

**PHƯƠNG PHÁP KÉO LƯỜNG SAU TÌM LƯỜNG CỰC ĐẠI**

## POSTFLOW-PULL METHODS TO FIND MAXIMAL FLOW

**Trần Quốc Chiến***Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng***TÓM TẮT**

Bài toán tìm luồng cực đại trên mạng là một bài toán quan trọng có nhiều ứng dụng trong thực tế. Nhiều thuật toán tìm luồng cực đại trên mạng đã được nghiên cứu và phát triển (xem [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]). Công trình này nghiên cứu một cách tiếp cận khác giải bài toán tìm luồng cực đại trên mạng. Kết quả chính của bài báo là phương pháp kéo luồng sau tìm luồng cực đại. Ý tưởng của phương pháp này là cân bằng hóa luồng vào và luồng ra tại các đỉnh lệch bằng cách luồng dư được đẩy xuôi theo các cung vào hoặc đẩy ngược trên các cung ra. Quá trình cân bằng hóa đỉnh lệch được lặp lại cho đến khi không còn đỉnh lệch thì ta nhận được luồng cực đại.

**ABSTRACT**

The maximal flow problem is an important problem having many practical applications. Many algorithms for solving the maximal flow problem have been studied and developed (see [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12]). This paper deals with a new approach to the solution of the maximal flow problem. The main result of this work is the postflow-pull method. The idea of the method is to balance the input and output flow of unbalanced vertex by pulling the residual flow. The maximal flow is obtained by repeating the balancing process until there is no unbalanced vertex.

Key word: graph, network, flow

**1. Các khái niệm cơ bản**

◊ *Luồng sau (post-flow)*

Cho mạng  $G = (V, E, c)$  với đỉnh nguồn  $a$  và đỉnh đích  $z$ . *Luồng sau* là tập hợp các luồng trên cung  $f = \{f(i, j) \mid (i, j) \in G\}$  thỏa mãn

$$(i) \quad 0 \leq f(i, j) \leq c(i, j) \quad \forall (i, j) \in E$$

(ii) Với mọi đỉnh  $k$  không phải nguồn hoặc đích, luồng ra không nhỏ hơn luồng vào, tức là

$$\sum_{(i, k) \in G} f_{ik} \leq \sum_{(k, j) \in G} f_{kj}$$

Những đỉnh có luồng ra lớn hơn luồng vào gọi là *đỉnh lệch (unbalanced)*. Hiệu luồng vào và luồng ra tại các đỉnh lệch gọi là *độ lệch luồng (excess)*.

◊ *Mạng thặng dư  $G_f$*

Cho luồng sau  $f$  trên mạng  $G$ . Mạng thặng dư  $G_f = \{V, E_f, c_f\}$  với tập cung  $E_f$  và khả năng thông qua  $c_f$  được định nghĩa như sau:  $(i, j) \in E_f$  khi và chỉ khi

$$(i,j) \in E \ \& \ c_f(i,j) = c(i,j) - f(i,j) > 0$$

hoặc

$$(j,i) \in E \ \& \ c_f(i,j) = f(j,i) > 0$$

Ý tưởng của phương pháp này là cân bằng hóa luồng vào và luồng ra tại các đỉnh lệch bằng cách luồng dư được đẩy xuôi theo các cung vào hoặc đẩy ngược trên các cung ra. Quá trình cân bằng hóa đỉnh lệch được lặp lại cho đến khi không còn đỉnh lệch thì ta nhận được luồng cực đại. Các đỉnh lệch được lưu trong hàng đợi. Một công cụ gọi là *hàm độ sâu* được sử dụng để giúp chọn cung trong mạng thặng dư để loại đỉnh lệch. Bây giờ ta giả thiết tập đỉnh của mạng được ký hiệu  $V = \{0, 1, \dots, |V| - 1\}$ .

◊ *Hàm độ sâu (depth function)* của luồng sau trong mạng  $G = (V, E, c)$  là tập hợp các trọng số đỉnh không âm  $d(0), \dots, d(|V| - 1)$  thỏa  $d(a) = 0$  với đỉnh nguồn  $a$  và  $d(u) + 1 \geq d(v)$  với mọi cung  $(u, v)$  trong mạng thặng dư. Những cung  $(u, v)$  thỏa  $d(u) + 1 = d(v)$  gọi là các *cung ưu tiên*.

