MÔ HÌNH TOÁN HỌC VÀ TÍNH ỔN ĐỊNH TUYỆT ĐỐI CỦA MẠNG THẦN KINH NHÂN TẠO

Mathematical Models and Absolute Stability of Neural - Networks

Nguyễn Thị Bích Thuỷ

Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Nông nghiệp Hà Nội
Địa chỉ email tác giả liên lạc*: Nguyenbichthuy@hua.edu.vn*

TÓM TẮT

Nghiên cứu này dựa trên các nghiên cứu về cấu tạo sinh học và hoạt động truyền tín hiệu của các tế bào thần kinh, ta xây dựng mô hình hoạt động và mô hình toán học của mạng nơron. Từ đó, đưa ra một trường hợp của mạng phản hồi dẫn đến phương trình vi phân nghiên cứu $\dot{x}$ = -Dx+Ws(x) + u (1).

Điều kiện cần và đủ mới của ổn định tuyệt đối mạng thần kinh (1) đã được đưa ra dựa trên các điều kiện của đại số Lie giải được và phân tích ma trận trọng số W của mạng thần kinh thành các phần đối xứng và đối xứng lệch. Đặc biệt, một ứng dụng phần mềm Microsoft Excel trong việc xây dựng chương trình kiểm tra điều kiện đại số Lie giải được trên máy tính dựa trên các chứng minh và kết quả đạt được.

Từ khoá: Điều kiện đại số Lie giải được, mạng neuron, mô hình Holpfield, ổn định tuyệt đối.

SUMMARY

Some operational and mathematical models of artificial neural-network of neurons were built from studies on the structure of a single neuron, a neural circuit and transmission of neural signals. A typical model of recurrent neural networks that can be used to build needed differential equations was: $\dot{x}$ = -Dx + Ws(x) + u (1).

New necessary and sufficient conditions for absolute stability of neural networks were found based on a solvable Lie algebra conditions, decompositions of the weight matrix of neural networks into symmetric and skew-symmetric parts. A program for numerical testing of the conditions for the system was also presented using Microsoft Excel Software.

Key words: Absolute stability, neural-networks, solvable Lie algebra condition, Holpfield model.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Neural network - mạng thần kinh là một kĩ thuật trí tuệ nhân tạo mô phỏng, bắt chước các tế bào thần kinh nối với não bộ con người. Người ta cung cấp những thông tin cho mạng thần kinh, huấn luyện cho nó nhận biết các sự vật mẫu. Kết quả là một chương trình máy tính có thể được tạo ra có các yếu tố dự đoán dùng trong các phần mềm dự báo thời tiết, phần mềm thị trường chứng khoán... Ổn định và hội tụ động lực là một thuộc tính rất cần thiết của mạng nơron, tính chất này có tầm quan trọng rất lớn trong ứng dụng mạng nơron vào các bài toán tích hợp, tối ưu hoá và nhận dạng học. Rất nhiều nhà khoa học đã, đang nỗ lực nghiên cứu về tính ổn định của mạng nơron. Một trong những thành tựu quan trọng là nghiên cứu phối hợp tính ổn định tuyệt đối của mạng nơron (ABST). Trong đó, ổn định tuyệt đối theo nghĩa mạng nơron tồn tại điểm cân bằng hút toàn cục đối với mỗi dạng của hàm tác động và mỗi vectơ đặt vào. Hơn nữa tính hút toàn cục của ổn định tuyệt đối đảm bảo hệ điều hành mạng nơron đang hoạt động ở một thời điểm cụ thể không lặp lại hoạt động khi nó chịu tác động của các biểu thức đặt vào. Cho đến nay đã có một số kết quả về tính ổn định tuyệt đối của mạng nơron như: Điều kiện cần và đủ của ổn định tuyệt đối cho lớp mạng nơron đối xứng của các tác giả Forti & cs. (1994); Điều kiện cần và đủ của ổn định tuyệt đối cho lớp mạng nơron không đối xứng liên tục hoặc thời điểm rời rạc dưới dạng ma trận điều kiện M của Liang và Yamabuchi (1997). Chu Zhang và Zhang (2003) đã mở rộng kết quả của Forti & cs. (1994) với mạng nơron chuẩn tắc đồng thời cũng thu được điều kiện cần và đủ của mạng nơron với trễ.

Mục tiêu cơ bản của nghiên cứu là xây dựng được mô hình toán cho mạng nơ ron nhân tạo, tìm ra được một mô hình cụ thể dẫn đến phương trình vi phân cần nghiên cứu. Dựa trên các kết quả chứng minh chi tiết, cụ thể hóa các ví dụ cho định lý mà các kết quả nêu trên là hệ quả trục tiếp trong đó sử dụng chủ yếu là các điều kiện liên quan đến đại số Lie các ma trận là giải được. Ngoài ra xây dựng được ứng dụng Microsoft Excel trong việc kiểm tra điều kiện giải được của Đại số Lie các ma trận.

