

Theorem 5.2 *If Σ_1, Σ_2 are contact - free then:*
Σ_1, Σ_2 *are consistent (semiconsistent)* $\Longrightarrow$ $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ *is consistent (semiconsistent)* .

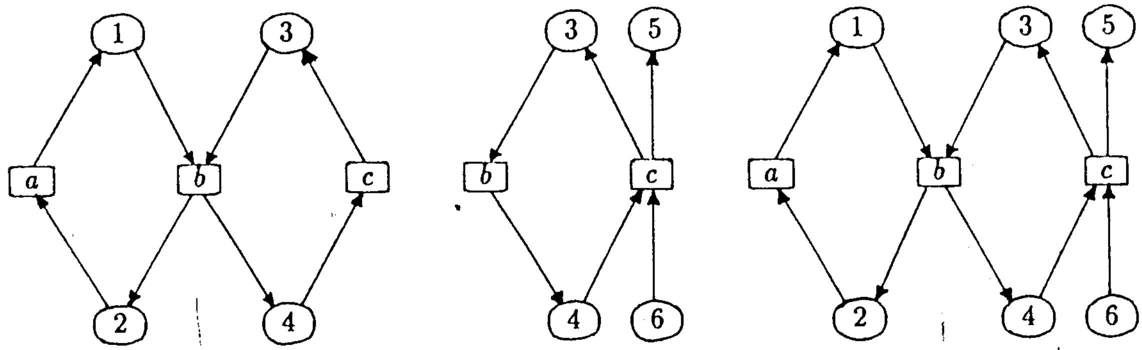
PROOF: Follows directly from Theorem 2.3 . □

Thus, the subfamily of consistent contact - free net systems and that of semiconsistent ones are submonoids of the monoid of contact - free net systems.

In the case of consistent contact - free net systems, there are two ways for constructing the state space of the composed net system. The first one is based on the state spaces of the subsystems (as Definition 11). The second way computes the coexistancy relation first, then determines the state space by using *kens*.

Ending this section we consider the following example characterising the approach presented above.

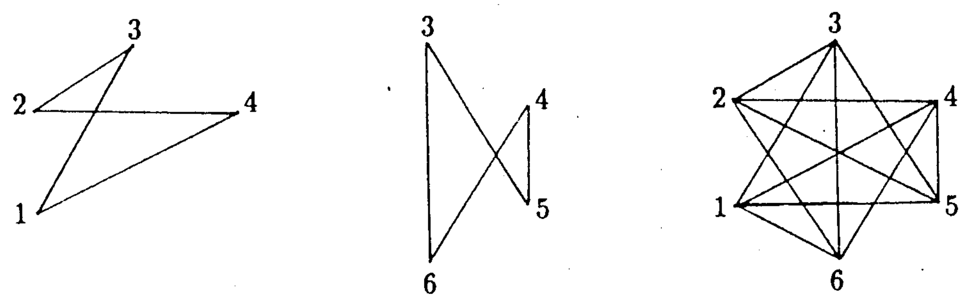
Example 5.1 Let $\Sigma_1 = (B_1, E_1, F_1, \mathcal{S}_1)$, where $N_1 = (B_1, E_1, F_1)$ is shown in Fig. 1a), $\mathcal{S}_1 = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$. This net system is contact - free.
The coexistancy relation $coex_{\mathcal{S}1}$ is shown in Fig. 2a). $\mathcal{S}_1 = kens(coex_{\mathcal{S}1})$, so Σ_1 is consistent.



a) N_1 b) N_2 c) N

Fig. 1

Let $\Sigma_2 = (B_2, E_2, F_2, \mathcal{S}_2)$, where $N_2 = (B_2, E_2, F_2)$ is shown in Fig. 1b).
$\mathcal{S}_2 = \{\{3,5\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\}\}$. It is easy to see that Σ_2 is contact - free and consistent.



a) b) c)

Fig. 2

$N = N_1 \cup N_2 = (B, E, F)$ as shown in Fig. 1c).
$\mathcal{S} = \{\{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{1,4,5\}, \{1,4,6\}, \{2,3,5\}, \{2,3,6\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{2,4,5\}, \{2,4,6\}\}$. So
$\mathcal{S}^I = \mathcal{S}_1 \uplus \mathcal{S}_2 = mx(\mathcal{S}) = \{\{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,4,5\}, \{1,4,6\}, \{2,3,5\}, \{2,3,6\}, \{2,4,5\}, \{2,4,6\}\}$.
The composed net system $\Sigma = (B, E, F, \mathcal{S}^I)$ is contact - free.
Its coexistancy relation $coex_{\mathcal{S}\mathcal{I}} = coex_{\mathcal{S}1} \otimes coexx_{\mathcal{S}2}$ is shown in Fig. 2c).
Clearly, $\mathcal{S}^I = kens(coex_{\mathcal{S}\mathcal{I}})$. Thus, Σ is consistent.

6 Conclusion

In this paper we have presented the formalization of net systems' composition problem and solved it for the important family of contact -free net systems.
The results presented are a step forward in answering the question how some concurrent systems can co-operate and what properties the composed systems have, for given subsystems. Using the equivalent transformation presented in [Rei85] for net systems, we can extend these results to some family of net systems, greater than that of contact - free net systems.
We feel that these investigations are a foundation to building principles for co-operation of concurrency systems.

Acknowledgement

I would like to thank Prof. R.K. Shyamasundar for the help given during my visit at the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, India.

References

[Che88] L.A. Cherkasova, *On Models and Algebras for Concurrent Processes*, Lecture Notes in Computer Science 324, 1988, pp. 27 – 43.

[Jan84] R. Janicki, *Net, Sequential Components and Concurrency Relations*, Theoretical Computer Science 29, 1984, pp. 87 – 121.

[Kot78] V.E. Kotov, *An Algebra for Parallelism based on Petri Nets,* Lecture Notes in Computer Science 64, 1978, pp. 39 – 55.

[Maz84] A. Mazurkiewicz, *Traces, Histories, Graphs: Instances of a Process Monoid,* Lecture Notes in Computer Science 176, 1984, pp. 115 – 133.

[Pet77] C.A. Petri, Non-Sequential Processes, ISF Report 77-01, GMD, Bonn, 1977.

[Pro81] P. Proszynski, *Petri Nets and Concurrency-like Relations*, Lecture Notes in Computer Science 107, 1981, pp. 471 – 478.

[Rei85] W. Reisig, Petri Nets: An Introduction, Springer-Verlag, 1985.

[Tha85] H.C. Thanh, Compositions of Marked Petri Nets, Ph.D. Thesis, Warsaw Technical University, Warsaw, 1985 (in Polish).

[ThP85] H.C. Thanh and P. Proszynski, A Formalization of Marked Simple Nets Composition, *Proceedings of the* 4^{th} *Hungarian Computer Science Conference*, Győr, Hungary, July 1985.

[Thi90] P.S. Thiagarajan, *Some behavioural aspects of Net theory,* Theoretical Computer Science 71, 1990, pp. 133 – 153.

On behavioural synchronizations in Net systems

HOÀNG CHÍ THÀNH
Department of Computer Science
Hanoi State University
90 – Nguyễn Trãi, Đống Đa, Hanoi
Vietnam

Abstract

In this paper, we define an operation on Net systems, such that with respect to two distinct semantics – interleaving based on firing sequences and non-interleaving based on traces – the operation is compositional.

Keywords: Elementary net system, Concurrent system, Synchronization, Concurrency, Conflict

1 Introduction

Concurrent systems are as large as difficult to design and analyse, because they can exhibit very complicated behaviours. So modular approachs have been used in investigating either the structure of models for concurrent systems [Che88, Kot78, Tha85] or their aspects [NaV86], especially their semantics [Maz85, SNP87].

To our knowledge V.E. Kotov is the first, who made the set of all Place/Transition nets become an algebra [Kot78] by defining five operations on it. When using the decomposition method to find the behavioural function of finite (0,1) - marked nets [Maz85], A. Mazurkiewicz pointed out the behavioural synchronization in the term of traces for pairs of those nets, whose sets of places are disjoint.

Concurrent systems considered here are Net systems [Rei85, Thi90]. Our purpose is to construct large systems out of smaller ones. The main requirement is to determine an explicit structure for their dynamic aspects. Based on the definition of synchronization of languages [GKR79], we define a composition operation which makes not only the set of all net systems a commutative monoid but also the families of firing sequence languages and trace languages generated by net systems, closed under the respective synchronization.

Hence after having composed, the net system's behaviours, as well as independency relation, concurrency relation and conflict relation can be built up from that of its immediate sub-components, without computing from beginning.

Special attention is paid to the family of contact - free net systems because it is a kernel of the family of net systems in the sense that the family of firing sequence languages and trace languages generated by arbitrary net systems is not larger than that by contact - free net systems.

The paper is organized as follows. First, some basic notions and facts concerning net systems are given. Section 3 presents two basic behavioural representations for net systems: firing sequence languages and trace languages and their relationship. The former is interpreted as an interleaving semantics and the latter as a non-interleaving one.
The main theorems of this paper are contained in Section 4. They assert the synchronization for behaviours of contact - free net systems. Section 5 points out that these results still hold for the family of net systems by extending the composition operation and using an equivalent transformation in [Rei85].
Some concluding remarks are presented in the last section.

2 Net Systems

Distributed systems usually have static and dynamic aspects. Net systems are one of sound models for representing these systems. In this section we introduce basic notions and notations used throughout this paper and formulate some useful facts.

A triple $N = (B, E, F)$ is called *a net* iff:
- B and E are disjoint sets,
- $F \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$ is a binary relation called *the flow relation of* N, such that:

$$domain(F) \cup range(F) = B \cup E \ .$$

The elements of B are called *conditions* and the elements of E are called *events*. The flow relation models a fixed "neighbourhood" relation between the conditions and events of a system. In the graphic representation, the conditions will be drawn as circles, the events as boxes and the elements of the flow relation as directed arcs.

Let $N = (B, E, F)$ be a net. Then, $X_N = B \cup E$ is the set of elements of N.
For every $x \in X_N$:

$$^{\cdot}x = \{y \mid (y, x) \in F\} \text{ is called the pre-set of } x,$$
$$x^{\cdot} = \{y \mid (x, y) \in F\} \text{ is called the post-set of } x.$$

A pair $(p, e) \in B \times E$ is called *a self-loop* iff $(p, e) \in F$ & $(e, p) \in F$. N is called *pure* iff F does not contain any self-loop.

A net N is called *simple* iff its two distinct elements do not have the same pre- and post-set, i.e. $\quad {}^{\cdot}x = {}^{\cdot}y \ \wedge \ x^{\cdot} = y^{\cdot}$ implies $x = y$, for every $x, y \in X_N$.

Let $N = (B, E, F)$ be a simple net. A subset $c \subseteq B$ is called *a case*. Let $e \in E$ and $c \subseteq B$. Then, e is said to be enabled at c (c - enabled, for short) iff ${}^{\cdot}e \subseteq c$ & $e^{\cdot} \cap c = \emptyset$. We denote: $c[e\rangle$
Let $e \in E$, $c \subseteq B$ and e be c - enabled. Then $d = (c - {}^{\cdot}e) \cup e^{\cdot}$ is called the reachable case from the occurrence of e in the case c, and we write: $c[e\rangle d$. If $c[e_1\rangle c_1[e_2\rangle c_2 \ldots c_n[e_{n+1}\rangle d$, we shall write $c[[e_1 e_2 \ldots e_{n+1}\rangle d$. So we adopt the following definition of the reachability of N :

The reachability relation of N is the relation $R_N = (R1 \cup R1^{-1})^*$, where $R1 \subseteq \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(B)$ is called the forward reachability in one step, given by:

$$(c, d) \in R1 \iff \exists e \in E, c[e\rangle d \ .$$

Note that R_N is an equivalence relation.

A net system we mean any quadruple: $\mathcal{N} = (B, E, F, C)$, where:

(1) $N = (B, E, F)$ is a simple net, called *the underlying net* of $\mathcal{N}$,

(2) $C \subseteq \mathcal{P}(B)$ is an union of some equivalence classes of R_N, such that:

$$\forall e \in E,\ \exists c \in C \text{ then } e \text{ is } c \text{ - enabled.}$$

C is called *the state space* of $\mathcal{N}$. The state space reflects a transition system associated with the net system. An equivalence class of R_N is called an orbit. So the state space consists of one or some orbits.

Lemma 2.1 *For every net system $\mathcal{N} = (B, E, F, C)$:*

1) The underlying net N is a pure net.

2) The state space C is a covering of B.

PROOF: 1) By the definition of net systems we have $(\forall e \in E, \exists c \in C)$, ${}^{\cdot}e \subseteq c \ \&\ c \cap e^{\cdot} = \emptyset$. This means $\forall e \in E$, ${}^{\cdot}e \cap e^{\cdot} = \emptyset$. So N is pure.

2) We have to show that: $(\forall p \in B)(\exists c \in C), p \in c$.

Let $p \in B$. Since $domain(F) \cup range(F) = B \cup E$, $\exists e \in E$ such that $(p, e) \in F$ or $(e, p) \in F$. So $p \in {}^{\cdot}e$ or $p \in e^{\cdot}$. By the definition of net systems, $\exists c \in C$, e is c - enabled.

Thus, $p \in {}^{\cdot}e \subseteq c$ or $p \in e^{\cdot} \subseteq d = (c - {}^{\cdot}e) \cup e^{\cdot} \in C$. □

Note that we admit the empty net system $\mathcal{N}_\emptyset = (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset)$.

Example 2.1 Let $N = (B, E, F)$ be the simple net shown in Figure 1,

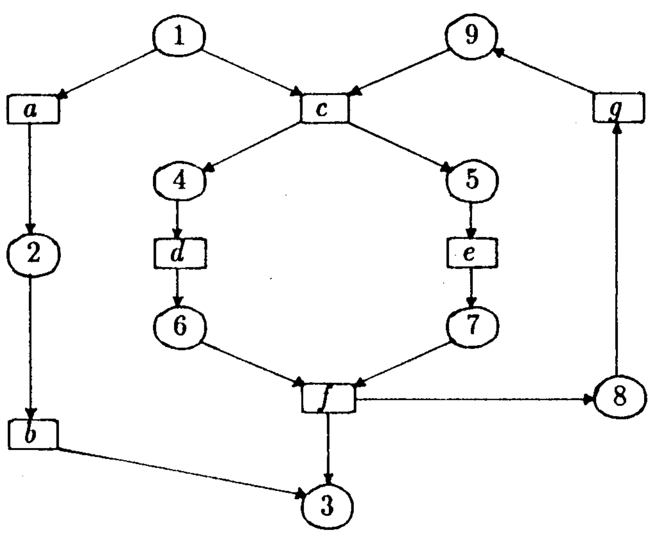


Fig. 1

and $C = \{\{1,9\}, \{2,9\}, \{3,9\}, \{1,8\}, \{2,8\}, \{3,8\}, \{4,5\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{6,7\}\}$.
The quadruple $\mathcal{N} = (B, E, F, C)$ is a net system.

Let $\mathcal{N} = (B, E, F, C)$ be a net system.
The net system $\mathcal{N}$ is said to be *contact - free* iff for each $e \in E$ and for each $c \in C$:

- ${}^{\cdot}e \subseteq c \Rightarrow e^{\cdot} \cap c = \emptyset$ and
- $e^{\cdot} \subseteq c \Rightarrow {}^{\cdot}e \cap c = \emptyset$.

Thus, in a contact - free net system the occurrence of an event in a case ensures that the event can be enabled at the case. For example, the net system given in Example 2.1 is contact

- free.

We have pointed out in [Tha85] that the above definition is equivalent to the definition of the safeness presented in [Jan85]. In the main part of this paper we will pay our attention to the family of contact - free net systems. We show that from a contact - free net system we can get a reduced net system, which has no "redundant" cases. To do so, we introduce some notions.

Let $\mathcal{N}_1 = (B, E, F, \mathcal{C}_1)$ and $\mathcal{N}_2 = (B, E, F, \mathcal{C}_2)$ be net systems having a common underlying net and holding the following condition: $(\forall c_1 \in \mathcal{C}_1)(\exists c_2 \in \mathcal{C}_2),\ c_1 \subseteq c_2$.
Then we shall write: $\mathcal{N}_1 \preceq \mathcal{N}_2$. In this case the contact - freeness of the "smaller" net system follows naturally from that of the "greater" one:

Theorem 2.1 *Let $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ be net systems and $\mathcal{N}_1 \preceq \mathcal{N}_2$. Then :*
$$\mathcal{N}_2 \textit{ is contact - free } \Rightarrow \mathcal{N}_1 \textit{ is contact - free.}$$

Given a net system $\mathcal{N} = (B, E, F, \mathcal{C})$. If its state space $\mathcal{C}$ contains cases, which are proper parts of other cases then the state space can be divided into two disjoint parts as follows:
$$\mathcal{C}^{II} = \{c' \mid c' \in \mathcal{C} \ \ \& \ \exists c \in \mathcal{C},\ c' \subset c\}\ ,\ \mathcal{C}^{I} = \mathcal{C} - \mathcal{C}^{II}\ .$$

Theorem 2.2 *If $\mathcal{N} = (B, E, F, \mathcal{C})$ is a contact - free net system then $\mathcal{C}^I$ and $\mathcal{C}^{II}$ are closed under the reachability relation $R_{\mathcal{N}}$.*

PROOF: It sufficies to prove that $\mathcal{C}^{II}$ is closed under $R_{\mathcal{N}}$. Let $c' \in \mathcal{C}^{II}$ and $d' \subseteq B$.
Assume that $(c', d') \in R1$, thus
$\exists e \in E, {}^{\cdot}e \subseteq c' \ \&\ e^{\cdot} \cap c' = \emptyset \ \&\ d' = (c' - {}^{\cdot}e) \cup e^{\cdot}$. So $d' \in \mathcal{C}$. Since $c' \in \mathcal{C}^{II}$ then $\exists c \in \mathcal{C}$, $c' \subset c$ and ${}^{\cdot}e \subseteq c' \implies {}^{\cdot}e \subset c$.
Applying the contact - freeness of $\mathcal{N}$, we have $e^{\cdot} \cap c = \emptyset$.
Let us put $d = (c - {}^{\cdot}e) \cup e^{\cdot}$. It implies $(c, d) \in R1$, so $d \in \mathcal{C}$ and $d' \subset d$. This means $d' \in \mathcal{C}^{II}$.
In a similar way we can prove that if $(d', c') \in R1$ then $d' \in \mathcal{C}^{II}$. □

Note that Theorem 2.1 is not always true when the underlying net N_1 is a proper subnet of N_2. It is obvious that $\mathcal{C}^I$ (similar to $\mathcal{C}$) is large enough such that every event of the system is enabled, but $\mathcal{C}^{II}$ may be not. So $\mathcal{C}^{II}$ can be ignored and we get the reduced contact - free net system: $\mathcal{N}^M = (B, E, F, \mathcal{C}^I)$ from $\mathcal{N}$.

