

# THUẬT TOÁN HOÁN CHUYỂN NGUỒN ĐÍCH TÌM LƯỜNG CỰC ĐẠI (2) USING SOURCE-SINK ALTERNATIVE ALGORITHM TO FIND THE MAXIMAL FLOW

TRẦN QUỐC CHIẾN

Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng

## TÓM TẮT

Báo cáo đề cập bài toán tìm luồng cực đại trên mạng. Các kết quả cơ bản được hệ thống và chứng minh. Thuật toán nổi tiếng Ford-Fulkerson được trình bày chi tiết kèm ví dụ minh họa. Kết quả chính của báo cáo là đề xuất Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại. Ý tưởng thuật toán là tìm đường đi tăng luồng đồng thời từ đỉnh nguồn và đỉnh đích (thuật toán Ford-Fulkerson tìm đường đi tăng luồng chỉ từ đỉnh nguồn). Kết quả tính toán qua các ví dụ cho thấy thuật toán hoán chuyển nguồn đích làm giảm đáng kể khối lượng tính toán so với thuật toán Ford-Fulkerson.

## ABSTRACT

This paper deals with the maximal flow problem. The basic results are systematically presented and proved. The well-known Ford-Fulkerson algorithm is thoroughly introduced and illustrated, and the main result of this work is the source-sink alternative algorithm. The aim of the algorithm is to find augmented paths simultaneously from the source and the sink vertex (the Ford-Fulkerson algorithm finds augmented paths only from the source vertex). Calculus examples show that the proposed algorithm considerably decreases the computational complexity in comparison with the Ford-Fulkerson algorithm.

*Key word: graph, network, flow (Tiếp theo số 13)*

## 2. Luồng cực đại và lát cắt cực tiểu

### • Định nghĩa

Cho mạng  $G=(V,E,c)$  với nguồn  $a$  và đích  $z$ . Với mọi  $S, T \subset V$ , ký hiệu tập các cung đi từ  $S$  vào  $T$  là  $(S,T)$ , tức

$$(S,T) = \{(i, j) \in E \mid i \in S \& j \in T\}$$

Nếu  $S, T \subset V$  là phân hoạch của  $V$  ( $S \cup T = V$  &  $S \cap T = \emptyset$ ) và  $a \in S, z \in T$ , thì tập  $(S,T)$  gọi là lát cắt (nguồn-đích).

Khả năng thông qua của lát cắt  $(S, T)$  là giá trị

$$C(S, T) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in T} c_{ij}$$

Cho luồng  $f$  và lát cắt  $(S,T)$  trên mạng  $G$ . Với mọi  $S, T \subset V$ , ký hiệu

$$f(S,T) = \sum_{(i,j) \in (S,T)} f_{ij}$$

### • Định lý 5

Cho mạng  $G=(V,E,c)$  với nguồn  $a$  và đích  $z$ ,  $f = \{f_{ij} \mid (i,j) \in G\}$  là luồng trên mạng  $G$ ,  $(S,T)$  là lát cắt của  $G$ . Khi đó

$$v(f) = f(S,T) - f(T,S)$$

*Chứng minh*

Với các đỉnh  $i,j$  không kề nhau ta gán  $f_{ij} = 0$ . Do tính chất của luồng và  $a \in S$ , ta có

$$v(f) = \sum_{i \in V} f_{ai} - \sum_{i \in V} f_{ia} = \sum_{j \in S} \sum_{i \in V} f_{ji} - \sum_{j \in S} \sum_{i \in V} f_{ij}$$

$$(\forall j \in S \setminus \{a\}, \sum_{i \in V} f_{ji} - \sum_{i \in V} f_{ij} = 0)$$

$$\begin{aligned} &= \left( \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} f_{ji} + \sum_{j \in S} \sum_{i \in T} f_{ji} \right) - \left( \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} f_{ij} + \sum_{j \in S} \sum_{i \in T} f_{ij} \right) \\ &= \left( \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} f_{ji} - \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} f_{ij} \right) + \left( \sum_{j \in S} \sum_{i \in T} f_{ji} - \sum_{j \in S} \sum_{i \in T} f_{ij} \right) \end{aligned}$$

Ta có

$$\sum_{j \in S} \sum_{i \in S} f_{ji} = \sum_{j \in S} \sum_{i \in S} f_{ij}$$

vì cả hai vế của đẳng thức là tổng các giá trị luồng  $f_{ij}$  của tất cả các cạnh  $(i,j)$  với  $(i,j) \in S$ .

