THUẬT TOÁN ĐÍCH HƯỚNG NGUỒN TÌM LUỒNG CỰC ĐẠI

SINK TOWARD SOURCE ALGORITHM TO FIND MAXIMAL FLOW

TRẦN QUỐC CHIẾN
Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà nẵng

TÓM TẮT

Báo cáo nghiên cứu bài toán tìm luồng cực đại trên mạng. Trên cơ sở các kết quả trong công trình [15,16], Thuật toán đích hướng nguồn tìm luồng cực đại được đề xuất. Ý tưởng thuật toán là tìm đường đi tăng luồng từ đỉnh đích đến đỉnh nguồn (thuật toán Ford-Fulkerson tìm đường đi tăng luồng chỉ từ đỉnh nguồn đến đỉnh đích). Trong ví dụ minh hoạ, kết quả tính toán cho thấy thuật toán đích hướng nguồn thực sự hiệu quả hơn hẳn thuật toán Ford-Fulkerson.

ABSTRACT

This paper deals with the maximal flow problem. On the basics of results of [15,16], The sink towards source algorithm is proposed. The idea of the algorithm is to find augmented paths from the sink vertex toward the source vertex (the Ford-Fulkerson algorithm finds augmented paths only from the source vertex towards the sink vertex). In case of the illustrated example, calculus shows that the proposed algorithm is absolutely more effective than the Ford-Fulkerson algorithm.

Key word: graph, network, flow

Tr- ớc tiên ta nhắc lại các khái niệm và kết quả cơ bản về bài toán tìm luồng cực đại. Độc giả có thể xem chi tiết trong [15, 16].

• ***Mạng*** (network) là đơn trọng đồ có h- ớng G=(V, E, c) thoả mãn

(i) Có duy nhất một đỉnh, gọi là *nguồn*.
(ii) Có duy nhất một đỉnh, gọi là *đích*.
(iii) Trọng số c_{ij} của cung (i,j) là các số không âm và gọi là *khả năng thông qua của cung*.
(iv) Đồ thị liên thông (yếu).

• ***Luồng***. Cho mạng G với khả năng thông qua c_{ij}, $(i,j)\in G$. Tập các giá trị

$$\{f_{ij} \mid (i,j)\in G\}$$

gọi là *luồng* trên mạng G nếu thoả mãn

(i) $0 \le f_{ij} \le c_{ij}\ \forall(i,j)\in G$
(ii) Với mọi đỉnh k không phải nguồn hoặc đích

$$\sum_{(i,k)\in G} f_{ik} = \sum_{(k,j)\in G} f_{kj}$$

Định lý sau cho phép ta định nghĩa khái niệm giá trị của luồng.

• ***Định lý 1***. Cho f_{ij},$(i,j)\in G$, là luồng trên mạng G với nguồn a và đích z. Khi đó

$$\sum_{(a,i)\in G} f_{ai} - \sum_{(i,a)\in G} f_{ia} = \sum_{(i,z)\in G} f_{iz} - \sum_{(z,i)\in G} f_{zi}$$

Chứng minh: xem [15], định lý 1.

Giá trị của luồng. Cho luồng f trên mạng G. *Giá trị của luồng* f đ- ợc định nghĩa là đại l- ợng

$$v(f) = \sum_{(a,i)\in G} f_{ai} - \sum_{(i,a)\in G} f_{ia} = \sum_{(i,z)\in G} f_{iz} - \sum_{(z,i)\in G} f_{zi}$$

• ***Phát biểu bài toán luồng cực đại.*** Trong thực tế ta th- ờng gặp bài toán gọi là *bài toán tìm luồng cực đại* nh- sau: Cho mạng G với nguồn a, đích z và khả năng thông qua c_{ij}, $(i,j)\in G$. Trong số các luồng trên mạng G tìm luồng có giá trị lớn nhất.

• ***Định lý 2.*** Với mỗi mạng G=(V, E, c) luôn luôn tồn tại luồng cực đại.

• ***Luồng cực đại và lát cắt cực* tiểu.** Cho mạng G =(V,E,c) với nguồn a và đích z. Với mọi S, T $\subset$ V, ký hiệu tập các cung đi từ S vào T là (S,T), tức

$$(S,T) = \{(i, j) \in E \mid i \in S \,\&\, j \in T\}$$

Nếu S, T $\subset$ V là phân hoạch của V ($S\cup T = V$ & $S\cap T = \varnothing$) và $a\in S$, $z\in T$, thì tập (S,T) gọi là *lát cắt* (*nguồn-đỉnh*).