This fact will be used in Section 4 for composing contact - free net systems.

3 Behaviours of Net Systems

The most primitive behavioural representation of net systems is firing sequences. But one can show that it is a kernel for constituting other behaviours, e.g. traces or step sequences...

Let $\mathcal{N} = (B, E, F, \mathcal{C})$ be a net system. So $N = (B, E, F)$ is its underlying net.

A relation $I \subset E \times E$ is said to be *the independency relation* of N iff:
$$(e, f) \in I \iff ({}^{\cdot}e \cup e^{\cdot}) \cap ({}^{\cdot}f \cup f^{\cdot}) = \emptyset\ .$$
It is easy to see that I is a symmetric and irreflexive relation (a sir-relation). The independency relation describes that in a distributed system two actions are independent iff they do not share any resource.

$D = E \times E - I$ is called *the dependency relation* of N .

Let $\alpha = e_1e_2...e_k \in E^*, (k \geq 0)$. α is called *a firing sequence* of $\mathcal{N}$ iff there exist $c_1, c_2, ..., c_{k+1} \in C$ such that $c_1[e_1\rangle c_2[e_2\rangle c_3 \ldots c_k[e_k\rangle c_{k+1}$.

The language of $\mathcal{N}$, denoted by $FS(\mathcal{N})$ is the set of all firing sequences of $\mathcal{N}$. Note that, we always may assume that $c[\varepsilon\rangle c$, where c is a case of $\mathcal{N}$, ε is the empty sequence of E^* .
So $\varepsilon \in FS(\mathcal{N})$, for every $\mathcal{N}$.

It is a well-known fact that the language generated by a net system is regular and closed under the In - operation, i.e. $FS(\mathcal{N}) = \text{In}\ (FS(\mathcal{N}))$, where for every alphabet A, and for every language $L \subseteq A^*$:

$$\text{In}\ (L) = \{x \mid x \in A^* \ \&\ \exists u, v \in A^*, uxv \in L\} .$$

By the definition of the language generated by a net system and the construction of the reduced net system presented above, we have:

Corollary 3.1 *For every contact - free net system $\mathcal{N}$: $FS(\mathcal{N}) = FS(\mathcal{N}^M)$.*

So every contact - free net system can be replaced by a behavioural equivalence contact - free net system without "redudant cases". In the rest of this paper, unless otherwise stated, a contact - free net system means a reduced contact - free net system.

Let $\mathcal{N} = (B, E, F, C)$ be a net system. Let $e_1, e_2 \in E$, $e_1 \neq e_2$ and $c \in C$. We say that e_1 and e_2 can *occur concurrently* at c, denoted $c[\{e_1, e_2\}\rangle$ iff $c[e_1\rangle$, $c[e_2\rangle$ and $(e_1, e_2) \in I$. And e_1, e_2 are said to be *in conflict* at c iff $c[e_1\rangle$ and $c[e_2\rangle$ but $(e_1, e_2) \notin I$ (see [Thi90]) .

We will point out that the concurrency and the conflict of two events can be "seen" from the language generated by a net system. Now we consider the structure of the language.

Theorem 3.1 *If $\alpha \in FS(\mathcal{N})$ and $\alpha = uefv$, where $u, v \in E^*$, $(e, f) \in I$ then $\beta = ufev \in FS(\mathcal{N})$.*

Proof: By the definition of the language $FS(\mathcal{N})$, there exist $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in C$, such that $c_1[[u\rangle c_2[e\rangle c_3[f\rangle c_4[[v\rangle c_5$. It is enough to show that $c_2[[fe\rangle c_4$.
Since $c_2[e\rangle c_3$ then $^{\cdot}e \subseteq c_2$, $e^{\cdot} \cap c_3 = \emptyset$ and $c_3 = (c_2 - {}^{\cdot}e) \cup e^{\cdot}$. Similarly, since $c_3[f\rangle c_4$ we have $^{\cdot}f \subseteq c_3$, $f^{\cdot} \cap c_4 = \emptyset$ and $c_4 = (c_3 - {}^{\cdot}f) \cup f^{\cdot}$. Because $^{\cdot}f \subseteq c_3 = (c_2 - {}^{\cdot}e) \cup e^{\cdot}$ and $(e, f) \in I$ so we get $^{\cdot}f \subseteq c_2$. On other hand $f^{\cdot} \cap c_3 = \emptyset$, i.e. $((c_2 - {}^{\cdot}e) \cup e^{\cdot}) \cap f^{\cdot} = \emptyset$. This involves $f^{\cdot} \cap c_2 = \emptyset$. Put $c_3' = (c_2 - {}^{\cdot}f) \cup f^{\cdot}$, we have $c_2[f\rangle c_3'$.
In a similar way we can prove that $c_3'[f\rangle c_4$. That means $c_2[[fe\rangle c_4$. □

From the proof of this theorem we can see that if $\alpha = uefv \in FS(\mathcal{N})$ and $(e, f) \in I$ then there exists a case $c \in C$, such that $c[\{e, f\}\rangle$. Otherwise, if $c[\{e, f\}\rangle$ then there exists at least one firing sequence $\alpha = uefv$, for some $u, v \in E^*$, such that $\alpha \in FS(\mathcal{N})$. (Of course, $\beta = uefv \in FS(\mathcal{N})$.) So two events are concurrent at a case iff there exists a firing sequence, in which one of them "stands" immediatly behind the other and they are independent. The case, they can occur concurrently at is just a case, at which either of them is enabled. In other words, e and f can occur concurrently at some case in the net system $\mathcal{N}$ iff $ef \in FS(\mathcal{N})$ and $(e, f) \in I$.

In the case when e, f are in conflict at a case c then first, $(e, f) \notin I$ and either of them may occur but not both. So e, f are in conflict at c iff $(e, f) \notin I$ and there are two firing sequences $\alpha_1 = ueg$, $\alpha_2 = ufh \in FS(\mathcal{N})$, where $u, g, h \in E \cup \{\varepsilon\}$, $e \neq h$ and $f \neq g$. c is the reachable case after the occurrence of u in these sequences.

So we introduce the following relations:

A relation $co \subseteq E \times E$ is called *the concurrency relation* of $\mathcal{N}$ iff:

$$(e,f) \in co \iff (\exists c \in \mathcal{C}), c[\{e,f\}\rangle \text{ in } \mathcal{N} .$$

A relation $cl \subseteq E \times E$ is called *the conflict relation* of $\mathcal{N}$ iff:

$$(e,f) \in cl \iff (\exists c \in \mathcal{C}), e,f \text{ are in conflict at } c \text{ in } \mathcal{N} .$$

Clearly, for a net system, $co \subseteq I$ and $cl \subseteq D$.

Now we define the trace language of a net system.

A concurrent alphabet (A, D) consists of a finite set A of symbols and a reflexive symmetric relation D, the dependency relation. Its complement $A \times A - D$, denoted by I, is called the independency relation, which is symmetric and irreflexive. Let $\sim_D \subseteq A^* \times A^*$ be the following relation:

$$x \sim_D y \iff (\exists e,f \in A)(\exists u,v \in A^*), (e,f) \in I \;\&\; x = uefv \;\&\; y = ufev .$$

Define $\approx\, = (\sim_D)^*$, i.e. $\approx$ is the symmetrical and transitive closure of $\sim_D$. Note that $\approx$ is an equivalence relation.
Let $[\alpha]_D$ denote the equivalence class of $\approx$ containing α . It is called *Mazurkiewicz trace* over D. The quotient algebra $(A^*, \circ, [\varepsilon]_D)/_{\approx}$, where $\circ$ is the concatenation, is called a trace algebra. Denote $T_D = \{[\alpha]_D \mid \alpha \in A^*\}$, $P_D = \mathcal{P}(T_D)$.

Let $\mathcal{N} = (B, E, F, C)$ be a net system. Then $N = (B, E, F)$ is its underlying net. Let I be its independency relation. So $D = E \times E - I$ is its dependency relation.
As presented in [Maz85], we recall the reachability relation of N in the term of traces as follows:

The reachability of N is the least function $\mathcal{R}_N : \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(B) \rightarrow P_D$ (with respect to the inclusion ordering of its values), such that:

(1) $[\varepsilon]_D \in \mathcal{R}_N(c,d) \Leftrightarrow c = d$;
(2) $[e]_D \in \mathcal{R}_N(c,d) \Leftrightarrow c[e\rangle d$, for $e \in E$;
(3) $t_1 \circ t_2 \in \mathcal{R}_N(c,d) \Leftrightarrow \exists s \in \mathcal{P}(B),\ t_1 \in \mathcal{R}_N(c,s) \;\&\; t_2 \in \mathcal{R}_N(s,d)$, for $t_1, t_2 \in T_D$.

The set $\tau(\mathcal{N}) = \bigcup_{c,d \in C} \mathcal{R}_N(c,d)$ is called *the trace language* generated by $\mathcal{N}$. By Theorem 3.1, we have:

$$\alpha \in FS(\mathcal{N}) \iff [\alpha]_D \in \tau(\mathcal{N}), \text{ for every } \alpha \in E^* .$$

Corollary 3.2 *For every net system $\mathcal{N}$: $\tau(\mathcal{N}) = FS(\mathcal{N})/_{\approx}$.*

A trace generated by a net system is indeed a collection of a number of firing sequences generated by the net system. So the firing sequence behaviour and the trace language behaviour of a net system have some common properties. We will show it in the next sections.

4 A Monoid of Contact - free Net Systems

Our main aim is to construct large concurrent systems out of smaller ones (especially, of atomic components). The construction is based on the synchronization of languages. So we recall some necessary notions.

Let A be an alphabet and ε denote the empty sequence. Given two alphabets A, B such that $B \subseteq A$. Let $h_B : A^* \rightarrow B^*$ be an erasing homomorphism given by:

$$\forall a \in A,\ h_B(a) = a \text{ if } a \in B \text{ and } \varepsilon \text{ otherwise;}$$

and $\forall x \in A^*$, $h_B(xa) = h_B(x)h_B(a)$. Instead of $h_B(x)$ we shall write $x_{|B}$ (x projected on B). Similarly, for every language $L \subseteq A^*$ and the alphabet B : $L_{|B} = \{x_{|B} \mid x \in L\}$.

For a language $L \subseteq A^*$, let $\overline{L}$ denote the least alphabet constituting L :

$$\overline{L} = \{a \in A \mid \exists u, v \in A^*, uav \in L\} .$$

For two languages L_1, L_2 , the language $L_1 \# L_2$ is called *the synchronization* of L_1 with L_2, defined as follows:

$$L_1 \# L_2 = \{x \mid x \in (\overline{L}_1 \cup \overline{L}_2)^* \ \& \ x_{|\overline{L}_1} \in L_1 \ \& \ x_{|\overline{L}_2} \in L_2\} .$$

The synchronization ensures that the occurrence orders and the number of occurrences of any symbol in its every sequence are the same as in the respective sequences from which this sequence has been constituted. So the operation # will play an important role in composing net systems.

Given two net systems $\mathcal{N}_1 = (B_1, E_1, F_1, C_1)$ and $\mathcal{N}_2 = (B_2, E_2, F_2, C_2)$. Without loss of generality, we can assume that the simpleness remains valid in both these net systems, i.e.:

$$(\forall x, y \in X_{N_1} \cup X_{N_2}),\ {}^{\cdot}x = {}^{\cdot}y \ \wedge \ x^{\cdot} = y^{\cdot} \ \Rightarrow \ x = y .$$

Let $FS(\mathcal{N}_1)$ and $FS(\mathcal{N}_2)$ denote the firing sequence languages of $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ respectively , and :
$FS = FS(\mathcal{N}_1) \# FS(\mathcal{N}_2)$ - the synchronization of $FS(\mathcal{N}_1)$ with $FS(\mathcal{N}_2)$.

It is natural to ask *whether one can build up a net system $\mathcal{N}$ from $\mathcal{N}_1$ and $\mathcal{N}_2$ such that its firing sequence language is FS* . The answer will be in the affirmative.

A similar assertion in the term of trace languages was achieved by Mazurkiewicz in [Maz85] for pairs of B - disjoint nets ($B_1 \cap B_2 = \emptyset$) .

In this and next section, our approach is devoted to the general case. First, we answer the question for the family of contact - free net systems, and then for the general case by using an equivalent transformation on net systems.

Given two contact - free net systems $\mathcal{N}_i = (B_i, E_i, F_i, C_i)$, $i = 1, 2$. Let us define:
$\mathcal{N} = (B, E, F, C)$, where:
$B = B_1 \cup B_2$,
$E = E_1 \cup E_2$,
$F = F_1 \cup F_2$,
$C = \{c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap (B_2 - B_1) \mid c_1 \in C_1 \ \& \ c_2 \in C_2\}$.
Denote: $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$. We show that $\mathcal{N}$ is just a net system that satisfies the above requirement. Furthermore, the contact - freeness is preserved by this synthesis.

Theorem 4.1 *If $\mathcal{N}_1$ and $\mathcal{N}_2$ are contact - free net systems then $\mathcal{N}$ is also a contact - free net system and $FS(\mathcal{N}) = FS(\mathcal{N}_1) \# FS(\mathcal{N}_2)$.*

PROOF: 1) First of all, we prove that the quadruple $\mathcal{N}$ is a net system.
It is easy to see that $N := N_1 \cup N_2 = (B_1 \cup B_2, E_1 \cup E_2, F_1 \cup F_2)$ is a simple net.

a) We have to show that C is closed under the reachability relation R_N of N .

Let $c \in C$ and $d \subseteq B$.
Assume that $(c, d) \in R1_N$, that means: $\exists e \in E, {}^{\cdot}e \subseteq c \ \& \ e^{\cdot} \cap c = \emptyset \ \& \ d = (c - {}^{\cdot}e) \cup e^{\cdot}$.
We introduce some following auxiliary notations. For each $e \in E$:

$${}^{\cdot}e_0 = {}^{\cdot}e \cap B_1 \cap B_2, \qquad {}^{\cdot}e_1 = {}^{\cdot}e \cap (B_1 - B_2), \qquad {}^{\cdot}e_2 = {}^{\cdot}e \cap (B_2 - B_1),$$
$$e_0^{\cdot} = e^{\cdot} \cap B_1 \cap B_2, \qquad e_1^{\cdot} = e^{\cdot} \cap (B_1 - B_2), \qquad e_2^{\cdot} = e^{\cdot} \cap (B_2 - B_1) .$$

Of course, ${}^{\cdot}e = {}^{\cdot}e_0 \cup {}^{\cdot}e_1 \cup {}^{\cdot}e_2$ and $e^{\cdot} = e_0^{\cdot} \cup e_1^{\cdot} \cup e_2^{\cdot}$.