Suy ra

$$v(f) = \sum_{j \in S} \sum_{i \in T} f_{ji} - \sum_{j \in S} \sum_{i \in T} f_{ij} = f(S,T) - f(T,S)$$

đpcm

### • Định lý 6

Cho mạng  $G=(V,E,c)$  với nguồn  $a$  và đích  $z$ ,  $f = \{f_{ij} \mid (i,j) \in G\}$  là luồng trên mạng  $G$ ,  $(S,T)$  là lát cắt của  $G$ . Khi đó khả năng thông qua của lát cắt  $(S,T)$  không nhỏ hơn giá trị của luồng  $f$ , tức là

$$C(S, T) \geq v(f)$$

*Chứng minh*

Theo tính chất luồng và định lý 1 ta có

$$v(f) = f(S,T) - f(T,S) \leq f(S,T) = \sum_{j \in S} \sum_{i \in T} f_{ji} \leq \sum_{j \in S} \sum_{i \in T} c_{ji} = C(S, T)$$

đpcm

### • Định lý 7

Cho mạng  $G$  với nguồn  $a$  và đích  $z$ ,  $f = \{f_{ij} \mid (i,j) \in G\}$  là luồng trên mạng  $G$ ,  $(S,T)$  là lát cắt của  $G$ . Khi đó,

(a) Nếu

$$C(S, T) = v(f)$$

thì luồng  $f$  đạt giá trị cực đại và lát cắt  $(S,T)$  đạt khả năng thông qua cực tiểu.

(b) Đẳng thức  $C(S, T) = v(f)$  xảy ra khi và chỉ khi

$$(i) \quad f_{ij} = c_{ij} \quad \forall (i,j) \in (S, T)$$

$$(ii) \quad f_{ij} = 0 \quad \forall (i,j) \in (T,S)$$

*Chứng minh*

(a) Nếu

$$C(S, T) = v(f)$$

thì theo định lý trên, hiển nhiên luồng  $f$  đạt giá trị cực đại và lát cắt  $(S,T)$  đạt giá trị cực tiểu.

(b) Nếu (i) và (ii) thoả thì theo chứng minh định lý 2 hiển nhiên ta có đẳng thức.

Ngược lại, nếu đẳng thức  $C(S, T) = v(f)$  xảy ra, thì theo chứng minh định lý 2 ta có

$$f(S,T) = C(S,T) \text{ và } f(T,S) = 0$$

từ đó suy ra (i) và (ii)

đpcm

### • Định lý 8 (tính đúng của thuật toán Ford–Fulkerson)

Cho mạng  $G=(V,E,c)$  với nguồn  $a$  và đích  $z$ ,  $f = \{f_{ij} \mid (i,j) \in G\}$  là luồng nhận được khi kết thúc thuật toán tìm luồng cực đại. Khi đó,  $f$  là luồng cực đại.

Hơn nữa, nếu  $S$  là tập các đỉnh mang nhãn thì  $(S, V \setminus S)$  là lát cắt cực tiểu.

*Chứng minh*

Gọi  $S$  là tập các đỉnh mang nhãn khi kết thúc thuật giải. Xét cạnh  $(i,j)$  với  $i \in S, j \in V \setminus S$ .

Vì  $i$  mang nhãn nên ta có  $f_{ij} = c_{ij}$ , nếu không ở bước (5) ta đã đặt nhãn đỉnh  $j$ . Xét cung  $(j,i)$  với  $i \in S, j \in V \setminus S$ . Vì  $i$  có nhãn ta phải có  $f_{ji} = 0$ , nếu không ở bước (5) ta đã đặt nhãn cho  $j$ . Theo định lý trước, luồng  $f$  là cực đại và lát cắt  $(S, V \setminus S)$  là cực tiểu.

đpcm

### • Định lý 9 (Ford-Fulkerson)

Cho mạng  $G$  với nguồn  $a$  và đích  $z$ . Khi đó, giá trị luồng cực đại bằng khả năng thông qua của lát cắt cực tiểu.