Khả năng thông qua của lát cắt (S, T) là giá trị

$$C(S, T) \quad = \quad \sum_{i\in S}\sum_{j\in T} c_{ij}$$

Cho luồng f và lát cắt (S,T) trên mạng G. Với mọi S, T $\subset$ V, ký hiệu

$$f(S,T) = \sum_{(i,j)\in(S,T)} f_{ij}$$

• ***Định lý 3***

Cho mạng G=(V,E,c) với nguồn a và đích z, $f = \{f_{ij} \mid (i,j)\in G\}$ là luồng trên mạng G, (S,T) là lát cắt của G. Khi đó

$$v(f) = f(S,T) - f(T,S)$$

Chứng minh (xem [16], định lý 5)

• ***Định lý 4***

Cho mạng G=(V,E,c) với nguồn a và đích z, $f = \{f_{ij} \mid (i,j)\in G\}$ là luồng trên mạng G, (S,T) là lát cắt của G. Khi đó khả năng thông qua của lát cắt (S,T) không nhỏ hơn giá trị của luồng f, tức là

$$C(S, T) \geq v(f)$$

Chứng minh (xem [16], định lý 6)

• ***Định lý 5***

Cho mạng G với nguồn a và đích z, $f = \{f_{ij} \mid (i,j)\in G\}$ là luồng trên mạng G, (S,T) là lát cắt của G. Khi đó,

(a) Nếu

$$C(S, T) = v(f)$$

thì luồng f đạt giá trị cực đại và lát cắt (S,T) đạt khả năng thông qua cực tiểu.

(b) Đẳng thức C(S, T) = v(f) xẩy ra khi và chỉ khi

(i) $f_{ij} = c_{ij} \quad \forall\, (i,j) \in (S, T)$

(ii) $f_{ij} = 0 \quad \forall\, (i,j) \in (T,S)$

Chứng minh (xem [16], định lý 7)

□ t- ởng xây dựng luồng cực đại nh- sau: xuất phát từ luồng nào đó, ta tìm đ- ờng đi (không định h- ớng) từ a đến z cho phép hiệu chỉnh giá trị luồng trên đ- ờng đi đó sao cho luồng mới có giá trị lớn hơn. Nếu không tìm đ- ợc đ- ờng đi nh- vậy thì ta có luồng cực đại.

Giả sử

$$P = (a, u,..., i, j,..., v, z)$$

là đ- ờng đi không có h- ớng từ a đến z.

Nếu cạnh (i,j) là cung trên P thì cung đó cùng h- ớng với P. Ng- ợc lại nếu (j,i) là cung thì cung đó ng- ợc h- ớng với P.

Tập các cung cùng h- ớng với P ký hiệu là P_+.

Tập các cung ng- ợc h- ớng với P ký hiệu là P_-.

Đ- ờng đi P gọi là đ- ờng đi tăng luồng.

Cơ sở của các thuật giải là định lý sau.

• ***Định lý 6.*** Cho f là luồng trên G. Giả sử

$$P = (a, u,..., i, j,..., v, z)$$

là đ- ờng đi không định h- ớng từ a đến z thoả

(i) Với mỗi cung (i,j) cùng h- ớng với P

$$f_{ij} < c_{ij}$$

(ii) Với mỗi cung (i,j) ng- ợc h- ớng với P

$$0 < f_{ij}$$

Đặt

$$\delta := \min\{ x \mid x \in M\} > 0,$$

trong đó M là tập các giá trị $c_{ij} - f_{ij}$, $(i,j)\in P_+$ và f_{ij}, $(i,j)\in P_-$.

Ta xây dựng luồng f' nh- sau

$$f'_{ij} := \begin{cases} f_{ij} & \forall (i,j)\notin P \\ f_{ij} + \delta & \forall (i,j)\in P_+ \\ f_{ij} - \delta & \forall (i,j)\in P_- \end{cases}$$

Khi đó luồng f' có giá trị lớn hơn giá trị của luồng f một l- ợng là δ, tức là

$$v(f') = v(f) + \delta.$$

Chứng minh: xem [15], định lý 3.