Since $c \in \mathcal{C}$ then there exist $c_1 \in \mathcal{C}_1$ & $c_2 \in \mathcal{C}_2$, such that
$c = c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap (B_2 - B_1)$.
Let us put: $c_1' = c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2$ and $c_2' = c_2 \cap (B_2 - B_1) \cup c_1 \cap c_2$.
Thus, $c = c_1' \cup c_2'$ and ${}^\cdot e_0 \cup {}^\cdot e_i \subseteq c_i'$, $i = 1,2$. (Here ${}^\cdot e_0 \cup {}^\cdot e_i$ and $e_0^\cdot \cup e_i^\cdot$ are just ${}^\cdot e$ and $e^\cdot$ respectively in the net N_i, for $i = 1,2$.) Due to the contact - freeness of $\mathcal{N}_1$ and $\mathcal{N}_2$, we have:
${}^\cdot e_0 \cup {}^\cdot e_i \subseteq c_i' \subseteq c_i \in \mathcal{C}_i \Longrightarrow (e_0^\cdot \cup e_i^\cdot) \cap c_i = \emptyset$, $i = 1,2$.

$$
\begin{aligned}
\text{So:} \qquad d_i &= (c_i - ({}^\cdot e_0 \cup {}^\cdot e_i)) \cup (e_0^\cdot \cup e_i^\cdot) \in \mathcal{C}_i, \ i = 1,2 . \\
d_1 \cap (B_1 - B_2) &= ((c_1 - ({}^\cdot e_0 \cup {}^\cdot e_1)) \cup (e_0^\cdot \cup e_1^\cdot)) \cap (B_1 - B_2) \\
&= ((c_1 - ({}^\cdot e_0 \cup {}^\cdot e_1)) \cap (B_1 - B_2)) \cup ((e_0^\cdot \cup e_1^\cdot) \cap (B_1 - B_2)) \\
&= (c_1 \cap (B_1 - B_2) - {}^\cdot e_1) \cup e_1^\cdot .
\end{aligned}
$$

Analogously, we obtain:

$$
\begin{aligned}
d_2 \cap (B_2 - B_1) &= (c_2 \cap (B_2 - B_1) - {}^\cdot e_2) \cup e_2^\cdot . \qquad \text{Since} \\
d_i \cap (B_1 \cap B_2) &= ((c_i - ({}^\cdot e_0 \cup {}^\cdot e_i)) \cup (e_0^\cdot \cup e_i^\cdot)) \cap (B_1 \cap B_2) \\
&= (c_i \cap B_1 \cap B_2 - {}^\cdot e_0) \cup e_0^\cdot , \text{ for } i = 1,2 \text{ , thus} \\
d_1 \cap d_2 &= (d_1 \cap B_1 \cap B_2) \cap (d_2 \cap B_1 \cap B_2) \\
&= (c_1 \cap c_2 - {}^\cdot e_0) \cup e_0^\cdot .
\end{aligned}
$$

Applying the above equalities, we get:

$$
\begin{aligned}
d &= (c - {}^\cdot e) \cup e^\cdot \\
&= (c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap (B_2 - B_1) - ({}^\cdot e_0 \cup {}^\cdot e_1 \cup {}^\cdot e_2)) \cup (e_0^\cdot \cup e_1^\cdot \cup e_2^\cdot) \\
&= ((c_1 \cap (B_1 - B_2) - {}^\cdot e_1) \cup e_1^\cdot) \cup ((c_1 \cap c_2 - {}^\cdot e_0) \cup e_0^\cdot) \cup ((c_2 \cap (B_2 - B_1) - {}^\cdot e_2) \cup e_2^\cdot) \\
&= d_1 \cap (B_1 - B_2) \cup d_1 \cap d_2 \cup d_2 \cap (B_2 - B_1).
\end{aligned}
$$

From the construction of $\mathcal{C}$, we have $d \in \mathcal{C}$.

In a similar way we can prove that if $(d, c) \in R1_N$ then $d \in \mathcal{C}$.

b) We still have to show that: $\forall e \in E, \exists c \in \mathcal{C}$ such that e is c - enabled.

Let $e \in E = E_1 \cup E_2$.
Assume that $e \in E_1 - E_2$, then $\exists c_1 \in \mathcal{C}_1$, $c_1[e\rangle$. Hence ${}^\cdot e \subseteq c_1 \cap (B_1 - B_2)$ & $e^\cdot \cap c_1 = \emptyset$. For some $c_2 \in \mathcal{C}_2$, put $c = c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap (B_2 - B_1)$. Of course, ${}^\cdot e \subseteq c$ & $e^\cdot \cap c = \emptyset$, i.e. $c[e\rangle$ in $\mathcal{N}$.
In the case when $e \in E_2 - E_1$, we can proceed similarly.
Now assume that $e \in E_1 \cap E_2$, then $\exists c_i \in \mathcal{C}_i$, $c_i[e\rangle$ for $i = 1,2$.
So ${}^\cdot e_0 \cup {}^\cdot e_i \subseteq c_i'$ and $(e_0^\cdot \cup e_i^\cdot) \cap c_i' = \emptyset$. Put $c = c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap (B_2 - B_1)$.
Hence $c \in \mathcal{C}$ and we have: ${}^\cdot e = {}^\cdot e_1 \cup {}^\cdot e_0 \cup {}^\cdot e_2 \subseteq c_1' \cup c_2' = c$ and $e^\cdot \cap c = e^\cdot \cap (c_1' \cup c_2') = \emptyset$, i.e. $c[e\rangle$.

So the quadruple $\mathcal{N}$ becomes a net system.

2) Now we prove the contact - freeness of $\mathcal{N}$.
Let $e \in E$ and $c \in \mathcal{C}$ such that ${}^\cdot e \subseteq c$.
Thus, there exist $c_1 \in \mathcal{C}_1$, $c_2 \in \mathcal{C}_2$ and $c = c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap (B_2 - B_1)$. By the contact - freeness of $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ we have, for $i = 1,2$, $(e_0^\cdot \cup e_i^\cdot) \cap c_i = \emptyset$.
But $c_i' \subseteq c_i$, so $(e_0^\cdot \cup e_i^\cdot) \cap c_i' = \emptyset$.
Hence $e^\cdot \cap c = e^\cdot \cap (c_1' \cup c_2') = (e_0^\cdot \cup e_1^\cdot) \cap c_1' \cup (e_0^\cdot \cup e_2^\cdot) \cap c_2' = \emptyset$.
In the case when $e^\cdot \subseteq c$, the proof can be proceeded similarly.

3) To finish the proof, we have to show that, for each $\alpha \in E^*$:

$$\alpha \in FS(\mathcal{N}) \Longleftrightarrow \alpha_{|E_i} \in FS(\mathcal{N}_i), \ i = 1,2 .$$

or the following equivalent proposition:

$$(*) \qquad c[[\alpha\rangle d \text{ in } \mathcal{N}, \text{ where} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c_i[[\alpha_{|E_i}\rangle d_i \text{ in } \mathcal{N}_i,\ i = 1,2\ . \qquad (4.1)$$
$$c = c_1 \cap (B_1 - B_2) \cup c_1 \cap c_2 \cup c_2 \cap (B_2 - B_1)\ ,$$
$$d = d_1 \cap (B_1 - B_2) \cup d_1 \cap d_2 \cup d_2 \cap (B_2 - B_1)\ ,$$
$$c_1, d_1 \in \mathcal{C}_1\ \&\ c_2, d_2 \in \mathcal{C}_2$$

We prove (4.1) by induction with respect to the lenght of firing sequences generated by the composed net system $\mathcal{N}$:

a) If $\alpha = \varepsilon$ then this case is trivial.

b) If $\alpha = e$ and $e \in E$ then:

$$c[e\rangle d \text{ in } \mathcal{N} \Longleftrightarrow {}^{\cdot}e \subseteq c\ \&\ e^{\cdot} \subseteq d\ \&\ c - {}^{\cdot}e = d - e^{\cdot}\ .$$

Assume that $e \in E_1 - E_2$, then ${}^{\cdot}e_1 = {}^{\cdot}e, e_1^{\cdot} = e^{\cdot}, {}^{\cdot}e_0 = e_0^{\cdot} = {}^{\cdot}e_2 = e_2^{\cdot} = \emptyset\ \&\ {}^{\cdot}e \subseteq c_1,\ e^{\cdot} \subseteq d_1$, $c_1 - {}^{\cdot}e = d_1 - e^{\cdot}\ \&\ c_2 = d_2$. So

$(*) \Longleftrightarrow c_1[e\rangle d_1$ in $\mathcal{N}_1\ \&\ c_2[\varepsilon\rangle d_2$ in $\mathcal{N}_2 \Longleftrightarrow e \in FS(\mathcal{N}_1)\ \&\ \varepsilon \in FS(\mathcal{N}_2)$.

In the case $e \in E_2 - E_1$, analogously we have: $(*) \Longleftrightarrow \varepsilon \in FS(\mathcal{N}_1)\ \&\ e \in FS(\mathcal{N}_2)$.

Now let $e \in E_1 \cap E_2$, thus, for $i = 1,2$:

${}^{\cdot}e \cap B_i = {}^{\cdot}e_i \cup {}^{\cdot}e_0,\ e^{\cdot} \cap B_i = e_0^{\cdot} \cup e_i^{\cdot}$ and $({}^{\cdot}e_i \cup {}^{\cdot}e_0) \subseteq c_i\ \&\ (e_0^{\cdot} \cup e_i^{\cdot}) \subseteq d_i\ \&\ c_i - ({}^{\cdot}e_i \cup {}^{\cdot}e_0) = d_i - (e_0^{\cdot} \cup e_i^{\cdot})$.
Hence $(*) \Longleftrightarrow c_i[e\rangle d_i$ in $\mathcal{N}_i,\ i = 1,2$.

c) Assume that (4.1) holds for all $\alpha \in FS(\mathcal{N})$ of lenght less than or equal to n. We consider $\alpha e \in E^*$ with lenght$(\alpha e) = n + 1$. Thus,
$c[[\alpha e\rangle d$ in $\mathcal{N} \Longleftrightarrow (\exists s \in \mathcal{C}),\ s = s_1 \cap (B_1 - B_2) \cup s_1 \cap s_2 \cup s_2 \cap (B_2 - B_1),\ s_1 \in \mathcal{C}_1,\ s_2 \in \mathcal{C}_2,\ c[[\alpha\rangle s[e\rangle d$ in $\mathcal{N} \Longleftrightarrow c_i[[\alpha_{|E_i}\rangle s_i$ (by the inductive assumption) & $s_i[e_{|E_i}\rangle d_i$ (from the case b) in $\mathcal{N}_i$, $(i = 1,2)$ $\Longleftrightarrow c_i[[\alpha e_{|E_i}\rangle d_i,\ i = 1,2$.
Thus (4.1) holds in general, that completes the proof. □

Note that after having composed, the state space $\mathcal{C}$ may contain "redundant" cases. Using the reduction technique presented in Section 2 (Theorems 2.1 and 2.2) we can get a reduced net system composed from two given contact - free net systems.
So we define:

$\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}^M$ - the composed net system of $\mathcal{N}_1$ and $\mathcal{N}_2$.

If confusion can be excluded, we will also write $\mathcal{N}$ instead of $\mathcal{N}^M$.

Let CFNS, CFL denote the family of all contact - free net systems and the family of all firing sequence languages generated by contact - free net systems, respectively. As an immediate consequence of Theorem 4.1, we have:

Corollary 4.1 *$(CFNS, \oplus, \mathcal{N}_\emptyset)$ is a commutative monoid and CFL is closed under the synchronization operation $\#$.*

In the practical point of view, the operation $\oplus$ gives an useful way for constituting large systems from smaller ones, especially, for constituting their state spaces.

Let $N := N_1 \cup N_2$ be the underlying net of $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$ and I, D denote its independency and dependency relations, respectively. It is clear that $D = D_1 \cup D_2$.
So $I = \overline{D} = \overline{D_1 \cup D_2} = \overline{\overline{I_1} \cup \overline{I_2}}$. Using the sir-relations composition operation proposed in [Tha85] we have:

$$I = I_1 \otimes I_2 = I_1 \cup I_2 - (E_1 \cap E_2) \times (E_1 \cap E_2) \cup I_1 \cap I_2 \cup (E_1 - E_2) \times (E_2 - E_1)\ .$$

Let co, co_1, co_2 denote the concurrency relations, cl, cl_1, cl_2 the conflict relations of $\mathcal{N}, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ respectively.

Corollary 4.2 *1)* $co = co_1 \otimes co_2$, *2)* $cl = cl_1 \cup cl_2$.

So the composition operation preserves common pairs of concurrent events and develops concurrency.

Now we consider the synchronization of trace languages generated by net systems.

Given two concurrent alphabets (A, D) and (B, D'), where $B \subseteq A,\ D' \subseteq D$. The projection $h_B : A^* \to B^*$ can be extended to a mapping $h : T_D \to T_{D'}$ by setting: $h([\alpha]) = [h_B(\alpha)]$.

Let (A_1, D_1) and (A_2, D_2) be two concurrent alphabets. We define their union as:

$$(A, D) := (A_1, D_1) \cup (A_2, D_2) = (A_1 \cup A_2, D_1 \cup D_2) .$$

Let $h_i : T_D \to T_{D_i}$ $(i = 1, 2)$ be the corresponding projections. Given two trace languages $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ over D_1 and D_2, respectively. We define *their synchronization* $\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2$ as a trace language over D by:

$$\mathcal{L}_1 \parallel \mathcal{L}_2 = \{t \in T_D \mid h_1(t) \in \mathcal{L}_1 \ \&\ h_2(t) \in \mathcal{L}_2\} .$$

Return to contact - free net systems and the composition problem, we have:

Theorem 4.2 *If* $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ *are contact - free net systems and* $\mathcal{N}$ *is their composition then:*

$$\tau(\mathcal{N}) = \tau(\mathcal{N}_1) \parallel \tau(\mathcal{N}_2) .$$

PROOF: Follows from Corollary 3.2, Theorem 4.1 and the definition of the synchronization of trace languages.

Example 4.1 Consider the following net systems:

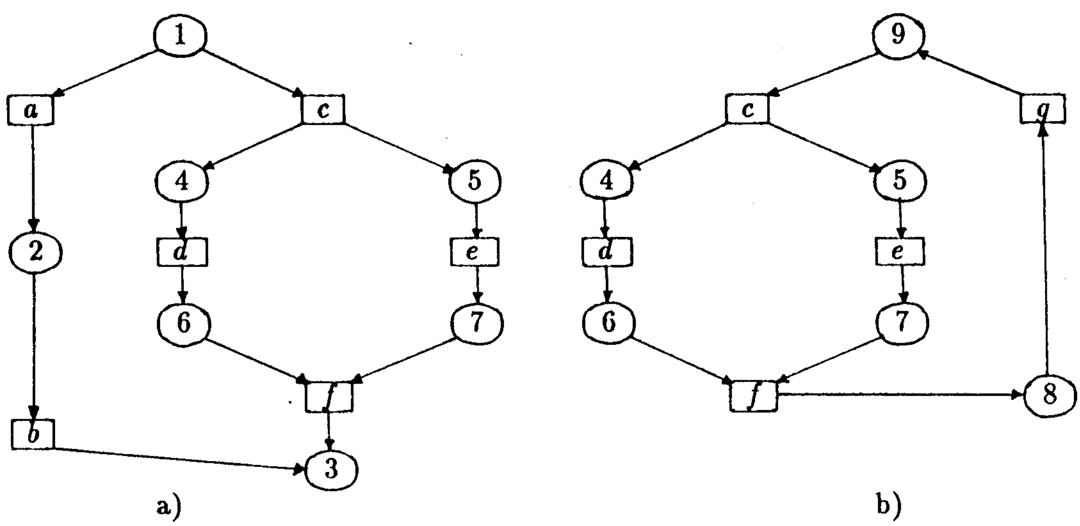


Fig. 2

Let $\mathcal{N}_1 = (B_1, E_1, F_1, C_1)$, where $N_1 = (B_1, E_1, F_1)$ is shown in Fig. 2a), $C_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4{,}5\}, \{4{,}7\}, \{5{,}6\}, \{6{,}7\}\}$. This net system is contact -free. The independency relation I_1 is shown in Fig. 3a).

$FS(\mathcal{N}_1) =$ In $(\{ab, cdef, cedf\})$. In this net system only $\{4, 5\}[\{d, e\}\rangle$ and a, c are in conflict at $\{1\}$. So $co_1 = \{(d, e)\}$ and $cl_1 = \{(a, c)\}$.

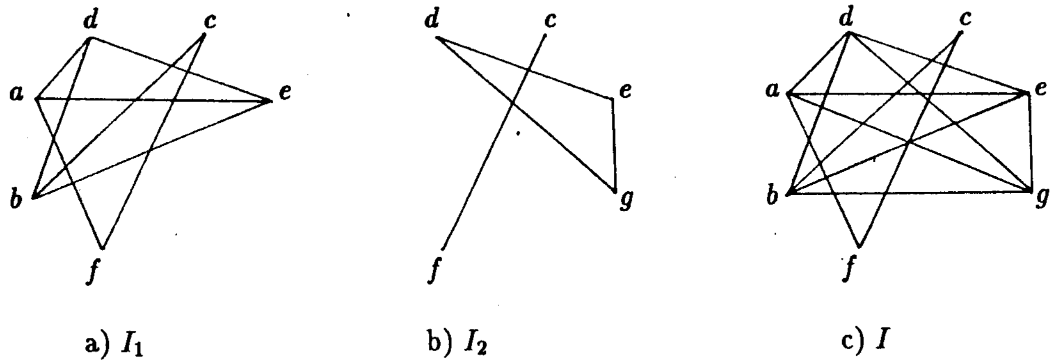


Fig. 3

Let $\mathcal{N}_2 = (B_2, E_2, F_2, \mathcal{C}_2)$, where $N_2 = (B_2, E_2, F_2)$ is given in Fig. 2b). $\mathcal{C}_2 = \{\{8\}, \{9\}, \{4,5\}, \{4,7\}, \{5,6\}, \{6,7\}\}$. This net system is also contact - free and I_2 is shown in Fig. 3b). $FS(\mathcal{N}_2) = \text{In}\ (\{cdefg, cedfg\}^*)$.
Only $\{4,5\}[\{d,e\}\rangle$ in this net system, i.e. $co_2 = \{(d,e)\}$, $cl_2 = \emptyset$.
$\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$ is the same net system as given in Example 2.1. $I = I_1 \otimes I_2$ as shown in Fig. 3c). $FS(\mathcal{N}) = FS(\mathcal{N}_1) \# FS(\mathcal{N}_2) = \text{In}\ (\{abg, gab, agb, cdefg, cedfg\})$.
$co = co_1 \otimes co_2 = \{(d,e), (a,g), (b,g)\}$, $cl = cl_1 \cup cl_2 = \{(a,c)\}$. So in this composed net system we have: $\{4,5\}[\{d,e\}\rangle$, $\{1,8\}[\{a,g\}\rangle$, $\{2,8\}[\{b,g\}\rangle$ and a, c are in conflict at $\{1,9\}$.