Một hàm độ sâu tầm thường là  $d(0) = d(1) = \dots = d(|V| - 1) = 0$ . Sau đó nếu đặt  $d(z) = 1$ , thì mọi cung luồng dương đi đến  $z$  là ưu tiên.

Ta xây dựng hàm độ sâu thú vị hơn:  $d(v)$  là khoảng cách ngắn nhất tính theo số cung từ đỉnh nguồn  $a$  đến đỉnh  $v$ . Ta có thể xác định hàm độ sâu này bằng phương pháp duyệt đồ thị theo chiều rộng xuất phát từ  $a$ . Hàm này thực sự là hàm độ sâu vì  $d(a) = 0$  và với mỗi cung  $(u, v)$  trong mạng thặng dư  $G_f$   $d(u) + 1 \geq d(v)$ , vì đường đi từ  $a$  đến  $v$  kết thúc bởi cung  $(u, v)$  ( $d(u) + 1$  không thể ngắn hơn đường đi ngắn nhất từ  $a$  đến  $v$  là  $d(v)$ ).

• **Mệnh đề 1.** Cho luồng sau  $f$  trong mạng  $G$  và hàm độ sâu  $d$  tương ứng. Khi đó độ sâu  $d(v)$  của mỗi đỉnh  $v$  không lớn hơn độ dài đường đi ngắn nhất tính theo số cung từ đỉnh nguồn  $a$  đến đỉnh  $v$  trong mạng thặng dư  $G_f$ .

*Chứng minh*

Cho đỉnh  $v$ . Giả sử  $l$  là độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh nguồn  $a$  đến đỉnh  $v$  trong mạng thặng dư  $G_f$ . Khi đó sẽ tồn tại đường đi  $(a, v_1, v_2, \dots, v_l = v)$  từ  $a$  đến  $v$ . Ta có

$$\begin{aligned} d(v) = d(v_l) &\leq d(v_{l-1}) + 1 \\ &\leq d(v_{l-2}) + 2 \\ &\vdots \\ &\leq d(v_1) + l - 1 \leq d(a) + l = l \end{aligned}$$

Vai trò của hàm độ sâu như sau: Nếu độ sâu của đỉnh lệch nhỏ hơn độ sâu của đỉnh đích thì có thể đẩy luồng về hướng đỉnh nguồn; ngược lại, nếu độ sâu của đỉnh lệch lớn hơn độ sâu của đỉnh đích thì cần phải đẩy luồng xuôi về đỉnh đích.

• **Hệ quả.** Nếu độ sâu của một đỉnh lớn hơn  $|V|$  thì không tồn tại đường đi từ đỉnh nguồn đến đỉnh đó trong mạng thặng dư  $G_f$ .

## 2. Phương pháp kéo luồng sau tổng quát

Bây giờ ta có thể mô tả phương pháp kéo luồng sau tổng quát như sau:

1. Khởi tạo: Xây dựng luồng sau xuất phát với các cung đi đến đỉnh đích có luồng bằng khả năng thông qua, còn các cung khác có luồng bằng 0. Chọn hàm độ sâu  $d$  nào đó trong mạng  $G$ .
2. Tiêu chuẩn dừng: Nếu không có đỉnh lệch thì dừng, luồng sau  $f$  trở thành luồng cực đại.
3. Xử lý đỉnh lệch: Chọn đỉnh lệch  $v$ .

Nếu tồn tại cung ưu tiên  $(u, v) \in G_f$  thì kéo trên cung  $(u, v)$  một luồng có giá trị  $\min\{-\delta, c_f(u, v)\}$ , trong đó  $\delta (< 0)$  là độ lệch luồng của đỉnh  $v$ .

Nếu không tồn tại cung ưu tiên đi đến  $v$ , thì tăng độ sâu của đỉnh  $v$  như sau:

$$d(v) := 1 + \min\{d(u) \mid (u, v) \in G_f\}$$

Quay lại bước 2.

◇ *Ghi chú.* Trong phương pháp kéo luồng sau tổng quát ta chưa cụ thể hóa việc chọn hàm độ sâu xuất phát, cách chọn đỉnh lệch và cách chọn cung ưu tiên. Việc cụ thể hóa các công việc này sẽ sinh ra nhiều thuật toán cụ thể thuộc phương pháp kéo luồng sau.