Ford–Fulkerson đã xây dựng thuật toán nổi tiếng tìm luồng cực đại (xem [15]). Điểm mấu chốt của thuật toán Ford-Fulkerson là tìm đ- ờng đi tăng tr- ởng, xuất phát từ đỉnh nguồn h- ớng tới đỉnh đích. Công việc này đòi hỏi tiêu tốn nhiều thời gian trong quá trình giải. Vì vậy việc giảm khối l- ợng tính toán ở cung đoạn này sẽ làm tăng đáng kể hiệu quả thuật toán. Thuật toán hoán chuyển nguồn đích trình bày trong [16] làm giảm đáng kể khối l- ợng tính toán so với thuật toán Ford-Fulkerson. □ t- ởng của ph- ơng pháp trong báo cáo này là gán nhãn các đỉnh xuất phát từ đỉnh đích h- ớng đến đỉnh nguồn. Kết quả tính toán trong ví dụ minh hoạ cho thấy với một số dạng mạng, thuật toán này hiệu quả hơn cả thuật toán hoán chuyển nguồn đích.

• ***Thuật toán đích h□ớng nguồn***:

+ *Đầu vào*. Mạng G = (V, E) với nguồn a, đích z, khả năng thông qua $C = (c_{ij})$, $(i,j)\in G$.

Các đỉnh trong G đ- ợc sắp xếp theo thứ tự nào đó.

+ *Đầu ra*. Luồng cực đại $F = (f_{ij})$, $(i,j)\in G$

+ *Các b- ớc*.

1. *Khởi tạo*

Luồng xuất phát: $f_{ij} := 0$ $\forall (i,j)\in G$

Đặt nhãn cho đỉnh đích

$$z(\varnothing, \infty)$$

Tạo lập tập T gồm các đỉnh đã có nhãn nh- ng ch- a đ- ợc dùng để sinh nhãn, T' là tập đỉnh đ- ợc gán nhãn nhờ các đỉnh của tập S

$$T := \{ z \},\ T' := \varnothing$$

2. *Sinh nhãn*

2.1. Chọn đỉnh sinh nhãn

• Tr- ờng hợp T ≠ ∅: Chọn đỉnh v ∈ T nhỏ nhất (theo thứ tự). Loại v khỏi T, T:= T \ { v }. Ký hiệu nhãn của v là (q, β) và B là tập các đỉnh ch- a có nhãn lùi và kề đỉnh sinh nhãn lùi v.

Sang b- ớc 2.2.

• Tr- ờng hợp T = ∅ và T' ≠ ∅: Gán T:= T' và T' := ∅. Quay lại b- ớc 2.1.

• Tr- ờng hợp T = ∅ và T' = ∅, thì **kết thúc**, *luồng F là cực đại*.

2.2. Gán nhãn cho đỉnh ch- a có nhãn và kề đỉnh sinh nhãn

• Tr- ờng hợp B = ∅: Quay lại b- ớc 2.1.

• Tr- ờng hợp B ≠ ∅: Chọn t ∈ B nhỏ nhất (theo thứ tự). Loại t khỏi B, B:= B \ { t }. Gán nhãn cho t nh- sau:

Nếu (t, v)∈E và $f_{t,v} < c_{t,v}$, đặt nhãn đỉnh t là (v, min{β, $c_{t,v} - f_{t,v}$}).

Nếu (v, t)∈E và $f_{v,t} > 0$, đặt nhãn đỉnh t là (v, min{β, $f_{v,t}$}).

Nếu t không đ- ợc gán nhãn, thì quay lại b- ớc 2.2.

Nếu t đ- ợc gán nhãn và t = a thì sang b- ớc hiệu chỉnh tăng luồng 3.

Nếu t đ- ợc gán nhãn và t ≠ a, thì bổ sung t vào T', T' := T' ∪ { t }, và quay lại b- ớc 2.2.

3. *Hiệu chỉnh tăng luồng*

Giả sử a có nhãn (p, δ). Ta hiệu chỉnh luồng f nh- sau.

3.1. Khởi tạo

i:= a, j:= p

3.2. Hiệu chỉnh

Nếu cung (i, j) ∈ G, thì hiệu chỉnh $f_{ij} = f_{ij} + \delta$.

Nếu cung (j, i) ∈ G, thì hiệu chỉnh $f_{ji} = f_{ji} - \delta$.

3.3. Tịnh tiến

Nếu j = z thì xoá tất cả nhãn của các đỉnh trên mạng, trừ đỉnh đích z, và quay lại b- ớc 2.

Nếu j ≠ z, thì đặt i:= j và j:= p, với p là thành phần thứ nhất của nhãn đỉnh i. Sau đó quay lại b- ớc 3.2.