Unfortunately, the operation $\oplus$ is not well-defined in the family of all net systems. Consider the following example.

Example 4.2 Let $N_i = (B_i, E_i, F_i)$, $i = 1,2$ and $N = N_1 \cup N_2 = (B, E, F)$ be the simple nets shown in Figure 4,

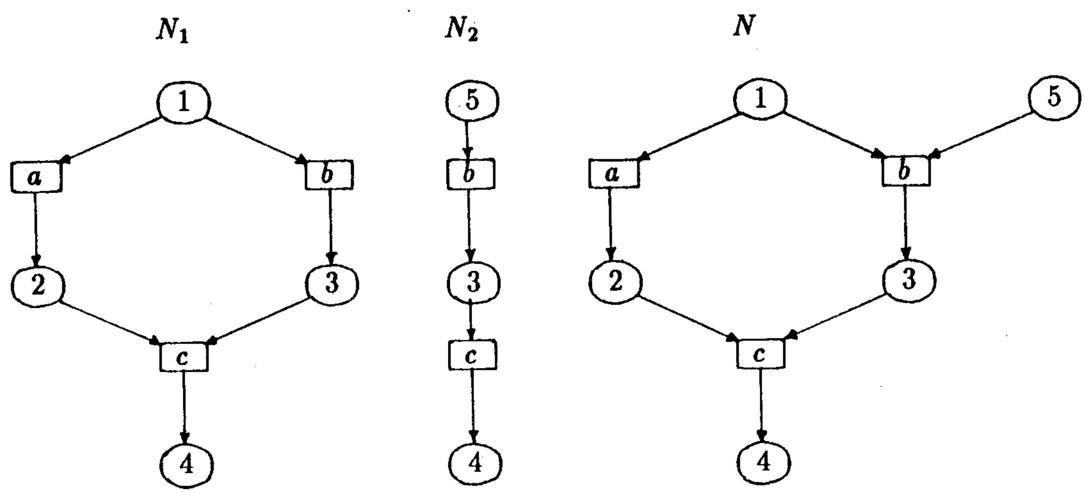


Fig. 4

and $\mathcal{C}_1 = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{4\}\}$, $\quad \mathcal{C}_2 = \{\{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}\}$.
The net systems $\mathcal{N}_i = (B_i, E_i, F_i, \mathcal{C}_i)$, $i = 1,2$, are not contact - free.
By the definition of the composition operation proposed above, we have here:
$\mathcal{C} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,5\}, \{2,3,5\}, \{5\}, \{1,5\}, \{2,5\}, \{4,5\}\}$.

$\mathcal{C}$ is not closed under the reachability relation R_N because $\{1,5\} \in \mathcal{C}$, $(\{1,5\}, \{3\}) \in R1_N$ but

$\{3\} \notin C$. So the quadruple $\mathcal{N} = (B, E, F, C)$ is not a net system.
Now we attempt to choose $C^I = \mathrm{mx}(C) = \{\{1,2,5\}, \{1,3,5\}, \{2,3,5\}, \{4,5\}\}$.
In this case $(\{1,2,5\},\{2,3\}) \in R1_N$ but $\{2,3\} \notin C^I$. Even (B, E, F, C^I) is not a net system too.

Nevertheless, the behavioural synchronizations of net systems will be shown when using an equivalent transformation.

5 Synchronizations of Net Systems

In order to answer the question issued in Section 4 in the general case, we will use an equivalent transformation in [Rei85] for net systems.

Let $\mathcal{N} = (B, E, F, C)$ and $\mathcal{N}' = (B', E', F', C')$ be net systems. $\mathcal{N}$ and $\mathcal{N}'$ are called *equivalent* iff there exist two bijections: $\lambda : E \rightarrow E'$ and $\gamma : C \rightarrow C'$ such that, for all cases $c_1, c_2 \in C$ and each $e \in E : c_1[e\rangle c_2 \Leftrightarrow \gamma(c_1)[\lambda(e)\rangle\gamma(c_2)$.

Lemma 5.1 *If $\mathcal{N}$ and $\mathcal{N}'$ are equivalent then $FS(\mathcal{N}) = FS(\mathcal{N}')$ (upto isomorphism)* .

Denote: $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}'$ iff $\mathcal{N}$ and $\mathcal{N}'$ are equivalent. Note that $\sim$ is an equivalence relation.

Let $\mathcal{N} = (B, E, F, C)$ be a net system and let $p, q \in B$.
i) q is called *the complement* of p iff $\cdot p = q\cdot$ and $p\cdot = \cdot q$.
ii) $\mathcal{N}$ is called *complete* iff each condition $p \in B$ has a complement $q \in B$.

Every net system can be transformed into an equivalent complete net system as follows:
Given a net system $\mathcal{N}$. Let $P \subseteq B$ be the set of those conditions which have no complement.
For each $p \in P$, we add a new condition $\hat{p}$, and put:
$F_P = \{(e, \hat{p}) \mid (p, e) \in F \ \& \ p \in P\} \cup \{(\hat{p}, e) \mid (e, p) \in F \ \& \ p \in P\}$.
For each $c \in C$, let $\gamma(c) = c \cup \{\hat{p} \mid p \in P \ \& \ p \notin c\}$.
Denote $\hat{P} = \{\hat{p} \mid p \in P\}$ and $\gamma(C) = \{\ \gamma(c) \mid c \in C\ \}$.
Then the net system $\hat{\mathcal{N}} = (B \cup \hat{P}, E, F \cup F_P, \gamma(C))$ is the unique complementation of $\mathcal{N}$. It is obvious that $\mathcal{N} \sim \hat{\mathcal{N}}$.
Let I and $\hat{I}$ be the independency relations of $\mathcal{N}$ and $\hat{\mathcal{N}}$, respectively. We have:

Theorem 5.1 *1) $I = \hat{I}$,   2) $\tau(\mathcal{N}) = \tau(\hat{\mathcal{N}})$* .

Proof: 1) Let ^-e and e^- denote the pre-set and post-set of e in $\hat{\mathcal{N}}$, while $\cdot e$ and $e\cdot$, as usual, denote the pre-set and post-set of e in $\mathcal{N}$. So:
$^-e = \cdot e \cup \{\hat{p} \mid p \in e\cdot \ \& \ p \in P\}$ and $e^- = e\cdot \cup \{\hat{p} \mid p \in \cdot e \ \& \ p \in P\}$.
Denote $\hat{P}_e = \{\hat{p} \mid p \in \cdot e \cup e\cdot \ \& \ p \in P\}$. We have:
$(e, f) \in I \Longleftrightarrow (\cdot e \cup e\cdot) \cap (\cdot f \cup f\cdot) = \emptyset \Longleftrightarrow (\cdot e \cup e\cdot) \cap (\cdot f \cup f\cdot) \cup \hat{P}_e \cap \hat{P}_f = \emptyset$
$\Longleftrightarrow (\cdot e \cup e\cdot \cup \hat{P}_e) \cap (\cdot f \cup f\cdot \cup \hat{P}_f) = \emptyset \Longleftrightarrow (^-e \cup e^-) \cap (^-f \cup f^-) = \emptyset \Longleftrightarrow (e, f) \in \hat{I}$.

2) Follows from Corollary 3.2, Lemma 5.1 and the part 1) of this theorem. □

So the equivalent transformation from a net system into its complementation preserves concurrency and conflict in these net systems.

Now we are able to extend the composition operation presented in Section 4 on the whole family of net systems.

Given two net systems $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$. Let $\hat{\mathcal{N}}_1$ and $\hat{\mathcal{N}}_2$ be their complementations, respectively. Hence, $\hat{\mathcal{N}}_1$ and $\hat{\mathcal{N}}_2$ are contact - free (see [Rei85]). So we define:

$$\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 := \hat{\mathcal{N}}_1 \oplus \hat{\mathcal{N}}_2 \ .$$

The family of net systems with the above operation and the indentity $\mathcal{N}_\emptyset$ becomes also a commutative monoid. Furthurmore,

$$FS(\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2) = FS(\mathcal{N}_1)\#FS(\mathrm{N}_2) \text{ and } \tau(\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2) = \tau(\mathcal{N}_1) \parallel \tau(\mathcal{N}_2) \ ,$$
$$co = co_1 \otimes co_2 \qquad \text{and} \qquad cl = cl_1 \cup cl_2 \ .$$

Summing up, we have:

Theorem 5.2 *The family of firing sequence languages (of trace languages) generated by net systems and that by contact - free net systems are the same and they are closed under the respective synchronization .*

Theorems 4.1, 4.2 and 5.2 give us an useful way to compute the behaviours of a composed net system from its components' behaviours, when they are already known (or easy to compute), without computing from beginning.

Let V, W be two monoids and let $\rho : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{W}$.
ρ is said to be *congruent* iff:

$$\forall u, u', v, v' \in \mathrm{V},\ \rho(u) = \rho(u') \wedge \rho(v) = \rho(v') \Rightarrow \rho(uv) = \rho(u'v').$$

Corollary 5.1 *FS and τ are congruent .*

6 Conclusion

We have presented a monoid of net systems, whose operation is compatible with the synchronizations of two basic semantics: firing sequences and trace languages. The results are a step towards answering the question how some concurrent systems can co-operate and what properties the composed systems have.
Though the presented approach is devoted to net systems and their two basic behaviours, it can be applied as well to other models and other semantics.
In many cases, the co-operation requires that an execution semantics of a composed concurrent system must be complete in the following meaning: Every execution of subsystems is taken part to build up the execution semantics of the composed system, i.e.

$$L_1\#L_{2|\overline{L_i}} = L_i \text{ for } i = 1, 2.$$

It causes to introduce the notion of a complete synchronization. An investigation of this property is under study.
Nevertheless, we believe that the behavioural synchronization will still be a basic charaterization of the composition of many models for concurrent systems.

Acknowledgments

The author would like to thank R. Janicki, P.S. Thiagarajan for their suggestions. This paper was written during a pleasant stay at the Computer Science Group, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, India.

References

[Che88] L.A.Cherkasova. *On Models and Algebras for Concurrent Processes*, Lecture Notes in Computer Science 324, 1988, pp.27 – 43.

[GKR79] G.Gyory, E.Knuth and L.Ronyai. *Grammatical Projections 1. Elementary constructions*, Working paper II/3, Computer and Automation Institute, Hungarian Academy of Science, 1979.

[Jan84] R.Janicki. *Nets, Sequential Components and Concurrency Relations*, Theoretical Computer Science 29, 1984, pp.87 – 121.

[Jan85] R.Janicki. *Trace Semantics for Communicating Sequential Processes* , Tech. Report R-85-12, Institute for Electr. Systems, Univ. of Aalborg, Aalborg, Denmark, 1985.

[Kot78] V.E.Kotov. *An algebra for parallelism based on Petri nets*, Lecture Notes in Computer Science 64, 1978, pp.39 – 55.

[Maz85] A.Mazurkiewicz. *Semantics of concurrent systems: A modular fixed-point trace approach*, Lecture Notes in Computer Science 188, 1985, pp.353 – 375.

[NaV86] Y.Narahari and N.Viswanadham. *On the invariants of coloured Petri nets*, Lecture Notes in Computer Science 222, 1986, pp.330 – 345.

[Rei85] W.Reisig. Petri Nets: An Introduction, Springer-Verlag, 1985.

[SNP87] R.K.Shyamasundar, K.T.Narayana and T.Pitassi. *Semantics for Nondeterministic Asynchronous Broadcast Networks* , Lecture Notes in Computer Science 267, 1987, pp.72 – 83.

[Tha85] Hoàng Chí Thành. *Compositions of Marked Petri Nets*, Ph.D. Thesis, Warsaw Technical University, Poland, 1985, (in Polish).

[Tha91] Hoàng Chí Thành. *Behavioural Synchronization of Net Systems*, Proceedings of the National Seminar on Theoretical Computer Science, July 4 - 6, 1991, Madras, India, pp.136 – 145.

[Thi90] P.S.Thiagarajan. *Some behavioural aspects of Net theory*, Theoretical Computer Science 71, 1990, pp.133 – 153.

[Win80] J.Winkowski. *Behaviours of Concurrent Systems*, Theoretical Computer Scence 12, 1980, pp.36 – 60.

ISSN 0866 - 8612

TẠP CHÍ KHOA HỌC

JOURNAL OF SCIENCE

KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NATURAL SCIENCES

4

1994

ĐẠI HỌC TỔNG HỢP HÀ NỘI

HANOI UNIVERSITY

TẠP CHÍ KHOA HỌC No 4 - 1994

MỘT VÀI KHÍA CẠNH MỞ RỘNG CHO LỚP CÁC PHỤ THUỘC BOOLE

Vũ Ngọc Loãn
Khoa Toán Cơ - Tin học, Đại học Tổng hợp Hà Nội

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong khoảng một thập kỷ qua, lớp các phụ thuộc Boole trong mô hình quan hệ đã thực sự được nhiều người quan tâm. Trong [7] đã giới thiệu về họ các phụ thuộc này và một số tính chất cơ bản của chúng. Tiếp theo [1, 2] đã phát triển các kết quả đối với lớp các phụ thuộc Boole. Các tác giả đã quan tâm đến một lớp con khá rộng của nó là lớp các phụ thuộc Boolean dương tổng quát (PTBDTQ). Đối với lớp này định lý tương đương về tính dẫn được trong lớp các quan hệ có số bộ tùy ý cũng như trong lớp các quan hệ chỉ bao gồm có hai bộ hay trong lôgic mệnh đề đã được phát biểu và chứng minh trong [5]. Ngoài ra một số vấn đề như bài toán thành viên, bài toán cập nhật, quan hệ Armstrong,... cũng đã được đề cập đến.

Bài viết này trình bày về một kiểu lôgic đa trị mà nó là sự mở rộng tự nhiên của khái niệm lôgic hai trị thông thường và nêu một vài hướng có thể ứng dụng nó vào việc nghiên cứu các ràng buộc dữ liệu trong mô hình dữ liệu quan hệ. Dựa vào lôgíc đa trị ta có thể đưa ra một số khái niệm và kết quả liên quan đến lớp các phụ thuộc Boole đa trị mà những điều đó là sự mở rộng thực sự của một số khái niệm và kết quả đã có

Bài viết gồm 4 phần. Phần đầu giới thiệu chung. Phần hai nêu một số khái niệm và trình bày một số kết quả cơ bản liên quan đến lôgic đa trị. Đó là những điều cần thiết cho việc nghiên cứu một số bài toán đối với lớp phụ thuộc Boole đa trị. Phần ba, trình bày khái niệm về lớp các phụ thuộc Boole đa trị. Một lớp con quan trọng của nó là lớp các phụ thuộc Boole dương đa trị (PTBDĐT) sẽ được quan tâm nhiều khi nghiên cứu các bài toán thành viên, quan hệ Armstrong,... trong mô hình quan hệ. Trong phần bốn đề xuất một vài hướng nghiên cứu khi sử dụng lôgic đa trị cũng như các loại phụ thuộc Boole đa trị.

2. MỘT KIỂU LÔGIC ĐA TRỊ

Định nghĩa 2.1. Cho U là một tập hữu hạn khác trống gồm n phần tử và $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Nói rằng trên U xác định một lôgic đa trị nếu:

Với mỗi thuộc tính $A_i \in U$, $1 \leq i \leq n$ có tập B_i hữu hạn được gọi là miền đánh giá của biến lôgic A_i thỏa mãn các điều sau:

1. $B_i \subseteq [0, 1]$
2. Nếu $s \in B_i$ thì $1 - s \in B_i$
3. $1 \in B_i$

Đặt $K = \cup B_i$. Mỗi $s \in K$ được gọi là một hằng lôgic. Giả sử $s_1, s_2 \in K$, ta xác định các liên kết lôgic (các phép toán) $\vee, \wedge, \longrightarrow, \rceil$ trên K như sau:

$$s_1 \vee s_2 = \max\{s_1, s_2\}, \quad s_1 \wedge s_2 = \min\{s_1, s_2\}, \quad s_1 \longrightarrow s_2 = \max\{1 - s_1, s_2\}, \quad \rceil s_1 = 1 - s_1.$$

Các phép toán lôgic đó tương ứng được gọi là phép tuyển, hội, phủ định, kéo theo.

Ký hiệu $B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$. Một ánh xạ $x : U \longrightarrow B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n$ sao cho $x(A_i) \in B_i$, $1 \leq i \leq n$ được gọi là một đánh giá trên U. Nếu $x(A_i) = x_i$ với $1 \leq i \leq n$ thì ký hiệu x bởi $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$. Rõ ràng tập tất cả đánh giá trên U là hữu hạn.

Định nghĩa 2.2. Các phần tử của U được gọi là các biến lôgic. Mỗi hằng lôgic trong K, mỗi biến lôgic trong U được gọi là một công thức.