2. ĐỐI TƯỢNG VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

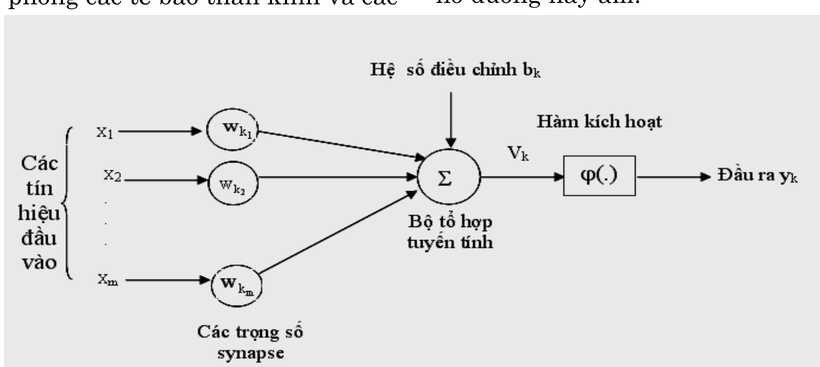
Nghiên cứu được tiến hành trên mô hình cấu tạo và hoạt động truyền tín hiệu của mạng thần kinh đơn giản, đưa đến phương trình vi phân dạng (1), từ đó chứng minh định lý về tính ổn định tuyệt đối của (1).

2.1. Mô hình mạng nơron

Để mô phỏng các tế bào thần kinh và các khớp nối thần kinh của não bộ con người, trong mạng nơron nhân tạo cũng có các thành phần có vai trò tương tự là các nơron nhân tạo cùng các kết nối synape (Võ Phúc Duy Anh, 2006; Nguyễn Xuân Hoài, 2005).

Một nơron nhân tạo là một đơn vị tính toán hay đơn vị xử lý thông tin, cơ sở cho hoạt động của một mạng nơron nhân tạo. Trong đó xác định 3 thành phần cơ bản của một mô hình nơron:

- Một tập các synapse hay các kết nối, được gắn với một trọng số của riêng của nó. Tín hiệu xj tại đầu vào của synapse j nối với các nơron k sẽ được nhân với trọng số synapse wk ở đây k là chỉ số của nơron tại đầu ra của synapse đang xét, còn j chỉ đầu vào của synapse. Các trọng số synapse của 1 nơron nhân tạo có thể nhận các giá trị âm và các giá trị dương.
- Bộ cộng Σ tính tổng các tín hiệu đầu vào của nơron nhân tạo với các trọng số tương ứng; phép toán này tạo thành một bộ tổ hợp tuyến tính.
- Hàm truyền (hay hàm kích hoạt - activation function) cho phép giới hạn biên độ đầu ra của nơron. Hàm truyền giới hạn phạm vi biên độ cho phép của tín hiệu đầu ra trong một khoảng giá trị hữu hạn. Mô hình nơron trong hình 1 bao gồm 1 hệ số điều chỉnh tác động từ bên ngoài bk. Hệ số điều chỉnh bk có tác dụng tăng lên hoặc giảm đi tổng đầu vào thực của hàm truyền, tuỳ theo nó dương hay âm.



Hình 1. Mô hình phi tuyến thứ nhất của một nơron

Các kiểu hàm truyền

Các hàm truyền (còn gọi là hàm kích hoạt) xác định đầu ra của các nơron, là cơ sở cho khả năng tính toán, xử lý các nơron nhân tạo. Hàm truyền cho phép giới hạn biên độ của tín hiệu đầu ra trong một khoảng giá trị cụ thể. Một số kiểu hàm truyền phổ biến:

1. Hàm ngưỡng (Hard- limit function)

$$f(n)=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$$

2. Hàm truyền tuyến tính

f(n) = purelim (n) = kn. k là hệ số dốc của hàm tuyến tính, cho phép đầu ra của nơron có thể là 1 giá trị bất kỳ.

3. Hàm vũng tuyến

$$f(n)=\begin{cases}1 & khi\quad n\geq \frac{1}{2}\\ n & khi\ -\frac{1}{2}\leq n<\frac{1}{2}\\ 0 & khi\ n<\frac{1}{2}\end{cases}$$

4. Hàm truyền dạng signmoid

$f(n)=\dfrac{1}{1+\exp(-kn)}$ k là tham số độ dốc của hàm sigmoid.

2.2. Cấu trúc mạng nơron

Xét mạng nơron được cho bởi dạng không tuyến tính:

$\dot{x}$ = *-Dx + Ws(x) + u* (2)

Trong đó:

$x \in Rn$ là vectơ trạng thái thần kinh.