• ***Định lý 7.*** Nếu các giá trị thông qua c_{ij} là số nguyên, thì sau hữu hạn b- ớc quá trình giải kết thúc.

Chứng minh

Theo định lý 1, qua mỗi b- ớc hiệu chỉnh luồng, giá trị luồng tăng lên ít nhất 1 đơn vị (do c_{ij} nguyên, kéo theo δ nguyên d- ơng). Mặt khác giá trị luồng bị chặn trên bởi tổng các khả năng thông qua của các cung đi khỏi đỉnh nguồn. Vì vậy qua một số hữu hạn b- ớc quá trình giải phải kết thúc.

• ***Hệ quả.*** Nếu giá trị thông qua c_{ij} là số hữu tỉ với mọi (i,j) ∈ E, thì sau hữu hạn b- ớc quá trình giải kết thúc.

Chứng minh

Quy đồng mẫu số các giá trị thông qua c_{ij}. Giả sử mẫu số chung là M. Theo định lý 1, qua mỗi b- ớc hiệu chỉnh luồng, giá trị luồng tăng lên ít nhất là 1/M. Mặt khác giá trị luồng bị chặn trên bởi tổng các khả năng thông qua của các cung đi khỏi đỉnh nguồn. Vì vậy qua một số hữu b- ớc quá trình giải phải kết thúc.

• ***Định lý 8***

Cho mạng G=(V,E,c) với nguồn a và đích z, f = {f_{ij} | (i,j)∈G} là luồng nhận đ- ợc khi kết thúc thuật toán tìm luồng cực đại. Khi đó, f là luồng cực đại.

Hơn nữa, nếu T là tập các đỉnh mang nhãn thì (V \ T, T) là lát cắt cực tiểu.

Chứng minh

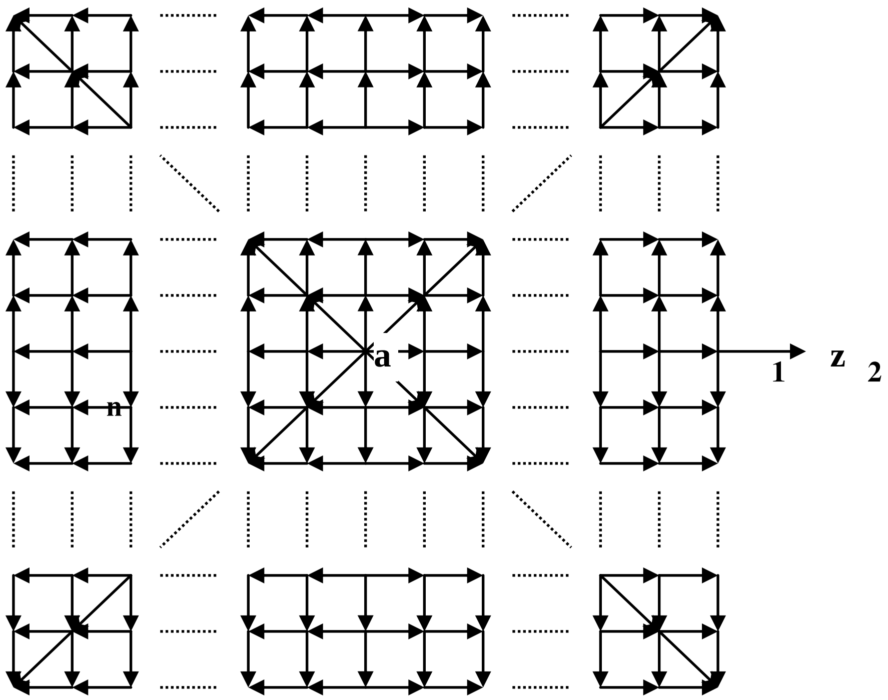
Gọi T là tập các đỉnh mang nhãn khi kết thúc thuật giải.

Xét cung (i,j) với $i \in V \setminus T$, $j \in T$. Vì j mang nhãn nên ta có $f_{ij} = c_{ij}$, nếu không ở b- ớc 2.2 của thuật toán ta đã đặt nhãn đỉnh i.

Xét cung (j,i) với $i \in V \setminus T$, $j \in T$. Vì j có nhãn ta phải có $f_{ij} = 0$, nếu không ở b- ớc 2.2 của thuật toán ta đã đặt nhãn cho i.

Theo định lý 5, luồng f là cực đại và lát cắt $(V \setminus T, T)$ là cực tiểu.