Giả sử g, h là các công thức khi đó ta có thể tạo ra các công thức mới nhờ các liên kết lôgic $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\longrightarrow$. Như vậy ta có $(g \wedge h)$, $(g \vee h)$, (g), $(g \longrightarrow h)$ là các công thức mới. Gọi F là tập tất cả các công thức được tạo bởi tập U và các liên kết lôgic đã nêu ở trên. Mỗi $f \in F$ được gọi là một phụ thuộc Boole đa trị.

Cho $f \in F$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$, khi đó ta gọi $f(x)$ là giá trị chân lý của f đối với đánh giá x và được xác định như sau:

Nếu f là một biến $A \in B_i$ thì $f(x) = x_i$. Khi f được tạo bởi các công thức g, h nhờ các liên kết $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\longrightarrow$ thì $f(x)$ được xác định một cách truy hồi như sau:

. Khi $f = (g \wedge h)$ thì $f(x) = (g \wedge h)(x) = g(x) \wedge h(x)$

. Khi $f = (g \vee h)$ thì $f(x) = (g \vee h)(x) = g(x) \vee h(x)$

. Khi $f = (g \longrightarrow h)$ thì $f(x) = (g \longrightarrow h)(x) = g(x) \longrightarrow h(x)$

. Khi $f = \rceil(g)$ thì $f(x) = \rceil(g)(x) = \rceil(g(x))$

Nhận thấy rằng với $f \in F$, $\forall x \in B$ thì $f(x) \in K$.

Để cho ngắn gọn, trong một số phần sau thay cho $(g \wedge h)$, $(g \vee h)$ $(\rceil g)$, $(g \longrightarrow h)$ ta viết $g \wedge h$, $g \vee h$, $\rceil g$, $g \longrightarrow h$ một cách tương ứng.

Định nghĩa 2.3. Cho T là một tập nào đó các đánh giá trên U và g, h là hai công thức trên U. Ta nói rằng g và h là tương đương trên T, ký hiệu là:

$$g \overset{T}{=} h$$

nếu và chỉ nếu $x \in T$ có $g(x) = h(x)$. Dễ thấy rằng quan hệ trên là quan hệ tương đương. Khi $T = B$ thì nói rằng g tương đương với h và ký hiệu bởi $g = h$.

Giả sử g, h, $k \in F$, $x \in B$, khi đó dễ dàng kiểm tra được tính đúng đắn các bổ đề 2.1, 2.2 sau đây:

Bổ đề 2.1.

1. $g \wedge h = h \wedge g$
2. $(g \wedge h) \wedge k = g \wedge (h \wedge k)$
3. $g \vee h = h \vee g$
4. $(g \vee h) \vee k = g \vee (h \vee k)$

Bổ đề 2.2. Với $g \in F$ ta có

1. $\rceil(\rceil g) = g$
2. $g \longrightarrow h = \rceil g \vee h$

Bổ đề 2.3. Với giả thiết như các bổ đề trên, những khẳng định sau là đúng:

Bổ đề 2.4. Với mọi $g, h \in F$ ta có

1. $g \vee g \wedge h = g$
2. $g \wedge (g \vee h) = g$
3. $g \vee (\rceil g) \wedge h = g \vee h$
4. $\rceil g \vee g \wedge h = \rceil g \vee h$

Chứng minh. Tính chất 1., 2. là rõ ràng. Tính chất 3., 4. cũng nhận được do bổ đề 2.3.

Định nghĩa 2.4. Một hội sơ cấp là một công thức được tạo bởi các biến sơ cấp, các phủ định của các biến sơ cấp và liên kết lôgic $\wedge$.

Định nghĩa 2.5. Một tuyển sơ cấp là một công thức được tạo bởi các biến sơ cấp, các phủ định của các biến sơ cấp và liên kết lôgic $\vee$.

Định nghĩa 2.6. Một công thức lôgic được gọi chuẩn tắc tuyển nếu nó có dạng sau: $H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_k$, trong đó mỗi H_i, $1 \leq i \leq n$ là một hội sơ cấp.

Định nghĩa 2.7. Một công thức lôgic được gọi là chuẩn tắc hội nếu nó có dạng sau: $T_1 \wedge T2 \wedge \cdots \wedge T_k$, trong đó mỗi T_i $1 \leq i \leq n$ là một tuyển sơ cấp.

Lưu ý rằng mỗi hội sơ cấp là một dạng chuẩn tắc tuyển và mỗi tuyển sơ cấp là một dạng chuẩn tắc hội. Một công thức lôgic được gọi là có dạng chuẩn tắc hoặc ngắn gọn là chuẩn tắc nếu nó là một chuẩn tắc hội hoặc là một chuẩn tắc tuyển. Dễ dàng thấy khẳng định sau là đúng.

Bổ đề 2.5.

a. Phủ định một hội sơ cấp là một tuyển sơ cấp.

b. Phủ định một tuyển sơ cấp là một hội sơ cấp.

Bổ đề 2.6.

a. Tuyển của hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển có thể biểu diễn trong một công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển.

b. Hội của hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc hội có thể biểu diễn trong một công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc hội.

c. Hội của hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển có thể biểu diễn trong một công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển.

d. Phủ định một chuẩn tắc tuyển là một chuẩn tắc hội và ngược lại, phủ định một chuẩn tắc hội là một chuẩn tắc tuyển.

Chứng minh.

a. Giả sử hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển là T_1, T_2 với $T_1 = H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_p$, $T_2 = K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_q$. Trong đó $H_1, H_2, \ldots, H_p$, $K_1, K_2, \ldots, K_q$ là các chuẩn tắc hội. Đặt $T = T_1 \vee T_2 = (H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_p) \vee (K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_q)$ (1). Theo bổ đề 2.1. ta thấy rằng $T = H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_p \vee K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_p$ là một chuẩn tắc tuyển.

b. Cũng tương tự như phần a.

c. Giả sử hai công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc tuyển là T_1, T_2 với $T_1 = H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_p$, $T_2 = K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_q$. Với $x \in B$, đặt $a = \max\{H_1(x), H_2(x), \ldots, H_p(x)\}$, $b = \max\{K_1(x), K_2(x), \ldots, K_q(x)\}$. Giả sử $a = H_i(x)$, $b = K_j(x)$. Đặt $T = T_1 \wedge T_2 = (H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_p) \wedge (K_1 \vee K_2 \vee \cdots \vee K_q)$ (1). Ta có $T(x) = \min\{a, b\}$. Đặt $P = H_1 \wedge$

$K_1 \vee H_1 \wedge K_2 \vee \cdots \vee H_1 \wedge K_q \vee H_2 \wedge K_1 \vee \cdots \vee H_2 \wedge K_q \vee \cdots \vee H_p \wedge K_1 \vee H_p \wedge K_2 \vee \cdots \vee H_p \wedge K_p$. Rõ ràng P là một chuẩn tắc tuyển. Cũng dễ thấy $P(x) \leq a$ và $P(x) \leq b$, vậy $P(x) \leq \min\{a, b\}$.

Mặt khác theo hệ quả có $P(x) \geq (H_i \wedge K_j)(x) = \min\{a, b\}$. Từ đó $P(x) = \min\{a, b\}$. Vậy với mọi $x \in B$ thì $T(x) = P(x)$. Do đó $T = P$, tức là hội của hai chuẩn tắc tuyển có thể biểu diễn ở dạng chuẩn tắc tuyển.

d. Giả sử T là chuẩn tắc tuyển, $T = H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_p$ trong đó H_i $1 \leq i \leq p$ là các hội sơ cấp. Đặt $H = T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_p$ với $T_i = \rceil H_i$. Do bổ đề 2.5. suy ra với $1 \leq i \leq p$ thì T_i là tuyển sơ cấp. Và H là một chuẩn hội.

Giả sử bất kỳ $x \in B$, ta đặt $T(x) = a$. Khi đó $(\rceil T)(x) = 1 - a$ và với $1 \leq i \leq p$, $H_i(x) \leq a$ và tồn tại H_j sao cho $H_j(x) = a$. Ta có $T_j(x) = 1 - a$, i, $1 \leq i \leq p$, $T_j(x) \leq T_i(x)$. do đó $H(x) = T_j(x) = 1 - a$. Suy ra $\rceil T = H$, tức là phủ định của một chuẩn tắc tuyển là một chuẩn tắc hội. Phần còn lại, tương tự.

Bổ đề 2.7. Cho H là một chuẩn tắc hội, khi đó sẽ tồn tại một công thức lôgic T ở dạng chuẩn tắc tuyển sao cho $H = T$.

Chứng minh. Giả sử H là một công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc hội và có dạng $H = T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_k$, trong đó mỗi T_i, $1 \leq i \leq n$ là một tuyển sơ cấp. Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại một chuẩn tắc tuyển T, sao cho $H = T$. Chứng minh quy nạp theo k.

Với $k = 1$, hiển nhiên khẳng định là đúng.

Giả sử bổ đề trên đã đúng cho mọi $k < p$. Ta sẽ chứng minh nó đúng với $k = p$. Thật vậy, đặt $H_1 = T_1 \wedge T_2 \wedge \cdots \wedge T_{k-1}$. Theo giả thiết quy nạp tồn tại một công thức lôgic S ở dạng chuẩn tắc tuyển sao cho $H_1 = S$. Vậy $H = S \wedge T_k$, tức là H là hội của hai chuẩn tắc tuyển. Theo bổ đề 2.6. suy ra có một chuẩn tắc tuyển T sao cho $H = T$. Đó là điều cần chứng minh. Từ bổ đề này ta có ngay hệ quả sau:

Hệ quả 2.2. Mỗi công thức lôgic ở dạng chuẩn tắc thì luôn luôn có thể biểu diễn được trong dạng chuẩn tắc tuyển.

Bổ đề 2.8. Giả sử C_1, C_2 là hai chuẩn tắc khi đó sẽ tồn tại các công thức M, N, P, Q cũng ở dạng chuẩn tắc sao cho $M = C_1 \vee C_2$, $N = C_1 \wedge C_2$, $P = \rceil C_1$, $Q = C_1 \longrightarrow C_2$.

Chứng minh. Áp dụng hệ quả 2.2, các bổ đề 2.2, 2.5 và 2.6. ta suy ra điều cần chứng minh.

Định lý 2.1. Mọi công thức lôgic luôn luôn có thể biểu diễn được trong dạng chuẩn tắc.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng quy nạp theo số các liên kết $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\longrightarrow$ có mặt trong công thức C.

Khi số liên kết $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\longrightarrow$ trong C xuất hiện không quá một thì dễ thấy rằng khẳng định là đúng.

Giả sử rằng trong mọi công thức C mà số k các liên kết $\wedge$, $\vee$, $\rceil$, $\longrightarrow$ xuất hiện trong nó không quá p thì khẳng định đúng. Ta sẽ chứng minh khẳng định đúng với $k = p + 1$. Theo cách xây dựng công thức C sẽ tồn tại hai công thức C_1, C_2 sao cho $C = C_1 \wedge C_2$ hoặc $C = C_1 \vee C_2$ hoặc $C = \rceil C_1$ hoặc $C = C_1 \longrightarrow C_2$. Vì C có $p + 1$ các liên kết suy ra các công thức C_1 và C_2 đều có không quá p các liên kết lôgic. Theo giả thiết quy nạp sẽ tồn tại hai công thức D_1, D_2 trong dạng chuẩn tắc là $C_1 = D_1$, $C_2 = D_2$. Theo bổ đề 2.8, suy ra tồn tại các công thức M, N, P, Q ở dạng chuẩn tắc sao cho $M = D_1 \wedge D_2$, $N = D_1 \vee D_2$, $P = \rceil D_1$, $Q = D_1 \longrightarrow D_2$, Do $C = M$ hoặc $C = N$ hoặc $C = P$ hoặc $C = Q$ suy ra định lý được chứng minh.

3. PHỤ THUỘC BOOLE ĐA TRỊ

Giả sử $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là tập các thuộc tính. Với mỗi A_i $1 \le i \le n$ có một tập d_i nào đó gồm ít nhất hai phần tử được gọi là miền trị của thuộc tính A_i. Với $A \in U$, miền trị của A còn được ký hiệu bởi dom(A). Giả sử trên U đã xác định một lôgic đa trị và các miền đánh giá của A_i được ký hiệu B_i thỏa các yêu cầu như trong định nghĩa 2.1.

Một tập con R của tích $d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n$ được gọi là một quan hệ trên U. Mỗi $t \in R$ được gọi là một bộ. Quan hệ R với tập thuộc tính U được ký hiệu là $R(U)$. Giả sử $t \in R$, $A \in U$ khi đó ký hiệu $t.A$ là giá trị của t đối với thuộc tính A.

Định nghĩa 3.1. Với mỗi tập d_i, $1 \le i \le n$, ta xét ánh xạ $\alpha_i : d_i \times d_i \longrightarrow B_i$ thỏa mãn các điều sau:

1. $(a \in d_i)(\alpha_i(a,a) = 1)$,
2. $(a, b \in d_i)(\alpha_i(a,b) = \alpha_i(b,a))$,
3. $(s \in B_i$, có $a, b \in d_i)(\alpha_i(a,b) = s)$.

Ví dụ 3.1. Giả sử $B_i = \{0, 1\}$, d_i là một tập mà trên đó có quan hệ so sánh $=$ (bằng). Khi đó với $a, b \in d_i$, ta xác định

$$\begin{aligned} \alpha_i(a,b) &= 1 \quad \text{nếu} \quad a = b \\ &= 0 \quad \text{nếu} \quad a \ne b. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.2. Giả sử $B_i = \{0, 1\}$, d_i là tập các từ trên một bảng chữ khác trống, ta định nghĩa: $a, b \in d_i$

$$\begin{aligned} \alpha_i(a,b) &= 1 \quad \text{nếu} \quad a, b \text{ là hai từ có cùng độ dài} \\ &= 0 \quad \text{ngược lại} \end{aligned}$$

Ví dụ 3.3. Giả sử $Bi = \{0, 0.25, 0.75, 1\}$, d_i là tập các từ trên một bảng chữ khác trống. Với $a, b \in d_i$ ta xác định:

$$\begin{aligned} \alpha_i(a,b) &= 1 && \text{nếu } a, b \text{ là hai từ như nhau.} \\ \alpha_i(a,b) &= 0,75 && \text{nếu } a, b \text{ khác nhau nhưng có cùng} \\ & && \text{ký tự đầu tiên và có cùng độ dài.} \\ \alpha_i(a,b) &= 0,25 && \text{nếu } a, b \text{ có cùng ký tự đầu tiên nhưng khác độ dài} \\ & && \text{hoặc là chúng khác nhau nhưng có cùng độ dài.} \\ \alpha_i(a,b) &= 0 && \text{trong các trường hợp khác.} \end{aligned}$$

Dễ thấy các α_i trong ba ví dụ trên thỏa mãn các yêu cầu của định nghĩa.

Với tập F các công thức trên U, ta xét các định nghĩa sau:

Định nghĩa 3.2. Xét $m \in [0,1]$, $f \in F$, $\Sigma \subseteq F$, đặt $T_f^m = \{x \in B \mid f(x) \ge m\}$ và $T_\Sigma^m = \{x \in B \mid \forall f \in \Sigma, f(x) \ge m\}$. Nhận thấy $T_\Sigma^m = \cap\{T_f^m \mid f \in \Sigma\}$.

Định nghĩa 3.3. Giả sử f và g là hai công thức và $m \in [0,1]$. Ta nói rằng g là m-suy dẫn f hay f là m-suy dẫn được từ g và ký hiệu là $g \models^{m} f$ khi và chỉ khi với mọi $x \in B$ thỏa $g(x) \ge m$, ta có $f(x) \ge m$. Hai công thức f và g được gọi là m-tương đương nếu $f \models^{m} g$ và $g \models^{m} f$

Với $\Sigma \subseteq F$, $f \in F$ nói rằng Σ là m-suy dẫn f hay f là m-suy dẫn được từ tập Σ, ký hiệu là $\Sigma|\overset{m}{-} f$ nếu $\forall g \in \Sigma$ ta có $g|\overset{m}{-} f$. Giả sử $\Sigma, \Gamma \subseteq F$, ta nói rằng Γ là m-dẫn được từ Σ, ký hiệu là $\Sigma|\overset{m}{-}\Gamma$ nếu $\Sigma|\overset{m}{-} f$ với $\forall f \in \Gamma$.

Một công thức $f \in F$ được gọi là một phụ thuộc Boole dương đa trị nếu $f(e) = 1$ với $e = (1, 1, ..., 1)$. Ký hiệu F_p là tập tất cả các công thức dương trên U. Giả sử có $R(U)$ và u, $v \in R$, khi đó đánh giá $(\alpha_1(u.A_1 + v.A_2), \ldots, (\alpha_n(u.A_n, v.A_n))$ được ký hiệu bởi $\alpha(u,v)$ và đặt $T_R = \{\alpha(u,v)\ u, v \in R\}$. Nhận thấy rằng $R(U)$ có $e \in T_R$.

Định nghĩa 3.4. Mỗi công thức trong tập F_p được gọi là một phụ thuộc Boole dương đa trị được viết tắt là PTBDĐT. Giả sử R là một quan hệ trên U và $f \in F_p$. Nói rằng R m-thỏa PTBDĐTf, ký hiệu là $R^m(f)$ nếu $T_R \subseteq T_f^m$. Với $\Sigma \subseteq F_p$, khi đó R được gọi là m-thỏa tập PTBDĐT Σ, ký hiệu là $R^m(\Sigma)$ nếu với mọi $f \in \Sigma$ có $R^m(f)$. Điều đó tương đương với $T_R \subseteq T_\Sigma^m$.