*Chứng minh*

Theo định lý 2, tồn tại  $f = (f_{ij})$  là luồng cực đại của mạng  $G$ . Xuất phát từ luồng  $f$ , áp dụng thuật toán Ford–Fulkerson, quá trình tìm đường đi tăng luồng sẽ kết thúc với tập gán nhãn  $S, z \notin S$  (ngược lại ta sẽ nhận được đường đi tăng luồng, kéo theo  $f$  không phải luồng cực đại, mâu thuẫn với giả thiết). Khi đó, theo định lý 8,  $(S, V \setminus S)$  là lát cắt cực tiểu có

$$C(S, V \setminus S) = v(f)$$

đpcm

## 3. Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại

Điểm mấu chốt của thuật toán Ford-Fulkerson là tìm đường đi tăng trưởng. Công việc này đòi hỏi tiêu tốn nhiều thời gian trong quá trình giải. Vì vậy việc giảm khối lượng tính toán ở cung đoạn này sẽ làm tăng đáng kể hiệu quả thuật toán. Ý tưởng của phương pháp này là gán nhãn các đỉnh đồng thời từ đỉnh nguồn và đỉnh đích.

+ *Đầu vào.* Mạng  $G = (V, E)$  với nguồn  $a$ , đích  $z$ , khả năng thông qua  $C = (c_{ij}), (i,j) \in G$ .

Các đỉnh trong  $G$  được sắp xếp theo thứ tự nào đó.

+ *Đầu ra.* Luồng cực đại  $F = (f_{ij}), (i,j) \in G$

+ *Các bước.*

### 1. Khởi tạo

Luồng xuất phát:  $f_{ij} := 0 \forall (i,j) \in G$

Đặt nhãn tiến ( $\uparrow$ ) cho đỉnh nguồn và nhãn lùi ( $\downarrow$ ) cho đỉnh đích

$$a(\uparrow, \emptyset, \infty) \ \& \ z(\downarrow, \emptyset, \infty)$$

Tạo lập tập  $S$  gồm các đỉnh đã có nhãn tiến nhưng chưa được dùng để sinh nhãn tiến,  $S'$  là tập đỉnh được gán nhãn tiến nhờ các đỉnh của tập  $S$

$$S := \{ a \}, S' := \emptyset$$

Tạo lập tập  $T$  gồm các đỉnh đã có nhãn lùi nhưng chưa được dùng để sinh nhãn lùi,  $T'$  là tập đỉnh được gán nhãn lùi nhờ các đỉnh của tập  $T$

$$T := \{ z \}, T' := \emptyset$$

### 2. Sinh nhãn tiến

#### 2.1. Chọn đỉnh sinh nhãn tiến

- Trường hợp  $S \neq \emptyset$ : Chọn đỉnh  $u \in S$  nhỏ nhất (theo thứ tự). Loại  $u$  khỏi  $S$ ,  $S := S \setminus \{ u \}$ . Ký hiệu nhãn tiến của  $u$  là  $(\uparrow, p, \alpha)$  và  $A$  là tập các đỉnh chưa có nhãn tiến và kề đỉnh sinh nhãn tiến  $u$ .

Sang bước 2.2.

- Trường hợp  $S = \emptyset$  và  $S' \neq \emptyset$ : Gán  $S := S'$  và  $S' := \emptyset$ . Sang bước 3.

- Trường hợp  $S = \emptyset$  và  $S' = \emptyset$ , thì **kết thúc**, luồng  $F$  là cực đại.