D = diag[d_1, d_2,...,dn] > 0, $d_i > 0$ là tốc độ tự phân huỷ; D là ma trận hằng; s(x) = $[s_1(x_1),\ldots s_n(x_n)]^T \subset S$, S là tập các hàm hoạt động dạng sigmoid, si(x) là các hàm bị chặn, liên tục và tăng ngặt. W=[wij] $\in R^{nxn}$ là ma trận trọng nối các synapse, $u \in R^n$ là vectơ hằng tín hiệu vào.

Với mỗi vectơ hằng u, tính cân bằng của hệ thống được xác định bởi phương trình $\dot{x} = 0$.

__*Định nghĩa 2.2.1*__: Một điểm cân bằng xe của hệ động lực là ổn định tiệm cận toàn cục (GAS) nếu nó ổn định theo nghĩa Lyapunov và hút mọi quỹ đạo trạng thái trong không gian tức là $\lim_{t\to+\infty} x(t) = xe \in Rn$.

__*Định nghĩa 2.2.2*__ (Forti & cs., 1994): Mạng nơron (2.2.1) là ổn định tuyệt đối nếu nó có một điểm cân bằng ổn định tiệm cận toàn cục với mọi hàm $s \in S$ và mọi vectơ $u \in Rn$ và mọi ma trận đường chéo xác định dương D >0.

2.3. Điều kiện giải được của đại số Lie các ma trận

__*Định nghĩa 2.3.1*__. Đại số Lie các ma trận

Không gian vectơ L gồm các ma trận vuông cấp n được gọi là đại số Lie nếu mọi A, B∈ L hoán tử [A| B]=AB – BA ∈ L.

Ký hiệu L (M_1, M_2. , Ml) là đại số Lie sinh bởi tập các ma trận {M_1, M_2., Ml}

__*Định nghĩa 2.3.2*__. Điều kiện giải được của đại số Lie các ma trận.

Với mỗi đại số Lie ta xây dựng dãy quy nạp sau: $L^{(0)} = L$

$L^{(i+1)} = \{[A|B], A, B \in Li, i \geq 0\}$

Đại số Lie L gọi là giải được nếu tồn tại một số nguyên k > 0 sao cho $L^{(k)} = \{0\}$ (3)

2.4. Tính chất cơ bản của đại số Lie giải được

__*Bổ đề 2.4.1.*__ Đại số Lie các ma trận L là giải được khi và chỉ khi tồn tại ma trận không suy biến T sao cho $T^{-1}AT$ là ma trận tam giác trên với mọi A ∈L.

__*Nhận xét 2.4.2.*__ Theo bổ đề 2.4.1, nếu L là đại số Lie giải được thì điều kiện (3) được thoả mãn sau hữu hạn bước (k ≤ n).

__*Nhận xét 2.4.3.*__ Ma trận đồng dạng T^{-1} AT trong bổ đề 2.4.1 có thể được chọn là ma trận Unita. Do đó 1 đại số Lie ma trận giải được là Unita tương đương với ma trận tam giác trên là đại số Lie.

__*Bổ đề 2.4.4*__. Cho A là nx n ma trận. Nếu As, Ass sinh ra một đại số Lie giải được thì Re(λ(A)) = λ(Ass) (**), với As, Ass là phần đối xứng và phần đối xứng lệch của ma trận A, Re (λ(A)) là phần thực các giá trị riêng của ma trận A.

Nhận xét 2.4.5. Trường hợp đặc biệt với A là ma trận chuẩn tắc tức là A.AT= AT.A, khi đó As, Ass là giao hoán nên As, Ass sinh ra một đại số Lie giải được với k =1. Ngoài ra nếu A đối xứng thì Ass = 0 rõ ràng Re (A)= λ (As) nên As, Ass sinh ra một đại số Lie giải được với k = 1.

Đề tài được thực hiện thông qua các phương pháp nghiên cứu sau:

- Phân tích, tổng hợp mô hình hoá để thu được phương trình vi phân liên quan.
- Chứng minh lý thuyết, tìm ví dụ minh hoạ.
- Kết hợp nghiên cứu, thử nghiệm chỉnh sửa khi đưa ra chương trình kiểm tra điều kiện giải được của đại số Lie các ma trận dựa trên ứng dụng phần mềm Microsoft Excel.

3. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

Dựa trên mô hình hoạt động của mạng mạch điện trong mô hình Hopfield, ta thu được phương trình vi phân cần nghiên cứu. Một điều kiện cần và đủ mới của ổn định tuyệt đối của mạng nơron được nêu ra. Tiến hành kiểm tra tốc độ hội tụ mũ của hệ thống mạng nơron và đánh giá độ phân huỷ mũ. Cuối cùng, kiểm tra điều kiện giải được đối với hệ phương trình vi phân được nghiên cứu.