+ *Ví dụ*. Cho mạng G sau



trong đó số đỉnh là $(2.n+1)^2+1$ và các cung cho nh- hình vẽ với trọng số đều là 1.

□p dụng thuật toán Ford-Fulkerson tìm luồng cực đại của G, ta phải duyệt qua $(2.n+1)^2$ đỉnh và nhận đ- ợc luồng cực đại là luồng trên đ- ờng đi

$$(a \to 1 \to 2 \to \ldots \to n \to z)$$

với giá trị luồng bằng 1.

□p dụng thuật toán đích h- ớng nguồn tìm luồng cực đại của G ta cũng nhận đ- ợc Luồng cực đại là luồng trên đ- ờng đi

$$(a \to 1 \to 2 \to \ldots \to n \to z)$$

với giá trị luồng bằng 1.

Tuy nhiên, ta chỉ phải duyệt qua 3n đỉnh để xét gán nhãn lùi.

Nh- vậy khối l- ợng tính toán chỉ bằng khoảng 1/n khối l- ợng tính toán theo thuật toán Ford-Fulkerson.

• Kết luận

Bài báo đề xuất thuật toán đích h- ớng nguồn tìm luồng cực đại trên mạng. Thuật toán có thể áp dụng một cách hiệu quả cho những mạng có số cung lân cận đích ít hơn số cung lân cận nguồn. Khối l- ợng tính toán có thể giảm nhiều lần so với thuật toán Ford–Fulkerson truyền thống.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Richard Johnsonbauch: *Discrete Mathematics*. Macmillan Publishing Company. New York 1992.

[2] Nguyễn Tô Thành, Nguyễn Đức Nghĩa: *Giáo trình Toán rời rạc*. Tr- ờng Đại học Bách khoa Hà Nội. Hà Nội 1994.

[3] Nguyễn Xuân Quỳnh: *Cơ sở Toán rời rạc và ứng dụng*. NXB Giáo dục. Hà Nội 1995.

[4] Oystein Ore: *Theory of Graphs*. American Mathematical Society. 1967.

[5] Christofides Nicos: *Graph Theory*. Academic Press. New York London San Francisco, 1975.

[6] R.G. Busacker & T.L. Saaty: *Finite Graph and Networks*. Mc Graw-Hill Book Company. New York - St. Louis - San Francisco - Toronto - London - Sydney, 1974.

[7] Kenneth H. Rosen: *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw Hill Book Company. New York 1994.

[8] Nguyễn Cam, Chu Đức Khánh: *Lý thuyết đồ thị*. NXB TP.HCM, 1999.

[9] V.K. Balakrishnan: *Theory and Problems of Graph Theory*. McGRAW-HILL. 1997.

[10] Trần Quốc Chiến, *Giáo trình lý thuyết đồ thị,* Đại học Đà Nẵng 2002.

[11] Thomas H.Cormen, Charles E.Leiserson, Ronald L.Rivest, *Introduction To Algorithms,* the MIT Press 1999.

[12] A.V.Goldberg, R.E.Tarjan, *Expected performance of Dijkstra's shortest path algorithm*, Technical Report 96-070, NEC Research Institute Inc, 1996.

[13] Trần Quốc Chiến – Nguyễn Thanh Tuấn, *Giải thuật tìm đ- ờng đi ngắn nhất giữa hai tập đỉnh,* Tạp chí Khoa học & Công nghệ, Đại học Đà Nẵng, 3(7)/ 2004.

[14] Trần Quốc Chiến – Nguyễn Thanh Tuấn, *Đường kính hai tập đỉnh đồ thị – Khái niệm, Giải thuật và Chương trình*", Hội nghị khoa học lần thứ 3 – Đại học Đà Nẵng 11/2004.

[15] Trần Quốc Chiến, *Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại (1)*, Tạp chí Khoa học & công nghệ - Đại học Đà Nẵng (submitted).

[16] Trần Quốc Chiến, *Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại (2)*, Tạp chí Khoa học & công nghệ - Đại học Đà Nẵng (submitted).

[17] Trần Quốc Chiến – Nguyễn Thanh Tuấn, *Một số giải thuật tìm đường đi ngắn nhất giữa hai tập đỉnh*. Kỷ yếu Hội thảo quốc gia: Một số vấn đề chọn lọc của CNTT, Đà Nẵng 18-20 tháng 8 năm 2004, trang 53-59. NXB Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội 2005.