#### 2.2. Gán nhãn tiến cho đỉnh chưa có nhãn tiến và kề đỉnh sinh nhãn tiến $u$

- Trường hợp  $A = \emptyset$ : Quay lại bước 2.1.
- Trường hợp  $A \neq \emptyset$ : Chọn  $t \in A$  nhỏ nhất (theo thứ tự). Loại  $t$  khỏi  $A$ ,  $A := A \setminus \{t\}$ . Gán nhãn tiến cho  $t$  như sau:  
 Nếu  $(u, t) \in E$  và  $f_{u,t} < c_{u,t}$ , đặt nhãn tiến đỉnh  $t$  là  $(\uparrow, u, \min\{\alpha, c_{u,t} - f_{u,t}\})$ .  
 Nếu  $(t, u) \in E$  và  $f_{t,u} > 0$ , đặt nhãn tiến đỉnh  $t$  là  $(\uparrow, u, \min\{\alpha, f_{t,u}\})$ .  
 Nếu  $t$  không được gán nhãn tiến, thì quay lại bước 2.2.  
 Nếu  $t$  được gán nhãn tiến và  $t$  có nhãn lùi, thì sang bước hiệu chỉnh tăng luồng 4.  
 Nếu  $t$  được gán nhãn tiến và  $t$  không có nhãn lùi, thì bổ sung  $t$  vào  $S'$ ,  $S' := S' \cup \{t\}$ , và quay lại bước 2.2.

### 3. Sinh nhãn lùi

#### 3.1. Chọn đỉnh sinh nhãn lùi

- Trường hợp  $T \neq \emptyset$ : Chọn đỉnh  $v \in T$  nhỏ nhất (theo thứ tự). Loại  $v$  khỏi  $T$ ,  $T := T \setminus \{v\}$ . Ký hiệu nhãn lùi của  $v$  là  $(\downarrow, q, \beta)$  và  $B$  là tập các đỉnh chưa có nhãn lùi và kề đỉnh sinh nhãn lùi  $v$ .  
 Sang bước 3.2.

- Trường hợp  $T = \emptyset$  và  $T' \neq \emptyset$ : Gán  $T := T'$  và  $T' := \emptyset$ . Quay lại bước 2.
- Trường hợp  $T = \emptyset$  và  $T' = \emptyset$ , thì **kết thúc**, *luồng  $F$  là cực đại*.

#### 3.2. Gán nhãn lùi cho đỉnh chưa có nhãn lùi và kề đỉnh sinh nhãn lùi $v$

- Trường hợp  $B = \emptyset$ : Quay lại bước 3.1.
- Trường hợp  $B \neq \emptyset$ : Chọn  $t \in B$  nhỏ nhất (theo thứ tự). Loại  $t$  khỏi  $B$ ,  $B := B \setminus \{t\}$ . Gán nhãn lùi cho  $t$  như sau:  
 Nếu  $(t, v) \in E$  và  $f_{t,v} < c_{t,v}$ , đặt nhãn lùi đỉnh  $t$  là  $(\downarrow, v, \min\{\beta, c_{t,v} - f_{t,v}\})$ .  
 Nếu  $(v, t) \in E$  và  $f_{v,t} > 0$ , đặt nhãn lùi đỉnh  $t$  là  $(\downarrow, v, \min\{\beta, f_{v,t}\})$ .  
 Nếu  $t$  không được gán nhãn lùi, thì quay lại bước 3.2.  
 Nếu  $t$  được gán nhãn lùi và  $t$  có nhãn tiến, thì sang bước hiệu chỉnh tăng luồng 4.  
 Nếu  $t$  được gán nhãn lùi và  $t$  không có nhãn tiến, thì bổ sung  $t$  vào  $T'$ ,  $T' := T' \cup \{t\}$ , và quay lại bước 3.2.

### 4. Hiệu chỉnh tăng luồng

Ký hiệu  $t$  là đỉnh được gán nhãn tiến ở bước 2.2 hoặc nhãn lùi ở bước 3.2 để thuật toán dẫn đến bước 4. Giả sử  $t$  có nhãn tiến  $(\uparrow, p, \alpha)$  và nhãn lùi  $(\downarrow, q, \beta)$ . Đặt  $\delta = \min\{\alpha, \beta\}$ .

Ta hiệu chỉnh luồng  $f$  như sau.

#### 4.1. Hiệu chỉnh ngược từ $t$ về $a$ theo nhãn tiến

##### 4.1.1. Khởi tạo

$$j := t, i := p$$

##### 4.1.2. Hiệu chỉnh

Nếu cung  $(i, j) \in G$ , thì hiệu chỉnh  $f_{ij} = f_{ij} + \delta$ .

Nếu cung  $(j, i) \in G$ , thì hiệu chỉnh  $f_{ji} = f_{ji} - \delta$ .

##### 4.1.3. Tịch tiến

Nếu  $i = a$ , thì sang bước 4.2.