Định nghĩa 3.5. Với $\Sigma \subseteq F$, $f \in F$, nói rằng Σ là m-suy dẫn f theo quan hệ hay f là m-suy dẫn được theo quan hệ từ tập Σ, ký hiệu là $\Sigma|\overset{m}{=} f$ nếu $\forall R(u)$ mà $R^m(\Sigma)$ thì cũng có $R^m(f)$.

Định nghĩa 3.6. Giả sử $\Sigma \subseteq F_p$, $f \in F_p$ và R là một quan hệ trên U. Ký hiệu Σ_m^+ là tập $\{f|\Sigma|\overset{m}{=} f\}$ và $LD^m(R)$ là tập tất cả các PTBDĐT trên U sao cho với mọi $f \in LD^m(R)$ thì $R^m(f)$. R gọi là quan hệ Armstrong mức m đối với tập Σ nếu $LD^m(R) = \Sigma_m^+$.

4. ĐỀ XUẤT

Việc sử dụng lôgic đa trị sẽ giúp ta nghiên cứu một số vấn đề mà nó là sự mở rộng thực sự và tự nhiên của nhiều kết quả đã đạt được đối với lớp các phụ thuộc Boole mà xuất phát điểm của nó là dựa vào lôgic hai trị:

Đó là một số điều kiện cần và đủ cho các suy dẫn $\Sigma|\overset{m}{-} f$ và $\Sigma|\overset{m}{=} f$. Mối quan hệ của các suy dẫn đó,... Đặc biệt việc sử dụng các công thức trong dạng chuẩn tắc sẽ là có lợi khi nghiên cứu một số suy dẫn có dạng đặc biệt.

Cũng trong [5] các tác giả đưa ra điều kiện cần và đủ để một quan hệ là quan hệ Armstrong đối với tập Σ các PTBDTQ và đã nêu ra hai vấn đề: Hãy xây dựng quan hệ Armstrong cho tập Σ các PTBDTQ và hãy cho một đánh giá về số bộ của quan hệ Armstrong tối thiểu. Đối với lớp các PTBDĐT ta thể nói gì về điều kiện cần và đủ để R là quan hện Armstrong mức m đối với tập $\Sigma \subseteq F$? Với một tập bất kỳ $\Sigma \subseteq F_p$, $m \in [0, 1]$, liệu có thuật toán xây dựng quan hệ Armstrong mức m cho tập Σ hay không ? Rõ ràng đó là những vấn đề có ý nghĩa đáng được quan tâm đối với các PTBDĐT. Trong khuôn khổ của một bài báo, không thể trình bày chi tiết nhiều ứng dụng của lôgic đa trị vào việc nghiên cứu các loại phụ thuộc dữ liệu. Trong bài sau chúng tôi sẽ trình bày một số các kết quả liên quan đến các vấn đề đã nêu. Định lý sau phát biểu về điều kiện cần và đủ cho sự suy dẫn của một số lớp các công thức có dạng đặc biệt chỉ xem như là một trong những ví dụ minh họa cho những ứng dụng ban đầu của lôgic đa trị. Sự chứng minh không khó khăn.

Định lý 4.1. Giả sử Σ là tập nào đó có các PTBDĐT trên U, và $X, Y, Z \subseteq U$. Khi đó:

1. $\Sigma|\overset{m}{-} \wedge X \longrightarrow \wedge Y \leftrightarrow (\forall x \in T_\Sigma^m)(((\text{có } A \in X)(x(A) \leq 1 - m)) \vee ((\forall B \in Y)(x(B) \geq m)))$.
2. $\Sigma|\overset{m}{-} \wedge X \longrightarrow \vee Y \leftrightarrow (\forall x \in T_\Sigma^m)(((\text{có } A \in X)(x(A) \leq 1 - m)) \vee ((\text{có } B \in Y)(x(B) \geq m)))$.
3. $\Sigma|\overset{m}{-} \vee X \longrightarrow \wedge Y \leftrightarrow (\forall x \in T_\Sigma^m)(((\forall A \in X)(x(A) \leq 1 - m) \vee ((\forall B \in Y)(x(B) \geq m)))$.
4. $\Sigma|\overset{m}{-} \vee X \longrightarrow \vee Y \leftrightarrow (\forall x \in T_\Sigma^m)(((\forall A \in X)(x(A) \leq 1 - m)) \vee ((\text{có } B \in Y)(x(B) \geq m)))$.

ở đây nếu $X = \{A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}\}$ thì tương ứng ký hiệu $\wedge X = A_{i1} \wedge A_{i2} \wedge \cdots \wedge A_{ik}$, $\vee X = A_{i1} \vee A_{i2} \vee \cdots \vee A_{ik}$.

Liệu chăng các kết luận trên vẫn đúng khi thay ký hiệu suy dẫn $|\frac{m}{}$ bởi $|\frac{m}{=}$? Rõ ràng điều đó được khẳng định khi định lý tương đương về tính dẫn được của hai kiểu suy diễn trên đối với lớp các PTBDĐT là đúng đắn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Berman J. and Blok W. J. Generalized Boolean dependencies. Abstracts of AMS, 6 (1985), 163.
2. Berman J. and Blok W. J. Generalized Boolean dependencies. Inf. Processing Letters, 27 (1988), 147-150.
3. Czedli. On dependencies in the relational model of data. J. EKI 17 (1981). 103-112.
4. Kowalski R. A. Logic for Data Description. Logic and Data Bases (Gallaire H., Minker J. Eds.) Plenum Press, New York, 1978.
5. Nguyen Xuan Huy and Le Thi Thanh. Generalized Positive Boolean Dependencies. J. Inform. Process. Cybernet. EIK 28 (1992) 6, 363 - 370.
6. Novikop P. X. Đại cương lôgic toán. Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật Hà Nội - 1971. (Dịch từ nguyên bản Tiếng Nga. Người dịch Nguyễn Hữu Ngự - Đặng Huy Ruận).
7. Sagiv Y., Delobel C., Parker D. S., and Fagin R. An Equivevalence Between Relational Database Dependencies and a Fragment of Propositional Logic. J. ACM, 28, 3 (1981), 435-453. Also a correction to this paper in J. ACM, 34, 4 (1987), 1016 - 1018.

A WAY FOR EXTENDING BOOLEAN DEPENDENCIES IN THE RELATIONAL MODEL OF DATA

Vu Ngoc Loan

Faculty of Mathematics, Mechanics and Informatics

Hanoi University

In the paper, a type of multivalued logic and some of its properties are presented. On the basic of this logic, a class of multivalued Boolean dependencies is introduced. This is a generalization of some kinds of dependencies such as the equational dependencies, the positive Boolean dependencies and the classes of dependencies considered in [3]. The main purpose of the paper is to propose a way to generalize some results which have been obtained from the positive Boolean dependencies. Some aspects of studying multivalued Boolean dependencies are also mentioned in the paper. Using this multivalued logic, we shall consider the equivalence theorem of consequences in the world of all relations, the world of 2-tuple relations. On the basic of this theorem we shall have good tools to research membership problem, Armstrong relation as well as some other problems in the class of multivalued Boolean dependencies.

ISSN 0866 - 8612

TẠP CHÍ KHOA HỌC

JOURNAL OF SCIENCE

KHOA HỌC TỰ NHIÊN
NATURAL SCIENCES

7

1994

ĐẠI HỌC TỔNG HỢP HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY

TẠP CHÍ KHOA HỌC No 7 - 1994

VỀ SỰ BIỂU DIỄN CÁC TẬP PHỤ THUỘC BOOLE DƯƠNG TỔNG QUÁT

Vũ Ngọc Loãn
Khoa Toán, ĐHTH Hà Nội

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Việc nghiên cứu các loại phụ thuộc dữ liệu có vai trò quan trọng để đảm bảo tính nhất quán dữ liệu. Một số loại phụ thuộc dữ liệu đã được đề cập đến như phụ thuộc hàm, phụ thuộc đa trị, phụ thuộc kết nối,... Các loại phụ thuộc đó đều có ý nghĩa thực tế và có nhiều tính chất đáng được quan tâm.

Trong [6] đã giới thiệu về họ Boole và một số tính chất cơ bản của chúng. Tiếp theo [2, 3] đã phát triển các kết quả về loại phụ thuộc này. Các tác giả đã quan tâm đến một lớp con khá rộng của nó là lớp phụ thuộc Boole tổng quát. Trong [5] đã chỉ ra định lý tương đương về tính dẫn được trong lớp các quan hệ có bộ tùy ý cũng như trong lớp các quan hệ chỉ bao gồm có hai bộ hay trong lôgíc mệnh đề đối với lớp phụ thuộc Boole dương tổng quát. Cũng trong [5] các tác giả đưa ra điều kiện cần và đủ để một quan hệ là quan hệ Armstrong đối với tập Σ và đã nêu ra hai vấn đề: hãy xây dựng quan hệ Armstrong cho tập Σ các phụ thuộc Boolean dương tổng quát và hãy cho đánh giá về số bộ của quan hệ Armstrong tối thiểu.

Sự nghiên cứu này nhằm góp phần giải quyết các vấn đề đã nêu trong [5] và một vài khía cạnh khác liên quan đến lớp các phụ thuộc Boole dương tổng quát. Bài viết gồm 3 phần. Phần đầu giới thiệu chung. Phần hai đưa ra một số định nghĩa cơ bản. Phần ba là kết quả chính của bài viết: khẳng định quan hệ Armstrong có luôn luôn tồn tại hay không đối với một tập Σ các phụ thuộc Boole tổng quát cho trước, trình bày thuật toán tìm quan hệ thu gọn của một quan hệ Armstrong trong trường hợp khi tất cả các miền trị của các thuộc tính không có phần tử trung hòa. Tiếp theo là khẳng định về sự tồn tại của quan hệ Armstrong trong trường hợp khi tất cả các miền trị có phần tử trung hòa. Ở đây cũng trình bày thuật toán tìm quan hệ Armstrong đó và chứng minh rằng quan hệ Armstrong đã tìm là không rút gọn được và có kích cỡ bằng số phần tử của tập T_Σ.

2. CÁC ĐỊNH NGHĨA CƠ BẢN

Giả sử $U = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ là tập các thuộc tính. Với mỗi A_i, $1 \le i \le n$ có một tập d_i nào đó gồm ít nhất hai phần tử được gọi là miền trị của thuộc tính đó. Với $A \in U$ miền trị của A cũng được ký hiệu là dom(A).

Định nghĩa 2.1. Với các tập d_i, $1 \le i \le n$ ta xét các ánh xạ $\alpha_i : d_i \times d_i \to \{0, 1\}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

1. $(\forall a \in d_i)$ $(\alpha_i(a, a) = 1)$
2. $(\forall a, b \in d_i)$ $(\alpha_i(a, b) = \alpha_i(b, a))$
3. (Có $a, b \in d_i$) $(\alpha_i(a, b) = 0)$.

Một tập con R của tích $d_1 \times d_2 \times \cdots \times d_n$ gọi là một quan hệ trên U. Mỗi $t \in R$ được gọi là một bộ. Tập tất cả các quan hệ trên tập thuộc tính U được ký hiệu là $\mathbf{REL}(U)$. Giả sử $t \in R$,

$A \in U$ khi đó ký hiệu $t.A$ là giá trị của t đối với thuộc tính A.

Với $X \subseteq U$ khi đó một công thức trên X sẽ được tạo bởi phần tử trong X, các liên kết logic $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$ và các hằng logic 1 (TRUE), 0 (FALSE). Ký hiệu F là tập tất cả các công thức trên U.

Mỗi ánh xạ $x : U \rightarrow B = \{0, 1\}$ được gọi là một đánh giá trên U. Nếu $x(A_i) = x_i$ với $1 \le i \le n$ thì ta ký hiệu x bởi $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^n$. Giả sử $f \in F$ và $x \in B^n$ khi đó $f(x)$ ký hiệu giá trị chân lý của f đối với đánh giá x. Ta đặt $T_f = \{x \in B^n | f(x) = 1\}$. Nếu $\Sigma \subseteq F$ thì đặt $T_\Sigma = \cap\{T_f | f \in \Sigma\}$. Nhận thấy rằng $x \in T_\Sigma$ khi và chỉ khi $(\forall f \in \Sigma)$ $(f(x) = 1)$.

Một công thức $f \in F$ được gọi là dương nếu $f(e) = 1$ với $e = (1, 1, \ldots, 1) \in B^n$. Ký hiệu F_p là tập tất cả các công thức dương trên U. Mỗi $f \in F_p$ được gọi là một phụ thuộc Boole dương tổng quát và được viết tắt là PTBDTQ. Giả sử có $R \in \mathbf{REL}(U)$ và $u, v \in R$, khi đó đánh giá $(\alpha_1(u.A_1, v.A_1), \alpha_2(u.A_2, v.A_2), \ldots, \alpha_n(u.A_n, v.A_n))$ được ký hiệu bởi $\alpha(u, v)$. Đặt $T_R = \{\alpha(u, v) | u, v \in R\}$.

Định nghĩa 2.2. Giả sử $R \in \mathbf{REL}(U)$ và $f \in F_p$. Nói rằng R thỏa f, ký hiệu là $R(f)$ nếu $T_R \subseteq T_f$. Với $\Sigma \subseteq F_p$, khi đó R được gọi là thỏa tập PTBDTQ Σ, ký hiệu là $R(\Sigma)$ nếu với mọi $f \in \Sigma$ có $R(f)$. Điều đó tương đương với $T_R \subseteq T_\Sigma$.

3. QUAN HỆ ARMSTRONG

Giả sử $\Sigma \subseteq F_p$, R là một quan hệ trên U. Ký hiệu Σ^+ là tập $\{f | \Sigma \models f\}$. Gọi tập tất cả các PTBDTQ trên U mà chúng thỏa R là $LD(R)$.

Định nghĩa 3.1. Giả sử $R \in \mathbf{REL}(U)$. R được gọi là quan hệ Armstrong đối với tập Σ nếu $LD(R) = \Sigma^+$.

Định lý 3.1. ([5]) Giả sử Σ là một tập các PTBDTQ trên U và R là một quan hệ khác trống trên U. Khi đó, điều kiện cần và đủ để R là quan hệ Armstrong đối với tập Σ là $T_R = T_\Sigma$.

Trong [4] đề cập tới sự tồn tại và xây dựng quan hệ Armstrong đối với một tập các phụ thuộc hàm. Ta liên hệ điều đó với tập các PTBDTQ thông qua định lý dưới đây khi xét đến các ánh xạ α_i, $1 \le i \le n$ thỏa mãn định nghĩa 2.1.

Định lý 3.2. Khi các ánh xạ α_i, $1 \le i \le n$ đã được xác định thì quan hệ Armstrong đối với tập các PTBDTQ cho trước không phải luôn luôn tồn tại.

Chứng minh: Thật vậy, ta sẽ chỉ ra một phản thí dụ. Giả sử U là tập gồm hai thuộc tính A và B. Các thuộc tính này có các miền trị tương ứng là $\mathrm{dom}(A) = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathrm{dom}(B) = \{b_1, b_2, b_3\}$ và các ánh xạ α_i, $1 \le i \le n$ được xác định như sau:

$\alpha_1(a_1, a_2) = 1, \quad \alpha_1(a_1, a_3) = 0, \quad \alpha_1(a_2, a_3) = 0.$

$\alpha_2(b_1, b_2) = 0, \quad \alpha_2(b_1, b_3) = 0, \quad \alpha_2(b_2, b_3) = 1.$

Nhận thấy rằng với các α_i đó thì $\forall R \in \mathbf{REL}(U)$ ta có thể thay mọi a_2 bởi a_1, mọi b_3 bởi b_2 và sau đó bỏ đi những bộ trùng nhau thì T_R không thay đổi. Xét quan hệ P gồm tất cả các bộ có thể trên U. Từ P ta thay mọi a_2 bởi a_1, mọi b_3 bởi b_2 sẽ nhận được quan hệ $Q = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$ với $T_Q = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$.

Xét $\Sigma = \{f\}$ với $f = (A \wedge B) \vee (A \wedge (-B)) \vee ((-A) \wedge (-B))$. Nhận thấy rằng $T_\Sigma = \{(1, 1), (1, 0), (0, 0)\}$. Ta sẽ chỉ ra rằng $\forall R \subseteq Q$ đều có $T_R \neq T_\Sigma$ (*). Thật vậy, với bất kỳ $R \in \mathbf{REL}(U)$ gồm không quá hai bộ hoặc R là chính quan hệ Q thì rõ ràng khẳng định (*) là đúng. Những quan hệ con của Q gồm đúng ba bộ chỉ là những quan hệ: $R_1 = \{(a_1, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$, $R_2 = \{(a_1, b_1), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$, $R_3 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_2)\}$, $R_4 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_3, b_1)\}$. Dễ dàng kiểm tra rằng với $R = R_i$, $1 \le i \le 4$ thì khẳng định (*) cũng đúng. Từ (*) và định lý 3.1 chứng tỏ không tồn tại quan hệ Armstrong đối với tập Σ các PTBDTQ đã cho. Định lý đã được chứng minh xong.

Cũng lưu ý rằng khi các ánh xạ α_i thay đổi thì có thể tồn tại quan hệ Armstrong đối với tập Σ đã cho. Thật vậy, trong thí dụ trên nếu $\alpha_1(a_1, a_2) = 0$, $\alpha_2(b_2, b_3) = 0$, và vẫn giữ nguyên các định nghĩa khác còn lại đối với α_1, α_2 như đã nêu trong chứng minh định lý 3.2 thì ta sẽ có $T_R = T_\Sigma$ khi $R = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_3)\}$. Theo định lý 3.1 ta có R là quan hệ Armstrong đối với tập Σ.