- **Mệnh đề 2.** Phương pháp kéo luồng sau luôn bảo toàn tính chất của hàm độ sâu.

*Chứng minh*

(i) Trường hợp tồn tại cung ưu tiên  $(u, v) \in G_f$ : Ta có  $d(u) + 1 = d(v)$ . Sau khi đẩy trên cung  $(u, v)$  một luồng có giá trị  $\min\{\delta, c_f(u, v)\}$ , tức

$$f(u, v) := f(u, v) + \min\{\delta, c_f(u, v)\},$$

thì nếu  $(v, u) \in G_f$  ta vẫn có  $d(v) + 1 = d(u) + 2 \geq d(u)$ .

(ii) Trường hợp không tồn tại cung ưu tiên đi đến  $v$ : Ta có

$$\forall u: (u, v) \in G_f \Rightarrow d(u) + 1 > d(v).$$

Sau khi tăng  $d(v)$

$$d(v) := 1 + \min\{d(u) \mid (u, v) \in G_f\}$$

trị  $d(u)$  vẫn thỏa mãn

$$\forall u, (u, v) \in G_f: d(u) + 1 \geq d(v)$$

- **Mệnh đề 3.** Trong quá trình thực hiện thuật toán kéo luồng sau, luôn tồn tại đường đi định hướng từ đỉnh đích đến mỗi đỉnh lệch trong mạng thặng dư, và không tồn tại đường đi định hướng từ đỉnh nguồn đến đỉnh đích trong mạng thặng dư.

*Chứng minh*

Chứng minh quy nạp theo các lần hiệu chỉnh luồng sau.

Luồng sau xuất phát có các cung đi đến đỉnh đích có luồng bằng khả năng thông qua, còn các cung khác có luồng bằng 0. Khi đó các đỉnh đầu của các cung đi đến đỉnh đích là lệch. Với mọi đỉnh lệch  $u$  ta có  $(z, u) \in G_f$  và  $(u, z) \notin G_f$  (vì  $f(u, z) = c(u, z)$ ), suy ra

tồn tại đường đi có hướng từ  $z$  đến  $u$ , và không tồn tại đường đi định hướng từ đỉnh nguồn  $a$  đến đỉnh đích trong mạng thặng dư  $G_f$ . Như vậy mệnh đề đúng với luồng xuất phát.

Tiếp theo, đỉnh lệch mới  $u$  chỉ xuất hiện khi một luồng được đẩy đến một đỉnh lệch cũ  $v$  trên cung ưu tiên  $(u,v)$ . Khi đó mạng thặng dư sẽ có thêm cung  $(v,u)$ . Do tồn tại đường đi có hướng từ  $z$  đến  $v$  trong mạng thặng dư theo giả thiết quy nạp, nên cũng tồn tại đường đi có hướng từ  $z$  đến  $u$  trong mạng thặng dư.

Để chứng minh không tồn tại đường đi định hướng từ đỉnh nguồn  $a$  đến đỉnh đích  $z$  trong mạng thặng dư  $G_f$  ta lập luận như sau.

Trước tiên, với các đỉnh  $u$  kề đỉnh đích  $z$ ,  $(u,z) \in G$ , do luồng xuất phát trên cung  $(u,z)$  bằng khả năng thông qua, nên muốn  $(u,z) \in G_f$ , thì ở bước nào đó phải thực hiện thao tác đẩy luồng ngược từ  $z$  về  $u$ , còn với những đỉnh  $u$  kề đỉnh đích  $z$ ,  $(z,u) \in G$ , muốn  $(u,z) \in G_f$  thì ở bước nào đó phải thực hiện thao tác đẩy luồng xuôi từ  $z$  về  $u$ . Khi đó  $(z,u)$  là cạnh ưu tiên, tức  $d(z)+1 = d(u) > d(z)$ . Như vậy mọi đỉnh kề  $z$  có thể đến được  $z$  trong mạng thặng dư phải có độ sâu lớn hơn độ sâu của  $z$ .