Nếu  $i \neq a$ , thì đặt  $j := i$  và  $i := h$ , với  $h$  là thành phần thứ hai của nhãn tiến đỉnh  $j$ .

Sau đó quay lại bước 4.1.2.

#### 4.2. Hiệu chỉnh từ $t$ đến $z$ theo nhãn lùi

##### 4.2.1. Khởi tạo

$$i := t, j := q$$

##### 4.2.2. Hiệu chỉnh

Nếu cung  $(i, j) \in G$ , thì hiệu chỉnh  $f_{ij} = f_{ij} + \delta$ .

Nếu cung  $(j, i) \in G$ , thì hiệu chỉnh  $f_{ji} = f_{ji} - \delta$ .

#### 4.2.3. Tịnh tiến

Nếu  $i = z$ , thì sang bước 4.3.

Nếu  $i \neq z$ , thì đặt  $i := j$  và  $j := k$ , với  $k$  là thành phần thứ hai của nhãn lùi đỉnh  $i$ .

Sau đó quay lại bước 4.2.2.

4.3. Xoá tất cả nhãn của các đỉnh trên mạng, trừ đỉnh nguồn  $a$  và đỉnh đích  $z$ , và quay lại bước 2.

• **Định lý 10.** Nếu các giá trị thông qua  $c_{ij}$  là số nguyên, thì sau hữu hạn bước quá trình giải kết thúc.

*Chứng minh* (tương tự như thuật toán Ford-Fulkerson)

• **Hệ quả.** Nếu giá trị thông qua  $c_{ij}$  là số hữu tỉ với mọi  $(i, j) \in E$ , thì sau hữu hạn bước quá trình giải kết thúc.

*Chứng minh* (tương tự như thuật toán Ford-Fulkerson)

• **Định lý 11**

Cho mạng  $G=(V,E,c)$  với nguồn  $a$  và đích  $z$ ,  $f = \{f_{ij} \mid (i,j) \in G\}$  là luồng nhận được khi kết thúc thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại. Khi đó,  $f$  là luồng cực đại.

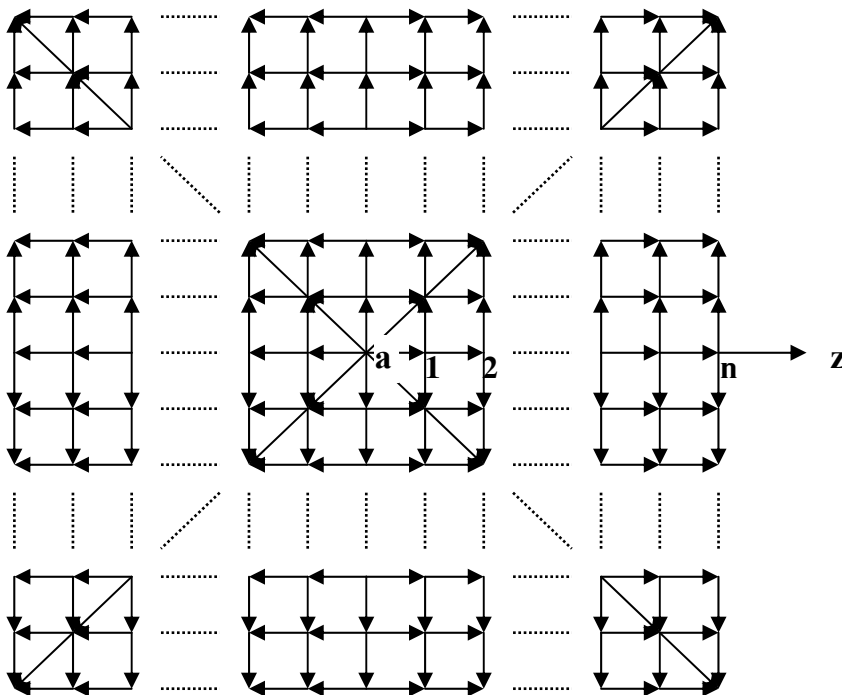
*Chứng minh*

Ta xét hai trường hợp kết thúc thuật toán.