Định nghĩa 3.2. Quan hệ P được gọi là thu gọn của quan hệ R nếu P thỏa các điều sau:

a. P là quan hệ con của R (tức là mỗi bộ trong P cũng là một bộ trong R)

b. $T_p = T_R$

Ta gọi quan hệ R là không thu gọn được nếu không tồn tại quan hệ P là thu gọn của R và $|P| < |R|$, ở đây $|Q|$ được ký hiệu là số bộ của quan hệ Q.

Vì quan hệ Armstrong không phải luôn luôn tồn tại đối với tập Σ các PTBDTQ, do đó ta xét một số trường hợp riêng.

Định nghĩa 3.3. Nói rằng miền trị d_i của thuộc tính A_i có phần tử trung hòa nếu tồn tại các phần tử $a, b, t \in d_i$ sao cho $\alpha_i(a, b) = 0$; $\alpha_i(a, t) = \alpha_i(b, t) = 1$. Phần tử trung hòa trong mỗi tập (nếu có) nói chung là không duy nhất. Các thuộc tính trong U được gọi là cùng dạng nếu miền trị của chúng đồng thời có các phần tử trung hòa hay không.

a. Trường hợp mọi miền trị của các thuộc tính không có phần tử trung hòa

Hệ quả 3.1. Khi mọi miền trị của các thuộc tính không có phần tử trung hòa thì quan hệ Armstrong đối với mỗi tập Σ các PTBDTQ không phải là luôn luôn tồn tại.

Chứng minh: Ta có phản ví dụ nêu trong chứng minh định lý 3.2 bởi vì ở đó, mọi miền trị đều không có phần tử trung hòa.

Giả sử rằng Σ là một tập các PTBDTQ và R là một quan hệ Armstrong đối với tập Σ. Theo định lý 3.1 ta có $T_R = T_\Sigma$. Vấn đề đặt ra là hãy tìm quan hệ thu gọn của quan hệ R. Sau đây là phương pháp để tìm quan hệ thu gọn đó.

Trên mỗi d_i, $1 \le i \le n$ ta xây dựng quan hệ $\equiv$ như sau: $\forall a, b \in d_i$, $a \equiv b$ khi và chỉ khi $\alpha_i(a, b) = 1$. Khi đó quan hệ $\equiv$ là tương đương. Thật vậy, tính phản xạ và tính đối xứng là hiển nhiên. Giả sử $a, b, c \in d_i$, $a \equiv b$, $b \equiv c$. Nếu a và c không thỏa $a \equiv c$, từ đó ta có $\alpha_i(a, b) = \alpha_i(b.c) = 1$, $\alpha_i(a, c) = 0$. Như vậy b là phần tử trung hòa trong d_i, mâu thuẫn. Vậy $\equiv$ là quan hệ tương đương trên mỗi d_i với $1 \le i \le n$.

Định nghĩa 3.4. Cho một quan hệ $R \in \mathbf{REL}(U)$. Giả sử $u, v \in R$. Nói u tương đương với v, ký hiệu $u \approx v$ nếu và chỉ nếu $u.A_i = v.A_i$ với $1 \le i \le n$.

Ta xét vài tính chất của quan hệ này thông qua hai bổ đề sau:

Bổ đề 3.1. Cho $R \in \mathbf{REL}(U)$ và $u, v \in R$. Khi đó các điều sau là tương đương

a. $u \approx v$

b. $\alpha_i(u.A_i, v.A_i) = 1$ với $1 \le i \le n$

c. Với $\forall p \in R$ có $\alpha(u, p) = \alpha(v.p)$

d. $\alpha(u, v) = e$.

Chứng minh:

$a \Rightarrow b$. trực tiếp suy từ định nghĩa của quan hệ $\approx$

$b \Rightarrow c$. Giả sử $u, v \in R$ và $\alpha_i(u.A_i, v.A_i) = 1$ với $1 \le i \le n$. Ta sẽ chỉ ra rằng với mọi $p \in R$ có $\alpha(u, p) = \alpha(v, p)$. Nói cách khác ta cần chứng minh $\alpha_i(u.A_i, p.A_i) = \alpha_i(v.A_i, p.A_i)$ với $1 \le i \le n$. Thật vậy.

+ Khi $\alpha(u.A_i, p.A_i) = 1$ ta có $u.A_i \equiv p.A_i$. Vì $\alpha_i(u.A_i, v.A_i) = 1$ suy ra $u.A_i \equiv v.A_i$ do đó $v.A_i = p.A_i$. Từ đó ta cũng có $\alpha_i(v.A_i, p.A_i) = 1$.

+ Khi $\alpha_i(u.A_i, p.A_i) = 0$, ta cũng có $\alpha_i(v.A_i, p.A_i) = 0$. Thật vậy nếu $\alpha_i(v.A_i, p.A_i) =$

1 thì cũng tương tự như trên ta có $\alpha_i(u.A_i, p.A_i) = 1$.

$c \Rightarrow d$. Nếu mọi $p \in R$ ta có $\alpha(u,p) = \alpha(v,p)$ khi đó đặt $p = v$ sẽ thu được $\alpha(u,v) = e$.

$d \Rightarrow a$. Do $\alpha(u,v) = e$ suy ra với mọi i, $1 \leq i \leq n$ ta có $\alpha_i(u.A_i, v.A_i) = 1$ tức là $u.A_i \equiv v.A_i$. Điều đó chứng tỏ $u \approx v$. Bổ đề được chứng minh xong.

Bổ đề 3.2. Cho $R \in \mathbf{REL}(U)$ và $u, v, u_1, v_1 \in R$. Khi đó, nếu $u \approx u_1$ và $v \approx v_1$ thì $\alpha(u,v) = \alpha(u_1, v_1)$.

Chứng minh: Từ bổ đề 3.1, các giả thiết và tính giao hoán của α ta sẽ nhận được điều cần chứng minh.

Hệ quả 3.2. Quan hệ $\approx$ là quan hệ tương đương trên R.

Chứng minh: Quan hệ $\approx$ thỏa mãn tính phản xạ do bổ đề 3.1. Nó cũng thỏa tính giao hoán bởi vì α là giao hoán và do bổ đề 3.1. Giả sử $u \approx v$, $v \approx p$ khi đó ta có $u \approx p$ do định nghĩa của quan hệ $\approx$ và tính tương đương của quan hệ $\equiv$.

Với mỗi lớp tương đương trên quan hệ R ta lấy một bộ "đại diện" và tập các bộ đó cho ta một quan hệ, ký hiệu là P.

Định lý 3.3. Giả sử U là tập thuộc tính mà mọi $\mathrm{dom}(A)$ với $A \in U$ không có phần tử trung hòa. R là quan hệ bất kỳ trên U, khi đó tồn tại thuật toán tìm quan hệ thu gọn của R.

Chứng minh: Thật vậy, từ quan hệ R ta tìm được quan hệ P theo phương pháp trên. Ta sẽ chỉ ra rằng P là quan hệ thu gọn của R. Rõ ràng với $\forall u \in P$ thì $u \in R$. Tiếp theo cần chỉ ra $T_P = T_R$ (1). Hiển nhiên $T_P \subseteq T_R$ (2). Với $\forall x \in T_R$ sẽ có $u, v \in R$ sao cho $\alpha(u,v) = x$. Ta cũng có $u_1, v_1 \in P$ sao cho $u \approx u_1$, $v \approx v_1$. Theo bổ đề 3.2 ta có $\alpha(u,v) = \alpha(u_1, v_1) = x$. Điều đó cũng chứng tỏ $x \in T_p$, tức là $T_R \subseteq T_p$ (3) đúng. Từ (2) và (3) ta có (1). Vậy P là quan hệ thu gọn của R. Đó là điều phải chứng minh.

Ví dụ 3.1. Với U là tập các thuộc tính và các ánh xạ α_i được xác định như trong chứng minh định lý 3.2. Giả sử $g = (A \wedge B) \vee (A \wedge (-B))$ và $\Sigma = \{g\}$. Dễ thấy rằng với $R = \{(a_2, b_1), (a_1, b_3), (a_1, b_1), (a_2, b_3), (a_1, b_2)\}$ thì ta có $T_R = T_\Sigma = \{(1,1), (1,0)\}$. Sử dụng phương pháp trên ta nhận được quan hệ $P = \{(a_1, b_1), (a_1, b_3)\}$ là thu gọn của R do đó P cũng là quan hệ Armstrong đối với tập Σ.

b. Trường hợp mọi miền trị của các thuộc tính đều có phần tử trung hòa

Giả sử với mỗi $A_i \in U$, thì trong $\mathrm{dom}(A_i)$ có các phần tử trung hòa, tức là với $1 \leq i \leq n$, $\exists a_i, b_i, c_i \in d_i$, sao cho $\alpha_i(a_i, b_i) = 0$, $\alpha_i(a_i, c_i) = \alpha_i(b_i, c_i) = 1$.

Định lý 3.4. Giả sử $\Sigma \subseteq F_P$. Ta có:

a. Tồn tại thuật toán tìm quan hệ Armstrong R đối với tập Σ.

b. R là quan hệ không thu gọn được và $|R| = |T_\Sigma|$.

Chứng minh: Đặt $T_\Sigma = \{x | x \in B^n, \forall f \in \Sigma \text{ có } f(x) = 1\}$. Ta cần xây dựng một quan hệ R sao cho $T_R = T_\Sigma$. Tính đúng đắn của định lý khi $|T_\Sigma| = 1$ là rõ ràng. Ta xét trường hợp khi $|T_\Sigma| \geq 1$.

a. Với mỗi phần tử $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T_\Sigma$ ta xác định một bộ u_x trong quan hệ R như sau: Khi $x = e$ thì $u_x.A_i = a_i$ với $1 \leq i \leq n$. Ta ký hiệu bộ này là u_e. Khi $x \neq e$ thì $u_x.A_i = b_i$ nếu $x_i = 0$ và $u_x.A_i = c_i$ nếu $x_i = 1$. Ta sẽ chỉ ra với mỗi $u_x \in R$ ta có $\alpha(u_e, u_x) = x$ (1) và nếu $y, z \in T_\Sigma$ và $y, z \neq e$ thì $\alpha(u_y, u_z) = e$ (2). Thật vậy khi $x_i = 0$ ta có $\alpha_i(u_e.A_i, u_x.A_i) = \alpha_i(a_i, b_i) = 0 = x_i$. Khi $x_i = 1$ ta có $\alpha_i(u_e.A_i, u_x.A_i) = \alpha_i(a_i, c_i) = 1 = x_i$.

Như vậy ta đã chỉ ra được $\alpha(u_e.A_i, u_x.A_i) = x_i$ với $1 \leq i \leq n$ hay $\alpha(u_e, u_x) = x$ với mọi $x \in T_\Sigma$. Điều đó cũng suy ra $T_R \supseteq T_\Sigma$ (3). Nhận thấy rằng với $1 \leq i \leq n$ thì $u_y.A_i, u_z.A_i \in \{b_i, c_i\}$ và $\alpha_i(a_i, b_i) = \alpha_i(c_i, c_i) = \alpha_i(b_i, c_i) = \alpha_i(c_i, b_i) = 1$, tức là $\alpha_i(u_y.A_i, u_z.A_i) = 1$. Đẳng thức (2) đã được chứng minh và từ đó suy ra $T_R \subseteq T_\Sigma$ (4). Từ (3) và (4) chứng tỏ R là quan hệ Armstrong đối với tập T_Σ.

b. Trước hết chỉ ra rằng $|R| = |T_\Sigma|$. Hiển nhiên $|R| \leq |T_\Sigma|$ (5). Với $y, x \in T_\Sigma$, $y \neq z$ thì $u_y \neq u_z$. Thật vậy nếu có $y, z \in T_\Sigma$, $y \neq z$ và $u_y = u_z$ (6), thì ta có $\alpha(u_e, u_y) = y$ (7), $\alpha(u_e, u_z) = z$ (8). Từ (6), (7), (8) suy ra $y = z$, mâu thuẫn với giả thiết của y và z. Điều đó chứng tỏ $|R| \geq |T_\Sigma|$ (9). Từ (5) và (9) ta có $|R| = |T_\Sigma|$.

Giả sử rằng tồn tại một quan hệ thu gọn P của R và $|P| < |R|$. Rõ ràng $u_e \in P$. Dễ thấy rằng tồn tại một bộ $u \in R$, $u \notin P$ và $u \neq u_e$. Theo cách xây dựng R suy ra có $x \in T_\Sigma$ mà $u_x = u$. Giả sử có $u'_x \in P$ và u'_x thỏa $\alpha(u_e, u'_x) = x$. Khi đó ta có $\alpha(u_e, u_x) = \alpha(u_e, u'_x)$ (10). Đẳng thức (10) tương đương với $\alpha_i(u_e.A_i, u_x.A_i) = \alpha_i(u_e.A_i, u'_x.A_i)$ (11) với $1 \leq i \leq n$. Nhận thấy đẳng thức (11) xảy ra khi và chỉ khi $u_x.A_i = u'_x A_i$ (12) với $1 \leq i \leq n$. Từ (12) suy ra $u_x = u'_x$ và do đó $u_x \in P$, mâu thuẫn. Vậy R là quan hệ không thu gọn được. Định lý được chứng minh xong.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Beeri C., Dowd M., Fagin R. and Tatman R. On the Structure of Armstrong Relations for Functional Dependencies. J. ACM, 31, 1 (Jan. 1984), 30-46.
2. Berman J. and Blok W. J. Generalized Boolean dependencies. Abstracts of ASM, 6 (1995), 163.
3. Berman J. and Blok W. J. Positive Boolean dependencies. Inf. Processing Letters, 27 (1988), 147-150.
4. Maries D. The theory Relational Databases. Computer Science Press, Rockville, Md., 1983.
5. Nguyen Xuan Huy and Le Thi Thanh. Generalized Positive Boolean Dependencies. J. Inform. Process. Cybernet. EIK 28 (1992) 6, 363-370.
6. Sagiv Y., Delobel C., Parker D. S. and Fagin R. An Equivevalence Between Relational Database Dependencies and a Fragment of Propositional Logic. J. ACM, 34, 4 (1981), 435-453. Also a correction to this paper in J. AMM, 34, 4 (1987), 1016-1018.

ON PRESENTING SETS OF GENERALIZED POSITIVE BOOLEAN DEPENDENCIES

Vu Ngoc Loan

Faculty of Mathematics, Mechanics and Informatics Hanoi University

In [6] a family of Boolean dependencies and some its basic properties are introduced. In [5] some concepts and results concerning with the class of generalized positive Boolean dependencies are mentioned.

The purpose of the paper is to develop some results about Armstrong relations, which have been obtained from the generalized positive Boolean dependencies. Some results about the present of sets of generalized positive Boolean dependencies are given. The paper also shows that, in general cases the existences of Armstrong relation for a set of generalized positive Boolean dependencies does not hold. The assertion is the same if each domain of atributes has not medi-elements. An algorithm for finding a reduced realion of an Armstrong relation in that case is presented. When all domains of attributes have medi-elements, the paper shows that the esistence of Armstrong relation for a set of generalized positive Boolean dependencies holds. Here are also given an algorithm for finfing an Armstrong relation for a set generalized positive Boolean dependencies and some remarks about that Armstrong relation when all domains of attributes have medi-elements.

ĐO PHUC TAP O-TO-MAT CUA CAC DAY BIEU THUC CHINH QUY SUY RONG

Đặng Huy Ruận
Khoa Toán-Cơ-Tin học
Đại học Tổng hợp Hà Nộ

Giả sử có bảng chữ cái A. Dãy vô hạn các ký hiệu thuộc A được gọi là một siêu từ trên bảng chữ cái A. Tập hợp tất cả các siêu từ trên bảng chữ cái A ký hiệu bằng A^{∞} (/ 1 /).

Tập con tùy ý của tập A^{∞} được gọi là một siêu ngôn ngữ trên bảng chữ cái A.

Tích của ngôn ngữ M_1 với siêu ngôn ngữ M_2 trên bảng chữ cái A là một siêu ngôn ngữ, gồm tất cả các siêu từ dạng $\alpha = a(1)a(2)\ldots$, sao cho có số tự nhiên i nào đó, để từ a(1) a(2) ...a(i) thuộc M_1, còn siêu từ a(i+1)a(i+2) ... thuộc M_2.

<u>Siêu lặp</u> của ngôn ngữ M trên bảng chữ cái A (ký hiệu bằng M^{∞}) là siêu ngôn ngữ trên bảng chữ cái A, gồm tất cả các siêu từ $\alpha = a(1)\ a(2)\ \ldots$, sao cho đối với dãy số tự nhiên tăng nào đó $i_1, i_2, i_3 \ldots$ thỏa mãn quan hệ

$$a(i_t)\ a(i_{t+1})\ldots\ a(i_{t+1}-1) \in M \qquad t = 1,2\ldots$$

Qui ước rằng $\emptyset^{\infty} = \emptyset$ và đối với siêu ngôn ngữ tùy ý M đều có $\emptyset . M = \emptyset$.

Biểu thức chínhquy suy rộng (B.c.s.) trên bảng chữ cái A là biểu thức tùy ý được xây dựng từ các biểu thức cơ bản ($\emptyset$, Λ và $a \in A$) nhờ các phép toán nhân (.), lặp ($*$) và các phép toán tập hợp : Hợp (U), giao ($\cap$) và lấy phần bù (C).