Cho đỉnh bất kỳ  $u$  đến được  $z$  trong mạng thặng dư. Tồn tại đường đi có hướng từ  $u$  đến  $z$  trong mạng thặng dư:

$$(u \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_k \rightarrow z)$$

Lập luận tương tự như trên ta có

$$d(u) > d(u_1) > \dots > d(u_{k-1}) > d(u_k) > d(z)$$

Như vậy mọi đỉnh đến được  $z$  phải có độ sâu lớn hơn  $z$ . Mặt khác độ sâu của đỉnh nguồn là 0, nên nó không thể đến được  $z$ .

- **Hệ quả.** Độ sâu các đỉnh luôn nhỏ hơn  $2|V|$ .

*Chứng minh*

Ta chỉ cần xét các đỉnh lệch, vì độ sâu đỉnh không lệch hoặc không thay đổi, hoặc chỉ tăng 1 so với độ sâu khi nó là đỉnh lệch ở thời điểm gần nhất. Lập luận tương tự như chứng minh mệnh đề 1, đường đi từ đỉnh đích đến đỉnh lệch trong mạng thặng dư  $G_f$  đảm bảo rằng độ sâu của đỉnh lệch không lớn hơn độ sâu đỉnh đích cộng  $|V| - 2$  (đỉnh nguồn không thể nằm trên đường đi). Do độ sâu của đích không thay đổi, và không lớn hơn  $|V|$ , nên độ sâu đỉnh lệch không lớn hơn  $2|V| - 2$ . Suy ra độ sâu đỉnh bất kỳ không lớn hơn  $2|V|$ .

- **Định lý 1.** Thuật toán kéo luồng sau là đúng.

*Chứng minh*

Trước hết ta chứng minh thuật toán dừng sau hữu hạn bước. Ta khẳng định rằng sau hữu hạn bước sẽ không còn đỉnh lệch nữa. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử dãy các đỉnh lệch là vô hạn thì sẽ tồn tại đỉnh  $u$  nào đó xuất hiện vô hạn lần trong dãy đó. Vì số đỉnh của mạng là hữu hạn nên sẽ tồn tại đỉnh  $v \neq u$  sao cho có luồng được kéo

trên cung  $(u,v)$  và  $(v,u)$  vô hạn lần. Do  $(u,v)$  và  $(v,u)$  là các cung ưu tiên trong mạng thặng dư vô hạn lần nên từ quan hệ  $d(u)+1 = d(v)$  và  $d(v)+1 = d(u)$  suy ra độ sâu của  $u$  và  $v$  sẽ tăng vô hạn, và điều đó mâu thuẫn với hệ quả trên.

Khi thuật toán dừng ta nhận được luồng. Theo mệnh đề 3, không tồn tại đường đi từ nguồn đến đích trong mạng thặng dư. Theo thuật toán đường đi tăng luồng, đây là luồng cực đại.

Tương tự như phương pháp đẩy luồng trước, ta có

- *Độ phức tạp* của phương pháp kéo luồng sau là  $O(|V|^2|E|)$  (xem [2] tr 402).

### 3. Thuật toán kéo luồng sau đỉnh

Đây là thuật toán cụ thể thuộc phương pháp kéo luồng sau. Ở đây các đỉnh lệch được đẩy vào hàng đợi. Với mỗi đỉnh lệch lấy từ hàng đợi, ta sẽ kéo luồng vào các cung ưu tiên một cách tối đa cho tới khi đỉnh trở thành không lệch hoặc không còn cung ưu tiên nữa. Nếu không còn cung ưu tiên nữa và đỉnh còn lệch thì ta tăng độ sâu và đẩy nó vào hàng đợi.

Bây giờ ta có thể mô tả thuật toán kéo luồng sau đỉnh như sau:

1. *Khởi tạo*: Xây dựng luồng sau xuất phát với các cung đi đến đỉnh đích có luồng bằng khả năng thông qua, còn các cung khác có luồng bằng 0. Chọn hàm độ sâu  $d(v)$  là độ dài đường đi ngắn nhất từ đỉnh nguồn  $a$  đến đỉnh  $v$ .

Đẩy các đỉnh lệch vào hàng đợi  $Q$ .

2. *Tiêu chuẩn dừng*: Nếu  $Q = \emptyset$ , luồng trước  $f$  trở thành luồng cực đại. *Kết thúc*. Nếu  $Q \neq \emptyset$ , sang bước 3.
3. *Xử lý đỉnh lệch*: Lấy đỉnh lệch  $v$  từ hàng đợi.