(i) Thuật toán kết thúc ở bước 2.1: Ký hiệu  $S$  là tập các đỉnh mang nhãn tiến. Khi đó lát cắt  $(S, V \setminus S)$  là lát cắt cực tiểu (xem chứng minh thuật toán Ford-Fulkerson), kéo theo  $f$  là luồng cực đại.

(ii) Thuật toán kết thúc ở bước 3.1: Ký hiệu  $T$  là tập các đỉnh mang nhãn lùi. Khi đó lát cắt  $(V \setminus T, T)$  là lát cắt cực tiểu (tương tự chứng minh thuật toán Ford-Fulkerson), kéo theo  $f$  là luồng cực đại.

+ Ví dụ 2. Xét mạng  $G$  ở ví dụ 1



trong đó số đỉnh là  $(2.n + 1)^2 + 1$  và các cung cho như hình vẽ với trọng số đều là 1.

Áp dụng thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại của G ta cũng nhận được Luồng cực đại là luồng trên đường đi

$$(a \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow z)$$

với giá trị luồng bằng 1.

Tuy nhiên, ta chỉ phải duyệt qua  $(n+1)^2$  đỉnh để xét gán nhãn tiến và  $3n/2$  đỉnh để xét gán nhãn lùi.

Như vậy, nếu n khá lớn, khối lượng tính toán chỉ bằng khoảng  $\frac{1}{4}$  khối lượng tính toán theo thuật toán Ford–Fulkerson.

#### 4. Kết luận

Công trình đề xuất thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại trên mạng. Khối lượng tính toán trong trường hợp n lớn có thể giảm tới 4 lần so với thuật toán Ford–Fulkerson truyền thống. Mặt khác, do tính độc lập của quá trình gán nhãn tiến và nhãn lùi, thuật toán hoán chuyển nguồn đích có thể được sử dụng để xây dựng các thuật toán song song giải bài toán tìm luồng cực đại trên mạng.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Richard Johnsonbauch, *Discrete Mathematics*, Macmillan Publishing Company, New York 1992.
- [2] Nguyễn Tô Thành, Nguyễn Đức Nghĩa, *Giáo trình Toán rời rạc*, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Hà Nội, 1994.
- [3] Nguyễn Xuân Quỳnh, *Cơ sở Toán rời rạc và ứng dụng*. NXB Giáo dục, Hà Nội, 1995.
- [4] Oystein Ore, *Theory of Graphs*, American Mathematical Society, 1967.
- [5] Christofides Nicos, *Graph Theory*, Academic Press, New York-London-San Francisco, 1975.
- [6] R.G. Busacker & T.L. Saaty, *Finite Graph and Networks*, Mc Graw-Hill Book Company, New York - St. Louis - San Francisco - Toronto - London - Sydney, 1974.
- [7] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, McGraw Hill Book Company, New York, 1994.
- [8] Nguyễn Cam, Chu Đức Khánh, *Lý thuyết đồ thị*, NXB TP.HCM, 1999.
- [9] V.K. Balakrishnan, *Theory and Problems of Graph Theory*, McGraw Hill, 1997.
- [10] Trần Quốc Chiến, *Giáo trình lý thuyết đồ thị*, Đại học Đà Nẵng, 2002.
- [11] Thomas H.Cormen, Charles E.Leiserson, Ronald L.Rivest, *Introduction To Algorithms*, the MIT Press 1999.
- [12] A.V.Goldberg, R.E.Tarjan, *Expected performance of Dijkstra's shortest path algorithm*, Technical Report 96-070, NEC Research Institute Inc, 1996.
- [13] Trần Quốc Chiến, Nguyễn Thanh Tuấn, *Giải thuật tìm đường đi ngắn nhất giữa hai tập đỉnh*, Tạp chí Khoa học và Công nghệ, Đại học Đà Nẵng, 3(7)/ 2004.
- [14] Trần Quốc Chiến, Nguyễn Thanh Tuấn, *Đường kính hai tập đỉnh đồ thị - Khái niệm, Giải thuật và Chương trình*, Hội nghị Khoa học lần thứ 3, Đại học Đà Nẵng, 11/2004.
- [15] Trần Quốc Chiến, *Thuật toán hoán chuyển nguồn đích tìm luồng cực đại (1)*, Tạp chí Khoa học Công nghệ Đại học Đà Nẵng, số 13 (submitted).