Lớp các biểu thức chính quy suy rộng siêu ngôn ngữ (B.c.s.s.n.) trên bảng chữ cái A được xác định như sau :

1) Nếu R - B.c.s., xác định siêu ngôn ngữ nào đó, thì R là B.c.s.s.n. cơ bản ;

2) Nếu R-B.c.s., thì R^{∞} là B.c.s.s.n ;

3) Nếu R_1 và R_2 là B.c.s.s.n., thì $R_1 \cup R_2$ là B.c.s.s.n ;

4) Nếu R_1 - B.c.s., còn R_2 - B.c.s.s.n.; thì $R_1 \cdot R_2$ là B.c.s.s.n. ;

5) Nếu R - B.c.s.s.n., thì CR là B.c.s.s.n. ;

6) Nếu R_1, R_2 là B.c.s.s.n., thì $R_1 \cap R_2$ là B.c.s.s.n.

7) Chỉ các biểu thức định nghĩa theo các mục 1-6 mới là B.c.s.s.n.

Giả sử $\mathcal{M}$ là B.c.s.s.n. trên bảng chữ cái A. Số các vị trí của các ký hiệu thuộc A, chứa trong $\mathcal{M}$ được gọi là độ dài của biểu thức $\mathcal{M}$ và ký hiệu bằng $|\mathcal{M}|$.

Số trạng thái ít nhất đủ để xây dựng ô-tô-mát đơn định đoán nhận siêu ngôn ngữ được cho bởi biểu thức $\mathcal{M}$ được gọi là độ phức tạp ô-tô-mát của biểu thức $\mathcal{M}$ và được ký hiệu bằng $G(\mathcal{M})$.

<u>Định lý</u>. Đối với các số tự nhiên tùy ý s, t có thể xây dựng được dãy các biểu thức chính quy suy rộng siêu ngôn ngữ $\mathcal{C}_{s,t,n}$ trong bảng chữ cái gồm ba ký hiệu, sao cho

1) Với n tùy ý biểu thức $\mathcal{C}_{s,t,n}$ chứa t dấu phần bù và có độ dài không vượt qúa n ;

2) Với bất kỳ hằng số $C > 2^s$ nào khi n đủ lớn

$$\log_b \log_b \ldots \log_b G(\mathcal{C}_{s,t,n}) \geq \frac{n}{C \log_2 n} \qquad (1)$$

trong đó :

$$b = \sqrt{\frac{(2^s)^{2^s}}{(2^s-1)^{2^s-1}}}\,.$$

Chứng minh định lý trên gồm một số bước. Trước hết, đối với số t tùy ý xây dựng B.c.s.s.n. trong bảng chữ cái gồm t+6 ký hiệu. Sau đó thu hẹp số ký hiệu xuống còn 3. Cuối cùng, tính độ dài của các biểu thức đã được xây dựng và chỉ ra rằng, với n đủ lớn số các phần dư của những biểu thức này và độ dài của chúng thỏa mãn bất đẳng thức (1).

§1. Xây dựng biểu thức chính quy suy rộng trên bảng chữ cái gồm t + 6 ký hiệu.

1. Giả sử t là số tự nhiên nào đó. Ký hiệu t+1 bằng k và $L_1 = \{0, 1, x, \beta_o, \beta_1, \ldots, \beta_k\}$ là bảng chữ cái nào đó.

Chọn các số tự nhiên m_o, s và tập từ D_o gồm $2^s.m_o$ từ thuộc bảng chữ cái $\{o, 1\}$. Xác định các tập từ D_1, $D_2 \ldots D_k$ bằng quy nạp :

Giả sử D_i đã được xác định và gồm $2^s.m_i$ phần tử. Khi đó D_{i+1} là tập gồm tất cả các tập con của D_i, mà mỗi tập con này có chứa đúng m_i phần tử. Tập D_{i+1} gồm

$C^{m_i}_{2^s.m_i} = 2^s.C^{m_i-1}_{2^s.m_i-1}$ phần tử. Đặt $m_{i+1} = \frac{1}{2^s} C^{m_i}_{2^s.m_i} = C^{m_i-1}_{2^s.m_i-1}$

Dùng l^i và h^i với chỉ số dưới hoặc không để ký hiệu phần tử thuộc D_i.

2. Xây dựng các biểu thức chính quy suy rộng trên L_1.

Trước hết xây dựngcác biểu thức phụ :

$$\mathcal{R}_i = (0 \cup 1 \cup \beta_o \cup \beta_1 \cup \ldots \cup \beta_i)^*$$

$$\mathcal{E}_i = \beta_i \cup \beta_{i+1} \cup \ \ldots \ \cup \beta_k, \quad (0 \leq i \leq k)$$

$$L_1^* = (0 \cup 1 \cup x \cup \mathcal{E}_0)^*$$

Các B.c.s. được xây dựng bằng quy nạp như sau :

$$B_0 = \bigcup_{1^0 \in D_0} 1^0 \mathcal{E}_0 L_1^* \mathcal{E}_0 1^0 ,$$

$$B_{i+1} = C(\mathcal{R}_i \beta_i \mathcal{B}_i \beta_i \mathcal{R}_i) \qquad (0 \leq i < k)$$

3. <u>Các từ đặc trưng</u> : Đối với mỗi $1^i \in D_i$ xây dựng các từ $\lambda_i(1^i)$, $\bar{\lambda}_i(1^i)$ bằng quy nạp theo i :

a) $\lambda_0(1^0) = \bar{\lambda}_0(1^0) = 1^0$

b) Giả sử 1^{i+1} là phần tử tùy ý thuộc D_{i+1} và đối với mỗi $1^i \in 1^{i+1}$ và $h^i \in 1^{i+1}$ đã xây dựng được từ $\beta_i \lambda_i(1^i)$ $(\bar{\lambda}_i(h^i)\beta_i)$. Rồi tất cả các từ $\beta_i \lambda_i(1^i)$ $(\bar{\lambda}_i(h^i)\beta_i)$ theo một thứ tự nào đó (chẳng hạn, thứ tự tự điển), rồi lấy tích ghép của tất cả các từ này. Từ nhận được ký hiệu bằng

$$\lambda_{i+1}(1^{i+1}) \ (\bar{\lambda}_{i+1}(1^{i+1}) \ ).$$

4. <u>Các tập phần dư và các tính chất.</u>

Đối với mỗi phần tử $1^i \in D_i$ xây dựng tập $\mathcal{K}_i(1^i)$ bằng quy nạp theo i như sau :

$$\mathcal{K}_0(1^0) = L_1^* \mathcal{E}_0 1^0 ,$$

$$K_{i+1}(1^{i+1}) = C(\bigcup_{1^i \in 1^{i+1}} \mathcal{K}_i(1^i)) \beta_i \mathcal{R}_i \quad (0 \leq i < k).$$

Bổ đề 1. Đối với mỗi từ $X \in L_1^*$ và các số bất kỳ l^i, h^i $(0 \leq i \leq k)$, s $(s \geq i)$

$$X \beta_s \bar{\lambda}_i(h^i) \in \mathcal{K}_i(l^i) \equiv h^i = l^i .$$

§2. Xây dựng biểu thức chính quy suy rộng siêu ngôn ngữ trên bảng chữ cái gồm t + 6 ký hiệu và các tính chất của chúng.

Xây dựng bảng chữ cái $L_2 = L_1 \cup \{ y \}$, trongdó $y \bar{\in} L_1$.

Đối với mỗi i $(0 \leq i \leq k)$ B.c.s. $\mathcal{B}_i$ và tập phần dư $\mathcal{K}_i(l^i)$ đã được xây dựng trên bảng chữ cái L_1, biểu thức ~~siêu~~ chính quy suy rộng siêu ngôn ngữ $\mathcal{C}_i$ và tập phần dư $\mathcal{H}_i(l^i)$ trên bảng chữ cái L_2 có dạng :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{C}_i &= \mathcal{B}_i \{ y \}^\infty \\ \mathcal{H}_i(l^i) &= \mathcal{K}_i(l^i).\{ y \}^\infty \end{aligned}\right. \qquad (0 \leq i \leq k)$$

Bổ đề 2. Đối với mỗi từ $X \in L_1^*$, siêu từ tùy ý $Y \in \{ y \}^\infty$ và các số bất kỳ l^i, h^i $(0 \leq i \leq k)$, s $(s \geq i)$

$$X \beta_s \bar{\lambda}_i(h^i)\, Y \in \mathcal{H}_i(l^i) \equiv X \beta_s \lambda_i(h^i) \in \mathcal{K}_i(l^i).$$

Từ các bổ đề 1, 2 suy ra :

Hệ qủa 1. Tồn tại $2^s m_k$ tập khác nhau dạng $\mathcal{H}_i(l^k)$.

Thực hiện phép chia bên trái các siêu ngôn ngữ $\mathcal{C}_i$ $(o \leq i \leq k)$ cho từ đặc biệt ta có :

Bổ đề 3. Đối với từ tùy ý Z và số bất kỳ $l^i (0 \leq i \leq k$ nếu $Z \in \lambda_i(l^i)\, \mathcal{E}_i L_1^*$, thì

$$\mathcal{C}_i /_{Zx} = \mathcal{H}_i(l^i).$$

Do bổ đề 3 suy ra : Với số 1^k tùy ý thuộc D_k tập $\mathcal{C}_k$ có tập phần dư dạng $\mathcal{H}_k(1^k)$. Mặt khác số các tập siêu từ dạng $\mathcal{H}_k(1^k)$, theo hệ qủa 1, bằng $2^s.m_k$, còn số trạng thái để xây dựng ô-tô-mát đơn định đoán nhận $\mathcal{C}_k$ không thể ít hơn số phần dư của nó. Ta có hệ qủa sau :

Hệ qủa 2 : $G(\mathcal{C}_k) \geqslant 2^s.m_k$

§3. Xây dựng biểu thức chính quy suy rông siêu ngôn ngữ trên bảng chữ cái gồm ba ký hiệu.

1. Xây dựng bảng chữ cái $L_3 = \{0, 1, \alpha\}$ và ánh xạ φ của tập gồm các từ thuộc L_2 vào tập từ trong L_3 :

$\varphi(o) = o$; $\varphi(1) = 1$; $\varphi(x) = \alpha o \alpha$; $(y) = \alpha o^2 \alpha$;
$\varphi(\beta_i) = \alpha 1^{i+1} \alpha \quad (o \leqslant i \leqslant k)$.

Bổ đề 4. Đối với các tập tùy ý $\mathcal{M} \subseteq L_3^\infty$ và $\mathcal{N} \subseteq L_2^\infty$, nếu $\mathcal{M} \cap \varphi(L_2^\infty) = \varphi(\mathcal{N})$, thì $G(\mathcal{M}) \geqslant G(\mathcal{N})$.

2. Xây dựng biểu thức chính quy suy rộng siêu ngôn ngữ.

Các biểu thức chính quy : $\overline{\mathcal{E}}_o = \bigcup_{i=o}^{k} \alpha\, 0^{i+3} \alpha$,

$\overline{\mathcal{L}}_o = (0 \cup 1 \cup \alpha\, 0 \alpha \cup \overline{\mathcal{E}}_o)^*$,

$\overline{\mathcal{R}}_i = (0 \cup 1 \cup \bigcup_{r=o}^{i} \alpha\, 0^{r+3} \alpha)^* \qquad (0 \leqslant i \leqslant k)$

Các B.c.s. và B.e.s.n. được xây dựng bằng quy nạp như sau :

$$\overline{\mathcal{B}}_o = \bigcup_{1^o \in D_o} 1^o\, \overline{\mathcal{E}}_o \overline{\mathcal{L}}_o \overline{\mathcal{E}}_o\, 1^o,$$

$$\overline{\mathcal{B}}_{i+1} = C(\overline{\mathcal{R}}_i\, \alpha\, 0^{i+3} \alpha\, \overline{\mathcal{B}}_i\, \alpha\, 0^{i+3} \alpha\, \overline{\mathcal{R}}_i) \quad (0 \leqslant i < k)$$

$$\overline{\mathcal{C}}_i = \overline{\mathcal{B}}_i \cdot \{\alpha 0^2 \alpha\}^{\infty} \qquad (0 \leq i \leq k)$$

Bổ đề 5 : Đối với số i tùy ý $(0 \leq i \leq k)$

$$\overline{\mathcal{C}}_i \cap \varphi(L_2^{\infty}) = \varphi(\mathcal{C}_i)$$

Từ hệ qủa 2 các bổ đề 4, 5 ta có :

Hệ qủa 3. $G(\overline{\mathcal{C}}_k) \geqslant 2^{s} m_k$.

Sau khi chọn D_0 một cách thích hợp theo m_0 và tính độ dài biểu thức $\overline{\mathcal{C}}_k$ được ước lượng :

$$\left|\overline{\mathcal{C}}_k\right| \leq 2^{s+1} m_0 \, (\log_2 m_0 + c(k)).$$

Đối với số tự nhiên n nào đó đã cho, ta chọn số tự nhiên m_0 lớn nhất, mà

$$2^{s+1} m_0 (\log_2 m_0 + c(k)) \leq n.$$

Khi đó $\left|\overline{\mathcal{C}}_k\right| \leq n$.

Do n tăng đại lượng m_0 dần tới vô hạn, nên đối với hằng số tùy ý $C > 2^{s}$ khi n đủ lớn.

$$\log_b \log_b \ldots \log_b G(\overline{\mathcal{C}}_k) > \frac{n}{C \log_2 n}.$$

TAI LIEU DAN

/1/ Кудрявцев В.Б., Алёшин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. Москва "Наука" 19

AUTOMATON COMPLEXITY OF SERIES OF GENERALIZED REGULAR EXPRESSIONS

The paper presents the way of building series of gegular expressions.

To accept sets of infinite sequences defined by these regular expressions. It is necessary to have automata having larger number of states.

(mẫu 3)

PHIẾU ĐĂNG KÝ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KH-CN

Tên đề tài : Các phương pháp biến đổi hệ tuần tự thành hệ song song và ứng dụng trong kỹ thuật phần mềm và truyền tin bằng máy vi tính. Một vài vấn đề về phụ thuộc logic trong cơ sở dữ liệu quan hệ và độ phức tạp otomat của biểu thức chính quy suy rộng.

Mã số: B.93-05-73.

Cơ quan chủ trì đề tài: Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội.
Địa chỉ: 90 Nguyễn Trãi, Đống Đa, Hà Nội.
Số điện thoại

Cơ quan quản lý đề tài: Bộ Giáo dục và Đào tạo
Địa chỉ: 49 Đại Cồ Việt, Hà Nội
Số điện thoại

Tổng kinh phí thực chi	8,5 triệu	x 1000 đ hoặc	USD
Trong đó : - từ ngân sách nhà nước		x 1000 đ hoặc	USD
- kinh phí của Bộ (Tỉnh)	8,5 triệu	x 1000 đ hoặc	USD
- vay tín dụng		x 1000 đ hoặc	USD
- vốn tự có		x 1000 đ hoặc	USD
- thu hồi		x 1000 đ hoặc	USD

Thời gian nghiên cứu tháng

Thời gian bắt đầu ..../......4......./1993

Thời gian kết thúc ..../......3......./1995

5011g

Tên các cán bộ phối hợp nghiên cứu: PGS-PTS Đặng Huy Ruận
PTS Hoàng Chí Thành
GVC Vũ Ngọc Loan
GVC Lê Đức Minh

Số đăng ký đề tài: ngày	Số chứng nhận đăng ký kết quả nghiên cứu : ngày	Bảo mật thông tin: A - Phổ biến rộng rãi ..../ B - Phổ biến hạn chế ..../ C - Bảo mật ..../

Tóm tắt kết qủa nghiên cứu : Đề tài thực hiện nghiên cứu trên ba vấn đề. Đối với các phương pháp biến đổi hệ tuần tự thành hệ song song đề tài đã xây dựng được phương pháp biến đổi từ hệ tuần tự thành hệ song song, để biến đổi việc xử lý thông tin từ đơn lẻ tại mỗi thời điểm chuyển sang khả năng xử lý thông tin nhiều chiều về vấn đề phụ thuộc logic trong cơ sở dữ liệu đề tài đã khẳng định được đối với một tập các quan hệ phục thuộc Boolean tổng quát cho trước có tồn tại quan hệ Arcmstrong hay không, đưa rã thuật toán tìm dạng thu gọn của quan hệ Arcmstrong trong trường hợp tất cả các miền trị của các thuộc tính không có phần tử trung hòa ...

Đối với các siêu ngôn ngữ đề tài đã xây dựng được các dãy biểu thức chức chính quy suy rộng, mà các otomat đơn định đoán nhận các siêu ngôn ngữ do các biểu thức này xác định đòi hỏi một số trạng thái đủ lớn.

Kiến nghị về quy mô và đối tượng áp dụng kết quả nghiên cứu

Chức vụ	Chủ nhiệm đề tài	Thủ trưởng cơ quan chủ trì đề tài	Chủ tịch Hội đồng đánh giá chính thức	Thủ trưởng cơ quan quản lý đề tài
Họ và tên	Đặng Huy Ruận		Trần Vĩnh Hổ	
Học vị	PTS		PTS	
Ký tên (và đóng dấu)		CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM TRƯỜNG ĐẠI HỌC TỔNG HỢP HÀ NỘI BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO PGS.TS Đặng Vũng Vấn		