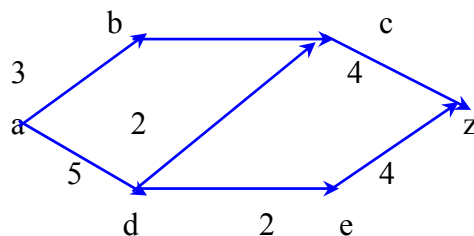
Duyệt các cung ưu tiên  $(u,v) \in G_f$ . Kéo trên cung  $(u,v)$  một luồng có giá trị  $\min\{-\delta, c(u,v)\}$ , trong đó  $\delta (< 0)$  là độ lệch luồng của đỉnh  $v$ . Nếu đỉnh  $u$  là đỉnh lệch mới, thì đẩy đỉnh  $u$  vào hàng đợi  $Q$ .

Nếu đỉnh  $v$  vẫn còn lệch, thì tăng độ sâu của đỉnh  $v$  như sau:

$$d(v) := 1 + \min\{d(u) \mid (u,v) \in G_f\}$$

sau đó đẩy  $v$  vào hàng đợi  $Q$ . Quay lại bước 2.

◊ *Ví dụ*. Tìm luồng cực đại của mạng  $G$  sau



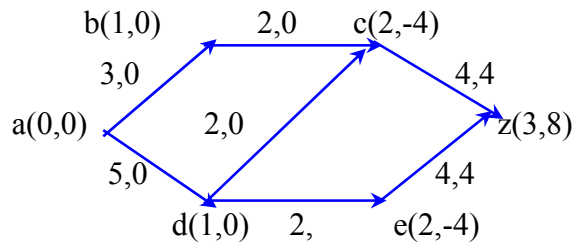
Hình 1

Thứ tự các đỉnh là  $a, b, c, d, e, z$ .

◊ *Ghi chú.* Tại mỗi đỉnh  $v$  ta có hai tham số  $v(d(v),e(v))$ , trong đó  $d(v)$  là độ sâu của  $v$  và  $e(v)$  là độ lệch luồng của  $v$ .

Quá trình giải được mô tả bằng các hình vẽ sau:

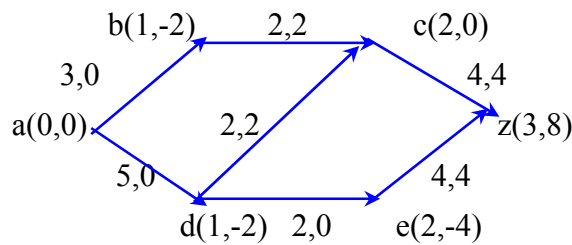
o Khởi tạo:



Hàng đợi Q:  $c | e$

**Hình 2**

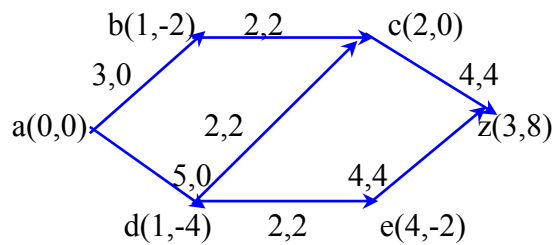
o Cân bằng  $c$ :



Hàng đợi Q:  $e | e | b | d$

**Hình 3**

o Cân bằng  $e$ :



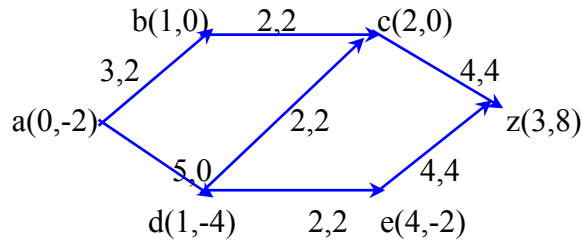
Hàng đợi Q:  $e | e | b | d | e$

**Hình 4**

*Ghi chú:* sau khi kéo luồng giá trị 2 từ đỉnh  $d$  về  $e$ , đỉnh  $e$  vẫn còn lệch và chỉ có duy nhất một cung  $(z,e) \in G_f$ , nhưng nó không phải cung ưu tiên. Vì vậy ta phải tăng độ sâu của đỉnh  $e$  theo công thức