3.1. Mô hình toán học của mạng nơron nhân tạo

Dưới dạng công thức toán học ta có thể mô tả một nơron k bằng cặp công thức sau:

$$v_k = \sum_{j=1}^{m} w_{kj} x_j \qquad (4)$$

$$yk = \varphi(vk + bk) \qquad (5)$$

với {x_1,..., xm} là các tín hiệu đầu vào, {wk_1,...wkm} là các trọng số của synapse của nơron k. vk là bộ đầu ra, bộ tổ hợp tuyến tính tương ứng bk là hệ số hiệu chỉnh. Hệ số hiệu chỉnh bk là một tham số ngoài của nơron nhân tạo k.

Nếu đặt: $x = (x_1, x_2,...xm)^T$

$$W= (wkj)\ ;\ k = \overline{1,n}\ ;\ j=\overline{1,m}$$

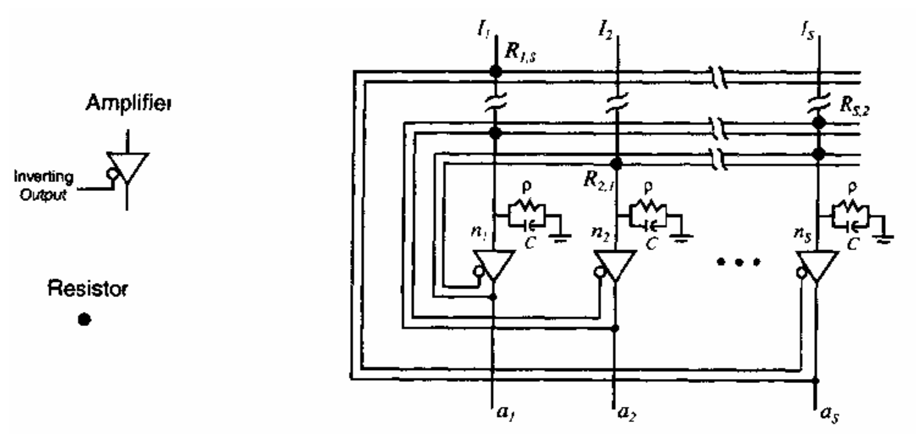
$$B = (b_1, b_2, ...bn)^T$$

khi đó phương trình (3.1.4) trở thành:

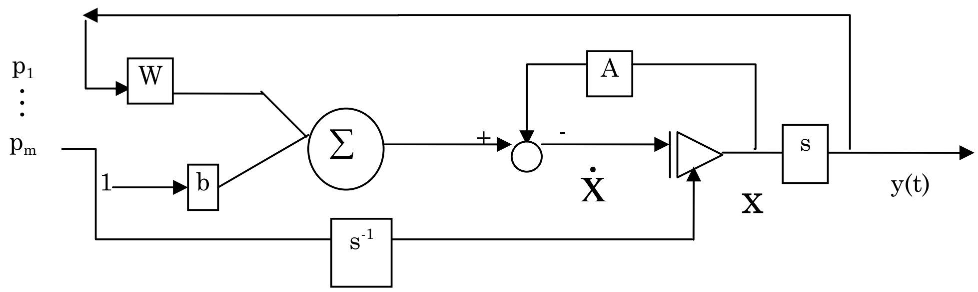
$$y = \varphi(Wx+b)$$

Phản hồi (feed back)

Sự phản hồi có mặt trong hệ thống bất kỳ khi nào đầu ra của một phần tử trong hệ thống có ảnh hưởng đến đầu vào của phần tử đó, tức là sẽ có một hay nhiều đường đi khép kín trong việc truyền tín hiệu. Với mô hình Hopfield xây dựng dựa trên hoạt động của một mạch điện bao gồm các bộ khuyếch đại, tụ điện, điện trở.



Hình 2. Mô hình Hopfield



Từ đó, ta xây dựng mô hình toán cho một trong số các mạng hồi quy với luồng tín hiệu phản hồi đơn vòng lặp không có nơron ẩn với biến thời gian liên tục như sau:

Với tín hiệu đầu vào $p = (p_1, p_2, \ldots pm)^T$; x là vectơ trạng thái thần kinh;

$A = diag[d_1, \ldots dm] > 0$ là tốc độ phân huỷ.

Khi đó có:

$x(0) = S^{-1}(p)$ hay $y(t) = S(x(t))$

$\dot{x} = -Ax + WS(x) + b$

3.2. Ổn định tuyệt đối

3.2.1. Điều kiện cần và đủ

__Định lý 3.2.1__. Cho mạng nơron (2). Giả sử Ws, Wss, (W = Ws+Wss) sinh ra một đại số Lie giải được thì hệ ổn định tuyệt đối khi và chỉ khi:

$$\max_{1\le i\le n} \mathrm{Re}\,\lambda_i(W) \le 0 \qquad (6)$$

__Hệ quả 3.2.2.__ (Forti & cs., 1994)

Mạng nơron (2.2.1) với ma trận đối xứng W là ổn định tuyệt đối khi và chỉ khi

$$\max_{1\le i\le n} \mathrm{Re}\,\lambda_i(W) \le 0$$

__Hệ quả 3.2.3__. (Chu-Zhang và Zhang, 2003). Mạng nơron (2.2.1) với ma trận trọng W chuẩn tắc là ổn định tuyệt đối khi và chỉ khi $\max_{1\le i\le n} \mathrm{Re}\,\lambda_i(W) \le 0$

Như vậy trong trường hợp ma trận không đối xứng luôn phân tích thành Ws và Wss nên một mạng nơron không đối xứng luôn được coi là mạng nơron đối xứng với phần nhiễu là phần đối xứng lệch trong dạng liên hệ của nó. Do đó, ta có một lớp các ma trận không đối xứng mà tính hội tụ mũ toàn cục của mạng nơron chỉ phụ thuộc vào phần đối xứng WS chỉ cần WS, WSS sinh ra một đại số Lie các ma trận giải được.

3.2.2. Đánh giá hội tụ mũ

__Định lý 3.2.4.__ Giả sử rằng điều kiện của định lý 3.2.1 được thoả mãn, $s \in S$ là hàm khả vi liên tục. Khi đó, với vô hướng tuỳ ý η >0, hệ (2.) có nghiệm thoả mãn đánh giá xấp xỉ mũ sau:

$$\|x(t) - x_e\| \le ke^{-\rho t}; t \ge 0$$

$\|x(0)\| \le \eta$; $\|\ \|$ là chuẩn Ơclit thông thường.

$xe=[xe_1, \ldots xen]^T$ là điểm cân bằng ổn định toàn cục của hệ.

$$\rho = \sigma.\delta$$

$$k = \frac{\gamma}{\sqrt{\sigma}}$$

$$\sigma = \frac{\min\{\alpha_1, 1 \le 1 \le \ \}}{\max\{\beta_1, 1 \le 1 \le \ \}}$$

$$\delta = \min\{d_1, 1 \le i \le n\} > 0$$

$$\gamma = \|x_e\| + \eta + \frac{c\|W\| + \|u\|}{\delta}$$

$$c = \max\{\|S(x)\|, x \in R_n\} > 0$$

$$\alpha_i = \min\{s'_i(r + x_{e_i}), |r| \le \gamma\} > 0$$

$$\beta_i = \max\{s'_i(r + x_{ei}), |r| \le \gamma\} > 0$$

3.2.3. Cách thức kiểm tra điều kiện giải được

Một thủ tục kiểm tra bằng số cho điều kiện của hệ (2) được dựa trên nhận xét 2.4.2 cho kết quả sau:

Thứ nhất: Chú ý rằng trong định nghĩa đại số Lie ma trận giải được L(Ws, Wss) là một không gian vectơ hữu hạn chiều (số chiều $\leq n^2$). Mỗi đệ quy của tập $L^{(i)}$ trong định nghĩa 2.3.1 là một tập con của L. Nên mỗi $L^{(i)}$ có một cơ sở hữu hạn.

Thứ hai: Hoán tử $[A| B]$ $\forall$ A, B $L^{(i)}$, ($i \geq 0$) có thể viết dưới dạng một tổ hợp tuyến tính của tích các cơ sở hữu hạn của $L^{(i)}$

Để làm sáng tỏ điều này, một thủ tục sau đây sẽ kiểm tra điều kiện giải được (3).

Bước 1: Tìm một cơ sở hữu hạn của $L^{(0)}$ = L (Ws, Wss).

Từ Ws, Wss là độc lập tuyến tính với mọi $W \neq 0$, nên có thể tìm cơ sở như sau:

a. Tính toán hàm hoán tử [Ws| Wss] nếu nó độc lập tuyến tính với Ws, Wss thì thêm nó vào tập các ma trận độc lập tuyến tính {Ws, Wss } nếu không thì {Ws, Wss } tạo thành cơ sở của $L^{(0)}$.

b. Tìm các hoán tử có thể có với tập ma trận thu được từ (a) và thêm hoán tử độc lập mới vào tập hợp đó mà vẫn độc lập tuyến tính.

c. Lặp lại (b) không nhiều hơn n^2 lần với tập ma trận mới thành lập tạo nên cơ sở của $L^{(0)}$.

Bước 2: Với $i \geq 1$, tìm cơ sở hữu hạn của $L^{(i)}$ bằng cách tính toán các hoán tử của một số hữu hạn cơ sở của $L^{(i-1)}$. Nếu với $i \leq n$ nào đó, cơ sở là rỗng thì $L^{(0)}$ là giải được, còn nếu cơ sở khác rỗng với i = n thì $L^{(0)}$ là không giải được.

Ta thấy rằng, nếu với những ma trận cấp 3 ta phải kiểm tra tính độc lập tuyến tính của k ma trận cấp 3 tương đương với việc tính hạng của ma trận các hệ số của hệ cỡ 9 x k, sau mỗi bước tìm cơ sở thì có C_k^2 Ck_2 ma trận nên việc tính toán hết sức phức tạp.