$$d(e) := 1 + \min\{d(u) \mid (u,e) \in G_f\} = 1 + d(z) = 1 + 3 = 4$$

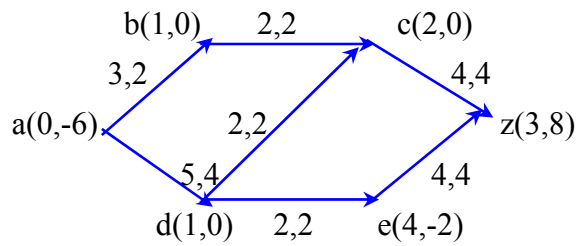
o Cân bằng  $b$ :



Hàng đợi Q: e | e | b | d | e

Hình 5

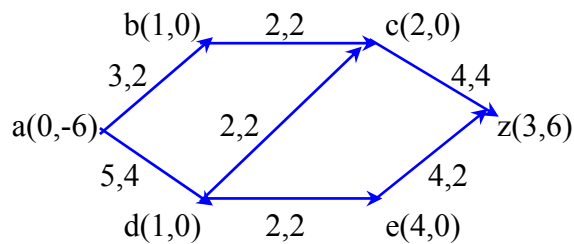
o Cân bằng d:



Hàng đợi Q: e | e | b | d | e

Hình 6

o Cân bằng e:



Hàng đợi Q: e | e | b | d | e

Hình 7

Đến đây hàng đợi  $Q = \emptyset$ , thuật giải kết thúc và luồng cuối cùng là luồng cực đại với giá trị luồng là 6.

#### 4. Kết luận

Bài báo trình bày phương pháp kéo luồng sau giải bài toán tìm luồng cực đại trên mạng. Thuật toán đã được cài đặt bằng ngôn ngữ C cho kết quả thử nghiệm tốt (xem [13]).

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] V.K. Balakrishnan: *Theory and Problems of Graph Theory*. McGRAW-HILL. 1997.
- [2] Robert Sedgewick, *Algorithms in C, Part 5: Graph Algorithms*. Addison-Wesley 8-2001.

- [3] Thomas H.Cormen, Charles E.Leiserson, Ronald L.Rivest, *Introduction To Algorithms*, the MIT Press 1999.
- [4] A.V.Goldberg, R.E.Tarjan, *Expected performance of Dijkstra's shortest path algorithm*, Technical Report 96-070, NEC Research Institute Inc, 1996.
- [5] Trần Quốc Chiến, *Giáo trình lý thuyết đồ thị và ứng dụng*, Đại học Đà Nẵng 2007.
- [6] Trần Quốc Chiến – Nguyễn Thanh Tuấn, *Giải thuật tìm đường đi ngắn nhất giữa hai tập đỉnh*, Tạp chí Khoa học Công nghệ, Đại học Đà Nẵng, 3(7)/ 2004.
- [7] Trần Quốc Chiến , *Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại 1*. Tạp chí khoa học công nghệ - Đại học Đà Nẵng, 1(13)/2006, 53-58.
- [8] Trần Quốc Chiến , *Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại 2*. Tạp chí khoa học công nghệ - Đại học Đà Nẵng, 3(15)-4(16)/2006, 77-82.
- [9] Trần Quốc Chiến, Nguyễn Thanh Tuấn, *Cài đặt và thử nghiệm các thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại*. Hội thảo khoa học 30 năm Trường Đại học Sư phạm - Đại học Đà Nẵng, 11-2005.
- [10] Trần Quốc Chiến, *Thuật toán đích hướng nguồn tìm luồng cực đại*. Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng, 4(21)/2007, 1-6.
- [11] Trần Quốc Chiến, *Thuật toán hoán chuyển nguồn đích có trọng số tìm luồng cực đại*. Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng, 3(26)/2008, 99-105.
- [12] Trần Quốc Chiến, Hồ Xuân Bình, *Thuật toán song song tìm luồng cực đại*. Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng, 5(22)/2007, 37-42.
- [13] Trần Quốc Chiến, *Các bài toán tối ưu trên mạng*, Đề tài NCKH cấp Bộ mã số B2006 DN-03-02.