Rộng hơn, đối với không gian ma trận cấp 4 có số chiều tối đa là 16, nếu trong $L^{(0)}$ có 15 vectơ thì phải tính C_{15}^2 = 105 hoán tử, do đó phải tính được hạng của 1 ma trận cỡ 16 x 105 mà điều này thì khó có thể thực hiện bằng tay. Do đó nghiên cứu sử dụng một ứng dụng phần mềm Microsoft Excel kiểm tra điều kiện đại số Lie ma trận là giải được, người sử dụng chỉ cần nhập giá trị cho ma trận với các số bất kỳ và cấp tuỳ ý. Tuy nhiên, do các phép nhân ma trận làm cho các phần tử của ma trận tăng theo cấp số nhân nên chỉ sau một vài bước có thể gặp những ma trận mà phần tử của nó khá lớn, khó khăn cho việc quan sát trên màn hình Excel nên tác giả dừng ở ma trận cấp 6.

Ứng dụng đưa ra có hai chức năng:

a) Kiểm tra điều kiện đại số Lie giải được của nhóm Lie sinh bởi 2 ma trận A, B bất kỳ.

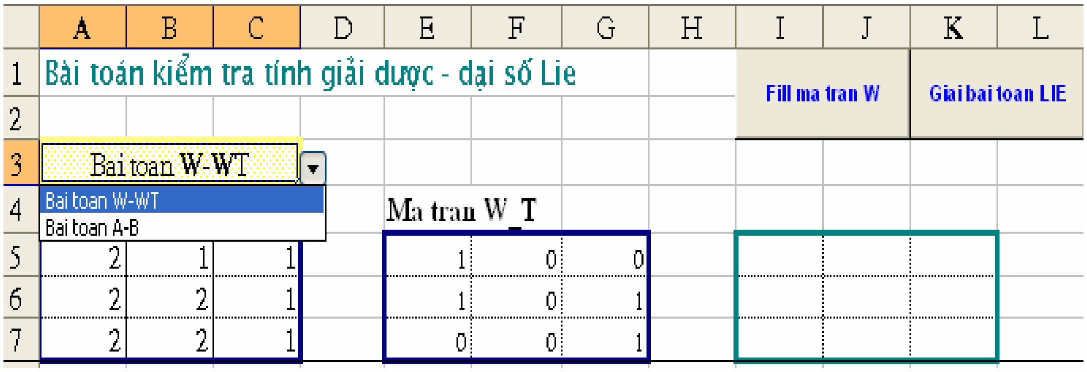
b) Kiểm tra điều kiện đại số Lie giải được của nhóm Lie L = L(Ws, Wss) được đề cập đến trong nghiên cứu.

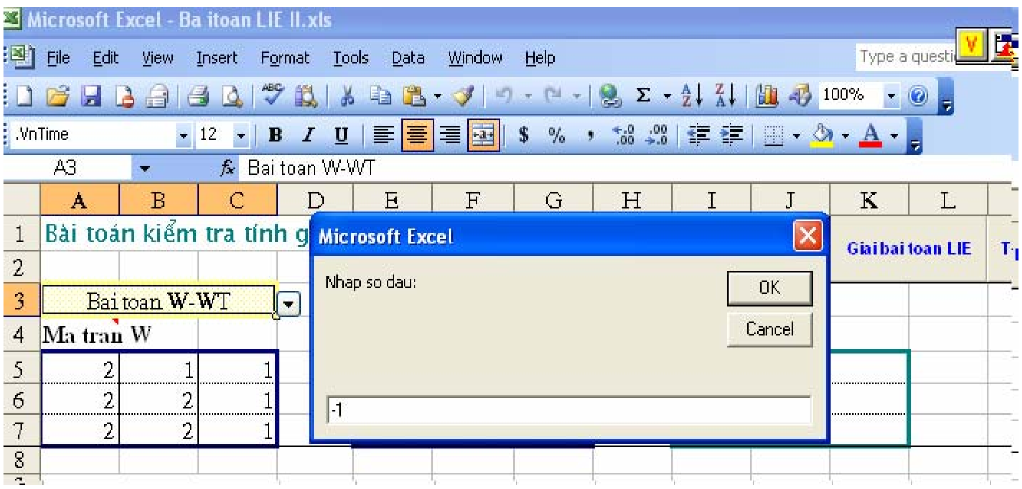
Chương trình cũng cho phép nhập số cho ma trận một cách ngẫu nhiên hoặc tự nhập bằng tay với 4 nút chức năng: Fill ma trận, Giải bài toán Lie, Thêm 1 cột 1 hàng và Bớt 1 cột 1 hàng.

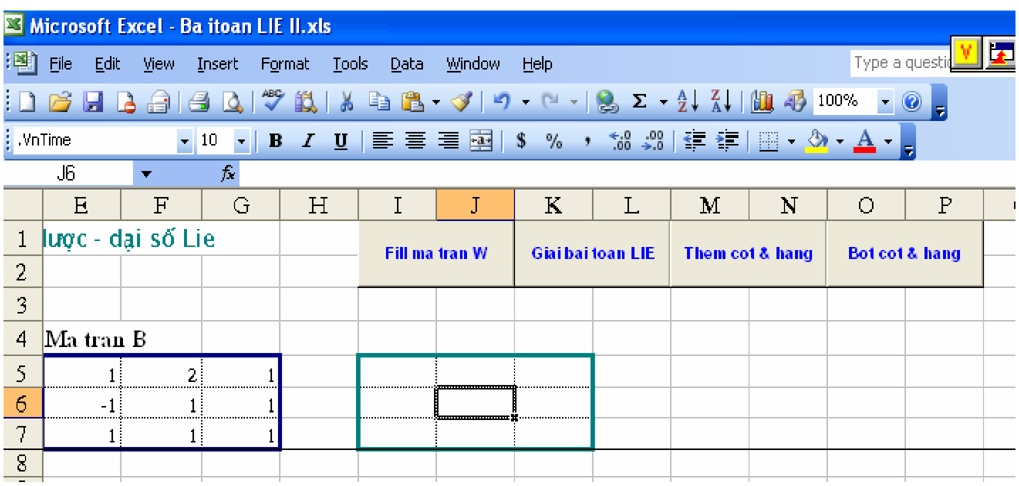
Sau khi nhập ma trận cho ta kết quả hoặc là L = L(Ws, Wss) là đại số Lie ứng với ma trận W là giải được hoặc không giải được.

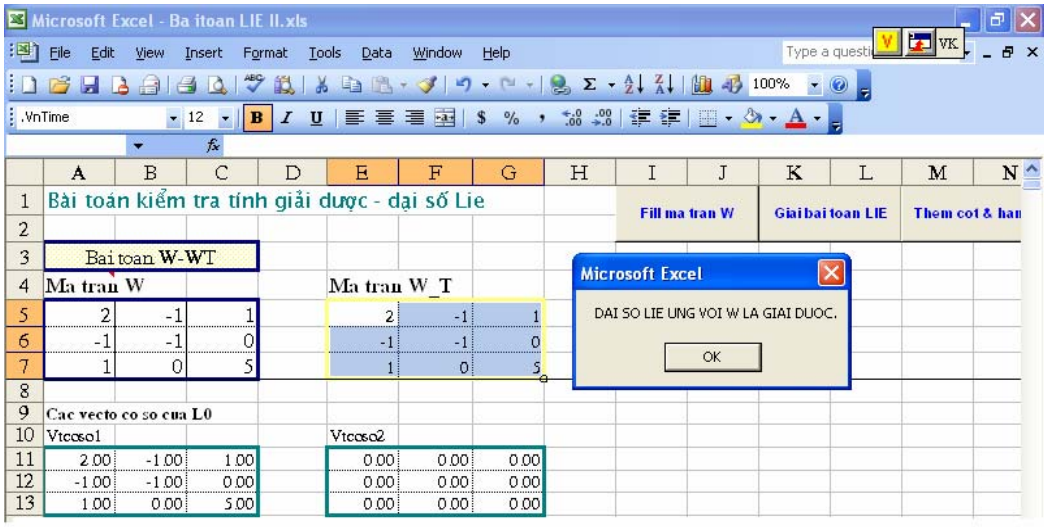
Với $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ thì L = L(Ws, Wss) là đại số Lie không giải được.

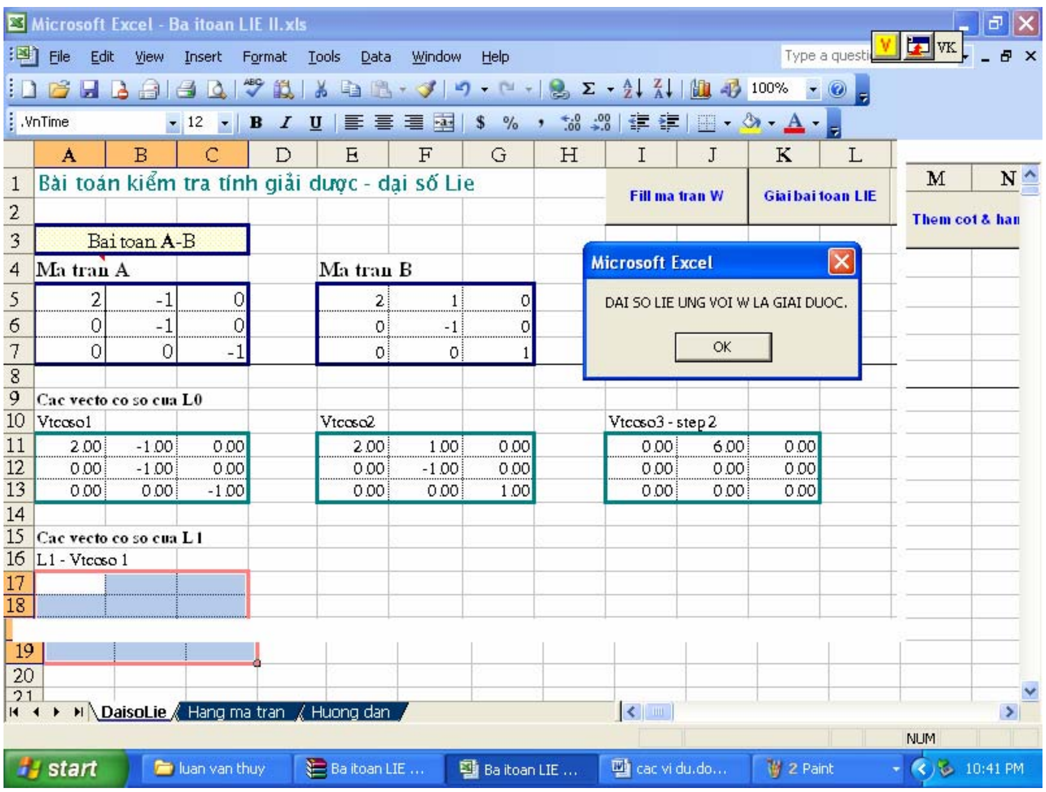
Thông qua ứng dụng bạn có thể theo dõi việc tìm các vectơ cơ sở của $L^{(0)}$ được thông qua bao nhiêu bước và các vectơ cơ sở sau được sinh ra từ những vectơ cơ sở của không gian trước nó như thế nào.


Bài toán kiểm tra tính giải được - đại số Lie
Fill ma tran W
Giai bai toan LIE
Bai toan W-WT
Bai toan W-WT
Bai toan A-B
Ma tran W_T


Microsoft Excel - Ba itoan LIE II.xls
File Edit View Insert Format Tools Data Window Help
A3
Bai toan W-WT
Bài toán kiểm tra tính g
Microsoft Excel
Nhap so dau:
OK
Cancel
-1
Giai bai toan LIE
Bai toan W-WT
Ma tran W


Microsoft Excel - Ba itoan LIE II.xls
File Edit View Insert Format Tools Data Window Help
J6
lược - đại số Lie
Fill ma tran W
Giai bai toan LIE
Them cot & hang
Bot cot & hang
Ma tran B





4. KẾT LUẬN VÀ ĐỀ NGHỊ

Trong khuôn khổ của một bài báo, dưới góc độ của người làm toán, chúng tôi đã xây dựng được mô hình toán học của mạng nơron nhân tạo, cụ thể hóa mô hình Holpfield ứng dụng trong mạng điện dẫn đến phương trình vi phân nghiên cứu và đã chứng minh các điều kiện cần và đủ mới của mạng nơron dựa trên điều kiện đại số Lie giải được mà các kết quả đã công bố trước đó. Một kết quả nữa là đã xây dựng được ứng dụng phần mềm của Excel để kiểm tra điều kiện đại số Lie ma trận giải được. Tuy nhiên, ứng dụng vẫn còn một số hạn chế như thời gian xử lý với ma trận cấp lớn (n>5) còn khá lâu. Tác giả sẽ cố gắng tiếp tục nghiên cứu trong mô hình mở rộng mạng nơron có trễ: $\dot{x} = -Dx+Ws(x(t-\tau)) +u$ về tính ổn định tuyệt đối dựa trên điều kiện đại số Lie giải được.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tianguang Chu, Cishen Zhang (2007). New necessary and sufficient condition for absolute stability of neural networks, Neural networks 20 94-101.

Chu, T..Zhang, C..Zhang, Z. (2003). Necessary and sufficient conditions for absolute stability of normal neural networks, Neural networks 16 1223-1227.

Mauro Forti, Stefano Manetti and Mauro Mariti (1994). Necessary and sufficient conditions for absolute stability of neural networks, IEEE Transactions on Circuits ans Systems1, Volume 41 , 491-494.

Mark Joy (1999). On the Global Congvergence of Class of Functinal Differential Equations with Applications in Neural Network Theory; *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Volume 232, 61-81.

Sagle, A, A.. and Walde, R. E (1973). Introduction to Lie groups and Lie algebras, Newyork; Academic Press.

Võ Phúc Anh Duy (2006). Mạng nơron nhân tạo và ứng dụng trong nhận dạng chữ viết, Luận văn thạc sĩ Khoa Công nghệ Thông tin - Trường Đại học Sư phạm Hà Nội.

Nguyễn Xuân Hoài (2005). Học viện Kỹ thuật Quân sự, Neural Networks - Nhập môn.